

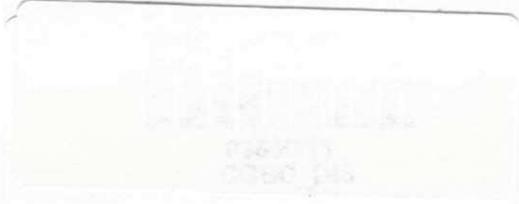
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ANÁLISE DE SISTEMAS QUÂNTICOS COM
MASSA VARIANDO COM A POSIÇÃO NUMA
TOPOLOGIA NÃO PLANA

JOSÉ JACINTO CRUZ DE SOUZA

CAMPINA GRANDE - PB
2011



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA



ANÁLISE DE SISTEMAS QUÂNTICOS COM MASSA VARIANDO COM A POSIÇÃO NUMA TOPOLOGIA NÃO PLANA

Dissertação realizada sob orientação da Prof^a.
Dr^a. Geusa de Araújo Marques, apresentada
à Coordenação do Programa de Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal de Campina
Grande, em complementação aos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Física.

JOSÉ JACINTO CRUZ DE SOUZA



S729a

Souza, Jose Jacinto Cruz de

Analise de sistemas quanticos com massa variando com a posicao numa topologia nao plana / Jose Jacinto Cruz de Souza. - Campina Grande, 2011.

76 f. : il.

Dissertacao (Mestrado em Fisica) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciencias e Tecnologia.

1. Defeitos Topologicos 2. Geometria 3. Curvatura 4. Campo Magnetico 5. Dissertacao I. Marques, Geusa de Araujo, Dra. II. Universidade Federal de Campina Grande - Campina Grande (PB) III. Título

CDU 530.145(043)

ANÁLISE DE SISTEMAS QUÂNTICOS COM MASSA VARIANDO COM A POSIÇÃO NUMA TOPOLOGIA NÃO PLANA

JOSÉ JACINTO CRUZ DE SOUZA

Aprovada em 18 de Abril de 2011

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Geusa de Araújo Marques
Orientadora

Prof. Dr. Cleverson Filgueiras
Examinador - Interno

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva
Examinador - Externo

ANÁLISE DE SISTEMAS QUÂNTICOS COM
MASSA VARIANDO COM A POSIÇÃO NUMA
TOPOLOGIA NÃO PLANA

*Aos meus Pais e meu Tio Jailson.
À minha esposa Ana Kely, DEDICO.*

AGRADECIMENTOS

- Agradeço primeiramente a Deus, criador de todas as coisas do Universo, por me proporcionar sabedoria e o Dom da vida.

- Gostaria de deixar registrado neste trabalho o meu amplo agradecimento às pessoas que, de alguma forma, contribuíram para minha formação profissional e pessoal. Pessoas essas que já faziam ou passaram a fazer parte de minha história e que terão minha humilde e eterna gratidão.

- Agradeço aos meus Pais pela confiança e apoio, diante das minhas limitações. Ao meu tio Jailson pela sua consideração e disposição, durante toda minha vida. Em especial a minha esposa querida e dedicada Ana Kely, estando presente em muitos momentos da minha vida proporcionando compreensão e consolo. Pra sempre te amarei. À família Albuquerque por nossos momentos de confraternização.

- Agradeço à minha orientadora de mestrado Geusa Marques não apenas pela orientação neste trabalho, mas também por sua amizade e perseverança durante os vários ensinamentos que me foram repassados no ramo da Física. Agradeço ao Prof. Dr. Jean Spinelly por sua boa vontade como professor, fato este que torna acessível a todos seus alunos uma grande fonte de conhecimento, o que, dentre outros motivos, o fazem ser um exemplo de profissional a ser seguido. Agradeço-lhe também pela valiosa amizade, fato este que muito contribuiu positivamente durante minha graduação, reflexo de muita importância para minha formação inicial.

- Aos Professores e Pesquisadores da Pós-Graduação em Física da UFCG, em especial, Cleverson Filgueiras, Diego Alejandro, Francisco Brito, Fábio Dahia, Lincoln Rodrigues e Rômulo Rodrigues, pelas suas contribuições acadêmicas que preencheram boa parte das lacunas conceituais, comuns na carreira de um físico em formação. Agradeço também às amizades dos meus amigos do mestrado, Alex Albuquerque, Aubery Vital, Antonildo Santos, Celso Augusto, Emanuel Cunha, Emílio, Fábio Alves, José Arimateia, José Wagner, Jardel Lucena, Kelder Cavalcanti, Nickson Ralf, Neymar, Renato Braga, Waldson Marcelo e Wellington Romero. Um agradecimento especial a um amigo que superou todas as dificuldades da vida, além de me proporcionar grandes alegrias e companherismo durante toda a graduação até o mestrado, Rick Allen.

- À CAPES pelo suporte financeiro e incentivo à pesquisa.

RESUMO

O estudo de sistemas quânticos no espaço com diversas topologias tem sido abordado em diferentes áreas da física como, por exemplo, a gravitação e a física da matéria condensada. A mudança na topologia em um meio elástico introduzido por um defeito linear tal como uma desclinação, deslocação ou despiração produz alguns efeitos nas propriedades físicas do meio. A influência desses defeitos nas quantidades físicas de uma partícula podem ser compreendidas através de uma abordagem geométrica que está baseada na correspondência, do ponto de vista matemático, entre a teoria de defeitos em sólidos e a teoria da gravitação. Neste trabalho estudaremos o comportamento de uma partícula num sistema quântico com massa variável [$m(\rho) = M(1 + \mu\lambda^2\rho^2)$] na presença de uma despiração num campo magnético uniforme no cenário da teoria de defeitos em sólidos de Katanaev-Volovich. Analisando a influência da topologia e da distribuição de massa nos níveis de Landau, bem como, sua influência no espalhamento quântico não-relativístico.

Palavras-Chave: Defeitos Topológicos, Geometria, Curvatura, Campo Magnético.

ABSTRACT

The study of quantum systems in the space with several topologies has been investigated in different areas of the physics as, for example, in the gravitation and in the condensed matter physics. The change in the topology in an elastic medium introduced by a linear defect as a disclination, dislocation or dispiration produces some effects in the physical properties of the system. The influence of those defects in the physical quantities can be understood through a geometric approach that is based on the correspondence, of the mathematical point of view, between the theory of defects in solids and the theory of the gravitation. In this work we will study the behavior of a particle in a quantum system with variable mass $[m(\rho) = M(1 + \mu\lambda^2\rho^2)]$ in the presence of a dispiration in an uniform magnetic field in the scenery of the theory of defects in solids of Katanaev-Volovich. We analyze the influence of the topology and of the mass distribution in the Landau levels, as well as, it influences in the quantum non-relativistic quantum scattering.

Keywords: Topological Defects, Geometry, Curvature, Magnetic Field.

Sumário

Introdução	1
1 A Geometria do Espaço Curvo	5
1.1 Geometria não-Euclidiana	5
1.2 Geometria e Cosmologia	12
1.3 Topologia	17
2 Defeitos em Matéria Condensada	21
2.1 Teoria Geométrica de Defeitos	22
2.2 Defeitos em Sólidos	26
2.2.1 Deslocação	30
2.2.2 Desclinações	33
2.2.3 Despiração	36
3 Mecânica Quântica	39
3.1 Equação de Schrödinger	40
3.2 Espalhamento	43
3.2.1 Teoria Clássica de Espalhamento	43
3.2.2 Teoria Quântica de Espalhamento: Formalismo de Ondas Espaciais . .	45
4 Sistemas Quânticos com Massa Variando com a Posição	50

4.1 Níveis de Landau na Presença de uma Despiração com Massa Variando na Posição	50
4.2 Espalhamento Quântico não-relativístico por uma Despiração com Massa Variável	57
Conclusões e Perspectivas	63
A Funções Especiais	65
A.1 Funções Hipergeométricas Confluentes	65
A.2 Funções de Bessel	66
B Amplitude de Espalhamento	68
B.1 Cálculo da amplitude de espalhamento $f(\varphi)$	68
Referências Bibliográficas	71

Lista de Figuras

1.1	Representação gráfica do postuldo das paralelas.	6
1.2	Representação gráfica de alguns tipos de geometria do espaço. Fonte: http://www.physics.upenn.edu/kamien/kamiengroup/	8
1.3	Triângulo geodésico na esfera. A geodésicas entre dois pontos na esfera são os arcos de grande círculo. Fonte: http://en.wikipedia.org/wiki/Differential_geometry_of_surfaces	9
1.4	Representação geométrica da distância entre dois pontos em três dimensões. Fonte: http://www.on.br/certificados/ens_dist_2008/site/	11
1.5	Representações geométricas da superfície esférica e hiperbolóide. Fonte: http://www.on.br/certificados/ens_dist_2008/site/	13
1.6	Geometria do Universo plano.	15
1.7	Geometria do Universo fechado.	15
1.8	Geometria do Universo aberto.	16
1.9	Faixa de Möbius. Fonte: Referência[42]	18
1.10	Faixa de Möbius - Orientabilidade. Fonte: Referência[42]	19
1.11	Exemplo de espaços conexo e desconexo. Fonte: Referência[42]	20
2.1	Construção do espaço-tempo em torno de uma corda cósmica. Fonte: http://www.damtp.cam.ac.uk/research/gr/public	24

2.2	Duplicação de imagem (lente gravitacional) produzida por uma corda cósmica (círculo com cruz) de uma galáxia ou quásar de fundo. As duas imagens aparecerão separadas por um ângulo pequeno $\delta\alpha$ para o observador. Fonte: Referência[8].	24
2.3	(a) Imperfeições pontuais num sólido cristalino. (b) Imperfeições pontuais num sólido cristalino iônico. Uma representação bidimensional de um sólido iônico, ilustrando várias das possíveis imperfeições pontuais. Os cátions são representados por pequenas esferas, e os ânions por grandes esferas. Fonte: http://www.cienciadosmateriais.org/	27
2.4	Foto da textura Schlieren em um cristal líquido liotrópicos, com aumento de 50x pela objetiva, obtida no laboratório de cristal líquido da UEM.	28
2.5	Imperfeições superficiais. Os contornos de grãos são indicados por linhas, deslocações por \perp , deslocações estendidas por $\perp\text{-----}\perp$ e lacunas por um quadrado. Fonte: Referência[55].	29
2.6	Deslocamento, visto de cima, de dois planos atômicos num arranjo cúbico simples. Fonte: http://www.cienciadosmateriais.org/	30
2.7	(a) Deslocação tipo edge. (b) Deslocação tipo hélice em uma rede quadrada. Fonte: Referência[50].	31
2.8	(a) Circuito de Burgers sem deslocação. (b) O vetor de Burgers b na presença de deslocação linear SE . Fonte: Referência[50].	31
2.9	(a) Deslocação lateral. (b) Deslocação tipo hélice através do processo de Volterra. Fonte: Referência[45].	32
2.10	Etapas da geração de uma desclinação positiva através do processo de Volterra.	34
2.11	(a) Criação de uma desclinação positiva. Retiando um ângulo de 90° . (b) Desclinação negativa em uma rede quadrada. Inserimos um ângulo de 90° . Fonte: Referência[50].	34

2.12	Processo de Volterra para desclinação tipo cunha e hélice. Fonte: Referência[50]	35
2.13	(a) Deslocamento tipo hélice bidimensional. (b) Desclinação bidimensional. Fonte: Referência[9].	37
3.1	Parâmetro de impacto b e ângulo de dispersão θ . Representação da trajetória da partícula espalhada por um núcleo puntiforme de massa infinita. Fonte: Referência[61].	44
3.2	Partículas incidentes numa área $d\sigma$ espalhada num ângulo sólido $d\Omega$. Fonte: Referência[61].	44
3.3	Espalhamento de ondas; uma onda plana incidente gera uma onda esférica saindo. Fonte: Referência[61].	45
4.1	Confinamento do campo magnético numa região cilíndrica.	58

Introdução

O esfriamento do Universo, devido à expansão, promoveu as condições para que algumas das simetrias de um possível campo escalar existente se quebrassem espontaneamente[1, 2]. A cada tipo de simetria que é quebrada, dependendo da natureza desse campo, existe um tipo de defeito associado a mesma, segundo o mecanismo de Kibble[3]. No contexto cosmológico, temos que o Universo primitivo passou por uma série de transições de fase, onde as simetrias a ele associadas foram espontaneamente quebradas devido ao seu esfriamento natural, surgindo, assim, os defeitos topológicos. Defeitos topológicos são estruturas físicas formadas em uma teoria de campos a partir de uma quebra espontânea de simetria de Gauge de um sistema físico que apresenta um conjunto de estados de vácuo degenerados[4]. De acordo com os tipos de simetrias que foram quebradas podem ter sido formado vários tipos de defeitos topológicos, entre os quais podemos citar as paredes de domínio, cordas cósmicas, monopolos e texturas. Estes objetos têm atraído muita atenção devido as suas propriedades físicas peculiares, geometrias do espaço-tempo e implicações astrofísicas e cosmológicas[5]-[7]. A densidade de energia que carregam é muito grande, e está relacionada com a escala na qual a simetria que lhes deu origem foi quebrada[8].

Devido às suas energias extremamente altas, defeitos topológicos no contexto da cosmologia ainda não foram detectados, apesar dos grandes avanços dos aceleradores de partículas. Por outro lado, esta é uma das razões pelas quais alguns pesquisadores tem interesse. Se forem encontrados hoje, eles serão uma ligação direta com a física dos primeiros momentos do Universo.

No entanto, os defeitos não são exclusivos em cosmologia. A Física da Matéria Condensada possui uma diversidade de sistemas e fenômenos acessíveis à experimentos que podem ser usados como um laboratório para testar hipóteses da teoria da gravitação e cosmologia[9]. Por exemplo, os cristais líquidos podem apresentar uma série de defeitos topológicos, tais como cordas cósmicas e monopolos[10, 11]. Em diversos sistemas físicos, a quebra de simetria devido à transição para uma fase ordenada, permite a existência de defeitos topológicos estáveis que tem um papel dominante na determinação de suas propriedades físicas. A existência desses defeitos é uma consequência da periodicidade e rigidez do meio ordenado e são os responsáveis pelo mecanismo que produz a transição de fase.

Em matéria condensada podemos observar esses fenômenos via geometrização fazendo analogia com a gravitação[12]-[16]. Por esse motivo, o uso de ferramentas geométricas e topológicas na Física teórica tem aumentado bastante nas últimas décadas[12]-[18]. Geometria e topologia têm um papel importante no estudo de uma grande variedade de fenômenos. Talvez em nenhuma área da Física seu uso seja tão visível quanto na gravitação, onde o próprio campo gravitacional é uma entidade geométrica.

A teoria descrita por Katanev e Volovich proporcionou um melhor entendimento das relações que existem entre a teoria dos defeitos e a gravitação. Esta abordagem geométrica baseia-se na equivalência que existe entre a teoria de defeitos em sólidos e a gravidade tridimensional com torção[12]. Efeitos quânticos e clássicos aparecem devido às condições de contorno especiais que os defeitos impõem sobre estes sistemas. Várias destas técnicas de geometrização podem ser empregadas a uma classe de sistemas da Física da Matéria Condensada. Associados à desordem e à quebra de simetria aparecem os defeitos topológicos que, em muitos casos, podem ser abordados por métodos geométricos.

De forma qualitativa, os defeitos podem ser compreendidos, na sua formação, através dos argumentos de Volterra em seu processo de “cortar e colar”. Tais defeitos são classificados quanto a sua dimensão, sendo esses pontuais, lineares ou superficiais. Muitos

sistemas apresentam estrutura cristalina semelhante aos defeitos topológicos encontrados em gravitação. Em redes atômicas cristalinas, por exemplo, defeitos topológicos na forma de deslocamentos (defeitos lineares), determinam a maioria das propriedades plásticas dos sólidos, tanto no aspecto dinâmico quanto estático. Os estudos de formação dos defeitos topológicos em matéria condensada, podem eventualmente ajudar na fabricação de estruturas e dispositivos. Em vista das possíveis aplicações dessas estruturas em nanotecnologia, é fundamental o aprofundamento do conhecimento nessa área.

Entretanto, existem pesquisas mais recentes que abordam defeitos lineares e pontuais em sistemas com massa variando com a posição[19]-[23]. Estudar o comportamento do átomo em um espaço com topologia tipo não plana é importante para sabermos como este tipo de topologia poderá afetar as grandezas físicas que descrevem este sistema microscópico. Do ponto de vista dos sólidos, o estudo do comportamento de sistemas atômicos com massa dependente da posição pode ser importante para uma compreensão das propriedades de transporte em sólidos, como por exemplo, o transporte de cargas, propagação de ondas sonoras, etc.

A solução da equação de Schrödinger com massa variando com a posição tem recebido bastante atenção em trabalhos encontrados na literatura nos últimos anos[24]-[33]. A motivação para este estudo tem sido as consideráveis aplicações em diferentes ramos da Ciência de Materiais e Física da Matéria Condensada. Dentre as aplicações, podemos mencionar estados ligados em sistemas quânticos[27], a equação de Dirac com massa dependente da posição no campo de Coulomb[19], propriedades eletrônicas de semicondutores[34], aglomerados de 3He [29], heteroestruturas de semicondutores[30, 31], líquidos quânticos[32] e problemas em estados sólidos com equação de Dirac[33].

O nosso objetivo nesta dissertação foi destinado a analisar a influência da topologia em um sistema quântico com massa variando com a posição [$m(\rho) = M(1 + \mu\lambda^2\rho^2)$] na presença de uma despiração num campo magnético uniforme, sob o ponto de vista da teoria

geométrica dos defeitos em sólidos de Katanaev e Volovich[12]. Para tanto, estudamos o problema do espalhamento quântico não-relativístico, bem como os estados ligados de uma partícula massiva, produzido pelo espaço-tempo de uma despiração. Por sua vez, a despiração corresponde a um defeito linear cuja simetria rotacional e translacional é quebrada. Com a configuração da massa efetiva proposta neste trabalho, observamos que, dependendo como a massa esteja distribuída e o tipo de defeito associado, a degenerescência do níveis de Landau é quebrada de maneiras diferentes. Já a amplitude de espalhamento será afetada pela blindagem, topologia e pelo fato da massa variar com a posição.

A estrutura desta dissertação está organizada da seguinte forma: No primeiro capítulo, faremos uma breve discussão sobre a geometria do espaço curvo e sua relação com a cosmologia. No segundo capítulo, apresentaremos a teoria geométrica dos defeitos em sólidos proposta por Katanaev e Volovich. Além disso, faremos uma descrição sobre os defeitos topológicos lineares em matéria condensada, especificamente deslocação e desclinação. No terceiro capítulo faremos uma breve revisão sobre a mecânica quântica não-relativística e sua generalização para o espaço-tempo curvo. No quarto capítulo, analisaremos os efeitos do espaço-tempo gerado por uma despiração, com um campo magnético uniforme axial interior, em um sistema quântico com massa variável. No apêndice apresentamos algumas funções especiais utilizadas neste trabalho, tais como, a função hipergeométrica confluyente e a função de Bessel. Também daremos em mais detalhes dos cálculos referente a amplitude de espalhamento no espaço com despiração.

Capítulo 1

A Geometria do Espaço Curvo

A Geometria Euclidiana funciona muito bem em superfícies planas e como sabemos a soma dos ângulos internos de um triângulo dá sempre o valor de 180° . Porém, quando traçamos o triângulo sobre uma superfície curva isso já não é mais verdade. Então, como podemos definir situações geométricas sobre uma superfície curva? Certamente a geometria Euclidiana não é satisfatória. Foi preciso, então, estabelecer uma nova geometria que pudesse resolver essa questão e entre outras. Para desenvolver uma geometria de espaço curvo foi necessária a colaboração de pesquisadores que marcaram a história da matemática. Entre esses nomes estavam Gauss, Bolyai, Lobatchewsky e Riemann[35]. Na relatividade restrita, como salientado por Minkowski[36], o tempo passava a ser concebido como uma quarta dimensão, o que foi absolutamente fundamental e necessário para a construção da teoria da relatividade geral. Na relatividade geral a gravitação entre os corpos deixa de ser vista como uma força física para ser considerada uma propriedade geométrica do espaço-tempo. Neste capítulo fazemos uma abordagem sobre a necessidade de descrever o espaço-tempo por meio da geometria.

1.1 Geometria não-Euclidiana

A geometria é a parte da matemática que trata de curvas, superfícies e volumes. Foram os filósofos gregos os primeiros a sistematizarem e ampliarem o conhecimento da geometria.

Euclides por volta de 300 a.C., desenvolveu os conceitos e as relações existentes na Geometria Euclidiana com base em cinco proposições primitivas, conhecidas como axiomas ou postulados.

Os postulados de Euclides são:

Axioma I: Dados dois pontos, há um segmento de reta que os une;

Axioma II: Qualquer segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para gerar uma reta;

Axioma III: Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se construir um círculo centrado naquele ponto e com raio igual à distância dada;

Axioma IV: Todos os ângulos retos são congruentes;

Axioma V: Se uma linha reta cortar duas outras linhas retas de modo que a soma dos dois ângulos internos de um mesmo lado seja menor do que dois ângulos retos, então essas duas retas, quando suficientemente prolongadas, cruzam-se num ponto do mesmo lado em que estão os dois ângulos retos.

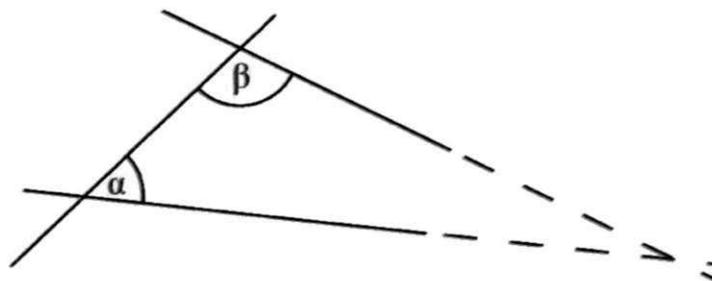


Figura 1.1: Representação gráfica do postulado das paralelas.

O quinto postulado é também conhecido como *Postulados das Paralelas*. Essencialmente, a distinção entre a geometria de Euclides e as geometrias não-Euclidianas está no quinto postulado. Na geometria de Euclides todas as superfícies são planas e linhas paralelas sempre ficam separadas pela mesma distância, nunca se encontrando e nem divergindo. As Geometrias

não-Euclidianas cresceram a partir da investigação sobre o quinto postulado de Euclides, um dos axiomas mais estudados em toda a história da matemática.

Foi somente na primeira metade do século dezanove que os matemáticos chegaram à conclusão de que o quinto postulado não era demonstrável a partir dos outros quatro. Isto ocorreu com a descoberta das chamadas Geometrias não-Euclidianas. Esta descoberta está associada a dois matemáticos: Nikolai I. Lobatchewsky (1793-1829) e Johann Bolyai (1802-1860), que estabeleceram a possibilidade de se estruturar Geometrias diferentes à de Euclides e a aplicação das mesmas a realidade Física[37]. Supondo-se que a luz caminha em linha reta, seria possível determinar o tipo de geometria do nosso espaço interestelar, através de medidas astronômicas[35].

Há um outro desenvolvimento na geometria que ocorre paralelamente ao surgimento desses trabalhos, que estuda superfícies curvas, e que não está tentando alterar a Geometria Euclidiana. Dentro dessa linha de pesquisa, o trabalho de Gauss de Geometria diferencial,¹ em 1827, mostra a possibilidade de analisar superfícies usando propriedades intrínsecas.

Gauss definiu uma noção de curvatura para superfícies, que mede o quanto uma superfície \mathcal{S} ($\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$) se afasta, em cada ponto $p \in \mathcal{S}$, do seu plano tangente em p [38]. A curvatura gaussiana ou curvatura de Gauss de um ponto sobre uma superfície é o produto das curvaturas principais, k_1 e k_2 , do ponto dado. É uma medida *intrínseca* de curvatura, ou seja, seu valor depende apenas de como as distâncias são medidas na superfície, e não sobre a forma como é isometricamente incorporado no espaço.

$$K_S = k_1 k_2 \tag{1.1-1}$$

Ao contrário de curvatura de Gauss, a curvatura média é *extrínseca* e localmente descreve a curvatura de uma superfície incorporada em algum ambiente do espaço, por exemplo o espaço Euclidiano. Neste caso, a curvatura média depende como está imerso no espaço. A

¹A importância da Geometria diferencial para a física teórica moderna reside na possibilidade de realizar o estudo das propriedades comuns a todos esses espaços. Isso poderia permitir encontrar estruturas básicas semelhantes em áreas muito distintas da física.

curvatura média é igual à metade da soma das curvaturas principais, definida da seguinte forma

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (1.1-2)$$

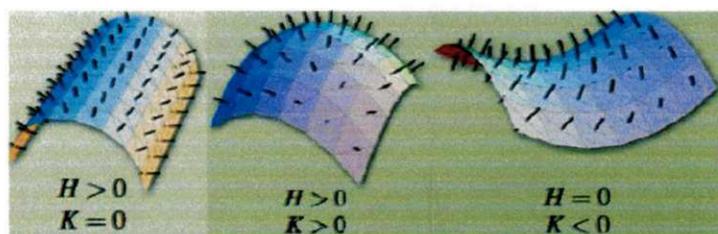


Figura 1.2: Representação gráfica de alguns tipos de geometria do espaço. Fonte: <http://www.physics.upenn.edu/kamien/kamiengroup/>.

Talvez convenha mencionar que Euler definia as curvaturas principais k_1 e k_2 de uma superfície S considerando as curvaturas k_n de curvaturas obtidas por interseções de S com planos normais a S em p e tomando $k_1 = \max k_n$ e $k_2 = \min k_n$ [38]. A curvatura de um círculo é definido como sendo o inverso do raio, ou seja, $k = \frac{1}{r}$. Se pelo menos uma das curvaturas principais é zero em todos os pontos, então a curvatura de Gauss será 0 e a superfície é uma superfície revelável. A esfera unitária em S^3 tem curvatura gaussiana constante igual a 1. O plano Euclidiano e o cilindro ambos têm curvatura Gaussiana constante igual a 0.

O segundo período no desenvolvimento das Geometrias Euclidiana e não-Euclidiana foi caracterizado pelas investigações do ponto de vista da Geometria diferencial realizado pelo matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), quando desenvolveu a teoria geral das variedades², em 1854, legitimando, de uma maneira muito clara, não só os vários tipos de Geometrias não-Euclidianas, mas também as chamadas Geometrias Riemannianas. A Geometria Riemanniana é uma geometria não-Euclidiana de espaços de curvatura constante positiva[16].

²Objetos geométricos com múltiplas dimensões.

A relação entre essa nova geometria e o quinto postulado demorou a acontecer, pois a Geometria diferencial apresentava uma outra forma de estudar o espaço. Com o trabalho de Riemann, a métrica e a curvatura do espaço passaram a ser a principal maneira de descrever o espaço n -dimensional, e a geometria de Euclides era o limite para o caso tridimensional.

A propriedade essencial desse espaço tridimensional é que seu volume é finito de modo que se um ponto se move sobre na mesma direção ele pode certamente retornar ao ponto de partida. Como vemos na figura abaixo, em vez das linhas retas da geometria Euclidiana, na Geometria esférica Riemanniana temos geodésicas. As geodésicas, na Geometria não-Euclidiana, tomam o lugar das retas da Geometria de Euclides. Portanto, quando falamos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é diferente de 180° estamos nos referindo a um triângulo geodésico. A geodésica é uma generalização do conceito de menor distância entre dois pontos para espaços não Euclidianos[39]. Deste modo, Riemann foi o primeiro a indicar a possibilidade de existir um espaço geométrico finito.

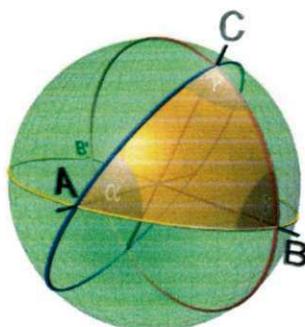


Figura 1.3: Triângulo geodésico na esfera. A geodésicas entre dois pontos na esfera são os arcos de grande círculo. Fonte: http://en.wikipedia.org/wiki/Differential_geometry_of_surfaces.

A partir de uma ilustração bidimensional da geometria sobre a esfera, a noção de linhas paralelas, como dada pelo quinto postulado de Euclides, neste caso não tem qualquer sentido, pois qualquer arco de um grande círculo, que passa através de um ponto C , não situado sobre AB , necessariamente irá interceptar AB e até mesmo em dois pontos. A figura também mostra que a soma dos ângulos de um triângulo formado por três arcos que se interceptam de três grandes círculos é sempre maior do que 180° .

A aplicabilidade da geometria Euclidiana está intimamente ligada a uma propriedade do espaço conhecida como curvatura. Se a curvatura do espaço for nula, sua geometria é Euclidiana. Se a curvatura do espaço for diferente de zero, o espaço é dito curvo, neste caso, a geometria será dita Riemanniana.

A noção de curvatura em uma variedade Riemanniana foi introduzida por Riemann de uma forma bastante geométrica. Porém, a maneira de calcular a curvatura só foi feita anos mais tarde por Christoffel. Em termos dos chamados *símbolos de Christoffel ou Conexão Afim*³, o tensor de Riemann é dado por

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \frac{\partial\Gamma_{\sigma\nu}^{\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial\Gamma_{\sigma\mu}^{\rho}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda}. \quad (1.1-3)$$

O coeficiente definido por $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{k\ell} \left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\ell}} \right)$ são denominados coeficientes da Conexão Afim ou símbolo de Christoffel.

Em todo o seu trabalho, fica evidente a preocupação de Riemann com as questões fundamentais contidas no desenvolvimento das Geometrias não-Euclidianas, a saber, as relação entre Física e Geometria[38]. O escalar de curvatura está relacionado com a curvatura gaussiana por $K = \frac{R}{n}$, onde n corresponde a dimensão do espaço.

Em uma Geometria plana, ou Geometria Euclidiana, a distância entre dois pontos pode ser facilmente calculada. Se considerarmos, por exemplo, em três dimensões, a distância infinitesimal entre os dois pontos será obtida a partir da relação:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.1-4)$$

No entanto, embora o nosso mundo diário seja descrito por três dimensões espaciais, do ponto de vista da matemática, um espaço pode ter um número qualquer de dimensões, até mesmo infinitas dimensões.

³A noção de Conexão Afim tem suas origens no estudo da Geometria de Superfícies, mas foi somente com os trabalhos de Cartan na década de 1920 que essa noção foi sistematizada e suas propriedades gerais estabelecidas.

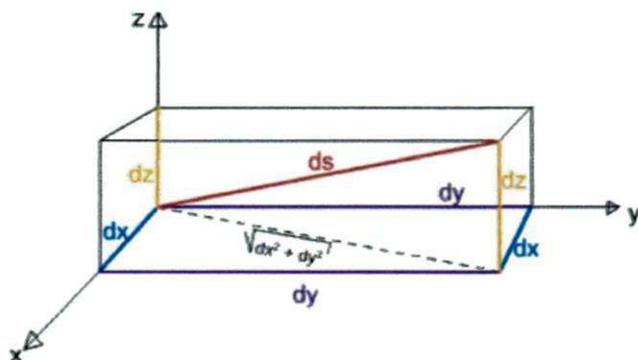


Figura 1.4: Representação geométrica da distância entre dois pontos em três dimensões. Fonte: http://www.on.br/certificados/ens_dist_2008/site/.

Generalizando a Geometria Euclidiana

Vamos então generalizar as expressões que nos ensinam como medir a distância entre dois pontos, para um número qualquer de dimensões espaciais. Para isso substituiremos as coordenadas x, y, z por x_n onde n é um índice que pode ser igual a qualquer número inteiro positivo. Assim x será substituído por x_1 , y será escrito como x_2 , z será x_3 , e assim por diante até atingirmos o número equivalente à dimensão do espaço que queremos estudar. Em geral, se queremos dizer que o espaço tem um número qualquer de dimensões escrevemos x_n , onde n assume os valores 1, ou 2, ou 3 ou qualquer outro valor inteiro positivo. Isso pode ser resumido escrevendo-se $n = 1, 2, 3, \dots$

Podemos então generalizar a expressão que nos dá a distância infinitesimal entre dois pontos em um espaço Euclidiano de dimensão qualquer n escrevendo

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \dots + dx_n^2, \quad (1.1-5)$$

onde, $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

A expressão ds^2 , que é chamada de *elemento de linha ou métrica*, é de importância vital nos cálculos da teoria da relatividade.

O tratamento do espaço e tempo como sendo duas propriedades físicas que podem ser unificadas foi uma criação do físico Hermann Minkowski, logo depois da teoria da relatividade

restrita ter sido apresentada por Poincaré e Einstein em 1905. Minkowski mostrou que o elemento de linha invariante por uma transformação de Lorentz para um espaço-tempo com 4 dimensões deveria ser escrito como[40]

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1.1-6)$$

ou, equivalentemente,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.1-7)$$

Essa expressão é conhecida como *métrica de Minkowski*[36]. Essa denominação é uma homenagem a Minkowski que, em setembro de 1908, propôs este espaço como sendo adequado para descrição da teoria da relatividade restrita.

O conjunto de sinais (+ - - -) ou (- + + +) que antecedem os termos que formam as expressões acima é chamado de assinatura da métrica. Note que ambos os conjuntos de sinais são corretos. Os dois elementos de linha descritos acima, com as duas assinaturas de métrica diferentes, são válidos para descrever o espaço-tempo de Minkowski. Ao invés de tratar separadamente as noções de tempo e espaço, é o objeto espaço-tempo que é geometrizado. Esta identificação feita por Minkowski foi extremamente importante para o desenvolvimento da relatividade geral.

1.2 Geometria e Cosmologia

Como é bem conhecido, a geometria diferencial não-Euclidiana é o formalismo matemático básico utilizado na teoria da relatividade geral assim como o cálculo tensorial. No entanto, antes do desenvolvimento dessa teoria, já existiam várias tentativas de aplicar às ciências físicas a alguns resultados da geometria não-Euclidiana[41]. Na teoria da relatividade geral, utiliza-se a geometria diferencial como formalismo para trabalhar com as geometrias não-Euclidianas (abordagem de Riemann). Quando as geometrias não-Euclidianas foram desenvolvidas, não se utilizava tal abordagem e sim um tratamento clássico, análogo ao da geometria Euclidiana clássica (abordagem de Bolyai e Lobatchewsky)[35].

Ao contrário da geometria Euclidiana, as geometrias que estamos agora apresentando são definidas sobre a superfície de uma esfera ou de um hiperbolóide (algo parecido com a sela de um cavalo). As imagens abaixo mostram essas duas geometrias.



Figura 1.5: Representações geométricas da superfície esférica e hiperbolóide. Fonte: http://www.on.br/certificados/ens_dist_2008/site/.

Dizemos que uma superfície esférica tem uma curvatura positiva enquanto que a superfície de um hiperbolóide tem curvatura negativa. Numa superfície com curvatura positiva a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado nessa superfície é maior que 180° . No caso de uma superfície com curvatura negativa a soma desses ângulos internos será menor que 180° .

Existe um número muito grande de espaços possíveis e cada um deles tem sua própria geometria. O espaço Euclidiano, por exemplo, é homogêneo e isotrópico. Por homogêneo queremos dizer que suas propriedades são as mesmas em qualquer local. Ser isotrópico significa que suas propriedades não dependem da direção em que são consideradas.

De todos os possíveis espaços não-Euclidianos existem somente dois que também são uniformes (ou seja, homogêneos e isotrópicos) semelhante ao espaço Euclidiano. O primeiro tem uma geometria hiperbólica e foi descoberto a partir dos trabalhos do matemático Gauss, Lobatchewsky e Bolyai[41]. O segundo tem a geometria esférica e foi descoberto por Riemann. Em 1854 Riemann aplicou o método de Gauss ao estudo do espaço tridimensional geral, focalizando sua atenção na métrica e nas propriedades de curvatura do espaço como vimos na seção anterior.

Na relatividade geral a interação gravitacional é de tal forma que a matéria curva o espaço-tempo, que por sua vez determina as trajetórias das partículas de acordo com sua estrutura geométrica[39]. As medidas de distância de objetos localizados no espaço nos levarão, em geral, a decidir se o espaço é curvo ou não. Nas medidas no cotidiano, e dentro das precisões das medidas existentes, verificamos que a geometria do espaço é Euclidiana. Einstein observou, no entanto, que a presença de massa afeta a curvatura do espaço, isto significa que, rigorosamente, a geometria Euclidiana é válida apenas como uma aproximação para os fenômenos do cotidiano que ocorrem na superfície terrestre.

A geometria do espaço é de grande importância para a cosmologia uma vez que a teoria relativística da gravitação se apoia inteiramente na idéia de que a geometria do espaço em qualquer local no Universo está diretamente relacionada com a intensidade do campo gravitacional naquele local. Em regiões onde o campo gravitacional é muito intenso (como nas proximidades de um buraco negro), a curvatura do espaço deverá se manifestar e, conseqüentemente, produzir efeitos físicos. Quanto mais intenso é o campo gravitacional mais forte será a curvatura correspondente.

Poderíamos dizer, baseado exclusivamente nas questões de geometria discutidas acima, que, num contexto cosmológico, os três tipos de curvaturas que podem existir, são:

- **Geometria Plana**

Baseada nos axiomas da geometria Euclidiana, sua linha geodésica é uma reta. O Universo descrito nessa geometria deve ter dimensão infinita é conhecido como *Universo Plano*. O Universo de curvatura zero corresponde a um Universo que se expande para sempre, diminuindo sua velocidade à medida que faz isso. Neste caso podemos tomar o espaço como Euclidiano descrito pela métrica (1.1-4). Atuais pesquisas observacionais apontam essa geometria como a que mais se aproxima da geometria do Universo. Podemos representar esta geometria conforme a figura abaixo:

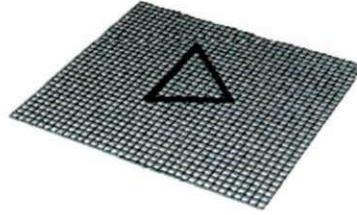


Figura 1.6: Geometria do Universo plano.

• **Geometria Esférica**

O Universo de curvatura positiva corresponde a um universo que se expandirá até uma certa separação entre as galáxias e então contrairá de volta até um espaço zero. Esse tipo de geometria viola os postulados de Euclides e descreve um *Universo Fechado*, onde linhas paralelas no equador se cruzam nos pólos e, embora de dimensão finita, esse tipo de Universo não tem limites ou barreiras. Neste caso, iremos fazer uma mudança de coordenadas em (1.1-4) para coordenadas esféricas que conduz diretamente a $x = r \text{sen}\theta \cos \phi$, $y = r \text{sen}\theta \text{sen}\phi$ e $z = r \cos \theta$. Assim, $ds^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}\theta d\phi^2)$. Obviamente os componentes da métrica são diferentes em relação às coordenadas cartesianas, mas todas as propriedades do espaço permanecem inalteradas.

No caso do Universo fechado podemos fazer uma mudança de coordenadas $r = \text{sen}\chi$ e escrever a métrica de uma hipersuperfície espacial como

$$ds^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \tag{1.2-8}$$

que corresponde a métrica da esfera \mathbb{S}^3 ilustrada na Fig.1.7.

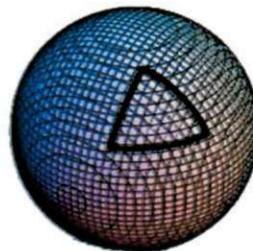


Figura 1.7: Geometria do Universo fechado.

• **Geometria Hiperbólica**

Quando a geometria do Universo é hiperbólica, que também é não-Euclidiana, as linhas paralelas sempre se distanciam umas das outras, caracterizando um *Universo Aberto*. Podemos fazer a mudança de variável $r = \text{senh}\chi$ e escrever a métrica que descreve esse espaço na forma

$$ds^2 = d\chi^2 + \text{senh}\chi^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \tag{1.2-9}$$

Esta métrica representa um espaço 3-D de curvatura constante negativa. Do ponto de vista global este espaço pode estender-se indefinidamente[40]. Ou seja, Universo de curvatura negativa corresponde a um Universo que se expandirá para sempre.



Figura 1.8: Geometria do Universo aberto.

Na tabela(1.1), representamos um resumo das seções espaciais

Geometria	Curvatura	Topologia
Euclidiana \mathbb{R}^n	$R = 0$	Plano
Esférica \mathbb{S}^n	$R = 1$	Fechado
Hiperbólica \mathbb{H}^n	$R = -1$	Aberto

Tabela 1.1: A relação entre Geometria e Topologia dos espaços.

Podemos dizer que ao longo do século *XIX*, foram surgindo aplicações na Física de vários os aspectos da geometria não-Euclidiana que são encontrados, depois, na teoria da relatividade. Em alguns casos (espaços pluridimensionais, espaço-tempo) essas idéias levaram a conjeturas principalmente qualitativas[41]. Em outros casos (geometrias não-Euclidianas), o desenvolvimento levou a aplicações quantitativas e novos métodos matemáticos. Tudo isso

mostra que não houve uma descontinuidade na introdução das geometrias não-Euclidianas na física do século *XX*. No entanto, esses desenvolvimentos eram muito mais de natureza matemática do que física. Foi apenas com o desenvolvimento da teoria da relatividade que surgiu, como uma proposta física propriamente dita, a utilização da geometria não-Euclidiana na descrição dos fenômenos naturais.

1.3 Topologia

A Topologia é ramo da matemática que se interessa pelas propriedades geométricas que se mantêm invariantes sob transformações biunívocas e contínuas. Os elementos de estudo da Topologia são: os Espaços Topológicos e as Aplicações contínuas. O termo “Topologie”⁴ foi introduzido pelo Listing na década 1840, embora Euler já tenha percebido que na Geometria há conceitos para os quais as medidas sejam irrelevantes.

Há algumas características de um objeto que não são descritíveis pelas suas “medidas” métricas, como ângulos e comprimentos, e que são preservadas sob deformações sem cortes ou colagens. Para diferenciá-las das características “métricas”, elas são denominadas *características topológicas*[42]. Exemplos destas características são o número de nós numa curva, o número de “buraco” numa superfície e o número de cavidades num sólido.

Embora Jordan, Euler, Gauss e Riemann conseguiram desenvolver algumas importantes relações topológicas, a Topologia só se consolidou como uma área de conhecimento no final do século 19 com os trabalhos de Henri Poincaré e tornou-se mais popular com a sua aplicação na Teoria de Relatividade e Teoria Quântica[42].

A Topologia pode ser dividida em subáreas, tais como: Topologia geral, Topologia algébrica e a Topologia diferencial. A Topologia geral define e estuda propriedades dos espaços topológicos, que por sua vez são estruturas que permitem a formalização de conceitos tais como convergência, conexidade e continuidade. Além disto, a topologia geral classifica aplicações

⁴do grego *topos*, forma, e *logos*, estudo - “estudo das formas”.

entre espaços topológicos por meio de termos como continuidade, homeomorfismos e aplicações próprias. Já a Topologia algébrica estuda as diferentes maneiras em que se pode associar a um determinado espaço topológico uma estrutura algébrica. Já a Topologia diferencial estuda a topologia de variedades diferenciáveis, e quais propriedades definidas em termos analíticos são na realidade consequências da topologia de uma variedade.

No tempo de Gauss, a noção de orientação de superfície não estava muito nítida na época, entre 1862 a 1865, Möbius e Listing descreveram a construção de uma superfície de um só lado com uso de uma tira de papel - a famosa faixa de Möbius. Eles perceberam que ao deslizar um objeto sobre a faixa a partir de um ponto a , o objeto volta ao mesmo ponto, porém no “outro lado”. Este fato os motivou a introduzir o conceito de lados de uma superfície. A primeira definição foi baseada nos vetores normais: uma superfície tem somente um lado quando existe um caminho fechado ao percorrer o qual os vetores normais mudam de sentido.

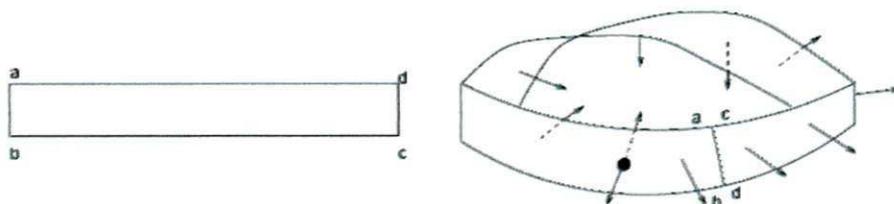


Figura 1.9: Faixa de Möbius. Fonte: Referência[42]

A definição baseada em vetores normais nos leva a pensar equivocadamente que o fato de uma superfície ser de dois lados ou de um lado seja uma propriedade dependente do espaço de imersão, como os conceitos de abertos, fechados e interiores. Portanto, outra definição baseada em circunferências orientáveis é mais adequada. Ao invés de vetores normais, podemos associar a cada ponto sobre o caminho uma circunferência orientável.

Observe agora que, ao invés de imersão de vetores normais, existe um caminho sobre a faixa de Möbius ao longo do qual o sentido da orientação das circunferências inverte.

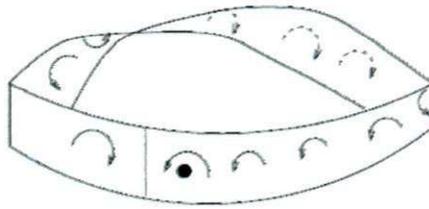


Figura 1.10: Faixa de Möbius - Orientabilidade. Fonte: Referência[42]

Podemos introduzir agora o conceito de orientabilidade de uma superfície, que é independente do espaço de imersão. Uma superfície é orientável, se as circunferências ao longo de qualquer caminho são coerentemente orientáveis (todas no mesmo sentido); caso contrário, dizemos que ela não é orientável. As superfícies orientáveis correspondem às superfícies de dois lados e as não orientáveis às superfícies de um só lado.

Por sua vez, um espaço topológico consiste de um conjunto A e uma coleção \mathcal{T} de partes de A , denominadas abertos, que satisfaz:

1. \emptyset e A pertencem a \mathcal{T} ;
2. A interseção de quaisquer dois abertos é um aberto pertencente a \mathcal{T} ;
3. A união de quaisquer abertos, podendo ser infinitos abertos, é um aberto pertencente a \mathcal{T} .

\mathcal{T} é denominada a topologia do espaço topológico (A, \mathcal{T}) , ou simplesmente A . Se A é um conjunto métrico, então (A, \mathcal{T}) é também em um espaço como de Hausdorff⁵.

Muitos dos problemas físicos podem estar de algum modo, ligado a um espaço contínuo. São exemplos o espaço físico tridimensional, o espaço de configuração e o espaço das fases da Mecânica Analítica[43], o espaço de todos os estados de equilíbrio termodinâmico de um sistema físico, os espaços de Hilbert da mecânica quântica, etc. Estes espaços têm diferentes propriedades geométricas, mas todos têm qualquer coisa em comum, qualquer coisa que tem

⁵Um espaço de Hausdorff é um espaço topológico no qual quaisquer dois pontos distintos têm vizinhanças disjuntas. Esta propriedade era uma dos axiomas da definição original de espaço topológico dada por Felix Hausdorff.

a ver com o fato de todos serem espaços contínuos e não, por exemplo, espaços tipo esponja (espaços com buracos) ou espaços tipo rede cristalina ou qualquer outro conjunto de pontos discretos.

Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre espaços topológicos X e Y se diz contínua se, para cada $A' \subset Y$ aberto, sua imagem inversa $f^{-1}(A')$ é um aberto em X . Um homeomorfismo é uma bijeção contínua $h : X \rightarrow Y$ cuja inversa também é contínua. Dizemos que dois espaços topológicos são topologicamente equivalentes se existir um homeomorfismo entre eles e denominamos as propriedades geométricas preservadas num homeomorfismo por propriedades topológicas. Desse modo, podemos dizer que a Topologia trata de Geometria de “contínuos”, ou seja, das propriedades geométricas que são preservadas através de aplicações biunívocas contínuas.

A construção de um espaço topológico é formado pela união disjunta de dois outros espaços. Os espaços conexos são espaços que não podem ser obtidos desta maneira. A conexidade é uma propriedade preservada pelas aplicações contínuas. Dizemos que um espaço é simplesmente conexo quando qualquer circuito que envolva quaisquer pontos contidos nesse espaço seja redutível a um ponto, isso só é possível se o espaço não tem “buracos” em seu interior.



Figura 1.11: Exemplo de espaços conexo e desconexo. Fonte: Referência[42]

Podemos dizer que um espaço é conexo se pode passar de um ponto qualquer deste espaço para qualquer outro ponto distinto por um movimento contínuo, sem sair dele.

A propriedade de um conjunto ser conexo não depende do espaço em que ele está imerso. Esta propriedade, formalmente definida pelo Poincaré na coletânea de artigos *Analysis situs*, é considerada uma propriedade intrínseca e constitui um dos alicerces da teoria de Topologia[42].

Capítulo 2

Defeitos em Matéria Condensada

A descoberta feita pelo físico alemão Max Von Laüe (1879-1960) de que sólidos cristalinos são redes de difrações capazes de difratar os raios-X[44], permitiu grandes avanços no conhecimento da estrutura de sólidos tornando-se evidente que muitas propriedades dos materiais (condutividade elétrica, resistência mecânica, plasticidade, entre outras) não podiam ser explicadas apenas com base numa estrutura ideal que se admitia regular e periódica, em toda sua extensão. Foi necessário admitir que o conceito de rede ideal, embora útil para algumas situações, não correspondia à realidade. Num sólido cristalino real, sempre existe imperfeições ou defeitos, isto é, desvio da periodicidade característica dos materiais com ordem de longo alcance[44]. No estudo dos defeitos em sólidos podemos classificar estes quanto à simetria de rotação e translação, tendo como exemplo, na matéria condensada, os defeitos topológicos lineares, tais como, as deslocações, desclinações e despiração[13, 45]. Neste capítulo, analisaremos esses tipos de defeitos topológicos. Além disso, apresentaremos a teoria geométrica de defeitos, que no cenário da teoria de Katanaev e Volovich, proporciona uma nova abordagem à teoria, fazendo uma conexão com a gravitação, onde os defeitos são incorporados à métrica que descreve o meio.

2.1 Teoria Geométrica de Defeitos

Muitas teorias e experiências foram apresentadas para descrever e observar os defeitos em sólidos. Nos últimos anos uma série de artigos, inspirados pelas idéias pioneiras de Kröner e Bilby *et al.*, desenvolveu uma teoria geométrica de defeitos[46, 47]. Neste contexto, uma das teorias que melhor descrevem os sólidos com defeitos topológicos é baseada numa geometria de Riemann-Cartan (generalização da geometria Riemanniana feita por Cartan), que se relaciona a sistemas onde a métrica que descreve o meio não é Euclidiana e onde pode existir torção. Neste caso, diz-se que o sólido pode ser visto como uma variedade de Riemann-Cartan.

Nesta formulação podemos utilizar as técnicas da geometria diferencial para descrever a torção induzida pelo defeito em um meio elástico. Toda esta informação é contida nas quantidades geométricas (métrica, tensor de curvatura e etc.) que descreve o meio elástico com defeitos. As condições de contorno impostas pelo defeito, são traduzidas por uma métrica não-Euclidiana. Em geral, o defeito corresponde a uma singularidade, tangível na torção ou na curvatura (ou ambas as quantidades), ao longo da linha do defeito, onde a curvatura e a torção estão associados aos defeitos topológicos, desclinação e deslocação, respectivamente, no meio[12].

Um trabalho que marcou a abordagem através da teoria geométrica de defeitos em sólidos foi o artigo publicado em 1992 por Katanaev e Volovich[12]. Neste trabalho, vemos uma nova abordagem para a teoria de defeitos em sólidos que faz um elo com a gravitação e na qual os defeitos são incorporados à métrica que descreve o meio. Existem algumas vantagens nessa descrição, pois na teoria da elasticidade o tratamento das equações são relativamente complicadas em comparação àquelas da teoria geométrica dos defeitos, proporcionando uma linguagem adequada para a distribuição contínua de defeitos. A abordagem de Katanaev e Volovich serve para descrição de defeitos topológicos isolados, bem como também se aplica às densidades de defeitos. Nesta teoria, a geometria tridimensional do meio é caracterizada por uma torção e curvatura não nulas, que são identificadas com densidades de campos dos

vetores de Burgers e Frank[45].

Assim, a descrição na dinâmica quântica (ou clássica) de partículas (ou quase-partículas) no meio elástico é reduzido a um problema em um espaço curvo com torção. A influência dos defeitos sobre o movimento dos elétrons e fônons¹, por exemplo, torna-se razoavelmente fácil de analisar, devido ao fato de que as condições de contorno impostas pelos defeitos são incorporadas na geometria.

Para geometrizar uma teoria física é preciso expressá-la em forma geométrica, o que requer os seguintes regulamentos propostos por Schultz [16].

- I- Identificar conceitos de geometria diferencial com certas quantidades físicas mensuráveis;
- II- Especificar como a métrica, curvatura e torção dos espaços correspondentes são gerados por objetos físicos da teoria;
- III- Especificar como os objetos físicos (partículas, defeitos, etc.) se comportam neste espaço matemático.

Sendo assim, com a geometria diferencial podemos fazer essas identificações em teoria dos defeitos, pois no meio contínuo usado para a descrição do fenômeno físico relacionado com os defeitos, corresponderá a uma variedade diferenciável. As linhas de desclinação e deslocação são identificadas com a curvatura e a torção da variedade, respectivamente. Lembrando que esta identificação é válida em três dimensões para defeitos estáticos.

A teoria geométrica de defeitos mostra a equivalência entre a gravidade tridimensional com torção e a teoria dos defeitos em sólidos[18]. Em uma teoria métrica da gravitação, o campo gravitacional está relacionado frequentemente a um tensor de curvatura de Riemann não-nulo. No entanto, a presença de curvatura localizada pode ter efeitos sobre o movimento geodésico e o transporte paralelo em regiões onde a curvatura se anula. O melhor exemplo

¹O estudo dos fônons é importante na Física do Estado Sólido por facilitar a compreensão de muitas propriedades dos sólidos, como por exemplo o calor específico, a condução térmica, a condutividade elétrica e a propagação do som. Os fônons são bósons que possuem spin zero.

conhecido deste efeito não-local é obtido quando uma partícula é transportada ao redor de uma corda cósmica estática e extremamente fina. Neste caso, a partícula não será atraída, pois não há campo gravitacional local. O campo gravitacional externo gerado por uma corda cósmica pode ser descrito aproximadamente por uma geometria denominada cônica[13]. Em termos da relatividade, podemos observar através da Fig.2.1, o caminho geodésico de luz curvado em direção a corda.

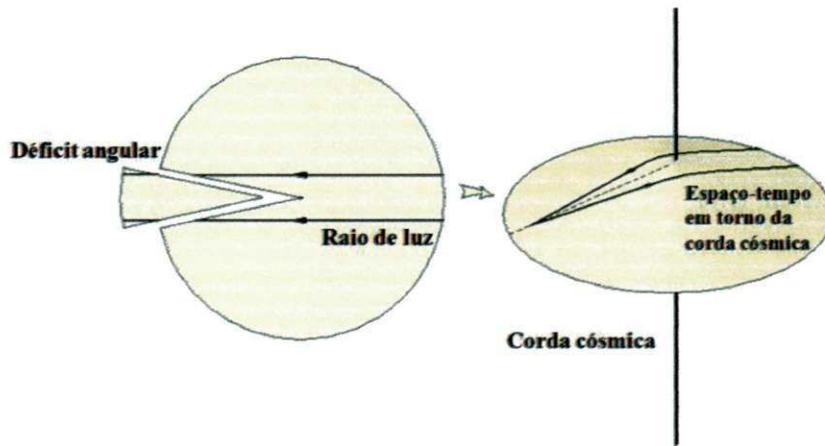


Figura 2.1: Construção do espaço-tempo em torno de uma corda cósmica. Fonte: <http://www.damtp.cam.ac.uk/research/gr/public>.

Devido a seu caráter topológico, a corda cósmica induz um déficit angular $\Delta\theta$ (depende da densidade linear de massa) o qual separa as trajetórias da luz e provoca uma duplicação de imagens[8], ver Fig.2.2.

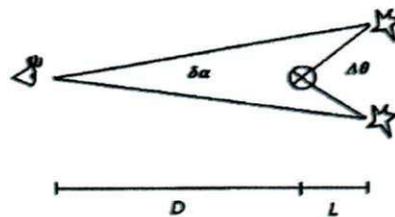


Figura 2.2: Duplicação de imagem (lente gravitacional) produzida por uma corda cósmica (círculo com cruz) de uma galáxia ou quásar de fundo. As duas imagens aparecerão separadas por um ângulo pequeno $\delta\alpha$ para o observador. Fonte: Referência[8].

Esta situação corresponde ao análogo gravitacional do efeito Aharonov-Bohm gravitacional[48]. Esses efeitos são de origem topológica ao invés de geométrica, onde o análogo gravitacional pode ser visto como uma manifestação da topologia não-trivial do espaço-tempo.

Nesse caso, o espaço que descreve os defeitos é caracterizado por singularidades cônicas no tensor de curvatura[49]. A singularidade cônica dá origem a curvatura concentrada, por exemplo, no eixo de uma desclinação, que cooresponde a um defeito linear em matéria condensada, onde possui algumas características semelhantes à corda cósmica. Desta forma, o meio que contém uma desclinação é descrito pela curvatura não-trivial concentrada no eixo do defeito. As equações que definem a distribuição estática de defeitos são covariantes e têm a mesma forma que as equações de modelos de gravidade com torção dinâmica[45].

A teoria geométrica da distribuição estática de defeitos também pode ser construída no plano \mathbb{R}^2 . Para isso, devemos considerar a versão Euclidiana de gravidade bidimensional com torção[12]. A construção geométrica desenvolvida na teoria dos defeitos pode ser invertida, e podemos considerar a interação gravitacional de massas no Universo como uma interação de defeitos num meio elástico[45]. Então, massas pontuais e cordas cósmicas correspondem a defeitos pontuais (vacâncias e impurezas) e deslocamentos em uma fatia angular.

Os modelos análogos em gravitação apontam fenômenos de matéria condensada que podem ser descritos em analogia com o formalismo da relatividade geral. Na descrição do comportamento de raios de luz em meios dielétricos, observou-se que é possível reescrevê-los como geodésicas de uma métrica parametrizada pelo índice de refração do material[11]. Dependendo do seu foco principal, muitos dos recentes modelos propostos podem ser classificados, de maneira geral, em duas categorias: Simular fenômenos gravitacionais em sistemas de matéria condensada ou aplicar idéias inspiradas por modelos de matéria condensada em gravitação. Na próxima seção faremos algumas descrições sobre defeitos topológicos encontrados em sólidos.

2.2 Defeitos em Sólidos

O estudo de defeitos em sólidos começa no início do século quando Volterra e Somigliana, estudando singularidades e soluções das equações da elasticidade linear, descobriram que estas singularidades seriam defeitos do material[45].

Normalmente, quando se fala em defeitos em um cristal imagina-se que somente mudanças não desejáveis nas características do material devem ser esperadas. Por um lado, esta idéia é correta pois os defeitos podem causar alterações pelas quais as características de um material podem ser totalmente alteradas e mesmo controladas pela presença de defeitos. Um exemplo disso é a localização de parte dos portadores (elétrons ou buracos), diminuindo a condutividade esperada de um sistema. Esta é uma consequência realmente séria quando se fala na produção de dispositivos eletrônicos. A presença de defeitos provoca a quebra da propriedade simétrica da periodicidade, introduz fontes de espalhamento e provocam também a quebra da coerência das funções de onda que descrevem o cristal (funções de Bloch)[44]. Em um metal, onde os elétrons podem ser fortemente espalhados pelos íons da rede, deveria, em princípio, ser um mau condutor. Mas o arranjo periódico de sua estrutura permite aos elétrons propagarem-se com baixa resistência devido ao teorema de Bloch, segundo o qual uma equação de onda com potenciais periódicos possui autofunções espacialmente ilimitadas[44, 50]. Porém, os efeitos da desordem nem sempre são ruins, os processos de espalhamento de portadores provocados pela presença de defeitos contribuem para a condutividade dc (corrente contínua)[51].

Um defeito pode ser originado de diversas maneiras, seja por uma alteração numa região de uma amostra causada por uma modificação na rede cristalina, seja pela adição de átomos estranhos quando uma amostra passa por um processo de dopagem, por exemplo[51]. O processo de dopagem de um cristal, bastante conhecido e usado em semicondutores, consiste basicamente na introdução de átomos estranhos à rede cristalina causando desordem na estrutura. A introdução de dopantes em um cristal semiconductor pretende criar imperfeições

de modo a aumentar a condutividade elétrica do material.

O estudo destes defeitos, em sólidos, são de fundamental importância, pois tais defeitos irão influir nas propriedades mecânicas e termodinâmicas, já que estes defeitos podem ser bastante importante, por exemplo, na transição sólido-líquido[52]. Um sólido cristalino é constituído por um arranjo periódico de átomos ou moléculas. Mas, um cristal real nunca é perfeito, sempre existem imperfeições, que chamamos de defeitos[53].

Em geral, os cristais contêm defeitos ou imperfeições, das quais as que mais interrompem a regularidade da estrutura são as da rede espacial. Como este é um conceito geométrico, é natural classificar geometricamente as imperfeições da rede. As imperfeições estáticas são classificadas como, lineares, pontuais e superfícies conforme a sua geometria.

Uma imperfeição pontual aparece por causa da ausência de um átomo que estaria presente num cristal perfeito ou a presença de um átomo de impureza, ou um átomo colocado em lugar errado (um sítio não ocupado no cristal perfeito)[44]. Defeitos pontuais como o próprio nome indica são aqueles ocorrem em determinados pontos do sólido cristalino, ou seja, localizam-se na vizinhança um ou poucos átomos, são particularmente frequentes em sólidos iônicos.

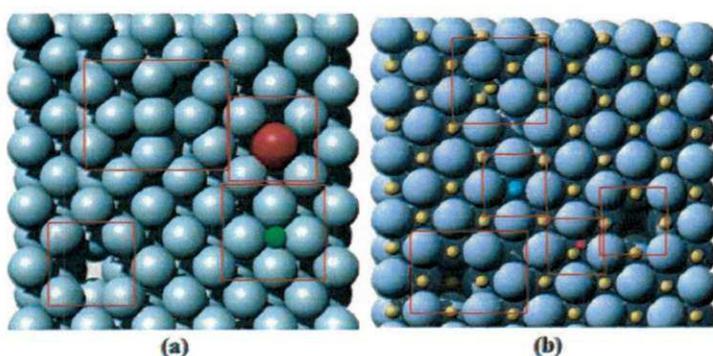


Figura 2.3: (a) Imperfeições pontuais num sólido cristalino. (b) Imperfeições pontuais num sólido cristalino iônico. Uma representação bidimensional de um sólido iônico, ilustrando várias das possíveis imperfeições pontuais. Os cátions são representados por pequenas esferas, e os ânions por grandes esferas. Fonte: <http://www.cienciadosmateriais.org/>

Na Fig.2.3(a) mostram-se as imperfeições pontuais mais comuns num cristal de um elemento puro; algumas das imperfeições pontuais que podem ocorrer num cristal iônico

são mostradas na Fig.2.3(b). A ausência de um átomo numa posição normalmente ocupada é chamada de lacuna ou vacância[44]. Além das imperfeições estruturais, outras imperfeições pontuais podem ser produzidas pela excitação de elétrons, em certos átomos, até níveis de energia superiores. Isto pode ser obtido pelo bombardeamento do cristal com feixe de elétrons (produzindo-se raios X) e outras formas de radiação com frequência adequada.

Nesse contexto, através dos cristais líquidos podemos simular tanto defeitos pontuais quanto lineares. Cristais líquidos são materiais que têm uma estrutura molecular com características intermediárias entre ordem orientacional e posicional de longo alcance dos cristais e a desordem típica dos líquidos e gases[54]. Um sólido apresenta ordem translacional e posicional de longo alcance, ou seja, as suas moléculas permanecem com posições fixas sempre[44]. A ordem orientacional e posicional dos cristais líquidos é menor que a dos sólidos, entretanto, é infinitamente maior que a dos líquidos isotrópicos², que não apresentam ordem preferencial. Há duas grandes classes de cristais líquidos: os liotrópicos e os termotópicos. Os cristais liotrópicos são obtidos pela dispersão de um composto num solvente, por exemplo em sistemas biológicos, tais como lipídeo-água, lipídeo-água-proteína, etc[54]. Já os termotópicos são formados por moléculas longas em geral compostos orgânicos[54].

Do ponto de vista experimental, podemos observar numa textura típica da mesofase³ algumas imperfeições, ilustrada na figura abaixo:

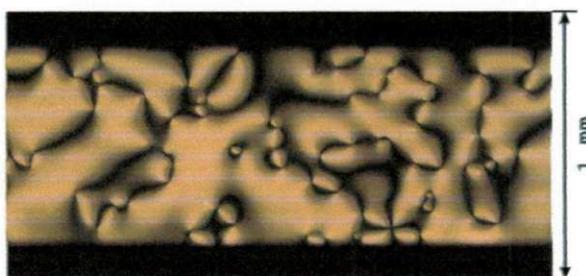


Figura 2.4: Foto da textura Schlieren em um cristal líquido liotrópicos, com aumento de 50x pela objetiva, obtida no laboratório de cristal líquido da UEM.

²A isotropia é a propriedade que caracteriza as substâncias que possuem as mesmas propriedades físicas independentemente da direção considerada.

³Qualquer uma das fases de um cristal líquido.

Nessa textura podemos identificar regiões escuras imersas em regiões claras. Observa-se que as manchas escuras estão unidas por pequenos pontos ao longo de sua extensão caracterizando os defeitos pontuais.

Nos defeitos lineares, como os pontuais, são definidos pelo modo como sua presença induz perturbações naquilo que, de outro modo, seria uma rede espacial perfeita. Como o próprio nome indica, a perturbação em torno de uma imperfeição linear está centrada ao longo de uma linha; então, a imperfeição pode ser considerada como a fronteira entre duas regiões de uma superfície, que são em si mesmas perfeitas, havendo, porém, um desajuste.

As imperfeições superficiais de natureza estrutural decorrem de uma variação na sequência dos planos atômicos que resulta no surgimento de um contorno. Tal mudança pode ser tanto na orientação, quanto na sequência dos planos. Contornos de grãos são as imperfeições superficiais que separam cristais de diferentes orientações, num agregado policristalino[55]. Como está ilustrada na Fig.2.5 para um modelo bidimensional, os átomos do contorno entre dois grãos aleatoriamente orientados não podem ter um complemento perfeito nos átomos vizinhos e, em consequência, existe uma região de transição onde a agregação atômica é imperfeita. Em três dimensões, esta transição ocorre através da superfície que separa os grãos.



Figura 2.5: Imperfeições superficiais. Os contornos de grãos são indicados por linhas, deslocações por \perp , deslocações estendidas por \perp ----- \perp e lacunas por um quadrado. Fonte: Referência[55].

A natureza imperfeita dos contornos dos grãos que permite que eles apareçam destacados ao microscópio óptico de luz refletiva, pois a luz incidente se dispersa neste meio; quimicamente, eles são atacados com maior eficiência do que a rede cristalina[55].

Estudaremos defeitos que são de origem estrutural, não relacionado com a estrutura eletrônica dos átomos, mais classificados de acordo com sua dimensionalidade espacial.

2.2.1 Deslocação

As deslocacoes são defeitos associados à simetria de translação. Em sólidos com rede cristalina, por exemplo, as deslocacões surgem devido ao mal-alinhamento de átomos, correspondendo a uma imperfeição local no alinhamento das camadas de átomos na rede.

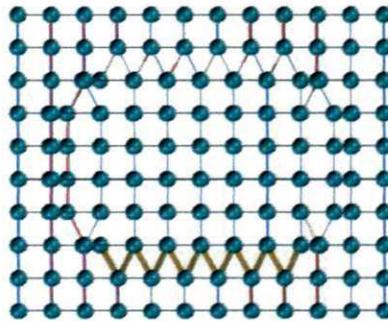


Figura 2.6: Deslocamento, visto de cima, de dois planos atômicos num arranjo cúbico simples. Fonte: <http://www.cienciadosmateriais.org/>.

Na Fig.2.6, observa-se que a rede é perfeita tanto na porção central, onde os pontos da rede foram transladados de suas posições iniciais, como na porção externa, em que não houve translação. Somente na fronteira entre as duas regiões a rede ficou distorcida.

A estrutura e o comportamento das deslocacões são fundamentais para a compreensão de muitas das propriedades de materiais de uso na engenharia. Pode-se observar que o tipo de distorção produzido pela deslocação é função de sua posição no circuito. Os principais tipos de deslocação são a deslocação tipo hélice (screw dislocation) e a deslocação lateral (edge dislocation).

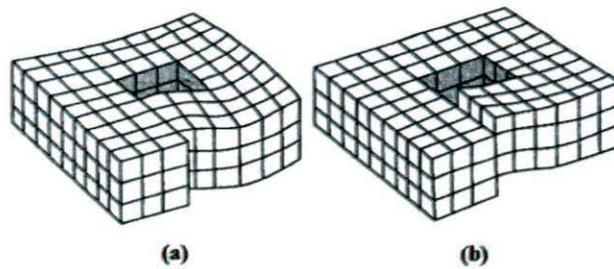


Figura 2.7: (a) Deslocação tipo edge. (b) Deslocação tipo hélice em uma rede quadrada. Fonte: Referência[50].

Mas nem sempre é possível determinar a natureza do defeito. A técnica para classificação desses defeitos foi proposta por J.M Burgers[50]. A maneira encontrada por Burgers foi fazer um caminho, átomo a átomo, ao longo de algum circuito em volta do defeito.

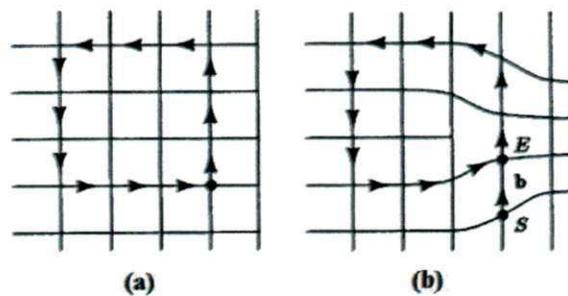


Figura 2.8: (a) Circuito de Burgers sem deslocação. (b) O vetor de Burgers \mathbf{b} na presença de deslocação linear SE . Fonte: Referência[50].

Pode-se descrever uma deslocação utilizando-se dois vetores. A direção da linha de deslocação, num ponto qualquer, é descrita pelo vetor unitário \hat{t} (módulo igual a um espaçamento da rede), que é paralelo à linha, e deve ser contínuo ao longo do circuito de deslocação, isto é, deve ter sentidos opostos em lados opostos do circuito. O segundo vetor é o vetor translação \mathbf{b} (mais comumente chamado *vetor de Burgers*), que indica como e em que direção a rede, acima do plano, foi desviada em relação à rede abaixo do plano.

Note que o vetor de Burgers é exatamente o mesmo em qualquer ponto do circuito, enquanto que o vetor \hat{t} muda continuamente de direção. O vetor de Burgers de qualquer deslocação pode ser determinado, usando-se o fato de que uma série de vetores da rede, que

formem um circuito fechado numa rede perfeita, não formará um circuito fechado se envolver uma deslocação. Então, o vetor necessário para fechar o circuito em torno da deslocação é o vetor de Burgers da deslocação.

No circuito formado pela deslocação não levam ao mesmo ponto inicial, ver Fig.2.8. Esta diferença entre o ponto inicial do circuito e o final gera uma idéia da intensidade do deslocamento relativo dos planos separados para gerar a deslocação. O vetor que está direcionado do ponto final para o inicial é o vetor de Burgers, \mathbf{b} .

As deslocações podem modificar o espectro da energia de elétrons em movimento, por exemplo, num campo magnético uniforme como relatado por Kaner, Feldman e Kosevich[17]. Nesses trabalhos, os níveis de Landau, na presença dos deslocamentos, foram investigados no contexto da teoria clássica da elasticidade, via uma perturbação no Hamiltoniano.

Considerando uma deslocação tipo hélice infinitamente longa e linear orientada ao longo do eixo z ou x^3 , podemos descrever a métrica desse defeito linear, da seguinte forma, em coordenadas cilíndricas,[56]

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = d\rho^2 + (dz + \beta d\varphi)^2 + \rho^2 d\varphi^2, \quad (2.2-1)$$

onde $\beta = \frac{\mathbf{b}}{2\pi}$ e \mathbf{b} é o vetor de Burgers. $\rho > 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ e $-\infty \leq z \leq \infty$.

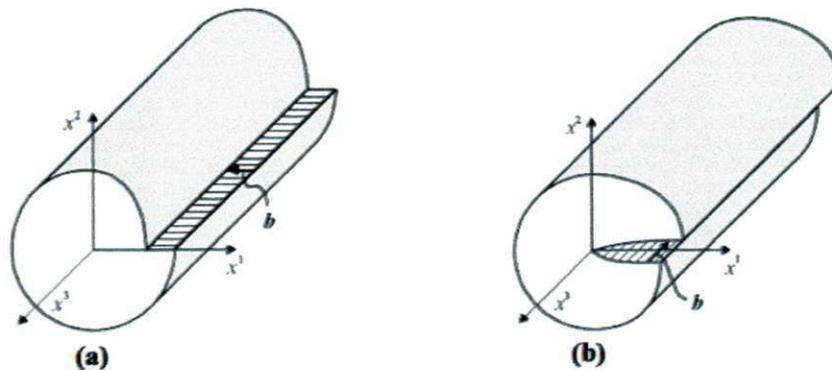


Figura 2.9: (a) Deslocação lateral. (b) Deslocação tipo hélice através do processo de Volterra.
Fonte: Referência[45]

Esse defeito topológico tem ligação com uma propriedade do meio chamada torção, mas nenhuma curvatura. A torção associada a este defeito corresponde a uma singularidade cônica na origem. Na teoria geométrica dos defeitos o vetor de Burgers correspondente a uma superfície S é definida pela integral do tensor de torção[45]

$$b^i = \int \int_S dx^\mu \wedge dx^\nu T_{\mu\nu}^i. \quad (2.2-2)$$

O termo $dx^\mu \wedge dx^\nu$ representa o elemento de superfície. A região de integração S para o caso em que o vetor de Burgers aponta numa certa direção x^3 na Fig. 2.9, corresponde a superfície gerada através do processo de Volterra[45].

A definição (2.2-2) é invariante com respeito à transformação de coordenadas gerais de x^μ e covariante com respeito a rotação global. Assim, o tensor de torção tem interpretação física direta: é igual à densidade de superfície do vetor de Burgers[45]. O componente diferente de zero referente ao tensor de torção $T_{\mu\nu}^i$, é dada por[13]

$$T_{\mu\nu}^1 = 2\pi\beta\delta^2(\rho)d\rho \wedge d\varphi, \quad (2.2-3)$$

onde δ^2 é a função delta bidimensional no espaço plano. O tensor de torção é definido da seguinte forma $T_{ij}^k \equiv \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$. É evidente que $T_{ij}^k = -T_{ji}^k$, o que expressa a anti-simetria do tensor de torção. Geometricamente, o tensor de torção quantifica a torção de um espaço tangente em torno de uma curva, quando os vetores tangentes que determinam esse espaço são transportados paralelamente ao longo da curva.

As deslocações em cristais obedecem simetrias da rede cristalina governadas pela sua invariância translacional[50]. Dessa forma, observando se o vetor de Burgers é paralelo ou perpendicular à superfície de corte, podemos classificar a deslocação se é do tipo hélice ou edge, ver Fig.2.9.

2.2.2 Desclinações

A desclinação é um tipo de defeito linear cuja a simetria rotacional é quebrada em torno de um eixo específico. Uma maneira de representar geometricamente a formação de defeitos

lineares é através do chamado processo de Volterra. Este procedimento consiste de um mecanismo de corte e cola em que, para gerar o defeito, podem ocorrer uma ou mais das seguintes etapas: inserção ou retirada, deslocamentos ou encurvamentos do material. Nas desclinações quando é retirada uma fatia do material, temos desclinações positivas; quando é adicionado material, temos desclinações negativas.

Na Fig.2.10 é representada a visualização do processo de Volterra para geração de uma desclinação do tipo cunha, que é um exemplo de desclinação positiva. Onde, inicialmente temos um plano, do qual é retirado uma fatia de ângulo diedral λ e em seguida as extremidades são identificadas, gerando um cone.

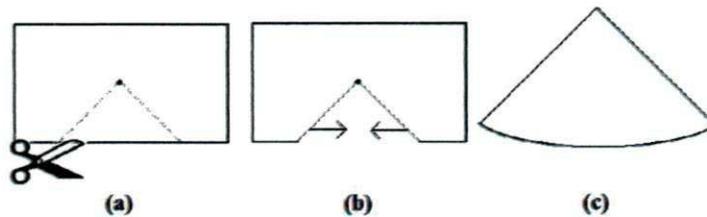


Figura 2.10: Etapas da geração de uma desclinação positiva através do processo de Volterra.

No caso da desclinação negativa o ângulo inserido é chamado ângulo de acréscimo. Esses tipos de desclinações podem ser representadas através de uma rede quadrada tridimensional, conforme a figura abaixo.

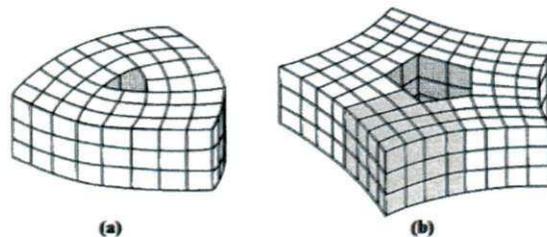


Figura 2.11: (a) Criação de uma desclinação positiva. Retiando um ângulo de 90° . (b) Desclinação negativa em uma rede quadrada. Inserimos um ângulo de 90° . Fonte: Referência[50]

A métrica que descreve um meio com desclinação, em coordenadas cilíndricas, é da forma

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = dz^2 + d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\varphi^2. \quad (2.2-4)$$

Esta métrica é equivalente à de Minkowski, porém, com condição de contorno com periodicidade de $2\pi\alpha$ ao invés de 2π em torno do eixo z , semelhante a seção transversal da métrica de uma corda cósmica [4]. A diferença está na variação do α . No processo de criação da desclinação esta periodicidade corresponde a remover uma cunha de material, quando $\alpha < 1$, temos uma desclinação positiva e a inserção de material quando $\alpha > 1$, correspondendo a uma desclinação negativa.

Podemos associar o ângulo diedral λ ao vetor axial $\vec{\lambda}$, que está orientado ao longo do eixo z para o caso da desclinação em cunha. Este vetor axial é o chamado vetor de Frank [12]. O ângulo diedral λ e o parâmetro α na métrica acima se relacionam via expressão $\lambda = 2\pi(\alpha - 1)$ [13]. Esta métrica é localmente plana, mas globalmente o espaço é curvo devido à singularidade no tensor de Ricci dado por[57]

$$R_1^2 = R_2^2 = 2\pi \frac{1-\alpha}{\alpha} \delta^2(\rho), \tag{2.2-5}$$

onde $\delta^2(\rho)$ é a função delta em duas dimensões. Da expressão acima, segue que, se $0 < \alpha < 1$ ($-2\pi < \lambda < 0$), o defeito tem curvatura positiva e se $0 < \alpha < \infty$ ($0 < \lambda < \infty$) o defeito tem curvatura negativa. Alguns tipos de núcleos de desclinações estão representados na figura abaixo:

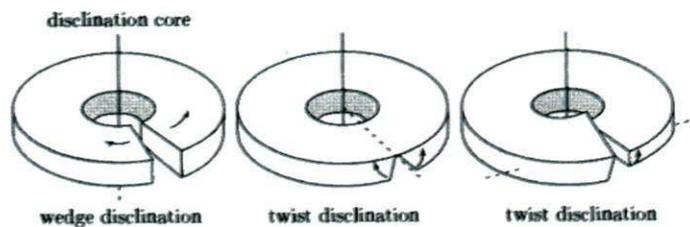


Figura 2.12: Processo de Volterra para desclinação tipo cunha e hélice. Fonte: Referência[50]

A direção de giro do vetor de Frank, na etapa de identificação dos planos que formam um ângulo λ entre si, é diferente em cada um dos tipos de desclinações. O vetor de Frank e o tensor de curvatura são relacionados através da expressão[45]

$$\lambda^{ij} = \int \int_S dx^\mu \wedge dx^\nu R_{\mu\nu}^{ij}. \tag{2.2-6}$$

A partir da expressão (2.2-6) vemos que o tensor de curvatura representa fisicamente a densidade superficial do vetor de Frank. Assim, a presença de desclinações em um meio está associada ao fato de o espaço em questão ser curvo. O aparecimento de desclinações em outros sistemas de matéria condensada, como é o caso de cristais líquidos, pode ser estudado num laboratório para simular fenômenos em cosmologia. Como exemplos temos, a passagem da luz próximo a corpos massivos ou estudo de cordas cósmicas via modelagem por sistemas de cristais líquidos [11].

2.2.3 Despiração

Vamos apresentar o elemento de linha que descreve uma despiração na abordagem geométrica de defeitos em sólidos. Este defeito representa uma superposição de uma deslocação tipo hélice alinhado e uma desclinação, ou seja, imaginemos um cilindro de um material elástico contínuo onde fazemos um corte radial, a partir de seu eixo para fora. O deslocamento das superfícies do corte em relação uns aos outros e posteriormente colagem, vão gerar um defeito de linha cujo núcleo coincide com o eixo.

Considerando coordenadas cilíndricas, se o deslocamento[14]:

- (i) ao longo da direção z , um deslocamento tipo hélice é formado [ver Fig. 2.13(a)];
- (ii) ao longo da direção ρ , um deslocamento edge é formado;
- (iii) ao longo da direção θ , o que implica a adição ou remoção de uma cunha de material, leva a uma desclinação [ver Fig. 2.3(b)].

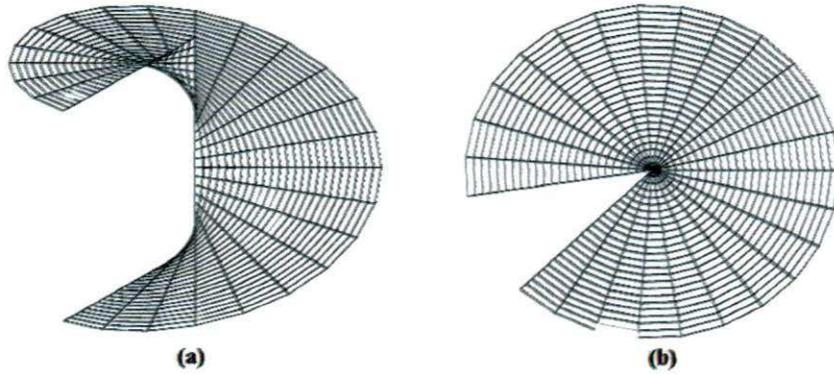


Figura 2.13: (a) Deslocamento tipo hélice bidimensional. (b) Desclinação bidimensional. Fonte: Referência[9].

A combinação de (i) e (iii) produz um defeito topológico denominado Despiração. Este defeito possui duas singularidades cônicas, uma devido à torção e a outra devido à curvatura. Neste caso, a despiração corresponde a junção de dois tipos de defeitos: desclinação e deslocação. Por sua vez, a métrica que descreve um meio com despiração, em coordenadas cilíndricas, é da forma[12]

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = (dz + \beta d\varphi)^2 + \alpha^2 \rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2. \quad (2.2-7)$$

No caso da métrica que aparece na expressão (2.2-7), o vetor de Burgers tem apenas a componente b_z não-nula. Lembrando que, a intensidade do vetor de Burgers e o parâmetro β estão relacionados através da expressão, $b_z = 2\pi\beta$, que corresponde à distância no deslocamento dos átomos ao redor da discordância. Já α é o parâmetro que define o déficit angular $\alpha = 1 + \frac{\lambda}{2\pi}$. Para $\beta = 0$ a métrica será semelhante à desclinação remoção ($\alpha < 1$) ou inserção ($\alpha > 1$) de material.

Em resumo, através da geometria de Riemann-Cartan, podemos identificar o tensor de torção com a densidade de superfície das deslocações e o tensor da curvatura com a densidade de superfície das desclinações. As relações entre as noções Físicas e Geométricas são resumidas na tabela 2.1[45].

Deformações Elásticas	$R_{\mu\nu}^{ij} = 0$	$T_{\mu\nu}^i = 0$
Deslocação	$R_{\mu\nu}^{ij} = 0$	$T_{\mu\nu}^i \neq 0$
Desclinação	$R_{\mu\nu}^{ij} \neq 0$	$T_{\mu\nu}^i = 0$
Deslocação e desclinação	$R_{\mu\nu}^{ij} \neq 0$	$T_{\mu\nu}^i \neq 0$

Tabela 2.1: A relação entre a noção Física e Geométrica na Teoria Geométrica dos Defeitos.

O estudo de curvaturas tem se tornado uma alternativa disponível para manipulação de sistemas eletrônicos. Isso implica em aplicações importantes de sistemas bidimensionais curvos em sistemas nanoeletromecânicos, como sensores[58]. Além do mais, a possibilidade de fabricar dispositivos quânticos usando materiais flexíveis cresce com o entendimento do papel desempenhado pela geometria em determinadas propriedades elétricas desses sistemas. Neste contexto, os conceitos da mecânica quântica são indispensáveis para descrição de fenômenos em sistemas físicos microscópicos.

Capítulo 3

Mecânica Quântica

No início do século *XX* foram observados alguns fenômenos de natureza microscópica que contrariavam o conceito microscópico de partícula bem como o conceito de onda. A idéia de ondas de matéria apresentadas por Luis De Broglie serviu de base para o desenvolvimento da teoria da mecânica ondulatória formulada por Erwin Schrödinger que, no ano de 1926, apresentou uma equação diferencial de onda capaz de descrever o comportamento de uma partícula descrita por uma função de onda.

A maioria dos conhecimentos já adquiridos sobre os constituintes e a estrutura da matéria tem sido obtida, principalmente, por meio da física espectroscópica e da física de colisão de partículas[59]. Atualmente, aceleradores de partículas de alta energia permitem a realização de estudos sistemáticos sobre processos de colisões. As evidências experimentais envolvendo processos de colisão levaram os físicos a acreditar que, em última instância, a matéria é constituída de *quarks* e *leptons*[60].

Neste capítulo, apresentaremos a equação de Schrödinger para as ondas de matéria que proporcionou o surgimento da mecânica quântica. Além disso, iremos abordar alguns aspectos da teoria quântica de espalhamento não-relativístico, sem levar em consideração a estrutura das partículas incidentes sobre os centros de espalhamentos. Para uma abordagem mais detalhada, veja as referências[59, 61, 62].

Na busca da generalização da teoria da relatividade restrita, Einstein se valeu de um princípio chamado de princípio de covariância geral¹. Podemos definir esse princípio da seguinte maneira[40]: “As equações que descrevem as leis da Física devem ter a mesma forma em todos os sistemas de coordenadas”. De acordo com este princípio, as leis da Natureza não podem depender da nossa escolha de sistema de coordenada uma vez que esta é completamente arbitrária e, portanto, desprovida de conteúdo físico. Este princípio é um guia valioso na obtenção das equações que descrevem as leis da Física. A maneira mais simples de incluir este tipo de interação consiste na generalização covariante da equação de movimento do sistema. No caso da equação que descreve um sistema quântico não-relativístico (equação de Schrödinger), devemos trocar a derivada convencional pela derivada covariante ∇_μ .

A equação de Schrödinger que descreve o movimento de uma partícula num espaço curvo tem sido motivo de discussão desde o início da mecânica quântica[65]. Uma característica que deve ser levada em conta quando a mecânica quântica não-relativística é generalizada para o cenário da relatividade geral é o fato de que o espaço-tempo contínuo será separado em espaço e tempo. Nessa seção, não vamos levar em conta nenhum procedimento rigoroso para fazermos à generalização da mecânica quântica no espaço curvo. O consenso geral é que, na ausência de potenciais externos, a equação de Schrödinger toma a forma covariante[66]

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{LB}^2\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (3.1-5)$$

onde ∇_{LB}^2 é o operador covariante de Laplace-Beltrami dado por $\nabla_{LB}^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(g^{ij}\sqrt{g}\partial_j)$, com $i, j = 1, 2, 3$ e $g = \det(g_{ij})$ é o determinante da parte espacial do tensor métrico g_{ij} .

Vale salientar que a generalização da mecânica quântica associada com a relatividade geral não apresenta elementos conflitante, pois, a natureza global da mecânica quântica contida no formalismo espaço de Hilbert² é compatível com o caráter local da descrição geométrica da relatividade geral, que por sua vez incorpora aspectos globais.

¹O princípio de covariância é uma das principais motivações que levaram Einstein a generalização da teoria da relatividade especial.

²Em 1909, David Hilbert definiu um espaço vetorial complexo, conhecido como *espaço de Hilbert* - no qual todos os vetores têm comprimentos ou *normas* finitas e sua dimensão é infinita[64].

3.2 Espalhamento

O primeiro experimento sobre colisões de partículas foi idealizado e realizado por Rutherford e seus colaboradores em 1911, quando utilizaram dados sobre o espalhamento de partículas alfa por finas folhas metálicas para deduzir a existência dos núcleos atômicos[59]. Os resultados das experiências envolvendo espalhamento tem nos fornecido muito do conhecimento que possuímos hoje sobre a estrutura dos átomos, núcleos, bem como sobre a natureza das partículas e de suas interações.

Os feixes de partículas produzidos por aceleradores de colisão ou originários de fontes radioativas são usados nas experiências como pontas de prova para o estudo da natureza dos elementos constituintes (moléculas, átomos, partículas, etc.) de alvos por eles bombardeados. Nestas experiências com espalhamento, as distribuições angular e de energia junto com a intensidade do feixe de partículas espalhadas fornecem informações reveladoras relacionadas com a interação entre os elementos do alvo e as partículas do feixe incidente. Os dados obtidos destas experiências são então usados para testar as predições feitas por modelos baseados na mecânica quântica.

3.2.1 Teoria Clássica de Espalhamento

Consideremos a trajetória de uma partícula espalhada por um núcleo, que tendo massa muito maior que a da partícula vamos admitir que permaneça em repouso durante o processo de colisão conforme a Fig.3.1. O *parâmetro de impacto* b é definido como a distância perpendicular entre o vetor velocidade de um projétil e o centro do objeto do qual está se aproximando. O ângulo de espalhamento θ pode ser expresso em termos desse parâmetro. Uma vez que a força agindo entre as partículas é central, o momento angular do sistema formado pelos dois núcleos se conserva na colisão.

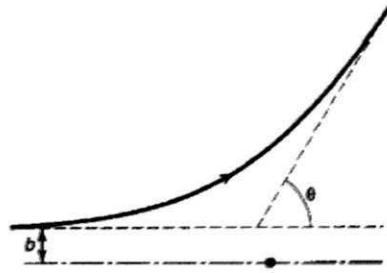


Figura 3.1: Parâmetro de impacto b e ângulo de dispersão θ . Representação da trajetória da partícula espalhada por um núcleo puntiforme de massa infinita. Fonte: Referência[61].

A expressão para o espalhamento Rutherford, bem como outras semelhantes que ocorrem na física nuclear, são geralmente expressas em termos do que se chama seção de choque, ou área efetiva de colisão[61]. Neste caso, podemos representar as partículas incidentes em um caminho infinitesimal de seção transversal de área $d\sigma$ espalhado em um ângulo sólido infinitesimal $d\Omega$ através da figura abaixo,

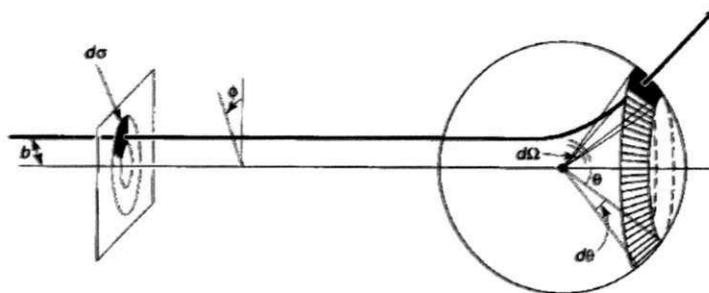


Figura 3.2: Partículas incidentes numa área $d\sigma$ espalhada num ângulo sólido $d\Omega$. Fonte: Referência[61].

onde, $d\sigma$ e $d\Omega$ estão relacionados a um fator que chamamos de *seção de choque diferencial para o espalhamento*

$$D(\theta) \equiv \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \implies d\sigma = D(\theta)d\Omega. \quad (3.2-6)$$

Fisicamente, $D(\theta)$ corresponde a distância de maior aproximação numa colisão frontal ($\theta = 180^\circ$). A seção de choque total σ será a soma em todas as direções do espaço, da seção

de choque diferencial[64], ou seja,

$$\sigma = \int D(\theta)d\Omega = \int \sigma(\theta) \implies \sigma = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sigma(\theta)\text{sen}\theta d\theta. \quad (3.2-7)$$

Quando as partículas envolvidas num processo de espalhamento são partículas quânticas, devemos descrevê-las por funções de onda. Na suposição de que o fluxo de partículas incidentes seja constante no tempo, as funções de onda consideradas são estacionárias e obtidas pela solução da equação de onda de Schrödinger independente do tempo[59].

3.2.2 Teoria Quântica de Espalhamento: Formalismo de Ondas Espaciais

Na teoria quântica de espalhamento, imaginemos uma onda plana incidente, propagando-se na direção do eixo z e sendo espalhada por um potencial espalhador $V(\vec{r})$ produzindo uma onda esférica.

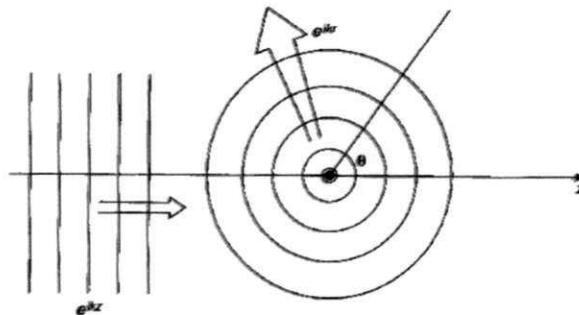


Figura 3.3: Espalhamento de ondas; uma onda plana incidente gera uma onda esférica saindo. Fonte: Referência[61].

A grandes distâncias desse potencial espalhador, a forma da função de onda $\psi(\vec{r})$ não é afetada pela presença do potencial $V(\vec{r})$, localizado na origem[59]. Desse modo, a função de onda espalhada deve ser constituída de duas partes: uma correspondente ao feixe incidente, $\psi(\vec{r})_{inc}$ e a outra correspondendo ao feixe espalhado pelo alvo, $\psi(\vec{r})_{esp}$. Numa condição assintótica, temos

$$\psi(\vec{r})_{r \rightarrow \infty} = \psi(\vec{r})_{inc} + \psi(\vec{r})_{esp}. \quad (3.2-8)$$

Como o potencial central independe do tempo, podemos escrever a equação Schrödinger da seguinte maneira

$$\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{r}) + [E - V(\vec{r})] \psi(\vec{r}) = 0. \quad (3.2-9)$$

Para partículas não relativísticas, as funções de onda estacionárias devem satisfazer à equação de onda de Schrödinger independente do tempo. Assim, fazendo $V(\vec{r}) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$, a expressão (3.2-9) transforma-se-á em

$$(\vec{\nabla}^2 + k^2) \psi(\vec{r}) = 0 \quad (3.2-10)$$

chamada *equação de Helmholtz*, onde $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$. Logo, a solução assintótica (para grandes valores de r) da equação (3.2-10) é dada pela onda incidente e por uma onda esférica devido ao espalhamento

$$\psi(\vec{r}, \theta) \cong e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (3.2-11)$$

Em que $f(\theta)$ é chamado de *amplitude de espalhamento*. Registra-se que a onda espalhada tem uma dependência de $\frac{1}{r}$, pois essa quantidade deve conservar a probabilidade da função de onda $|\psi(\vec{r}, \theta)|^2$.

Com a onda incidente ao longo do eixo z , o número de partículas incidentes por unidade de volume será dado por,

$$n_A = |\psi(z)_{inc}|^2 = \psi^*(z)_{inc} \psi(z)_{inc} = |e^{ikz}|^2 = 1. \quad (3.2-12)$$

Desse modo, o número de partículas espalhadas deve ser proporcional ao produto $d\Omega dt$ e também ao fluxo de partículas incidentes $\mathcal{F} = |e^{ikz}|^2 v$ [59]. Usando (3.2-6), podemos escrever

$$dN = D(\theta) d\Omega dt \mathcal{F}. \quad (3.2-13)$$

Observa-se que a equação acima corresponde ao fluxo espalhado radialmente multiplicado por $r^2 d\Omega$, sendo um elemento de área, normal à direção radial, coberta pelo ângulo sólido $d\Omega$.

$$dN = |\psi(\vec{r})_{esp}|^2 v r^2 d\Omega dt. \quad (3.2-14)$$

Das Eqs. (3.2-13) e (3.2-14), observa-se que a seção de choque diferencial é igual a amplitude de espalhamento

$$D(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2. \quad (3.2-15)$$

Então, para determinar a seção de choque de espalhamento, primeiramente é necessário calcular a função de onda estacionária com um comportamento assintótico, representado por (3.2-11). O método das ondas espaciais é baseado numa expansão da função de onda $\phi(\vec{r})$ em termos de autofunções do momento angular[59]. Essa expansão deve ser feita de tal forma que na condição assintótica ele seja consistente com a Eq.(3.2-11). Com essa consideração, torna-se possível obter uma expressão para a amplitude de espalhamento. Dependendo do tipo de coordenada usada no problema de espalhamento a forma das funções de onda em sua expansão pode ser diferenciada, pois, como sabemos, os problemas de espalhamento são mais frequentemente tratados em coordenadas esféricas com o eixo z ao longo da direção do feixe e a origem sendo o centro do espalhamento.

Na expansão de ondas parciais da amplitude de espalhamento, $f(\theta)$ é representado como uma soma sobre as ondas parciais

$$f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \frac{a_{\ell}}{2ik} P_{\ell}(\cos \theta), \quad (3.2-16)$$

onde $P_{\ell}(\cos \theta)$ são os polinômios de Legendre, a_{ℓ} é um número complexo denominado amplitude de onda parcial e ℓ é o número quântico orbital. Em sequência, vamos usar a seguinte relação para e^{ikz} ($z = r \cos \theta$) conhecido por fórmula de Bauer[67]

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^{\ell} j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos \theta), \quad (3.2-17)$$

onde $j_{\ell}(kr)$ são as funções de Bessel esféricas, cuja expansão assintótica $kr \gg \ell$ de $j_{\ell}(kr)$ é dada por[68]

$$j_{\ell}(kr) \cong \frac{\text{sen}(kr - \frac{1}{2}\ell\pi)}{kr} \cong -\frac{1}{2kr} i e^{-i\ell\pi/2} [e^{ikr} - e^{-ikr} e^{i\ell\pi}], \quad (3.2-18)$$

considerando-se que, $e^{-i\ell\pi/2} = (-i)^{\ell}$, $e^{-i\ell\pi} = (-1)^{\ell}$ e $(-i) = i^{-1}$, a Eq.(3.2-17) torna-se

$$e^{ikr \cos \theta} \cong \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \frac{[e^{ikr} - (-1)^{\ell} e^{-ikr}]}{2ikr} P_{\ell}(\cos \theta). \quad (3.2-19)$$

Levando-se as expressões (3.2-16) e (3.2-19) na Eq.(3.2-11), resultará

$$\psi(\vec{r}, \theta) \cong \frac{1}{2ikr} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1)[(1 + a_{\ell})e^{ikr} - (-1)^{\ell}e^{-ikr}]P_{\ell}(\cos \theta). \quad (3.2-20)$$

Cada termo e^{ikr}/r indica uma onda esférica emergente, enquanto e^{-ikr}/r indica uma onda esférica incidente. Portanto,

$$\psi \cong \psi_{em} + \psi_{inc}. \quad (3.2-21)$$

Sabemos que o fluxo das ondas esféricas incidentes é dada por, $|e^{-ikr}|^2 = 1$. Já o fluxo das ondas esféricas emergentes é proporcional a

$$|S_{\ell}e^{ikr}|^2 = |S_{\ell}|^2, \quad S_{\ell} \equiv 1 + a_{\ell}. \quad (3.2-22)$$

Pelo princípio da conservação do fluxo (não acúmulo da densidade de probabilidade no infinito ou na origem), esses dois fluxos devem ser iguais[64].

$$|S_{\ell}|^2 = 1 \rightarrow |S_{\ell}| = 1. \quad (3.2-23)$$

A expressão acima nos mostra que S_{ℓ} pode ser representando em termos de um parâmetro real δ_{ℓ} , escolhido de modo que tenhamos

$$S_{\ell} = e^{2i\delta_{\ell}}. \quad (3.2-24)$$

Como o espalhamento pode mudar apenas a fase de cada onda emergente, e não o seu módulo, o parâmetro real δ_{ℓ} é denominado de *deslocamento de fase (Phase Shift)*. Assim, usando-se (3.2-22), a expressão (3.2-16) tomará a seguinte forma

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1)[S_{\ell} - 1]P_{\ell}(\cos \theta). \quad (3.2-25)$$

Com o uso de (3.2-24) em (3.2-25), obtemos

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1)e^{i\delta_{\ell}} \text{sen}\delta_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta). \quad (3.2-26)$$

Usando a primeira parte da equação (3.2-18), podemos reescrever a equação (3.2-17) da seguinte forma

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^{\ell} \frac{\text{sen} \left(kr - \frac{1}{2} \ell \pi \right)}{kr} P_{\ell}(\cos \theta) \quad (3.2-27)$$

Assim, usando (3.2-26) e (3.2-27) em (3.2-11), obtemos a forma assintótica da função de onda $\psi(\vec{r})$ dada por

$$\psi(\vec{r}) \cong \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_{\ell} \text{sen} \left(kr - \frac{\pi \ell}{2} + \delta_{\ell} \right)}{kr} P_{\ell}(\cos \theta) \quad (3.2-28)$$

onde $B_{\ell} = (2\ell + 1) i^{\ell} e^{i\delta_{\ell}}$.

Observa-se que a probabilidade de espalhamento de uma partícula em um dado ângulo, é determinado pela amplitude de espalhamento ou pelo quadrado do módulo da amplitude de espalhamento.

Na seção 4.2 veremos uma aplicação do método das ondas parciais³ em coordenadas cilíndricas, onde toda a informação física de interesse está na amplitude da onda espalhada.

³A vantagem desse método é que ele é capaz de fornecer uma boa aproximação para partículas incidentes com baixa energia, o tratamento por ondas parciais é uma complementação para a aproximação de Born.

Capítulo 4

Sistemas Quânticos com Massa Variando com a Posição

A influência dos defeitos em matéria condensada nas quantidades físicas de um sistema quântico pode ser compreendida através da abordagem geométrica, onde as condições de contorno impostas pelo defeito serão incorporadas à métrica. Esta abordagem geométrica está baseada na correspondência, do ponto de vista matemático, que existe entre a teoria de defeitos em sólidos e a teoria da gravitação. Neste capítulo, analisaremos a influência da topologia sob os estados ligados de uma carga com massa variável no espaço-tempo de uma despiração, submetido a um campo magnético uniforme orientado ao longo do eixo z . Discutiremos ainda o espalhamento quântico não-relativístico dessa partícula que se move em tal espaço-tempo.

4.1 Níveis de Landau na Presença de uma Despiração com Massa Variando na Posição

Em mecânica quântica, um nível de energia é um estado quântico (de um elétron, átomo ou molécula, por exemplo) cuja energia está bem definida ao longo do tempo. Na presença de um campo magnético devemos considerar dois aspectos: efeito sobre o spin do elétron e o efeito sobre a carga, que afeta os auto-estados de energia. Considerando um elétron na presença de um campo magnético estático e uniforme, os autovalores de energia dos elétrons

são

$$\mathcal{E}_{n,k} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1-1)$$

Os autovalores para diferentes n 's (*níveis quantizados de energia*) caracterizam os chamados *níveis de Landau*. Comparando a energia dada por (4.1-1) com a energia de um elétron livre na ausência de campos magnéticos, ou seja, $\left[\frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right]$, notamos que, uma vez que não há componentes da força de Lorentz na direção z , a energia do movimento nessa direção não é afetada pelo campo. Entretanto, a energia do movimento perpendicular ao campo é quantizada, num fenômeno conhecido como *quantização orbital*. O conjunto de todos os estados eletrônicos de um dado n é chamado de *n-ésimo nível de Landau*.

Devido o acoplamento do campo magnético com uma carga surge uma força magnética que dá origem a uma aceleração nula na direção do campo e centrípeta no plano perpendicular ao mesmo, fazendo com que na ausência de colisões, a projeção da órbita de um elétron sobre o plano perpendicular ao campo seja um círculo, que é percorrido com frequência angular $\omega_c = \frac{eB}{mc}$, conhecida como *frequência ciclotron*.

Quando dois ou mais diferentes estados quânticos possuem o mesmo nível de energia temos um nível degenerado. O número de estados diferentes em um particular nível de energia é chamado nível de degenerescência. A presença de um campo magnético desfaz essa degeneração, uma vez que interage de diferentes maneiras com os elétrons de diferentes números quânticos, modificando ligeiramente suas energias. As órbitas de elétrons se tornam quantificáveis e exibem níveis discretos de energia. Os níveis de Landau têm sido bastante estudados nos últimos anos com o surgimento do efeito Hall quântico[13], pois o estudo de elétrons e buracos submetidos a campos magnéticos é de grande importância para a compreensão desse efeito.

Para estudar as propriedades elétricas dos metais e semicondutores, por exemplo, é necessário entender como um elétron se comporta no material sob a ação de um campo elétrico ou magnético externo. Neste caso, observar-se que a rede cristalina altera a dependência da

energia com o momentum, que corresponde a mudar a massa do elétron. Desse modo, o elétron no cristal age semelhante a um elétron livre porém com um massa efetiva[54].

Sistemas com massa efetiva espacialmente dependentes, são muito úteis para estudar as propriedades físicas de várias microestruturas. Aplicações especiais em matéria condensada são encontradas na investigação de propriedades eletrônicas de semicondutores[34], heteroestruturas de semicondutores[69], etc. Estas aplicações estimularam o desenvolvimento de vários métodos e técnicas para estudar sistemas de massa que dependem da posição. A solução da equação de Schrödinger com massa variável com a posição tem atraído a atenção de muitos pesquisadores[24]-[33]. Recentemente, várias contribuições surgiram para soluções da equação de onda nesses sistemas[19, 20]. A motivação maior para se estudar esses sistemas com massas variáveis são as consideráveis aplicações nos diferentes ramos da ciência dos materiais e na Física da Matéria Condensada[27]-[32].

Nessa seção estudaremos a influência da topologia e da dependência da massa nos níveis de Landau na presença de uma despiração sobre o espectro de energia de partículas carregadas (elétrons ou buracos) na presença de um campo magnético paralelo à linha de despiração, considerando o comportamento da massa sendo da forma

$$m(\rho) = M(1 + \mu\lambda^2\rho^2), \quad (4.1-2)$$

onde, μ corresponde a um parâmetro escalar real, λ corresponde ao comprimento de onda de De Broglie[28] e ρ a coordenada radial planar (em coordenadas cilíndricas).

Para determinar os níveis de Landau vamos considerar a equação de Schrödinger independente do tempo (3.1-2) escrita no espaço dotado desta métrica, onde incorpora as condições de contorno estabelecidas pelo defeito. O operador Hamiltoniano correspondente à uma partícula carregada, na presença de um potencial vetor no espaço cuja geometria é descrita pelo tensor métrico g_{ij} , é dado por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m\sqrt{g}} \left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right) \left[\sqrt{g} g^{ij} \left(p_i - \frac{e}{c} A_j \right) \right]. \quad (4.1-3)$$

Considerando uma partícula submetida a um campo magnético uniforme da direção z , o potencial vetor possui uma única componente não-nula, compatível com a configuração do campo B_z em um espaço cônico dado por

$$\vec{A}(\rho) = A_\varphi(\rho) = \frac{B\rho}{2\alpha} \hat{e}_\varphi. \quad (4.1-4)$$

Substituindo (4.1-3) e (4.1-4) em (3.1-2), encontramos a seguinte expressão para equação de Schrödinger nesta geometria

$$-\frac{\hbar^2}{2m(\rho)} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\alpha^2 \rho^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] + \frac{e^2 B^2 \rho^2}{8m(\rho)c^2 \alpha^2} + \frac{iB\hbar e}{2m(\rho)c\alpha^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \quad (4.1-5)$$

Para resolvermos a equação de Schrödinger (4.1-5), utilizaremos o método de separação de variáveis, ou seja, assumiremos que a autofunção pode ser escrita da seguinte forma:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \mathcal{R}(\rho)\Phi(\varphi)Z(z), \quad (4.1-6)$$

consideraremos o seguinte *ansatz* como solução das autofunções:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \mathcal{R}(\rho)e^{i\ell\varphi}e^{ik_z z}, \quad (4.1-7)$$

onde, ℓ ($\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), é chamado de número quântico magnético, pois define a separação entre os níveis quando o átomo é colocado em um campo magnético. k_z é o número de onda na direção z , e sua interpretação está ligada ao comportamento espacial da onda.

Substituindo a função de onda (4.1-7) na equação (4.1-5), obtemos a seguinte equação radial

$$\frac{d^2 \mathcal{R}(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{R}(\rho)}{d\rho} + \left[\frac{Be}{\hbar c \alpha^2} (\ell - \beta k_z) - \frac{e^2 B^2 \rho^2}{4\hbar c^2 \alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2 \rho^2} (\ell - \beta k_z)^2 \right] \mathcal{R}(\rho) + \Omega^2 \mathcal{R}(\rho) = 0, \quad (4.1-8)$$

onde $\Omega^2(\rho) = \frac{2M}{\hbar^2} (1 + \mu\lambda^2 \rho^2) E - k_z^2$.

Para solucionarmos a equação acima analisemos o seu comportamento assintótico:

I) Para $\rho \rightarrow 0$, temos

$$\frac{d^2 \mathcal{R}(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{R}(\rho)}{d\rho} - \frac{(\ell - \beta k_z)^2}{\alpha^2 \rho^2} \mathcal{R}(\rho) = 0. \quad (4.1-9)$$

Vamos fazer um *ansatz* com $\mathcal{R}(\rho) = \rho^\gamma$, onde γ é uma constante. Substituindo-o em (4.1-9), obtemos a seguinte solução

$$\mathcal{R}(\rho) \longrightarrow \rho^{\frac{|\ell - \beta k_z|}{\alpha}}. \quad (4.1-10)$$

II) Para $\rho \rightarrow \infty$, teremos

$$\frac{d^2 \mathcal{R}(\rho)}{d\rho^2} - \left[\frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2 \alpha^2} - \frac{2M\mu\lambda^2 E}{\hbar^2} \right] \rho^2 \mathcal{R}(\rho) = 0. \quad (4.1-11)$$

Como solução deste caso, temos

$$\mathcal{R}(\rho) \longrightarrow C \exp \left[-\frac{T}{2\alpha} \rho^2 \right], \quad (4.1-12)$$

onde, $\frac{T}{\alpha} = \left(\frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2 \alpha^2} - \frac{2M\mu\lambda^2 E}{\hbar^2} \right)^{1/2}$, C corresponde a uma constante de normalização.

Agora conectando as duas equações assintóticas através de uma função $F(\rho)$ que faz a interpolação entre as soluções assintóticas, teremos,

$$\mathcal{R}(\rho) = C \exp \left[-\frac{T}{2\alpha} \rho^2 \right] \rho^{\frac{|\ell - \beta k_z|}{\alpha}} F(\rho). \quad (4.1-13)$$

Como (4.1-13) corresponde a uma solução geral para $R(\rho)$, a substituímos em (4.1-8) e encontramos a seguinte equação para $F(\rho)$:

$$\rho \frac{d^2}{d\rho^2} F(\rho) + \left[\mathcal{A} - \frac{2T\rho^2}{\alpha} \right] \frac{d}{d\rho} F(\rho) + \left[\mathcal{C} - \frac{2T}{\alpha} - \frac{2|\ell - \beta k_z|T}{\alpha^2} \right] \rho F(\rho) = 0, \quad (4.1-14)$$

onde, definimos os seguintes parâmetros

$$\mathcal{A} \equiv \frac{2|\ell - \beta k_z|}{\alpha} + 1 \quad \mathcal{C} \equiv \frac{2ME}{\hbar^2} + \frac{eB(\ell - \beta k_z)}{\hbar\alpha^2 c} - k_z^2. \quad (4.1-15)$$

Introduzindo novas coordenadas em (4.1-14) tal que, $\rho = \sqrt{\frac{\alpha x}{T}}$, obtemos

$$x \frac{d^2}{dx^2} F(x) + \left(\frac{\mathcal{A}}{2} - x \right) \frac{d}{dx} F(x) - \left(-\frac{\mathcal{C}\alpha}{4T} + \frac{1}{2} + \frac{|\ell - \beta k_z|}{2\alpha} \right) F(x) = 0. \quad (4.1-16)$$

Dessa maneira a equação (4.1-16) representa uma equação diferencial *hipergeométrica confluyente*[68, 70], ver apêndice A, cuja solução é dada por,

$$F(x) = {}_1F_1 \left(-\frac{C\alpha}{4T} + \frac{1}{2} + \frac{|\ell - \beta k_z|}{2\alpha}; \frac{\mathcal{A}}{2}; x \right). \quad (4.1-17)$$

Em termo da variável ρ , teremos

$$F(\rho) = {}_1F_1 \left[-\frac{C\alpha}{4T} + \frac{1}{2} + \frac{|\ell - \beta k_z|}{2\alpha}; \frac{1}{2} + \frac{|\ell - \beta k_z|}{\alpha}; \left(\frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2 \alpha^2} - \frac{2M\mu\lambda^2 E}{\hbar^2} \right)^{1/2} \rho^2 \right]. \quad (4.1-18)$$

A forma assintótica para a função hipergeométrica confluyente, quando $\rho \rightarrow \infty$, é[68]:

$${}_1F_1(a; b; z) \longrightarrow \frac{\Gamma(b)(-z)^{-1}}{\Gamma(b-a)} + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b}. \quad (4.1-19)$$

Em que: $a = -\frac{C\alpha}{4T} + \frac{1}{2} + \frac{|\ell - \beta k_z|}{2\alpha}$, $b = \frac{1}{2} + \frac{|\ell - \beta k_z|}{\alpha}$ e $z = \left(\frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2 \alpha^2} - \frac{2M\mu\lambda^2 E}{\hbar^2} \right)^{1/2} \rho^2$. Como estamos analisando estados ligados, devemos ter que $\mathcal{R}(\rho) \rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow \infty$. O primeiro termo de (4.1-19) anula-se pelo fato de termos uma potência negativa. O segundo termo só será nulo se $\Gamma(a) \rightarrow \pm\infty$, com isso a série converge desde que $a = -n$, onde ($n = 0, 1, 2, \dots$)[67, 70].

Logo, a equação (4.1-18) diverge a menos que,

$$-\frac{C\alpha}{4T} + \frac{1}{2} + \frac{|\ell - \beta k_z|}{2\alpha} = -n. \quad (4.1-20)$$

Desse modo, substituindo (4.1-15) e $T = \left(\frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2 \alpha^2} - \frac{2M\mu\lambda^2 E}{\hbar^2} \right)^{1/2} \alpha$, em (4.1-20), obtemos

$$\frac{4M^2 E^2}{\hbar^4} + \left(\frac{4M}{\hbar^2} \tilde{a} + \tilde{b} \right) E + \tilde{a}^2 - \tilde{d} = 0. \quad (4.1-21)$$

Os termos \tilde{a} , \tilde{b} e \tilde{d} , são dados por

$$\tilde{a} \equiv \frac{eB(\ell - \beta k_z)}{\hbar\alpha^2 c} - k_z^2 \quad e \quad \tilde{b} \equiv \frac{32M\mu\lambda^2 \tilde{n}^2}{\hbar^2} \quad (4.1-22)$$

$$\tilde{d} \equiv \frac{4\tilde{n}^2 e^2 B^2}{\hbar^2 c^2 \alpha^2} \quad e \quad \tilde{n} \equiv n + \frac{1}{2} + \frac{|\ell - \beta k_z|}{2\alpha}. \quad (4.1-23)$$

Finalmente, substituindo (4.1-22), (4.1-23) em (4.1-21), obtemos o seguinte resultado para o espectro de energia na presença de uma despiração com massa variando com a posição[71]

$$E = \frac{\hbar\omega_B}{2\alpha} \left\{ \frac{\hbar c\alpha}{4eBM} \left[32\mu\lambda^2 M \left(\frac{8MeB}{\hbar c\alpha^2} (\ell - \beta k) - 8Mk^2 + 32\mu\lambda^2 M \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|\ell - \beta k|}{2\alpha} \right)^2 \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|\ell - \beta k|}{2\alpha} \right)^2 + 64 \frac{M^2 e^2 B^2}{\hbar^2 c^2 \alpha^2} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|\ell - \beta k|}{2\alpha} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\ \left. - \frac{(\ell - \beta k)}{\alpha} - 16 \frac{\hbar c\alpha}{eB} \mu\lambda^2 \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|\ell - \beta k|}{2\alpha} \right)^2 \right\} + \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \quad (4.1-24)$$

onde $\omega_B = \frac{eB}{Mc}$ é chamada *frequência ciclotron* adquirida por elétrons que se movem em um plano na presença de um campo magnético perpendicular.

Nessa expressão, observar-se que a presença do defeito quebra a degenerescência dos níveis de energia. Comparado com os casos da desclinação e deslocação, a degenerescência é mais fortemente quebrada devido a influência de dois parâmetros α e β . Além disso, temos uma modificação nos níveis de energia devido à massa variável através do parâmetro μ .

Note que se tomar $\alpha = 1$, teremos o resultado para deslocação com massa variável, ou seja,

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar\omega_B}{2} \left\{ \frac{\hbar c}{4eBM} \left[32\mu\lambda^2 M \left(\frac{8MeB}{\hbar c} (\ell - \beta k_z) - 8Mk_z^2 + 32\mu\lambda^2 M \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|\ell - \beta k_z|}{2} \right)^2 \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|\ell - \beta k_z|}{2} \right)^2 + 64 \frac{M^2 e^2 B^2}{\hbar^2 c^2} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|\ell - \beta k_z|}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\ \left. - (\ell - \beta k_z) - 16 \frac{\hbar c}{eB} \mu\lambda^2 \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|\ell - \beta k_z|}{2} \right)^2 \right\} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2M} \quad (4.1-25)$$

No caso $\beta = 0$ será semelhante a uma desclinação com massa variando com a posição, dada por

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar\omega_B}{2\alpha} \left\{ \frac{\hbar c\alpha}{4eBM} \left[32\mu\lambda^2 M \left(\frac{8MeB}{\hbar c\alpha^2} \ell - 8Mk_z^2 + 32\mu\lambda^2 M \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|\ell|}{2\alpha} \right)^2 \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|\ell|}{2\alpha} \right)^2 + 64 \frac{M^2 e^2 B^2}{\hbar^2 c^2 \alpha^2} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|\ell|}{2\alpha} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\ \left. - \frac{\ell}{\alpha} - 16 \frac{\hbar c\alpha}{eB} \mu\lambda^2 \left(n + \frac{1}{2} + \frac{|\ell|}{2\alpha} \right)^2 \right\} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2M} \quad (4.1-26)$$

Como teste de consistência, se fizermos $\mu = 0$, teremos a expressão correspondente aos níveis de Landau na presença de uma despiração com massa constante[13]

$$E = \frac{\hbar\omega_B}{\alpha} \left(n + \frac{|\ell - \beta k_z|}{2\alpha} - \frac{(\ell - \beta k_z)}{2\alpha} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k^2}{2M}, \quad (4.1-27)$$

Logo, a função de onda (4.1-7) será expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \varphi, z) = & C e^{ik_z z} e^{i\ell\varphi} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{M^2 \omega_c^2}{4\hbar^2 \alpha^2} - \frac{2M\mu\lambda^2 E}{\hbar^2} \right)^{1/2} \rho^2 \right] \rho^{\frac{|\ell - \beta k_z|}{\alpha}} \\ & F_1 \left[-n; \frac{1}{2} + \frac{|\ell - \beta k_z|}{\alpha}; \left(\frac{M^2 \omega_c^2}{4\hbar^2 \alpha^2} - \frac{2M\mu\lambda^2 E}{\hbar^2} \right)^{1/2} \rho^2 \right] \end{aligned} \quad (4.1-28)$$

onde, observamos que a função de onda carrega a informação da despiração através dos parâmetros α e β , e também da massa variável através do parâmetro μ .

4.2 Espalhamento Quântico não-relativístico por uma Despiração com Massa Variável

Nesta seção, investigaremos o espalhamento de uma partícula quântica com massa variando com a posição não-relativística por uma despiração na presença de um fluxo magnético. Seguindo o método das ondas parciais, calcularemos o deslocamento de fase e a amplitude de espalhamento para este sistema. Como sabemos, algumas das informações mais importantes sobre a interação entre uma partícula teste e um alvo são dadas pelas amplitudes de espalhamento $f(\varphi)$, que por sua vez, dependem do ângulo de mudança de fase, δ_l .

Imaginemos um tubo de campo magnético cilíndrico que seja infinito, isso nos dá uma configuração de campo magnético uniforme em todo o espaço, no qual uma partícula se movimenta na presença de um fluxo magnético Φ através da superfície $z = const.$, associado ao potencial vetor dado por

$$A_\varphi = -\frac{\Phi}{2\pi\rho}, \quad \rho < R, \quad (4.2-29)$$

gerando um campo magnético confinado no núcleo do defeito. Estamos assumindo que este campo magnético está confinado dentro de uma região cercada pelo cilindro. Esta vai ser

considerada a fim de obter uma visão mais geral das implicações do efeito quântico associado a este cenário.

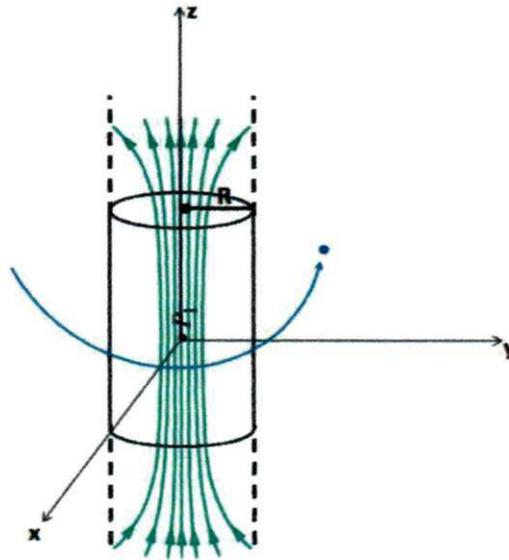


Figura 4.1: Confinamento do campo magnético numa região cilíndrica.

Recentemente, defeito no espaço geométrico cilíndrico é aplicado ao comportamento do elétron no sistema que pode ser considerado como um modelo simplificado de um nanotubo de parede dupla[72]. Ao resolver a equação Schrödinger na região do espaço com defeitos geométricos cilíndrico, exploramos a influência de defeitos geométricos, sobre o *gap* de energia e distribuição de carga[72]. A abordagem geométrica, pode ser útil para uma melhor compreensão qualitativa das propriedades eletrônicas dos nanosistemas.

O campo magnético em termos do fluxo pode ser calculado utilizando o gauge coulombiano $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, onde $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Logo

$$B_z = \frac{\alpha\Phi}{\pi\rho} \quad (4.2-30)$$

Neste caso a expressão do Hamiltoniano será dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{\hbar^2}{2m(\rho)} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\alpha^2 \rho^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \\ & + \frac{ie\hbar\Phi}{2\pi m(\rho)c\alpha\rho^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{e^2\Phi}{8\pi m(\rho)c^2\alpha^2}. \end{aligned} \quad (4.2-31)$$

Fazendo o mesmo procedimento da seção anterior, teremos a equação radial escrita por

$$\rho^2 \frac{d^2 \mathcal{R}(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{d\mathcal{R}(\rho)}{d\rho} + \left\{ \Omega^2 \rho^2 - \left[\frac{(\ell - \beta k_z)}{\alpha} - \gamma \right]^2 \right\} \mathcal{R}(\rho) = 0, \quad (4.2-32)$$

onde definimos, $\gamma = \frac{e\Phi}{ch}$ e $\Omega^2(\rho) = \frac{2M}{\hbar^2}(1 + \mu\lambda^2\rho^2)E - k_z^2$.

A equação acima é uma equação diferencial de Bessel, *ver apêndice A.2*, e tem como solução

$$\mathcal{R}_\ell(\rho) = a_\ell J_{|\nu_\ell|/\alpha}(\Omega\rho) + b_\ell N_{|\nu_\ell|/\alpha}(\Omega\rho), \quad (4.2-33)$$

onde, J e N , são as funções de Bessel de 1ª e 2ª espécies, respectivamente. As constantes a_ℓ e b_ℓ são fatores de normalização, e definimos $\nu_\ell = \ell - \alpha\gamma - \beta k_z$.

A região cilíndrica¹ que estamos analisando é infinita. Dessa maneira, o efeito produzido pelo cilindro é o mesmo para qualquer direção do eixo z . Nesse caso, o problema se reduz a uma análise bidimensional do espalhamento. Consequentemente, a solução geral dada pela superposição de todas as funções de ondas parciais será

$$\psi(\rho, \varphi) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} [a_\ell J_{|\nu_\ell|/\alpha}(\Omega\rho) + b_\ell N_{|\nu_\ell|/\alpha}(\Omega\rho)] e^{i\ell\varphi}. \quad (4.2-34)$$

Usamos coordenadas cilíndricas sugeridas pela geometria.

As paredes do tubo cilindro são impenetráveis, portanto as funções de ondas desaparecem em $\rho = R$.

$$\psi(\rho = R, \varphi) = 0. \quad (4.2-35)$$

Usando a condição de contorno em (4.2-34), obtemos

$$b_\ell = -a_\ell \frac{J_{|\nu_\ell|/\alpha}(\Omega R)}{N_{|\nu_\ell|/\alpha}(\Omega R)}. \quad (4.2-36)$$

Substituindo (4.2-36) em (4.2-34), teremos

$$\psi(\rho, \varphi) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{a_\ell}{N_{|\nu_\ell|/\alpha}(\Omega R)} [J_{|\nu_\ell|/\alpha}(\Omega\rho)N_{|\nu_\ell|/\alpha}(\Omega R) - J_{|\nu_\ell|/\alpha}(\Omega R)N_{|\nu_\ell|/\alpha}(\Omega\rho)] \right\} e^{i\ell\varphi}. \quad (4.2-37)$$

¹A propagação de ondas eletromagnéticas em cilindros metálicos ocios é importante em muitos dispositivos práticos. Se as extremidades do cilindro forem superfícies, ele é denominado cavidade. Cavidades ressonantes desempenham um papel crucial em muitos aceleradores de partículas.

Podemos, então representar convenientemente nossa solução $\psi(\rho, \varphi)$, como a soma das ondas incidentes e espalhadas (método das ondas parciais)

$$\psi(\rho, \varphi) = \psi_{inc}(\rho, \varphi) + \psi_{esp}(\rho, \varphi). \quad (4.2-38)$$

Como $\psi(\rho, \varphi)$ deve satisfazer assintoticamente a equação de Schrödinger para grandes valores de ρ (ou seja, $\rho \rightarrow \infty$). A solução assintótica neste caso será

$$\psi(\rho, \varphi)_{\rho \rightarrow \infty} \longrightarrow e^{i\Omega\rho \cos \varphi} + \sqrt{\frac{i}{\rho}} f(\varphi) e^{i\Omega\rho}. \quad (4.2-39)$$

Em sequência, vamos usar o seguinte desenvolvimento para $e^{i\Omega z}$ ($z = \rho \cos \varphi$), dado por

$$e^{i\Omega\rho \cos \varphi} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} i^{\ell} J_{\ell}(\Omega\rho) e^{i\ell\varphi}. \quad (4.2-40)$$

Essa é uma expansão de uma onda plana em uma série de ondas cilíndricas, conhecida como expansão de Jacobi-Anger[67]. A função $J_{\ell}(\Omega\rho)$ possui a forma assintótica dada por

$$J_{\ell}(\Omega\rho)_{\rho \rightarrow \infty} \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi\Omega\rho}} \cos\left(\Omega\rho - \frac{\ell\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (4.2-41)$$

Substituindo (4.2-41) em (4.2-40) e seguida em (4.2-39) teremos

$$\psi(\rho, \varphi)_{\rho \rightarrow \infty} \longrightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi\Omega\rho}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left\{ e^{-i(\Omega\rho - \ell\pi - \frac{\pi}{4})} + e^{i(\Omega\rho - \frac{\pi}{4})} \right\} e^{i\ell\varphi} + \sqrt{\frac{i}{\rho}} f(\varphi) e^{i\Omega\rho}. \quad (4.2-42)$$

Agora fazendo $\rho \rightarrow \infty$ na Eq.(4.2-37) e usando (A.2-15) e (A.2-16), bem como as formas exponenciais das funções trigonométricas, obtemos

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \varphi)_{\rho \rightarrow \infty} \longrightarrow & \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{B}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi\Omega\rho}} \left[N_{|\nu_{\ell}|/\alpha}(\Omega R) \left(e^{i(\Omega\rho - \frac{|\nu_{\ell}|}{\alpha} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} + e^{-i(\Omega\rho - \frac{|\nu_{\ell}|}{\alpha} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \right) \right] e^{i\ell\varphi} \\ & + \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{B}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi\Omega\rho}} i J_{|\nu_{\ell}|/\alpha}(\Omega R) \left[\left(e^{i(\Omega\rho - \frac{|\nu_{\ell}|}{\alpha} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} - e^{-i(\Omega\rho - \frac{|\nu_{\ell}|}{\alpha} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \right) \right] e^{i\ell\varphi} \end{aligned} \quad (4.2-43)$$

onde $\mathcal{B} = \frac{\alpha}{N_{|\nu_{\ell}|/\alpha}(\Omega R)}$. Igualando (4.2-42) com (4.2-43), e comparando os coeficientes de $e^{i\Omega\rho}$ e $e^{-i\Omega\rho}$, teremos

$$\mathcal{B} = \frac{(-i)^{|\nu_{\ell}|} \gamma^{-\frac{\ell - \beta k z}{\alpha}} |^{-1} e^{i\pi\ell}}{H_{|\nu_{\ell}|/\alpha}^{(1)}(\Omega R)}. \quad (4.2-44)$$

O termo $H_{|\nu\ell/\alpha}^{(1)}(\Omega R) = J_{|\nu\ell/\alpha}(\Omega R) + iN_{|\nu\ell/\alpha}(\Omega R)$ é a função de Hankel de primeira espécie.

Dessa forma, observamos que a amplitude total de espalhamento pode ser escrita por,

$$f(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi\Omega}} [S_1(\varphi) - S_2(\varphi) - S_3(\varphi)] \quad (4.2-45)$$

onde,

$$S_1(\varphi) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{2i\delta_\ell + i\ell\varphi} \quad (4.2-46)$$

$$S_2(\varphi) = 2\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta(\varphi - 2\pi\ell) \quad (4.2-47)$$

e

$$S_3(\varphi) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} 2 \frac{J_{|\nu/\alpha}(\Omega R)}{H_{|\nu/\alpha}^{(1)}(\Omega R)} e^{(2i\delta_\ell + i\ell\varphi)}. \quad (4.2-48)$$

No que se segue vamos separar a amplitude total de espalhamento em duas partes, ou seja, aquela que corresponde à contribuição decorrente das características globais do defeito e da linha de fluxo magnético. Assim, usando (B.1-16) e (4.2-47) teremos a primeira parte da amplitude de espalhamento dada por

$$f(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Omega}} \left\{ \cos(\alpha\gamma - \beta k_z) \frac{\text{sen}(w_D)}{\cos(w_D) - \cos(\varphi)} + i\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \exp [i\pi(\alpha\gamma - \beta k_z) \delta(\varphi - w_D - 2\pi\ell) - \delta(\varphi + w_D - 2\pi\ell) - 2\delta(\varphi - 2\pi\ell)] \right\} \quad (4.2-49)$$

onde $w_D \equiv \pi(\alpha^{-1} - 1)$.

Na segunda parte, dado pela expressão (4.2-48), surge também a partir das características globais, os efeitos de blindagem associados a impenetrabilidade do cilindro e os da massa variável. Desse modo, teremos

$$f(\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\Omega}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} 2 \frac{J_{|\nu/\alpha}(\Omega R)}{H_{|\nu/\alpha}^{(1)}(\Omega R)} e^{(2i\delta_\ell + i\ell\varphi)}. \quad (4.2-50)$$

Para maiores detalhes das expressões acima, *ver apêndice B*.

A amplitude de espalhamento dada pelas equações (4.2-49) e (4.2-50) descrevem a combinação dos efeitos da dispersão, campo magnético e da massa variável. Todos são de origem global. Observamos que (4.2-48) está associado à blindagem via o parâmetro R , à topologia por meio do parâmetro ν , uma vez que, o mesmo depende de α e β e à variação de massa através de Ω que depende do parâmetro μ . Já (4.2-46) e (4.2-47) são de natureza topológica via α , β e φ .

Conclusões e Perspectivas

Como já mencionamos, diferentes tipos de objetos topológicos podem ter sido formados no Universo primitivo por um processo de transição de fase. Em meio às dificuldades teóricas e observacionais, um conjunto de idéias para se testar ou simular predições e novas propostas em gravitação foram lançadas nos últimos anos, ao que se denominam modelos análogos. Sua característica comum é que muitos sistemas em matéria condensada são descritos por equações formalmente equivalentes, ou muito parecidas nos devidos limites, às equações de diferentes sistemas gravitacionais. Abre-se assim uma janela para reproduzir, em laboratório, fenômenos que até o momento tem sido resultados teóricos contundentes, porém sem verificação experimental. Desse modo, podemos perceber a importância do estudo de defeitos topológicos em matéria condensada.

Nesta dissertação, analisamos os efeitos sobre os níveis de Landau num sistema atômico em uma despiração com massa variável através da teoria geométrica dos defeitos de Katanaev-Volovich. Para tal estudo, utilizamos a equação de Schrödinger. Neste caso, obtivemos uma expressão para os níveis de energia de uma partícula e observamos que, a presença do defeito quebra a degenerescência dos níveis de energia. Comparado com os casos da desclinação e deslocação, a degenerescência é mais fortemente quebrada devido a influência de dois parâmetros α e β . Além disso, temos uma modificação nos níveis de energia devido à massa variável (veja (4.1-24)). Note que se tomar $\alpha = 1$, teremos o resultado para deslocação e no caso $\beta = 0$ será semelhante a uma desclinação com massa variando com a posição.

Também no contexto da teoria geométrica dos defeitos em sólidos e no ponto de vista da mecânica quântica não-relativística, analisamos o espalhamento quântico desta partícula por uma despiração com fluxo magnético confinado numa região cilíndrica de um sistema quântico com massa variável. Neste caso, concluímos que a amplitude de espalhamento é afetada pela blindagem, pela topologia e pelo fato da massa variar com a posição (veja (4.2-48)).

Temos como perspectivas para extensão desse trabalho, fazermos os seguintes estudos: Explorar outros modelos de massas variáveis existentes na literatura[20, 33] na presença de uma despiração. Estes sistemas submetidos à diversos potenciais, tais como, oscilador harmônico, potencial coulombiano, potencial de um dipolo elétrico, entre outros.

Apêndice A

Funções Especiais

Neste apêndice apresentaremos algumas propriedades obedecidas pelas funções Hipergeométricas Confluentes e Bessel, as quais foram usadas para calcularmos os estados ligados e o espalhamento quântico na presença e de uma despiração.

A.1 Funções Hipergeométricas Confluentes

A equação hipergeométrica confluyente é definida por[68]

$$z \frac{d^2}{dz^2} w(z) + (b - z) \frac{d}{dz} w(z) - aw(z) = 0. \quad (\text{A.1-1})$$

Esta equação tem somente dois pontos singulares: um regular na origem ($z \rightarrow 0$) e um irregular no infinito ($z \rightarrow \infty$). O ponto singular irregular no infinito é formado pela confluência de dois pontos singulares regulares da equação hipergeométrica, isto é, pelos pontos 1 e ∞ [70].

A solução da equação diferencial (A.1-1) chamada *função hipergeométrica confluyente* será representada por

$$w(z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+n)n!} z^n \equiv {}_1F_1(a; b; z). \quad (\text{A.1-2})$$

Em termos de uma série (A.1-2) é

$${}_1F_1(a; b; z) = 1 + \frac{az}{b} + \frac{(a)_2 z^2}{(b)_2 2!} + \dots + \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!}, \quad (\text{A.1-3})$$

onde, $(a)_n = a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1)$, $(a)_0 = 1$.

Uma solução geral da equação hipergeométrica confluyente é dada por

$$w(z) = A_1 F_1(a; b; z) + Bz^{(1-b)} {}_1F_1(a-b+1; 2-b; z). \quad (\text{A.1-4})$$

Comportamento assintótico quando $|z| \rightarrow \infty$:

$${}_1F_1(a; b; z) \rightarrow \frac{\Gamma(b)(-z)^{-1}}{\Gamma(b-a)} + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b}. \quad (\text{A.1-5})$$

Em relação à convergência da série hipergeométrica confluyente temos[70]

- (i) A série converge para todo z se $b \neq -m$ e $m = 0, 1, 2, \dots$
- (ii) Se $b \neq -m$, $a = -n$, onde m e n são números inteiros não-negativos, a série converge.

A.2 Funções de Bessel

A equação diferencial de Bessel é dada por[68]

$$z^2 \frac{d^2 w_\nu(z)}{dz^2} + z \frac{dw_\nu(z)}{dz} + (z^2 - \nu^2) w_\nu = 0. \quad (\text{A.2-6})$$

Esta equação possui as seguintes soluções linearmente independentes

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k} \quad (\text{A.2-7})$$

e

$$N_\nu(z) = \frac{\cos \nu\pi J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\operatorname{sen} \nu\pi}. \quad (\text{A.2-8})$$

As funções $J_\nu(z)$ são chamadas de funções de Bessel de primeira espécie, e $N_\nu(z)$ é conhecida como funções de Bessel de segunda espécie ou funções de Neumann. Para ν não-inteiro, $N_\nu(z)$, claramente satisfaz a equação de Bessel. No caso para ν inteiro, então, $J_\nu(z)$ e $J_{-\nu}(z)$ são soluções linearmente independentes da equação (A.2-6), onde representamos por

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k} \quad (\text{A.2-9})$$

$$J_{-\nu}(z) = (-1)^\nu J_\nu(z) \quad (\text{A.2-10})$$

Por conseguinte, a solução mais geral de (A.2-6) para qualquer ν pode ser escrita como

$$w_\nu(z) = AJ_\nu(z) + BN_\nu(z) \quad (\text{A.2-11})$$

ou na forma

$$w_\nu(z) = C_1H_\nu^{(1)}(z) + C_2H_\nu^{(2)}(z). \quad (\text{A.2-12})$$

Qualquer condição de contorno que exija que a solução seja finita na origem automaticamente exclui $N_\nu(z)$. Ao contrário, na ausência de tal requisito, $N_\nu(z)$ deve ser considerada[67].

As funções, $H_\nu^{(1)}$ e $H_\nu^{(2)}$ são conhecidas por funções de Hankel de primeira e segunda espécies

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(z) \quad (\text{A.2-13})$$

e

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iN_\nu(z). \quad (\text{A.2-14})$$

Isso é exatamente análogo a considerar $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\text{sen}\theta$. Para argumentos reais, $H_\nu^{(1)}$ e $H_\nu^{(2)}$ são conjugados complexos. Poderemos ver melhor a extensão dessa analogia quando são consideradas as formas assintóticas.

Os comportamentos assintóticos das funções de Bessel para $|z| \rightarrow \infty$ são[67]

$$J_\nu(z) \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left[z - \frac{\pi}{2} \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (\text{A.2-15})$$

$$N_\nu(z) \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \text{sen} \left[z - \frac{\pi}{2} \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (\text{A.2-16})$$

$$H_\nu^{(1)}(z) \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp i \left[z - \frac{\pi}{2} \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (\text{A.2-17})$$

$$H_\nu^{(2)}(z) \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp -i \left[z - \frac{\pi}{2} \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (\text{A.2-18})$$

Apêndice B

Amplitude de Espalhamento

B.1 Cálculo da amplitude de espalhamento $f(\varphi)$

Fazendo o uso das equações (4.2-42) e (4.2-43) comparando os termos $e^{i\Omega\rho}$ e $e^{-i\Omega\rho}$ teremos,

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{B}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi\Omega\rho}} \left(N_{|\nu\ell|/\alpha}(\Omega R) e^{-i\left(\frac{|\nu\ell|\pi}{2\alpha}\right)} + iJ_{|\nu\ell|/\alpha}(\Omega R) e^{-i\left(\frac{|\nu\ell|\pi}{2\alpha}\right)} \right) e^{i\ell\varphi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi\Omega\rho}} \sum_{\ell=-\infty}^{\ell=\infty} e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\ell\varphi\right)} + \sqrt{\frac{i}{\rho}} f(\varphi) \quad (\text{B.1-1})$$

e

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{B}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi\Omega\rho}} \left(N_{|\nu\ell|/\alpha}(\Omega R) e^{-i\left(\frac{|\nu\ell|\pi}{2\alpha}\right)} - iJ_{|\nu\ell|/\alpha}(\Omega R) e^{-i\left(\frac{|\nu\ell|\pi}{2\alpha}\right)} \right) e^{i\ell\varphi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi\Omega\rho}} \sum_{\ell=-\infty}^{\ell=\infty} e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\ell\varphi+\ell\pi\right)}. \quad (\text{B.1-2})$$

Isolando \mathcal{B} através da equação (B.1-2), obtemos

$$\mathcal{B} = \frac{(-i)^{|\gamma - \frac{\ell - \beta k_z}{\alpha} - 1|} e^{i\pi\ell}}{H_{|\nu\ell|/\alpha}^{(1)}(\Omega R)}. \quad (\text{B.1-3})$$

Assim, substituindo (B.1-3) em (B.1-1) e colocando $e^{i\ell\varphi}$ em evidência, teremos

$$f(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{-2\pi\Omega}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{i\ell\varphi} \left\{ \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}\left(|\gamma - \frac{\ell - \beta k_z}{\alpha} - 1 - 2\ell\right)}}{H_{|\nu\ell|/\alpha}^{(1)}(\Omega R)} e^{-i\frac{\pi}{2}\left|\frac{\ell - \beta k_z}{\alpha} - \gamma\right|} \underbrace{\left[N_{|\nu\ell|/\alpha}(\Omega R) + iJ_{|\nu\ell|/\alpha}(\Omega R) \right]}_I - 1 \right\}. \quad (\text{B.1-4})$$

Nesse caso usamos, $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, onde $(-i) = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ e $\sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4}}$. O termo \mathcal{I} , que aparece da equação anterior, pode ser representado da seguinte maneira,

$$\frac{i}{i} \frac{[N_{|\nu_\ell|/\alpha}(\Omega R) + iJ_{|\nu_\ell|/\alpha}(\Omega R)] + J_{|\nu_\ell|/\alpha}(\Omega R) - J_{|\nu_\ell|/\alpha}(\Omega R)}{[J_{|\nu_\ell|/\alpha}(\Omega R) + iN_{|\nu_\ell|/\alpha}(\Omega R)]} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \left[1 - 2 \frac{J_{|\nu_\ell|/\alpha}(\Omega R)}{H_{|\nu_\ell|/\alpha}^{(1)}(\Omega R)} \right] \quad (\text{B.1-5})$$

Desse modo, a Eq.(B.1-4), será expressa por

$$f(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi\Omega}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}(\gamma - \frac{\ell - \beta k_z}{\alpha} - 2\ell + \frac{\ell - \beta k_z}{\alpha} - \gamma)} \left(1 - 2 \frac{J_{|\nu_\ell|/\alpha}(\Omega R)}{H_{|\nu_\ell|/\alpha}^{(1)}(\Omega R)} \right) - 1 \right\} e^{i\ell\varphi}. \quad (\text{B.1-6})$$

Do argumento da exponencial em (B.1-6), podemos obter o deslocamento de fase δ_ℓ para os casos em que, $\ell \geq [\alpha\gamma - \beta k_z]$ e $\ell < [\alpha\gamma - \beta k_z]$, respectivamente, será

$$\delta_\ell = -\frac{1}{2} [\ell\omega_D + \pi(\alpha\gamma - \beta k_z)] \quad (\text{B.1-7})$$

e

$$\delta_\ell = \frac{1}{2} [\ell\omega_D + \pi(\alpha\gamma - \beta k_z)] + \pi\ell \quad (\text{B.1-8})$$

onde, $\omega_D \equiv \pi(\alpha^{-1} - 1)$.

Assim, a expressão (B.1-6) pode ser escrita da seguinte maneira

$$f(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi\Omega}} \left[\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left(\underbrace{e^{(2i\delta_\ell + i\ell\varphi)} - e^{i\ell\varphi}}_{II} - 2 \frac{J_{|\nu_\ell|/\alpha}(\Omega R)}{H_{|\nu_\ell|/\alpha}^{(1)}(\Omega R)} \underbrace{e^{(2i\delta_\ell + i\ell\varphi)}}_{S_3} \right) \right]. \quad (\text{B.1-9})$$

A soma II da Eq. (B.1-9) será separado em dois termos:

$$\underbrace{\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{2i\delta_\ell + i\ell\varphi}}_{S_1(\varphi)} - \underbrace{\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{i\ell\varphi}}_{S_2(\varphi)}. \quad (\text{B.1-10})$$

Para resolvermos esta soma, vamos usar o método de regularização que consiste em acrescentar ao expoente de $S_2(\varphi)$ um fator convergente dentro da soma, ou seja, “ $i\epsilon$ ”, de tal forma a eliminar a divergência. Assim, teremos

$$S_2(\varphi) \equiv \sum_{\ell=0}^{\infty} \{ e^{i\ell(\varphi+i\epsilon)} + e^{i\ell(\varphi-i\epsilon)} \} - 1$$

$$S_2(\varphi) = \frac{1}{1 - e^{i(\varphi+i\epsilon)}} + \frac{1}{1 - e^{-i(\varphi-i\epsilon)}}. \quad (\text{B.1-11})$$

As exponenciais podem ser expandidas até primeira ordem. Neste caso, para $\varphi \ll 1$, temos

$$S_2(\varphi) = \frac{1}{-i(\varphi + i\epsilon)} + \frac{1}{i(\varphi - i\epsilon)} = 2\pi\delta(\varphi). \quad (\text{B.1-12})$$

Para $\varphi \neq 0$ ou periodicidade próxima de $2\pi\ell$, ϵ pode ser desprezado. Então, obtemos

$$S_2(\varphi) = 2\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta(\varphi - 2\pi\ell). \quad (\text{B.1-13})$$

Agora é necessário fazer uma regularização para que a soma S_1 seja definida. Neste caso, a regularização é feita de maneira análoga ao caso anterior e usando (B.1-7) e (B.1-8), teremos

$$S_1(\varphi) = \sum_{\ell=-\infty}^0 \exp \left\{ i \left[\ell\varphi - |\ell|\omega_D + \pi \left(\frac{\beta k_z}{\alpha} + \gamma \right) \right] \right\} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \exp \left\{ i \left[\ell\varphi - |\ell|\omega_D + \pi \left(\frac{\beta k_z}{\alpha} + \gamma \right) \right] \right\} - \exp \left[i\pi \left(\frac{\beta k_z}{\alpha} + \gamma \right) \right] \quad (\text{B.1-14})$$

ou simplesmente podemos representar a equação (B.1-14) da seguinte forma

$$S_1(\varphi) = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \{ \exp [i\ell(\varphi_- + i\epsilon)] + \exp [-i\ell(\varphi_+ - i\epsilon)] \} - 1 \right) e^{i\pi(\frac{\beta k_z}{\alpha} + \gamma)} \quad (\text{B.1-15})$$

onde, $\varphi_{\pm} = \varphi \pm \omega_D$.

Observar-se que (B.1-15) pode ser escrita por uma parte real e outra imaginária, ou seja,

$$S_1(\varphi) = \text{Re}[S_1] + i\text{Im}[S_1]. \quad (\text{B.1-16})$$

A parte real é dada por

$$\text{Re}[S_1] = i\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \exp [i\pi(\alpha\gamma - \beta k_z)] \delta(\varphi - \omega_D - 2\pi\ell) - \delta(\varphi + \omega_D - 2\pi\ell). \quad (\text{B.1-17})$$

Usando algumas identidades trigonométricas, a parte imaginária será expressa por

$$\text{Im}[S_1] = \cos(\alpha\gamma - \beta k_z) \frac{\text{sen}(\omega_D)}{\cos(\omega_D) - \cos(\varphi)} \quad (\text{B.1-18})$$

Logo, podemos representar a amplitude de espalhamento total (B.1-9) na forma

$$f(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi\Omega}} [S_1(\varphi) - S_2(\varphi) - S_3(\varphi)] \quad (\text{B.1-19})$$

Referências Bibliográficas

- [36] Hermann Minkowski, *The Principle of Relativity*, Nova York: Dover Publications, (1923).
- [37] Jeremy Gray, *The discovery of non-Euclidean geometry*, Studies in the History of Mathematics, Washington: The Mathematical Association of America, (1987).
- [38] Manfredo Perdigão do Carmo, *Geometria Riemanniana*, 4.ed. Rio de Janeiro: IMPA, (2008).
- [39] F. T. Falciano, *Geometria, espaço-tempo e gravitação: conexão entre conceitos da relatividade geral*, Rev. Bras. Ens. Fis. **4**, 4308 (2009).
- [40] S. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Chicago: Addison Wesley, (2003).
- [41] Ana Paula B. S, *O Desenvolvimento das Mecânicas não-euclidianas durante o século XIX*, Tese de Doutorado, São Paulo: Unicamp, (2006).
- [42] Wu Shin - Ting, *Notas de Aula: Introdução à Modelagem de Sólidos*, São Paulo: UNICAMP, (2006).
- [43] Nivaldo A. Lemos, *Mecânica Analítica*, 2ed., São Paulo: Editora Livraria da Física, (2007).
- [44] Charles Kittel, *Introdução à Física do Estado Sólido*, Tradução: Ronaldo Sérgio de Biasi. 8.ed., Rio de Janeiro: LTC, (2006).
- [45] M. O. Katanaev, *Introduction to the Geometric Theory of Defects*, arXiv:cond-mat/0502123v1 [cond-mat.mtrl-sci] 4 Feb (2005).
- [46] B. A. Bilby, R. Bullough et. al., R. Soc. London. A **231**, 263 (1955).
- [47] E. Kroner, Appl.Mech. Rev. **15**, 599 (1962).

Referências Bibliográficas

- [48] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
- [49] D. D. Sokolov and A. A. Starobinskii, *Sov. Phys. Dokl.* **22**, 312 (1977).
- [50] P. M. Chaikin and T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics*, Cambridge: University Cambridge, (1995).
- [51] A. J. Chiquito e Francisco Lanciotti, Jr. *Rev.Bras.Ens.Fis.* **26**, 315 (2004).
- [52] H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Mater*, vol.II, Singapore: World Scientific, (1989).
- [53] J. M. Ziman, *Model of Disorder*, Cambridge University Press, (1979).
- [54] Sergio Machado Rezende, *Materiasi e dispositivos eletrônicos*, 2.ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, (2004).
- [55] Moffatt W.G., Pearsall G. W. Wulff J., *The Structure and Properties of Materials: Structure*, v. 1. New York: Wiley, (1964).
- [56] TOD K. P., *Classic. Quantum Grav.* **11**, (1994).
- [57] Grigory E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet*, New York: Oxford, (2003).
- [58] Alexey A. Kovalev, Lorien X. Hayden, Gerrit E.W. Bauer et al, *Macrospin Tunneling and Magnetopolaritons with Nanomechanical Interference*, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 147203 (2011).
- [59] Waldemar Wolney Filho, *Mecânica Quântica*, Goiânia: UFG, (2002).
- [60] H. C. Ohanian, *Physics*, New York: Norton, (1985).
- [61] David J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, 2.ed., USA: Pearson Education Hall, (2005).

Referências Bibliográficas

- [62] Rafael de Lima Rodrigues, *Mecânica Quântica na Descrição de Schrödinger*, Rev.Bras.Ens.Fis. **1**, (1997).
- [63] Henrique Fleming, *Notas de Aula: Mecânica Quântica*, São Paulo: USP, (2007).
- [64] J. M. F. Bassalo, *Eletrodinâmica Quântica*, 2.ed., São Paulo: Livraria da Física, (2006).
- [65] L. de Broglie and Erwin Schrödinger, *Wave Mechanics*, Annln Phys. **79**, 748 (1960).
- [66] J. S. Dowker, Journal Physics. A **7**, 1256 (1974).
- [67] G. Arfken e H. J. Weber, *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*, 6.ed., Rio de Janeiro: Elsevier, (2007).
- [68] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Washington: National Bureau of Standards, (1964).
- [69] T. Gora and F. Williams, Phys. Rev. **177**, 1179 (1969).
- [70] Edmundo Capelas de Oliveira, *Funções Especiais com Aplicações*, 1.ed., São Paulo: Livraria da Física, (2005).
- [71] J.J. Souza, Geusa de A. Marques and V.B. Bezerra. *Landau Levels in the Presence of Topological Defects with Position-Dependent Mass*, a ser submetido, (2011).
- [72] Guilerne de Berredo-Peixoto, Mikhail O. Katanaev et. al., *Schrödinger equation in the space with cylindrical geometric defects and possible application to multi-wall nanotubes*, arXiv:1010.2913v1 [cond-mat.mes-hall] 14 Oct (2010).