

**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Secagem de Sólidos Esferoidais Usando o
Método de Galerkin**

**Autor: Suctony do Nascimento Farias
Orientador: Dr. Antonio Gilson Barbosa de Lima**

Campina Grande, Agosto de 2002

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Secagem de Sólidos Esferoidais Usando o Método de Galerkin

Autor: **Suetony do Nascimento Farias**

Orientador: **Dr. Antonio Gilson Barbosa de Lima**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Térmica e Fluídos

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campina Grande, Agosto de 2002.
PB - Brasil



F224s Farias, Suetony do Nascimento
Secagem de solidos esferoidais usando o metodo de
Galerkin / Suetony do Nascimento Farias. - Campina Grande,
2002.
65 f. : il.

Dissertacao (Mestrado em Engenharia Mecanica) -
Universidade Federal da Paraiba, Centro de Ciencias e
Tecnologia.

1. Engenharia Mecanica 2. Equacao de Difusao Transiente
3. Teoria da Difusao Liquida 4. Solidos Esferoidais 5.
Metodo de Galerkin 6. Termica e Fluidos 7. Dissertacao I.
Lima, Antonio Gilson Barbosa de, Dr. II. Universidade
Federal da Paraiba - Campina Grande (PB) III. Título

CDU 621(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

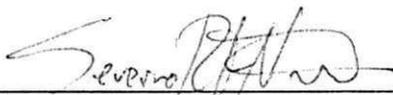
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Secagem de Sólidos Esferoidais Usando o
Método de Galerkin**

Dissertação Aprovada em 23 de Agosto de 2002.



Prof. Dr. Antonio Gilson Barbosa de Lima, Presidente
UFCG/CCT/DEM



Prof. Dr. Severino Rodrigues de Farias Neto
UFCG/CCT/DEQ



Prof. Dr. Celso Rosendo Bezerra Filho
UFCG/CCT/DEM

Campina Grande, Agosto de 2002.
PB - Brasil

DEDICATÓRIA

A Deus, por ter me dado a oportunidade de realizar esse trabalho, além de me orientar e acompanhar pelo caminho percorrido até aqui.

Aos meus queridos pais Durmeval Vieira de Farias e Maria Esmeralda do Nascimento Farias, por tudo que me deram, amor, carinho, compreensão, educação e condições de seguir pela vida.

À minha amada esposa Cássia Fabiana de Lima Rodrigues Farias, pelo seu amor e companhia nos momentos bons e difíceis da caminhada, com compreensão e sempre me dando força para seguir em frente.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que em sua infinita sabedoria tem me orientado pelos caminhos que devo seguir.

Agradecimentos especiais ao Professor Dr. Antonio Gilson Barbosa de Lima pela sua fundamental orientação, dedicação e ensinamentos prestados no desenvolvimento deste trabalho e a todos que contribuíram para o desenvolvimento do mesmo.

Aos meus pais, esposa e toda a minha família, pelo incentivo e apoio durante toda a caminhada.

A CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa de estudos.

Aos professores e funcionários da DEM/CCT/UFPB/CAMPUS II meus sinceros agradecimentos e em especial aos da área de Térmicas e Fluidos.

Ao meu amigo e companheiro de curso Brauner Gonçalves Coutinho pelo companheirismo, discussões e horas de estudos que ficamos juntos, assim como a todos os colegas de mestrado.

*Feliz o homem que acha sabedoria,
e o homem que adquire conhecimento;
porque melhor é a luz que ela dá do que o da prata,
e melhor a sua renda do que o ouro mais fino.
Mais preciosa é do que pérola,
e tudo o que podes desejar não é comparável a ela.*

Provérbios 3:13, 14 e 15

SUMÁRIO

1 Introdução	1
2 Revisão da Literatura	3
2.1 Considerações preliminares de secagem	3
2.2 Teoria e migração de umidade	4
2.3 Modelos de secagem	5
2.3.1 Teoria da difusão líquida	5
2.3.2 Teoria da capilaridade	7
2.3.3 Teoria da condensação-evaporação	8
2.3.4 Teoria de Krischer	8
2.3.5 Teoria de Luikov	8
2.3.6 Teoria de Philip e De Vries	9
2.3.7 Teoria de Fortes e Okos	9

2.4 Cinética de secagem e aquecimento do sólido	10
2.5 Coeficiente de transporte no processo de secagem	12
2.6 Transporte de calor e/ou massa em sólidos	13
3 Modelagem Matemática	16
3.1 A equação da difusão	16
3.2 Calculo de áreas e volumes de esferóides	25
4 Resultados e Discussões	27
5 Conclusões e Sugestões	43
5.1 Conclusões	43
5.2 Sugestões para futuros trabalhos	44
Referências Bibliográficas	45
Anexo	

RESUMO

FARIAS, Suetony do Nascimento, *Secagem de Sólidos Esferóides Usando o Método de Galerkin*, Campina Grande: Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal da Paraíba, 2002. 60 p. Dissertação (Mestrado).

Uma solução analítica da equação de difusão transiente, baseada na teoria da difusão líquida, para descrever a transferência de massa dentro de esferóides considerando coeficiente de difusão e condição de contorno constantes na fronteira do sólido, é apresentada. A equação de difusão, no sistema de coordenadas cilíndricas, usada para um caso bidimensional, foi resolvida usando o método de Galerkin. Resultados da distribuição de umidade e do teor de umidade médio ao longo do tempo para vários esferóides são apresentados e analisados.

Palavras Chave:

Secagem, Solução formal, Galerkin Method, Elipsóide, Esferóide.

ABSTRACT

FARIAS, Suetony do Nascimento, *Drying of spheroidal solids using Galerkin method*, Campina Grande: Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal da Paraíba, 2002. 60 p. Dissertação (Mestrado).

An analytical solution of the transient diffusion equation based on the liquid diffusion theory to describe mass transfer inside the spheroids by considering constants diffusion coefficient and equilibrium boundary condition at the surface of the solid is presented. The diffusion equation in the cylindrical coordinates system applied for two-dimensional case was solved using the Galerkin Method. Results of the moisture content distribution and average moisture content during drying process to many spheroids are presented and analyzed.

Key Words:

Drying, Exact solution, Galerkin method, Ellipsoid, Spheroid.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Cinética e aquecimento do sólido durante o processo de secagem.	11
Figura 3.1	Configuração generalizada de um sólido para definir funções de base.	20
Figura 3.2	Elipsóide de revolução e suas características.	23
Figura 4.1	Comparação entre os resultados obtidos neste trabalho e aqueles reportados na literatura para três esferóides.	28
Figura 4.2	Teor de umidade médio adimensional em função do número de Fourier para várias razões de aspectos.	29
Figura 4.3	Teor de umidade adimensional no centro do esferóide em função do número de Fourier para várias razões de aspectos.	31
Figura 4.4	Teor de umidade adimensional em função da coordenada radial r^* para vários números de Fourier em $z^* = 0$ para uma razão de aspecto $b/a = 0,5$.	32
Figura 4.5	Teor de umidade adimensional em função da coordenada longitudinal z^* para vários números de Fourier em $r^* = 0$ para uma razão de aspecto $b/a = 0,5$.	33
Figura 4.6	Teor de umidade adimensional em função da coordenada radial r^* para vários números de Fourier em $z^* = 0$ para uma razão de aspecto $b/a = 1,5$.	34
Figura 4.7	Teor de umidade adimensional em função da coordenada longitudinal z^* para vários números de Fourier em $z^* = 0$ para uma razão de aspecto $b/a = 1,5$.	35
Figura 4.8	Distribuição do teor de umidade adimensional com $b/a = 0,5$ em função das coordenadas cilíndricas para $t^* = 0,05$.	36
Figura 4.9	Distribuição do teor de umidade adimensional com $b/a = 0,5$ em função das coordenadas cilíndricas para $t^* = 0,10$.	37
Figura 4.10	Distribuição do teor de umidade adimensional com $b/a = 1,0$ em função das coordenadas cilíndricas para $t^* = 0,05$.	38
Figura 4.11	Distribuição do teor de umidade adimensional com $b/a = 1,0$ em função das coordenadas cilíndricas para $t^* = 0,10$.	38
Figura 4.12	Distribuição do teor de umidade adimensional com $b/a = 1,0$ em função das coordenadas cilíndricas para $t^* = 0,20$.	39
Figura 4.13	Distribuição do teor de umidade adimensional com $b/a = 1,5$ em função das coordenadas cilíndricas para $t^* = 0,05$.	40

Figura 4.14 Distribuição do teor de umidade adimensional com $b/a = 1,5$ em função das coordenadas cilíndricas para $t^* = 0,10$. 41

Figura 4.15 Distribuição do teor de umidade adimensional com $b/a = 1,5$ em função das coordenadas cilíndricas para $t^* = 0,20$. 42

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1	Modelos paramétricos empíricos expressando o coeficiente de difusão como função da temperatura e/ou do teor de umidade do meio poroso	7
Tabela 4.1	Área, volume e relação área/volume de esferóides para várias razões de aspectos.	29

NOMENCLATURA

Letras Latinas

a	Dimensão característica do sólido	[m]
A_i ,	Constante $i = 0, 1, 2, \dots, n$	[-]
\bar{A}	Matriz quadrada $N \times N$	[-]
b	Dimensão característica do sólido	[m]
\bar{B}	Matriz quadrada $N \times N$	[-]
C_n	Constantes	[-]
D	Coefficiente de difusão	[m ² /s]
d_{nj}	Constantes	[-]
\bar{d}_n	Vetor	[-]
$\partial M / \partial t$	Taxa de difusão	[1/s]
f_j	Elemento de um conjunto de funções de base	[-]
g_n	Constantes	[-]
M	Teor de umidade	[kg/kg]
M_0	Teor de umidade inicial	[kg/kg]
M_{critico}	Teor de umidade crítico	[kg/kg]
M_c	Teor de umidade de equilíbrio	[kg/kg]
\bar{M}	Teor de umidade médio	[kg/kg]
P_a	Pressão de vapor líquido no ar ambiente ao redor do sólido	[Pa]
P_w	Pressão de vapor líquido na superfície do sólido	[Pa]
r	Coordenada radial	[m]
r^*	Coordenada radial adimensional	[-]
\bar{r}	Vetor posição	[-]
R_0	Constante do gás 8314 J/(kg mol K)]	J/(kg mol K)]
S	Área do elipsóide	[m ²]
t	Tempo	[s]
t^*	Número de Fourier	[-]
T	Temperatura	[°C]
T_{abs}	Temperatura absoluta	[K]
T_{bu}	Temperatura de bulbo úmido	[°C]
V	Volume	[m ³]

V^*	Volume adimensional	[-]
x	Coordenada cartesiana	[m]
y	Coordenada cartesiana	[m]
z	Coordenada longitudinal	[m]
z^*	Coordenada longitudinal adimensional	[-]

Létras Gregas

∇	Gradiente	[-]
∇^2	Laplaciano	[-]
θ	Temperatura do produto	[°C]
θ_0	Temperatura inicial do produto	[°C]
λ	Propriedade	[-]
Φ	Grandeza	[-]
Φ^*	Grandeza adimensional	[-]
$\overline{\Phi}^*$	Valor médio da grandeza Φ^*	[-]
Φ'''	Geração de grandeza Φ	[-]
Γ^ϕ	Coefficiente de transporte	[-]
γ_n	n-ésimo autovalor	[-]
Ψ_n	Função	[-]
ϕ_n	Superfícies 1, 2, 3, ..., n	[-]
Σ	Somatório	[-]
π	Pi	[-]

Superescritos

* Parâmetro adimensional

Subscritos

n n-ésimo valor
 0 Valor inicial do parâmetro
 e no infinito

Abreviações

Exp Experimental
 GBI Galerkin-based integral

Siglas

CCT	Centro de Ciências e Tecnologia
DEM	Departamento de Engenharia Mecânica
UFPB	Universidade Federal da Paraíba

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A secagem é um complexo processo que envolve a transferência simultânea de calor, massa e quantidade de movimento linear, sendo que, o transporte de umidade, do interior para a superfície do material, pode ocorrer na forma de líquido e/ou vapor, dependendo do tipo de produto e do percentual de umidade presente.

Na tentativa de melhor elucidar um processo de secagem, várias teorias sobre a secagem de sólidos foram propostas e vários modelos matemáticos foram desenvolvidos, sendo quase todos os modelos são baseados na teoria da difusão líquida. No entanto outras teorias também têm sido usadas, por exemplo, as teorias de Fortes e Okos e de Luikov.

Soluções analíticas e/ou numéricas da equação de difusão, para diversas geometrias, condições de contorno e coeficientes difusivos constante ou variável são encontradas na literatura, no entanto existem poucos estudos científicos aplicados a geometrias arbitrárias.

Ao se considerar geometrias uni e bidimensionais para descrever processos de secagem de sólidos com forma arbitrária, algumas discrepâncias, na cinética de secagem e

distribuição do teor de umidade, bem como na temperatura no interior do sólido são encontradas, quando comparadas com resultados experimentais. Isto ocorre tendo em vista os modelos matemáticos não representarem fielmente a geometria do corpo. Neste contexto, é importante considerar o fator forma do corpo no desenvolvimento dos modelos matemáticos, de tal forma a descrever o fenômeno físico, de forma mais real, e elevar o nível de confiança do modelo proposto. Ao considerar a influência de tal parâmetro, espera-se que os desvios entre os resultados teóricos e experimentais sejam minimizados.

O presente trabalho, tem como objetivos:

- Apresentar uma solução analítica para o problema de difusão transiente em sólidos com geometria elipsoidal, baseadas na teoria da difusão líquida;
- Simular a distribuição do teor de umidade no interior de sólidos com geometria elipsoidal e suas respectivas cinéticas de secagem.

Diante do exposto, este trabalho é bastante versátil. O modelo apresentado além de ser bidimensional e aplicado a geometrias das mais variadas formas, pode ser ainda aplicado diretamente em fenômenos de secagem, umidificação, aquecimento e resfriamento de sólidos.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Considerações preliminares de secagem

Na indústria química, um dos processos mais importantes utilizados no processamento de alimentos e na estocagem de grãos é o processo de secagem. Este processo consiste na separação parcial da parte líquida (geralmente a água) da sólida de um determinado material. O processo de secagem também pode ser explicado como um processo de transferência de calor e massa, que por meio de evaporação gera a remoção de parte da umidade contida no interior do produto (Fortes, 1982).

Em relação a outras técnicas de separação, a secagem se diferencia devido à retirada das moléculas que, neste caso, é obtida por uma movimentação do líquido, provocada por uma diferença de pressão parcial do vapor d'água entre a superfície do produto a ser secado e o ar que o envolve. No caso dos alimentos, a remoção de água do material úmido é realizada até um nível onde a deterioração provocada por microorganismos possa ser minimizada.

O processo de secagem deve ocorrer de maneira controlada, para que ela possa ocorrer de maneira uniforme, evitando elevados gradientes de umidade e temperatura no interior do

material que podem provocar a perda da qualidade do produto. Sabendo-se que os efeitos da secagem alteram as propriedades físicas e químicas do produto e estas por sua vez afetam o processo de transferência de calor e massa é fundamental conhecer os seus efeitos e o controle dos mesmos.

2.2 Teoria e migração de umidade

Os mecanismos de transporte de umidade no interior dos sólidos ainda não estão bem definidos pelos estudiosos. Por exemplo, Steffe e Singh (1980) consideram o transporte de umidade como uma combinação dos movimentos de umidade por difusão de líquido e de vapor, enquanto que Brooker et al (1992) considera apenas os movimentos por difusão líquida.

Na literatura, os seguintes mecanismos de transportes de umidade no interior dos sólidos são apresentados (Fortes e Okos, 1980; Strumillo e Kudra, 1986; Brooker et al, 1992; Lima, 1995; Nascimento, 2002).

- transporte por difusão líquida devido a gradientes de concentração de umidade;
- transporte por difusão de vapor devido a gradientes de concentração de umidade e de pressão parcial do vapor (causados por gradientes de temperatura);
- transporte por efusão (escoamento Knudsen). Ocorre quando o caminho livre médio das moléculas de vapor é da mesma ordem de grandeza do diâmetro dos poros. É importante para condições de alto vácuo, como por exemplo, secagem por criogenia;
- transporte de vapor por termodifusão devido a gradientes de temperatura;
- transporte de líquido por forças capilares;
- transporte de líquido por pressão osmótica;
- transporte de líquido devido à gravidade;
- transporte de líquido e de vapor, devido à diferença de pressão total, causada por pressão externa, contração, alta temperatura e capilaridade;
- transporte por difusão superficial.

Embora aqui não se tenha detalhado cada um dos mecanismos de transporte de umidade listados acima, informações adicionais podem ser encontradas nas referências citadas.

2.3 Teoria de secagem

As seguintes teorias para a transferência de calor e massa em sólidos porosos têm sido amplamente sugeridos na literatura.

- Teoria da difusão líquida;
- Teoria da capilaridade;
- Teoria da condensação – vaporização;
- Teoria de Krischer;
- Teoria de Luikov;
- Teoria de Phillip – De Vries;
- Teoria de Fortes e Okos.

2.3.1 Teoria da difusão líquida

A difusão de água líquida é considerada por vários autores como o principal mecanismo de secagem de grãos. Esta teoria tem sido aplicada para diversos materiais, considerando o coeficiente de difusão como sendo constante ou depende da temperatura e/ou do teor de umidade (Alsina e Brasileiro, 1997; Júnior e Coirncross, 1998; Azzouz et al. 1998; Gouveia et al., 1999; Schlunder e Wagner, 1998).

Segundo Queiroz (1994), o modelo de difusão líquida apresenta bons resultados para a análise de secagem em grãos, frutos e cereais devido à peculiaridade destes produtos não apresentarem um período de taxa constante nas suas curvas características de secagem, permitindo que o processo seja totalmente controlado pelas condições internas do material.

A ausência do período de taxa constante de secagem é observada, por exemplo, no processo de secagem do quiabo fresco Shivhare et al. (2000). Luccas (1996) reporta que no período de secagem decrescente, os processos difusivos de água do interior do material para a

sua superfície, controlam a operação de secagem. Para produtos biológicos, nota-se que os pesquisadores têm preferência pelos modelos de difusão líquida (Steffe e Singh, 1980; Suarez e Viollaz, 1991; Queiroz e Nebra, 2001).

A teoria de difusão líquida estabelece que a difusão de umidade no interior do sólido é devido a um gradiente de concentração no sólido e tem como modelo matemático a equação de Fick, considerando que o fluxo de umidade no interior do sólido é gerado por um gradiente de concentração. A seguinte equação é válida :

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla M) \quad (2.1)$$

No entanto, segundo Hougén et al, citados por Fortes e Okos (1980), a difusão líquida vista com o único mecanismo de movimento da umidade tem sido sujeito a severas críticas. As discrepâncias entre resultados experimentais e teóricos podem e devem ser sempre minimizadas. Estas discrepâncias, em geral, são oriundas da aplicação do modelo de difusão líquida considerando o coeficiente de difusão constante ao longo do processo de secagem, condições de contorno inadequadas, não encolhimento do produto, entre outras.

O encolhimento de materiais durante a secagem é um fenômeno físico que ocorre simultaneamente com a perda de umidade do produto em decorrência da difusão de umidade. Este fenômeno pode produzir um efeito considerável no coeficiente de difusão de massa, e conseqüentemente na taxa de secagem. Informações sobre este efeito podem ser encontrados em Keey (1992) e Lima (1999).

No processo de secagem, muitas vezes, a partir de um determinado instante do processo, o transporte de calor e massa podem ou não ocorrer simultaneamente. O transporte de calor pode ser mais rápido que o transporte de massa, fazendo assim com que o produto entre rapidamente em equilíbrio térmico com o ar de secagem e a partir daí somente a transferência de massa devido a gradientes, que não seja de temperatura, deve ser considerado.

Em geral o coeficiente de difusão é considerado constante, ou dependente da temperatura e/ou do teor de umidade do sólido. A Tabela 2.1 apresenta um sumário de vários modelos paramétricos reportado na literatura (Nascimento, 2002).

Tabela 2.1 - Modelos paramétricos empíricos expressando o coeficiente de difusão como função da temperatura e/ou do teor de umidade do meio poroso

NÚMERO	MODELO PARAMÉTRICO
1	$D(M, T) = A_0 \exp\left(-\frac{A_1 + A_2 M}{1 + A_3 M}\right) \exp\left[-\frac{A_4 + A_5 \exp(-A_6 M)}{T_{abs}}\right]$
2	$D(M, T) = A_0 \exp[(A_1 T_{abs} - A_2)M] \exp\left(-\frac{A_3}{T_{abs}}\right)$
3	$D(M, T) = (A_0 - A_1 T_{abs}) \exp[(A_2 T_{abs} - A_3)M]$
4	$D(M, T) = (A_0 + A_1 T_{abs}) \left(\frac{M_0}{1 + M_0} - \frac{M}{1 + M}\right)^{A_2}$
5	$D(M) = (A_0 + A_1 M)$
6	$D(T) = A_0 \exp\left(-\frac{A_1}{R_0 T_{abs}}\right)$

FONTE: Nascimento (2002).

2.3.2 Teoria da capilaridade

A teoria capilar se refere ao fluxo de um líquido através dos interstícios e sobre a superfície de um sólido, como sendo devido às atrações moleculares entre o líquido e o sólido. Esta teoria é baseada no conceito do potencial capilar, que pode ser definido como a diferença de pressão entre a água e o ar na interface água-ar presente em um capilar.

O potencial capilar é assumido ser proporcional ao gradiente de concentração da umidade para condições isotérmicas. No entanto, segundo Fortes e Okos (1980), Ccaglske e Hougen destacaram que na secagem de sólidos granulares, o fluxo de água é completamente determinado por forças capilares, sendo independentes da concentração de água. Foi mostrado através de experimento que o fluxo de umidade pode até está na direção de incremento da umidade. Para processos de secagem de alimentos, a teoria do fluxo capilar tem sido aceita principalmente para os estágios da secagem em alta umidade.

2.3.3 Teoria da condensação-*evaporação*

A teoria de condensação - *evaporação* afirma que a água, num meio poroso, migra inteiramente na fase gasosa. Segundo Fortes e Okos (1980), o modelo teórico da condensação-*evaporação* foi motivado pelos trabalhos de Henry, quando da tentativa de compreensão da umidade existente em fardos de algodão. Esta teoria considera a difusão simultânea de calor e massa, e que o sólido é constituído por redes contínuas de poros. Considera ainda, que as equações que governam o fluxo de umidade no material são derivadas de um apropriado balanço de calor e massa. O balanço de massa admite que o movimento é de vapor através do sólido, e o balanço de energia é feito considerando o fluxo de calor através da condução adicionando-se o calor envolvido na adsorção e/ou absorção de umidade pelo sólido.

Embora muitos trabalhos posteriores ao de Henry tenham limitado o fluxo de umidade através do sólido somente na fase de vapor, sua teoria não se limitou ao vapor como única substância difusiva. Foi verificado que em um material poroso insaturado, tal como o solo, há escoamento quando a água move-se devido a um gradiente de temperatura. Porém, quando há gradiente de pressão, ocorre fluxo de água inteiramente na fase líquida.

2.3.4 Teoria de Krischer

Na teoria de Krischer, citado por Fortes e Okos (1980), é assumido que durante a secagem, o fluxo de umidade pode se dar no estado líquido, por capilaridade, ou no estado de vapor devido a um gradiente de concentração de vapor. Esta teoria leva em conta a transferência de calor e massa simultânea, e, pode ser aplicada em uma variedade de meios porosos. O trabalho de Krischer serve como base para teorias mais complexas como a de Berger e Pei, e tem sido aplicada para a análise em variados tipos de alimentos.

2.3.5 Teoria de Luikov

A teoria de Luikov é baseada na Termodinâmica dos processos irreversíveis assumindo a validade das relações recíprocas de Onsager, o princípio de Curie e a existência de um equilíbrio termodinâmico local no interior do produto. Luikov (1966), baseando-se em trabalhos prévios de Prigogine (1947), DeGroot (1951), Luikov e Mikhailov (1965) e

considerando os vários fluxos envolvidos em uma mistura de ar, vapor, líquido e sólido, partiu dos princípios da termodinâmica de não-equilíbrio e propôs a utilização de um modelo para descrever o processo de secagem de produtos capilares porosos baseado nos mecanismos de difusão, efusão, convecção de vapor e difusão e convecção de água no interior do meio poroso. O processo é descrito por um sistema de equações diferenciais parciais acopladas para a temperatura, umidade e em casos de intensa secagem, também pressão. As equações que descrevem o modelo de Luikov sugerem que o transporte molecular de vapor d'água, ar e líquido acontecem simultaneamente.

2.3.6 Teoria de Philip e De Vries

A teoria de Philip e De Vries considera que em materiais porosos, a água se move através da difusão de vapor e por capilaridade. Geralmente, o fluxo de vapor é considerado dependente da sua concentração e dos gradientes de temperaturas no sólido e o fluxo de umidade na fase líquida é devido a efeitos de capilaridade e pode se dar em condições isotérmicas ou não. A teoria de Philip e De Vries também considera o fluxo de umidade devido a potenciais gravitacionais. Em geral, pode-se dizer que a difusividade líquida é um fator importante para condições em que estão presentes altos teores de umidade, enquanto que a difusividade de vapor é importante para condições de baixo valor do teor de umidade.

2.3.7 Teoria de Fortes e Okos

Baseando a sua teoria nos conceitos termodinâmicos de processos irreversíveis, Fortes e Okos (1981a), propuseram um modelo, que desconsidera o fenômeno de encolhimento e efeitos de pressão total, e assume:

- existência de equilíbrio local entre as fases sólida, líquida e vapor;
- validade da equação de Gibbs para condições de não-equilíbrio;
- validade das leis fenomenológicas lineares;
- validade das relações fundamentais de Onsager;
- sólido contínuo e isotrópico;
- a água migra nas fases líquida e vapor;

- a razão de transferência de calor e massa é mais lenta que a razão de mudança de fase;
- validade do princípio de Curie.

Segundo Fortes e Okos (1981a), a principal diferença entre a sua teoria e as teorias anteriores é que a força motriz para a transferência isotérmica, tanto do líquido quanto do vapor, é um gradiente do teor de umidade de equilíbrio e não do teor de umidade, sendo isto devido à hipótese de equilíbrio local. A força motriz, para a transferência de líquido e vapor, é o gradiente do potencial químico, que por sua vez é função da temperatura, da umidade relativa e do teor de umidade de equilíbrio. Neste modelo, é postulado que a água em meios capilares porosos pode até mover-se no sentido contrário ao gradiente do teor de umidade, mas sempre na direção do gradiente do teor de umidade de equilíbrio.

2.4 Cinética de secagem e aquecimento do sólido

A Figura 2.1a-c (Junior et al, 1999) mostra as três etapas de secagem que pode ser dividido o processo de desidratação. As respectivas curvas são: a) curva da redução do teor de umidade do material; b) curva da taxa de secagem; c) curva da variação de temperatura do sólido ao longo do período de secagem.

O início da secagem é representado pelo período onde o teor de umidade é o inicial (M_0), com elevação da temperatura e da pressão de vapor de água. Neste instante a taxa de secagem é crescente, isso ocorre devido à umidade relativa do ar na camada limite ser menor que 100%, acontecendo à chamada acomodação (Reeds, 1991). Tais elevações acontecem até o ponto onde ocorre a equivalência entre a transferência de calor e massa, ou seja, o período de taxa constante.

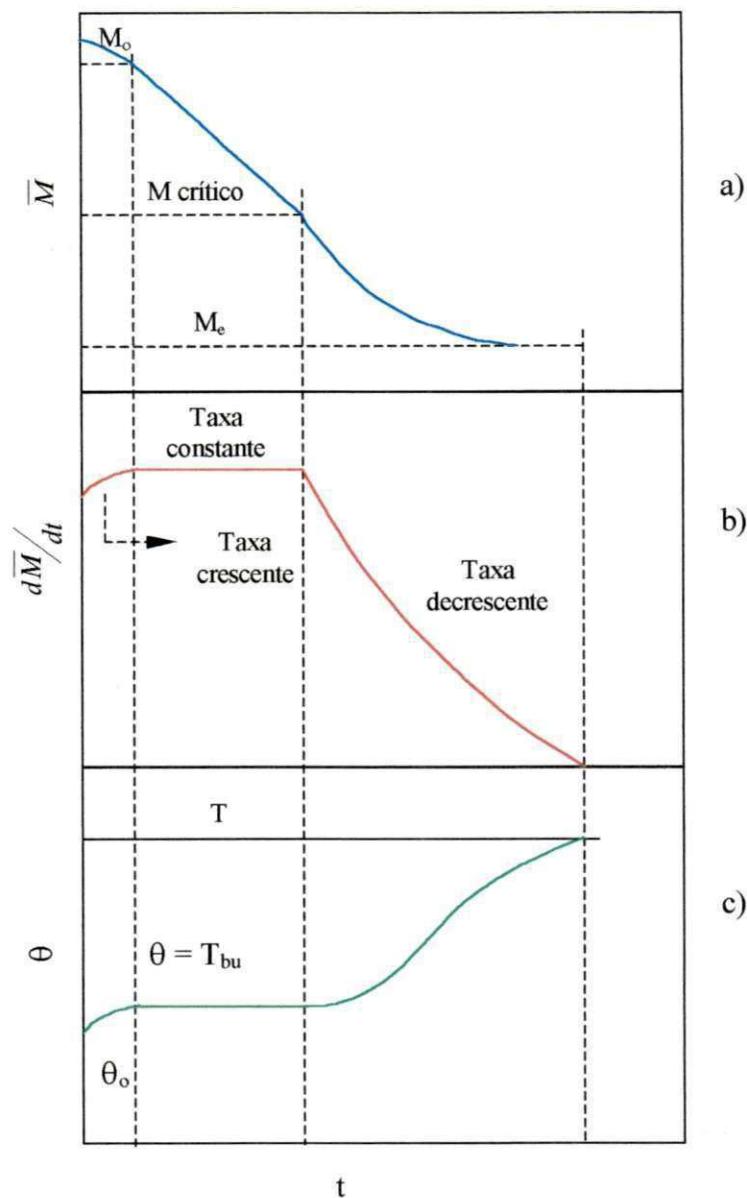


Figura 2.1 - Cinética e aquecimento do sólido durante o processo de secagem. Fonte: (Adaptado de Júnior et al, 1999).

No período de taxa de secagem constante, a água evaporada é água livre. A taxa de secagem será constante enquanto houver umidade superficial para acompanhar o processo de evaporação. A temperatura do sólido é a temperatura de bulbo-úmido do ar. A taxa de evaporação e a evaporação superficial neste período são constantes, e é notado que a massa de água evaporada é proporcional a diferença entre a pressão de vapor do líquido na superfície do sólido à temperatura de evaporação (P_w) e a pressão de vapor do líquido no ar ambiente ao redor do sólido (P_a), ocorrendo a secagem se $P_w > P_a$ (Reeds, 1991). Quando o sólido atinge um teor de umidade no qual a temperatura começa a se elevar, tem-se o chamado ponto de

teor de umidade crítica, que indica o fim do período de taxa de secagem constante e o início do período de taxa decrescente.

No período de taxa decrescente, a taxa de secagem, a transferência de calor e a transferência de massa diminuem. A temperatura do produto aumenta até atingir a temperatura do ar de secagem, ou a temperatura de bulbo seco. O sólido chega a ponto de umidade de equilíbrio quando a taxa de secagem atinge valores próximos de zero, ou seja, atinge o menor teor de umidade no processo de secagem com o sólido nas condições a que está submetido.

A transferência de massa é influenciada por condições externas, no período de taxa constante, e é influenciada por mecanismos externos e internos de transporte de umidade, no período de taxa decrescente. Nesse caso, o mecanismo de transporte de umidade é dependente da relação entre o coeficiente de difusão de massa e o coeficiente de transferência convectiva de massa.

2.5 Coeficiente e propriedades de transporte no processo de secagem

O projeto de equipamentos utilizados para realizar a secagem de sólidos, assim como o próprio processo de secagem, requerem constantes dados sobre as propriedades físico-químicas das substâncias a serem tratadas. Os sólidos tais como frutas e vegetais são particularmente sensíveis a tensões térmicas ou mecânicas, requerendo equipamentos de processamento especializados, para que possíveis danos causados na qualidade final do alimento possam ser minimizados.

A condutividade térmica e a difusividade de umidade são propriedades do material que em geral dependem do teor de umidade, da temperatura e da estrutura física do material. Os coeficientes de transporte convectivos de calor e massa na superfície de contorno entre o material e o agente de secagem dependem das condições do agente, tais como, temperatura, umidade absoluta, velocidade e da geometria do sólido que está sendo secado ou umedecido. Desta forma, o processo de secagem depende ao mesmo tempo das propriedades de transporte no interior do material, das condições do ar de secagem e do tipo de condições de contorno entre a superfície do corpo e o ar que o envolve.

2.6 Transporte de calor e/ou massa em sólidos

Soluções analíticas ou numéricas da equação de difusão, com coeficiente de difusão constante ou variável e condições de contorno constante (equilíbrio) ou do tipo convectivo, para várias geometrias (paralelepípedo, cilindro e esfera), podem ser encontradas em Carslaw e Jaeger (1959); Luikov e Mikhailov (1965); Luikov (1968); Skelland (1974); Crank (1992); Gebhart (1993). Para corpos de forma elíptica podem ser citados Niven (1880); Normiton e Blackwell (1964); Haji-Sheikh e Sparrow (1966); Haji-Sheikh e Sparrow (1967); Smith et al. (1967); Smith et al. (1968); Smith e Nelson (1969); Zienkiewicz e Parekh (1970); Sokhansanj (1980); Wrobel e Brebbia (1981); Payne et al (1986); Elvira (1990); Haghghi et al (1990); Lu e Siebenmorgen (1992); Ketersaals et al. (1992a-b); Sarker et al (1994); Lima et al. (1999); Lima e Nebra (1999), além de outras.

Niven (1880) apresenta uma solução analítica para problemas de difusão em esferóides, considerando condições de temperatura constante na superfície. Ele utilizou poucos termos da série mais não apresenta resultados numéricos.

Payne et al. (1986) apresenta uma solução da equação de difusão em uma fronteira irregular usando o método de Galerkin e condição de equilíbrio na superfície. O método foi usado para fornecer a distribuição de temperatura no centro de esferóides. Os resultados numéricos obtidos são comparados com os dados analíticos reportados por Haji-Sheikh e Sparrow (1966) mostrando excelente concordância.

Haghghi et al. (1990) apresentam uma formulação utilizando o método de elementos finitos para resolver o problema de transferência de calor e massa em corpos com simetria axial. O modelo foi usado para simular o processo de secagem de grãos de cevada. Os resultados do modelo ajustaram-se bem aos dados experimentais. Procedimentos similares foram utilizados por Sokhansanj (1980) e Sarker et al. (1994) para simular processo de secagem de grãos de arroz. Em todos os casos foi assumida condição de contorno convectiva.

Hasatani e Itaya (1992), desenvolveram uma metodologia numérica para descrever a transferência simultânea de calor e massa em materiais cerâmicos argilosos com forma de paralelepípedo, considerando condições de contorno convectiva na superfície do sólido. Os

autores usaram a teoria da difusão líquida, aplicada a um problema tridimensional transiente. Os resultados demonstram uma boa concordância entre os resultados experimentais e numéricos. O efeito da temperatura no processo de deformação também foi analisado, evidenciando que maiores níveis destas, aumentam sensivelmente a deformação do material durante o processo de desidratação do mesmo. É reportado também, que existe maiores níveis de tensões trativas na superfície do produto, sobretudo nos vértices do paralelepípedo estudado.

Lu e Siebenmorgen (1992), utilizam o método de elementos finitos em coordenadas polares apresentando um modelamento para descrever a absorção de umidade em grãos de arroz, assumindo condições de equilíbrio na superfície. Os resultados obtidos numericamente são comparados com os dados experimentais e excelente concordância foi obtida.

Keteraals et al (1992a), desenvolveram um estudo numérico uni e bidimensional, com o objetivo de analisar a influencia do encolhimento na cinética de secagem e tensões internas, em um material cerâmico argiloso. Assumiram diferentes tipos de considerações: encolhimento: unidirecional, encolhimento isotrópico e sem encolhimento. Concluiu-se que a taxa de secagem é influenciada pelo tipo de encolhimento, sendo maior para um encolhimento unidimensional, e que as tensões que podem provocar trincas e deformações, crescem com o aumento dos níveis de encolhimento.

Keteraals et al (1992b), desenvolveram um modelo numérico utilizando a teoria da difusão líquida para analisar o transporte de umidade em materiais cerâmicos argilosos. O objetivo do trabalho foi analisar o efeito da variação do coeficiente de difusão com o teor de umidade. Os resultados demonstram um decréscimo do coeficiente de difusão durante a secagem. Outros trabalhos mais recentes também podem ser citados, por exemplo, Nascimento et al. (2000a), Nascimento et al. (2000b), Nascimento et al (2001) e Nascimento (2002).

Lima et al. (1999) apresentaram uma solução analítica da equação de difusão similar à apresentada por Haji-Sheikh e Sparrow (1966), sendo que desta vez a solução é mais geral, uma vez que incorpora o cálculo do valor médio da grandeza de interesse (teor de umidade).

Lima (1999) apresentou um estudo numérico/analítico da difusão de calor e massa em esferóides prolatos, considerando propriedades constantes ou variáveis, condições de contorno constante ou do tipo convectiva, com ou sem encolhimento, via técnicas de volumes finitos e separação de variáveis. Os modelos apresentados são gerais e independente da natureza do sólido (frutas, cereais, etc), no entanto, o autor deu ênfase a secagem de banana.

Além destes estudos, podem ser citados ainda os trabalhos de Keltner (1973), Sheen e Hayakawa (1992), Coutelieris et al. (1995), Feng e Michaelides (1997), Alassar (1999), Igathinathane e Chattopadhyay (2000), Carmo (2000), Carmo e Lima (2000a e 2000b), Lima e Nebra (2000a e 2000b), Oliveira e Lima (2001), Oliveira (2001), Lima et al. (2001), Carmo e Lima (2001) que trabalharam com geometrias e tipos de materiais diversos.

CAPÍTULO 3

MODELAGEM TEÓRICA

Os resultados obtidos através de soluções analíticas ou numéricas de uma equação diferencial que representa um problema físico, dependem de fatores tais como: habilidade do pesquisador em elaborar as equações e as condições de contornos adequadas para cada caso em particular, dos métodos utilizados e de outros fatores que dizem respeito ao processo de resolução do problema.

O presente trabalho apresenta um modelo matemático baseado no método de Galerkin e demonstra o comportamento do teor de umidade de um produto com geometria de um esferóide. Esta análise pode variar de um esferóide oblato ($a < b$) a um esferóide prolato ($a > b$) passando pela forma de uma esfera ($a = b$) (Figura 3.2).

A partir das condições de contornos aplicadas na superfície do corpo, pode-se obter resultados com respeito à cinética da secagem do produto e também resultados quanto aos perfis do teor de umidade no interior do mesmo, durante o processo de secagem.

As simulações de processos físicos geralmente são feitas a partir da solução de uma ou mais equações diferenciais que descrevem o problema. A princípio, a solução é obtida

conhecendo-se as condições iniciais e de contorno das grandezas físicas que definem o processo.

Quanto mais o modelo matemático utilizado se aproxima da realidade, mais complexa será a descrição matemática do fenômeno.

3.1 A equação da difusão

A equação geral da difusão é dada por:

$$\frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t} = \nabla \cdot (\Gamma\Phi\nabla\Phi) + \Phi''' \quad (3.1)$$

ou ainda em coordenadas cilíndricas, para o caso bidimensional:

$$\frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Gamma\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) + \Phi''' \quad (3.2)$$

As condições iniciais e de contorno são dadas por:

$$\Phi = \Phi(r, z) \quad \text{para } t = 0 \quad (3.3a)$$

$$\Phi = \Phi_c \quad \text{na superfície do sólido para } t > 0 \quad (3.3b)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \text{em } r = 0, \text{ para todo } t \quad (3.3c)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0 \quad \text{em } z = 0; \text{ para todo } t \quad (3.3d)$$

Definindo os seguintes parâmetros adimensionais:

$$r^* = \frac{r}{a}; \quad z^* = \frac{z}{a}; \quad V^* = \frac{V}{a^3}; \quad \Phi^* = \frac{\Phi - \Phi_c}{\Phi_0 - \Phi_c}; \quad t^* = \frac{\left(\frac{\Gamma\Phi}{\lambda} \right) \cdot t}{a^2}. \quad (3.4a-e)$$

considerando o coeficiente de transporte Γ^Φ e λ constantes, sem geração da grandeza Φ , e tem-se a seguinte equação de difusão na forma adimensional será:

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial t^*} = \nabla^2 \Phi^* \quad (3.5)$$

Nas equações (3.4a-e), onde “a” é uma dimensão característica do sólido.

A solução da equação (3.5) pode ser escrita da seguinte forma (Payne et al, 1986):

$$\Phi^*(r^*, z^*, t^*) = \sum_{n=1}^N C_n \psi_n(r^*, z^*) e^{-\gamma_n t^*} \quad (3.6)$$

onde γ_n é o n-ésimo autovalor (independente da posição) e C_n é uma constante a ser determinada. Por conveniência, assume-se que o sólido tem dimensões finitas.

Utilizando-se o método integral baseado em Galerkin (Método GBI) (Beck et al, 1992), a função $\psi_n(r^*, z^*)$ é selecionada de forma que as condições de contorno homogêneas são satisfeitas e que a equação (3.6) seja a solução da equação (3.5). Esta última condição é satisfeita substituindo-se a equação (3.6) na equação (3.5). Então, após a substituição e uma série de manipulações algébricas, pode-se escrever:

$$\nabla^2 \psi_n(r^*, z^*) + \gamma_n \psi_n(r^*, z^*) = 0 \quad (3.7)$$

Assim sendo, a equação de difusão agora será um problema de autovalor e a função $\psi_n(r^*, z^*)$ é a autofunção.

A função $\Psi_n(r^*, z^*)$ é obtida pela combinação linear de um conjunto de funções. Seus membros são linearmente independentes, de maneira que a condição de contorno imposta seja satisfeita. Esta função é dada por:

$$\Psi_n(r^*, z^*) = \sum_{j=1}^N d_{nj} f_j(r^*, z^*) \quad (3.8)$$

onde $f_j(r^*, z^*)$ é um elemento de um conjunto de funções de base e d_{nj} são constantes a serem determinadas.

A função f_j é chamada função de Galerkin e é obtida pela multiplicação de uma função $\varphi(r^*, z^*)$ por um elemento de um conjunto completo de funções. A função $\varphi(r^*, z^*)$ é selecionada para que a condição de contorno homogênea seja satisfeita. A função f_j com j variando de 1 até N constituem um conjunto de funções de base.

O método para selecionar funções de base para condições de contorno de 1ª espécie (condição de equilíbrio na fronteira do corpo) é dado na literatura (Kantorovich e Krylov; Ozisik; Hagi-Sheikh e Mashena; citados por Beck et al, 1992).

Se uma região tem uma fronteira especificada por M superfícies, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_M$, como ilustrado na Figura 3.1, o primeiro membro do conjunto de funções de base será:

$$f_1(\vec{r}) = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \dots \cdot \varphi_M \quad (3.9)$$

onde \vec{r} é o vetor posição.

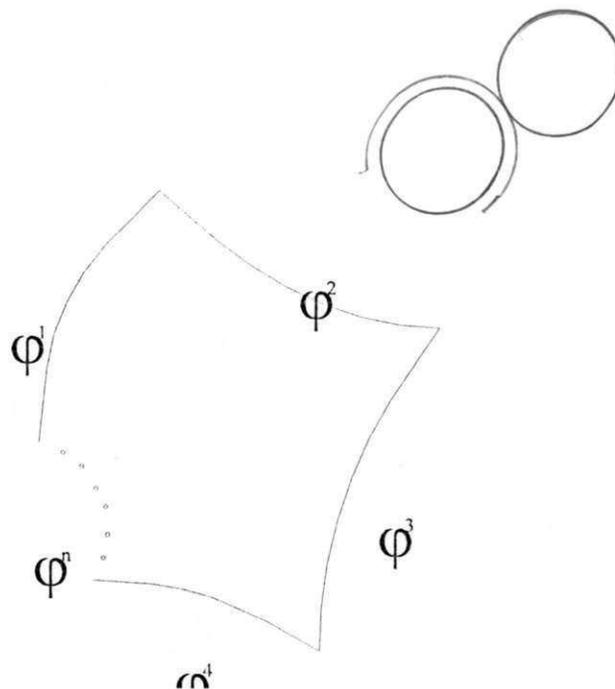


Figura 3.1 - Configuração generalizada de um sólido para definir funções de base.

Cada subsequente membro do conjunto de funções de base é obtido multiplicando-se $f_1(\vec{r})$ por um elemento de um conjunto completo de autofunções. Por exemplo, em coordenadas cartesianas:

$$f_2(\vec{r}) = x f_1(\vec{r}) \quad (3.10a)$$

$$f_3(\vec{r}) = y f_1(\vec{r}) \quad (3.10b)$$

e assim por diante.

Cada função de base deve tender para zero na fronteira do sólido. Algumas, mas não todas as funções de base podem ser zero em algum ponto no interior do sólido.

Usando o procedimento de Galerkin, que consiste em multiplicar ambos os lados da equação (3.7) por $f_i dV^*$ e integrar o resultado sob o volume do sólido, obtém-se:

$$\int_{V^*} f_i \nabla^2 \Psi_n dV^* + \gamma_n \int_{V^*} f_i \Psi_n dV^* = 0 \quad (3.11)$$

Substituindo, a equação (3.8) na equação (3.11) e dividindo-se pelo volume do sólido, obtém-se:

$$\sum_{j=1}^N d_n j \left[\frac{1}{V^*} \int_{V^*} f_i \nabla^2 f_j dV^* + \gamma_n \frac{1}{V^*} \int_{V^*} f_i f_j dV^* \right] = 0 \quad (3.12)$$

em que $i=1,2,\dots,N$. Na forma matricial pode-se reescrever a equação (3.12) por:

$$(\bar{A} + \gamma_n \bar{B}) \bar{d}_n = 0 \quad (3.13)$$

onde \bar{A} e \bar{B} são matrizes quadradas de $N \times N$ elementos. Os elementos das matrizes \bar{A} e \bar{B} são dados por:

$$a_{ij} = \frac{1}{V^*} \int_{V^*} f_i \nabla^2 f_j dV^* \quad (3.14a)$$

$$b_{ij} = \frac{1}{V^*} \int_{V^*} f_i f_j dV^* \quad (3.14b)$$

Os coeficientes $d_{n1}, d_{n2}, \dots, d_{nN}$ na equação (3.8) são elementos do vetor \bar{d}_n na equação (3.13). Observa-se que a matriz \bar{B} é simétrica, isto é, $b_{ij} = b_{ji}$. A matriz \bar{A} também é simétrica.

Desde que:

$$\int_V g_i \nabla \cdot (\Gamma \phi \nabla g_j) dV = \int_S \Gamma \phi f_i \left(\frac{\partial g_j}{\partial n} \right) dS - \int_V \Gamma \phi \nabla g_i \cdot \nabla g_j dV \quad (3.15)$$

e que o primeiro termo do lado direito da equação (3.15) é zero, para condições de contorno de 1ª espécie, tem-se por comparação que:

$$a_{ij} = \frac{1}{V^*} \int_{V^*} \nabla f_i \cdot \nabla f_j dV^* \quad (3.16)$$

Desde que as equações lineares originada da equação (3.13) são homogêneas, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ podem ser obtidas de tal forma que o determinante da matriz $(\bar{A} + \gamma \bar{B})$ seja igual a zero.

Determinando-se os autovalores γ_n , os valores dos coeficientes d_{nj} correspondendo a um valor γ_n podem ser obtidos. Novamente, devido a que as equações simultâneas resultante da equação (3.13) serem homogêneas, um dos coeficientes d_{nj} pode ser arbitrariamente selecionado igual a 1, sem qualquer perda de generalidade. Portanto, para um dado γ_n , um sistema de N-1 equações deve ser resolvido para obtenção de $d_{n2}, d_{n3}, \dots, d_{nN}$.

Para obtenção dos coeficientes C_n da equação (3.6) utiliza-se a condição inicial dada pela equação (3.3a). Então, quando $t = 0$, tem-se, a partir da equação (3.6) que:

$$\Phi^*(r^*, z^*) = \sum_{n=1}^N C_n \Psi_n(r^*, z^*) \quad (3.17)$$

Multiplicando ambos os membros da equação (3.17) por $f_i dV^*$ e integrando sob o volume do sólido obtém-se:

$$\int_{V^*} f_i \Phi^*(r^*, z^*) dV^* = \int_{V^*} \sum_{n=1}^N f_i C_n \Psi_n(r^*, z^*) dV^* \quad (3.18)$$

O resultado da equação (3.18) será um conjunto de N equações algébricas lineares que permite a determinação de C_1, C_2, \dots, C_n , o que completa a solução do problema.

O valor médio da grandeza Φ^* é dado por (Whitaker, 1980) :

$$\overline{\Phi^*} = \frac{1}{V^*} \int_{V^*} \Phi^*(r^*, z^*, t^*) dV^* \quad (3.19)$$

onde V^* é o volume do sólido em estudo.

Neste trabalho a metodologia GBI é usada para resolver o problema de transporte de massa no interior de sólidos esferoidais (prolatos, oblatos e esferas). Neste caso, $\Phi = M$, $\Gamma^\phi = D$ e $\lambda=1$. A Figura 3.2 ilustra um elipsóide de revolução.

O contorno do sólido é definido por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (3.20)$$

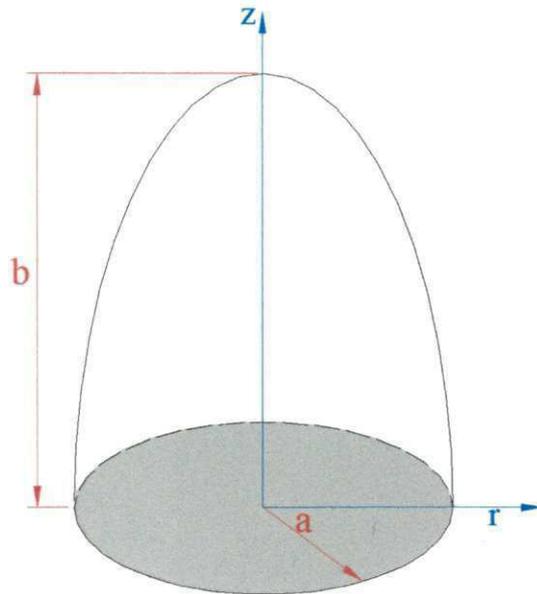


Figura 3.2 - Elipsóide de revolução e suas características.

Desde que $r^2 = x^2 + y^2$, pode-se escrever:

$$z = b \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} \quad (3.21)$$

Sendo assim, as seguintes condições inicial e de contorno são obtidas:

$$M(r, z, t = 0) = M_0 = \text{cte} \quad (3.22a)$$

$$M\left(r = a, z = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}, t\right) = M_e \quad (3.22b)$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} = 0 ; \quad \frac{\partial M}{\partial r} = 0 \quad \text{em } z = 0 \text{ e } r = 0, \text{ para todo } t \quad (3.22c)$$

Usando os parâmetros adimensionais definidos nas equações (3.4a-e), tem-se que:

$$z^* = \frac{b}{a} \sqrt{1 - (r^*)^2} \quad (3.23)$$

e as condições inicial e de contorno na forma adimensional assumem a forma:

$$M^*(r^*, z^*, t^* = 0) = 1 \quad (3.24a)$$

$$M^*\left(r^* = 1, z^* = \frac{b}{a}\sqrt{1-(r^*)^2}, t^*\right) = 0 \quad (3.24b)$$

$$\frac{\partial M^*}{\partial z^*} = 0; \quad \frac{\partial M^*}{\partial r^*} = 0 \quad \text{em } z = 0 \text{ e } r = 0, \text{ para todo } t \quad (3.24c)$$

Por outro lado, o elemento diferencial de volume e o gradiente escritos em coordenadas cilíndricas são dados por;

$$\text{Grad}(\) = \nabla(\) = \frac{\partial}{\partial r}(\)\hat{i} + \frac{\partial}{\partial z}(\)\hat{j} \quad (3.25a)$$

$$dV = r \, dr \, d\theta \, dz \quad (3.25b)$$

Então, o volume total do sólido (metade de um elipsóide) ilustrado na Figura 3.2, será:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^b \sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}} \, r \, dz \, dr \, d\theta \quad (3.26a)$$

ou ainda:

$$V^* = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^b \sqrt{1-(r^*)^2} \, r^* \, dz^* \, dr^* \, d\theta \quad (3.26b)$$

O resultado destas integrais na forma dimensional será:

$$V = \frac{2}{3} \pi a^2 b \quad (3.27)$$

As funções de base f_j são dadas por:

$$f_j(r, z) = \left(1 - \frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right) r^{(p-q)} z^q \quad (3.28)$$

ou ainda, na forma adimensional por:

$$f_j(r^*, z^*) = \left[1 - (r^*)^2 - \frac{a^2}{b^2} (z^*)^2 \right] a^p (r^*)^{p-q} (z^*)^q \quad (3.29)$$

Sendo $p = 0, 2, 4, \dots, NP$ e $q = 0, 2, 4, \dots, p$. Neste trabalho utilizou-se 10 funções de base, que corresponde a $NP = 6$. Estas funções de base não são ortogonais, no entanto Payne et al (1986) mostram que as funções Ψ_n 's são ortogonais.

3.2 Cálculo de áreas e volume de esferóides

Para o cálculo da área de um esferóide prolato, pode-se utilizar a seguinte equação:

$$S = 4\pi ab \left\{ \frac{a}{2b} + \frac{1}{2} \frac{\arcsen \left[\sqrt{-\left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 - 1} \right]} \right]}{\sqrt{-\left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 - 1} \right]}} \right\} \quad (3.30)$$

Para um esferóide oblato, tem-se que:

$$S = 4\pi ab \left\{ \frac{a}{2b} + \frac{\ln \left[\frac{a}{b} + \sqrt{\left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 - 1} \right]} \right]}{2\sqrt{\left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 - 1} \right]}} \right\} \quad (3.31)$$

O volume de um esferóide (prolato, oblato ou esfera) é dado por:

$$V = \frac{4}{3} \pi a^2 b \quad (3.32)$$

As equações (3.30) - (3.32) foram usadas para verificar o efeito da forma dos sólidos na cinética de secagem destes sólidos.

Para obtenção dos resultados, um programa computacional, codificado no ambiente Mathematica ®, foi implementado. No Anexo A encontra-se o fluxograma de execução do programa. No Anexo B, o programa computacional, e no Anexo C alguns resultados numéricos.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS E DISCUSSÕES

O trabalho apresentado nessa dissertação teve alguns de seus resultados comparados com trabalhos já existentes na literatura para poder-se validar a metodologia e os resultados obtidos.

A Figura 4.1 apresenta resultados do teor de umidade adimensional em função do número de Fourier no centro do esferóide ($r^* = 0, z^* = 0$) obtidas neste trabalho comparados com resultados reportados por Payne et al. (1986) para um esferóide de razão de aspecto $b/a = 2,00$ (esferóide prolato) e para um esferóide de razão de aspecto $b/a = 0,50$ (esferóide oblato) e também com resultados reportados por Luikov (1968) para uma esferóide de razão de aspecto $b/a = 1,00$ (esfera). Analisando a Figura 4.1, pode-se perceber a perfeita concordância nos três casos apresentados, comprovando assim, que este trabalho apresenta resultados coerentes.

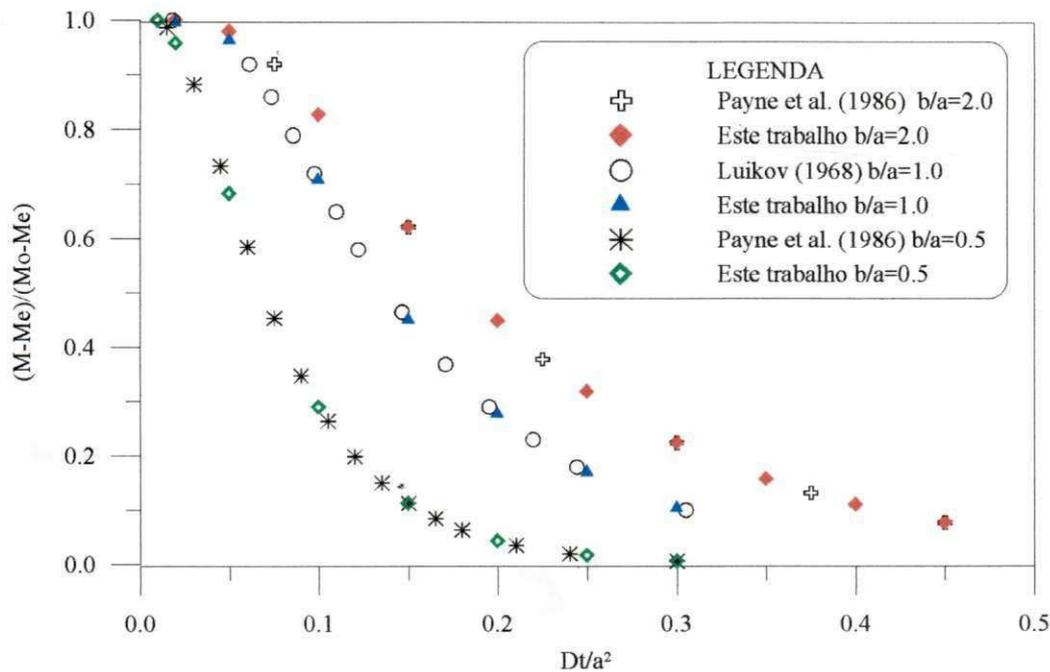


Figura 4.1 - Comparação entre os resultados do teor de umidade no centro de três esferóides, obtidos neste trabalho e aqueles reportados na literatura.

Utilizando o modelo apresentado neste trabalho pode-se traçar o comportamento do teor de umidade médio adimensional dentro do esferóide em função do número de Fourier. A Figura 4.2 ilustra o teor de umidade médio adimensional para razões de aspectos que variam de $b/a = 0,25$ à $b/a = 5,00$.

Analisando a Figura 4.2, pode-se observar que para uma razão de aspecto $b/a = 0,25$, o teor de umidade médio adimensional dentro do esferóide decresce bem mais rápido do que para uma razão de aspecto de $b/a = 5,00$, ou seja, quanto menor for a razão de aspecto do esferóide, mais rápido o teor de umidade médio decresce, isso quer dizer que o processo de secagem deste sólido será mais rápido. Portanto, pode-se concluir que a razão de aspecto do esferóide influencia diretamente no seu processo de secagem. Este fato está ligado diretamente a relação área/volume (S/V). Para uma melhor compreensão, a Tabela 4.1 apresenta a área, volume e relação S/V para vários esferóides. Numa análise detalhada, pode-se concluir que quanto maior for a relação área/volume, mais rápida será a secagem, para um número de Fourier fixado.

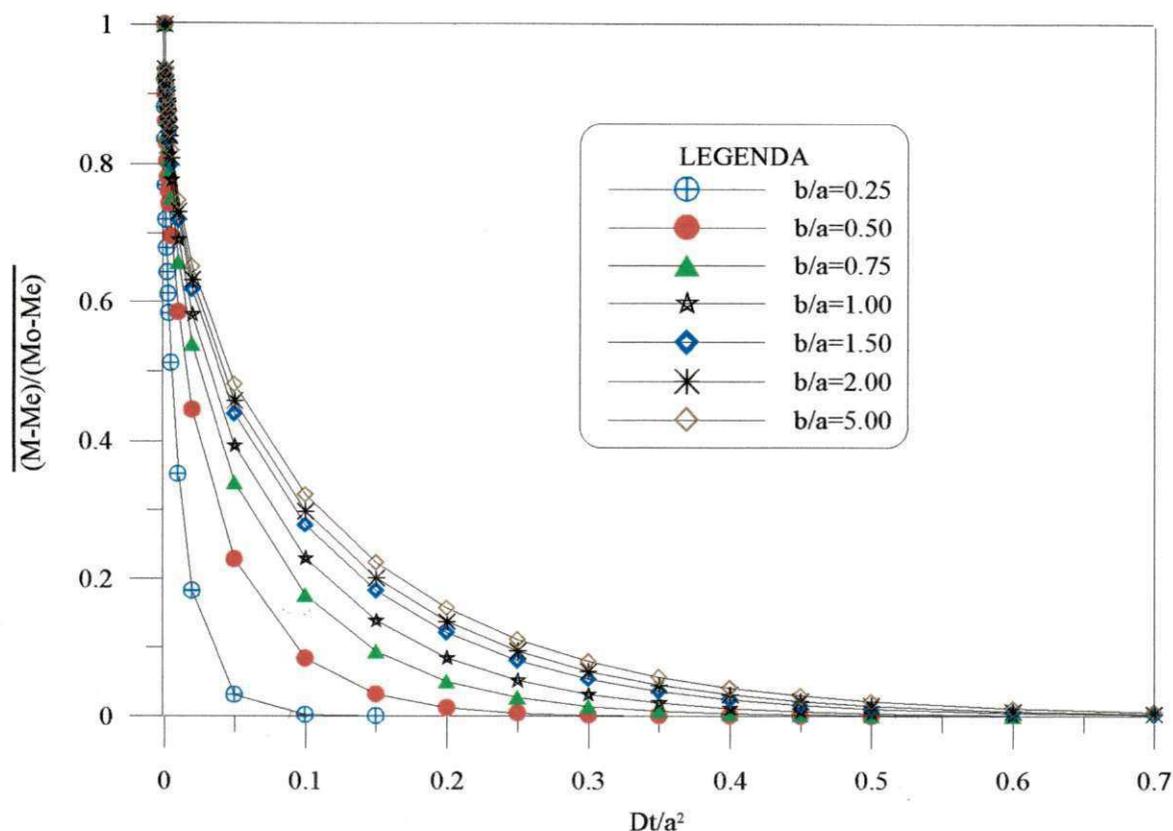


Figura 4.2 - Teor de umidade médio adimensional em função do número de Fourier para várias razões de aspectos.

Tabela 4.1 – Área, volume e relação área/volume de esferóides para várias razões de aspectos.

	a	b	V	S	S/V
Prolato	1,00	5,00	20,9440	50,1425	2,3965
	1,00	2,00	8,3776	21,4784	2,5638
	1,00	1,50	6,2832	16,9182	2,6926
Esfera	1,00	1,00	4,1888	12,5664	3,0000
Oblato	1,00	0,75	3,1416	10,5331	3,3528
	1,00	0,50	2,0944	8,6719	4,1405
	1,00	0,25	1,0471	7,1201	6,7992

Resultados similares também foram observados em outros trabalhos com esferóides oblato, (Carmo, 2000) e com esferóides prolato, (Lima, 1999), assim como em outras formas geométricas, como em formas de paralelepípedos, (Nascimento, 2002). Essa característica é observada não só no processo de secagem, mais também para processos de aquecimento, resfriamento e umidificação de sólidos.

A Figura 4.3 apresenta o teor de umidade adimensional no centro do esferóide em função do número de Fourier, para várias razões de aspectos. Analisando a figura, nota-se que o teor de umidade adimensional no centro do esferóide tem o mesmo comportamento do teor de umidade médio adimensional apresentado na figura anterior, isto é, decresce com o tempo de processo e que, quanto menor a razão de aspecto mais rápido é a perda de massa do sólido.

Observa-se ainda nas Figuras 4.2 e 4.3, que para uma razão de aspecto de 0,25, o teor de umidade decresce rapidamente para uma pequena variação do número de Fourier. Enquanto que para uma razão de aspecto de 5,00, o teor de umidade decresce mais suavemente para esta mesma variação do número de Fourier.

Além disso, observando-se a Figura 4.3, constata-se que, com o número de Fourier de 0,20 e razão de aspecto de 0,50, o teor de umidade adimensional é de aproximadamente 0,05, enquanto que para uma razão de aspecto de 5,00, e com o mesmo número de Fourier, o teor de umidade é de aproximadamente de 0,50. Esses exemplos demonstram a influência direta que a razão de aspecto do esferóide tem sobre o teor de umidade dentro do mesmo.

Verifica-se ainda que no centro do esferóide, o comportamento das curvas é mais suave, em relação ao comportamento das curvas do teor de umidade médio adimensional. Pode-se concluir que, no centro do esferóide é o local onde ocorrem os menores gradientes de umidade durante o processo de secagem, para uma mesma razão de aspecto e um mesmo número de Fourier.

A Figura 4.4 ilustra o comportamento do teor de umidade adimensional em função da coordenada radial r^* para vários números de Fourier em $z^* = 0$, para um esferóide com razão de aspecto $b/a = 0,5$. Analisando a figura, percebe-se que o teor de umidade adimensional diminui com o aumento do número de Fourier.

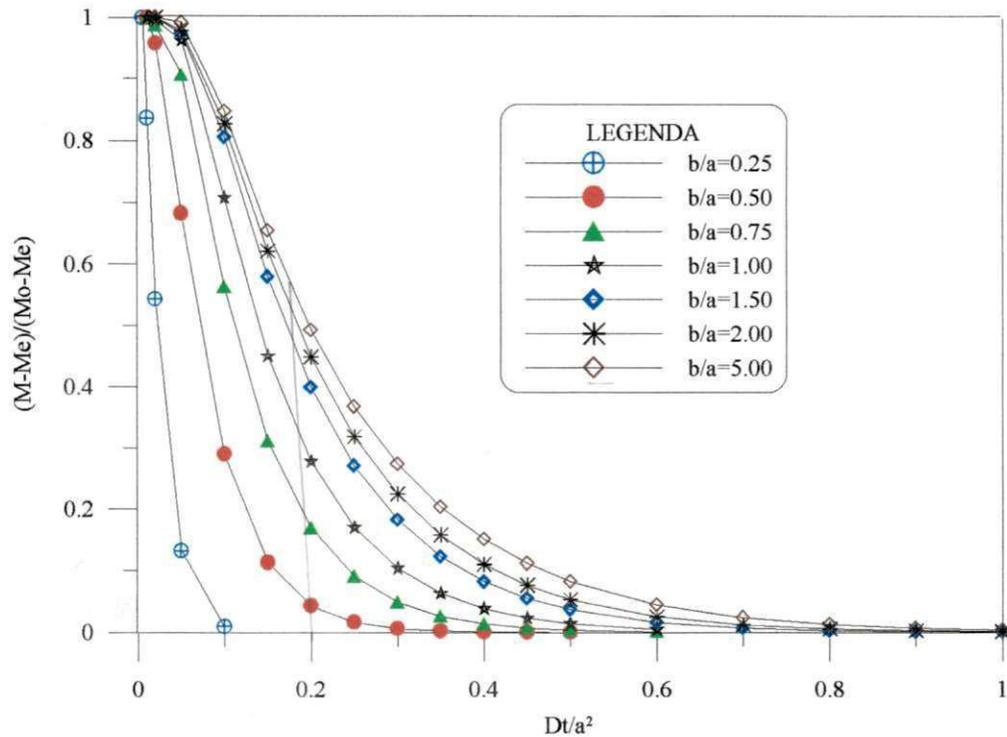


Figura 4.3 - Teor de umidade adimensional no centro do esferóide em função do número de Fourier para várias razões de aspectos.

Ainda analisando a Figura 4.4 pode-se observar que o teor de umidade adimensional também depende da coordenada radial r^* . Tomando como referência a curva para o número de Fourier $t^* = 0,05$ e $r^* = 0$, o valor do teor de umidade adimensional é de aproximadamente 0,68 e para a coordenada $r^* = 0,8$, o valor do teor de umidade adimensional é de aproximadamente 0,18. É notado que o teor de umidade decresce com o aumento da coordenada r^* para o mesmo número de Fourier t^* , ou seja, quanto mais próximo da superfície do esferóide, menor será o teor de umidade adimensional. Esse resultado mostra que os gradientes de umidade são menores, próximo ao centro do esferóide, e bastante elevado próximo à superfície, principalmente para tempos curtos.

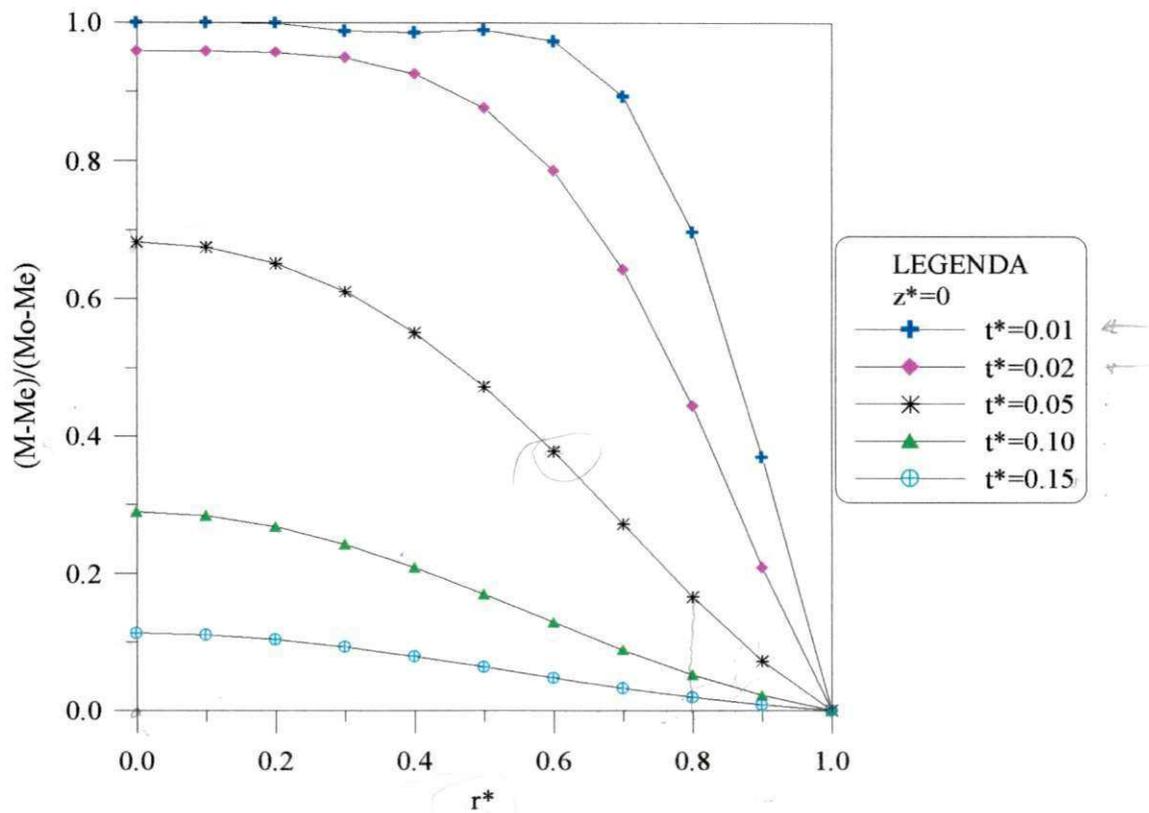


Figura 4.4 - Teor de umidade adimensional em função da coordenada radial r^* para vários números de Fourier em $z^* = 0$ para uma razão de aspecto $b/a = 0,5$.

A Figura 4.5 apresenta o comportamento do teor de umidade adimensional em função da coordenada radial z^* para vários números de Fourier, em $r^* = 0$, para um esferóide com razão de aspecto $b/a = 0,5$. Observa-se que as curvas têm o mesmo comportamento das curvas da Figura 4.4, ou seja, demonstra a dependência do teor de umidade da coordenada longitudinal z^* , em qualquer número de Fourier t^* . Entretanto, nota-se que para o caso apresentado na Figura 4.4, as curvas apresentam um comportamento mais suave, com a variação da coordenada radial, indicando assim que os gradientes de umidade são maiores na direção da coordenada z^* em relação a direção da coordenada r^* , com razão de aspecto $b/a = 0,5$.

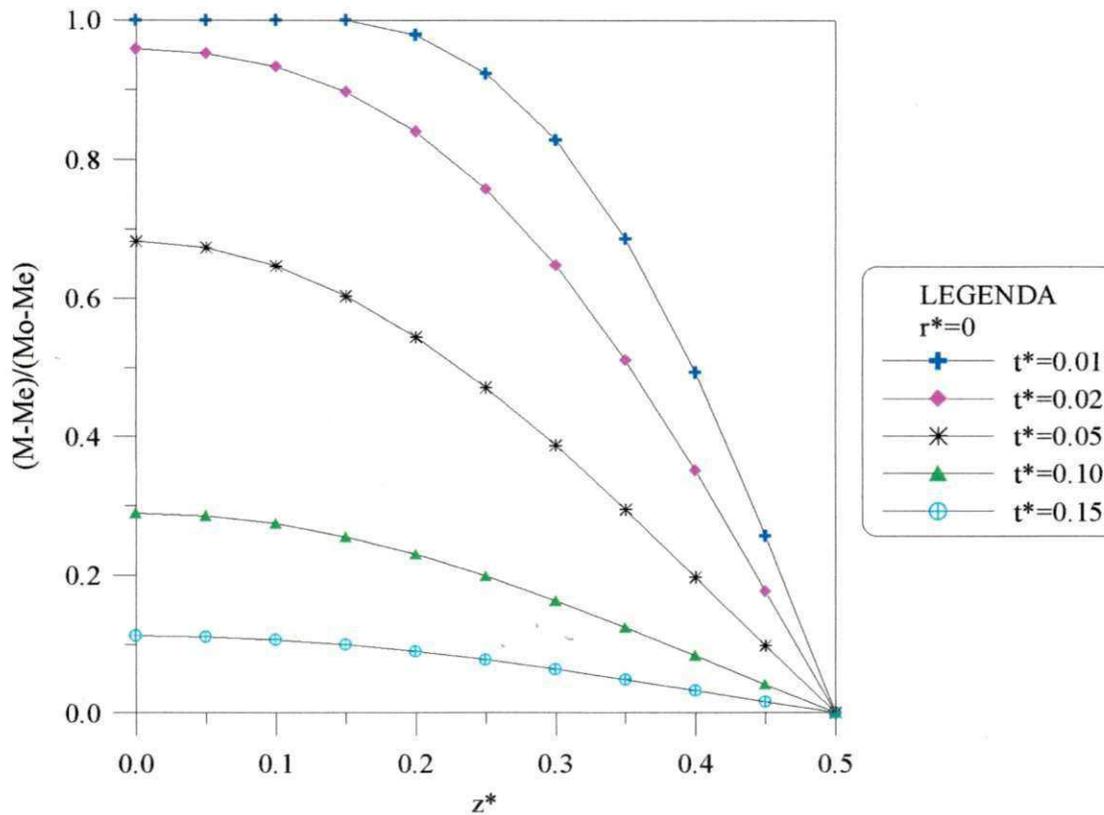


Figura 4.5 - Teor de umidade adimensional em função da coordenada radial z^* para vários números de Fourier em $r^*=0$ para uma razão de aspecto $b/a = 0,5$.

A Figura 4.6 apresenta o comportamento do teor de umidade adimensional em função da coordenada radial r^* para vários números de Fourier em $z^* = 0$, para um esferóide com razão de aspecto $b/a = 1,5$ (esferóide prolato). Analisando o gráfico, percebe-se que, assim como para um esferóide oblato, o teor de umidade adimensional depende do número de Fourier e da coordenada r^* , como esperado. Tomando como base a coordenada $r^* = 0,2$, para o número de Fourier $t^* = 0,02$, o valor aproximado do teor de umidade adimensional é de 1,0, já para $r^* = 0,02$ e para o número de Fourier $t^* = 0,20$, o valor aproximado do teor de umidade adimensional é de 0,39, ou seja, quanto maior for o número de Fourier menor será o teor de umidade adimensional. Agora tomando-se como referência o número de Fourier $t^* = 0,10$, para a coordenada $r^* = 0,2$, o teor de umidade adimensional apresenta o valor aproximado de 0,78 e para a coordenada $r^* = 0,8$, o teor de umidade adimensional apresenta o valor aproximado de 0,38, ou seja, quanto maior a coordenada radial r^* menor será o teor de umidade adimensional. Esses exemplos mostram que independente da razão de aspecto b/a , o

teor de umidade depende diretamente da coordenada radial r^* assim como do número de Fourier.

Nota-se que nas Figuras 4.4 e 4.6 para tempos curtos, ou seja, para o número de Fourier de 0,01, ocorreram pequenas oscilações matemáticas, que não comprometeram os resultados, que podem ser atenuadas aumentando-se o número de funções de base. Payne et al (1986) reportam uma comparação dos valores de $(1 - M^*)$ com vários números de funções de base para elipsóides com razões de aspecto $b/a = 0,5$ e $b/a = 1,5$, onde se observa claramente este efeito.

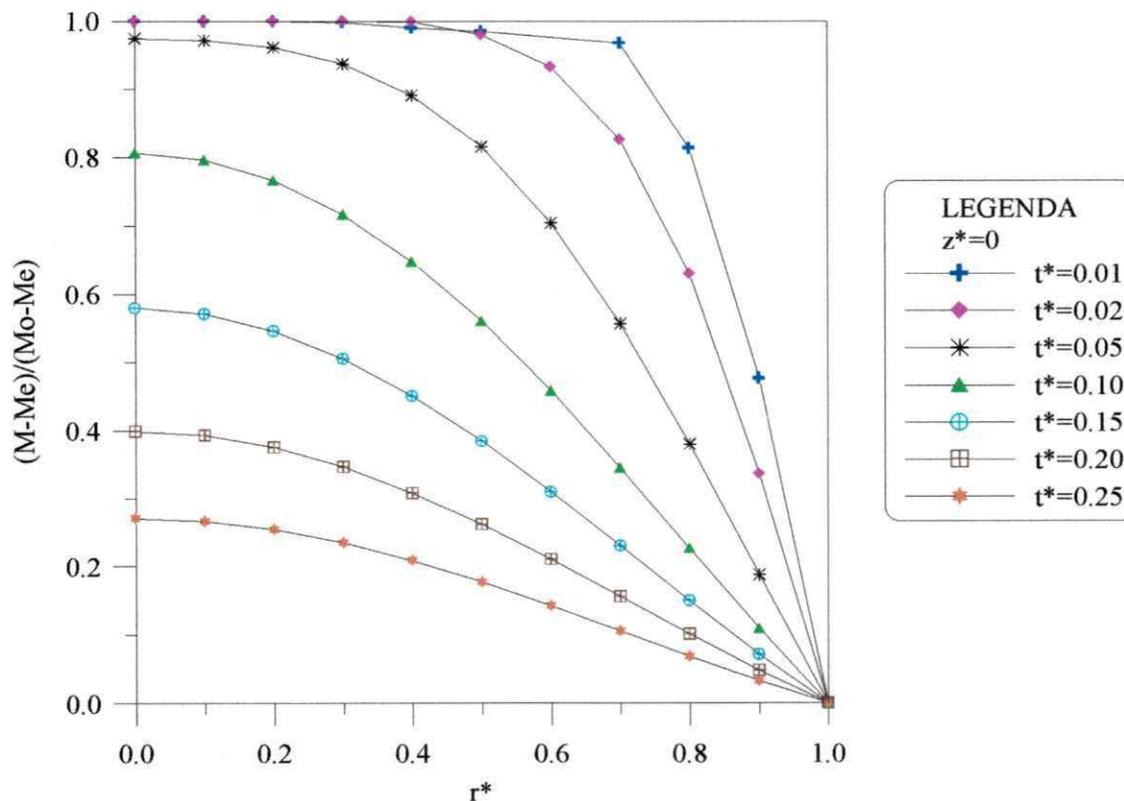


Figura 4.6 - Teor de umidade adimensional em função da coordenada radial r^* para vários números de Fourier em $z^* = 0$ para uma razão de aspecto $b/a = 1,5$.

A Figura 4.7, apresenta o teor de umidade adimensional em função da coordenada longitudinal z^* para vários números de Fourier, em $r^*=0$, para uma razão de aspecto $b/a = 1,5$ (esferóide prolato).

Assim como na Figura 4.6, a dependência do teor umidade adimensional com o número de Fourier e a coordenada longitudinal fica evidente. Nota-se que quanto maior for o número de Fourier menor será o teor de umidade adimensional para a mesma coordenada r^* e/ou z^* e que quanto maior for a coordenada radial z^* menor será o teor de umidade adimensional para o mesmo número de Fourier e a mesma razão de aspecto b/a .

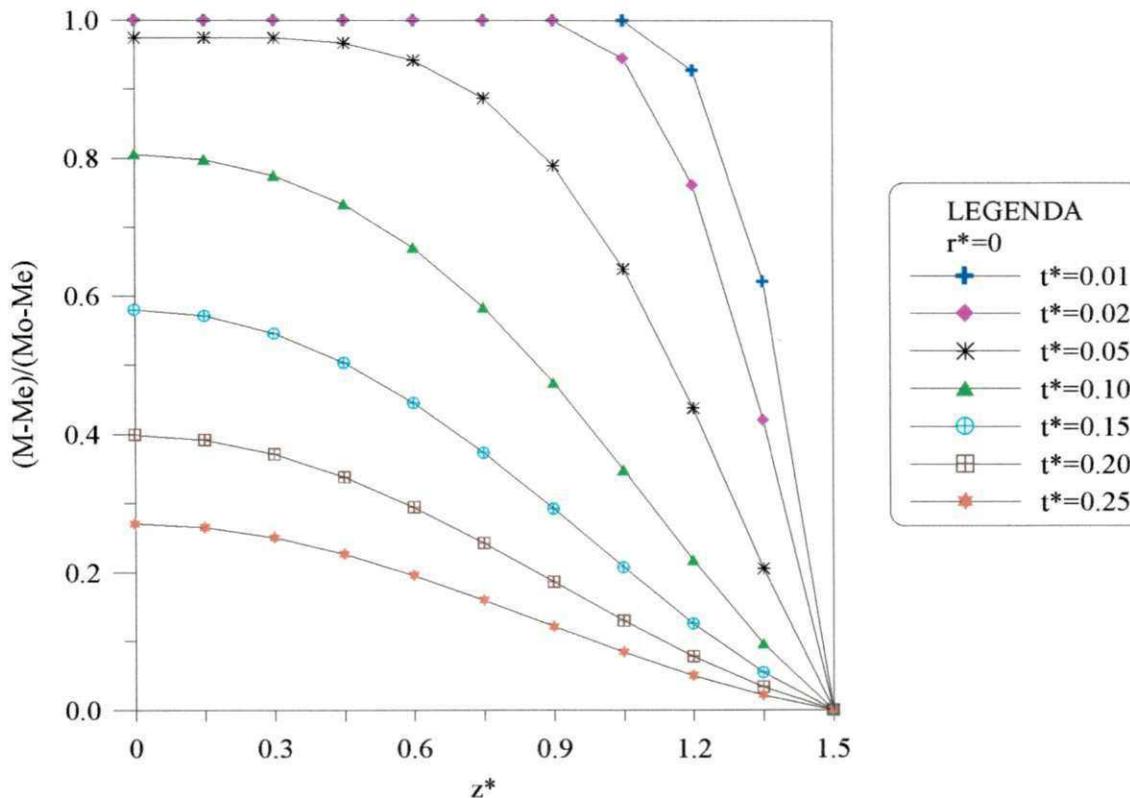


Figura 4.7 - Teor de umidade adimensional em função da coordenada radial z^* para vários números de Fourier em $r^*=0$ para uma razão de aspecto $b/a = 1,5$.

A Figura 4.8, apresenta a distribuição do teor de umidade adimensional dentro de um esferóide oblato com razão de aspecto $b/a = 0,5$ em função das coordenadas cilíndricas (r^*, z^*) para o número de Fourier $t^* = 0,05$.

Analisando a Figura 4.8, pode-se notar que a distribuição do teor de umidade apresenta elevados gradientes de umidade, principalmente no eixo z^* e nas proximidades da superfície do sólido, como já pôde ser percebido na Figura 4.4. As linhas de iso-concentração, são apresentadas em formas de linhas elípticas tendendo a acompanhar a forma do esferóide oblato. É observado um fenômeno que ocorre na extremidade do esferóide, nas proximidades

da coordenada $r^* = 1,00$, o teor de umidade adimensional é muito baixo. Isto quer dizer que, a secagem ocorre rapidamente nessa região, gerando altos gradientes de umidade. Sendo assim, esta região é mais propícia a sofrer efeitos termo-mecânicos, tais como trincas, deformações e podendo chegar até a ruptura do sólido, efeitos estes que comprometem a qualidade do produto pós-secagem. Vários autores também reportam este efeito de ponta, por exemplo, Carmo (2000), Oliveira (2001) e Nascimento (2002).

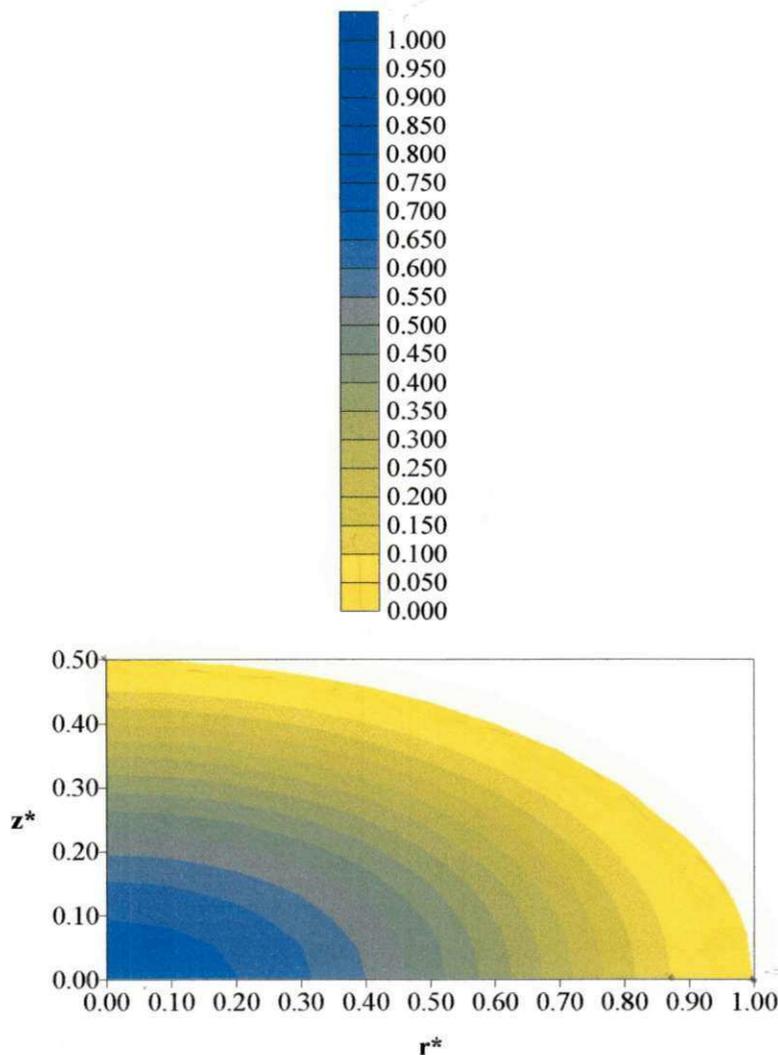


Figura 4.8 - Distribuição do teor de umidade adimensional com $b/a = 0,5$ em função das coordenadas cilíndricas para $t^* = 0,05$.

A Figura 4.9 apresenta a distribuição do teor de umidade adimensional dentro de um esferóide oblato com razão de aspecto $b/a = 0,5$ (esferóide oblato) em função das coordenadas cilíndricas (r^*, z^*) para o número de Fourier igual a $0,10$. A análise da figura

demonstra que a distribuição do teor de umidade adimensional apresenta gradientes de umidade baixos, ou seja, a distribuição do teor de umidade adimensional já se apresenta quase que por igual dentro do esferóide. Também se nota as formas elípticas das linhas de iso-concentração dentro do esferóide.

Comparando-se as Figuras 4.8 e 4.9, verifica-se que maiores gradientes de umidade ocorrem em baixos números de Fourier, tendendo a zero no final do processo, quando então o sólido atinge seu teor de umidade de equilíbrio.

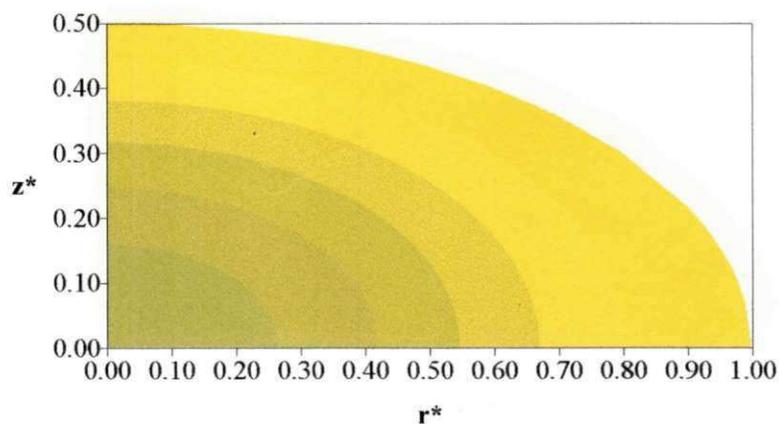


Figura 4.9 - Distribuição do teor de umidade adimensional com $b/a = 0,5$ em função das coordenadas cilíndricas para $t^* = 0,10$.

As Figuras 4.10, 4.11 e 4.12 apresentam a distribuição do teor de umidade adimensional dentro de um esferóide com razão de aspecto $b/a = 1,0$ (esfera) em função das coordenadas espaciais para os números de Fourier $t^* = 0.05$; $t^* = 0.10$ e $t^* = 0.20$, respectivamente.

Analisando a Figura 4.10, nota-se que ocorrem altos gradientes de umidade dentro do esferóide, ou seja, enquanto que na região próximo da superfície do esferóide o produto está praticamente seco no seu centro ele está muito úmido. As linhas de iso-concentração se apresentam em formas circulares, acompanhando a forma do esferóide. Nota-se também que nessa forma esférica não aparece nenhuma região que apresente o fenômeno de efeito de ponta.

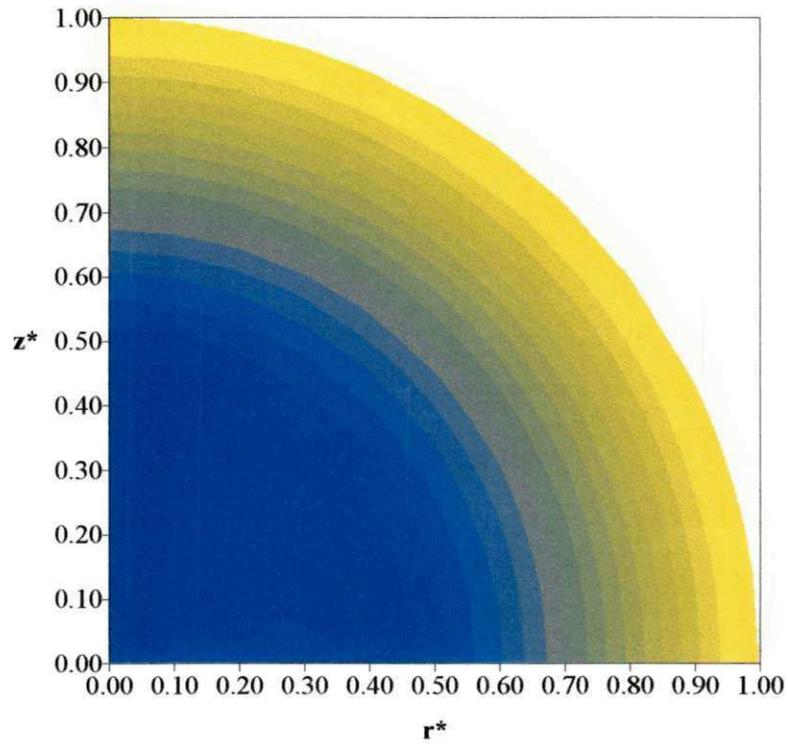


Figura 4.10 - Distribuição do teor de umidade adimensional com $b/a = 1,0$ em função das coordenadas cilíndricas para $t^* = 0,05$.

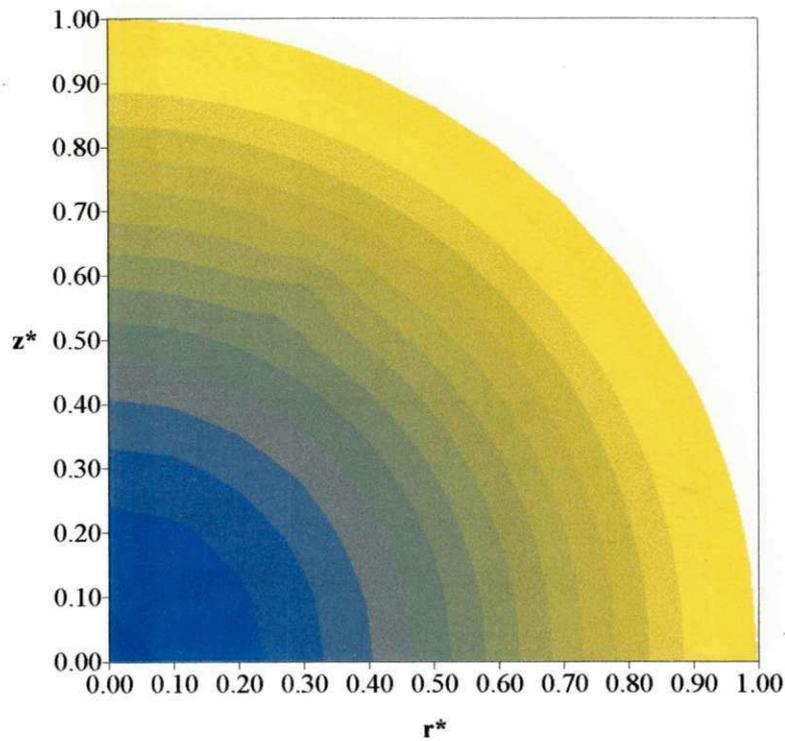


Figura 4.11 - Distribuição do teor de umidade adimensional com $b/a = 1,0$ em função das coordenadas cilíndricas para $t^* = 0,10$.

A Figura 4.11, apresenta gradientes de umidade menores que no caso anterior, ou seja, para um número de Fourier de 0,05, e bem menores ainda para um $t^* = 0,20$ (Figura 4.12). Isto indica que o fluxo de umidade ocorre do centro do sólido para a superfície do mesmo.

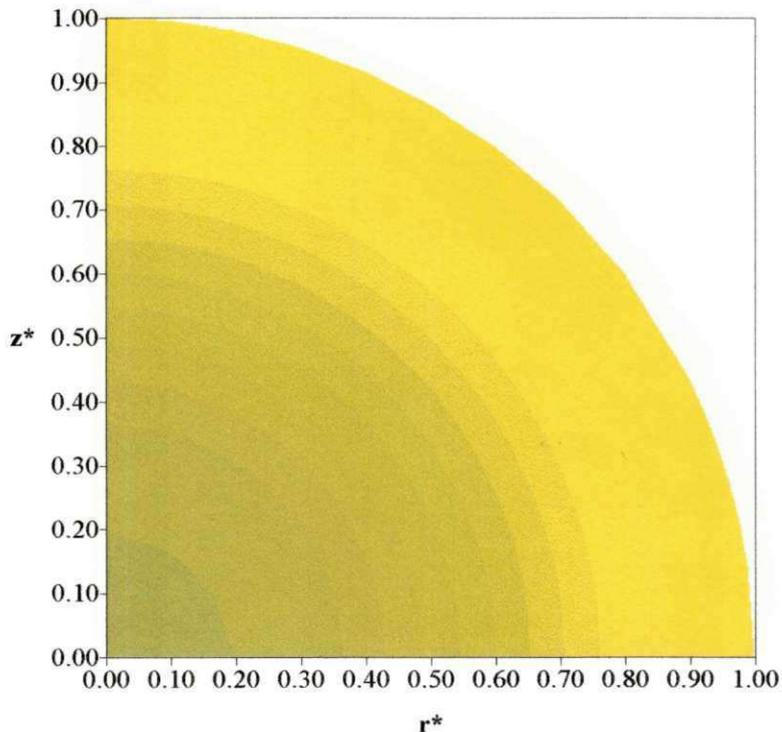


Figura 4.12 - Distribuição do teor de umidade adimensional com $b/a = 1,0$ em função das coordenadas cilíndricas para $t^* = 0,20$.

As Figuras 4.13 à 4.15, apresentam a distribuição do teor de umidade adimensional dentro de esferóide em função das coordenadas cilíndricas (r^*, z^*) com razão de aspecto $b/a = 1,5$ (esferóide prolato) para $t^* = 0,05$; $t^* = 0,10$ e $t^* = 0,20$, respectivamente.

A análise da Figura 4.13 mostra que para $t^* = 0,05$ ocorrem altos gradientes de umidade dentro do esferóide. Percebe-se que as linhas de iso-concentração possuem formas elípticas que acompanham a forma do esferóide prolato.

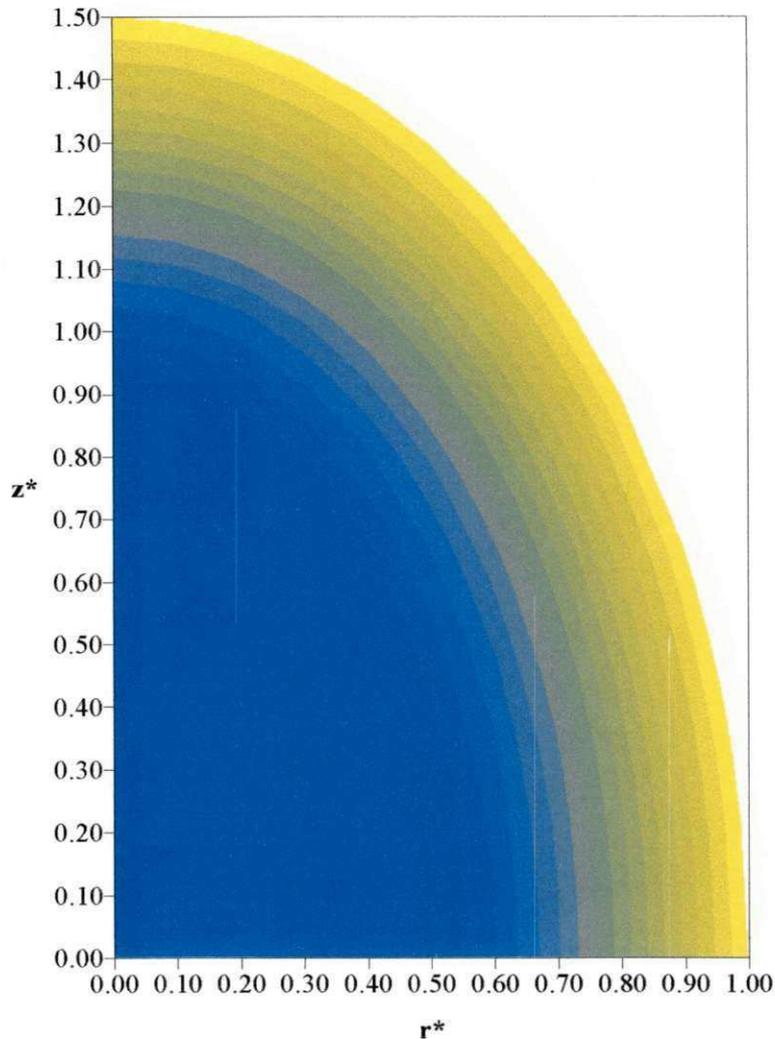


Figura 4.13 - Distribuição do teor de umidade adimensional com $b/a = 1,5$ em função das coordenadas cilíndricas para o $t^* = 0,05$.

Analisando a Figura 4.14, percebe-se que a distribuição do teor de umidade adimensional dentro do esferóide para $t^* = 0,10$, apresenta gradientes de umidade menores que os apresentados para $t^* = 0,05$ (Figura 4.13).

Em contraste, para $t^* = 0,20$ (Figura 4.15), tem-se baixos gradientes de umidade. O fenômeno do efeito de ponta é notado novamente, nos três casos citados, nas proximidades da coordenada $z^* = 1,5$, principalmente para o caso com o número de Fourier de 0,05. Este efeito é mais acentuado que no caso do esferóide oblato com razão de aspecto 0,5.

Fazendo-se um comparativo entre as Figuras 4.8 - 4.15, pode-se perceber como já demonstrado na Tabela 4.1, que a relação área/volume influencia diretamente na cinética da secagem. Quanto maior for a relação área/volume do sólido, mais rápida se dará a secagem.

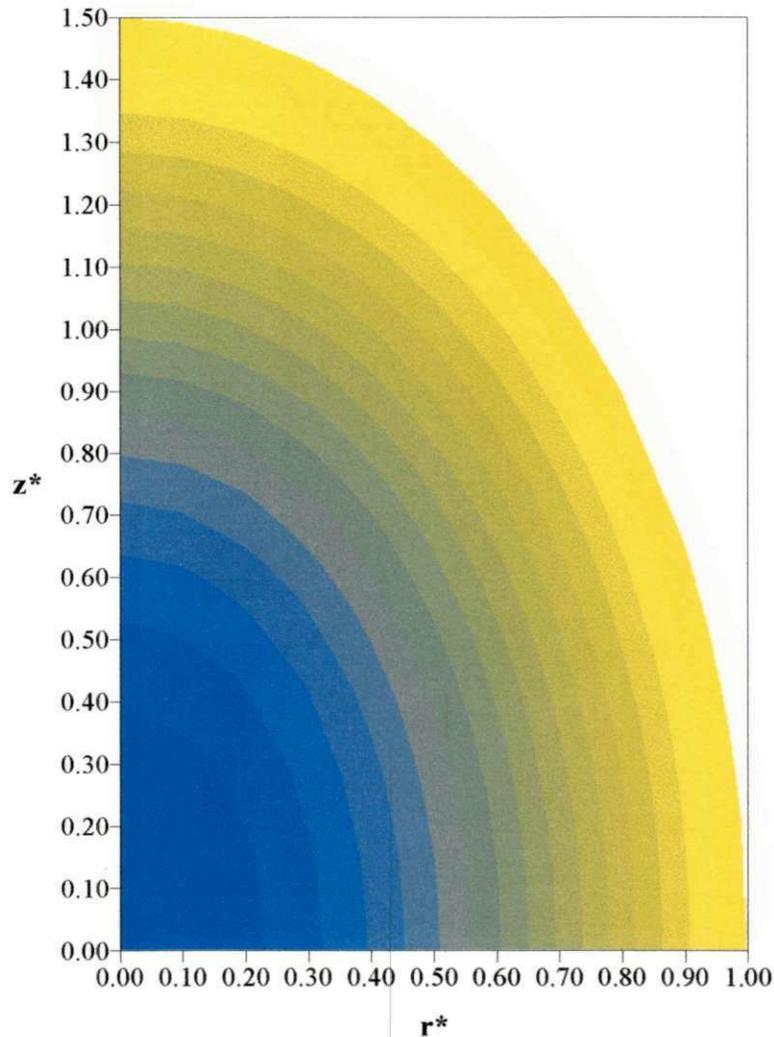


Figura 4.14 - Distribuição do teor de umidade adimensional com $b/a = 1,5$ em função das coordenadas cilíndricas para $t^* = 0,10$.

As regiões onde aparecem altos gradientes de umidade representam as regiões de maior perda de água e estas regiões também apresentam altos gradientes de temperatura, nas quais, são mais propícias a existências de choques térmicos e conseqüentemente trincas, fraturas e deformações, que comprometem a qualidade do produto.

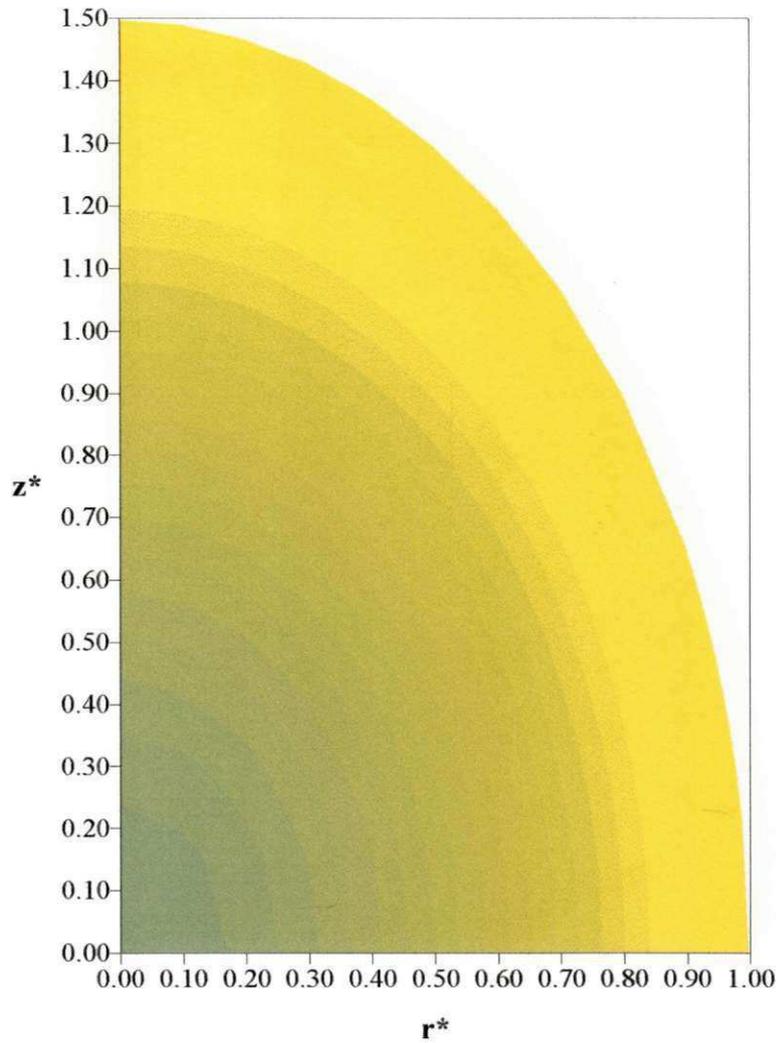


Figura 4.15 - Distribuição do teor de umidade adimensional com $b/a = 1,5$ em função das coordenadas cilíndricas para $t^* = 0,20$.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

5.1 Conclusões

De acordo com a análise dos dados obtidos com a simulação do processo de secagem em corpos com geometria elipsoidal, pode-se concluir de maneira geral que:

- A modelagem matemática utilizada para a obtenção da solução analítica do problema foi adequada. De maneira semelhante, a solução pode ser utilizada para descrever outros fenômenos transientes, tais como: umidificação, resfriamento e/ou aquecimento;
- O método integral baseado em Galerkin (Método GBI) mostrou-se eficiente para solução da equação de difusão no sistema de coordenadas cilíndricas;
- A partir da solução encontrada para as condições de contornos aplicadas, é possível obter a distribuição da grandeza estudada dentro do sólido esferoidal, que pode assumir formas, que variam de um disco circular até um cilindro infinito, passando por esfera, assim como os perfis do teor de umidade no interior do mesmo, durante o processo de secagem;

- O teor de umidade médio adimensional dentro de um esferóide, assim como o teor de umidade adimensional no centro e em qualquer ponto no interior do mesmo, decresce com o aumento do número de Fourier, para qualquer razão de aspecto b/a ;
- A forma e/ou a razão de aspecto do esferóide influencia diretamente no seu processo de secagem, e este fato está ligado diretamente à relação área/volume, ou seja, quanto menor for a relação área/volume, mais rápido ocorrerá o processo de secagem, para um mesmo número de Fourier fixado;
- Os menores gradientes de umidade durante o processo de secagem ocorrem próximo do centro do esferóide e bastante elevado próximo a superfície, principalmente para tempos curtos, para qualquer razão de aspecto;
- O teor de umidade adimensional depende das coordenadas radial e longitudinal (r^*, z^*) , quanto mais próximo da superfície do esferóide, menor será o teor de umidade adimensional;
- As linhas de iso-concentração dentro do esferóide tende a acompanhar a mesma forma da superfície do sólido esferoidal. Este fato é devido à condição de contorno utilizada;
- Os esferóides oblatos e prolatos apresentam um fenômeno chamado de efeito de ponta, onde apresentam uma região com altos gradientes de umidade sendo mais expressivo para os esferóides prolatos;
- O fluxo de umidade dentro do esferóide ocorre do centro do sólido para a superfície do mesmo.

5.1 Sugestões para futuros trabalhos

- Estudar o fenômeno de difusão em corpos esferoidais considerando os efeitos convectivos;
- Estudar o fenômeno de difusão em corpos esferoidais considerando o coeficiente de transporte Γ^Φ variável ao longo do processo de secagem;
- Validar experimentalmente os modelos apresentados neste trabalho;
- Aplicar a solução apresentada nesta pesquisa, a secagem de produtos biológicos (frutos, grãos e etc).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alassar, R. S. Heat conduction from spheroids. **Journal of Heat Transfer**. v. 121, n. 2, p. 497-499, 1999.

Alsina, O L. S., Brasileiro, I. M. N. Drying kinetics of west indian cherry. In: Inter-American Drying Conference (IADC), 1997, Itu. **Proceedings...** Itu: v. B, p. 434-440.

Azzouz, S.; Jomaa, W.; Belghith, A. Drying kinetic equation of single layer of grapes. In: International Drying Symposium (Drying'98), Thessaloniki. **Proceedings...** Thessaloniki: v.B, 1998, p. 988-997.

Beck, J. V.; Cole, K. D.; Haji-Sheikh, A.; Litkouhi, B. **Heat conduction using green's functions**. Hemispheric Publishing Corporation, New York, USA, Chapter Ten: Galerkin-based green's functions and solutions; Chapter Eleven: Applications of the Galerkin-based green's functions, 1992, p 293-343.

Brooker, D. B., Bakker-Arkema, F.W., Hall, C.W. **Drying and storage of grains and oilseeds**. New York: AVI Book, 1992, 450 p.

Carmo, J. E. F. **Difusão em sólidos esferoidais oblatos: modelagem e simulação**. 2000. 76 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Departamento de Engenharia Mecânica, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, Campina Grande.

Carmo, J. E. F.; Lima, A. G. B.; Modeling and simulation of mass transfer inside the oblate spheroidal solids. **Proceedings of the second Inter-American drying**. Conference. Boca Del Rio, Vera Cruz, México, 2001.

Carmo, J. E. F; Lima, A G. B. Mass transfer in oblate spheroidal solids. In: Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences (ENCIT), 8, 2000a. Porto Alegre: **Proceedings...** Porto Alegre: UFRGS, 2000a, CD-ROM.

Carmo, J. E. F; Lima, A G. B. Simulação numérica da transferência de massa em esferóides oblatos. In: Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM), 2000b. Natal: **Anais...** Natal: Sociedade Brasileira de Engenharia Mecânica, 2000b, CD-ROM.

Carslaw, H. S.; Jaeger, J. C. **Conduction of heat in solids**. Oxford University Press, New York, USA, 1959, 510p.

Coutelieiris, F.A.; Burganos, V. N.; Payatakes, A. C. Convective diffusion and adsorption in a swarm of spheroidal particles. **AICHE Journal**, v. 41, n. 3, p. 1122-1134. May 1995.

Crank, J. **The mathematics of diffusion**. Oxford Science Publications, New York, USA, 1992, 414p.

DeGroot, S. R. **Thermodynamics of irreversible processes**. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1951.

Elvira, C. The Diffusion process modelling in elliptic shaped bodies. In: International Congress Engineering and Food, 1990, London. **Proceedings....** London: 1990, v. 1, p.456-464.

Feng, Z.; Michaelides, E. E. Unsteady heat and mass transfer from a spheroid. **AIChE Journal**. v. 43 n.3, march 1997.

Fortes, M. **Um estudo fundamental de transporte de massa e energia em meios capilares porosos**. 1982. 100 p. Tese (Livre Docência). Departamento de Engenharia Térmica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

Fortes, M., Okos, M. R. A non-equilibrium thermodynamics approach to transport phenomena in capillary porous media. **Transactions of the ASAE**, v.24, p.756-760, 1981a.

Fortes, M., Okos, M. R. **Advances in drying**. Washington: Hemisphere Publishing Corporation. 1980, Chapter Five: Drying theories: their bases and limitations as applied to foods and grains, v.1, p.119-154.

Gebhart, B. **Heat conduction and mass diffusion**, New York: McGraw-Hill, Inc., 1993, 634p.

Gouveia, J. P. G. Almeida, F. A. C.; Murr, F. E. X. Estudo da difusividade e do encolhimento do gengibre durante a secagem. **Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais**. v. 1, n. 1, p.51-58, 1999.

Haghighi, K., Irudayaraj, J., Strohshine, R. L., Sokhansanj, S. Grain kernel drying simulation using the finite element method. **Transaction of the ASAE**, v. 33, n. 6, p. 1957-1965, 1990.

Haji-Sheikh, A., Sparrow, E. M. The solution of heat conduction problems by probability methods. **Transactions of the ASAE: Journal of Heat transfer**, v. 89 series C, n. 2, May 1967.

Haji-Sheikh, A., Sparrow, E. M. Transient heat conduction in a prolate spheroidal solid. **Transactions of the ASME: Journal of Heat Transfer**, v.88, n.3, p.331-333, August 1966.

Hasatani, N.; Itaya, Y. Deformation characteristic of ceramics during drying. **International Drying Symposium**. p. 190-199, Parte A, 1992.

Igathinathane, C.; Chattopadhyay, P. K. Surface area of general ellipsoid shaped food materials by simplified regression equation method. **Journal of Food Engineering**. v. 46, 2000, p. 257-266.

Júnior, P.E.P; Cairncross, R.A. Optimization of single-zone drying of polymer solution coatings to avoid blister defects. In: International Drying Symposium (Drying'98), Thessaloniki: **Proceedings...** Thessaloniki: v.C, 1998, p. 1822-1829.

Júnior, S. A.; Innocentini, M. D.; Pandolfelli, V. C. Variáveis críticas no processo de secagem de concretos cerâmicos. **Cerâmica**, v. 45, n. 292-293, 1999.

Keey, R. B. **Drying of loose and particulate materials**. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1992. 502 p.

Keltner, N. R. Transient heat flows in half-space due to an isothermal disk on the surface. **Journal Heat Transfer**, p. 412-414, Aug., 1973.

Ketelaars, A. A. J.; Jomaa, W.; Puiggali, J. R.; Coumans, W. J. Drying shrinkage and stress. **International Drying Symposium**. p. 293-303, Parte A, 1992.

Keteraals, A. A. J.; Lauf, O.; Coumans, W. J.; Kerkhof, P. J. A. M.; Determination of diffusion coefficient from experimental moisture concentration profiles in clay, **Proceedings of the International Drying Symposium (Drying'92)**, 1992b, Part A, pp 345-352.

Lima, A. G. B. ; **Estudo da secagem e dimensionamento de secagem de casulos do bicho-da-seda**. 1995. 195p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Departamento de Engenharia Mecânica, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, Campina Grande.

Lima, A. G. B. Nebra, S. A, Theoretical analysis of the diffusion process inside prolate spheroidal solids. **Drying Technology**, v. 18, n. 1-2, 2000a, p. 21-48.

Lima, A. G. B.; Nebra, S. A. Caracterização de formas geométricas de sólidos e seus efeitos no fenômeno difusional. In: XXVII Congresso Brasileiro de Engenharia Agrícola (Conbea'99), 1999. Pelotas, Brasil. **Anais...** Pelotas: Sociedade Brasileira de Engenharia Agrícola, 1999, v. 1, CD-ROM.

Lima, A. G. B.; Nebra, S. A., Sakanaka, P. H. Analytical solution of the mass diffusion equation applied to ellipsoids of revolution. In: XV Congresso Brasileiro de engenharia Mecânica (COBEM), 1999. Águas de Lindóia: **Proceedings...** Águas de Lindóia: CD-Rom.

Lima, A. G. B.; Nebra, S. A.; Queiroz, M. R.; Simultaneous heat and mass diffusion including shrinkage during drying of banana. In: IADC Conferece, 2001. Boca Del Rio, Vera Cruz, Mexico: **Proceedings of the second Inter-American Drying Conference**. Boca Del Rio, Vera Cruz, México.

Lima, A. G. B.; Queiroz, M. R.; Nebra, S. A., Simultaneous moisture transport and shrinkage during drying of solids with ellipsoidal configuration. **Proceedings of the International Drying Symposium (IDS'2000)**, Noordwijkerhout, Holanda, vol. 1, 2000b, CD-ROM.

Lima, A.G.B. **Fenômeno de difusão em sólidos esferoidais prolatos. Estudo de caso: secagem de banana.** 1999. 265 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Lu, R., Siebenmorgen, T. J. Moisture diffusivity of long-grain in rice components. **Transactions of the ASAE**, v. 35, n. 6, p. 1955-1961, 1992.

Luccas, Valdecir. **Obtenção de fatias de banana desidratada crocante através da pré-secagem a altas temperaturas e curto tempo em leito fluidizado.** Dissertação (Dissertação de Mestrado). Campinas., 1996. 104p.

Luikov, A. V. **Analytical heat diffusion theory.** London, England: Academic Press, Inc. Ltd., 1968, 684p.

Luikov, A. V. **Heat and mass transfer in capillary porous bodies.** New York: Pergamon Press, 1966, 523p.

Luikov, A. V., Mikhailov, Y. A. **Theory of energy and mass transfer.** Oxford: Pergamon Press Ltd., 1965, 392 p.

Nascimento, J. J. S.; Belo, F. A.; Lima, A. G. B. Solução numérica para o problema de difusão transiente em sólidos paralelepípedos. In: Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências dos Materiais (CBECIMAT), 2000b. São Pedro - S.P., Brasil. **Anais...** São Pedro – S.P., 2000b, CD-ROM.

Nascimento, J. J. S.; Belo, F. A.; Lima, A. G. B.; Pontes, L. R. A. Fenômenos de difusão transiente em sólidos paralelepípedos. In: Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM), 2000a. Natal, Brasil. **Anais....** Natal, Brasil, 2000a, CD-ROM.

Nascimento, J. J. S.; Belo, F. A.; Lima, A. G. B.; Pontes. Simultaneous moisture transport and shrinkage during drying of parallelepiped solids. In: IADC Conference, 2001. Boca Del Rio, Vera Cruz, Mexico: **Proceedings of the Second Inter-American Drying Conference**. Boca Del Rio, Vera Cruz, México.

Nascimento, J. J. S. **Fenômenos de difusão transiente em sólidos paralelepípedos. Estudo de caso: Secagem de materiais cerâmicos**. 2002. 199 p. Tese (doutorado em Engenharia Mecânica). Departamento de Engenharia Mecânica, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa.

Niven, C. **On the conduction of heat in ellipsoids of revolution**. London, England: Philosophical transactions Royal Society, 1880, v. 171, p. 117-151.

Norminton, E. J., Blackwell, J. H. Transient heat flow from constant temperature spheroids and the thin circular disk. **The Quarterly Journal of Mechanics and applied mathematics**, v. XVII, Part 1, p. 65-72, 1964.

Oliveira, V. A. B. **Difusão em sólidos esferoidais prolatos: uma solução analítica**. 2001. 74 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Departamento de Engenharia Mecânica, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba. Campina Grande.

Oliveira, V. A. B.; Lima, A. G. B. Unsteady state mass diffusion in prolate spheroidal solids: An analytical solution. In: IADC Conference, 2001. Boca Del Rio, Vera Cruz, Mexico: **Proceedings of the Second Inter-American Drying Conference**. Boca Del Rio, Vera Cruz, México.

Payne, F. R.; Corduneanu, C. C.; Haji-Sheikh, A; Huang, T. **Integral methods in science and engineering**. Hemisphere Publishing Corporation, New York, USA, Chapter: On solution of parabolic partial differential equations using Galerkin functions, 1986, p. 467-479.

Prigogine, I. **Étude thermodynamique des phénomènes irréversibles**. Lieja: Editora Desoer, 1947.

Queiroz, M. R. **Estudo teórico-experimental da cinética de secagem de bananas**. 1994. 176 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Queiroz, M. R.; Nebra, S. A. Theoretical and experimental analysis of the drying kinetics of bananas. **Journal of Food Engineering**, v. 47, p. 127-132, 2001.

Reeds, J. S. Drying. **ASM International Handbook Committee**, 1991. p. 131-134.

Sarker, N. N., Kunze, O. R., Stroubolis, T. Finite element simulation of rough rice drying. **Drying Technology**, v.12, n.4, p. 761-775, 1994.

Schlunder, E.U.; Wagner, G.R. Drying of polymeric solvent coatings. In: International Drying Symposium (Drying 98), Thessaloniki: **Proceedings...** Thessaloniki: v. C, 1998, p.1772-1779.

Sheen, S.; Hayakawa, K. Parametric analysis for frozen spheroidal (prolate and oblate) or finitely cylindrical food. **Journal of Food Science**, v.57, n.1, p. 236-248, 1992.

Shivhare, U. S.; Gupta, A.; Bawa, A. S.; Gupta, P. Drying characteristics and product quality of okra. **Drying Technology**. v.18, n. 1-2 , p. 409-419, 2000.

Skelland, A. H. P. **Diffusional mass transfer**. New York: John Wiley & Sons, 1974, 510 p.

Smith, R. E., Nelson, G. L. Transient heat transfer in solids: theory versus experiment. **Transactions of the ASAE**, v. 12, n. 6, p. 833-844, 1969.

Smith, R. E., Nelson, G. L., Henrickson, R. L. Analyses on transient heat transfer from anomalous shapes. **Transactions of the ASAE**, v. 10, n. 2, p. 236-245, 1967.

Smith, R. E., Nelson, G. L., Henrickson, R. L. Application of geometry analysis on anomalous shapes to problems in transient heat transfer. **Transactions of the ASAE**, v. 11, n. 2, p. 296-302, 1968.

Sokhansanj, S. Prediction of heat and mass transfer within a grain kernel – a finite element application, In: International Drying Symposium (IDS'80), 1980, Montreal: **Proceeding...** Montreal: v.2, p.229-232.

Steffe, J. F., Singh, R. P. Liquid diffusivity of rough rice components. **Transactions of the ASAE**, v. 23, n. 3, p. 767-774, 1980.

Strumilo, C.; Kudra, T. **Drying: principles, science and design**. New York: Gordon and Beach Publishing, 1986, 448 p.

Suarez, C.; Viollaz, P.E. Shrinkage effect on drying behavior of potato slabs. **Journal of Food Engineering**, v. 13, n. 2, p. 103-114, 1991.

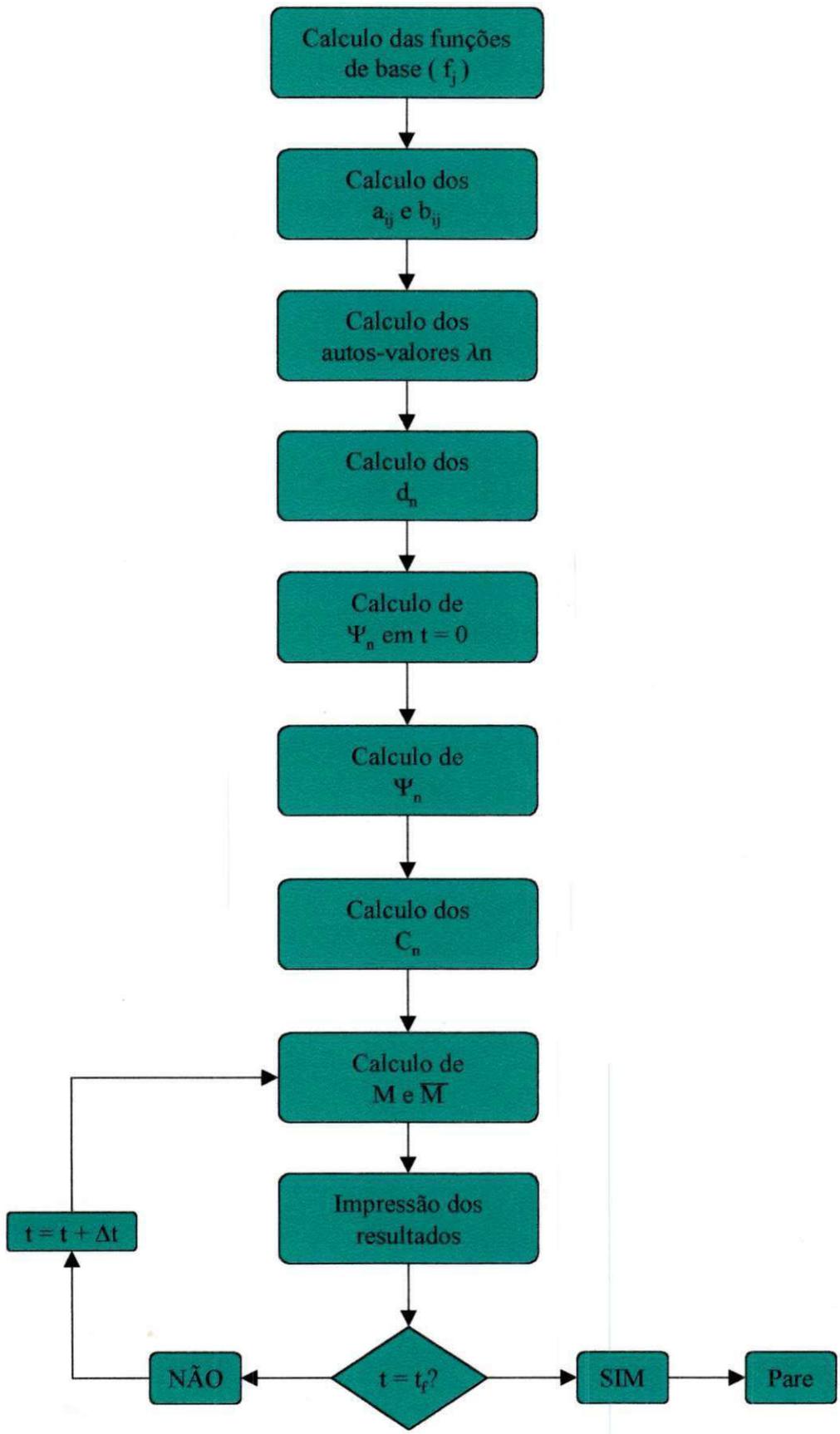
Whitaker, S. **Advances in drying**. Chapter two: Heat and mass transfer in granular porous media. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1980, v.1, p. 23-61.

Wrobel, L. C., Brebbia, C. A. A formulation of the boundary element method for axisymmetric transient heat conduction. **International Journal Heat and Mass Transfer**, v. 24, n. 5, p. 843-850, 1981.

Zienkiewicz, O. C., Parekh, C. J. Transient field problems: two-dimensional and three-dimensional analysis by isoparametric finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, n. 2, p. 61-71, 1970.

ANEXOS

ANEXOS A – Fluxograma do código computacional



ANEXOS B –Código computacional

```

Clear[a, b, r, z, t, y, ttt];
<< Calculus`VectorAnalysis`
SetCoordinates[Cylindrical[r, t, z]]
Cylindrical[r, t, z]

rmax = 6;
f = Array[0 &, {rmax*rmax}];
k = 0;

Do[
  Do[
    k = k + 1;
    f[[k]] = (1 - r^2 - z^2/b^2) * r^(i-j) * z^j;
    , {j, 0, i, 2}], {i, 0, rmax, 2}];
AA = Array[0 &, {k, k}];
EB = Array[0 &, {k, k}];
CC = Array[0 &, {k, k}];
EE = Array[0 &, {k, k}];
MatrixForm[f]

Do[
  Do[
    AA[[i, j]] = Simplify[
      Integrate[
        Integrate[
          DotProduct[ Grad[ f[[i]] ], Grad[ f[[j]] ] * r, {z, 0, b*Sqrt[(1-r^2/a^2)]}, {r, 0, a}] *
          2*Pi / (2*Pi / 3*a^2*b)];
    AA[[i, j]] = -AA[[i, j]];
    EB[[i, j]] = Simplify[
      Integrate[
        Integrate[
          f[[i]] * f[[j]] * r, {z, 0, b*Sqrt[(1-r^2/a^2)]}, {r, 0, a}] * 2*Pi / (2*Pi / 3*a^2*b)];
    Print["i=", i, " ", "j=", j, " ", "Aij=", AA[[i, j]], " ", "Bij=", EB[[i, j]];
    , {j, 1, k, 1}], {i, 1, k, 1}

a = 1;
b = 20/4;
CC = AA + y*EB;
MatrixForm[AA] // N
MatrixForm[EB] // N
MatrixForm[CC] // N

```

```

If[rmax < 6,
  Det[CC] // N;
  yaux1 = NSolve[Det[CC] == 0, y] // N;
  yaux2 = y /. yaux1;
]
If[rmax ≥ 6,
  y = 0;
  yaux2 = Array[0 &, {k}];
  eps = 10^(-15);
  dy = 0.0001;
  itermax = 10000000;
  iter = 0;
  p = -1;
  kkk = 0;
  While[iter < itermax && kkk ≤ 10,
    iter = iter + 1;
    erro = Det[CC] // N;
    If[Sign[erro] == p,
      kkk = kkk + 1;
      Print[erroant, " ", yant, " ", erro, " ", y];
      yaux2[[kkk]] = (-erroant) / (erro - erroant) * (y - yant) + yant;
      p = -p;
    ];
    erroant = erro;
    yant = y;
    y = y + dy;
  ];
  yaux2
]

```

```

dn = Array[0 &, {k, k}];
Do[
  y = yaux2[[i]];
  CCaux = Array[0 &, {k - 1, k}];
  d = Array[dd, {k}];
  ddd = Array[ddd, {k}];

  EE = Array[0 &, {k - 1}];
  Do[
    Do[
      CCaux[[i, j]] = CC[[i, j]];
      d[[1]] = 1;
      , {i, 1, k - 1}];
      , {j, 1, k}];
    MatrixForm[CCaux];
    MatrixForm[d];
    MatrixForm[EE];
    dclaux = Solve[(CCaux.d == EE), Table[dd[i], {i, 2, k}]];
    Do[
      ddd[[i]] = dd[i] /. dclaux;

      , {i, 2, k}];
    ddd = Join[ddd];

    Do[
      dn[[i, 1]] = 1;
      dn[[i, j]] = ddd[[j, 1]];

      , {j, 2, k}];

      , {i, 1, k}];
    Print["dn=" MatrixForm[dn]];
  ];
]

```

```

psin = Array[0 &, {k, k}];
psinaux = Array[0 &, {k, k}];
kk = 0;

Do[
  kk = kk + 1;
  psin[[kk]] = Sum[dn[[kk, j]] * f[[j]], {j, 1, k}];
  psinaux[[kk]] = psin[[kk]];
  , {i, 1, k}
TableForm[psin]

cn = Array[0 &, {k}];
tt = 0;
teta = Sum[cn[[i]] * psin[[i]] * Exp[-yaux2[[i]] * tt], {i, 1, k}]

Do[
  int1 = Integrate[
    Integrate[teta * f[[i]] * r
      , {z, 0, b * Sqrt[(1 - r^2 / a^2)]}]
    , {r, 0, a}] * 2 * Pi;
  int2 = Integrate[
    Integrate[1 * f[[i]] * r
      , {z, 0, b * Sqrt[(1 - r^2 / a^2)]}]
    , {r, 0, a}] * 2 * Pi // N;

  Print[int1 == int2];
  , {i, 1, k}

```

```

cnaux2 = Table[0, {i, 1, 1}];
cnaux2 = Solve[
{2*Pi*(0.23006145961740873*ccn[1] - 0.14611828046384268*ccn[2] + 0.12557994788251936*ccn[3] -
0.010956126644776958*ccn[4] - 0.04787186733467629*ccn[5] + 0.01665574431312162*ccn[6] +
0.007850483731434515*ccn[7] + 0.001152384148017826*ccn[8] - 0.0043438762704610095*ccn[9] -
0.0019688612858912552*ccn[10]) == 4.1887902047863905,
2*Pi*(0.05068832917798343*ccn[1] - 0.021965874930970405*ccn[2] + 0.010627070205176573*ccn[3] -
0.026741998252332408*ccn[4] - 0.019940416467033206*ccn[5] + 0.03113313051530294*ccn[6] +
0.014396764287044509*ccn[7] + 0.006520950695241915*ccn[8] - 0.006472391169762391*ccn[9] -
0.005159165769351177*ccn[10]) == 1.19679720136754,
2*Pi*(0.3220277878316259*ccn[1] - 1.2725806662983081*ccn[2] + 1.957336716264888*ccn[3] -
0.0007982426359419514*ccn[4] - 0.9000515162132008*ccn[5] + 0.10701367197122762*ccn[6] +
0.06630273898257381*ccn[7] - 0.0303685982174763*ccn[8] - 0.0541529139714728*ccn[9] -
0.005081780854765485*ccn[10]) == 14.959965017094254,
2*Pi*(0.01837077260248036*ccn[1] - 0.005011940891790632*ccn[2] + 0.00104797833822295*ccn[3] -
0.0148066216576169*ccn[4] - 0.009802012392017*ccn[5] + 0.01261183152692435*ccn[6] +
0.014001032731628204*ccn[7] + 0.009206155171843112*ccn[8] - 0.003965478142645232*ccn[9] -
0.007283130745761341*ccn[10]) == 0.5319098672744623,
2*Pi*(0.06371236447470124*ccn[1] - 0.21667013278695893*ccn[2] + 0.19371238427045662*ccn[3] -
0.023357174523789707*ccn[4] - 0.07110440666336076*ccn[5] + 0.22245833000814408*ccn[6] +
0.06145053323431858*ccn[7] - 0.01576569834310295*ccn[8] - 0.08372479586627171*ccn[9] -
0.010514714154396474*ccn[10]) == 3.3244366704653894,
2*Pi*(1.2460638102413095*ccn[1] - 8.58281122099779*ccn[2] + 27.6138256673687*ccn[3] +
0.2026047368398701*ccn[4] - 19.075294335326753*ccn[5] + 0.33419195592243556*ccn[6] +
1.058811864739314*ccn[7] - 0.6037332089427453*ccn[8] - 0.5994277709212066*ccn[9] -
0.0332663375639564*ccn[10]) == 124.66637514245211,
2*Pi*(0.00847146340525614*ccn[1] - 0.0012075529826401552*ccn[2] - 0.000010075877928051005*ccn[3] -
0.008318353012708456*ccn[4] - 0.00507598915146466*ccn[5] + 0.0049851584831751014*ccn[6] +
0.010630669010376228*ccn[7] + 0.007244536965465418*ccn[8] - 0.0005316215204376978*ccn[9] -
0.008236868827060198*ccn[10]) == 0.2901326548769794,
2*Pi*(0.020965836239919364*ccn[1] - 0.06174130951003834*ccn[2] + 0.02661356585459554*ccn[3] -
0.012384760467707062*ccn[4] - 0.025492765136839145*ccn[5] + 0.09690392780886449*ccn[6] +
0.022365162315015702*ccn[7] + 0.008010449976347422*ccn[8] - 0.07026165414284202*ccn[9] -
0.012447099561242587*ccn[10]) == 1.2088860619874144,
2*Pi*(0.2217414592533733*ccn[1] - 1.3682683531938156*ccn[2] + 3.024244061753864*ccn[3] -
0.03747745911709753*ccn[4] - 0.706647054595964*ccn[5] + 1.3989019230687885*ccn[6] +
0.82673993942289*ccn[7] - 0.4271129920485985*ccn[8] - 0.7701089349877399*ccn[9] -
0.055822919689785346*ccn[10]) == 22.66661366226402,
2*Pi*(7.552020412672337*ccn[1] - 68.02480777810855*ccn[2] + 364.41561956428313*ccn[3] +
4.614057210154126*ccn[4] - 400.6666741581051*ccn[5] - 6.298360288737215*ccn[6] +
17.711793761261482*ccn[7] - 10.559058261671291*ccn[8] - 7.6875127607300335*ccn[9] -
0.3136608710617514*ccn[10]) == 1416.6633538915012),
{ccn[1], ccn[2], ccn[3], ccn[4], ccn[5], ccn[6], ccn[7], ccn[8], ccn[9], ccn[10]}]

```

```

Do[
  hhhh = ccn[j] /. cnaux2[[1]];
  cn[[j]] = hhhh;
  , {j, 1, k}];
cn

```

```

temp = Array[0 &, {k+1, k+1}];
graftemp = Array[0 &, {k+1, k+1}];
graftmed = Array[0 &, {100}];
cont = 0;
Do[
  If[t = 0.00025 || t = 0.0005 || t = 0.001 || t = 0.0015 || t = 0.0020 || t = 0.0025 || t = 0.003 ||
    t = 0.0035 || t = 0.005 || t = 0.01 || t = 0.02 || t = 0.05 || t = 0.1 || t = 0.15 || t = 0.2 ||
    t = 0.25 || t = 0.3 || t = 0.35 || t = 0.4 || t = 0.45 || t = 0.5 || t = 0.6 || t = 0.7 || t = 0.8 ||
    t = 0.9 || t = 1.0,
    r = -dr;

    dr = a / (k);

    Do[
      r = r + dr;
      dz = (b*Sqrt[1 - r^2/a^2]) / (k);
      z = -dz;
      Do[
        z = z + dz;
        If[z <= b*Sqrt[1 - r^2/a^2],
          temp[[i, j]] = Sum[cn[[ii]]*psin[[ii]]*Exp[-yaux2[[ii]]*t], {ii, 1, k}];
          graftemp[[i, j]] = {r, z, temp[[i, j]]};
          ,
          temp[[i, j]] = 2;
        ];
        , {j, 1, k+1}];
        , {i, 1, k+1}];

      cont = cont + 1;
      Clear[r, z];
      tmed = Integrate[
        Integrate[Sum[cn[[ii]]*psinaux[[ii]]*Exp[-yaux2[[ii]]*t], {ii, 1, k}]*r
          , {z, 0, b*Sqrt[(1 - r^2/a^2)}]]
          , {r, 0, a}]*2*Pi / (2*Pi*a^2*b/3);
      Print["Fo=", t, " ", "Mmedio=", tmed, " ", "t(s)=", t/(1.22*10^-5), " ", "b/a=", b/a];
      Print["M (kg/kg)", MatrixForm[graftemp//N]];
      Print[" "];
    ];
  , {t, 0, 1., .00025}]

```

**ANEXOS C – Resultados numéricos dos coeficientes a_{ij} , b_{ij} , λ_n , d_n
e C_n para um esferóide com razão de aspecto $b/a=5,0$**

a=1.0
b=5.0

A

-1.632	-0.466286	-5.82857	-0.207238	-1.29524	-48.5714	-0.113039	-0.470996	-8.83117	-551.948
-0.466286	-0.410413	-1.29524	-0.260802	-0.932756	-8.83117	-0.17186	-0.501543	-5.38129	-84.9151
-5.82857	-1.29524	-51.1111	-0.470996	-9.29293	-586.58	-0.217383	-2.85936	-90.2431	-7929.57
-0.207238	-0.260802	-0.470996	-0.205959	-0.501543	-2.71728	-0.155493	-0.343266	-2.50771	-22.644
-1.29524	-0.932756	-9.29293	-0.501543	-5.52337	-90.2431	-0.286434	-2.56455	-46.2648	-1057.28
-48.5714	-8.83117	-586.58	-2.71728	-90.2431	-8096.07	-1.08691	-24.0648	-1079.48	-123106.
-0.113039	-0.17186	-0.217383	-0.155493	-0.286434	-1.08691	-0.129015	-0.228665	-1.26368	-7.99201
-0.470996	-0.501543	-2.85936	-0.343266	-2.56455	-24.0648	-0.228665	-1.54115	-18.9405	-248.771
-8.83117	-5.38129	-90.2431	-2.50771	-46.2648	-1079.48	-1.26368	-18.9405	-482.524	-14483.1
-551.948	-84.9151	-7929.57	-22.644	-1057.28	-123106.	-7.99201	-248.771	-14483.1	-2.03427 × 10 ⁶

B

0.228571	0.0507937	0.634921	0.0184704	0.11544	4.329	0.00852481	0.03552	0.666001	41.625
0.0507937	0.0184704	0.11544	0.00852481	0.03552	0.666001	0.00454656	0.014208	0.1776	5.55001
0.634921	0.11544	4.329	0.03552	0.666001	41.625	0.014208	0.1776	5.55001	485.625
0.0184704	0.00852481	0.03552	0.00454656	0.014208	0.1776	0.00267445	0.00668612	0.0626824	1.30588
0.11544	0.03552	0.666001	0.014208	0.1776	5.55001	0.00668612	0.0626824	1.30588	57.1324
4.329	0.666001	41.625	0.1776	5.55001	485.625	0.0626824	1.30588	57.1324	6427.4
0.00852481	0.00454656	0.014208	0.00267445	0.00668612	0.0626824	0.00168913	0.00351901	0.0263926	0.412384
0.03552	0.014208	0.1776	0.00668612	0.0626824	1.30588	0.00351901	0.0263926	0.412384	12.0279
0.666001	0.1776	5.55001	0.0626824	1.30588	57.1324	0.0263926	0.412384	12.0279	676.568
41.625	5.55001	485.625	1.30588	57.1324	6427.4	0.412384	12.0279	676.568	93028.1

yn

{6.30122, 8.79151, 13.9972, 31.8379, 33.9911, 42.2285, 81.7334, 83.0999, 160.22, 286.186}

dn

1	-0.450766	-0.178643	0.0767779	0.0643214	0.0113073	-0.00599857	-0.00695315	-0.00241965	-0.000242579
1	-0.379354	-1.08297	0.0266384	0.419789	0.112503	0.00485203	-0.0424934	-0.0253061	-0.00305188
1	0.00605824	-1.77572	-0.137322	0.234992	0.350364	-0.00308658	0.105388	-0.0607245	-0.0127492
1	-6.38074	-0.215782	6.37716	1.12068	0.0113656	-2.01623	-0.604568	-0.0430813	-0.0000731994
1	-1.52646	-1.31268	3.70158	-2.08618	0.369739	-1.4738	0.118429	0.230139	-0.022087
1	-4.40382	-1.42654	-0.308087	6.98775	0.145587	2.37623	-3.70366	-0.363419	-0.00401305
1	-17.6646	0.256895	48.4538	0.798601	-0.0837807	-28.2517	-4.09406	0.215911	0.00308177
1	-12.6129	-0.403326	31.8983	1.89519	0.0637848	-20.5334	-0.697538	-0.192486	-0.00209516
1	-8.60049	-1.19045	2.7319	11.8184	0.109182	17.8369	-17.3223	-0.534696	-0.00256027
1	-20.7837	-0.165272	81.556	2.15923	0.00875976	-79.3027	-4.0564	-0.0545249	-0.000150359

Cn

{2.13121, -0.734714, 0.279142, -1.27436, -0.13684, 0.347574, 0.627741, 0.220556, -0.24755, -0.704943}