



Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Engenharia Elétrica e Informática
Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica

PLANEJAMENTO DE MOVIMENTO PARA ROBÔS MÓVEIS BASEADO NA
CONDIÇÃO DE HORIZONTE CONTINUADO

Lucas Molina

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientadores: Raimundo Carlos Silvério Freire
Eduardo Oliveira Freire

Campina Grande
Abril de 2014



Universidade Federal de Campina Grande
Faculdade de Engenharia Elétrica e Informática
Departamento de Engenharia Elétrica

PLANEJAMENTO DE MOVIMENTO DE
ROBÔS MÓVEIS

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

M722p

Molina, Lucas.

Planejamento de movimento para robôs móveis baseado na condição de horizonte continuado / Lucas Molina. – Campina Grande, 2014.

128 f.: color.

Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Engenharia Elétrica e Informática, 2014.

"Orientação: Prof. Dr. Raimundo Carlos Silvério Freire, Prof. Dr. Eduardo Oliveira Freire".

Referências.

1. Robôs Móveis. 2. Planejamento de Movimento. 3. Funções harmônicas. 4. CHC. I. Freire, Raimundo Carlos Silvério. II. Freire, Eduardo Oliveira. III. Título.

CDU 621.865.8(043)

"PLANEJAMENTO DE MOVIMENTO PARA ROBÔS MÓVEIS BASEADO NA CONDIÇÃO DE HORIZONTE CONTINUADO (CHC)"

LUCAS MOLINA

TESE APROVADA EM 04/04/2014



EDUARDO OLIVEIRA FREIRE, Dr., UFS

Orientador(a)



RAIMUNDO CARLOS SILVÉRIO FREIRE, Dr., UFCG

Orientador(a)



BENEDITO ANTONIO LUCIANO, D.Sc., UFCG

Examinador(a)

GUILHERME AUGUSTO SILVA PEREIRA, Dr., UFMG

Examinador(a)



PABLO JAVIER ALSINA, D.Sc., UFRN

Examinador(a)



SEBASTIAN YURI CAVALCANTI CATUNDA, D.Sc., UFRN

Examinador(a)

CAMPINA GRANDE - PB

*À minha esposa Christiane
Raulino Almeida e a todas os
meus familiares que tanto amo,
consanguíneos ou não.*

Agradecimentos

É engraçado como a vida é mesmo um ciclo... e como todo ciclo a sua continuidade não pode ser quebrada... estava eu aqui procurando palavras e nomes a agradecer pelo apoio, compreensão e incentivos recebidos ao longo dos quatro anos de realização deste trabalho de doutorado e acabei percebendo que, desde o fim do meu mestrado, alguns nomes sumiram, outros aparecerem, mas muitos ficaram. A maioria ficou!

Por isso parei... pensei... e resolvi consultar uma referência bibliográfica anterior [79]. Peguei os agradecimentos do meu mestrado e percebi que muitos ainda estão ao meu lado e as palavras de agradecimento não mudaram para muitos deles... nesse instante lembrei-me de mais! **Lembrei-me que sou um filho de Ogum afortunado!** Lembrei-me de todos os momentos que passei em minha vida, os bons e os ruins, e em nenhum deles estive sozinho. Sempre tive ao meu lado amigos no plano físico e no plano espiritual... amigos que fizeram, e fazem, a minha jornada nessa terra mais fácil... por isso sou afortunado, pois tenho amigos!

Muitas vezes brinco e digo que já tenho amigos demais, que meus *slots* de amizade estão ocupados... mas não é verdade! É apenas parte de meu personagem... como aquelas desculpas que inventamos para nós mesmos para não ficarmos vulneráveis, para não se expor demais, pois as pessoas que passam por sua vida são todas insubstituíveis e as perdas são inevitáveis... e essa é apenas mais uma forma de se esquivar, de fugir da dor. Mas a verdade é que a sua vida e suas conquistas, sem ter com quem compartilhar, não são nada. Por isso agradeço a deus por ter amigos! Amigos de sangue ou não, todos são a minha família!

Depois de alguns devaneios e declarações, vamos então para mais alguns agradecimentos. Agora no estilo clássico!

“Gostaria de agradecer a Deus e a todos os meus Orixás pela luz e proteção que sempre me deram, sem a qual eu não poderia estar aqui concluindo esse trabalho” [79].

“Ao meu pai, Heraldo Molina (*in memoriam*), que sempre me incentivou e me apoiou nas minhas escolhas, me ensinando a aprender com os acertos e com os erros cometidos. Muito obrigado por tudo” [79]. **Te amo pai!** Saudades.

A toda minha família, em especial à minha mãe, “Maria Imaculada Ferreira Molina, e aos meus irmãos, Raquel Molina e Henrique Molina, por todo apoio que me deram e por terem me acolhido após anos afastado do convívio em família” [79]. **Amo muito vocês!**

Uma das maiores tristezas que tenho é por não poder estar com vocês no meu dia a dia. Mas apesar da distância física, podem contar comigo sempre, pois sei que sempre poderei contar com vocês.

À minha esposa, Christiane Raulino Almeida. Por absolutamente tudo. Agradeço a deus por ter me dado a oportunidade de dividir a minha vida com uma pessoa tão especial quanto você. Tenho muito orgulho de nossos projetos e nossas conquistas juntos, mas, acima de tudo, **tenho orgulho de você!** Tenho certeza que cresceremos juntos a cada dia e continuaremos felizes, sempre! **Te amo muito!**

À minha família perante a lei divina! Meus sogros (que tenho como pais), Sérgio Luiz Vieira Almeida e Sarah Maria Raulino Almeida, e meus cunhados (que tenho como irmãos) Juliana Raulino Almeida e Daniel Raulino Almeida que sempre me acolheram como parte de sua família mesmo antes de ter casado com a Bilinha (Chris)! Tenho vocês como parte da minha família e da minha vida! Obrigado por tudo! **Amo todos vocês!**

Ao meu grande amigo, e também parte da minha família, meu irmão Elyson Ádan Nunes Carvalho, que sempre me inspirou e me apoiou desde os meus primeiros passos como pesquisador. Um amigo presente em alguns dos momentos mais difíceis de toda a minha vida e alguns dos mais felizes também! **“Uma amizade para a vida inteira”** [79]. Thais e Chris podem reclamar, mas elas sabem que não podem ganhar pois a nossa relação é mais antiga! hehehe

A Jugurta Rosa Montalvão Filho, meus sinceros agradecimentos! De todas as pessoas que conheceram e acompanharam o meu trabalho você é aquele que mais participou e me ajudou! Foram diversas discussões (umas mais acaloradas que outras, é verdade, hehehe) e de todas tirei uma semente que usei para plantar o que foi o meu doutorado. Temos opiniões e pontos de vista diferentes em muitas coisas, mas somos amigos. E o que é uma cooperação se não existem diferenças! Pra pensar igual uma cabeça basta! (exagero!). É uma pena que, por questões burocráticas, não posso ter mais de dois orientadores. Pois esse é, com certeza, o seu lugar de merecimento! Muito obrigado!

Ao meu orientador, Raimundo Carlos Silvério Freire, que confiou em mim, que se dispôs a me orientar em um trabalho em robótica móvel, que compreendeu a minha ausência em diversas ocasiões, sempre me ajudando a seguir em frente. Meus sinceros agradecimentos!

“Ao meu orientador, Eduardo Oliveira Freire, que me ensinou a amar a robótica e que acreditou em mim quando me levou para o seu grupo de pesquisa, ainda na graduação, onde eu descobri a minha vocação e comecei a caminhar em busca de um sonho: um dia poder trabalhar com aquilo que eu amo” [79]. Hoje esse sonho é uma realidade graças à sua ajuda. Muito obrigado!

Gostaria também de agradecer ao CNPq, pelo suporte financeiro em grande parte deste trabalho, sem o qual seria impossível concluí-lo.

Por fim, gostaria de agradecer de forma geral a todos que fizeram e/ou fazem parte da

minha vida, aos amigos e aos desafetos, que também colaboram para o meu desenvolvimento pessoal, profissional e espiritual, dia após dia, me ajudando a tentar ser uma pessoa melhor e a perdoar para ser perdoado. A todos vocês o meu sincero muito obrigado.

Resumo

PLANEJAMENTO DE MOVIMENTO PARA ROBÔS MÓVEIS BASEADO NA CONDIÇÃO DE HORIZONTE CONTINUADO

Lucas Molina

A navegação de robôs móveis é a área de pesquisa responsável por investigar as diferentes formas de definição das ações de movimento do robô em um dado ambiente. Quando comportamentos otimizados são requeridos, é necessário um processo de deliberação para determinar a melhor ação a ser tomada antes de executá-la. Nas arquiteturas de navegação, o processo de deliberação é normalmente realizado por uma estratégia de planejamento de movimento. Nesse contexto, é apresentada neste trabalho uma estratégia de planejamento que busca obter o menor caminho até o destino. Para tanto, a técnica desenvolvida faz uso do conceito de funções harmônicas e de uma nova condição de contorno proposta neste trabalho denominada de Condição de Horizonte Continuado (CHC). Uma ampla revisão bibliográfica sobre arquiteturas de navegação e planejamento de movimento em geral é inicialmente apresentada, seguida por uma revisão bibliográfica específica sobre estratégias de planejamento de movimento para robôs móveis baseadas em funções harmônicas, foco principal deste trabalho. O planejamento aqui apresentado foi desenvolvido inspirado na ideia de propagação térmica em uma placa condutora de calor, buscando, sobretudo, suprimir a distorção do potencial causada pelos obstáculos, quando estes são modelados por condições de contorno clássicas. Dessa forma, a distribuição de temperatura na placa condutora dependerá, ao menos idealmente, apenas da temperatura do destino, que é uma temperatura fixa por definição, resultando assim na obtenção de um caminho que busca reduzir a distância percorrida pelo robô para alcançar o ponto de destino. São apresentados diversos experimentos por simulação para ilustrar as características do planejamento desenvolvido, comparando os resultados obtidos através da CHC com aqueles obtidos utilizando condições de contorno clássicas. Adicionalmente, algumas extensões do problema básico de planejamento são abordadas utilizando a técnica de planejamento aqui desenvolvida, ilustrando assim a sua versatilidade e aplicabilidade.

Palavras-chave: robôs móveis, planejamento de movimento, funções harmônicas, CHC.

Abstract

MOTION PLANNING FOR MOBILE ROBOTS BASED ON THE CONTINUED HORIZON CONDITION

Lucas Molina

Mobile robot navigation is the research field responsible for the investigation of the different approaches that may be used to define the movement actions of a robot in a certain environment. When optimal behaviors are needed, a deliberative reasoning must be performed to define the best possible action before its execution. Considering the mobile robot navigation field, the deliberative reasoning is usually performed by a motion planning strategy. In this sense, this work presents a path planner based on harmonic functions and on the contour definition called Continued Horizon Condition (CHC), proposed in this work. A broad bibliographic review about robot navigation and motion planning is presented, followed by a more specific one about harmonic function based planning strategies, main issue of this work. The proposed harmonic path planning strategy is inspired in the temperature propagation in a thermal conductive medium. Its main issue is to suppress the potential distortion caused by the classical boundary conditions, usually applied to model the obstacles and the external limits of the environment map. Thereby, the thermal distribution in the conductive medium depends only on the temperature source of the goal, which results in the shortest path to the destination point. Several simulation results are presented to show the features of the proposed planning technique, comparing it with the classical harmonic path planning results. Additionally, the use of the proposed planner based on the CHC contour condition is considered to solve some extensions of the basic path planning problem thus showing its applicability.

Keywords: mobile robots, motion planning, harmonic functions, CHC.

Sumário

Lista de Figuras	xii
1 Introdução	1
1.1 Contribuições	8
1.2 Estrutura da tese	8
2 Arquiteturas de navegação	9
2.1 Classificação qualitativa das arquiteturas de navegação	10
2.1.1 Arquiteturas deliberativas	12
2.1.2 Arquiteturas reativas	13
2.1.3 Arquiteturas híbridas	14
2.2 O planejamento e a navegação de robôs móveis	14
3 Planejamento de movimento	16
3.1 Espaço de configurações (<i>C-space</i>)	17
3.2 Problema básico de planejamento	18
3.3 Taxonomia clássica	19
3.3.1 Mapa de rotas	19
3.3.2 Decomposição em células	22
3.3.3 Campos potenciais	25
3.4 Classificações atuais ou baseadas em características antagônicas	27
3.4.1 Local \times Global	27
3.4.2 Busca explícita \times Busca implícita	28
3.4.3 Exato (combinatório) \times Aproximado (baseado em amostras)	28
3.4.4 Formas relaxadas de completude	29
3.4.5 Utilização da classificação baseada em características antagônicas	30
3.5 Extensões do problema básico de planejamento	30
3.5.1 Planejamento de trajetória	32
3.5.2 Planejamento com restrições diferenciais	33
3.5.3 Planejamento Realimentado (<i>Feedback Motion Planning</i>)	35
3.5.4 Planejamento considerando incertezas	36
3.5.5 Outras extensões	36

4	Planejamento baseado em funções harmônicas	39
4.1	Equação de Laplace e funções harmônicas	40
4.1.1	Propriedades das funções harmônicas	41
4.1.2	Condições de contorno	42
4.1.3	Equacionamento básico do planejamento baseado em potenciais harmônicos	43
4.2	Planejamento baseado em funções harmônicas: pesquisas e horizontes . . .	46
4.2.1	Planejamento usando funções harmônicas e a busca pelo menor caminho	51
4.2.2	Regiões de diferentes navegabilidades	52
5	Planejamento de trajetória proposto	54
5.1	Condição de Horizonte Continuado (CHC): uma inspiração na propagação térmica	55
5.2	O planejamento de movimento e a CHC	62
5.3	A obtenção do potencial	67
5.4	Demonstração de convergência	72
5.5	Planejamento completo por resolução	75
6	Resultados e Discussões	77
6.1	Análise qualitativa do método proposto	77
6.1.1	Decaimento exponencial	77
6.1.2	Variação do potencial com o coeficiente K_{term}	78
6.1.3	Efeito da inserção de um obstáculo próximo à trajetória do robô . .	79
6.1.4	A CHC e a busca pelo menor caminho	83
6.2	Resultados experimentais	84
6.2.1	Comparação: Dirichlet, Neumann e CHC	84
6.2.2	Resultados para a CHC em ambientes complexos	86
6.2.3	A CHC para planejamento multiobjetivos	87
6.2.4	A CHC para planejamento considerando regiões de destino	91
6.2.5	A CHC para planejamento com regiões de diferentes navegabilidades	93
6.2.6	A CHC para planejamento de movimento de robôs manipuladores .	97
6.2.7	Implementação da CHC em grades irregulares	100
6.2.8	Planejamento baseado na CHC e o método <i>Wavefront</i>	104
7	Conclusões	108
	Referências Bibliográficas	116

Lista de Figuras

1.1	(a) Campo potencial $U_{atr}(q)$ atraindo o robô para o destino (sem obstáculos); (b) Campo potencial $U_{rep}(q)$ afastando o robô dos obstáculos (ignora a posição de destino); (c) Campo potencial $U(q) = U_{atr}(q) + U_{rep}(q)$, ilustrando o surgimento de um mínimo local que impede o robô de alcançar o destino.	5
1.2	Campo vetorial do potencial $U(q)$ e quatro trajetórias partindo dos pontos a, b, c e d , utilizando condições de contorno de: (a) Dirichlet; e (b) Neumann.	7
2.1	Classificação das arquiteturas de navegação, segundo Pirjanian [1].	10
2.2	Espectro de classificação das arquiteturas de navegação, segundo Arkin [2].	11
2.3	Estrutura de uma arquitetura de navegação deliberativa.	12
3.1	Representação de um robô planar e sua trajetória em seu: (a) espaço de trabalho; e (b) espaço de configurações [3].	17
3.2	Figuras editadas de [3]: (a) Exemplo de grafo de visibilidade; e (b) Exemplo de diagrama de Voronoi.	20
3.3	Figura editada de [3]: Exemplo de decomposição exata juntamente com o grafo resultante.	23
3.4	Figura editada de [3]: Exemplo de decomposição aproximada utilizando grade regular.	24
3.5	Figura editada de [3]: Exemplo de decomposição aproximada irregular - <i>Quad-tree</i>	25
3.6	Exemplo de trajetória gerada por campo potencial (figura editada de [3]). (a) Problema inicial. (b) Campo potencial gerado: $U(q) = U_{atr}(q) + U_{rep}(q)$. (c) Trajetória obtida pelo método do gradiente descendente.	26
3.7	Via a ser percorrida para a utilização do caminho τ (solução da formulação 1).	31
4.1	Demonstração das características do gradiente do potencial obtido utilizando a condição de Dirichlet.	43
4.2	Demonstração das características do gradiente do potencial obtido utilizando a condição de Neumann.	44

5.1	Função harmônica utilizando a condição de Dirichlet: (a) potencial obtido; e (b) curvas de nível associadas.	56
5.2	Função harmônica utilizando a condição de Neumann: (a) potencial obtido; e (b) curvas de nível associadas.	57
5.3	Distribuição radial observada nas proximidades do destino quando o efeito da distorção do contorno é suprimido.	59
5.4	Exemplo de distribuição radial de temperatura e seu respectivo gradiente: (a) sem obstáculo; e (b) com obstáculo.	61
5.5	Região BCD definida nas proximidades do obstáculo, mas dentro da região navegável, de modo que o lado BD seja localmente paralelo ao contorno.	62
5.6	Representação da grade de temperaturas para um ambiente discretizado sem obstáculos.	64
5.7	Representação da grade de temperaturas para um ambiente discretizado com obstáculos.	65
5.8	Ambiente ilustrativo circular com obstáculo: (a) original; e (b) discretizado em 10000 (100×100) pontos para possibilitar a aplicação do método de planejamento proposto.	69
5.9	Gradiente obtido para o ambiente ilustrativo proposto, juntamente com as trajetórias geradas para diferentes pontos de partida utilizando: (a) CHC; (b) Dirichlet; e (c) Neumann.	70
6.1	Distribuição de temperatura utilizando a condição CHC: (a) potencial obtido; e (b) curvas de nível associadas.	78
6.2	Demonstração do efeito da constante térmica no resultado do planejamento: (a) $K_{term} = 0, 1$; (b) $K_{term} = 0, 3$; (c) $K_{term} = 0, 5$; e (d) $K_{term} = 0, 7$	79
6.3	Demonstração da suavização do caminho planejado utilizando $K_{term} = 0, 8$ (curva suavizada) e $K_{term} = 0, 3$ (curva fechada).	79
6.4	Trajetória resultante para a CHC em um ambiente limitado: (a) sem obstáculos internos; e (b) com obstáculos internos.	80
6.5	Trajetória resultante para a condição de Dirichlet em um ambiente limitado: (a) sem obstáculos internos; e (b) com obstáculos internos.	80
6.6	Trajetória resultante para a condição de Neumann em um ambiente limitado: (a) sem obstáculos internos; e (b) com obstáculos internos.	81
6.7	Distorção causada pela condição de contorno: módulo das distâncias ponto a ponto entre as duas trajetórias avaliadas (Figura 6.4.a e Figura 6.4.b) utilizando a CHC.	81

6.8	Distorção causada pela condição de contorno: módulo das distâncias ponto a ponto entre as duas trajetórias avaliadas (com e sem a inserção do novo obstáculo) utilizando as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e CHC.	82
6.9	Trajetória resultante para a CHC em um ambiente limitado: (a) sem obstáculos internos; e (b) com alteração no contorno que limita o ambiente. . .	82
6.10	Gradiente resultante e trajetórias obtidas para quatro pontos de partida distintos utilizando: (a) Dirichlet; (b) Neumann; (c) CHC com $K_{term} = 0, 1$; e (d) CHC com $K_{term} = 0, 8$	85
6.11	Comparação entre as trajetórias obtidas para dois destinos diferentes utilizando as condições de Neumann, Dirichlet e CHC em um ambiente discretizado.	86
6.12	Comparação entre as trajetórias obtidas para três pontos de partida e um único destino utilizando as condições de Neumann, Dirichlet e CHC em um ambiente discretizado.	86
6.13	Comparação entre as trajetórias obtidas para três pontos de partida e um único destino utilizando as condições de Neumann, Dirichlet e CHC em um ambiente discretizado.	87
6.14	Comparação entre três trajetórias distintas em um mesmo ambiente discretizado, utilizando as condições de Neumann, Dirichlet e CHC.	88
6.15	Comparação entre duas trajetórias distintas em um mesmo ambiente discretizado, utilizando as condições de Neumann, Dirichlet e CHC.	89
6.16	Planejamento baseado na CHC utilizando o ambiente apresentado em [4] para três pontos de destino diferentes.	89
6.17	Planejamento baseado na CHC utilizando o ambiente apresentado em [5] para três pontos de destino diferentes.	91
6.18	Planejamento baseado na CHC utilizando o ambiente apresentado em [6] para três pontos de destino diferentes.	91
6.19	Planejamento baseado na CHC para três pontos de destino diferentes (ambiente proposto 1).	92
6.20	Planejamento baseado na CHC para três pontos de destino diferentes (ambiente proposto 2).	92
6.21	A CHC para planejamento multiobjetivos em dois ambientes distintos. . .	93
6.22	A CHC para planejamento multiobjetivos ponderados com maior atração para o destino da direita.	94
6.23	Subtração elemento por elemento do campo vetorial resultante da utilização da CHC para planejamento multiobjetivos ponderados e não ponderados. . .	94
6.24	A CHC para planejamento multiobjetivos com: (a) dois pontos de destino; e (b) quatro pontos de destino.	95

6.25	A CHC para planejamento com regiões de destino (destacadas na imagem) para: (a) uma região descrita por uma linha vertical cruzando todo o ambiente; e (b) uma região descrita por um retângulo.	96
6.26	A CHC para planejamento com múltiplas regiões de destino (duas retas verticais equidistantes do centro do ambiente): (a) regiões não ponderadas; e (b) região da direita com peso 10^{10} vezes maior.	97
6.27	A CHC para planejamento com regiões de destino (destacadas na imagem) em um ambiente com obstáculos: (a) com uma única região objetivo; e (b) três regiões de destino.	98
6.28	A CHC aplicada em planejamento com regiões de diferentes navegabilidades considerando: (a) navegabilidade uniforme ($K_{term} = 0, 1$); (b) região de melhor navegabilidade ($K_{term} = 0, 2$); e (c) região de melhor navegabilidade ($K_{term} = 0, 4$).	99
6.29	A CHC e diferentes navegabilidades para um caminho mais longo com melhor navegabilidade ($K_{term} = 0, 8$) em um ambiente de navegabilidade mais baixa dada por: (a) $K_{term} = 0, 7$; (b) $K_{term} = 0, 4$; e (c) $K_{term} = 0, 1$	99
6.30	A CHC e diferentes navegabilidades: um caminho mais longo com melhor navegabilidade ($K_{term} = 0, 8$) em um ambiente com obstáculo, separado em duas regiões de menor navegabilidade.	100
6.31	Manipulador planar com três juntas de revolução: (a) manipulador em seu espaço de trabalho; e (b) espaço de configurações de três dimensões.	100
6.32	Planejamento de movimento de um manipulador usando a CHC: (a) configurações inicial e final; e (b) trajetória executada no espaço de trabalho.	101
6.33	Representação gráfica de um elemento triangular linear, sua expressão analítica e seus parâmetros [7].	102
6.34	Resultado obtido da aplicação do planejamento baseado na CHC utilizando uma discretização irregular com elementos triangulares.	103
6.35	Propagação tipo frente de onda observada na construção do potencial no algoritmo de planejamento <i>Wavefornt</i>	104
6.36	Resultado comparativo para o ambiente motivacional desse trabalho utilizando: (a) CHC; e (b) <i>Wavefront</i>	105
6.37	Resultado comparativo para outro ambiente utilizando: (a) CHC; e (b) <i>Wavefront</i>	106

Capítulo 1

Introdução

Segurança, velocidade de execução e repetibilidade são características que levam os robôs a serem cada vez mais utilizada para execução de tarefas que antes eram feitas apenas por seres humanos. Robôs são hoje facilmente encontrados executando tarefas que combinam capacidade de repetição e necessidade de torque elevado, como acontece em linhas de montagem, ou realizando procedimentos em ambientes que oferecem risco ao homem, como em tarefas de inspeções de tanques de armazenamento de substâncias nocivas à saúde humana, ou mesmo trabalhando em situações em que o homem dificilmente conseguiria sobreviver sozinho, como em missões de exploração de longa duração em outros planetas.

Robôs não sentem sede ou fome, tampouco são capazes de julgar o risco das tarefas às quais são submetidos. No entanto, essa ausência de “personalidade” limita o comportamento desses sistemas a agir e reagir apenas em situações para as quais eles tenham sido programados. Muitas vezes um robô móvel precisa movimentar-se em ambientes dinâmicos, onde a sua capacidade de executar uma tarefa está intimamente associada à sua capacidade de reagir a estímulos externos, desconhecidos, de forma coerente. Em outras situações, o robô pode precisar apresentar comportamentos ótimos, o que requer naturalmente uma etapa de planejamento para definir corretamente a ação a ser tomada. Em ambos os casos a escolha da ação a ser executada pelo robô pode ser definida de diferentes formas, conhecidas como *mecanismos de seleção de ação* (MSA), ou simplesmente *arquiteturas de navegação*.

Diversos tipos de arquiteturas de navegação vêm sendo desenvolvidos ao longo dos anos buscando dar maior autonomia e flexibilidade aos robôs móveis no tocante à sua capacidade de movimentação. Paolo Pirjanian em [1] apresentou uma ampla revisão bibliográfica sobre os trabalhos desenvolvidos na área de navegação autônoma, ou simplesmente navegação, classificando as arquiteturas apresentadas em deliberativas, que são caracterizadas pela busca da otimalidade, reativas, aquelas caracterizadas pela busca da robustez, e híbridas, que tentam equilibrar características das outras duas escolas.

As arquiteturas de navegação que utilizam metodologia deliberativa têm por objetivo

explorar ao máximo as informações disponíveis sobre o ambiente, possibilitando assim uma definição ótima da sequência de ações a serem executadas pelo robô para alcançar um determinado objetivo. No tocante à navegação autônoma de robôs móveis, normalmente, essa sequência de ações é fruto de uma busca dentre as possíveis sequências de ações que levariam o robô do seu estado atual ao seu destino. Em robótica, essa busca é associada ao planejamento do movimento (*motion planning*), normalmente realizado por estratégias de planejamento de caminho (*path planning*) ou planejamento de trajetória (*trajectory planning*). Apesar de designarem diferentes características de planejamento [8] (que serão detalhadas no Capítulo 3), o termo planejamento de trajetória (ou apenas planejamento) será utilizado indistintamente neste texto para representar estes dois tipos de planejamento de movimento.

O planejamento de trajetória pode ser utilizado tanto para realizar uma tarefa global [9] quando para executar tarefas locais [10, 11], o que evidencia a sua importância para arquiteturas de navegação tanto reativas quanto deliberativas. Além disso, sua utilização em robótica não se restringe ao problema básico de planejamento [12] ou à robótica móvel, tendo grande aplicabilidade em tarefas mais complexas, como navegação de múltiplos robôs [13], robôs com restrições diferenciais dos mais diferentes tipos [14], considerando as incertezas e limitações sensoriais do robô [15], robôs com corpos deformáveis [16, 17], robôs manipuladores [18, 19], entre outras. Além das aplicações em robôs móveis (terrestres) e manipuladores, o planejamento é hoje uma ferramenta de extrema importância também para outras áreas como inteligência artificial [20], navegação interplanetária [21], biologia e biotecnologia [22], observação aeroespacial [23], jogos eletrônicos [24], indústrias metalúrgicas [25], automotivas [26], entre outras, o que mostra a importância dessa ferramenta, não só para a robótica, mas para o desenvolvimento científico e tecnológico em geral.

A comunidade científica voltou a sua atenção de forma mais significativa para a área de planejamento no começo do decênio de 1970. No entanto, o grande crescimento das pesquisas nessa área veio um pouco mais tarde com o trabalho de Lozano-Pérez em 1979 [27], onde a ideia de espaço de configurações (*C-space*) começou a surgir no âmbito do planejamento de trajetória, sendo sua formalização melhor detalhada posteriormente em 1983 por este mesmo pesquisador [28]. Sem utilizar essa nomenclatura, o *C-space* foi também explorado em seu conceito paralelamente aos trabalhos de Lozano-Pérez por Udupa em 1977 [29], a quem também se atribui a ideia original desta inovadora forma de representação.

O mapeamento do espaço de trabalho de um robô em seu espaço de configurações permitiu mostrar que problemas de planejamento diferentes, em termos de geometria e cinemática, são equivalentes se representados no *C-space* [8, 30]. Essa nova visão possibilitou a redução de problemas mais complexos, como o planejamento do movimento de um robô manipulador dotado de inúmeras restrições cinemáticas, a um problema mais

simples como o de planejar o caminho para um robô pontual (sem dimensões ou forma relevantes) no espaço de configurações.

Com o advento do *C-space*, o número de trabalhos e áreas diferentes interessados em desenvolver novas técnicas de planejamento cresceu consideravelmente. Problemas como complexidade computacional [31] e dimensionalidade [32] juntaram-se ao problema básico de planejamento e a outras questões já em pauta como robustez a incertezas [15, 33] e discretização [34] do espaço de trabalho e do espaço de configurações.

A grande quantidade de trabalhos associados ao tema de planejamento motivou a criação de uma classificação qualitativa, apresentada no livro *Robot Motion Planning* de Jean-Claude Latombe, em 1991 [10], que unificou as nomenclaturas usualmente utilizadas à época. Em seu livro, Latombe classificou os diferentes tipos de planejamento em três grandes grupos que, unidos, englobavam a grande maioria dos trabalhos já publicados no referido tema, quais sejam: (i) Mapa de rotas (*Road Maps*); (ii) Decomposição em células (*Cell Decomposition*); e (iii) Campos potenciais (*Potential Field*). Estes grupos diferem, principalmente, quanto a sua forma de representação do espaço de interesse, seja este o espaço de trabalho ou de configurações.

Em trabalhos posteriores, a taxonomia do planejamento do movimento foi novamente discutida, colocando os três grupos listados por Latombe [10] na categoria dos então chamados *métodos clássicos* [35]. Recentemente, outra proposta de taxonomia foi apresentada por Roland Siegwart [3], na qual os métodos de planejamento foram classificados em dois grupos: métodos baseados em grafos (*graph based*) e métodos baseados em campos potenciais. No entanto, essas diferentes classificações não são conflitantes, tendo estas inclusive incorporado a taxonomia clássica, proposta por Latombe [10], em algum nível de suas subclasses.

Os métodos de planejamento baseados em mapa de rotas, assim como os métodos baseados em decomposição do mapa em células, têm como princípio básico a criação de um grafo não-direcionado que capture a conectividade entre as diferentes regiões navegáveis (livres de obstáculos) do espaço de trabalho ou do espaço de configurações do robô [10]. É por essa semelhança que estes métodos foram colocados no grupo dos métodos baseados em grafos [3]. A grande diferença entre estes métodos está na forma de construção do grafo. Enquanto os chamados mapa de rotas concentram seus esforços na criação das arestas que conectam os diferentes nós do grafo, os métodos baseados em decomposição em células têm como foco principal a definição dos nós do grafo (que muitas vezes representam regiões inteiras), fazendo com que as arestas que conectam um nó a outro sejam definidas trivialmente por uma conexão direta entre nós (ou regiões) vizinhos.

Uma vez construído o grafo que representa o mapa de interesse, o ponto de partida, q_{init} , e o ponto de destino do robô, q_{goal} , são então conectados a este grafo (ou identificados nele), resumindo o problema de planejamento a uma busca por um caminho que conecte estes dois pontos de interesse através do grafo resultante, independentemente da estratégia

utilizada para construí-lo.

Diferentes algoritmos de busca podem ser utilizados para solucionar o problema de caminho em um grafo não direcionado. Cada algoritmo tem suas particularidades que refletem tanto na velocidade de convergência quanto no caminho final obtido, alguns podendo, inclusive, conferir ao resultado final características de sub-otimalidade ou mesmo de otimalidade para algum critério específico. Estes algoritmos podem ser exatos (ao menos em sua ideia original), como o Breadth-first [36], o Depth-first [37] e o algoritmo de Dijkstra [38], ou fazer uso de algum tipo de aproximação (heurística), como é o caso do Best-first [39], do A* (A-estrela) [40, 41] e do D* (D-estrela) [42], bastante explorados em robótica.

Diferentemente dos métodos baseados em grafos [3] (decomposição em células e mapa de rotas), os métodos baseados em campo potencial, originalmente, não utilizam algoritmos de busca explícita. Ao invés disso, é gerado um potencial artificial, $U(q)$, para cada possível estado, q , do robô no mapa. Esse potencial é, normalmente, obtido a partir da combinação de potenciais de atração e de repulsão [43]. O potencial artificial de atração (global) é idealizado de modo que este possua apenas um mínimo global centrado no estado q de destino, q_{goal} , independentemente da posição dos obstáculos. Já o potencial de repulsão (local) é gerado a partir dos obstáculos fazendo com que, nas regiões próximas a eles, o potencial seja bastante alto, sem levar em consideração o estado de destino a ser alcançado. O resultado da junção destes dois potenciais é o campo potencial $U(q)$.

Inicialmente, a ideia por trás dos métodos de campos potenciais, assim como acontece em outros métodos de planejamento, é mapear o espaço de trabalho do robô no C -space (espaço de configurações), fazendo com o que a tarefa a ser executada se resuma à movimentação de um robô pontual nesse espaço. Feito isso, o campo potencial $U(q)$ é gerado para todas as possíveis configurações q pertencentes ao C_{free} (região navegável do C -space), levando em consideração os obstáculos (C_{obs}) que foram mapeados no espaço de configurações.

Uma vez que no C -space o robô é um corpo rígido sem dimensões ou forma relevantes, a metáfora sugerida pela terminologia “campo potencial” é evidenciada se considerarmos que o robô nesse espaço é uma partícula se movimentando sob a ação do campo potencial $U(q)$ [10], cuja força exercida por este campo sobre o robô, $F(q)$, é dada pelo gradiente negativo de U no estado q , ou seja:

$$F(q) = -\nabla U(q), \quad (1.1)$$

para qualquer q pertencente à área navegável do espaço de configurações (C_{free}). Dessa forma, a movimentação induzida pela força $F(q)$ no robô tende a afastá-lo dos obstáculos, levando-o ao mínimo global da função $U(q)$, que por definição é o destino a ser alcançado, q_{goal} .

Apesar de promissora e bastante eficiente, mesmo com o baixo custo computacional associado, a técnica de campos potenciais formalizada por Khatib em 1986 [43], e utilizada inicialmente para planejamento local [10], apresentou um ponto negativo que ainda é estudado até os dias de hoje: o surgimento de mínimos locais.

Os mínimos locais são caracterizados por uma estagnação do movimento da partícula (robô) em um estado q diferente do estado de destino, ou seja, é todo estado q para o qual:

$$F(q) = 0 \quad e \quad q \neq q_{goal}. \quad (1.2)$$

O surgimento de mínimos locais em métodos de campos potenciais não é uma particularidade da aplicação em planejamento local, sendo estes observados mesmo se a técnica for aplicada com o conhecimento *a priori* do mapa (planejamento global [10]). A causa deste problema está no somatório dos potenciais atrativos, $U_{atr}(q)$, e repulsivos, $U_{rep}(q)$, que compõe o campo potencial artificial $U(q)$. Existem situações onde a força gerada pelos potenciais $U_{atr}(q)$ e $U_{rep}(q)$ se igualam em módulo e direção, mas com sentidos opostos (Figura 1.1), o que produz um estado de mínimo local. Por esse motivo, desde o advento dos campos potenciais para planejamento, são investigadas técnicas para escapar de mínimos locais [44, 45], minimizar seu aparecimento [46], ou mesmo garantir a sua inexistência [4, 47, 48].

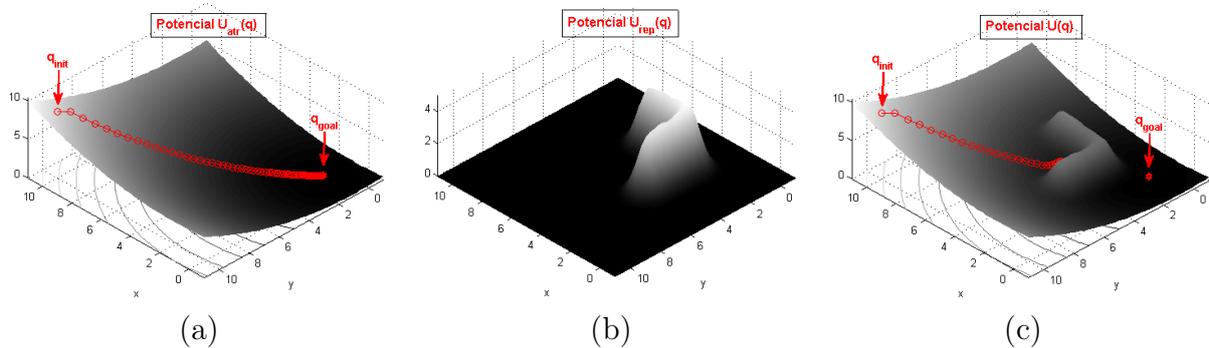


Figura 1.1: (a) Campo potencial $U_{atr}(q)$ atraindo o robô para o destino (sem obstáculos); (b) Campo potencial $U_{rep}(q)$ afastando o robô dos obstáculos (ignora a posição de destino); (c) Campo potencial $U(q) = U_{atr}(q) + U_{rep}(q)$, ilustrando o surgimento de um mínimo local que impede o robô de alcançar o destino.

Entre os métodos propostos para garantir o não surgimentos de mínimos locais estão os métodos baseados em funções harmônicas, formalizados pela primeira vez como técnica de planejamento por Christopher Connolly, em 1990 [4], e, paralelamente (e de forma independente), por Akishita, et al. [49]. esses métodos destacam-se por seu equacionamento simples mas que garantem, matematicamente, a inexistência de mínimos locais no potencial resultante.

Nos métodos baseados em potenciais harmônicos, o potencial $U(q)$ é gerado de modo

a satisfazer a equação de Laplace, dada por:

$$\nabla^2 U(q) = 0, \quad \forall q \in \Omega, \quad (1.3)$$

na qual Ω representa a região navegável do espaço de trabalho do robô ou sua equivalente, C_{free} , no espaço de configurações.

Uma vez que a dimensão da configuração q é, normalmente, maior que dois, a Equação (1.3) será uma equação diferencial parcial de segunda ordem elíptica. Nesses casos, a equação de Laplace é melhor representada por:

$$\nabla^2 U(q) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 U(q)}{\partial x_i^2} = 0, \quad \forall q = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \Omega, \quad (1.4)$$

na qual n é a dimensão de q . Qualquer função potencial $U(q)$ que é solução não trivial da Equação (1.4) é chamada de função harmônica.

Funções harmônicas apresentam diversas características atrativas para o planejamento de trajetória, a principal delas é o princípio *min-max* [50], também conhecido como princípio do máximo [51], que garante que a função $U(q)$ não apresenta mínimos ou máximos dentro do domínio Ω , ficando o aparecimento destes restrito aos pontos críticos induzidos (q_{init} e q_{goal}) e às regiões de contorno, $\partial\Omega$, definidas pelo contorno dos obstáculos. Assim sendo, para solucionar a Equação (1.4), é necessário ainda definir, matematicamente, as condições de contorno que serão utilizadas em $\partial\Omega$.

Do trabalho original de Connolly em 1990 até os dias de hoje, as pesquisas em planejamento baseado em funções harmônicas têm sido desenvolvidas utilizando tanto representações contínuas [52], quanto representações discretas do espaço de configurações, como no trabalho original [4]. Para o caso especial das representações discretas, o foco está em duas linhas principais: custo computacional do cálculo do potencial $U(q)$ e representações matemáticas das condições de contorno em $\partial\Omega$.

Apesar de exercerem grande influência sobre o campo potencial harmônico resultante, as condições de contorno utilizadas na solução deste problema em robótica têm se restringido às condições de contorno clássicas, como a condição de Dirichlet [4], a condição de Neumann [53, 54] ou combinações destas [55]. No entanto, apesar de todas elas resultarem em um potencial $U(q)$ sem mínimos locais, as características dos campos resultantes são bastante diferentes, como mostrado na Figura 1.2. Nessa figura, são apresentados dois campos vetoriais dos potenciais gerados utilizando duas condições de contorno distintas: condição de Dirichlet (Figura 1.2.a) e condição de Neumann (Figura 1.2.b).

Analisando a Figura 1.2, é possível notar que, para a condição de Dirichlet, o potencial $U(q)$ privilegia o afastamento do robô em relação aos obstáculos, o que é evidenciado pelo gradiente negativo de $U(q)$ (definido na Equação (1.1) como $F(q)$) que sempre tende à normal dos obstáculos nas regiões de contorno, o que gera o afastamento. Já para a

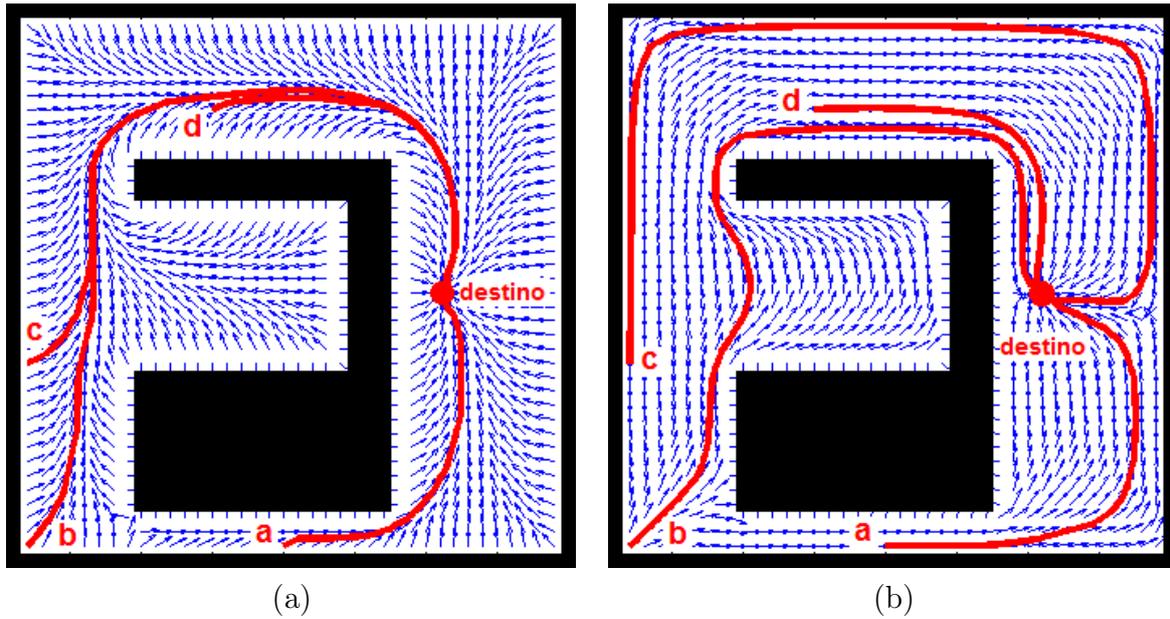


Figura 1.2: Campo vetorial do potencial $U(q)$ e quatro trajetórias partindo dos pontos a , b , c e d , utilizando condições de contorno de: (a) Dirichlet; e (b) Neumann.

condição de Neumann, o potencial $U(q)$ gerado tende a levar o robô a seguir o contorno do obstáculo, o que pode ser notado pela força $F(q)$ que tende a ser paralela aos obstáculos nas regiões próximas a eles.

Existem ainda outras diferenças entre os dois métodos ilustrados na Figura 1.2 que serão discutidas nos demais capítulos desse texto. No entanto, existe também uma outra semelhança entre estas técnicas que não a ausência de mínimos locais: a ausência de preocupação com a eficiência do caminho resultante em sua idealização. Em nenhum destes métodos, isoladamente, é possível obter, por exemplo, uma trajetória que busque obter o menor caminho até o ponto de destino. Enquanto que o potencial de Neumann pode gerar trajetórias excessivamente longas por seguir o contorno do obstáculo, o potencial de Dirichlet tem dificuldades com passagens mais estreitas, o que o impede de obter um caminho mais curto até o destino em algumas situações (trajetória b da Figura 1.2.a), além de sempre ser repelido pelos obstáculos, o que também pode gerar trajetórias mais longas. Esses exemplos evidenciam uma carência do planejamento baseado em funções harmônicas quando o objetivo a ser alcançado requer a obtenção de um plano que busque a redução da distância percorrida pelo robô.

Objetivando preencher a lacuna que existe entre o planejamento baseado em potenciais harmônicos e a busca pelo menor caminho, é proposta nessa tese de doutorado uma nova estratégia de planejamento baseada em funções harmônicas. Nessa estratégia, uma nova condição de contorno denominada de *Condição de Horizonte Continuado* (CHC) é apresentada. O objetivo principal da CHC é propiciar a obtenção de planos que buscam a obtenção do caminho mais curto até o destino. Além disso, é mostrado que a técnica aqui

desenvolvida pode ser adaptada para solucionar diferentes extensões do problema básico de planejamento, como o planejamento com múltiplos objetivos, considerando regiões de destino, planejamento em mapas com regiões de diferentes navegabilidades, entre outros prolongamentos.

1.1 Contribuições

As principais contribuições desta tese de doutorado são:

- Desenvolvimento de uma técnica de planejamento de movimento através da obtenção de um campo potencial sem mínimos locais, utilizando funções harmônicas;
- Proposição de uma nova condição de contorno no contexto da robótica móvel, a Condição de Horizonte Continuado (CHC);
- Demonstração matemática de que a técnica de planejamento desenvolvida baseada na CHC é uma técnica de planejamento completa por resolução;
- Apresentação de resultados experimentais que indicam que o caminho obtido pela técnica de planejamento desenvolvida é menor do que aquele obtido para as técnicas clássicas de planejamento baseado em funções harmônicas;
- Demonstração da fácil aplicação da técnica desenvolvida na solução de diferentes extensões do problema básico de planejamento, com destaque para planejamento multiobjetivos e considerando regiões de diferentes navegabilidades.

1.2 Estrutura da tese

No restante deste trabalho é apresentada a revisão bibliográfica e os resultados da estratégia de planejamento proposta. No Capítulo 2 é apresentada uma visão geral sobre arquiteturas de navegação, bem como uma classificação qualitativa dessas arquiteturas e a sua relação com o planejamento de movimento. O Capítulo 3 tem como objetivo apresentar uma ampla revisão bibliográfica sobre a área de planejamento, seguido por uma revisão bibliográfica mais específica sobre o planejamento baseado em funções harmônicas, apresentada no Capítulo 4. Em seguida, é apresentada no Capítulo 5 a estratégia de planejamento proposta, bem como a sua utilização na solução do problema básico de planejamento de movimento de um robô móvel. Os resultados obtidos assim como a análise dos mesmos são apresentados no Capítulo 6, juntamente com a adaptação do planejador proposto para solucionar diferentes extensões do problema básico de planejamento. Por fim, são apresentadas as conclusões desta tese de doutorado (Capítulo 7), seguidas pelas sugestões de trabalhos futuros e pela lista de referências.

Capítulo 2

Arquiteturas de navegação

A navegação de um robô móvel está associada à decisão a respeito de qual ação deve ser executada no instante seguinte. Essa decisão é de fundamental importância, sendo esse problema conhecido como *problema de seleção de ação* (PSA) [1]. Os esquemas ou arquiteturas de navegação que são utilizados para solucionar este tipo de problema recebem o nome de *mecanismos de seleção de ação* (MSA). Tyrrel [56] apresenta a seguinte visão biológica do PSA:

“Esse é o problema geral de um animal decidir suas ações de modo a maximizar suas expectativas de sobrevivência e reprodução, ajudando os da sua espécie a fazer o mesmo.”

Essa interpretação é reformulada em [1] utilizando conceitos da teoria de decisão Bayesiana, que defende que os agentes atuem de forma racional ou ótima. O objetivo é dar à definição maior abrangência, adequando-a a casos mais gerais, como os agentes ou robôs móveis. Entretanto, Maes em [57] mostra que, devido a condições desfavoráveis como complexidade do ambiente e imprevisibilidade, aliadas às limitações do robô móvel, os MSA não podem ser completamente racionais (ótimos), limitando-se a serem apropriados ou satisfatórios para um dado objetivo. Dessa forma, uma definição de PSA mais compatível com o problema de navegação de robôs móveis é apresentada em [57]:

“Como um agente pode selecionar a ação seguinte da forma mais apropriada, ou relevante, em um determinado momento, quando se depara com uma situação específica?”

Nas últimas décadas, diversos MSA foram propostos por pesquisadores de áreas distintas para solucionar problemas específicos de suas áreas [1, 2], entre as quais destacam-se: inteligência artificial, modelagem de comportamento de agentes biológicos, realidade virtual, agentes de *softwares* cooperativos e robótica [1, 2]. Nessa última, é comum referenciar-se aos MSA como arquiteturas de navegação, termo que será bastante utilizado neste trabalho a partir deste ponto. A seguir, é apresentada uma classificação qualitativa das arquiteturas de navegação e suas principais características.

2.1 Classificação qualitativa das arquiteturas de navegação

Com o crescente número de arquiteturas de navegação desenvolvidos na área de robótica móvel, uma classificação qualitativa dos MSA é inevitável, embora não exista unanimidade na comunidade científica atuante a esse respeito. Diversas classificações já foram apresentadas, sendo algumas mais adequadas, e outras até mesmo equivocadas. Uma das classificações mais aceitas pela comunidade científica é aquela apresentada em [1] e aqui ilustrada na Figura 2.1. Através de uma análise rápida da Figura 2.1, é possível observar que esta classificação sugere uma total independência entre as classes apresentadas (deliberativa, reativa e híbrida). Entretanto, uma rápida avaliação das arquiteturas de navegação comumente encontradas na literatura as colocaria, em sua maior parte, na classe das arquiteturas híbridas. Isso ocorre por que a maioria dos arquiteturas de navegação, carregam características reativas e deliberativas, mas nem sempre em proporções suficientes para serem consideradas híbridas [2].

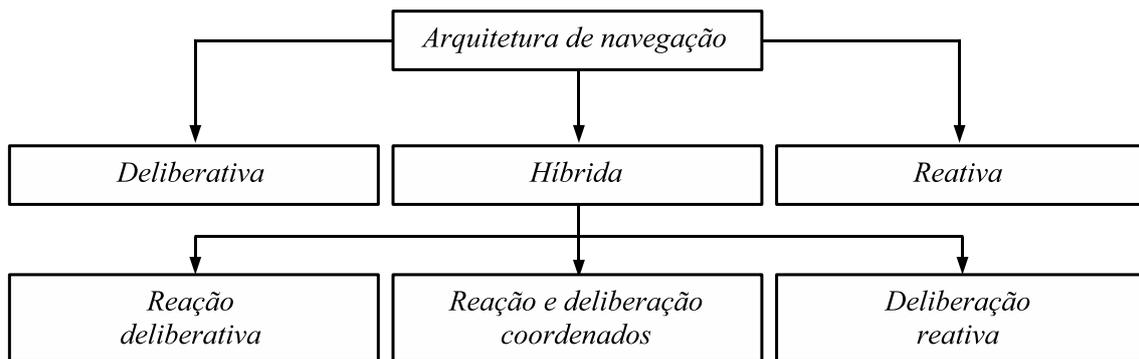


Figura 2.1: Classificação das arquiteturas de navegação, segundo Pirjanian [1].

A classificação que parece a mais completa e abrangente é aquela apresentada por Ronald C. Arkin em [2]. Nessa classificação, as diversas arquiteturas já propostas são agrupadas qualitativamente em um espectro contínuo que varia desde as arquiteturas puramente deliberativas ou cognitivas, até as arquiteturas puramente reativas (também conhecidas como reflexivas) de uma forma suave, sem separações bem estabelecidas. Na Figura 2.2 é apresentado o espectro de classificação proposto inicialmente em [2]. Conforme pode ser visto na Figura 2.2, à medida que se desloca ao longo do espectro, desde as arquiteturas deliberativas em direção às arquiteturas reativas, verifica-se um aumento no grau de acoplamento sensor-atuador (que indica o quanto a informação sensorial é processada antes de se chegar ao atuador) e um aumento na velocidade de resposta da arquitetura, ao passo que a capacidade de predição dos resultados a serem obtidos e a dependência que a arquitetura possui acerca da confiabilidade do modelo do mundo (ambiente de operação do robô) diminuem.



Figura 2.2: Espectro de classificação das arquiteturas de navegação, segundo Arkin [2].

Os primeiros robôs móveis desenvolvidos usavam arquiteturas de navegação deliberativas. Estas são oriundas da escola de Inteligência Artificial (IA) e, de alguma forma, são inspiradas na maneira como os seres humanos raciocinam. Portanto, estas arquiteturas fazem uso intensivo de representações simbólicas do conhecimento, sobretudo no que tange ao modelo do mundo, ou seja, o ambiente de operação do robô móvel. Como características principais, as arquiteturas deliberativas são relativamente lentas, devido principalmente à sua estrutura de fluxo de informação sequencial e ao intenso uso de representação simbólica de conhecimento. Isso possibilita o planejamento prévio das ações do robô, permitindo a execução de tarefas de forma ótima, porém bastante sensível a alterações no modelo do ambiente utilizado para realizar o planejamento, o que caracteriza este tipo de arquitetura como pouco robusta.

No outro extremo do espectro estão as arquiteturas reativas. Em seu caso extremo, também conhecido como reflexivo, não existe qualquer tipo de representação simbólica de conhecimento e, portanto, nenhum tipo de modelo de mundo. O acoplamento sensor-atuador é muito forte, o que em parte é o reflexo de um fluxo de informação paralelo, em contraposição ao fluxo sequencial das arquiteturas deliberativas. Tais características resultam em arquiteturas adequadas para aplicações em ambientes dinâmicos, onde a resposta do sistema em tempo real é essencial para evitar colisões e garantir a realização da tarefa especificada para o robô, privilegiando assim a robustez do sistema. Em contrapartida, é extremamente difícil prever os resultados que podem ser obtidos aplicando arquiteturas deste tipo, o que dificulta a implementação de um MSA otimizado.

Entre os dois extremos do espectro estão as arquiteturas denominadas híbridas, que não são nem puramente deliberativas, nem puramente reativas. Dentre elas, pode haver uma maior predominância da parte deliberativa ou reativa. Na verdade, um espectro contínuo como apresentado na Figura 2.2 tem como objetivo principal ilustrar justamente essa transição suave entre as arquiteturas deliberativas e reativas; mesmo porque, é muito difícil dizer a partir de que ponto uma arquitetura deixa de ser deliberativa e passa a ser híbrida, ou deixa de ser híbrida e passa a ser reativa.

2.1.1 Arquiteturas deliberativas

As arquiteturas de navegação que utilizam metodologia deliberativa consistem em um conjunto de blocos funcionais em sequência em que a informação do ambiente, proveniente dos sensores, é normalmente utilizada para a construção de um modelo do ambiente de navegação do robô. Este modelo deve incluir informações a respeito das dimensões, formas, posições e orientações de todos os objetos de interesse presentes na área de operação do robô móvel.

Muitas vezes, o modelo do ambiente é conhecido *a priori*, seja por intermédio de uma planta baixa do ambiente de operação, ou pelo uso de informações obtidas em tarefas realizadas anteriormente e armazenadas na memória do robô [58, 59]. Nesses casos, este mapa pode ser utilizado para planejar a tarefa de forma global, ficando os sensores responsáveis pela localização do robô no ambiente, pelas tarefas reativas do sistema, como evitar obstáculos, e pela atualização do modelo *a priori* do ambiente, incorporando ao mapa inicial informações novas como paredes e posicionamento dos obstáculos encontrados durante a navegação.

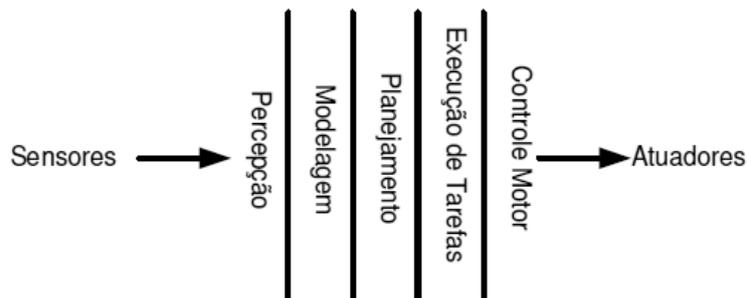


Figura 2.3: Estrutura de uma arquitetura de navegação deliberativa.

Utilizando o modelo do ambiente, é possível definir, por intermédio de um planejamento de movimento, as ações do robô de forma ótima, as quais deverão ser executadas pelos atuadores. Um exemplo da estrutura de uma arquitetura de navegação deliberativa está representado na Figura 2.3. É importante ressaltar que, não necessariamente, todos os blocos funcionais mostrados na figura devem estar presentes em uma arquitetura de navegação deliberativa. Esse sistema de navegação é indicado para tarefas de alto nível, executadas em ambientes estáticos, como planejamento global ou cronograma de atividades. A sua utilização para tarefas em ambientes dinâmicos não é indicada devido à sua natureza sequencial, o que exige um tempo de execução elevado, impossibilitando, assim, a obtenção de respostas satisfatórias às alterações imprevisíveis no ambiente. Exemplos desses sistemas de navegação podem ser encontrados em [60–65]. As principais vantagens das arquiteturas de navegação deliberativas são:

- Simplicidade na interação entre as etapas da navegação (*sense-plan-act*);

- Possibilita um comportamento ótimo;
- Utilização eficiente dos mecanismos disponíveis.

Em contrapartida, esse tipo de arquitetura apresenta as seguintes desvantagens:

- É inapropriada para tarefas que necessitam de resposta rápida (dinâmica);
- Necessita de informações confiáveis para a construção do modelo do ambiente.

2.1.2 Arquiteturas reativas

A principal característica das arquiteturas reativas é o forte acoplamento entre sensoriamento e atuação, não sendo utilizados modelos do mundo. Seus defensores argumentam que as arquiteturas reativas, ao invés de operar com base em representações abstratas da realidade (modelo do ambiente), operam com base na própria realidade. Com isso, evita-se o alto custo computacional envolvido na elaboração e manutenção de modelos confiáveis do ambiente de operação do robô. Outra característica comum é que normalmente estas arquiteturas consistem em simples métodos baseados em regras, de baixo custo computacional. Dessa forma, as arquiteturas reativas tendem a ser rápidas e, portanto, adequadas para aplicações onde o ambiente de operação é altamente dinâmico e/ou não estruturado.

Ao contrário da metodologia deliberativa, essa metodologia é indicada para ambientes onde a velocidade de resposta é crucial para o funcionamento correto do sistema, mas não é indicada para tarefas de alto nível que exijam otimalidade. Exemplos de arquiteturas de navegação reativa podem ser encontrados em [2, 66–70].

As principais vantagens das arquiteturas reativas são:

- Velocidade (resposta rápida a estímulos externos);
- Forte acoplamento entre percepção e ação;
- Independência em relação ao modelo do ambiente de atuação.

Em contrapartida esse tipo de arquitetura apresenta as seguintes desvantagens:

- Ausência de memória;
- Dificuldade na realização de tarefas globalmente complexas;
- Inapropriada para tarefas de alto nível que exijam otimalidade em algum aspecto.

2.1.3 Arquiteturas híbridas

A partir da descrição dos MSA deliberativos e reativos, é possível notar que o primeiro privilegia a eficiência em detrimento da velocidade de resposta, enquanto que o segundo segue o caminho contrário. Nesse contexto, os sistemas híbridos surgem como arquiteturas de navegação que tentam unir as melhores características das duas metodologias, possibilitando uma navegação mais robusta e eficiente.

A parte reativa é, geralmente, responsável pela segurança do robô, permitindo que o mesmo execute tarefas em tempo real, evitando obstáculos ainda que dinâmicos, ou em situações de emergência. Já a parte deliberativa é responsável pelo cumprimento da tarefa como um todo, guiando o sistema reativo para atingir certos objetivos específicos, garantindo sempre que possível a utilização eficiente dos recursos disponíveis.

O critério de distribuição das funcionalidades requeridas para uma arquitetura híbrida entre seus componentes deliberativos e reativos, e a forma como é feita a interface entre tais componentes, tão distintos em sua essência, ainda são aspectos que não foram completamente entendidos, e, portanto, representam áreas abertas para a realização de novas pesquisas. Exemplos de arquiteturas híbridas podem ser encontrados em [71–77].

Uma outra nomenclatura, também muito utilizada na classificação qualitativa de arquiteturas de navegação, é aquela usada para as *arquiteturas baseadas em comportamentos* [2]. Essa nomenclatura é a mais adequada quando a tarefa global é dividida em tarefas menores (subtarefas) e estas, por sua vez, são resolvidas a partir da idealização de comportamentos independentes, podendo estes serem reativos, deliberativos ou híbridos, o que caracteriza essa taxonomia como uma classificação paralela à apresentada anteriormente.

Por serem aplicadas, na maioria das vezes, na solução de tarefas complexas de navegação, onde mais de um objetivo é normalmente requerido, as arquiteturas baseadas em comportamentos, normalmente, fazem uso de comportamentos, tanto deliberativos, como reativos, o que as coloca como um tipo de arquitetura híbrida.

O foco das pesquisas na área de arquiteturas de navegação baseadas em comportamentos está intimamente ligado ao processo de coordenação destes comportamentos. Como mostrado em [78], estes métodos de coordenação podem ser classificados, qualitativamente, como métodos competitivos, onde apenas um comportamento por vez atua no robô, e cooperativos, onde mais de um comportamento interfere nas ações de controle.

2.2 O planejamento e a navegação de robôs móveis

O planejamento de movimento global é etapa essencial à obtenção de comportamentos ótimos no tocante à navegação de robôs móveis. Por essa característica, é comum encontrar técnicas de planejamento associadas a arquiteturas de navegação deliberativas, como o sistema apresentado em [79]. Além disso, Latombe [10] mostra que existem técnicas

de planejamento local que servem como base para algumas arquiteturas de navegação reativas já propostas, como o *VFH* (do inglês *vector field histogram*) [11] e as técnicas baseadas em campos potenciais, originalmente propostas para evitar obstáculos [80], o que evidencia a importância do planejamento também para este tipo de arquitetura.

Além da grande gama de aplicações de técnicas de planejamento em arquiteturas de navegação, é possível encontrar ainda essas técnicas adaptadas para a coordenação de comportamentos de mais alto nível como o planejamento a nível de tarefas a serem executadas pelo robô, como mostrado em [81, 82], o que interfere diretamente na definição dos destinos a serem alcançados pelo robô. Nessas aplicações, normalmente, a movimentação do robô fica a cargo de sistemas de planejamento de mais baixo nível ou mesmo de sistemas de controle tradicionais [3].

Dada a importância das estratégias de planejamento para a navegação de robôs móveis, será apresentada no capítulo seguinte uma ampla revisão bibliográfica da área e as suas diferentes classificações, utilizando a taxonomia clássica apresentada em [10] e outras taxonomias mais modernas [3, 8, 35].

Capítulo 3

Planejamento de movimento

Desde 1970, o planejamento de movimento tem sido alvo de pesquisas em diferentes áreas do conhecimento como controle, inteligência artificial e robótica, tornando-as áreas quase que inseparáveis quando o tema a ser discutido é planejamento [8]. O trabalho desenvolvido em [83], por exemplo, que é tido por muitos como o primeiro algoritmo de planejamento de movimento para robôs móveis [8], foi desenvolvido com foco na área de inteligência artificial, o que evidencia a relação estreita entre essas áreas. No caso específico da robótica, o interesse dos pesquisadores pela área cresceu mais substancialmente a partir dos trabalhos de Lozano-Pérez em 1979 [27] e 1983 [28]. Nesses trabalhos, foi mostrado que problemas mais complexos podem ser solucionados de forma mais simples ao mapear o espaço de trabalho, ou espaço físico, do robô em um espaço abstrato denominado espaço de configurações, o *C-space*.

Um exemplo visual que ilustra a utilização do *C-space* em robótica e evidencia a simplificação proporcionada por esse mapeamento é apresentado na Figura 3.1. Nesse exemplo, o problema de planejamento de movimento de um manipulador planar, com duas juntas de revolução (θ_1 e θ_2), em seu espaço de trabalho é mapeado em um problema de planejamento de caminho de um robô pontual (sem forma ou dimensões relevantes) no espaço de configurações. Este último é, notadamente, um problema de resolução mais simples, especialmente no tocante à representação das configurações em que o manipulador entra em colisão com os obstáculos. Além disso, o caminho resultante do planejamento realizado no espaço de configurações define de forma direta, sem a necessidade de uma análise da cinemática do robô, a sequência de ângulos a serem atribuídos às juntas, θ_1 e θ_2 , para que o efetuador saia de sua posição inicial q_{init} e vá para a sua posição de destino q_{goal} .

Para possibilitar o melhor entendimento da nomenclatura utilizada no decorrer deste e dos demais capítulos desse trabalho, será apresentada na seção a seguir uma breve formalização do conceito de espaço de configurações e suas subdivisões. Uma vez definidos os termos provenientes da formalização do *C-space*, estes serão utilizados na apresentação, idealização e formalização dos métodos de planejamento, teorias e definições aqui

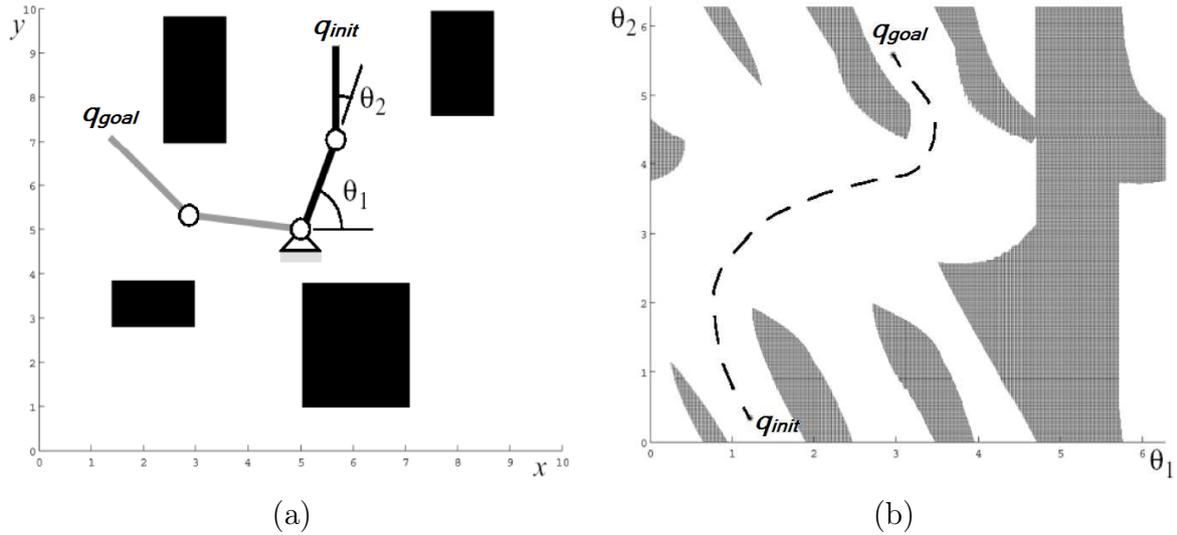


Figura 3.1: Representação de um robô planar e sua trajetória em seu: (a) espaço de trabalho; e (b) espaço de configurações [3].

apresentadas.

3.1 Espaço de configurações (*C-space*)

O conceito de espaço de configurações, utilizado pela primeira vez para planejamento de movimento por Lozano-Pérez e Wesley [27], é uma representação unificada do ambiente de trabalho do robô e das características físicas deste robô. Essa representação tem por objetivo transformar o problema de planejamento de movimento de um robô, com características físicas de dimensão e forma relevantes, em um problema mais simples no qual o robô é representado por um ponto em um espaço de dimensão n , no qual n é a dimensão da configuração do robô.

Para melhor entendimento dos conceitos discutidos neste trabalho, serão apresentadas formalmente a seguir as definições associadas à representação de um problema de planejamento no espaço de configurações. Os conceitos são apresentados de forma geral para poderem ser utilizados na representação de problemas em espaços contínuos ou discretizados.

Para fins de uniformização da nomenclatura, considere que o espaço de trabalho do robô é representado pela variável \mathcal{W} e que o robô é representado por \mathcal{A} .

Definição 1 *Configuração q de um robô:*

A configuração q de um robô é o conjunto de n parâmetros que especifica completamente a postura de um robô, \mathcal{A} , em seu espaço de trabalho, \mathcal{W} .

Definição 2 *Espaço de configurações \mathcal{C} , ou C_{space} :*

O espaço de configurações \mathcal{C} , ou C_{space} , é o espaço n -dimensional \mathcal{C} que contém todas

as possíveis configurações q de um robô \mathcal{A} em seu espaço de trabalho \mathcal{W} .

Definição 3 Caminho τ :

Dada uma configuração inicial do robô \mathcal{A} , q_{init} , e uma configuração final desse mesmo robô, q_{goal} , um caminho no espaço de configurações é o mapeamento definido por:

$$\tau : [0, 1] \rightarrow C_{space} \mid \tau(0) = q_{init} \text{ e } \tau(1) = q_{goal}. \quad (3.1)$$

Definição 4 Obstáculos no C_{space} ou C_{obs} :

Seja B o conjunto de todas as regiões B_i ocupadas em \mathcal{W} e $A(q)$ a parte de \mathcal{W} ocupada pelo robô \mathcal{A} em uma dada configuração q . Então, os obstáculos no C_{space} são definidos como:

$$C_{obs} = \{q \in C_{space} \mid A(q) \cap B \neq \emptyset\}. \quad (3.2)$$

Definição 5 Região navegável do C_{space} ou C_{free} :

A região navegável do C_{space} , ou C_{free} , é o subconjunto do espaço de configurações que não pertence ao C_{obs} , ou seja:

$$C_{free} = C_{space} \setminus C_{obs}. \quad (3.3)$$

Definição 6 Caminho τ livre de obstáculos:

Dada uma configuração inicial do robô \mathcal{A} , q_{init} , e uma configuração final desse mesmo robô, q_{goal} , um caminho livre de obstáculos no espaço de configurações é o mapeamento definido por:

$$\tau : [0, 1] \rightarrow C_{free} \mid \tau(0) = q_{init} \text{ e } \tau(1) = q_{goal}. \quad (3.4)$$

Construção do C_{space}

Ao longo dos anos, diversas técnicas foram propostas para mapear o robô \mathcal{A} e o seu espaço de trabalho \mathcal{W} em seu espaço de configurações (C_{space}). A maioria das técnicas propostas baseia-se inicialmente na representação de todo o C_{space} como uma única região navegável, ou seja, $C_{space} = C_{free}$. Feito isso, são reconhecidas as configurações q que correspondem a uma situação de colisão entre o robô e um obstáculo no espaço de trabalho. Essas configurações passam então a ser consideradas obstáculos do C_{space} , ou seja, $q \in C_{obs}$.

Para uma revisão mais detalhada sobre as técnicas de construção do espaço de configurações é sugerida a leitura dos textos [30] e [84] e suas referências.

3.2 Problema básico de planejamento

O advento do espaço de configurações fez com que a maioria dos trabalhos publicados em planejamento no decênio de 1980 fossem voltados à solução do *problema básico de*

planejamento, também chamado de *planejamento de caminho* (*path planning*). O objetivo por trás da formulação desse problema básico é isolar o problema central, comum a todos os problemas de planejamento, e investigá-lo a fundo antes de considerar possíveis extensões do tema [10].

No problema de planejamento de caminho, o robô é visto como um ponto no C -space sem dinâmica, dimensões e forma relevantes. O objetivo do planejamento é determinar uma sequência de configurações, q , que o robô deve seguir para sair da sua configuração inicial, q_{init} , e chegar à sua configuração de destino, q_{goal} . Além disso, é assumido que o robô é o único corpo com capacidade de movimentação no ambiente e todas as incertezas e dinâmicas são ignoradas. Essa problema é formalmente apresentado a seguir [10]:

Formulação 1 *Problema básico de planejamento ou planejamento de caminho:*

Seja \mathcal{W} o espaço de trabalho do robô, em que $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$ ou $\mathcal{W} = \mathbb{R}^3$, e uma região $\mathcal{O} \subset \mathcal{W}$ que compreende a região do espaço de trabalho ocupada por um obstáculo.

Considere um robô em \mathcal{W} que pode ser um único corpo rígido, \mathcal{A} , ou uma coleção de m corpos rígidos conectados, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_m$, e o espaço de configurações do robô, \mathcal{C} , obtido a partir de \mathcal{W} , que pode ser dividido em dois conjuntos disjuntos, \mathcal{C}_{free} e \mathcal{C}_{obs} .

Dada uma configuração inicial, $q_{init} \in \mathcal{C}_{free}$, e uma configuração final, $q_{goal} \in \mathcal{C}_{free}$, o problema básico de planejamento consiste em encontrar um caminho τ dado por:

$$\tau : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}_{free} \mid \tau(0) = q_{init} \text{ e } \tau(1) = q_{goal}. \quad (3.5)$$

3.3 Taxonomia clássica

Diferentes técnicas de planejamento foram propostas para resolver o problema apresentado na formulação 1. A variedade de trabalhos propostos motivou a criação de uma classificação qualitativa que, em 1991, unificou as diferentes estratégias propostas até então em torno de suas características principais. À época, Jean-Claude Latombe, em seu livro *Robot Motion Planning* [10], formalizou o que posteriormente passou a ser chamado de *taxonomia clássica*.

Na taxonomia clássica do planejamento de movimento de robôs, as técnicas de planejamento são classificadas, principalmente, quanto a sua forma de representar e interpretar o espaço de configurações do robô. Segundo Latombe, essas técnicas podem ser agrupadas em três grandes categorias: (i) Mapa de rotas (*Road Maps*); (ii) Decomposição em células (*Cell Decomposition*); e (iii) Campos potenciais (*Potential Field*).

3.3.1 Mapa de rotas

Os métodos baseados em mapa de rotas, também conhecidos como *skeleton* [84], têm por objetivo capturar a conectividade entre as diferentes regiões do \mathcal{C}_{free} , utilizando para

isso uma representação na forma de um grafo não direcionado [10], o que, posteriormente, motivou a inclusão destes métodos no grupo dos métodos baseados em grafos [3].

A principal diferença entre os mapas de rotas e os outros métodos baseados em grafos está na construção do grafo. Nos mapas de rotas o esforço é concentrado, principalmente, na criação das arestas que conectam os diferentes nós do grafo. Essas arestas, determinarão quais novas configurações devem ser consideradas como novos nós no grafo e, terminado o grafo, as arestas definem os caminhos que o robô pode seguir para transitar entre as diferentes configurações (nós) do grafo.

A construção do mapa de rotas

Entre as muitas técnicas propostas para a construção de um grafo capaz de representar um mapa de rotas, destacam-se duas técnicas principais: grafo de visibilidade (*visibility graph*) e diagrama de Voronoi (*Voronoi diagram*). Essas técnicas, individualmente, sintetizam duas grandes preocupações da navegação de robôs móveis: a busca pelo caminho mais curto e a busca pela segurança, representada pelo máximo afastamento dos obstáculos.

No grafo de visibilidade os obstáculos são representados, ou aproximados em uma etapa de pré-processamento, por polígonos. Em cada vértice desses polígonos é colocado um nó do grafo. Adicionalmente, são colocados nós nas posições de partida, q_{init} , e de destino, q_{goal} , do robô. Uma vez definidos os nós do grafo as arestas são criadas com todas as possíveis retas que podem conectar dois nós do grafo, ou seja, existe uma aresta entre dois nós sempre que um nó for “visível” a partir de outro, como ilustrado na Figura 3.2.a.

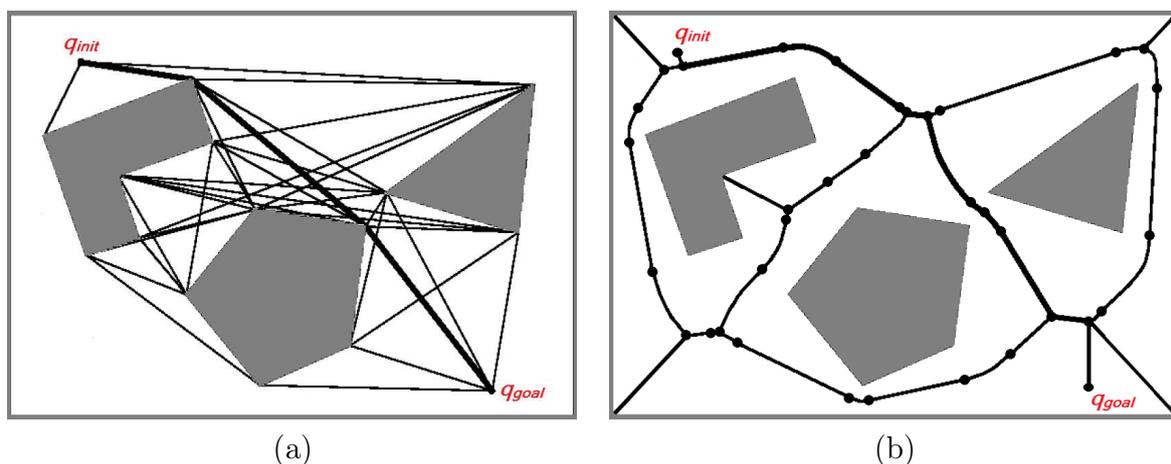


Figura 3.2: Figuras editadas de [3]: (a) Exemplo de grafo de visibilidade; e (b) Exemplo de diagrama de Voronoi.

As linhas retas que conectam dois nós do grafo são, obviamente, o menor caminho entre eles. Por consequência disso, o menor caminho entre os nós de interesse, q_{init} e q_{goal} ,

está representado no grafo de visibilidade, precisando apenas ser descoberto por algum algoritmo de busca que minimize o caminho percorrido nas arestas.

Apesar de resultar no menor caminho existem dois grandes problemas nessa abordagem. O primeiro está associado ao número de obstáculos no mapa. Para ambientes esparsos esses métodos costumam ser rápidos e eficientes, podendo tornar-se lentos e ineficientes a depender da densidade de obstáculos no mapa, uma vez que com eles cresce o número de nós no grafo [3]. O outro problema refere-se ao tipo de grafo resultante. Para propiciar uma trajetória ótima no sentido de menor caminho, o grafo de visibilidade pode levar o robô a navegar muito próximo dos obstáculos, o que não é seguro para aplicações práticas. Para solucionar esse problema é comum utilizar uma etapa de pós-processamento para refinar o caminho obtido afastando-o do obstáculo. Em casos onde a questão de segurança é mais crítica, é mais indicada a utilização do diagrama de Voronoi.

No diagrama de Voronoi, também chamado de retração (*retraction*) [10], o objetivo principal é a criação de arestas que maximizem a distância entre o robô e os obstáculos presentes no mapa, propiciando uma navegação ótima no sentido de segurança do robô. Quando os obstáculos no espaço de configurações são poligonais, as arestas do diagrama de Voronoi são formadas, essencialmente, por segmentos de retas e parábolas [3], como pode ser observado no exemplo da Figura 3.2.b.

Apesar de resultar em caminhos mais longos, o que nem sempre é aceitável, o diagrama de Voronoi tem uma vantagem em relação a outros métodos de planejamento baseados em grafos: a exequibilidade [3]. Os caminhos gerados por outros métodos baseados em grafo precisam de uma etapa posterior de seguimento de caminho, onde um sistema de controle deve fazer com que o robô siga o caminho planejado, utilizando para tanto informações, normalmente, provenientes de um sistema de odometria, cujos erros acumulativos são amplamente conhecidos [85]. No caso do diagrama de Voronoi, o sistema de controle pode basear-se meramente na informação dos sensores de distância à bordo do robô, evitando ou minimizando os erros de odometria. Para tanto, basta projetar o sistema de controle para maximizar a leitura desses sensores. Feito isso, o robô navegará sempre em um “mínimo local” que coincide exatamente com o diagrama de Voronoi.

Em casos onde o problema a ser solucionado requer um espaço de configurações de dimensões elevadas, pode ser impraticável a obtenção dos grafos de forma determinística como nos casos exemplificados anteriormente. Nessas situações, a alternativa mais indicada é a utilização de métodos probabilísticos para realizar a escolha das configurações $q \in C_{free}$ que representarão os nós do grafo, produzindo um grafo que, probabilisticamente, representa todo o C_{free} [86]. Esses métodos, chamados qualitativamente de mapas de rotas probabilísticos ou amostrados, têm como seus maiores representantes o *PRM* (do inglês *probabilistic road map*) [87] e o *RRT* (do inglês *rapidly-exploring random trees*) [88].

Existem ainda outras técnicas importantes para a construção do mapa de rotas como

o método da silhueta [31], a rede *freeway* [89] e a rede de sub-objetivos [90], além de extensões das técnicas citadas como o grafo de visibilidade reduzida [91], o grafo tangente (*T-graph*) [92] e o diagrama de Voronoi para ambientes de alta complexidade [93].

Os algoritmos de busca

Uma vez construído o grafo que representa a conectividade das diferentes regiões do C_{free} , o problema básico de planejamento se resume a uma busca por um caminho que conecte o ponto de partida, q_{init} , e o ponto de destino do robô, q_{goal} , através das arestas (rotas) do grafo resultante. Quando os pontos de interesse, q_{init} e q_{goal} , não fazem parte da estrutura do grafo, estes são adicionados a ele como novos nós e conectados ao grafo através de uma ou mais novas arestas.

Existem diferentes algoritmos de busca explícita que podem ser aplicados aos grafos obtidos durante a construção do mapa de rotas. Na verdade, uma vez obtido o grafo com as características do problema a ser resolvido, a técnica que o originou não é de grande importância para os algoritmos de busca, podendo estes serem aplicados sem dificuldade.

Cada algoritmo tem suas particularidades que refletem tanto na velocidade de convergência quanto no caminho final obtido, alguns podendo, inclusive, conferir ao resultado final características de sub-otimalidade ou mesmo de otimalidade para algum critério específico. Estes algoritmos podem ser exatos (ao menos em sua ideia original), como o Breadth-first [36], o Depth-first [37] e o algoritmo de Dijkstra [38], ou fazer uso de algum tipo de aproximação (heurística), como é o caso do Best-first [39], do A* (A-estrela) [40, 41] e do D* (D-estrela) [42], bastante explorados em robótica. Uma visão mais detalhada destes algoritmos de busca pode ser encontrada em [3] e suas referências.

3.3.2 Decomposição em células

Os métodos baseados em decomposição do mapa em células, assim como os métodos baseados em mapa de rotas, têm como princípio básico a criação de um grafo não-direcionado que capture a conectividade entre as diferentes regiões navegáveis (mapeadas no C_{free}) do ambiente de interesse. A grande diferença entre esses métodos e aqueles apresentados na Seção 3.3.1 está na forma de criação do grafo. Enquanto que nos mapas de rotas é dada maior ênfase aos caminhos (arestas) que conectam duas configurações (nós) distintas do grafo, na decomposição em células a ênfase é dada aos nós do grafo que, por sua vez, representam regiões inteiras (células) do espaço de configurações, fazendo com que as arestas que conectam um nó a outro sejam definidas trivialmente por uma conexão direta entre células vizinhas.

Os métodos de decomposição em células

Apesar de gerar uma representação discretizada do ambiente, uma vez que este é particionado em um conjunto finito de células, os métodos de decomposição em células podem ser implementados de modo a representar o espaço de configurações em sua totalidade. Nesses casos, o método é classificado como um método de decomposição exata.

Na decomposição exata, a representação matemática do contorno dos obstáculos é utilizada como parte das equações que definem as células próximas a eles. O restante do equacionamento, ou seja, a definição das regiões de vizinhança entre células, é feito para garantir que a conexão entre duas células vizinhas seja sempre livre de obstáculos, como mostrado no exemplo da Figura 3.3.

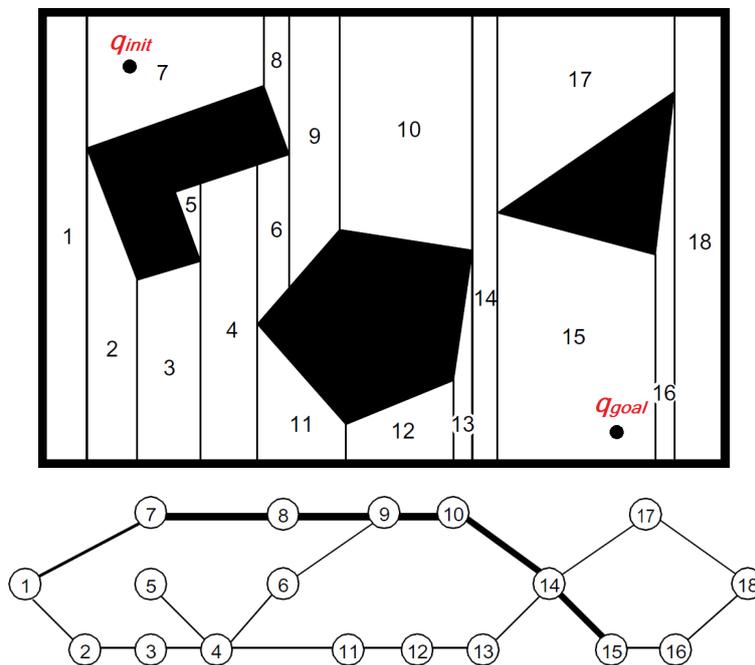


Figura 3.3: Figura editada de [3]: Exemplo de decomposição exata juntamente com o grafo resultante.

Para ambientes poligonais como o da Figura 3.3, o processo de decomposição exata apresentado é capaz de representar o ambiente por completo utilizando um número finito de células, o que é uma grande vantagem desse método. No entanto, o número de células aumenta juntamente com a densidade de obstáculos no ambiente, tornando esse método mais aplicável para ambientes esparsos e de difícil aplicação para ambientes densos. Um exemplo clássico de utilização de decomposição exata é apresentado em [94].

Apesar de representar completamente o ambiente, a decomposição exata pode ser bastante complexa, o que torna essas técnicas pouco atrativas, restringindo-as a serem utilizadas apenas quando uma representação fiel do ambiente é estritamente necessária. Quando uma representação exata do ambiente não é essencial, uma representação aproxi-

mada pode conferir vantagens ao sistema de planejamento que justifiquem a sua utilização. Essas técnicas são classificadas como métodos de decomposição aproximada.

Na decomposição aproximada, as células são, normalmente, definidas independentemente da forma, posição e orientação dos obstáculos no ambiente. Essa característica da decomposição aproximada faz com que a complexidade dessa representação seja muito pequena, quase que trivial, o que faz dela uma das técnicas mais populares na área de planejamento de movimento para robôs móveis [3].

O método de decomposição aproximada mais popular na área de planejamento aplicado à robótica é, sem dúvida, a grade (*grid*) regular. Nesse método, o ambiente é particionado previamente em células regulares (de mesmo tamanho e forma), independentemente dos obstáculos existentes no mapa. Feito o particionamento, é então verificado, para cada célula, se existe um obstáculo dentro dela. As células que tiverem parte de um obstáculo em seu interior são consideradas completamente ocupadas. As células não ocupadas formam a região navegável do ambiente, C_{free} . Esse processo é ilustrado para uma grade regular de células quadradas na Figura 3.4.

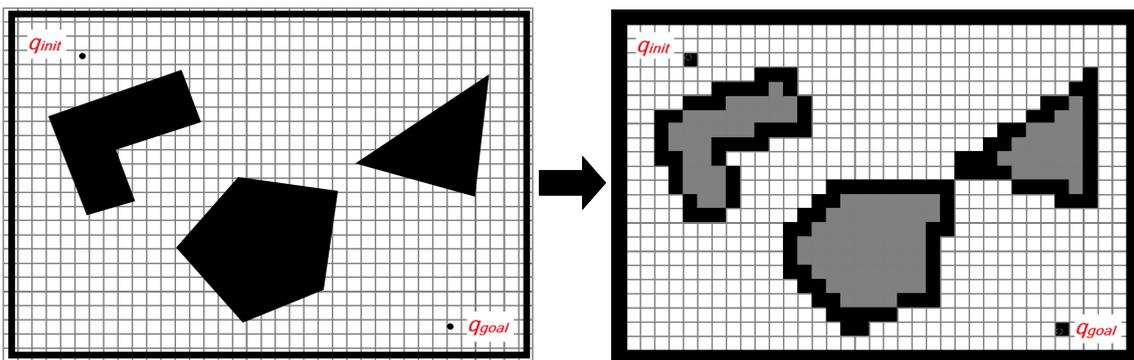


Figura 3.4: Figura editada de [3]: Exemplo de decomposição aproximada utilizando grade regular.

Uma vez definida a ocupação ou não de cada célula da grade, é preciso estruturar o grafo resultante dessa decomposição. Assim como na decomposição exata, cada célula navegável é um nó no grafo e as arestas que conectam esses nós são definidas de forma trivial entre duas células vizinhas, o que evidencia a simplicidade do método apresentado. Um exemplo de utilização de decomposição aproximada é apresentado em [95].

Apesar de toda a simplicidade associada à decomposição aproximada, esses métodos são incapazes de representar o ambiente por completo, ficando restritos a uma aproximação deste. Na maioria dos casos, essa aproximação é suficiente para representar o mapa de forma satisfatória. No entanto, existem casos onde o ambiente possui passagens estreitas que, a depender do tamanho da célula, podem desaparecer na grade resultante, como acontece no exemplo ilustrado na Figura 3.4.

Uma alternativa intermediária entre a decomposição exata e a decomposição aproxi-

mada regular é a chamada decomposição aproximada irregular. Nessas técnicas, o tamanho da célula é adaptativo para garantir uma melhor representação do ambiente e a existência de passagens estreitas, gerando células de menor tamanho em regiões mais próximas dos obstáculos. Essas técnicas têm a vantagem de gerar grafos com uma boa representatividade do ambiente, utilizando um menor número de células, quando comparada com a decomposição aproximada regular. Entre as técnicas de decomposição aproximada irregular, a de maior destaque é a chamada *Quadtree* [96], ilustrada na Figura 3.5.

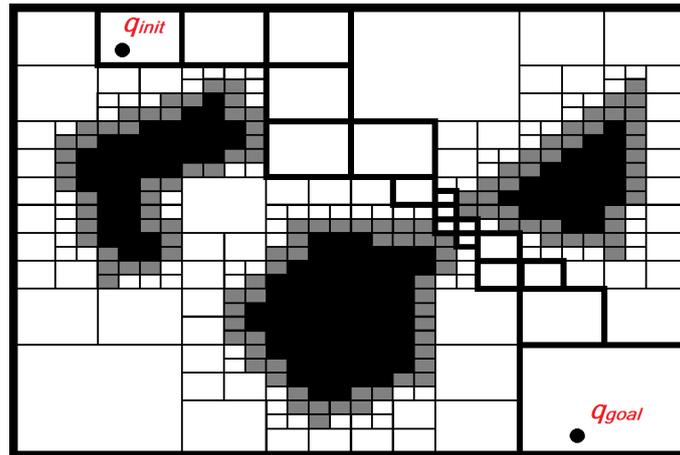


Figura 3.5: Figura editada de [3]: Exemplo de decomposição aproximada irregular - *Quad-tree*.

Os algoritmos de busca

Independente da técnica de decomposição de célula utilizada para construir o grafo, o caminho entre as duas configurações de interesse, q_{init} e q_{goal} , pode ser encontrado através dos mesmos algoritmos de busca utilizados para os mapas de rotas, mencionados na Seção 3.3.1 e apresentados de forma mais detalhada em [3] e suas referências.

3.3.3 Campos potenciais

Os métodos baseados em campos potenciais, diferentemente dos métodos apresentados nas seções 3.3.1 e 3.3.2, não utilizam algoritmos de busca explícita. Ao invés disso, é gerado um potencial artificial, $U(q)$, para cada uma das possíveis configurações, q , do robô no ambiente. Esse potencial tem por objetivo atrair o robô para a configuração de destino, q_{goal} , gerando uma trajetória através de configurações livres de obstáculos, ou seja, $q \in C_{free}$.

As primeiras aplicações de campos potenciais em robótica que se tem conhecimento foram reportadas em relatórios técnicos em 1978 [97] e em conferências locais em 1980 [80] pelo pesquisador Oussama Khatib. No entanto, a técnica de campos potenciais em

robótica só ganhou notoriedade internacional em 1986 pelo trabalho que é tido como o precursor dessas técnicas [43]. Paralelamente aos trabalhos de Khatib, outros autores também propuseram técnicas similares de forma independente tanto em robótica [98], como em outras áreas como controle de impedância [99] e realimentação sensorial [100].

Em arquiteturas de navegação, originalmente, as técnicas de campos potenciais foram utilizadas para desvio de obstáculos em arquiteturas reativas, ou seja, como técnicas de planejamento local [43]. Com o passar do tempo, diversas variações do método básico foram propostas para contornar o problema dos mínimos locais [45, 47, 101], tornando a aplicação dessas técnicas atrativas também para o planejamento global [102].

No planejamento por campos potenciais, um potencial $U(q)$ é responsável por guiar os movimentos do robô no ambiente. Para tanto, as ações de controle recebidas pelo robô são geradas a partir de uma força $F(q)$ que segue o gradiente negativo do campo potencial, ou seja:

$$F(q) = -\nabla U(q). \quad (3.6)$$

Por sua vez, o campo $U(q)$ é definido para toda configuração $q \in C_{free}$, por meio da soma de dois outros potenciais: um atrativo, $U_{atr}(q)$, e um repulsivo $U_{rep}(q)$ [43]. O potencial atrativo é idealizado de modo a conduzir o robô até o seu destino, q_{goal} , e o potencial repulsivo é modelado para afastar o robô dos obstáculos, C_{obs} . Um exemplo da aplicação dessa técnica de planejamento é apresentado na Figura 3.6.

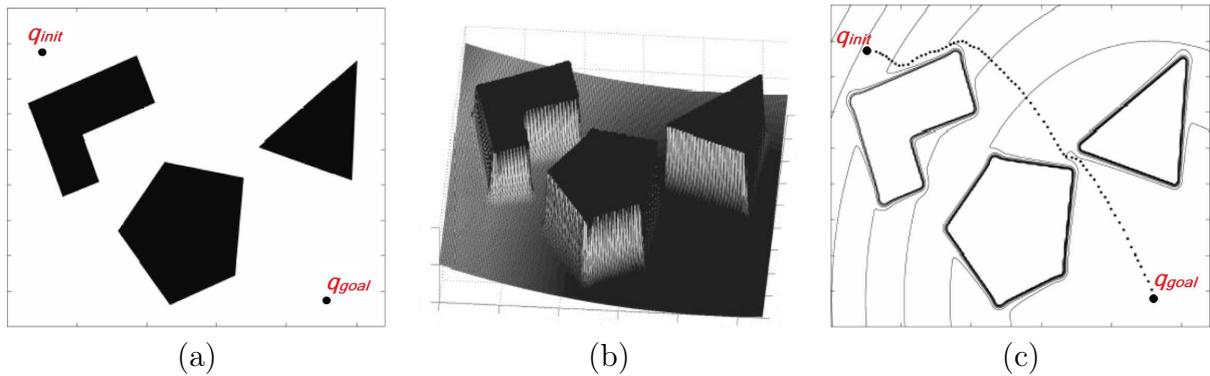


Figura 3.6: Exemplo de trajetória gerada por campo potencial (figura editada de [3]). (a) Problema inicial. (b) Campo potencial gerado: $U(q) = U_{atr}(q) + U_{rep}(q)$. (c) Trajetória obtida pelo método do gradiente descendente.

Atualmente, as pesquisas relacionadas a planejamento utilizando campos potenciais tem seu maior foco na solução dos problemas de mínimos locais. Esse problema vem sendo abordado com diferentes metodologias que vão desde técnicas para escapar de mínimos locais [44, 45] a técnicas para evitar [4, 47, 48] ou minimizar [46] o seu aparecimento.

Dentre as técnicas nas quais são propostas a idealização de campos potenciais livres de mínimos locais, destacam-se as técnicas baseadas em funções harmônicas, proposta inicialmente por Connolly em 1990 [4]. Essas técnicas, por serem de extrema importância

para este trabalho, serão melhor detalhadas no Capítulo 4.

3.4 Classificações atuais ou baseadas em características antagônicas

A classificação apresentada na Seção 3.3, apesar de adequada à época de sua proposição e ainda bastante utilizada, não é suficiente para generalizar e qualificar as diferentes técnicas de planejamento existentes na atualidade.

Vários exemplos atuais mostram que as três diferentes escolas apresentadas por Latombe se interrelacionam atualmente em diversos trabalhos para solucionar o problema de planejamento de movimento. Em [103] a técnica de campos potenciais é utilizada para polarizar a construção probabilística de um mapa de rotas. Já em [104–106], o *PRM* (um tipo de mapa de rotas) é utilizado juntamente com funções harmônicas (um tipo de campo potencial) para planejar o movimento de um robô.

Além disso, existem outros métodos que não se encaixam em nenhum dos grandes grupos apresentados na Seção 3.3 como os métodos [107, 108], baseados na teoria de sistemas a eventos discretos [109] e em medida de linguagem μ [110].

A inovação dos métodos utilizados nas técnicas mais recentes para solucionar o problema de planejamento de movimento, associada à impossibilidade de generalização qualitativa da taxonomia clássica, motivaram o desenvolvimento natural de novas classificações qualitativas para agrupar as técnicas de planejamento.

Para possibilitar uma maior abrangência, as novas classificações apresentadas definem, em sua maioria, duas classes opostas, como a ideia de separação em métodos de busca explícita (busca em grafos) e "busca" implícita [3], ou a classificação em métodos combinatoriais (exatos) e baseados em amostras (aproximados) [8].

Essa característica das novas taxonomias é um recurso instintivo na direção da obtenção da máxima abrangência, uma vez que não pertencer a uma classe normalmente ocasiona pertinência na classe antagônica.

As classificações, ainda que implícitas, das técnicas de planejamento de movimento que apresentam as características mencionadas são definidas neste trabalho como *classificações atuais* ou *classificações baseadas em características antagônicas* e suas representantes mais relevantes encontradas na bibliografia são apresentadas a seguir.

3.4.1 Local \times Global

Planejamento global é o planejamento que utiliza informações sobre todas as características conhecidas do ambiente para definir o caminho a ser executado pelo robô. Planejamento local utiliza apenas informações das regiões próximas ao robô, fornecidas normalmente por sensores de distância à bordo do robô.

Quando uma técnica de planejamento considera todas as informações disponíveis sobre o ambiente, mesmo que essas sejam incompletas, essa técnica é também de planejamento global, uma vez que utiliza todas as informações disponíveis sobre o mapa para determinar a trajetória.

A apresentação dessa característica (local ou global) como uma classificação atual tem por motivação a visão antagônica de suas classes. No entanto, essa classificação representa uma das características mais antigas dos métodos de planejamento, sendo uma nomenclatura utilizada desde 1991 [10].

3.4.2 Busca explícita \times Busca implícita

Essa classificação (busca explícita ou implícita) é uma das visões atuais que seguem a linha apresentada na taxonomia clássica. Ela pode ser observada em [3], onde a mesma é apresentada sutilmente utilizando outra terminologia, aqui generalizada. Em [3], as técnicas de planejamento são separadas em dois grupos: busca em grafos (representados aqui como métodos de busca explícita) e campos potenciais (aqui representados como métodos de busca implícita ou sem busca).

O planejamento é dito de busca explícita quando explicitamente é feita uma busca, normalmente incremental, pelas possíveis sequências de configurações que levam o robô do seu estado inicial ao seu estado final. Os algoritmos de busca comumente encontrados em robótica são aqueles apresentados anteriormente na Seção 3.3.1. Por serem aplicados normalmente a grafos, esses métodos foram nomeados em [3] como métodos de busca em grafos.

O planejamento sem busca, chamado por alguns autores de métodos de busca implícita, é todo método que não utiliza algoritmos de busca explicitamente. A maioria dos exemplos dessa metodologia são exemplos de campos potenciais, o que motivou a nomenclatura utilizada por [3].

3.4.3 Exato (combinatório) \times Aproximado (baseado em amostras)

A separação das diferentes técnicas de planejamento em métodos exatos e métodos aproximados, apresentada por Steve M. LaValle em seu livro *Planning Algorithm* [8] e revisada recentemente em [9], é uma das classificações mais atuais e relevantes.

Uma das maiores motivações para a utilização dessa taxonomia é tornar possível a caracterização dos métodos como completos e não completos (ver Definição 7 mais adiante), além de levantar questões sobre versões relaxadas dessa característica tão importante do planejamento.

Os métodos exatos, também chamados de métodos combinatórios (*combinatorial planning*) em [8], são métodos que descrevem completamente o espaço de configurações do

robô, capturando todas as informações necessárias para realizar o planejamento. Um importante atributo dos métodos combinatórios é que somente através destes é possível desenvolver técnicas de planejamento ditas completas, cuja definição formal é apresentada a seguir.

Definição 7 *Planejamento completo:*

Um método de planejamento é dito completo se, para qualquer entrada, ele informa corretamente, em um tempo finito, a existência ou não de uma solução para o problema apresentado.

Mais formalmente, se para um tempo $t < \infty$, $\forall (q_{init}, q_{goal})$, um caminho τ dado por:

$$\tau : [0, 1] \rightarrow C_{free} \mid \tau(0) = q_{init} \text{ e } \tau(1) = q_{goal} \tag{3.7}$$

for encontrado sempre que esse existir, ou for reportada a sua inexistência do contrário, então o planejamento é dito completo.

Apesar de completas, as técnicas combinatórias possuem, geralmente, um custo computacional elevado devido à complexidade necessária à representação exata do espaço de configurações, o que as torna muitas vezes impraticáveis.

A classe antagônica ao planejamento combinatorial é o planejamento aproximado, ou planejamento baseado em amostras (*sampling-based planning*) [8]. Nessa classe, as técnicas de planejamento utilizam uma representação aproximada do espaço de configurações, o que permite uma redução do custo computacional associado, tornando essas técnicas mais aplicáveis na prática.

Existem duas formas para realizar a construção do espaço de configurações aproximado: amostragem determinística e amostragem probabilística.

Na amostragem determinística, o espaço de configurações é, normalmente, discretizado de forma regular e cada uma das regiões resultantes recebe um rótulo de região ocupada (C_{obs}) ou região livre (C_{free}). Exemplos bastante conhecidos desses métodos são as técnicas que utilizam algum tipo de decomposição aproximada em células (ver Seção 3.3.2).

Na amostragem probabilística, o espaço de configurações é amostrado aleatoriamente, normalmente utilizando uma distribuição de probabilidade polarizada, e os pontos amostrados são incrementalmente conectados uns aos outros sempre que possível. O resultado é, normalmente, um grafo probabilístico que representa, aproximadamente, o C_{free} . São exemplos clássicos desses métodos o *PRM* [87] e o *RRT* [88].

3.4.4 Formas relaxadas de completude

Nos métodos baseados em amostras, por estes utilizarem de uma aproximação do espaço de configurações, não é possível garantir a sua convergência para quaisquer re-

apresentações do ambiente em quaisquer condições iniciais (q_{init}, q_{goal}), ou seja, métodos aproximados não podem ser completos (Definição 7).

No entanto, por serem esses métodos de grande utilidade prática, é comum utilizar formas mais relaxadas de completude (do inglês *completeness*) para avaliar a sua capacidade de generalização.

Métodos completos por resolução

Em se tratando de métodos baseados em amostras determinísticas, estes podem ser ditos completos por resolução (*resolution complete*) se, para alguma amostragem, ainda que muito densa, for possível encontrar uma solução em um tempo finito.

Métodos completos por probabilidade (probabilisticamente completos)

Para o caso de métodos baseados em amostras probabilísticas, estes são ditos métodos completos por probabilidade (*probabilistic complete*) se, quando a quantidade de pontos amostrados tende a infinito, a probabilidade da solução ser encontrada tende a um.

3.4.5 Utilização da classificação baseada em características antagônicas

Nas seções 3.4.1, 3.4.2 e 3.4.3 foram apresentadas as três principais representantes das chamadas classificações atuais. Outros muitos conjuntos de características antagônicas podem também ser utilizados da mesma forma.

A ideia por trás das classes antagônicas é gerar uma classificação qualitativa dos métodos de planejamento de forma mais correta, possibilitando o agrupamento de técnicas semelhantes e, por consequência, uma comparação mais justa entre elas.

Apesar de representarem características isoladas e independentes umas das outras, as classificações atuais devem ser utilizadas em conjunto para somente então possibilitarem o reconhecimento da classe geral à qual um método pertence. Por exemplo, o trabalho apresentado em [4] é um método de planejamento aproximado (determinístico), global e sem busca explícita, já a técnica desenvolvida em [88] é classificada como aproximada (probabilística), global e com busca explícita.

3.5 Extensões do problema básico de planejamento

O problema básico de planejamento, ou planejamento de caminho, é um problema já bem estabelecido e razoavelmente bem resolvido [14]. No entanto, as demandas atuais na área de robótica móvel apontam para novos desafios no desenvolvimento de sistemas autônomos que não podem ser contemplados pela formulação do problema básico de

planejamento, como apresentada na Seção 3.2. As deficiências da formulação 1 tornam-se evidentes ao considerar a utilização do caminho resultante em aplicações práticas dentro da robótica móvel. Na Figura 3.7 é apresentada a via formal a ser percorrida para a utilização do caminho, τ , produzido por um planejador que soluciona o problema de planejamento de caminho.

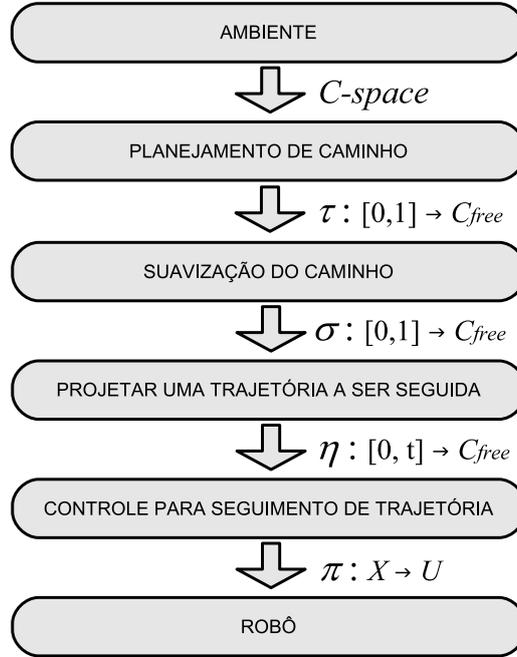


Figura 3.7: Via a ser percorrida para a utilização do caminho τ (solução da formulação 1).

A primeira etapa necessária, e comum a todas as diferentes estratégias e formulações de planejamento, é a abstração do ambiente real, normalmente representada na forma de espaço de configurações, o $C\text{-space}$. Em seguida, um algoritmo de planejamento de caminho é aplicado para gerar um caminho livre de obstáculos, ou seja:

$$\tau : [0, 1] \rightarrow C_{free} \mid \tau(0) = q_{init} \text{ e } \tau(1) = q_{goal}. \quad (3.8)$$

No entanto, o caminho produzido τ , na maioria das vezes, possui descontinuidades ou mudanças abruptas de direção, características que não podem ser seguidas por robôs com restrições cinemáticas, como robôs tipo carro e tração diferencial. Nesses casos, o próximo passo é suavizar o caminho τ para satisfazer as restrições cinemáticas impostas pelo robô.

O caminho suavizado σ , apesar de cinematicamente exequível pelo robô, é ainda apenas uma informação sobre que posições este deve seguir para alcançar o seu destino q_{goal} . A partir do caminho σ , pode-se utilizar diretamente uma técnica de controle para seguimento de caminho para levar o robô a concluir sua tarefa de navegação. Alternativamente, para ser aplicável na prática, o caminho σ deve ser reparametrizado levando em consideração

as características dinâmicas do robô. O resultado desse processo é o mapeamento do caminho σ na trajetória η , que especifica não só posições mas também as características temporais durante o movimento como velocidade e aceleração.

Tendo sido consideradas as características cinemáticas e dinâmicas do robô na trajetória η a ser executada, resta como última etapa o desenvolvimento de um sistema de controle capaz de fazer com que o robô consiga seguir a trajetória projetada da melhor forma possível, o que, normalmente, resulta em um sistema realimentado que acaba, por fim, mapeando cada elemento do espaço de estados do robô, $x \in X$, em um elemento no espaço de ações de controle admissíveis, $u \in U$. Essa etapa é necessária pois, na prática, o robô não consegue executar fielmente os comandos de velocidade em η devido a diversos fatores como deslizamento das rodas, distúrbios externos, fator de carga, incertezas das medidas, entre outros.

Um grave problema da metodologia apresentada na Figura 3.7 é que, além de ser um caminho muito extenso a ser seguido, a fragmentação em etapas fixas imposta pela abordagem em questão pode fazer com que, devido a escolhas erradas nas etapas antecessoras, o estabelecimento da política de controle realimentado não consiga garantir a execução da tarefa [14]. Esses problemas motivaram a formulação de diferentes extensões do problema básico de planejamento. Essas extensões têm por objetivo abordar os problemas de planejamento de forma mais abrangente, possibilitando a redução da fragmentação em etapas e tornando os sistemas desenvolvidos mais robustos. As principais extensões do problema básico de planejamento encontradas na bibliografia são brevemente apresentadas nas seções a seguir.

3.5.1 Planejamento de trajetória

Apesar de serem usados por parte da comunidade científica como sinônimos, os termos planejamento de caminho e planejamento de trajetória referem-se a diferentes tipos de planejamento do movimento. A principal diferença entre eles está no resultado final do planejamento. Enquanto que no problema básico, apresentado na formulação 1, o resultado é dado na forma de uma sequência de posições, no planejamento de trajetória este resultado é dado na forma de posições e velocidades associadas a elas [8], produzindo assim um resultado mais próximo da aplicação real.

O planejamento de trajetória não tem, necessariamente, uma descrição precisa da dinâmica e da cinemática do robô, mas já as leva em consideração na elaboração da trajetória. Esse tipo de planejamento é um primeiro movimento no sentido de considerar as características dinâmicas e cinemáticas diretamente na construção do plano e não como etapas disjuntas. O resultado disso é um caminho já suavizado acompanhado pelas velocidades a serem executadas pelo robô para segui-lo, tornando a sua aplicação mais direta, se comparado ao planejamento de caminho.

3.5.2 Planejamento com restrições diferenciais

No planejamento de caminho, a única restrição ao movimento do robô que deve ser obrigatoriamente considerada é a restrição imposta pelos obstáculos ao movimento do robô. No entanto, em aplicação reais, a maioria dos robôs possuem outros tipos de restrições causadas, por exemplo, por particularidades da aplicação ou características intrínsecas dos robôs. Essas restrições são equacionadas em função da posição, velocidade e aceleração do robô, independentemente dos obstáculos, e são chamadas de restrições diferenciais.

O planejamento com restrições diferenciais as considera explicitamente na elaboração do plano e não como uma etapa posterior de adaptação do mesmo. Os principais tipos de restrições diferenciais são apresentados a seguir.

Restrições cinemáticas

As restrições cinemáticas são restrições que impõem limitações ao movimento do robô, podendo influenciar na controlabilidade e na dimensionalidade do problema considerado.

Existem dois tipos básicos de restrições cinemáticas: restrições *holonômicas* e *não-holonômicas*. Em robótica, a holonomicidade refere-se à relação entre a controlabilidade e o número total de graus de liberdade de um robô.

Uma restrição holonômica é uma restrição de igualdade que pode ser escrita em função das variáveis que definem completamente a configuração de um robô no ambiente sem, no entanto, levar em consideração a sua velocidade. Cada equação de restrição desse tipo pode ser utilizada para diminuir a dimensão do espaço de configurações da tarefa em uma unidade, fazendo com que o problema, do ponto de vista cinemático, torne-se mais simples e possa ser resolvido com o planejamento de caminho tradicional.

Para entender o significado físico de uma restrição holonômica, considere um robô holonômico constituído por um único corpo rígido navegando no \mathbb{R}^3 . Nesse caso, a cardinalidade do espaço de configurações é seis, composta por três direções de translação linearmente independentes e três ângulos de rotação também independentes. Considere agora que esse robô deve transportar um copo completamente cheio de água, sem derramá-la. Desconsiderando outras características práticas do problema, essa tarefa impõe restrições à rotação do robô, que fica impossibilitado de girar em torno de, no mínimo, dois dos ângulos que compõe o espaço de configurações. Essas restrições podem ser escritas na forma de duas equações de restrições holonômicas que podem ser utilizadas para reduzir a dimensão do problema de planejamento em duas unidades, reduzindo, de certa forma, a complexidade do problema de planejamento, mantendo a aplicabilidade da maioria dos algoritmos tradicionais.

Um outro tipo de restrição cinemática é a restrição não-holonômica, também conhecida como restrição diferencial de primeira ordem. Essa é uma restrição de igualdade (ou

inequ沿海) não integrável, envolvendo as variáveis do espaço de configurações e suas derivadas (velocidades). Restrições desse tipo não reduzem a dimensão do espaço de configurações do robô, mas reduzem a dimensão do espaço de possíveis direções admissíveis em uma dada configuração [10].

Considere, como exemplo, um robô com tração diferencial navegando em um plano (\mathbb{R}^2), sem deslizamento das rodas. Em um ambiente sem obstáculos, esse robô pode assumir, virtualmente, qualquer posição no espaço de configurações do ambiente, cuja cardinalidade é três (x , y e θ). Logo, não há restrições holonômicas associadas ao problema de navegação desse robô. No entanto, um robô com tração diferencial não pode, instantaneamente, assumir quaisquer direções de movimento. Na verdade, instantaneamente, um robô com esse tipo de tração pode mover-se apenas transladando na direção do seu vetor de orientação ou girando em torno do seu próprio eixo, nunca movendo-se na direção perpendicular à sua orientação. Essa restrição de movimento é uma restrição não-holonômica.

Restrições não-holonômicas restringem a geometria dos possíveis caminhos que conectam duas configurações, tornando-se um atributo do problema de planejamento que eleva a sua complexidade, o que justifica a atenção recebida por essa área dentro dos diferentes problemas de planejamento. O problema de planejamento que leva em consideração na sua formulação restrições não holonômicas é chamado de *Planejamento Não-holonômico*, termo introduzido por Laumond em 1986 [111] e mais detalhado posteriormente em [112].

Outra interpretação possível para a holonomicidade pode ser dada em função no número de graus de liberdade da tarefa. Se o número de graus de liberdade controláveis do robô for igual ao número de graus de liberdade da tarefa como um todo (possui apenas restrições holonômicas ou não possui restrições), então o robô é dito holonômico. Se o número de graus de liberdade controláveis do robô for menor que o número de graus de liberdade da tarefa (possui pelo menos uma restrição não-holonômica), então o robô é dito não-holonômico e, por fim, se essa relação for inversa, o robô é dito redundante.

Restrições dinâmicas

Restrições dinâmicas são restrições diferenciais de segunda ordem (ou maior) que podem ser interpretadas como restrições de aceleração. Essas restrições criam uma dependência entre cada estado do sistema (robô), x , e as ações admissíveis nesse estado u , em que x é composto, no mínimo, por variáveis de posição e velocidade. O problema de planejamento que considera explicitamente restrições de segunda ordem (ou maior) em sua formulação é denominado de *Planejamento Kinodinâmico* [113].

O Planejamento Kinodinâmico é normalmente executado não no espaço de configurações, mas no espaço de estados do robô, por este considerar diretamente as variáveis de velocidade em sua construção. Esse espaço tem naturalmente o dobro da dimensão do espaço de configurações do robô, o que representa um desafio a mais para os algoritmos

de planejamento.

Vale salientar que um problema de Planejamento Kinodinâmico não é necessariamente uma forma de Planejamento Não-holonômico. Para tanto, é necessário que o problema possua restrições não-integráveis e de, pelo menos, segunda ordem, o que nem sempre é verdade [8].

3.5.3 Planejamento Realimentado (*Feedback Motion Planning*)

No diagrama apresentado na Figura 3.7, a realimentação é utilizada apenas para rastrear a trajetória planejada (última etapa do diagrama), fazendo com que o robô execute da melhor forma possível o plano determinado. Essa etapa é necessária em virtude das imperfeições inerentes ao processo de modelagem do comportamento dinâmico e cinemático do robô, cujo modelo é utilizado para gerar a trajetória a ser executada. Nesse contexto surge a seguinte questão: se a meta é atingir uma configuração de destino, q_{goal} , por que se preocupar com o problema de rastreamento de uma trajetória produzida a partir de modelos imperfeitos? A resposta a essa pergunta motivou o desenvolvimento de uma nova noção de planejamento, o *Planejamento Realimentado (Feedback Motion Planning)*.

Ao contrário das técnicas clássicas, nas quais o problema de planejamento é considerado em malha aberta, no Planejamento Realimentado a ideia de malha de realimentação é incorporada ao problema de planejamento, ao invés de ser considerada como uma etapa *a posteriori*. Nesse caso, o resultado do planejamento não é dado nem na forma de um caminho ($\tau : [0, 1] \rightarrow C_{free}$), nem na forma de uma trajetória ($\eta : [0, t] \rightarrow C_{free}$), mas sim na forma de um plano realimentado (ou um mapeamento) que associe a cada posição no espaço de configurações uma ação a ser executada pelo robô de modo a cumprir a tarefa especificada, ou seja, um plano do tipo $\pi : C_{free} \rightarrow U$, ou do tipo $\pi : X_{free} \rightarrow U$, quando a dinâmica é considerada. Esse método é uma forma de considerar, implicitamente, as incertezas do modelo na elaboração do plano de ação do robô.

Em linhas gerais, um plano que é solução para problema de Planejamento Realimentado é dado na forma de um campo vetorial sobre o espaço de configurações (ou sobre o espaço de estados) cujos vetores representam a ação $u \in U$ a ser executada pelo robô naquela configuração (ou estado). Assim sendo, uma função potencial pode ser utilizada juntamente com um operador local, como os métodos baseados em gradiente descendente, para solucionar esse tipo de problema de planejamento.

No tocante à utilização de funções potenciais para solucionar o problema de planejamento em questão, vale ressaltar que nem toda função potencial é capaz de solucionar esse problema de forma eficiente ou mesmo útil. Para uma função potencial $\phi(q)$ com $q \in C_{space}$ ser uma solução para o problema de Planejamento Realimentado esta deve possuir algumas características:

1. $\phi(q) = 0$ para todo $q = q_{goal}$;

2. $\phi(q) = \infty$ se, e somente se, q_{goal} não é alcançável a partir de q ;
3. Para toda configuração $q \in C$ q_{goal} , o operador local leva a uma nova configuração q' na qual $\phi(q') < \phi(q)$.

As funções potenciais que possuem essas características são chamadas de *Funções de Navegação (Navigation Function)* [47, 101, 114].

3.5.4 Planejamento considerando incertezas

Outro problema importante a respeito do procedimento básico apresentado na Figura 3.7 é a fragmentação em etapas dos procedimentos necessários à implementação prática do caminho projetado. Esse procedimento tem como consequência um crescimento artificial da quantidade de informação necessária à implementação de um plano, criando uma demanda, ou mesmo uma dependência, por sensores de altíssima fidelidade e por um conhecimento *a priori* do ambiente com alto nível de detalhamento [14].

Essas questões motivaram a formulação de um problema de planejamento que considere as incertezas dos modelos associados. O objetivo principal das técnicas de planejamento utilizadas nesses casos é reduzir a complexidade do sistema como um todo utilizando apenas a quantidade de informação necessária para a realização da tarefa, considerando as incertezas inerentes à observação nesse processo. Em outras palavras, o plano resultante não mais é do tipo $\pi : X_{free} \rightarrow U$ e sim do tipo $\pi : I \rightarrow U$, em que I é o espaço de informação, um espaço de estados baseado na informação sensorial, englobando todas as peculiaridades dos processos de medição e estimação. Para uma abordagem mais aprofundada sobre o tema, consulte [8, 33] e suas referências.

3.5.5 Outras extensões

Além das formulações apresentadas até o momento nessa seção como extensões do problema básico de planejamento, várias outras características, normalmente associadas a aplicações reais, vêm sendo tratadas como extensões do problema básico de planejamento. As ideias centrais das principais extensões do problema básico de planejamento encontradas na bibliografia de planejamento de movimento são apresentadas a seguir.

Planejamento exploratório

No problema de planejamento exploratório o objetivo não é atingir um ponto de destino e sim explorar o mapa por completo, como mostrado em [115]. Esses métodos são, normalmente, idealizados de modo a garantir a exploração de todo o ambiente, no menor tempo possível e otimizando os recursos disponíveis, utilizados normalmente em problemas de SLAM (*Simultaneous Localization and Mapping*) em associação com técnicas de localização e mapeamento [58, 59].

Planejamento com múltiplos robôs

Ao longo das últimas décadas, Sistemas Multi-Robôs (SMR) têm sido aplicados em diferentes áreas da robótica móvel com o intuito de aumentar a eficiência e a robustez na execução das tarefas a serem desempenhadas por eles [116]. Nesse contexto, o planejamento de movimento deve considerar os diversos robôs e a interação entre eles na elaboração dos planos individuais. Para tanto, a modelagem e a definição das estratégias de coordenação devem ser consideradas nesses planos.

Várias abordagens podem ser utilizadas na solução desse problema a depender da tarefa a ser executada. A centralização ou não do planejamento e da coordenação, além da comunicação entre os diferentes elementos do sistema, representam desafios ainda não superados para a área de planejamento com múltiplos robôs [117].

Planejamento com regiões de diferentes navegabilidades

Nesse problema de planejamento, o ambiente não mais é caracterizado apenas em regiões trafegáveis (mapeadas no C_{free}) e não-trafegáveis (mapeadas no C_{obs}). Ao invés disso, as regiões trafegáveis possuem diferentes navegabilidades, ou seja, uma região oferece mais resistência que a outra à passagem do robô. Essas regiões são chamadas de regiões ponderadas (*weighted regions*) [118].

Diferentes situações levam a esse tipo de problema, a maioria delas relacionadas a ambientes externos, como ambientes com diferentes inclinações ou relevos, terrenos de diferentes tipos como areia, grama, mato alto, água (no caso de robôs híbridos), além de outras situações mais sutis como a ponderação de regiões de acordo com a proximidade ou a densidade dos obstáculos nela presentes.

Apesar de muito interessante e com muitas questões em aberto, esse problema de planejamento é ainda pouco explorado em robótica móvel, quando comparado com outras extensões do problema básico.

Planejamento em ambientes dinâmicos

O problema de planejamento em ambientes dinâmicos trata dos casos em que o ambiente não é estático, seja por este possuir objetos (ou pessoas) com dinâmica desconhecida (ou conhecida), ou por ser o mapa do ambiente não completamente conhecido *a priori*, o que ocasiona mudanças no mesmo a partir das informações adquiridas pelo sensoriamento do robô.

Os métodos de planejamento que se propõem a tratar destas questões costumam utilizar duas abordagens principais: dotar o sistema de capacidade de replanejamento ou desenvolver um planejamento adaptativo que modifica o plano iterativamente [79, 116].

Planejamento considerando robôs deformáveis

Para incluir a característica de deformação dos robôs em um problema de planejamento, o mesmo deve levar em consideração as possíveis mudanças na forma do robô e suas implicações na idealização do plano em questão. Apesar de ser mais amplamente considerado na parte da robótica associada a robôs manipuladores (uma vez que esses são formados pela união de vários corpos rígidos conectados por articulações), esse tipo de planejamento é também aplicável a robôs móveis como nos casos dos robôs dotados de algum tipo de reconfiguração cinemática controlável [8].

Planejamento ótimo

No problema de planejamento básico, o objetivo principal é encontrar um caminho que possibilite a execução da tarefa de modo eficiente. Com o passar do tempo, a complexidade das tarefas às quais os sistemas robóticos são submetidos tem crescido consideravelmente, e com ela, cresce também a demanda por sistemas de planejamento que não só garantam a execução da tarefa, mas que o façam maximizando (ou minimizando) algum critério específico de desempenho. Inspirados no termo proveniente da área de controle, esse problema de planejamento é chamado de planejamento ótimo.

Diferentes técnicas de otimização são incorporadas ao sistema de planejamento para possibilitar a otimização desses índices de desempenho. Em robótica móvel os principais índices utilizados têm relação com características físicas do problema como consumo de energia, tempo de execução e menor caminho [79].

Um dos principais desafios para atingir a otimalidade é o custo de processamento associado a essa tarefa. Muitas vezes, para possibilitar que o sistema desenvolvido seja aplicável na prática, é necessário utilizar critérios relaxados de otimalidade (sub-otimalidade), reduzindo assim a complexidade do problema.

Planejamento multiobjetivos

Como o próprio nome sugere, o planejamento multi-objetivos é a classe de problema de planejamento onde mais de um destino é considerado como aceitável para considerar que o robô cumpriu a tarefa especificada [8]. Esse problema pode ser encarado de duas formas. Na primeira, um plano específico independente é gerado para cada um dos destinos especificados, sendo os planos posteriormente avaliados por algum critério de desempenho e comparados para determinar o caminho a ser seguido pelo robô. Nessa abordagem o problema pode ser então tratado com um conjunto de planejamentos básicos. Na segunda forma, a técnica de planejamento deve considerar a influência simultânea dos múltiplos destinos nas possíveis configurações do robô e, a partir desse cenário, tomar a decisão sobre o melhor caminho a ser seguido pelo mesmo [8].

Capítulo 4

Planejamento baseado em funções harmônicas

No Capítulo 3 foram apresentadas várias técnicas de planejamento de movimento utilizadas em robótica móvel além de diferentes taxonomias e classificações qualitativas destas. Dentre elas, foram apresentadas características e peculiaridades das técnicas baseadas em campos potenciais, mais estritamente relacionadas com o trabalho proposto nesta tese de doutorado.

As técnicas baseadas em campos potenciais foram amplamente exploradas para navegação de robôs móveis a partir dos trabalhos precursores desenvolvidos por Khatib em seu doutorado e artigos posteriores e anteriores a este [43, 80, 97]. Uma ampla revisão bibliográfica sobre o tema permite observar que boa parte dos trabalhos desenvolvidos utilizando campos potenciais para planejamento têm seu foco atrelado a aplicações da técnica em problemas com características específicas ou, quando em trabalhos de cunho mais teórico (ou generalista), estes abordam, em sua maioria, o problema dos mínimos locais, “calcanhar de Aquiles” da técnica em questão.

O problema dos mínimos locais, como já explicado no Capítulo 3, tem sido abordado de três maneiras distintas, quais sejam:

- Técnicas que buscam escapar de mínimos locais;
- Métodos para evitar cair em mínimos locais ou minimizar a sua ocorrência;
- Técnicas voltadas ao desenvolvimento de campos potenciais livres de mínimos locais.

Destas, as que têm recebido menor atenção são aquelas voltadas para a construção de campos potenciais livres de mínimos locais. Isso se deve especialmente ao fato de que a obtenção de tal característica requer, normalmente, processamentos mais complexos e exaustivos do mapa do ambiente, o que muitas vezes torna a sua aplicabilidade limitada a ambientes mais simples, de dimensões reduzidas ou assumindo restrições às formas dos obstáculos nele contidos.

Das técnicas que se propõe a tratar do desenvolvimento de campos potenciais livres de mínimos locais, pode-se destacar aquelas baseadas nas chamadas funções harmônicas, que têm como precursor o trabalho de Christopher Connolly [4].

Função harmônica é toda função que soluciona a equação de Laplace que, por sua vez, é uma equação diferencial parcial (EDP) elíptica, ou seja, que envolve derivadas parciais em relação apenas a variáveis espaciais em detrimento das temporais [119]. Como consequência dessa característica, a solução de tais equações diferenciais dependem apenas das condições de contorno, podendo ser desconsideradas as condições iniciais, diferentemente das EDPs parabólicas e hiperbólicas.

Com base nas características apresentadas, é possível então concluir que a solução de uma EDP elíptica presta-se, na maioria das vezes, a descrever sistemas físicos em estado de equilíbrio, ou de regime permanente. Dessa forma, as ideias utilizadas nas técnicas de planejamento de movimento por campos potenciais inspiradas em [43] podem ser repetidas para campos potenciais harmônicos, com a vantagem que estes últimos são matematicamente livres de mínimos locais [52].

Nas próximas seções serão apresentadas as equações e características básicas dos campos potenciais harmônicos contínuos e discretos, necessárias ao entendimento da teoria de planejamento utilizando funções harmônicas, bem como uma ampla revisão bibliográfica contendo as principais contribuições encontradas desse tipo de planejamento para a navegação de robôs móveis.

4.1 Equação de Laplace e funções harmônicas

A equação de Laplace é um tipo de equação diferencial parcial elíptica que pode ser genericamente representada por:

$$\nabla^2 U(q) = 0, \quad \forall q \in \Omega, \quad (4.1)$$

em que $U(q)$ é a função harmônica, solução da equação de Laplace, Ω é a região em que a função harmônica é definida, q são as dimensões de Ω , todas invariantes no tempo, e o termo $\nabla^2 U(q)$ é denominado de Laplaciano de $U(q)$, dado por:

$$\nabla^2 U(q) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 U(q)}{\partial x_i^2}, \text{ com } q = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}. \quad (4.2)$$

No caso do planejamento de movimento de robôs móveis a rodas, desconsiderando inicialmente as especificidades dinâmico-cinemáticas do robô e considerando-o como um robô pontual, a região Ω é, normalmente, um espaço limitado de duas dimensões (x,y) . Assim, temos que q é definido pelas variáveis x e y e a Equação (4.1) pode ser reescrita

da seguinte forma:

$$\nabla^2 U(q) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad \forall q = (x, y) \in \Omega. \quad (4.3)$$

4.1.1 Propriedades das funções harmônicas

No que diz respeito ao desenvolvimento de sistemas de planejamento de movimento baseados em funções harmônicas, algumas características dessas funções são atrativas para esse ramo da robótica. As principais propriedades dessas funções são apresentadas a seguir:

1. Superposição. Considerando a linearidade da equação de Laplace temos que: se U_1 e U_2 são funções harmônicas, então qualquer combinação linear entre estas soluções é também uma solução da equação de Laplace [50, 52, 119].
2. Valor Médio. Se uma função bidimensional $U(x, y)$ definida em Ω for uma função harmônica, então, para qualquer círculo pertencente a Ω , a média dos potenciais nesse círculo é igual ao potencial no centro do círculo, independentemente do raio considerado [50, 52, 119]. Essa é uma propriedade necessária e suficiente para a definição de um potencial harmônico e é de extrema importância para a caracterização da ausência de mínimos locais no campo potencial.
3. Princípio do Mínimo e do Máximo (min-max) [50, 52], ou apenas Princípio do Máximo [51]. Sabendo que para qualquer região em um potencial harmônico vale a propriedade do valor médio, então não é matematicamente possível o surgimento de mínimos ou máximos locais (ou mesmo globais) dentro dessas regiões, ficando o aparecimento destes restritos às regiões de contorno ($\partial\Omega$) e aos pontos críticos inseridos no potencial.

Analisando as características apresentadas, é possível notar que as propriedades das funções harmônicas são garantidas apenas para regiões internas do potencial, ficando as regiões de contorno e os pontos críticos como casos a serem analisados em separado.

Na tarefa de planejamento de movimento, os pontos críticos induzidos internamente no potencial podem ser de dois tipos: a origem ou *source* (que representa um potencial de repulsão) e o destino ou *sink* (que representa um potencial de atração). Dessa forma, a superfície potencial harmônica resultante tende a gerar um gradiente que leva o robô a afastar-se da origem e aproximar-se do destino. Como nos demais pontos do potencial não existem mínimos ou máximos locais, a convergência do robô para o destino, ao seguir o gradiente produzido, é matematicamente garantida.

No tocante às regiões de contorno (no contexto do planejamento de movimento de robôs móveis) estas são utilizadas para delimitar o espaço navegável do robô bem como

para representar os diferentes obstáculos presentes no ambiente. Apesar de aparentemente serem pouco importantes para as regiões internas de U , as condições de contorno definem quase que individualmente as características e formas deste potencial, podendo gerar superfícies potenciais muito diferentes, como mostrado na Figura 1.2 apresentada na introdução deste trabalho. Na seção a seguir, serão apresentados e analisados os efeitos de diferentes condições de contorno no potencial harmônico resultante.

4.1.2 Condições de contorno

Diferentes condições de contorno foram desenvolvidas nas mais variadas áreas da física e matemática para modelar as características de um dado potencial de interesse. No caso específico da equação de Laplace, esses potenciais representam situações de equilíbrio (independentes do tempo), como um potencial gravitacional, eletrostático, de velocidade (no caso de mecânica dos fluidos) e de temperatura, quando esta se encontra em equilíbrio. A equação de Laplace (assim como outras EDPs), juntamente com a condição de contorno associada, formam o chamado problema de valor de contorno (PVC) [50, 119].

De forma geral, pode-se definir dois tipos principais de condições de contorno: a condição de Dirichlet e a condição de Neumann. As demais condições de contorno encontradas são, em sua maioria, combinações destas, como as condições atribuídas a Robin, Cauchy, Newton e Fourier.

Na condição de Dirichlet o potencial nas regiões de contorno, $\partial\Omega$, é definido por um valor constante, como mostrado em (4.4):

$$U(q) = K, \quad \text{com } K = \text{constante e } \forall q \in \partial\Omega. \quad (4.4)$$

Considerando que existe um ponto crítico induzindo um potencial constante em um ponto qualquer de Ω , então o potencial harmônico resultante, U , irá estabelecer um gradiente entre as regiões de contorno e o ponto crítico. Por essa característica, o gradiente nas regiões de contorno tendem a seguir na direção normal à superfície de $\partial\Omega$, como ilustrado na Figura 4.1

Analisando pelo ponto de vista do planejamento de movimento, o campo resultante para uma condição de contorno de Dirichlet tende a guiar o robô para o destino (ponto crítico), privilegiando o afastamento dos obstáculos (uma vez que gera um gradiente normal ao contorno destes), o que pode ser caracterizado como uma navegação mais segura mas que tem como resultado a obtenção de caminhos mais longos. Além disso, por buscar o afastamento em relação aos obstáculos, a condição de Dirichlet acaba por apresentar dificuldades em traçar caminhos por passagens estreitas.

No caso da condição de Neumann (mais especificamente a condição homogênea de Neumann, normalmente utilizada em robótica), o potencial em $\partial\Omega$ é definido de acordo

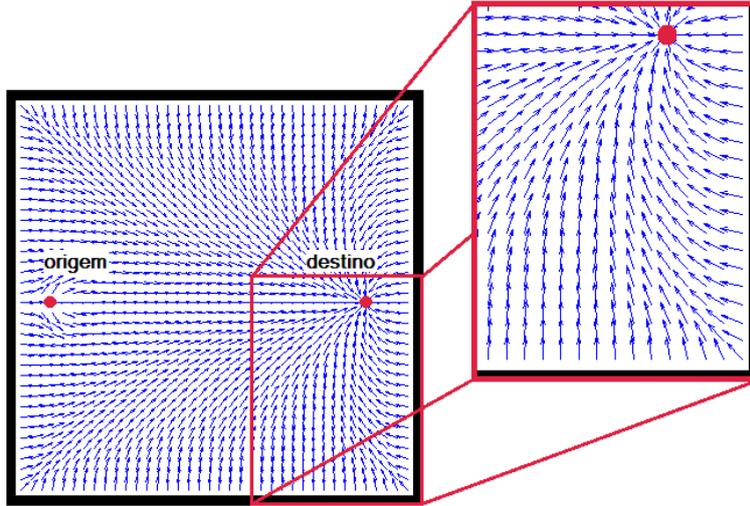


Figura 4.1: Demonstração das características do gradiente do potencial obtido utilizando a condição de Dirichlet.

com a Equação (4.5):

$$\frac{\partial U(q)}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \forall q \in \partial\Omega, \quad (4.5)$$

em que $\frac{\partial U(q)}{\partial \vec{n}}$ é a derivada normal de U , ou seja, a derivada direcional de U na direção perpendicular ao contorno. Nesse caso, o que é especificado não é exatamente o valor do potencial, e sim o valor da sua derivada na região de contorno.

Pela condição apresentada em (4.5), o gradiente em $\partial\Omega$ não pode ter componente na direção normal ao contorno. No entanto, pela característica principal do potencial harmônico, para qualquer ponto em U , exceto pontos críticos, não é permitida a ocorrência de mínimos locais (gradiente nulo). Considerando que não há pontos críticos na região de contorno, então a condição de Neumann força o surgimento de um gradiente paralelo ao contorno, como ilustrado na Figura 4.2, garantindo assim a não existência de mínimos ou máximos e respeitando a equação de Laplace.

A aplicação desse tipo de condição de contorno em um problema de planejamento baseado em funções harmônicas tende a guiar o robô na direção do ponto crítico (destino), fazendo-o seguir o contorno dos obstáculos, o que pode vir a gerar trajetórias excessivamente longas a depender do ambiente em que o robô está navegando, além de levar o robô a trafegar em condições de risco, passando muito próximo dos obstáculos.

4.1.3 Equacionamento básico do planejamento baseado em potenciais harmônicos

O planejamento de movimento baseado em funções harmônicas tem sido explorado na robótica móvel utilizando tanto representação contínua como representação discreta do espaço de trabalho (ou mesmo do espaço de configurações), sendo esta última a adotada

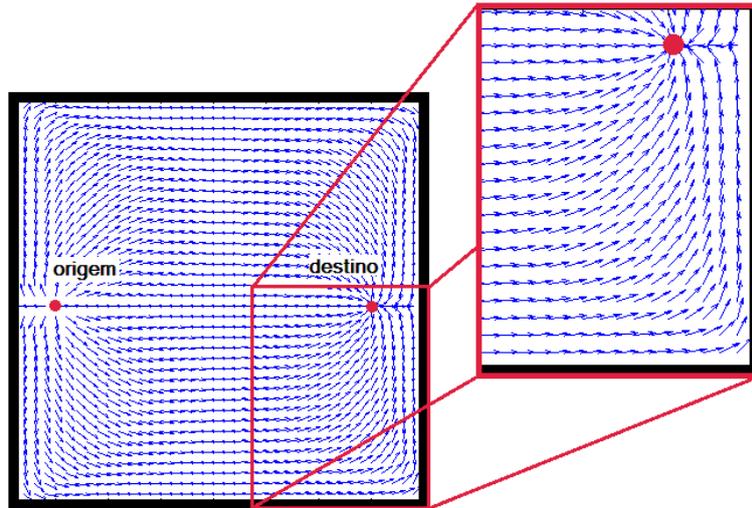


Figura 4.2: Demonstração das características do gradiente do potencial obtido utilizando a condição de Neumann.

na grande maioria dos trabalhos encontrados, inclusive no trabalho original de 1990 [4].

Na representação contínua o princípio da superposição é explorado, sendo o campo potencial resultante formado pela superposição de diferentes campos gerados por segmentos do ambiente. Dessa forma, o ambiente precisa ser fragmentado em estruturas menores (primitivas) para possibilitar a representação analítica do espaço como um todo [52].

Apesar de muitas características positivas, a construção independente da interferência humana de potenciais harmônicos contínuos para ambientes quaisquer requer uma série de outras camadas de processamento que acabam por tornar a escolha da representação analítica menos atrativa. A necessidade de fragmentar o ambiente em primitivas é uma delas. Esse processo se torna mais complexo com o aumento do mapa, densidade de obstáculos e rugosidade das superfícies [54, 120].

Outro fator importante, e igualmente complexo, para a definição de potenciais analíticos é a difícil relação entre a magnitude dos diferentes potenciais que compõem o potencial global. Pela propriedade da superposição é garantida a inexistência de mínimos locais quando todos os potenciais primitivos são harmônicos. No entanto, à medida que o número de potenciais cresce a relação de magnitude entre eles torna-se mais complexa e importante, podendo uma relação errada entre estes atributos levar o robô a seguir uma rota que passa por dentro de um obstáculo [52, 54].

Esse problema adicional chegou a ser abordado por alguns autores utilizando soluções emergenciais como em [54], onde foi definida uma região nas proximidades dos obstáculos na qual o único potencial considerado era o gerado pelas primitivas de repulsão do obstáculo, impedindo assim a colisão, mas gerando variações indesejáveis no comportamento do robô.

Por outro lado, a representação discreta (ou discretizada) do ambiente (utilizada neste

trabalho) possibilita a utilização de técnicas iterativas e métodos numéricos na obtenção do potencial, o que permite a elaboração de um algoritmo que pode ser executado facilmente para diferentes tipos de mapas e ambientes, sem a necessidade de fragmentá-lo, o que fez deste o caminho mais atrativo para a maioria dos pesquisadores envolvidos nessa área.

No tocante à obtenção de funções harmônicas (solução da equação de Laplace) em ambientes discretizados, o método de solução mais utilizado é substituir a equação diferencial parcial em questão pela chamada *equação de diferenças finitas*, que nada mais é que uma aproximação obtida a partir da expansão da função U em série de Taylor, em torno de um ponto de interesse (x,y) .

A série de Taylor de uma função $f(z)$ em torno de um ponto z_0 é dada por [119]:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \quad (4.6)$$

em que $f^{(k)}$ é a k -ésima derivada de f .

Utilizando (4.6) para descrever uma função $U(x,y)$ qualquer, considerando inicialmente apenas x como variável, e desprezando os termos de ordem maior que dois nessa representação, obtém-se:

$$U(x,y) = U(x_0,y) + \frac{\partial U}{\partial x}(x_0,y) \cdot (x - x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_0,y). \quad (4.7)$$

Avaliando (4.7) para um $\Delta x > 0$ à direita e à esquerda de x_0 , obtém-se, respectivamente:

$$U(x_0 + \Delta x, y) = U(x_0, y) + \Delta x \cdot \frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_0, y) \quad (4.8)$$

e

$$U(x_0 - \Delta x, y) = U(x_0, y) - \Delta x \cdot \frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_0, y). \quad (4.9)$$

Somando as equações (4.8) e (4.9), tem-se que:

$$U(x_0 - \Delta x, y) + U(x_0 + \Delta x, y) = 2U(x_0, y) + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_0, y). \quad (4.10)$$

Isolando a derivada segunda em relação a x em (4.10), obtém-se uma aproximação para esta derivada, em torno de um ponto x_0 , apresentada em (4.11). Esta equação é conhecida como equação de diferença finita centrada, pois utiliza a informação de diferença finita tanto progressiva, (4.8), quanto regressiva, (4.9).

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_0, y) = \frac{U(x_0 - \Delta x, y) + U(x_0 + \Delta x, y) - 2U(x_0, y)}{(\Delta x)^2}. \quad (4.11)$$

Repetindo o procedimento detalhado acima, agora para a variável y , em torno de um y_0 qualquer, obtém-se uma aproximação semelhante para a segunda derivada parcial de U em relação a y , apresentado na Equação (4.12).

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x, y_0) = \frac{U(x, y_0 - \Delta y) + U(x, y_0 + \Delta y) - 2U(x, y_0)}{(\Delta y)^2}. \quad (4.12)$$

Substituindo as aproximações obtidas em (4.11) e (4.12) na equação de Laplace e generalizando a nomenclatura para x e y quaisquer, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad (4.13)$$

$$\frac{U(x, y - \Delta y) + U(x, y + \Delta y) - 2U(x, y)}{(\Delta y)^2} + \frac{U(x - \Delta x, y) + U(x + \Delta x, y) - 2U(x, y)}{(\Delta x)^2} = 0. \quad (4.14)$$

Assumindo intervalos de discretização iguais para x e y e fazendo $\Delta x = \Delta y = h$, tem-se finalmente a chamada aproximação de cinco pontos da equação de Laplace, dada por:

$$\frac{U(x, y - h) + U(x, y + h) + U(x - h, y) + U(x + h, y) - 4U(x, y)}{h^2} = 0. \quad (4.15)$$

Com base na aproximação apresentada em (4.15), diferentes técnicas foram propostas para solucionar o problema de planejamento livre de mínimos locais, tendo como ponto de partida a discretização do mapa em uma grade regular. Além disso, a partir de [4], esse problema também vem sendo explorado por pesquisadores de diferentes áreas e com os mais diversos interesses, abordando problemas como custo computacional, representação por grades irregulares, métodos de iteração e diferentes condições de contorno, além da aplicação e/ou adaptação do planejamento baseado em funções harmônicas em extensões do problema básico de planejamento como em problemas com múltiplos robôs, com restrições não-holonômicas, navegação exploratória, entre outras. Nesse sentido, será apresentado na Seção 4.2 uma ampla revisão bibliográfica sobre os métodos de planejamento baseados em funções harmônicas desenvolvidos até os dias de hoje, contextualizando, assim, as pesquisas desenvolvidas neste trabalho de doutorado.

4.2 Planejamento baseado em funções harmônicas: pesquisas e horizontes

Um campo potencial, ou função potencial, pode apresentar diferentes características a depender da sua idealização. Para ser considerado em uma aplicação real na área de navegação de robôs móveis, o campo potencial precisa levar o robô a alcançar o seu destino,

independentemente do estado inicial do robô, desde que esse destino seja alcançável. Para tanto, Rimon e Koditschek em [101, 114], formalizaram o conceito de *Função de Navegação* (apresentado no Capítulo 3).

No caso específico dos potenciais harmônicos e considerando as propriedades apresentadas na Seção 4.1.1, o único ponto crítico que pode surgir dentro da região Ω (excetuando os pontos induzidos) são pontos de sela que não são pontos de equilíbrio estáveis e são facilmente sobrepostos. Além disso, no caso de mapas discretizados, como os em questão, os pontos de sela raramente se manifestam, o que faz do potencial harmônico em representações discretizadas uma Função de Navegação natural, característica que motivou muitos dos pesquisadores dessa linha de planejamento.

No primeiro trabalho encontrado sobre planejamento usando potenciais harmônicos [4], Connolly utilizou condições de contorno de Dirichlet em conjunto com o método recursivo de Gauss-Seidel para obter o potencial harmônico discretizado, solução da equação a diferenças finitas apresentada em (4.15). Na época, a capacidade de processamento e armazenamento limitada dos computadores motivou um estudo paralelo sobre a forma de representação dos números a ser utilizada para evitar problemas numéricos de falsa convergência, tendo, inclusive, o autor proposto nesse mesmo trabalho uma metodologia para evitar essa complicação. Tendo obtido o potencial harmônico, foi utilizado o método conhecido como *steepest descent* para guiar o robô até o destino, considerando apenas os pontos discretizados. Dessa forma, o robô deve seguir diretamente para o ponto cujo potencial é o menor entre todos os pontos vizinhos, o que resulta em caminhos não suavizados.

Em [53] o problema de planejamento utilizando funções harmônicas foi revisitado, agora utilizando condições de contorno de Neumann, fazendo uma analogia com o domínio contínuo. No ano seguinte, em [55], foi mostrado explicitamente que, independente da condição de contorno utilizada, o potencial harmônico é uma Função de Navegação, provando ainda que esse planejamento é um método completo (ver Capítulo 3) e apresentando uma estratégia de controle de trajetória baseada no potencial obtido.

Dando continuidade ao trabalho apresentado em [55], Connolly e Grupen em [121] apresentaram uma adaptação do método previamente proposto para incluir no sistema de planejamento a capacidade de reagir a mudanças no mapa inicial, como aquelas observadas em ambientes dinâmicos ou mapas incompletos. Para atingir tal meta, os autores utilizaram o método recursivo de Jacobi no lugar do método de Gauss-Seidel sob a justificativa de que o primeiro apresenta uma convergência duas vezes mais lenta que o segundo e tem comportamento monotônico no transitório. Dessa forma, quando um novo obstáculo é encontrado no mapa, a atualização do potencial harmônico é feita a partir do campo potencial atual (obtido com as informações previamente disponíveis), de forma suave (por usar um método de convergência lenta) e em paralelo com a execução da tarefa. Assim, graças à convergência lenta e suave do método de Jacobi, o sistema de controle é capaz

de guiar o robô com base nas informações do potencial instantâneo, ainda que este não tenha convergido para o potencial harmônico estável.

Apesar de bastante promissora, a ideia apresentada em [121] pode não funcionar corretamente para o caso de mudanças bruscas no potencial, como acontece quando uma passagem é fechada completamente. Nesses casos, a atualização lenta do método de Jacobi, que é feita em paralelo com a execução do movimento, pode não ser suficiente para, em tempo hábil, evitar que o robô venha a colidir com o obstáculo.

Em [122], foi apresentada a primeira adaptação do planejamento baseado em funções harmônicas para robôs com restrições não-holonômicas. Neste trabalho, o robô é ainda considerado como um ponto sob a ação de um potencial, no entanto, o potencial agora é construído para um espaço de configurações de três dimensões (x, y e θ). Dessa forma, a Equação (4.15) é então remontada, resultando em:

$$U_{x,y,\theta} = \frac{U_{x,y-1,\theta} + U_{x,y+1,\theta} + U_{x-1,y,\theta} + U_{x+1,y,\theta} + U_{x,y,\theta-1} + U_{x,y,\theta+1}}{6}, \quad (4.16)$$

para $h = 1$. No entanto, ao incorporar a restrição não-holonômica, o robô fica limitado a executar, instantaneamente, uma rotação e/ou uma translação na direção do plano (x, y) que está orientado (denotada como v). Juntando essa restrição à Equação (4.16), tem-se o seguinte resultado:

$$U_{x,y,\theta} = \frac{U_{v-1,\theta} + U_{v+1,\theta} + U_{v,\theta-1} + U_{v,\theta+1}}{4}. \quad (4.17)$$

O potencial harmônico obtido a partir de (4.17) limita o robô a mover-se apenas na direção que está orientado, como acontece no caso de robôs com tração diferencial. Quanto às características do potencial, estas continuam as mesmas, a depender das condições de contorno utilizadas.

Em [123] a técnica de planejamento usando funções harmônicas é revisitada, concentrando o foco nas condições de contorno dos obstáculos internos do ambiente. A proposta do trabalho em questão é abdicar da representação explícita dos obstáculos internos, ou seja, não utilizar condições de contorno para estes obstáculos, representando-os como regiões navegáveis, mas com condutividade diferenciada. Dessa forma, o potencial nos obstáculos possuem uma condutividade reduzida a ponto de praticamente (mas não completamente) zerar o gradiente nessas regiões. Essa abordagem, no entanto, não continuou a ser explorada como substituição das regiões de contorno pois, como é mostrado no próprio artigo, o gradiente não pode ser zerado (característica fundamental da função harmônica) fazendo com que, por vezes, o caminho idealizado leve o robô a tentar passar por dentro de um obstáculo.

Outra preocupação que concentra grande parte dos trabalhos relacionados à obtenção do potencial harmônico no campo da robótica móvel é o tempo de processamento. Ape-

sar de apresentar resultados promissores, a técnica de planejamento baseada em funções harmônicas esbarra em várias questões de implementação como problemas numéricos, que dificultam a convergência para ambientes grandes, especialmente quando a condição de Dirichlet é utilizada. Nesses casos, o tempo necessário para a obtenção do potencial final é muitas vezes proibitivo para aplicações que exijam uma resposta rápida.

Na tentativa de reduzir o tempo de processamento associado à obtenção do potencial harmônico discreto, dois tipos de abordagem se destacam na bibliografia da área: modificações no método de partição/representação do ambiente e variações no método iterativo utilizado.

Em se tratando de modificações nos métodos iterativos clássicos, pode-se destacar a técnica apresentada em [124], onde é utilizada a equação de Poisson (tipo de EDP elíptica não homogênea) juntamente com a condição de contorno de Neumann. Neste trabalho, é utilizado o método de iteração conhecido como *Multigrid Adaptive Method* (MAM), no qual o potencial é calculado para diferentes resoluções, melhorando a inicialização do potencial final, garantindo assim uma convergência mais rápida.

No tocante à partição do mapa, destaca-se o método apresentado em [125], onde uma partição não regular do espaço conhecida como *Quad-tree* é utilizada para diminuir o número de pontos no potencial discretizado, diminuindo assim o custo computacional associado ao método e, conseqüentemente, o tempo necessário a obtenção do potencial. Essa técnica baseia-se no fato de que regiões com menor densidade de obstáculos não necessitam de uma amostragem elevada, deixando esta característica para as regiões mais densas, diminuindo, assim, o número de pontos necessários.

Posteriormente, graças ao ganho em tempo de processamento obtido com a utilização do *Quad-tree*, foi possível vislumbrar a utilização do método proposto em [125] para ambientes de dimensão maior que 2, como apresentado em [106, 126], onde o método é formalizado para d dimensões, formando redes de pontos denominadas neste trabalho de 2^d -tree. Além disso, o potencial harmônico é utilizado juntamente com uma amostragem aleatória do espaço no método denominado de PHM (*probabilistic harmonic-function-based method*). No PHM, uma estimativa do potencial harmônico em uma grade grosseira é utilizada para guiar a amostragem e, iterativamente, refinar o ambiente até que um caminho seja encontrado. Dessa forma, não há a necessidade de investigar (ou refinar a grade) em todo o ambiente, resultando assim em um processo ainda mais rápido, em detrimento do resultado esperado para um ambiente completamente amostrado.

Mais recentemente, outros métodos de iteração e formas de partição do espaço foram usados para tentar obter uma aproximação discreta do potencial harmônico mais rapidamente, como em [127] onde foi utilizado o método iterativo chamado de *Four Point-EGSOR* ou em [128] onde foi utilizado o método *Half-Sweep Red-Black*, que é também um método de iteração. Ainda nessa linha, pode-se citar a técnica proposta em [129], que utiliza o *Full Multigrid Method* [130], para acelerar a convergência do potencial harmônico

e o método apresentado em [5, 131] que utiliza a teoria de elementos finitos para gerar uma partição do espaço com menor número de pontos no potencial, quando comparada com uma decomposição aproximada em células regulares. Tudo isso evidencia que um dos grandes focos de pesquisa na área de planejamento baseado em funções harmônicas é a preocupação com o tempo de processamento necessário à obtenção do potencial desejado.

Um outro tema da robótica que a aplicação do planejamento utilizando funções harmônicas tem trazido resultados animadores é a área de navegação exploratória (ver Capítulo 3). Nesse contexto o objetivo principal do planejamento não é alcançar um destino previamente estabelecido, mas sim garantir a completa exploração de um mapa desconhecido, minimizando, sempre que possível, o tempo de exploração e a distância percorrida na execução da tarefa.

Em [6] é apresentada uma adaptação da técnica de planejamento baseada em potenciais harmônicos, juntamente com o uso de grade de ocupação [95] como representação do ambiente, para executar a tarefa de navegação exploratória. Neste trabalho, o potencial harmônico é calculado incrementalmente, e paralelamente à execução da tarefa de exploração, utilizando o método numérico de Gauss-Seidel, que possui convergência monotônica para o problema em questão. Nessa técnica, os contornos recebem potencial fixo (Dirichlet) em 1 e as fronteiras não exploradas do mapa assumem um potencial igual a 0. Desse forma, o robô será atraído para todas as regiões de fronteira, enquanto elas existirem, até que o mapa seja totalmente descoberto. Por usar condições de contorno de Dirichlet, esse método possui problemas numéricos em ambientes muito grandes, o que representa uma limitação para o método em questão.

Posteriormente em [115, 132], o método apresentado em [6] foi aprimorado ao utilizar ao invés da equação de Laplace, uma EDP elíptica não homogênea onde a ideia de uma força externa, proporcional ao gradiente do potencial é adicionada à equação, resultando em uma nova técnica de planejamento denominada *BVP Path Planner* (*Boundary Value Problem Path Planner*), cuja equação central é:

$$\nabla^2 U + F(\nabla U) = 0, \quad (4.18)$$

em que $F(\cdot)$ é qualquer função contínua, com:

$$F(0) = 0. \quad (4.19)$$

Nesse contexto, os parâmetros da componente $F(\nabla U)$ da Equação (4.18) podem ser utilizados para polarizar a direção da exploração considerando características do ambiente a ser explorado, guiando o robô por regiões mais ou menos densas a depender do interesse da exploração.

A técnica denominada *BVP Path Planner* foi posteriormente adaptada para outras tarefas que não apenas a exploração do ambiente, como em [133], onde a técnica em

questão foi utilizada para problemas com múltiplos robôs, mais especificamente em futebol de robôs, onde a força $F(\nabla U)$ é utilizada para alterar, localmente, o potencial para cada robô envolvido na tarefa, formando o método chamado pelos autores de LOPF (*Locally Oriented Potential Field*).

Ainda em futebol de robôs, outros trabalhos exploraram as características do potencial harmônico para controlar os robôs durante o jogo, como pode ser visto em [134] e em [135], onde são apresentados estudos comparativos entre diferentes técnicas baseadas em campos potenciais aplicadas ao problema de futebol de robôs.

Além dos casos citados, foram encontradas aplicações de funções harmônicas em problemas relativamente novos para a área de navegação, como é o caso do planejamento para ambientes dinâmicos com restrições de direção de circulação [136], o que evidencia a grande aplicabilidade da ferramenta em questão para as diversas áreas de pesquisa em robótica móvel.

Nas demais seções deste capítulo, dois aspectos importantes do planejamento baseado em funções harmônicas serão tratados separadamente, por sua relação estreita com as pesquisas desenvolvidas nessa tese de doutorado, quais sejam: (i) a busca pelo menor caminho e (ii) regiões de diferentes navegabilidades.

4.2.1 Planejamento usando funções harmônicas e a busca pelo menor caminho

A obtenção de características de otimalidade para uma determinada técnica de planejamento é sempre uma pretensão almejada pelos pesquisadores da área de planejamento de movimento. No entanto, no caso específico da navegação de robôs móveis, a complexidade associada à tarefa faz com que, muitas vezes, apenas seja viável a obtenção de um método que solucione o problema de forma satisfatória [8].

No caso específico do planejamento usando funções harmônicas, grande parte dos esforços dos pesquisadores da área concentraram-se em encontrar maneiras de acelerar a obtenção do potencial desejado, ficando a avaliação da qualidade do potencial obtido marginalizada no processo, uma vez que, ainda que não-ótimos, os potenciais resultantes apresentam sempre resultados desejáveis em vários tipos de tarefas de navegação.

No tocante à navegação de robôs móveis, um dos critérios de otimalidade mais desejados é, sem dúvida, o critério de distância (menor caminho), ainda que, em aplicações reais, este caminho nem sempre seja executável, especialmente quando consideradas as características cinemáticas e as dimensões físicas do robô.

Em uma ampla revisão bibliográfica realizada na área de planejamento baseado em potenciais harmônicos, alguns trabalhos foram encontrados onde características de otimalidade foram supostamente alcançadas pelos métodos desenvolvidos. As principais contribuições são apresentadas a seguir.

Em [137], a função harmônica é obtida partindo da analogia do problema de planejamento com a dinâmica de um fluido em condições específicas. A partir da analogia utilizada, o método proposto naquele trabalho converge para a equação de Laplace. Os autores consideram ainda a inserção de dois pontos críticos no potencial: um representando a origem (instável) e outro representando o destino (estável). Após uma breve comparação entre as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin, os autores utilizam a condição de Neumann para modelar o contorno e alegam que o resultado é ótimo no sentido de menor caminho. Como apresentado na Seção 4.1.2, o potencial resultante nessas condições não pode ser generalizado como o menor caminho, o que descaracteriza a otimalidade do método ali apresentado. Similarmente, o trabalho desenvolvido em [138] também faz uso da condição de Neumann e da inserção de dois pontos críticos no ambiente o que, da mesma forma que o anterior, impossibilita a generalização da otimalidade proposta.

Em [124], como explicado anteriormente nesse mesmo capítulo, é utilizada a equação de Poisson também associada à condição de contorno de Neumann. É mostrado ainda que, para a utilização dessa condição de contorno, é obrigatória a inserção de um ponto crítico instável na origem do movimento, o que, sabidamente, distorce o potencial nessa região podendo gerar trajetórias distintas a depender da direção do primeiro passo do movimento. Para solucionar esse problema, os autores propõem o uso de uma técnica de busca para escolher o melhor caminho entre os diferentes disponíveis, denominada FDC (*Flow Direction Correction*). No entanto, apesar de ter sucesso na escolha da melhor trajetória entre as disponíveis, o caminho selecionado não é ótimo em um sentido generalista e sim considerando o espaço amostral de trajetórias avaliadas. Um procedimento semelhante de otimalidade local pode ser observado em [139] onde a menor trajetória entre as geradas pelo método é escolhida como ótima.

4.2.2 Regiões de diferentes navegabilidades

A evolução das pesquisas na área de navegação *outdoor* de robôs móveis, têm impulsionado o interesse dos estudiosos de planejamento em adaptar as técnicas desenvolvidas em ambientes internos a problemas mais comumente encontrados em ambientes externos, como superfícies não planas, terrenos irregulares, diferentes coeficientes de atrito com o solo, inclinação do terreno, entre outros. Todo esse esforço culminou em uma nova extensão do problema básico de planejamento onde o ambiente é separado não somente em espaço livre e obstáculos, mas sim em regiões não navegáveis e regiões mais ou menos navegáveis, culminando no problema aqui denominado de planejamento com regiões de diferentes navegabilidades.

A característica de diferentes navegabilidades foi abordada em alguns trabalhos recentes utilizando técnicas de planejamento baseadas em potenciais harmônicos. Em [140],

uma força externa é adicionada à equação do potencial harmônico para modelar regiões de diferentes navegabilidades. A presença da força externa neste trabalho, tal qual ela foi aplicada, limita o potencial obtido a ser utilizado apenas para o par origem/destino especificado inicialmente, ao contrário do que normalmente ocorre com técnicas de planejamento baseadas em campos potenciais. Esse problema acontece pois a força externa aplicada pode levar ao surgimento de regiões inteiras sem gradiente nos pontos de menor navegabilidade, o que por si só descaracteriza o potencial harmônico em termos de generalidade, mas não para a tarefa específica em questão (par origem/destino).

Em [139], o potencial harmônico é obtido normalmente sem considerar as diferentes navegabilidades. Uma vez obtido o potencial, são tomadas diferentes inicializações que geram caminhos distintos (rotas). Essas rotas são avaliadas individualmente considerando características distintas do terreno como inclinação, rugosidade do solo e áreas desconhecidas. As rotas que acumularem pontos negativos na avaliação suficientes para ultrapassar um limiar especificado são excluídas. As demais rotas são avaliadas pela distância a ser percorrida sendo então a menor escolhida como a rota a ser executada pelo robô.

Diferentemente do método apresentado em [139], onde a característica de navegabilidade é incluída em uma etapa posterior à obtenção do potencial harmônico, Prestes et al. em [141] faz ajustes locais nos parâmetros da força $F(\nabla U)$ que perturba o potencial na técnica conhecida como *BVP path planner* [115, 132]. O resultado disso é uma representação que permite atribuir pesos diferentes para regiões com navegabilidades diferentes antes mesmo da obtenção do potencial harmônico. A técnica apresentada pode ser aplicada com qualquer condição de contorno, ficando o potencial com as características da condição adotada.

Capítulo 5

Planejamento de trajetória proposto

No Capítulo 4, foram apresentadas as principais contribuições na área de planejamento baseado em funções harmônicas para o campo da robótica móvel encontradas na revisão bibliográfica realizada nesta tese de doutorado. Com base nessa revisão, pode-se concluir que o foco das pesquisas relacionadas ao uso de funções harmônicas na tarefa de planejamento de movimento de robôs móveis concentrou-se inicialmente nas características obtidas a partir das diferentes condições de contorno e, posteriormente, voltando sua atenção para o tempo necessário à obtenção do potencial resultante. Nessa última linha de pesquisa, as ideias principais usavam diferentes métodos de iteração e/ou partição do espaço para acelerar a convergência do potencial.

Alguns outros trabalhos encontrados buscaram maneiras de modificar as características do potencial resultante para aplicar o método baseado em funções harmônicas em extensões do problema básico de planejamento como o planejamento exploratório, planejamento ótimo buscando o menor caminho, com restrições não-holonômicas, considerando regiões de diferentes navegabilidades, entre outras extensões. Dos temas mencionados, os resultados mais relevantes (e o maior número de publicações) encontram-se nas áreas de planejamento exploratório e planejamento considerando regiões de diferentes navegabilidades.

No tocante ao planejamento buscando obter o menor caminho até o destino, foco principal desse trabalho, poucos resultados foram encontrados alegando algum tipo de otimalidade. Em alguns deles, a otimalidade é mencionada pelos autores sem um estudo teórico ou indicações experimentais que validem tal afirmação, sendo estes trabalhos baseados na condição de contorno de Neumann o que, naturalmente, impede a obtenção do menor caminho (como mostrado no Capítulo 4). Em outros trabalhos, a otimalidade é associada à relação de compromisso entre o menor caminho e o afastamento em relação aos obstáculos, característica obtida pela aplicação da condição de contorno de Dirichlet. Essa afirmação, apesar de coerente, não pode ser explicitamente tratada como uma característica ótima, uma vez que em nenhum desses trabalhos é apresentado um estudo sobre qual é a relação ótima entre segurança e menor caminho.

Outros trabalhos apresentam as condições de contorno mistas como a de Robin [137] como uma forma de obter comportamentos ótimos no sentido de menor distância, mas sem conseguir determinar de forma explícita, ou mesmo através de experimentos claros, se existe uma relação que leve à obtenção do menor caminho.

Com base nas informações apresentadas até o momento, pôde-se observar que existe uma relação direta entre as condições de contorno utilizadas na definição do potencial e as características obtidas no potencial resultante. Na busca pelo melhor entendimento do papel das condições de contorno nas estratégias de planejamento baseadas em funções harmônicas, foi realizado, nesta tese de doutorado, um estudo detalhado sobre as condições de contorno de Neumann e Dirichlet que culminou na elaboração de uma nova forma de definição das condições de contorno no problema de planejamento de movimento de robôs móveis, denominada aqui de *Condição de Horizonte Continuado* (CHC). Esse estudo comparativo e a inspiração na ideia de propagação térmica utilizada para definir e formalizar a CHC são apresentados a seguir na Seção 5.1.

5.1 Condição de Horizonte Continuado (CHC): uma inspiração na propagação térmica

Para melhor caracterizar os estudos que levaram à proposição de uma nova forma de caracterizar o contorno no problema de planejamento baseado em funções harmônicas buscando o menor caminho, é necessária uma breve explanação sobre as características e limitações dos potenciais obtidos pelas condições de contorno tradicionalmente utilizadas, quais sejam: Dirichlet e Neumann.

Na condição de Dirichlet (a primeira utilizada no contexto de planejamento de movimento), o gradiente do potencial gerado segue na direção da normal da superfície do obstáculo, ou seja, próximo às regiões de contorno, seguir o gradiente leva o robô a afastar-se dos obstáculos, como já explicado anteriormente. O resultado disso são caminhos possivelmente muito longos além de problemas com corredores estreitos e longos, onde a repulsão observada nas regiões de contorno faz com que esses caminhos sejam raramente escolhidos, independente de serem a escolha mais viável em termos de distância.

Para evidenciar outras características de um potencial obtido utilizando a condição de Dirichlet, é apresentado na Figura 5.1 o resultado de um experimento simulado utilizando essa condição de contorno em um ambiente limitado e sem obstáculos internos, juntamente com as curvas de nível associadas a este potencial.

Uma análise mais cuidadosa da Figura 5.1 permite ao leitor observar que o comportamento do potencial obtido apresenta um decaimento exponencial nas proximidades da singularidade que, nesse caso, é o ponto crítico inserido no destino a ser alcançado pelo robô. Esse decaimento exponencial tem por consequência o surgimento de regiões quase

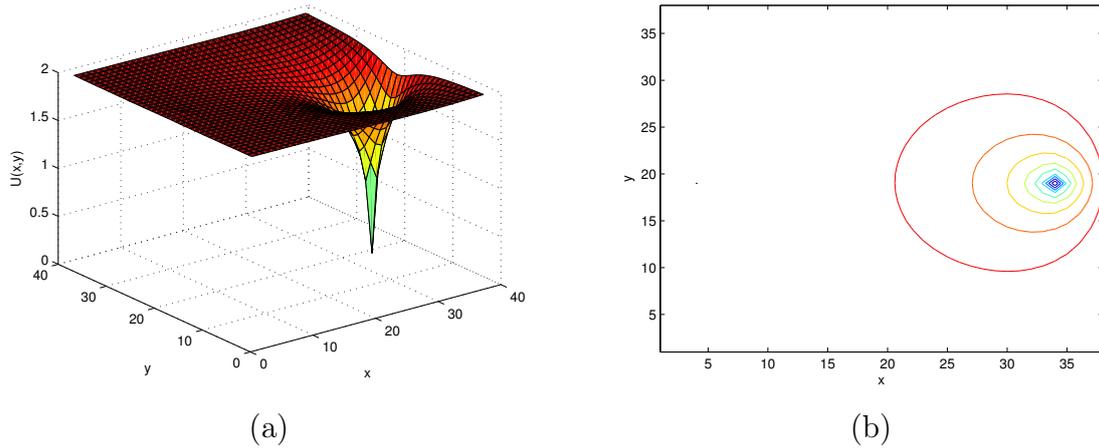


Figura 5.1: Função harmônica utilizando a condição de Dirichlet: (a) potencial obtido; e (b) curvas de nível associadas.

planas quando essa técnica é aplicada a ambientes grandes ou representados com uma resolução elevada, o que pode gerar um problema numérico associado aos métodos iterativos normalmente utilizados na obtenção destes potenciais, exigindo uma precisão muito grande do sistema numérico de representação dos valores do potencial. Além disso, nas regiões distantes das singularidades, as pequenas diferenças observadas no potencial de dois pontos vizinhos fazem com que a tolerância que define a convergência dos métodos iterativos tenha que ser muito pequena, retardando assim a convergência do método de iteração.

Outra característica importante do potencial harmônico obtido utilizando a condição de Dirichlet é que não é preciso inserir um ponto crítico na origem do movimento, o que permite a reutilização do potencial obtido para diferentes pontos de partida, sem gerar qualquer distorção adicional no resultado final.

Apesar de possibilitar uma navegação segura, os caminhos obtidos no planejamento baseado em funções harmônicas utilizando a condição de Dirichlet podem ser excessivamente longos, o que muitas vezes não é uma característica atrativa para a navegação de um robô móvel. Nesse sentido, a alternativa quase que natural encontrada pelos pesquisadores da época foi a utilização da condição de contorno de Neumann.

Como já explicado no Capítulo 4, a utilização da condição de Neumann tem como característica principal a produção de um potencial que, nas proximidades do obstáculo, leva o robô a tangenciá-lo. Essa característica faz com que o robô siga caminhos mais curtos, mas apenas em ambientes muito densos, onde o menor caminho passa, normalmente, pelas imediações dos obstáculos. Quando essa técnica é aplicada em ambientes esparsos o resultado não é o mesmo. Nesses casos, o caminho percorrido pelo robô ao seguir o gradiente do potencial chega, por vezes, a ser maior do que o obtido pela condição de Dirichlet, como ilustrado na Figura 1.2 apresentada no começo deste trabalho.

Para evidenciar outras características do potencial de Neumann, o experimento apresentado na Figura 5.1 foi repetido, utilizando agora a condição de contorno de Neumann. O potencial resultante desse experimento e as respectivas curvas de nível são apresentadas na Figura 5.2.

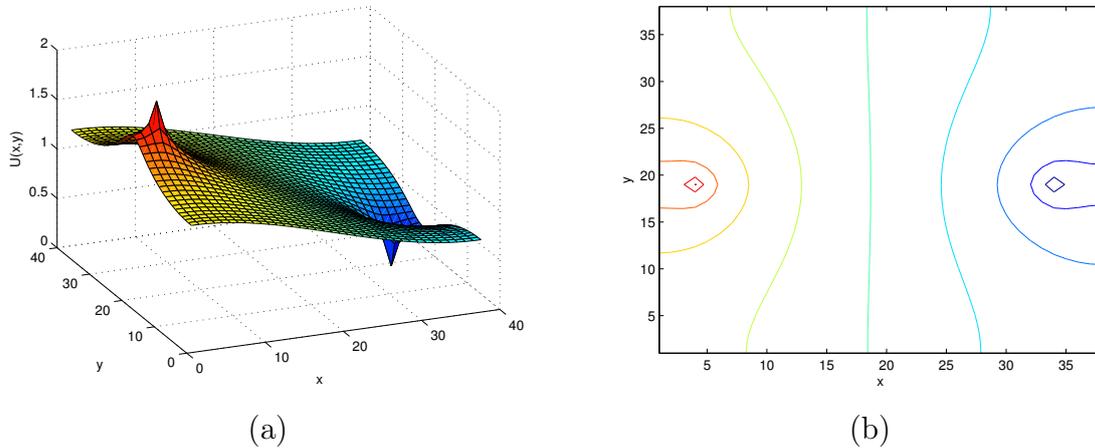


Figura 5.2: Função harmônica utilizando a condição de Neumann: (a) potencial obtido; e (b) curvas de nível associadas.

Comparando as figuras 5.1 e 5.2, é possível observar que o decaimento exponencial observado para a condição de Dirichlet não se repete para a condição de Neumann, onde as curvas de nível são quase que igualmente espaçadas, caracterizando um decaimento aproximadamente linear nas regiões mais afastadas das singularidades. Essa característica faz com que a utilização da condição de Neumann seja preferível do ponto de vista numérico, requerendo uma menor precisão dos cálculos e uma tolerância mais branda na definição da convergência, tornando a obtenção do potencial mais rápida.

Apesar das vantagens numéricas, para utilizar a condição de Neumann é obrigatória a inserção de uma singularidade na origem do movimento para forçar o surgimento do gradiente, pois sem ela, a condição de contorno (derivada nula na direção da normal) e a equação de Laplace são satisfeitas apenas pela solução trivial, ou seja, quando todos os pontos assumem o potencial do destino.

A definição de um potencial constante na origem do movimento gera nesse ponto um equilíbrio instável, o que ocasiona uma distorção no potencial nas proximidades da origem, como pode ser observado na Figura 5.2. Essa distorção faz com que o potencial resultante seja diferente para condições de partida diferentes, o que é um problema para a generalização do potencial para diferentes pontos de partida, diferentemente do que acontece na condição de Dirichlet, onde a origem não precisa ser representada. Além disso, como apresentado em [124], o robô pode seguir diferentes caminhos partindo de uma mesma origem, a depender do critério utilizado para definir o primeiro passo a partir da instabilidade, o que pode resultar em trajetórias excessivamente longas a depender do

critério de inicialização utilizado.

Nesse contexto, é introduzida a seguir uma nova condição de contorno, denominada de Condição de Horizonte Continuado (CHC), que é uma das principais contribuições originais dessa tese de doutorado.

Busca pelo menor caminho inspirada na propagação térmica

Como pôde ser observado até o momento, na área de planejamento baseado em funções harmônicas, os potenciais obtidos pelas condições de contorno clássicas (Dirichlet e Neumann) geram caminhos com características importantes para a navegação de robôs móveis como a ausência de mínimos locais sem, no entanto, apresentar grande preocupação quanto à “qualidade” do caminho obtido, negligenciando outras características importantes como a distância a ser percorrida pelo robô.

Pensando em preencher a lacuna que existe entre o planejamento usando potenciais harmônicos e a busca pelo menor caminho, buscou-se neste trabalho uma analogia entre os potenciais harmônicos clássicos e o fenômeno físico da propagação térmica, considerando uma distribuição da temperatura em estado de equilíbrio em um meio condutor homogêneo. Essa analogia foi considerada com o intuito de compreender melhor o efeito de cada condição de contorno no potencial resultante, permitindo assim a proposição de uma nova forma de definição do potencial nas regiões de contorno, que resulte em uma função harmônica cujo gradiente leve o robô a buscar o caminho mais curto até o destino.

Na analogia em questão, a região livre de obstáculos é considerada como um meio condutor de calor e os pontos críticos inseridos no destino ou na origem (no caso da condição de Neumann) funcionam como fontes constantes de calor que influenciam na temperatura dos pontos próximos a elas. Além disso, uma vez que o potencial é modelado por uma EDP elíptica, a distribuição de temperatura obtida representa o estado de equilíbrio térmico na placa condutora que modela o ambiente navegável, podendo o fator tempo ser desconsiderado.

Observando por essa perspectiva, uma interpretação possível é que a condição de Dirichlet modela os obstáculos (regiões de contorno) também como fontes constantes de calor (com temperatura diferente da temperatura do destino) com influência direta na temperatura do meio condutor próximo a elas, assim como acontece com o ponto de destino. Dessa forma, é possível concluir que a inserção de um obstáculo no meio condutor distorce a distribuição de temperatura em toda a placa, ficando a temperatura em cada ponto dependente não só da temperatura do ponto de destino mas também da temperatura dos obstáculos.

Para a condição de Neumann, pode-se interpretar o obstáculo como um sólido isolante, ou seja, que não influencia na temperatura do meio em que é inserido. Esse isolamento é modelado fazendo com que não tenha troca de calor na região de contorno, forçando uma distribuição de temperatura cujo gradiente não tenha componente na direção normal à

superfície do obstáculo. No entanto, apesar de não ser definida uma temperatura fixa no contorno, a restrição de isolamento faz com que exista uma distorção na distribuição de temperatura resultante, assim como acontece para a condição de Dirichlet.

Pelo ponto de vista de propagação térmica, pode-se concluir que as diferentes definições da região de contorno (obstáculos) produzem diferentes distorções na distribuição de temperatura do meio condutor. Outra conclusão possível é que, se for suprimido o efeito das distorções provocadas pelas regiões de contorno, a distribuição de temperatura no meio dependerá apenas da fonte de calor constante inserida no destino. Juntando isso ao fato de que a distribuição de temperatura na placa condutora (no caso do planejamento baseado em funções harmônicas) deve satisfazer à equação de Laplace (Laplaciano igual a zero), pode-se esperar então uma distribuição radial centrada no destino, cujo gradiente deve levar ao ponto em questão pelo menor caminho possível, ou seja, uma linha reta.

Para ilustrar o menor caminho mencionado, considere um mapa sem obstáculos internos e limitado externamente, cujo ponto de destino é colocado no centro do ambiente. Se for utilizada a condição de contorno de Dirichlet (cuja influência da fonte constante decai exponencialmente) e o ambiente for grande o suficiente para que o efeito da distorção provocada pelo contorno possa ser desconsiderado na região próxima ao ponto de destino, então a distribuição de temperatura nessa região será radial, como esperado. O resultado simulado obtido para o experimento em questão é apresentado na Figura 5.3.

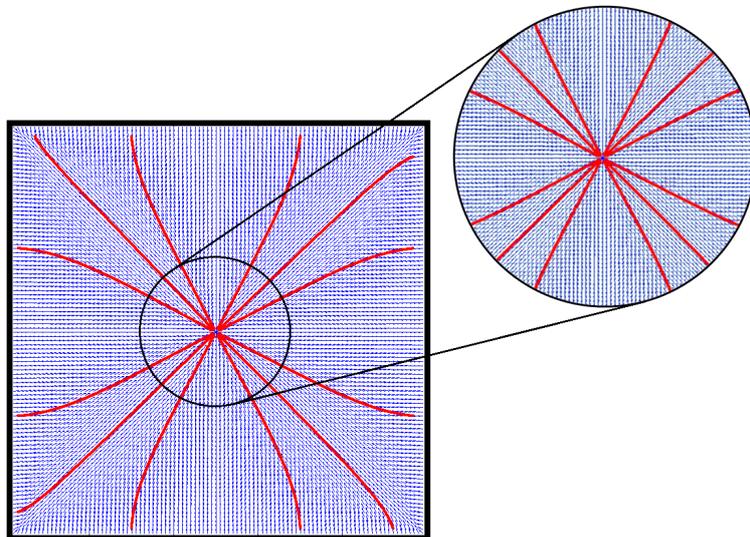


Figura 5.3: Distribuição radial observada nas proximidades do destino quando o efeito da distorção do contorno é suprimido.

Observando as trajetórias obtidas ao seguir o gradiente da distribuição de temperatura na simulação ilustrada na Figura 5.3, pode-se observar que nas proximidades do contorno há uma distorção no que seria o menor caminho possível, conforme o esperado. No entanto, na região próxima do destino (em destaque na Figura 5.3) essa distorção é

quase que totalmente suprimida devido à distância dos obstáculos, ficando a temperatura determinada apenas pela fonte de calor inserida no destino. Nessa região, a distribuição radial mencionada pode ser observada e as trajetórias até o destino são basicamente linhas retas, que representam o menor caminho até o destino, como era esperado.

Apesar do resultado obtido na simulação ilustrada na Figura 5.3, a situação forçada não é uma situação prática, uma vez que o único ambiente real com essas características seria uma grande sala vazia. Além disso, o comportamento da distribuição de temperatura só é radial em uma região próxima ao destino, mantendo a distorção no perfil térmico nas demais porções do ambiente. No entanto, o experimento simulado em questão serviu para evidenciar que, se o efeito da distorção na distribuição de temperatura causada pela condição de contorno for suprimido, então é possível obter uma distribuição de temperatura radial centrada no destino, o que possibilita a obtenção de trajetórias que levem o robô até o destino através de linhas retas para diferentes pontos de partida, caracterizando assim o menor caminho.

Dada a impossibilidade de suprimir de forma definitiva a distorção causada pelas condições de contorno clássicas, é proposta nessa tese de doutorado a formalização de uma nova definição de contorno que busque reduzir ao máximo a distorção do potencial nas proximidades dos obstáculos, permitindo assim a obtenção de um plano a ser executado pelo robô que busque obter o menor caminho até o destino.

Observou-se a partir dos resultados das simulações e das análises apresentadas até então que, se a única fonte de calor na placa condutora a interferir no perfil térmico for aquela situada no ponto de destino, então o caminho realizado pelo robô ao seguir o gradiente da função harmônica será o menor caminho possível. Pensando nisso, a ideia apresentada neste trabalho de doutorado consiste em representar o contorno dos obstáculos de modo que a temperatura nessas regiões seja determinada apenas pela fonte de calor inserida no destino, ou seja, simular no contorno a continuidade do ambiente de navegação, suprimindo assim o efeito das distorções causadas no uso das técnicas clássicas de planejamento usando potenciais harmônicos.

Para ilustrar melhor a ideia em questão, considere a distribuição de temperatura radial apresentada na Figura 5.4.a, representada juntamente com o seu gradiente normalizado. Para possibilitar o entendimento da distribuição radial em torno do ponto de destino, deve se considerar a continuidade indefinida da placa condutora (região navegável). Dessa forma, o contorno com temperatura diferente do destino se encontra no infinito, possibilitando assim o surgimento do gradiente na direção do ponto de destino, sem no entanto distorcer a distribuição radial do potencial.

A ideia central, então, é fazer com que as mudanças no ambiente (inserção de obstáculos) não perturbem o gradiente do potencial, mantendo no contorno as temperaturas que estariam ali caso este não existisse e a placa condutora continuasse indefinidamente.

Considere, por exemplo, a inserção de um obstáculo no potencial da Figura 5.4.a, tal

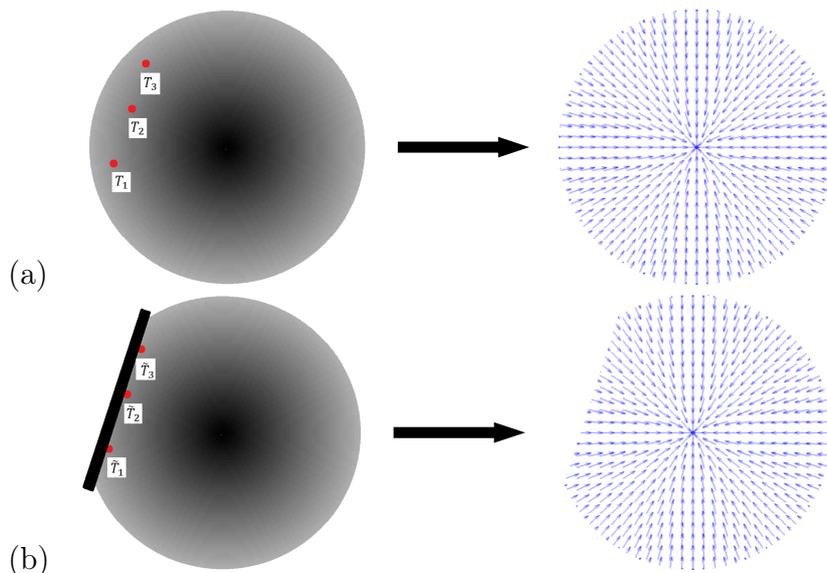


Figura 5.4: Exemplo de distribuição radial de temperatura e seu respectivo gradiente: (a) sem obstáculo; e (b) com obstáculo.

qual mostrado na Figura 5.4.b. Nesse caso, se as temperaturas \tilde{T}_1 , \tilde{T}_2 , \tilde{T}_3 e as demais temperaturas observadas no contorno do obstáculo forem as mesmas observadas no potencial sem o obstáculo (T_1 , T_2 e T_3), então o perfil térmico continuará radial e o gradiente continuará levando o robô até o destino pelo menor caminho, como ilustrado no gradiente apresentado na Figura 5.4.b.

O exemplo ilustrativo da Figura 5.4 é bastante simples e de fácil visualização. Essa configuração foi escolhida de forma proposital para garantir uma visada direta entre todos os pontos no potencial e o destino, possibilitando assim uma representação gráfica da técnica desenvolvida. Vale ressaltar que a visada direta mencionada não é necessária para o funcionamento do método proposto, servindo apenas para facilitar a ilustração, como poderá ser observado nos resultados a serem apresentados mais adiante nesse capítulo.

Vale ressaltar ainda que, no exemplo utilizado (Figura 5.4), foi considerada uma distribuição de temperatura com decaimento linear apenas para facilitar a explicação. O fenômeno ilustrado se repete também para um perfil térmico com decaimento exponencial, onde, sob as mesmas condições, a direção do gradiente é também radial.

Definido o comportamento desejado para o perfil térmico nas imediações dos obstáculos, foi realizada uma busca por tal condição de contorno em trabalhos relacionados, não só em robótica mas em outras áreas afins, mas tal definição de contorno não foi encontrada.

Para viabilizar a obtenção de tal comportamento utilizando funções harmônicas discretizadas, a condição de contorno almejada foi então desenvolvida neste trabalho, onde resolveu-se chamá-la de *Condição de Horizonte Continuado* (CHC), fazendo uma associação com a ideia de que, para obter o potencial desejado, a condição que define as

características do contorno deve simular nesse contorno a continuação indefinida do meio condutor. A definição formal do conceito da CHC e um equacionamento proposto como realização dessa condição de contorno é apresentado a seguir na Seção 5.2, utilizando o método de diferenças finitas, assim como a utilização dessa definição de contorno na obtenção de uma estratégia de planejamento utilizando funções harmônicas que busque o menor caminho até o destino, tema central dessa tese de doutorado.

5.2 O planejamento de movimento e a CHC

A realização ideal da proposta de condição de contorno apresentada na seção anterior, depende da continuação indefinida do ambiente navegável, o que é impossível de se obter na prática. Em se tratando de um ambiente limitado, a Condição de Horizonte Continuado é uma definição de contorno responsável por obter uma boa aproximação para o valor do potencial no ponto E pertencente ao contorno (região não navegável) e definido em sua fronteira (Figura 5.5). O potencial definido pela CHC em E deve ser de tal forma que seu valor represente uma continuação do potencial da região navegável próxima ao ponto E , como se este pertencesse ao ambiente navegável, buscando, assim, reduzir a distorção no potencial causada por um obstáculo.

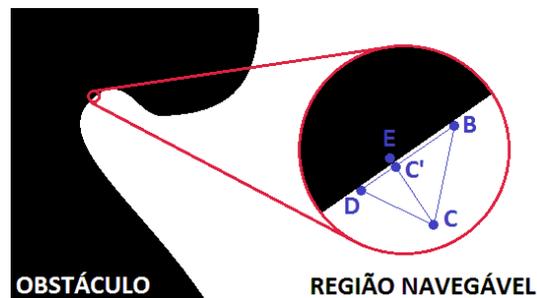


Figura 5.5: Região BCD definida nas proximidades do obstáculo, mas dentro da região navegável, de modo que o lado BD seja localmente paralelo ao contorno.

Para entender a ideia da CHC considere o ambiente bidimensional representado pela união de dois conjuntos: o conjunto N composto por todos os pontos navegáveis do ambiente, cuja fronteira também é navegável, e o conjunto O formado por todos os pontos não navegáveis do ambiente (obstáculos), cuja fronteira é também não navegável. É interessante nesse ponto ressaltar que existe diferença entre a fronteira do conjunto N e os obstáculos do ambiente (conjunto O). Quando for mencionado no texto fronteira de N , por exemplo, faz-se referência aos pontos navegáveis do ambiente que são vizinhos imediatos de um obstáculo, mas não fazem parte dele. Já os pontos pertencentes à fronteira do conjunto O fazem parte do obstáculo e são pontos não navegáveis, como todos os pontos em O .

Considere agora três pontos (B , C e D) pertencentes a N (região navegável), mas próximos a um contorno, como ilustrado na Figura 5.5, sendo dois dos pontos igualmente próximos ao contorno (B e D) e outro mais interno (C), tendo BCD uma área tão pequena quanto se queira, de modo que o lado BD seja localmente paralelo ao contorno, e C' seja a projeção de C sobre o lado BD .

Considere, ainda, um potencial U contínuo definido em N . Nessas condições, a CHC faz uso de uma aproximação por um plano para o potencial U na região BCD . Esse plano é então utilizado para simular a continuidade do ambiente navegável no obstáculo (ponto E na Figura 5.5), fazendo com que o potencial no ponto E , que não pertence à região navegável, seja definido como se este fizesse parte do plano que passa pelos pontos B , C e D , ou seja, é feita uma extrapolação linear para calcular o potencial em E utilizando o plano BCD .

Com o intuito de formalizar essa ideia, é apresentada a seguinte definição que será de grande utilidade na seção 5.4.

Definição 8 *Condição de Horizonte Continuado (CHC):* Seja U um potencial definido em N , em que $N \subset \mathbb{R}^2$ é o conjunto fechado formado por todos os pontos (x, y) pertencentes à região navegável do ambiente. Sejam B , C e D pontos não colineares pertencentes a N , tal que B e D estão na fronteira de N e C escolhido fora dessa fronteira de modo que C' , projeção ortogonal de C na reta que passa por BD , pertença ao segmento de reta \overline{BD} . Seja O o conjunto de todos os pontos não navegáveis do ambiente (obstáculos), definido por $\mathbb{R}^2 \setminus N$. Seja o ponto $E = (x_E, y_E) \in O$ e definido na fronteira de O , em que E pertence à reta que passa por C e C' . Então, a Condição de Horizonte Continuado é a determinação do potencial $U(x_E, y_E)$ através de uma extrapolação linear dos valores dos potenciais U nos pontos B , C e D .

Neste trabalho, é proposta uma realização discretizada para a CHC, de acordo com a Definição 8, utilizando para isso um equacionamento do laplaciano do potencial discretizado através da técnica de diferenças finitas. É importante ressaltar que a ideia apresentada na Seção 5.1 e formalizada na Definição 8 admite várias realizações a depender da forma como é construído o potencial. A realização que será apresentada a seguir, leva em consideração uma discretização do ambiente navegável como uma grade regular quadrada de resolução arbitrária, ficando a técnica submetida a todas as limitações impostas pelo processo de discretização.

Para compreender corretamente a condição de contorno proposta e a estratégia de planejamento baseado em potenciais harmônicos desenvolvida, é preciso primeiramente apresentar a notação utilizada no seu desenvolvimento. A obtenção do potencial em ambientes quaisquer para a técnica aqui desenvolvida depende de um processo de discretização do potencial. Essa discretização será feita em um primeiro momento usando a técnica de diferenças finitas e na seção de resultados serão apresentados alguns experimentos

simulados utilizando uma discretização por elementos finitos. Esses processos de discretização permitem transformar o problema de obtenção de um potencial complexo em um problema de solução de um sistema linear de equações.

O conceito básico por trás dos métodos de aproximação discreta de um potencial é que, para pequenas regiões, o potencial pode ser aproximado por um plano, o que é feito diretamente nas técnicas de elementos finitos e indiretamente nas técnicas de diferenças finitas. Essa característica permite a construção de um sistema de equações lineares que podem ser resolvidas por diferentes métodos numéricos, exatos ou aproximados. Dessa forma, a qualidade da aproximação em relação à solução contínua melhora com a diminuição da distância entre os pontos onde o potencial é avaliado. Quando a distância entre os pontos tende a zero, o resultado discretizado tende à solução contínua.

Para melhor ilustrar a construção do potencial e da condição de contorno proposta, considere a discretização apresentada na Figura 5.6, onde nenhum contorno é modelado.

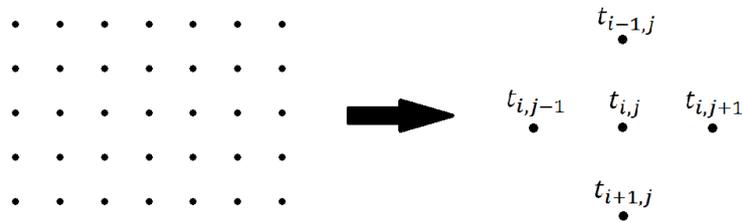


Figura 5.6: Representação da grade de temperaturas para um ambiente discretizado sem obstáculos.

Pela equação de diferenças finitas apresentada no Capítulo 4 (Equação (4.15)) e fazendo $h = 1$ para simplificar a notação, obtém-se a seguinte equação para a temperatura dos pontos internos do potencial apresentado na Figura 5.6:

$$t_{i,j-1} + t_{i,j+1} + t_{i-1,j} + t_{i+1,j} - 4t_{i,j} = 0, \quad (5.1)$$

que pode ser reescrita como:

$$t_{i,j} = \frac{1}{4}t_{i,j-1} + \frac{1}{4}t_{i,j+1} + \frac{1}{4}t_{i-1,j} + \frac{1}{4}t_{i+1,j}. \quad (5.2)$$

Uma vez que a Equação (5.2) é válida para todos os pontos internos do ambiente, pode-se concluir que, para satisfazer a equação de Laplace, é preciso satisfazer o sistema montado com as equações referentes a cada ponto do ambiente discretizado. Dessa forma, organizando todas as temperaturas em um vetor coluna \mathbf{t} de dimensão n , em que n é o número de pontos do ambiente discretizado, obtém-se a representação matricial do sistema de equações a ser solucionado, dada por:

$$\mathbf{t} = A\mathbf{t}, \quad (5.3)$$

em que A é a matriz quadrada de ordem n que representa os coeficientes do sistema formado com as n equações similares a (5.2), obtidas para cada um dos n pontos do ambiente discretizado. Observe ainda que, nessa equação matricial, a diagonal principal é nula, uma vez que, de acordo com (5.2), a temperatura de um ponto é definida considerando apenas a temperatura dos pontos vizinhos, excluindo assim a solução trivial de (5.3), que seria $A = I$, em que I é a matriz identidade de ordem n .

A solução da equação matricial apresentada em (5.3) define as temperaturas em cada ponto do ambiente discretizado para o caso de uma placa condutora infinita, ou seja, sem contornos. Para modelar o contorno, é preciso adicionar a influência deste na Equação (5.3). Para tanto, considere a discretização apresentada na Figura 5.7, em que o quadrado representa um ponto de contorno e o círculo um ponto pertencente à superfície condutora.

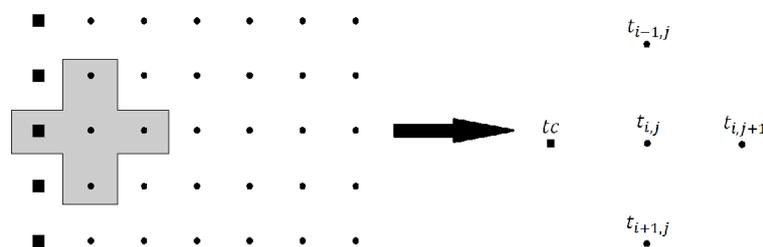


Figura 5.7: Representação da grade de temperaturas para um ambiente discretizado com obstáculos.

Para o exemplo em questão, que ilustra um contorno no limite esquerdo da placa, temos que:

$$t_{i,j} = \frac{1}{4}tc + \frac{1}{4}t_{i,j+1} + \frac{1}{4}t_{i-1,j} + \frac{1}{4}t_{i+1,j}, \quad (5.4)$$

em que tc é a temperatura no contorno, independente da condição utilizada na sua definição. Essa mesma ideia pode ser repetida para pontos no contorno em qualquer um dos quatro vizinhos do ponto de interesse $t_{i,j}$. Assim, as equações do tipo (5.4) são válidas sempre que um ponto do potencial for vizinho de um ponto de contorno. Nos demais casos (pontos internos do potencial) a Equação (5.2) continua válida.

Seguindo o raciocínio utilizado no exemplo anterior (Figura 5.7) para chegar a (5.4), é possível obter uma equação similar a esta para cada um dos pontos do potencial que forem vizinhos de um contorno, o que resultará em um novo sistema de equações a ser resolvido, que modela não só o ambiente navegável, mas também seus obstáculos.

Para obter a representação matricial que modela o potencial no ambiente como um todo, as temperaturas de contorno tc para as n equações são organizadas na forma de um vetor coluna de dimensão n , \mathbf{t}_c . Além disso, uma nova construção da matriz A é obtida, cujos elementos são os coeficientes da Equação (5.2), quando o ponto for interno ao potencial, e da Equação (5.4), quando o ponto for vizinho de um contorno. Dessa forma, é possível reescrever a equação matricial, agora para uma placa limitada, como

sendo:

$$\mathbf{t} = A\mathbf{t} + \mathbf{t}_c. \quad (5.5)$$

Adicionalmente, o vetor de temperaturas, \mathbf{t} , depende também da temperatura do ponto de destino, que é uma temperatura fixa para um dos n pontos do potencial. Considerando o destino posicionado no k -ésimo ponto do potencial, esse destino é então modelado como um vetor coluna, \mathbf{t}_d , de dimensão n com todos elementos iguais a zero, exceto pelo k -ésimo elemento, cujo valor utilizado é a temperatura do destino. É importante destacar também que, como o destino é um ponto de temperatura constante, a k -ésima linha da matriz A é nula, uma vez que a temperatura nesse ponto não é influenciada pela sua vizinhança. O mesmo acontece para o k -ésimo elemento do vetor \mathbf{t}_c .

Uma vez que o vetor \mathbf{t}_d define diretamente a temperatura do k -ésimo elemento de \mathbf{t} , a Equação (5.5) pode ser reescrita em sua forma completa, considerando as observações apresentadas anteriormente, como sendo:

$$\mathbf{t} = A\mathbf{t} + \mathbf{t}_c + \mathbf{t}_d, \quad (5.6)$$

ficando a condição de contorno responsável pela definição dos n valores do vetor \mathbf{t}_c .

O valor exato da temperatura fixa definida em um ponto de destino (vetor \mathbf{t}_d) é irrelevante para as características do potencial resultante, assim como acontece para as condições de contorno clássicas. No caso desse trabalho, pode-se definir o destino com qualquer valor de temperatura negativa, uma vez que foi convencionado o uso do gradiente negativo para levar o robô até o ponto de destino.

No caso da condição proposta neste trabalho (a Condição de Horizonte Continuado - CHC), como foi explicado, os valores de \mathbf{t}_c , ou seja, as temperaturas do contorno, são definidas como uma estimativa da temperatura que a placa condutora teria naquele ponto, ou seja, o valor da temperatura no ponto pertencente ao contorno é estimado como uma extrapolação linear das temperaturas próximas a ele, usando para isso a mesma equação que governa o potencial nas regiões internas. Dessa forma, o potencial no contorno é calculado de modo a manter a continuidade do seguimento de plano, simulando localmente a inexistência de um obstáculo.

Tomando como base a equação de diferenças finitas (5.4), a temperatura, t_c , de um ponto do contorno é estimada em função das temperaturas próximas a ele como sendo:

$$t_c = 4t_{i,j} - t_{i,j+1} - t_{i-1,j} - t_{i+1,j}, \quad (5.7)$$

para o caso ilustrado na Figura 5.7, onde o ponto de temperatura $t_{i,j}$ tem apenas um vizinho pertencente ao contorno, ou ainda:

$$t_c = \frac{4}{N_c} t_k - \frac{1}{N_c} (t_a + t_b + \dots + t_l), \quad (5.8)$$

para o caso genérico, em que o ponto de temperatura t_k tem N_c vizinhos pertencentes ao contorno e o termo $(t_a + t_b + \dots + t_l)$ representa a soma das temperaturas dos pontos vizinhos de t_k que pertencem à placa condutora, ou seja, que pertencem ao potencial.

Como t_c é um elemento do vetor \mathbf{t}_c e está escrito em (5.8) em função das temperaturas existentes no vetor \mathbf{t} , pode-se então reescrever esta equação em notação matricial como sendo:

$$\mathbf{t}_c = B\mathbf{t}, \quad (5.9)$$

em que B é uma matriz quadrada de ordem n , cujos elementos são os coeficientes do sistema de equações montado a partir de (5.8). Substituindo (5.9) em (5.6) obtém-se:

$$\mathbf{t} = A\mathbf{t} + B\mathbf{t} + \mathbf{t}_d, \quad (5.10)$$

que é a equação matricial que modela o potencial harmônico discretizado, utilizando como condição de contorno a Condição de Horizonte Continuado, proposta neste trabalho.

5.3 A obtenção do potencial

Em todos os trabalhos encontrados na área de robótica envolvendo algum tipo de estratégia de planejamento baseada em funções harmônicas discretizadas, os valores do potencial eram sempre obtidos mediante o emprego de métodos numéricos iterativos, tendo sido propostas diferentes soluções para acelerar a convergência dos métodos em questão, tal qual mencionado no Capítulo 4. No entanto, como o foco deste trabalho é a qualidade do potencial obtido, não houve grande preocupação com o tempo de processamento e por isso nenhuma atenção foi dada ao método de solução utilizado. Vale ressaltar que, construído o sistema de equações lineares que representa o potencial desejado, as técnicas já desenvolvidas para acelerar a obtenção do mesmo (ver Capítulo 4) mantêm sua aplicabilidade, uma vez que as técnicas existentes não apresentam restrições quanto ao tipo de condição de contorno aplicada.

A solução utilizada neste trabalho foi a construção de uma única matriz M cuja simples inversão resultasse na determinação de todo o potencial, como mostrado na manipulação abaixo:

$$I\mathbf{t} = A\mathbf{t} + B\mathbf{t} + \mathbf{t}_d, \quad (5.11)$$

em que I é a matriz identidade de ordem n . Fazendo:

$$(I - A - B)\mathbf{t} = \mathbf{t}_d, \quad (5.12)$$

$$\mathbf{t} = (I - A - B)^{-1}\mathbf{t}_d, \quad (5.13)$$

ou ainda:

$$\mathbf{t} = M^{-1}\mathbf{t}_d, \quad (5.14)$$

com M definida como sendo $(I - A - B)$.

Método de inversão utilizado

A partir da formalização da matriz M , foi aplicado um método numérico exato clássico na solução de sistemas lineares desse tipo, a Eliminação de Gauss. No entanto, a aplicação desse método de inversão em um ambiente discretizado em 10000 pontos (100×100), dos quais 7566 eram navegáveis, gerou uma matriz de ordem $n = 7566$, o que resultou em um processo de inversão que durou cerca de 13,6 *segundos*, utilizando o *software Matlab*[®], em um computador com um processador de quatro núcleos de 64 Bits, 1.6 GHz, memória RAM de 6 Gb e um sistema operacional *Windows*[®] 7 também de 64 Bits.

Buscando alternativas para acelerar o processo, observou-se que a matriz M é uma matriz esparsa, cujas características podem ser utilizadas tanto para diminuir a memória necessária para o seu armazenamento quanto para acelerar o processo de inversão [142]. Utilizando as funcionalidades do *software Matlab*[®] para armazenamento e operações com matrizes esparsas, foi possível, utilizando ainda um método numérico exato, obter a inversa da matriz M em 0,06 *segundos*.

Considerando todo o processo de construção das matrizes e vetores que modelam o ambiente, inversão da matriz M esparsa e cálculo do campo vetorial, o método de planejamento proposto precisou de 0,4 *segundos*, aproximadamente, tempo considerado satisfatório tanto para a utilização do método proposto em experimentos reais quanto para dar mais agilidade na obtenção e análise dos resultados para diferentes tipos de ambientes.

Aplicação do método desenvolvido

Para ilustrar a estratégia de planejamento desenvolvida, o método proposto foi aplicado no ambiente ilustrado na Figura 5.8. Esse ambiente foi escolhido para possibilitar uma correspondência com o ambiente utilizado para apresentar a ideia intuitiva do método proposto (Figura 5.4.b).

O ambiente em questão foi discretizado em uma grade regular de 10000 pontos (100×100) e a temperatura definida na posição de destino (centro da figura) foi $t = -1$. Esse valor foi escolhido pois, como a única fonte de calor na placa é aquela posicionada no destino, a utilização da temperatura de destino igual a zero, como é feito normalmente, levaria o sistema à solução trivial, ou seja, todos os pontos iguais a zero, uma vez que as temperaturas ao longo da placa são iniciadas com zero. No entanto, qualquer valor de temperatura negativa poderia ser utilizada sem alterar o resultado qualitativamente, uma vez que o gradiente é normalizado. Além disso, é possível ainda utilizar uma temperatura

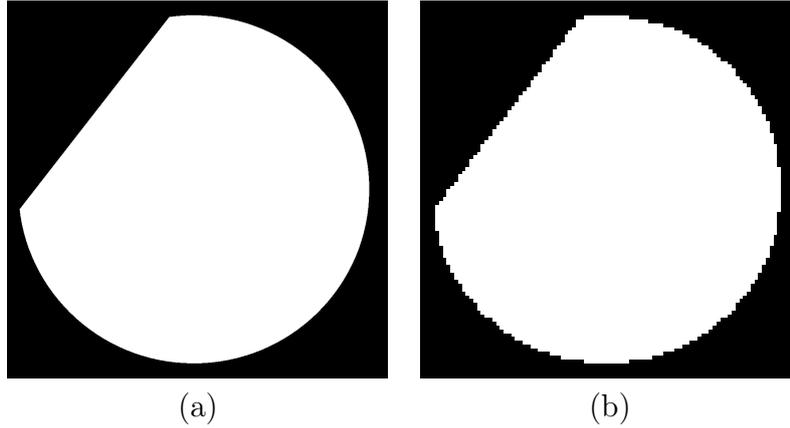


Figura 5.8: Ambiente ilustrativo circular com obstáculo: (a) original; e (b) discretizado em 10000 (100×100) pontos para possibilitar a aplicação do método de planejamento proposto.

positiva qualquer no destino e obter o mesmo resultado. Nesse caso, o robô precisa seguir o gradiente ascendente ao invés do descendente, gerando assim o mesmo resultado, qualitativamente.

Ao aplicar o método proposto neste trabalho no problema descrito no parágrafo anterior, observou-se que o gradiente de temperatura obtido era nulo para todos os pontos do potencial. Isso ocorreu pois, uma vez que no método proposto a temperatura no contorno simula a continuidade do ambiente e, além disso, a condutividade simulada na placa é perfeita, ou seja, não há perda de calor ao longo da placa, é de se esperar que, em regime estacionário, todos os pontos da placa assumam o valor da temperatura de destino, $t = -1$, dada a ausência de perda de calor no meio. O resultado disso é o surgimento de uma outra solução trivial para o problema em questão, que não a mencionada (todos os pontos com temperatura iguais a zero).

Para solucionar o problema apresentado sem modificar as propriedades desejadas para o potencial, é proposta neste trabalho a inserção de uma constante de condutividade térmica, K_{term} . Retomando a analogia com a propagação térmica, a ideia da inserção do K_{term} é modelar uma perda de calor uniforme ao longo de toda a placa, para valores de K_{term} maiores que zero (condutância nula) e menores que um (condutância máxima). Dessa forma, a temperatura em cada ponto continua sendo influenciada pela fonte de calor do ponto de destino, mas a influência dela diminui ao longo da placa, proporcionalmente à distância para o ponto de destino, mantendo, assim, tanto a direção do gradiente do potencial, quanto a redução da distorção na distribuição de temperatura (objetivo principal da idealização da CHC).

Para incluir a constante de condutividade, K_{term} , nas equações desenvolvidas até então, todas as equações a diferenças finitas apresentadas foram alteradas para incluir a

condução térmica, como mostrado a seguir:

$$t_{i,j} = K_{term} \left(\frac{1}{4}t_{i,j-1} + \frac{1}{4}t_{i,j+1} + \frac{1}{4}t_{i-1,j} + \frac{1}{4}t_{i+1,j} \right), \quad (5.15)$$

com K_{term} maior que zero e menor que um, o que gera uma leve variação nos coeficientes obtidos para as matrizes A e B , mas mantém toda a metodologia descrita anteriormente para a obtenção dessas matrizes. Com isso, a temperatura em todos os pontos da placa, $t_{i,j}$, receberá um valor, em módulo, um pouco menor do que o esperado para o caso de uma condutividade sem perdas, forçando assim o surgimento do gradiente sem perturbar a distribuição de temperatura no contorno, mantendo o perfil desejado para o potencial.

O método proposto, considerando uma constante de condutividade térmica de 0,7, foi novamente aplicado no ambiente discretizado ilustrado na Figura 5.8.b. O gradiente obtido foi normalizado e então utilizado para gerar algumas trajetórias por simulação. Este gradiente, representado por um campo vetorial, juntamente com as trajetórias obtidas para diferentes pontos de partida são apresentadas na Figura 5.9.a.

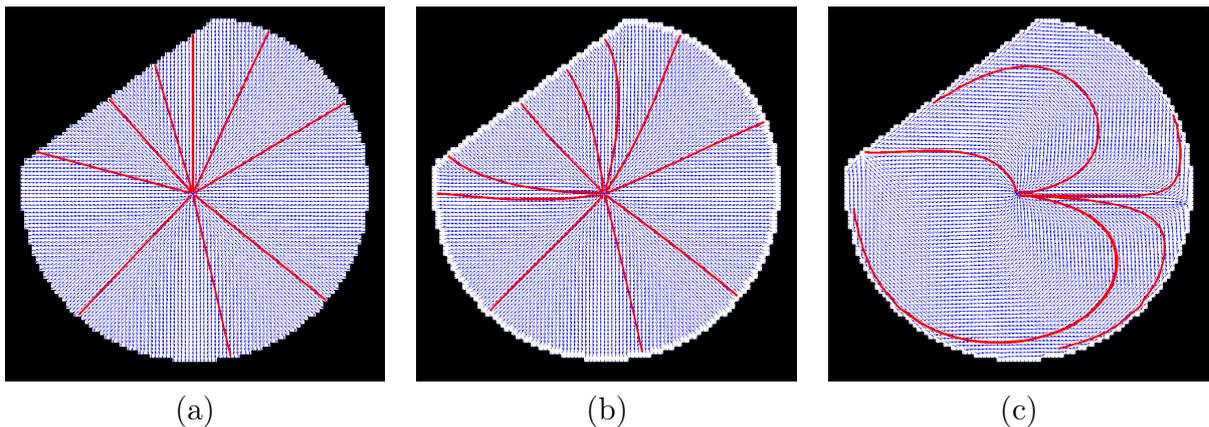


Figura 5.9: Gradiente obtido para o ambiente ilustrativo proposto, juntamente com as trajetórias geradas para diferentes pontos de partida utilizando: (a) CHC; (b) Dirichlet; e (c) Neumann.

Como pode ser observado no experimento simulado ilustrado na Figura 5.9.a, a distribuição de temperatura obtida mantém um perfil radial, mesmo na presença do obstáculo linear (canto superior esquerdo do ambiente), gerando trajetórias em linha reta até o destino para todos os diferentes pontos de partida experimentados, caracterizando experimentalmente a busca pelo menor caminho. A simulação realizada foi ainda repetida para as condições de contorno de Dirichlet e de Neumann, sendo seus resultados apresentados nas figuras 5.9.b e 5.9.c, respectivamente.

Como era esperado, os potenciais obtidos com o uso das condições de Neumann e de Dirichlet mantiveram suas características básicas de seguimento de contorno e afastamento do obstáculo, respectivamente, o que dá uma vantagem quanto ao resultado obtido para a

condição de Dirichlet, já que a disposição dos obstáculos no ambiente é prioritariamente radial. Além disso, para a implementação da condição de Neumann foi preciso definir um ponto de partida para a criação do potencial, o que gerou uma solução ainda mais distorcida para as demais condições de partida utilizadas.

Cálculo utilizado na obtenção do gradiente

Definido um potencial que soluciona um dado problema de planejamento, é preciso, a partir desse potencial, definir uma forma de utilização do mesmo para que o robô possa então ser guiado até o destino. A característica do potencial utilizada para guiar o robô é o gradiente.

Para o caso de um potencial contínuo n -dimensional U , o gradiente é unicamente descrito em um ponto como sendo o somatório vetorial da derivada direcional do potencial em cada uma das n dimensões do mesmo, ou seja,

$$\nabla U(q) = \frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k} + \dots \quad (5.16)$$

No entanto, para o caso de um potencial discreto, a definição do gradiente depende intimamente da escolha da definição da derivada a ser implementada.

Neste trabalho, e na maioria dos trabalhos encontrados na revisão bibliográfica, a técnica utilizada para o cálculo da derivada em cada uma das direções é a diferença centrada utilizando os dois vizinhos mais próximos. Essa escolha possui duas justificativas. A primeira é a simplicidade da sua obtenção, pois o cálculo considera apenas dois vizinhos para calcular as diferenças progressiva e regressiva que irão compor a diferença centrada (ver Seção 4.1.3 para mais detalhes) em cada uma das direções, assim como é feito no equacionamento do potencial em si. A segunda justificativa vem da própria idealização do potencial que considera apenas a influência direta dos vizinhos mais próximos na composição do mesmo, formando um potencial complexo a partir da composição de pequenas regiões que podem ser aproximadas por planos, o que permite a obtenção da solução do problema de planejamento através da solução de um sistema linear de equações.

Dessa forma, a derivada em cada uma das direções é dada pela média entre a diferença progressiva e a regressiva, formando a chamada diferença centrada, exemplificada a seguir para a direção x em um ponto x_i :

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x_i} = \frac{1}{2} [(x_{i+1} - x_i) + (x_i - x_{i-1})] = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}. \quad (5.17)$$

O gradiente de U em q_i pode, então, ser aproximado pelo vetor n -dimensional composto pelas aproximações das derivadas parciais em cada uma das suas direções de movimento,

ou seja,

$$\nabla U(q_i) = \left[\begin{array}{c} \frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{2} \\ \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2} \\ \frac{z_{i+1}-z_{i-1}}{2} \\ \vdots \end{array} \right]_{q_i}, \quad (5.18)$$

na qual

$$q_i = \left[x_i \quad y_i \quad z_i \quad \dots \right]^T. \quad (5.19)$$

O cálculo do gradiente apresentado é o mesmo utilizado para todos experimentos simulados apresentados nesta tese de doutorado, exceto para aqueles onde é utilizada uma discretização irregular (elementos finitos) baseada em triângulos. Nesses últimos, como é definido explicitamente um plano a cada três pontos vizinhos (elementos), o valor do gradiente interno do plano é constante e facilmente determinado pela derivada analítica da equação que define o plano em cada elemento [143], e é válido para todos os pontos dentro de cada elemento.

5.4 Demonstração de convergência

O trabalho desenvolvido nesta tese de doutorado tem como principal objetivo desenvolver uma técnica de planejamento baseada em um campo potencial que, além de não apresentar mínimos locais, possua característica qualitativas específicas, voltadas para a busca de um resultado que privilegie a menor distância percorrida pelo robô até o destino. No entanto, a ausência de mínimos locais no potencial, por si só, não é uma garantia de convergência para o método desenvolvido. Isso se deve ao fato de que, na CHC, o valor do potencial nos contornos não é unicamente determinado, variando de acordo as características do ambiente. Isso é necessário para que o gradiente do potencial possa assumir quaisquer direções nas regiões próximas ao contorno, permitindo a obtenção de caminhos de qualquer tipo, mesmo nas proximidades do contorno.

A característica apresentada, apesar de necessária para garantir a liberdade de movimento do robô nas proximidades de um obstáculo, abre a possibilidade de ocorrência de gradientes em quaisquer direções, inclusive nas direções apontando para os obstáculos, o que levaria o robô à colisão com os mesmos.

Nesse contexto, para mostrar a convergência do método desenvolvido, é necessário provar que, nas proximidades de um obstáculo, o potencial induzido no mesmo é sempre maior ou igual (quando convencionado destino com potencial negativo) que o potencial em seu vizinho imediato dentro da região navegável. Com essa característica, o gradiente do potencial nas proximidades do contorno fica restrito às direções que apontam para

o ambiente navegável, podendo ser, no máximo, paralelo ao contorno, não admitindo direções que apontem para o obstáculo e garantindo assim que o robô nunca saia da região navegável.

Uma vez que o robô se mantém na região navegável, a inexistência de mínimos locais faz com que o robô, ao seguir o gradiente descendente do potencial, chegue até o ponto de destino, garantindo assim a convergência do método proposto.

Assim sendo, para demonstrar a convergência do método, é suficiente demonstrar a inexistência de pontos críticos no interior do potencial (mínimos ou máximos locais) e que a temperatura induzida pela CHC no obstáculo nunca é menor que a temperatura do ponto vizinho a esse obstáculo pertencente à placa condutora (região navegável).

Para demonstrar a inexistência de mínimos (ou máximos) locais no interior da região navegável, é reproduzido a seguir o Corolário 1.9 de [51], referente ao Princípio do Máximo, propriedade das funções harmônicas. Esse corolário será utilizado na prova do Lema 1, apresentado na sequência.

Corolário 1 [51] : *Suponha Ω um domínio limitado e U uma função real, contínua e harmônica em Ω . Então, os valores máximos e mínimos de U acontecem sobre o contorno de Ω , $\partial\Omega$.*

Lema 1 : *Seja $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que define o potencial em N , em que $N \subset \mathbb{R}^2$ é o conjunto fechado e limitado formado por todos os pontos (x, y) pertencentes à região navegável. Se U é uma função harmônica, então U não possui mínimos ou máximos locais em N .*

Prova:

Como N é um conjunto fechado e limitado formado por todos os pontos navegáveis (x, y) , e U é uma função harmônica definida sobre N , então, pelo Corolário 1, os máximos (ou mínimos) só podem ocorrer na fronteira de N . Logo, é garantida a inexistência de pontos críticos fora desses pontos, ou seja, não existem máximos (ou mínimos) locais na região navegável N .

□

O próximo passo é demonstrar que a temperatura induzida pela CHC no obstáculo nunca é menor que a temperatura do ponto vizinho a esse obstáculo pertencente à placa condutora (região navegável). Para tanto, considere a situação ilustrada na Figura 5.5 e descrita na definição da CHC (Definição 8).

Considerando um potencial contínuo U que respeita o Princípio do Máximo (reproduzido no Corolário 1), para uma região BCD interna do potencial, mas definida nas proximidades do contorno, o seguinte lema pode ser formulado:

Lema 2 : *Seja $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que define o potencial em N com pelo menos um mínimo global e sem máximos quaisquer fora da fronteira de N , em que*

$N \subset \mathbb{R}^2$ é o conjunto fechado formado por todos os pontos (x, y) pertencentes à região navegável. Sejam B, C e D pontos pertencentes a N , tal que B e D estão na fronteira de N e C fora dessa fronteira. Seja $C' = (x_{C'}, y_{C'})$ a projeção ortogonal de $C = (x_C, y_C)$ na reta que passa por BD e B, C e D suficientemente próximos uns dos outros, tal que C' pertença à fronteira de N e ao segmento de reta \overline{BD} , e $U(x, y)$ possa ser aproximado por um plano na região BCD . Então, se o potencial $U(x, y)$ não possui mínimos no interior de BCD , $U(x_C, y_C) \leq U(x_{C'}, y_{C'})$.

Prova:

Seja U_{BCD} o potencial $U(x, y)$ definido na região $BCD \subset N$. Pela suposição do Lema 2, U_{BCD} pode ser aproximado por um plano e, como não há ocorrência de mínimos no interior de BCD , o gradiente do plano U_{BCD} é sempre não nulo.

Para demonstrar que $U(x_C, y_C) \leq U(x_{C'}, y_{C'})$, será utilizado o argumento da contradição. Dada a existência de um gradiente não nulo em U_{BCD} , considere a hipótese de o potencial $U_C = U(x_C, y_C)$ ser maior que o potencial $U_{C'} = U(x_{C'}, y_{C'})$. Pela suposição do Lema 2, a reta $BC'D$ pertence à fronteira da região navegável N . Além disso, a fronteira de N é localmente paralela ao contorno do potencial, uma vez que a região BCD precisa ser pequena para possibilitar a aproximação de U_{BCD} por um plano. Dessa forma, a reta CC' é normal à fronteira da região navegável N , localmente definida pela reta BD .

Nessas condições, a hipótese apresentada, $U_C > U_{C'}$, implica um gradiente com componente não nulo na direção normal ao contorno e apontando para C , ponto da região BCD mais afastado da fronteira de N . Como U é contínua, isso implica que em algum ponto $(x, y) \in N \setminus BCD$ o potencial $U(x, y)$ é maior que o potencial U_C , e como existe pelo menos um ponto de mínimo fora da região BCD , a função U apresentará pelo menos um máximo na região $N \setminus BCD$, o que, segundo a definição do Lema 2, é uma contradição.

Dessa forma, como U_C não pode ser maior que $U_{C'}$, então sempre vale a relação $U_C \leq U_{C'}$.

□

Como consequência direta do Lema 2, pode-se escrever o seguinte corolário:

Corolário 2 : *Seja $(-\nabla U)_\nu$ a componente do gradiente descendente de U na direção ν . Se o potencial $U(x, y)$ e a região BCD possuem as características descritas no Lema 2, então a componente do gradiente descendente de U em BCD na direção CC' , $(-\nabla U)_{CC'}$, nunca aponta para o contorno.*

O Corolário 2 é consequência direta do Lema 2 pois este último garante que, para a região BCD descrita, o potencial em C é sempre menor ou igual ao potencial em um ponto C' pertencente ao segmento de reta \overline{BD} que, por sua vez, está tão próximo quanto se queira da fronteira de N . Dessa forma, uma vez que BD é localmente paralela ao contorno, e a reta CC' é sempre normal a este, o gradiente descendente nessa direção nunca aponta para C' , logo, nunca aponta para o contorno.

Considerando o Lema 2 e o Corolário 2, é apresentado o seguinte teorema:

Teorema 1 : *Seja o conjunto $N \subset \mathbb{R}^2$, os pontos B, C, C' e D pertencentes a N e o potencial $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem as condições do Lema 2. Seja O o conjunto de todos os pontos não navegáveis do ambiente (obstáculos), definido por $\mathbb{R}^2 \setminus N$. Seja um ponto $E = (x_E, y_E) \in O$ e definido na fronteira de O , em que E pertence à reta que passa por C e C' . Então, se o potencial no ponto E for calculado utilizando a CHC, $U(x_E, y_E) \geq U(x_{C'}, y_{C'})$.*

Prova:

O potencial $U_E = U(x_E, y_E)$ é definido pela CHC como uma extrapolação linear do potencial U_{BCD} . Como E, C' e C são colineares por definição e, nas condições definidas no Lema 2, o potencial na região BCD é aproximado por um plano, então os potenciais $U_E, U_B, U_{C'}$ e U_C são coplanares e os pontos $(x_E, y_E, U_E), (x_{C'}, y_{C'}, U_{C'})$ e (x_C, y_C, U_C) são colineares em \mathbb{R}^3 . Mas, de acordo com o Lema 2, o potencial U_C é sempre menor ou igual ao potencial $U_{C'}$, então $U_E \geq U_{C'} \geq U_C$.

□

Dessa forma, fica provado que, ao definir o potencial nos pontos de contorno através da CHC, o potencial induzido no ponto de contorno (E) é sempre maior que o seu vizinho imediato dentro do ambiente navegável (C'). Essa característica garante que, mesmo nas proximidades do contorno, se o gradiente descendente de U for utilizado para guiar o robô até o destino (ponto de mínimo), o robô ou irá se afastar do obstáculo ou, no máximo, irá tangenciá-lo (seguindo paralelo a ele por algum tempo), uma vez que U_E pode ser igual a U_C , mas nunca será levado a colidir com o mesmo. Como no potencial U os mínimos presentes estão associados aos pontos de destino (pontos críticos artificiais), ao seguir o gradiente descendente de U o robô sempre alcançará um ponto de destino, se o caminho até ele existir.

5.5 Planejamento completo por resolução

A demonstração de convergência apresentada na Seção 5.4 garante que o robô, ao seguir o gradiente descendente do potencial gerado a partir da CHC, irá chegar até o destino, sempre que um caminho até ele existir.

No entanto, pelas restrições impostas pelo Lema 2, os pontos B, C e D devem ser suficientemente próximos uns dos outros, o que pode requerer uma discretização do ambiente em alta resolução.

Dessa forma, a depender das características do ambiente e da densidade de obstáculos observada, o método pode não funcionar para grades em baixa resolução, pois esta pode ser insuficiente para garantir a demonstração de convergência. Essa característica representa uma limitação do método proposto. Nesses casos, a viabilidade da implementação

do método passa a depender da capacidade de aproximação do potencial, que está estritamente associada à resolução da discretização. Apesar de não existir um limite máximo para o aumento da resolução de uma grade de discretização, resoluções muito elevadas implicam um elevado custo computacional, que pode vir a ser proibitivo. Além disso, uma vez que o método parte de uma representação discreta do ambiente, uma baixa resolução pode, por si só, impossibilitar uma boa representação do mesmo, sendo esta uma limitação de quaisquer métodos discretos de representação.

A restrição apresentada faz com que o método proposto não possa ser classificado como um método de planejamento completo (ver Definição 7), assim como a maioria dos métodos de planejamento onde o ambiente é probabilisticamente ou deterministicamente amostrado.

No entanto, se a resolução da discretização do ambiente é arbitrária, para os métodos deterministicamente amostrados, como é o caso do método proposto, o método é classificado em um tipo relaxado de completude, chamado de método completo por resolução (*resolution complete*) (ver Seção 3.4.4). Nesses métodos, quanto maior a resolução da grade melhor é a aproximação do potencial em relação ao potencial contínuo desejado.

Capítulo 6

Resultados e Discussões

No Capítulo 5 foi apresentada e formalizada uma nova estratégia de planejamento baseada em um campo potencial gerado a partir da definição de um novo tipo de condição de contorno, a CHC (Condição de Horizonte Continuado). Na Seção 6.1 do presente capítulo será apresentada uma análise qualitativa do método desenvolvido, destacando suas principais características. Na Seção 6.2, o planejamento baseado na CHC será comparado com outras técnicas de planejamento e sua aplicação será considerada na solução de algumas extensões do problema básico de planejamento, sendo ainda apresentada uma implementação do método desenvolvido no Capítulo 5 utilizando dessa vez uma grade irregular através do método de elementos finitos.

6.1 Análise qualitativa do método proposto

Nessa seção, são apresentados diversos resultados teóricos e experimentais (realizados através de simulações) que permitem destacar as características qualitativas do potencial resultante da aplicação da CHC. Para facilitar a análise dos resultados, os ambientes utilizados nos experimentos por simulação são ambientes simples que apresentam situações clássicas de mínimos locais, possibilitando assim uma análise mais detalhada do resultado obtido.

6.1.1 Decaimento exponencial

Foram observadas algumas características qualitativas do potencial obtido utilizando a CHC, uma delas é o decaimento exponencial da temperatura, similar ao observado no potencial gerado pela condição de Dirichlet, como ilustrado na Figura 6.1.

O decaimento exponencial observado não influencia diretamente no caminho definido pelo planejamento, como comentado anteriormente no Capítulo 5, uma vez que o gradiente é normalizado antes de gerar a trajetória, mantendo assim a informação de direção do gradiente. No entanto, assim como acontece para a condição de Dirichlet, o surgimento

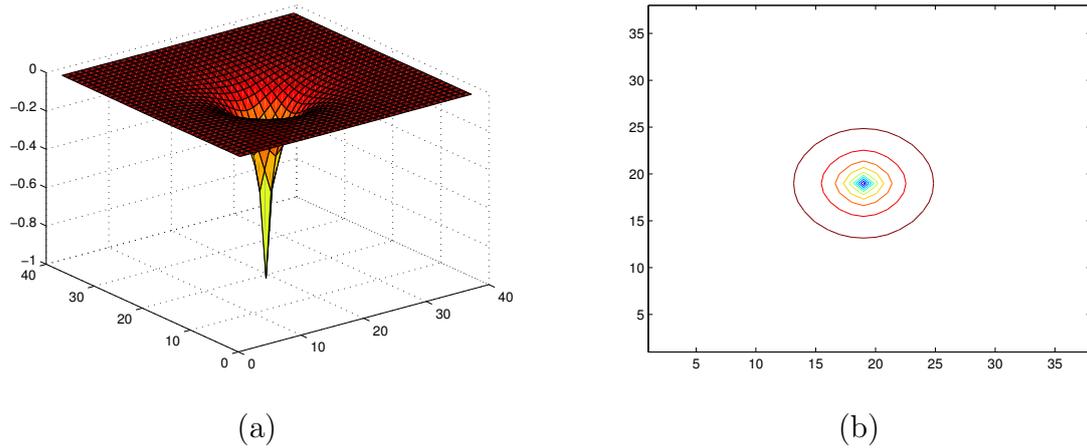


Figura 6.1: Distribuição de temperatura utilizando a condição CHC: (a) potencial obtido; e (b) curvas de nível associadas.

de regiões de gradiente com amplitude muito baixa pode gerar problemas numéricos de convergência em ambientes muito grandes. Nesses casos a utilização de métodos numéricos exatos, como a eliminação de Gauss, são mais indicados para a solução do sistema de equações resultante por sua menor dependência em relação a parâmetros de convergência.

O decaimento exponencial das temperaturas com o aumento da distância em relação ao ponto de destino representa também uma limitação computacional do método aqui desenvolvido. Isso se deve ao fato de que, para uma mesma resolução de discretização, quanto maior a região navegável (considerando uma comparação com ambientes de características similares), menores serão as diferenças de temperatura observadas entre dois pontos vizinhos distantes do destino e maior será o número de casas decimais necessárias para representá-las. Consequentemente, maior será a precisão exigida nos cálculos durante o processo de solução do sistema de equações, podendo este problema, inclusive, inviabilizar a obtenção do potencial para o caso de ambientes muito grades ou com uma densidade de obstáculos muito alta.

6.1.2 Variação do potencial com o coeficiente K_{term}

A constante térmica, K_{term} , utilizada para possibilitar o surgimento do gradiente e, por conseguinte, possibilitar a utilização da ideia central deste trabalho, mostrou-se bastante útil no processo a ser seguido para transformar um potencial em ações de controle que guiarão o robô (ver Figura 3.7 no Capítulo 3).

Como pode ser observado na Figura 6.2, o potencial varia muito pouco para uma faixa larga de valores de K_{term} , o que é uma vantagem no sentido de não necessitar de uma sintonia desse parâmetro para diferentes configurações de ambiente. Além disso, pode-se observar também que, com o aumento do valor do K_{term} , a trajetória continua

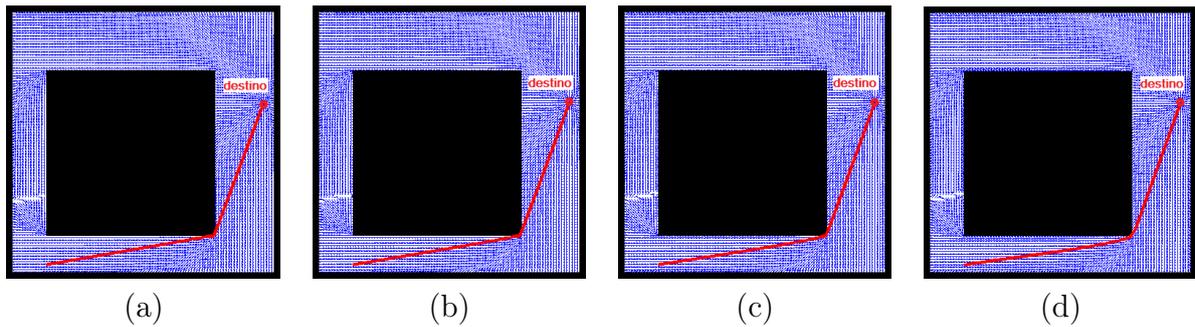


Figura 6.2: Demonstração do efeito da constante térmica no resultado do planejamento: (a) $K_{term} = 0,1$; (b) $K_{term} = 0,3$; (c) $K_{term} = 0,5$; e (d) $K_{term} = 0,7$.

praticamente a mesma, mas as curvas bruscas começam a ser suavizadas para valores acima de 0,6, aproximadamente, como pode ser percebido na Figura 6.2.d e, de forma mais explícita, na Figura 6.3 para um $K_{term} = 0,8$ comparado com um $K_{term} = 0,3$. Assim, a escolha do valor do K_{term} pode, a depender do objetivo do planejamento e do tipo de robô utilizado, auxiliar na adequação do caminho planejado ao robô, como acontece nos casos de robôs tipo carro, onde apenas curvas suaves são exequíveis.

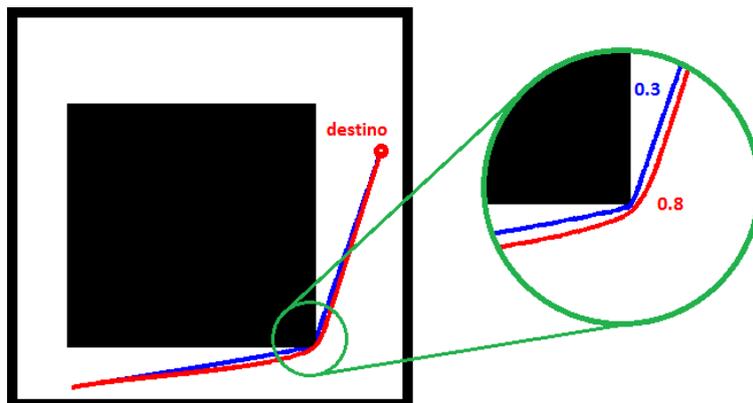


Figura 6.3: Demonstração da suavização do caminho planejado utilizando $K_{term} = 0,8$ (curva suavizada) e $K_{term} = 0,3$ (curva fechada).

6.1.3 Efeito da inserção de um obstáculo próximo à trajetória do robô

Tal como explicado ao longo deste capítulo, a principal característica almejada para o resultado do planejamento proposto é suprimir a distorção causada pelo obstáculo na distribuição de temperatura da região condutora (livre de obstáculos). Para ilustrar essa característica, considere o potencial resultante da aplicação do planejamento aqui proposto em um ambiente limitado e sem obstáculos internos, como ilustrado na Figura 6.4.a.

Nessa figura, é apresentada ainda a trajetória obtida até o destino especificado, seguindo o gradiente descendente do potencial.

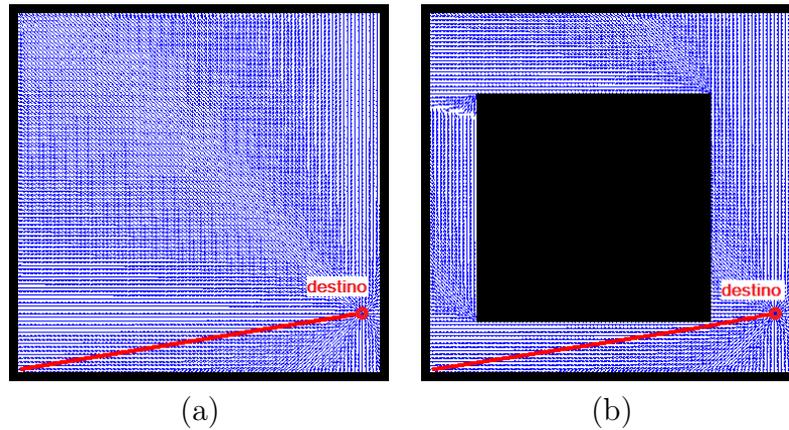


Figura 6.4: Trajetória resultante para a CHC em um ambiente limitado: (a) sem obstáculos internos; e (b) com obstáculos internos.

O experimento simulado ilustrado na Figura 6.4.a é repetido para o mesmo ambiente, agora com um obstáculo interno, e o resultado obtido é apresentado na Figura 6.4.b. A comparação visual entre as trajetórias apresentadas nas figuras 6.4.a e 6.4.b mostra que a inserção de um obstáculo no ambiente não distorceu o perfil do potencial nos pontos que têm visada direta com o destino, mesmo que estes estejam próximos do obstáculo.

O experimento simulado foi repetido para as condições de Dirichlet e Neumann para fins de comparação. Os resultados obtidos são apresentados nas figuras 6.5 e 6.6, respectivamente, mostrando que, mesmo o ponto de partida tendo visada direta com o ponto de destino nos dois casos, a trajetória resultante não é a mais curta em nenhum deles (com ou sem obstáculo), sofrendo distorção ainda maior com a inserção de um novo obstáculo nos dois casos (Dirichlet e Neumann), sendo esta perceptível mesmo visualmente.

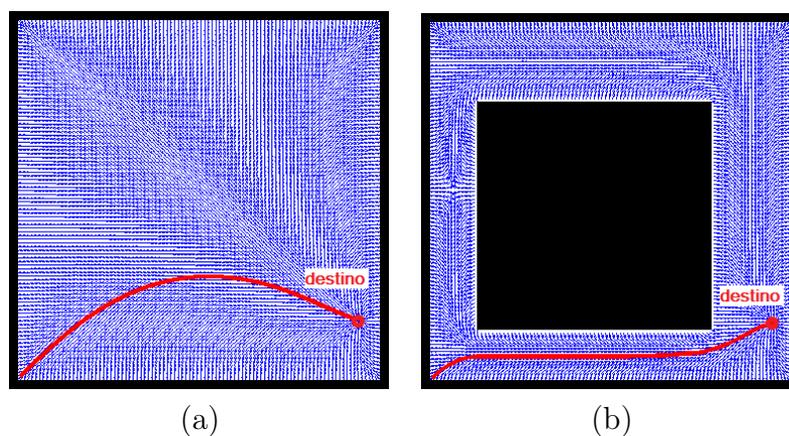


Figura 6.5: Trajetória resultante para a condição de Dirichlet em um ambiente limitado: (a) sem obstáculos internos; e (b) com obstáculos internos.

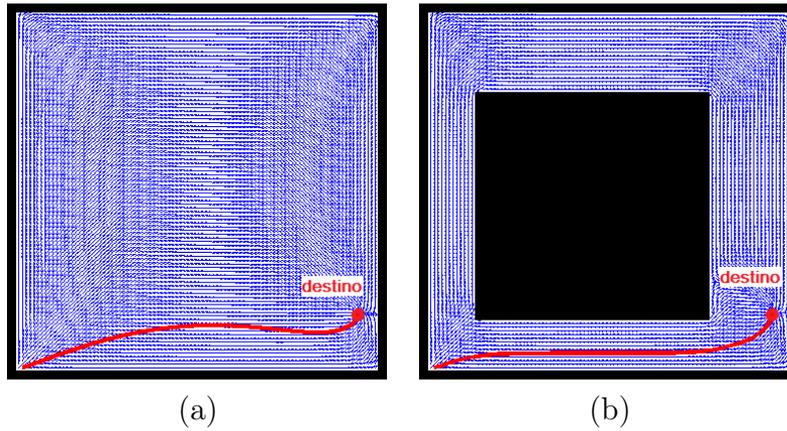


Figura 6.6: Trajetória resultante para a condição de Neumann em um ambiente limitado: (a) sem obstáculos internos; e (b) com obstáculos internos.

A comparação das trajetórias ponto a ponto utilizando a CHC com e sem a inserção do obstáculo, apresentada na Figura 6.7, mostra que a diferença entre estas trajetórias chegou no máximo a $0,5h$, em que h é a distância entre dois pontos do potencial discretizado (resolução de discretização), o que é um resultado muito bom, considerando que o ambiente simulado é representado por uma grade com 10000 pontos (100×100).

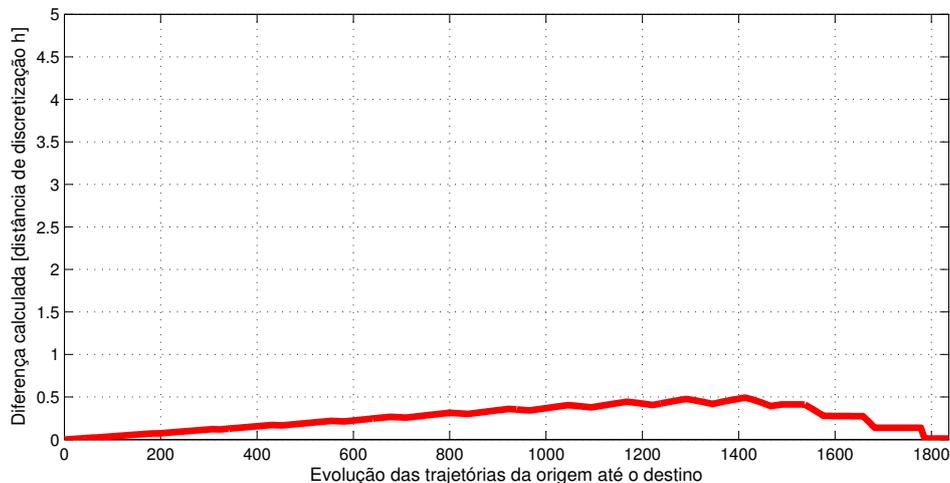


Figura 6.7: Distorção causada pela condição de contorno: módulo das distâncias ponto a ponto entre as duas trajetórias avaliadas (Figura 6.4.a e Figura 6.4.b) utilizando a CHC.

Adicionalmente, é apresentada na Figura 6.8 uma comparação entre as distorções causadas no potencial resultante pelo uso das condições de contorno de Neumann, Dirichlet e a CHC quando um obstáculo é inserido na região navegável. Nas condições clássicas, mesmo o ponto de partida e o ponto de destino tendo visada direta antes e depois da inserção do obstáculo, o caminho executado pelo robô é alterado drasticamente se comparado com a CHC. Com essa comparação, fica evidente que as distorções causadas no

potencial pela inserção de um obstáculo é reduzida na CHC, como era objetivado na sua idealização, característica que não foi encontrada em qualquer outro trabalho relacionado.

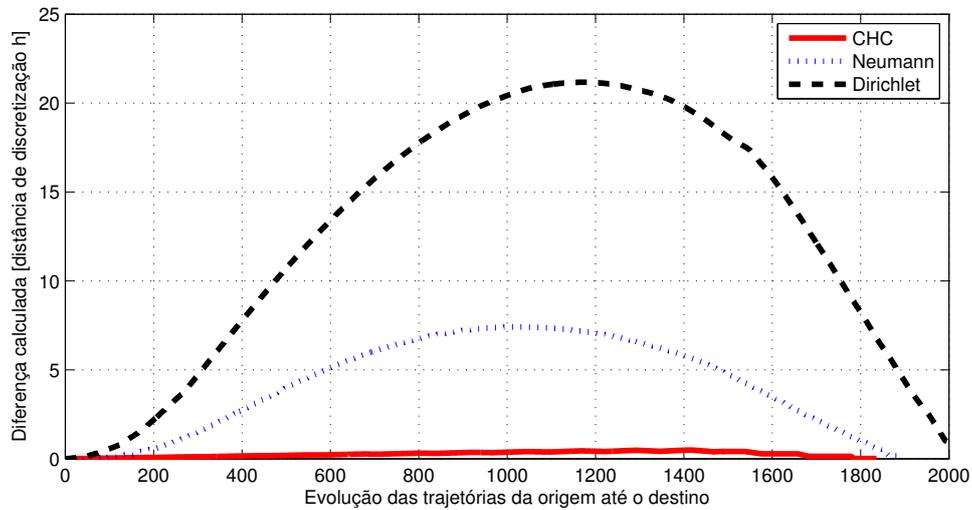


Figura 6.8: Distorção causada pela condição de contorno: módulo das distâncias ponto a ponto entre as duas trajetórias avaliadas (com e sem a inserção do novo obstáculo) utilizando as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e CHC.

O resultado apresentado é válido também para a inserção de mais de um obstáculo, ou mesmo para mudanças no contorno externo que limita o ambiente, uma vez que esse é também um obstáculo, como pode ser observado no experimento simulado ilustrado na Figura 6.9.

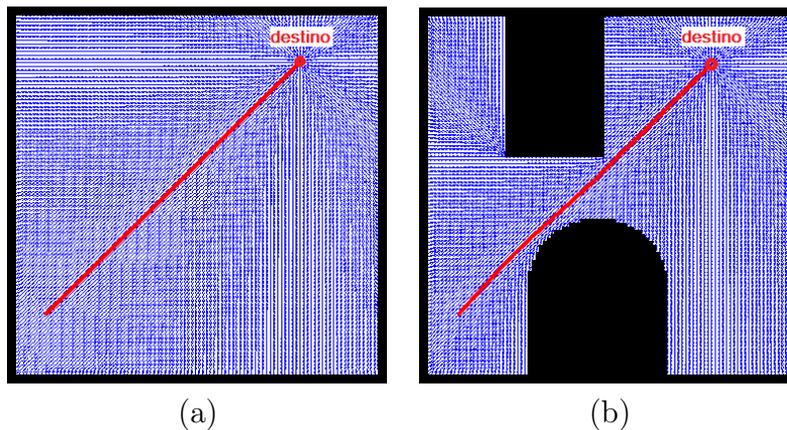


Figura 6.9: Trajetória resultante para a CHC em um ambiente limitado: (a) sem obstáculos internos; e (b) com alteração no contorno que limita o ambiente.

Os resultados experimentais apresentados nessa seção evidenciam uma redução na distorção causada pelos obstáculos no potencial U nas proximidades do contorno quando aplicada a CHC em detrimento das condições de contorno clássicas. De acordo com a

análise apresentada no Capítulo 5, a redução da influência do obstáculo em U possibilita que o gradiente deste último seja definido majoritariamente pela fonte inserida no ponto de destino, possibilitando a obtenção de caminhos mais curtos, característica observada experimentalmente em todos os testes realizados durante este trabalho.

6.1.4 A CHC e a busca pelo menor caminho

O planejamento de movimento proposto nesta tese de doutorado faz uso de uma inspiração em um fenômeno físico (propagação térmica) para tentar obter um modelo que represente as características esperadas para esse fenômeno. O modelo criado para representar a continuidade do ambiente no contorno é uma nova forma de definir o contorno de um ambiente chamada de Condição de Horizonte Continuado (CHC).

Por ser uma aproximação discretizada da situação ideal, o resultado obtido pela CHC não pode ser referido como ótimo no sentido de menor distância até o destino, pois para isso, seria necessário provar que toda a distorção observada no gradiente do potencial é efeito da discretização do mesmo. Por isso, neste trabalho, é dito que o planejamento baseado na CHC tem por objetivo, *buscar o menor caminho até o destino*, termo utilizado ao longo de todo o texto uma vez que essa é a inspiração para a sua idealização, sem, no entanto, afirmar que o caminho mais curto até o destino seja alcançado.

Uma das características que impedem a demonstração matemática da otimalidade do potencial da CHC para qualquer K_{term} , quando o objetivo é a obtenção do caminho mais curto até o destino, é a variação da trajetória observada quando diferentes valores de K_{term} são utilizados em um mesmo problema de navegação. No entanto, como mostrado na Seção 6.1.2, mesmo para valores elevados de K_{term} , onde a trajetória se afasta do caminho mais curto até o destino para possibilitar a realização de curvas mais suaves, o caminho executado é ainda um caminho muito curto até o destino, especialmente se comparado com os resultados clássicos da área (Neumann e Dirichlet).

Apesar de não ser demonstrada a obtenção do caminho de menor distância até o destino, para representações discretizadas do ambiente, os resultados obtidos utilizando a CHC indicam que, experimentalmente, as trajetórias executadas pelo robô são muito próximas do caminho de menor distância até o destino, sendo por vezes impossível, verificar qualquer distorção nos resultados obtidos, especialmente para baixos valores de K_{term} . Um dos resultados que mostram mais claramente o efeito da nova condição de contorno no potencial resultante é a comparação entre a CHC e as condições de contorno clássicas (Dirichlet e Neumann) que será apresentada na próxima seção (Seção 6.2), dedicada exclusivamente aos resultados experimentais.

6.2 Resultados experimentais

Nessa seção, são apresentados diversos resultados experimentais que permitem uma melhor comparação entre a condição de contorno proposta nessa tese de doutorado (CHC) e as condições de contorno clássicas (Dirichlet e Neumann). Adicionalmente, são apresentados resultados em ambientes complexos, além da aplicação do método de planejamento baseado na CHC em diversas extensões do problema básico de planejamento para ilustrar a grande aplicabilidade do método proposto. Ainda nessa seção, é apresentada uma implementação da CHC para grades irregulares utilizando elementos finitos e uma comparação com o método de planejamento denominado *Wavefront*.

6.2.1 Comparação: Dirichlet, Neumann e CHC

Para ilustrar melhor as diferentes características obtidas como resultado da aplicação da Condição de Horizonte Continuado na obtenção do potencial, a CHC foi utilizada para gerar trajetórias no ambiente motivacional apresentado na Figura 1.2, utilizada na introdução deste trabalho. Naquele momento, esse ambiente foi escolhido para ilustrar que as condições de contorno clássicas de Dirichlet e Neumann não apresentam bons resultados quando existe uma preocupação com a busca pelo menor caminho, destacando, assim, que ambos, em muitas situações, resultam em trajetórias excessivamente longas, apesar de não serem observados mínimos locais no potencial resultante.

O ambiente em questão foi, então, utilizado em um experimento por simulação, no qual um ponto de destino e quatro pontos de partida foram determinados. O gradiente resultante, juntamente com as trajetórias obtidas para as condições de Dirichlet e Neumann são apresentados nas figuras 6.10.a e 6.10.b, respectivamente, enquanto que os resultados obtidos para a CHC utilizando $K_{term} = 0,1$ e $K_{term} = 0,8$ são apresentados nas figuras 6.10.c e 6.10.d, respectivamente.

Comparando os resultados apresentados na Figura 6.10, é possível notar a diferença entre as propriedades do potencial resultante da aplicação de cada uma das três condições de contorno utilizadas. No potencial de Dirichlet o robô procura sempre o afastamento dos obstáculos evitando corredores longos como o da parte inferior do ambiente. No potencial de Neumann, uma vez na região de contorno, o robô segue a parede do obstáculo até que esteja bem próximo ao destino, o que eventualmente resulta em caminhos mais longos. E no potencial da CHC o robô pode tanto tangenciar quando afastar-se do obstáculo, o que possibilita uma maior diversidade nas características do caminho obtido, podendo, dessa forma, navegar em corredores longos ou seguir paredes, sempre que for necessário apresentar estas características na trajetória resultante, o que possibilita a obtenção de caminhos mais curtos quando comparados com aos obtidos pelas condições de contorno clássicas.

Uma outra característica da CHC que pode ser observada na Figura 6.10 é em relação

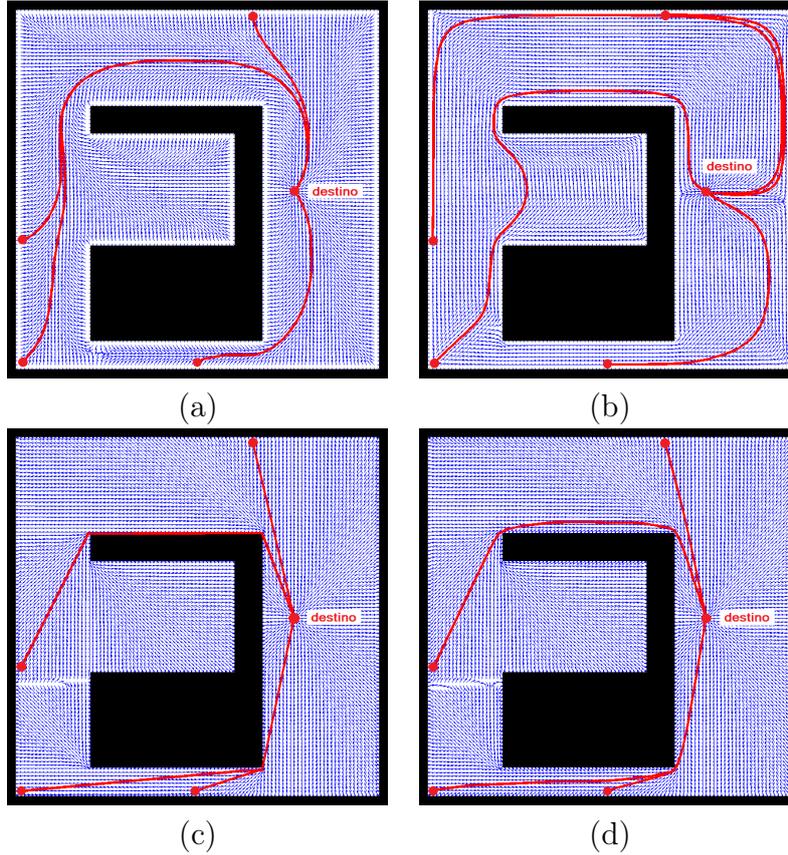


Figura 6.10: Gradiente resultante e trajetórias obtidas para quatro pontos de partida distintos utilizando: (a) Dirichlet; (b) Neumann; (c) CHC com $K_{term} = 0, 1$; e (d) CHC com $K_{term} = 0, 8$.

ao campo vetorial do potencial. Note que, mesmo para diferentes valores de K_{term} os campos vetoriais resultantes da aplicação da CHC produzem trajetórias qualitativamente semelhantes, como pode ser observado pela comparação das trajetórias apresentadas nas figuras 6.10.c e 6.10.d. Isso evidencia que, mesmo para valores elevados de K_{term} , onde as curvas são suavizadas, o potencial resultante não “muda a sua opinião” sobre qual direção o robô deve seguir, mudando apenas as características da trajetória executada, independentemente do fato de passar ou não por um corredor estreito, mantendo, ainda assim, a busca pelo caminho mais curto, dessa vez admitindo uma suavização da trajetória nas curvas.

Nas figuras 6.11, 6.12, 6.13, 6.14 e 6.15 são apresentados resultados similares àquelas da Figura 6.10, comparando as três condições de contorno em outros ambientes. Os resultados, apesar de serem relativos a mapas com características diferentes, são qualitativamente semelhantes o que é uma evidência prática da análise qualitativa apresentada nessa seção. Adicionalmente, é apresentado na tabela 6.1 as distâncias percorridas em unidades de discretização, $[un]$, para cada condição de contorno em cada um dos experimentos por simulação apresentados nessa seção. Os resultados apresentados nessa tabela

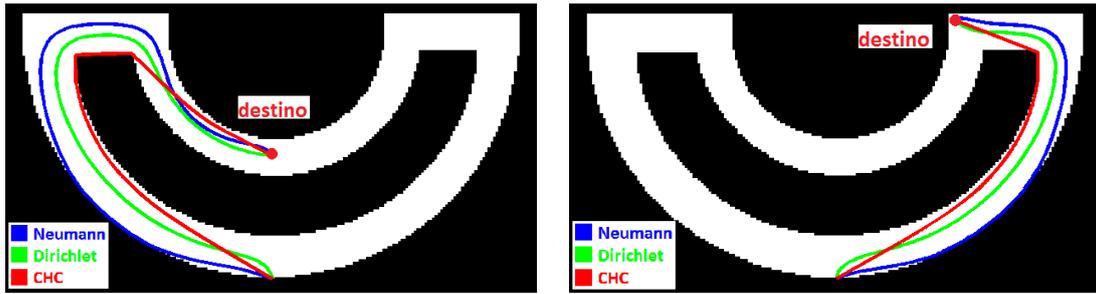


Figura 6.11: Comparação entre as trajetórias obtidas para dois destinos diferentes utilizando as condições de Neumann, Dirichlet e CHC em um ambiente discretizado.

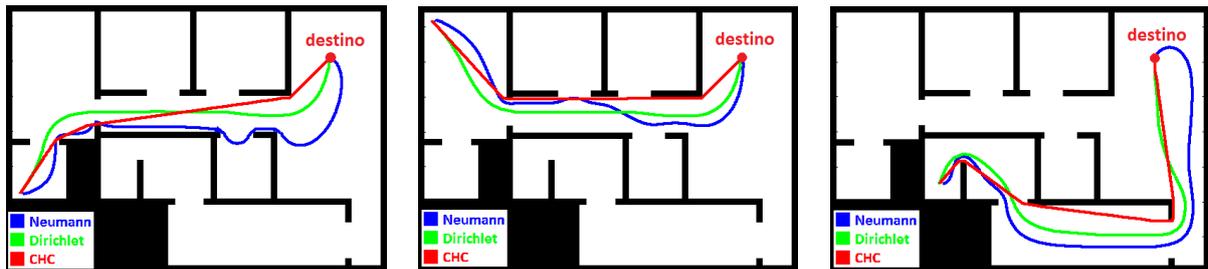


Figura 6.12: Comparação entre as trajetórias obtidas para três pontos de partida e um único destino utilizando as condições de Neumann, Dirichlet e CHC em um ambiente discretizado.

mostram que, em todos os testes realizados, o caminho percorrido pela CHC foi menor que o caminho percorrido pelas condições de Dirichlet e Neumann, mesmo no caso em que a condição de Neumann gerou um caminho mais curto que a condição de Dirichlet.

Os resultados experimentais apresentados nessa seção são um forte indício de que o caminho obtido utilizando a CHC é menor que os caminhos obtidos pelas condições de contorno clássicas, no contexto de potenciais harmônicos. No entanto, para que essa afirmação pudesse ser feita de forma geral e independentemente de resultados, seria necessária uma demonstração formal da obtenção dessa característica.

6.2.2 Resultados para a CHC em ambientes complexos

Com o intuito de mostrar a aplicabilidade do método desenvolvido, o planejamento baseado na CHC foi utilizado em ambientes de maior complexidade quando comparados com os ambientes utilizados até o momento. A estratégia de planejamento foi aplicada em ambientes extraídos de outros trabalhos da área de planejamento encontrados durante a revisão bibliográfica, além de alguns outros ambientes de teste idealizados durante a etapa de realização de testes.

Nas figuras 6.16, 6.17, 6.18, 6.19 e 6.20 são apresentados os resultados obtidos nos ambientes considerados para diferentes pontos de partida e de destino.

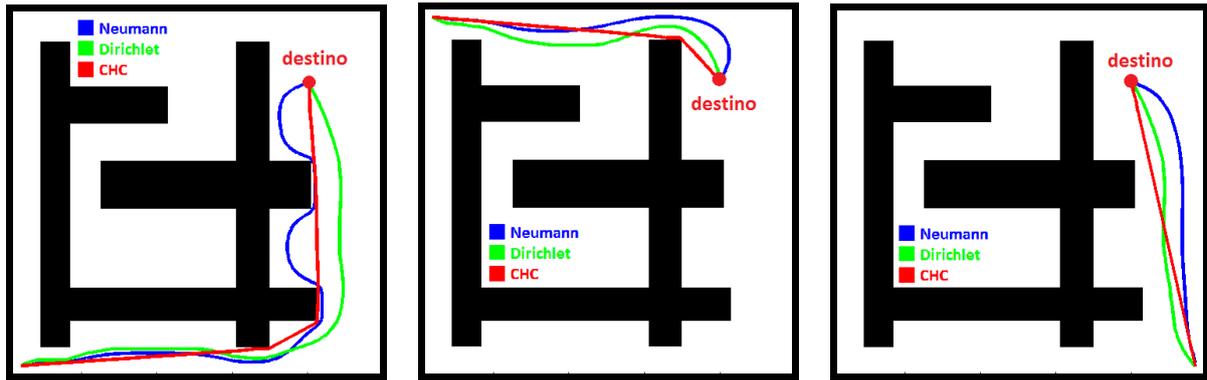


Figura 6.13: Comparação entre as trajetórias obtidas para três pontos de partida e um único destino utilizando as condições de Neumann, Dirichlet e CHC em um ambiente discretizado.

Pode-se observar que, em todos os casos apresentados, a trajetória executada pelo robô busca a obtenção do menor caminho até o destino, não apresentando características que possam gerar trajetórias excessivamente longas, como acontece nos potenciais resultantes da aplicação das condições de contorno clássicas. Além disso, é possível observar nos experimentos por simulação apresentados que, ao seguir o gradiente descendente do potencial resultante da aplicação da CHC, a trajetória executada pelo robô não fica restrita a segmentos de retas, comuns em ambientes com obstáculos poligonais, podendo também executar trajetórias curvilíneas para tangenciar um obstáculo com essa característica, se isso for necessário para encurtar o caminho até o destino, respeitando, obviamente, as restrições impostas pela discretização da figura que representa o obstáculo.

6.2.3 A CHC para planejamento multiobjetivos

Uma extensão do problema básico de planejamento bastante interessante é o caso de planejamento multiobjetivos. Nessa tarefa de navegação, o robô tem por objetivo alcançar um dos pontos de destino disponíveis onde, normalmente, espera-se que o robô escolha o ponto de destino (objetivo) que melhor atenda uma característica especificada como maior segurança, menor custo de energia, menor distância, entre outros.

Com a aplicação da CHC em um problema de planejamento multiobjetivos, espera-se que o potencial resultante leve o robô a tentar alcançar o menor caminho até um dos pontos de destino, considerando as limitações impostas pela discretização da função potencial no resultado final.

Para adaptar o método descrito no Capítulo 5 para o planejamento multiobjetivos, basta definir mais de uma configuração como sendo uma configuração de destino, o que é feito utilizando o vetor \mathbf{t}_d , de acordo com a formalização do método proposto, apresentada na Seção 5.2. A definição da configuração de destino é feita apenas incorporando nela uma singularidade de temperatura fixa (Dirichlet), o que não interfere nas características do

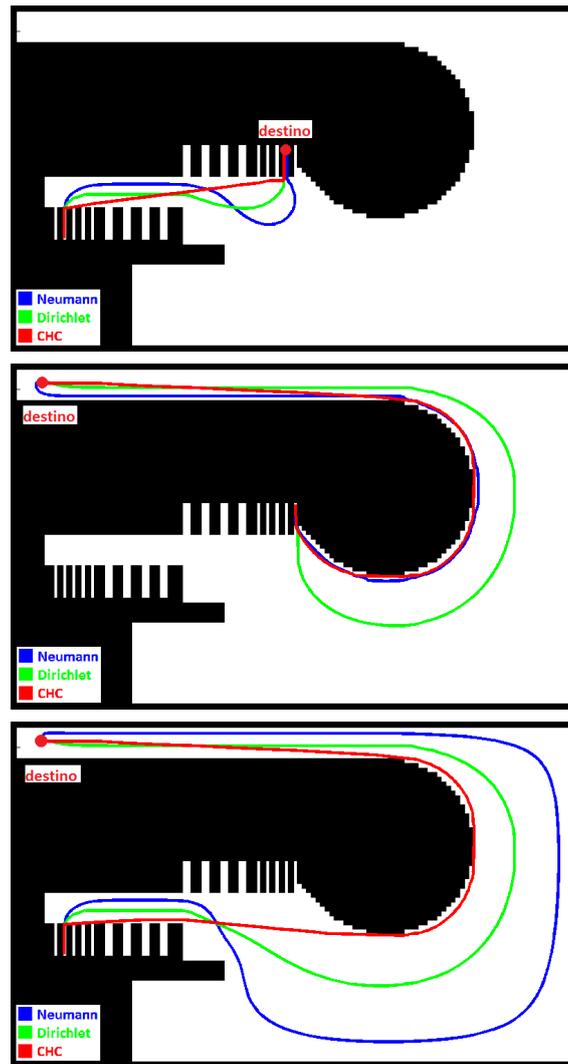


Figura 6.14: Comparação entre três trajetórias distintas em um mesmo ambiente discretizado, utilizando as condições de Neumann, Dirichlet e CHC.

potencial. Vale ressaltar que o custo computacional para a obtenção do potencial usando a CHC não é afetado com a inserção de novos objetivos. Isso se deve ao fato de que o número de configurações navegáveis no mapa não é alterado com a inserção de novos pontos de destino, mantendo assim o sistema de equações a ser solucionado com a mesma dimensão e, por conseguinte, demandando o mesmo custo computacional.

Para ilustrar a manutenção da busca pelo menor caminho na solução do problema de planejamento multiobjetivos, foram realizados alguns experimentos por simulação simples que evidenciassem essa característica. Nos testes realizados, pontos de destino de mesma temperatura foram adicionados próximos às extremidades de um ambiente sem obstáculos, de forma equidistante em relação ao centro do ambiente e foram geradas trajetórias para diferentes pontos de partida. Os resultados obtidos são apresentados nas figuras 6.21.a e 6.21.b, para dois e quatro pontos de destino, respectivamente.

Pode-se observar nos resultados apresentados na Figura 6.21 que o campo vetorial do

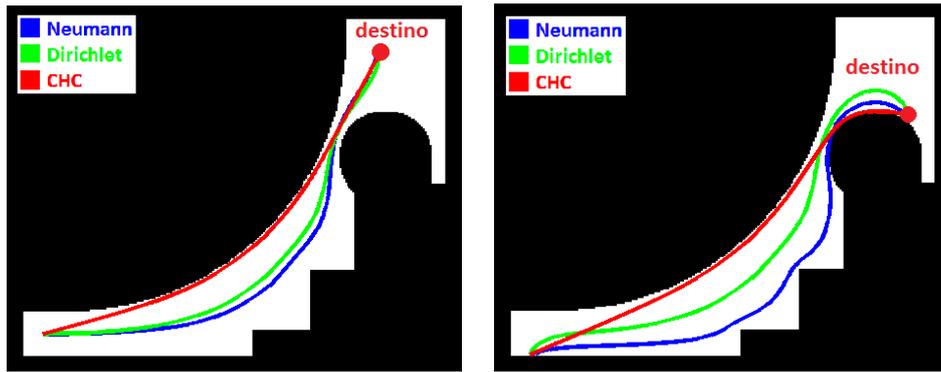


Figura 6.15: Comparação entre duas trajetórias distintas em um mesmo ambiente discretizado, utilizando as condições de Neumann, Dirichlet e CHC.

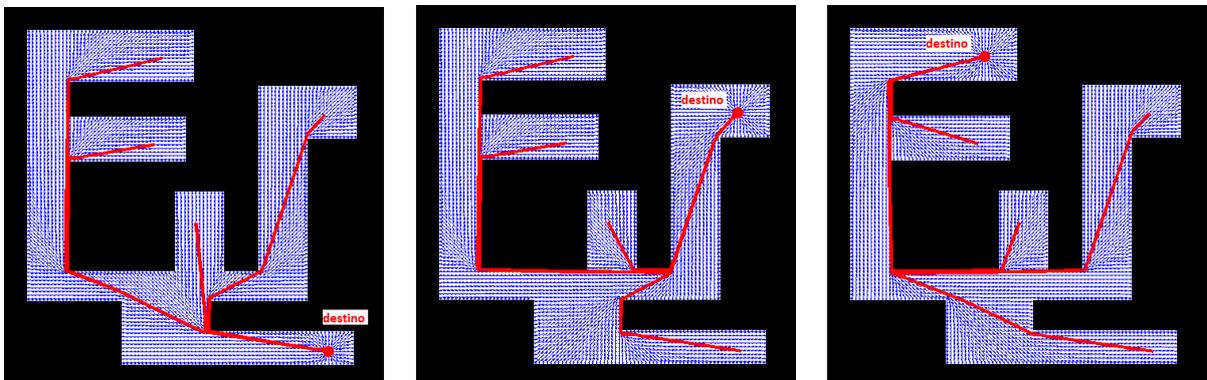


Figura 6.16: Planejamento baseado na CHC utilizando o ambiente apresentado em [4] para três pontos de destino diferentes.

potencial divide igualmente o ambiente em duas partes, na Figura 6.21.a, e em quatro partes, na Figura 6.21.b, o que evidencia a manutenção da busca pelo menor caminho, uma vez que os pontos foram posicionados de forma equidistante em relação ao centro do ambiente.

Planejamento multiobjetivos ponderados

Adicionalmente, pode-se imaginar que, por algum motivo qualquer, uma das configurações de destino seja preferível em relação a outra, demandando assim a obtenção de um potencial que considere essa característica. No caso do potencial obtido através da CHC, isso pode ser feito facilmente, bastando, para tanto, atribuir temperaturas de módulos diferentes para diferentes pontos de destino. Quanto maior o módulo, maior será a influência do ponto de destino sobre o potencial, bastando notar apenas que, como o decaimento é exponencial e a condutividade do material não é ideal, a relação entre a diferença das magnitudes das temperaturas de destino e o efeito causado no potencial não é linear.

Tabela 6.1: Distância percorrida em $[un]$ nos caminhos gerados pelas condições de contorno de Neumann, Dirichlet e CHC para cada um dos experimentos comparativos realizados por simulação.

Experimento simulado	Neumann	Dirichlet	CHC
Figura 6.11.a	253,00	232,00	207,84
Figura 6.11.b	183,40	170,90	156,50
Figura 6.12.a	128,05	111,05	101,95
Figura 6.12.b	114,80	110,90	102,15
Figura 6.12.c	150,00	133,30	120,45
Figura 6.13.a	161,75	153,50	144,70
Figura 6.13.b	90,15	85,60	80,75
Figura 6.13.c	80,45	79,00	77,40
Figura 6.14.a	75,45	65,90	61,50
Figura 6.14.b	171,55	199,30	166,75
Figura 6.14.c	291,55	242,20	214,20
Figura 6.15.a	270,40	266,50	250,95
Figura 6.15.b	284,60	279,30	250,50

Para demonstrar a utilização da CHC no planejamento multiobjetivos ponderados, o experimento por simulação ilustrado na Figura 6.21.a foi repetido utilizando uma temperatura de destino 10^{10} vezes maior para o ponto de destino da direita. O resultado obtido é apresentado na Figura 6.22.

Note que, no resultado apresentado na Figura 6.22, apesar da separação observada no campo vetorial não mais ser linear, a trajetória que o robô executa, para os diferentes pontos de partida, até o destino continua sendo uma linha reta. Para visualizar mais claramente essa característica, observe os campos vetoriais apresentados na Figura 6.23. Nessa figura, é mostrada a subtração entre os campos vetoriais obtidos com e sem ponderação para os destinos. É interessante notar que, afora a região entre as fronteiras de separação do potencial ponderado e não ponderado, onde existe uma mudança de direção, a diferença entre os campos vetoriais é nula, o que mostra a manutenção das características da CHC, ou seja, as porções do ambiente que continuaram atraídas para o mesmo destino depois da ponderação, mantiveram a direção do gradiente, mesmo na presença de múltiplos destinos ponderados, mantendo uma linha reta como trajetória até o destino.

Planejamento multiobjetivos em ambientes complexos

Demonstrada a manutenção das características do potencial da CHC, o método de planejamento multiobjetivos baseado na CHC foi então utilizado em alguns ambientes de maior complexidade. Os resultados obtidos para diferentes pontos de partida não ponderados são apresentados na figuras 6.24.a e 6.24.b, para dois ambientes distintos.

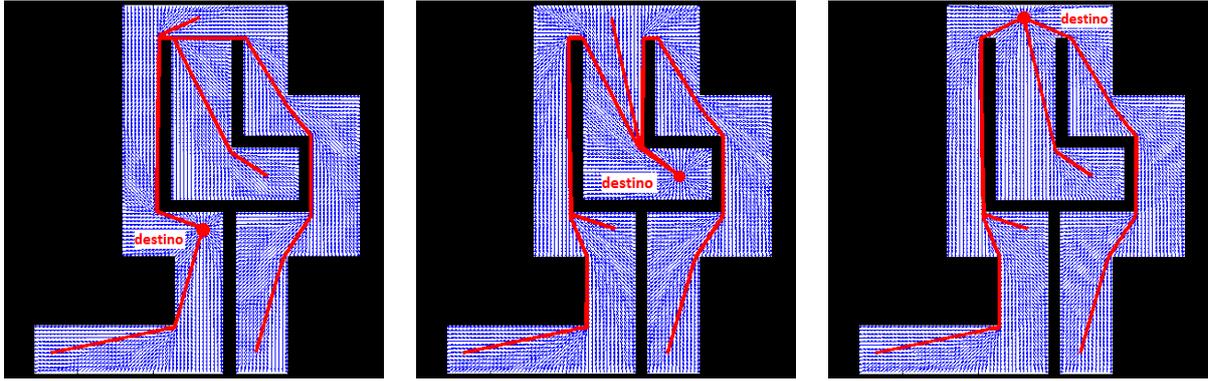


Figura 6.17: Planejamento baseado na CHC utilizando o ambiente apresentado em [5] para três pontos de destino diferentes.

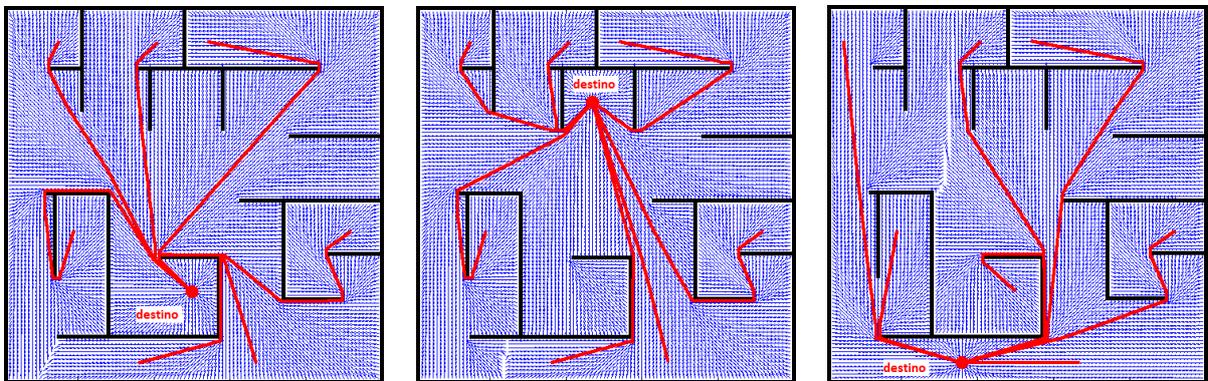


Figura 6.18: Planejamento baseado na CHC utilizando o ambiente apresentado em [6] para três pontos de destino diferentes.

6.2.4 A CHC para planejamento considerando regiões de destino

O caso do planejamento considerando regiões de destino, pode ser visto como um caso especial do planejamento multiobjetivos. Nesse caso, as diferentes configurações de destino são vizinhas umas das outras e compõem uma região de pontos de destino. Desde que seja mantida a mesma temperatura para os pontos da região de destino, não haverá gradiente no potencial resultante nessa região. Além disso, com essa característica, o robô, ao atingir qualquer ponto da região de destino, finaliza a tarefa, uma vez que ali o gradiente é nulo.

No tocante à implementação da CHC para resolver essa extensão do problema básico de planejamento, vale o que foi explicado na seção anterior, ou seja, basta definir todos as configurações da região de destino desejada como pontos de destino de mesma temperatura. A análise feita na seção anterior sobre o custo computacional é igualmente válida para esse caso particular onde os pontos de destino formam uma região de convergência.

Para ilustrar a manutenção das características da CHC, dois experimentos por simulação foram realizados considerando um ambiente sem obstáculos com duas regiões de

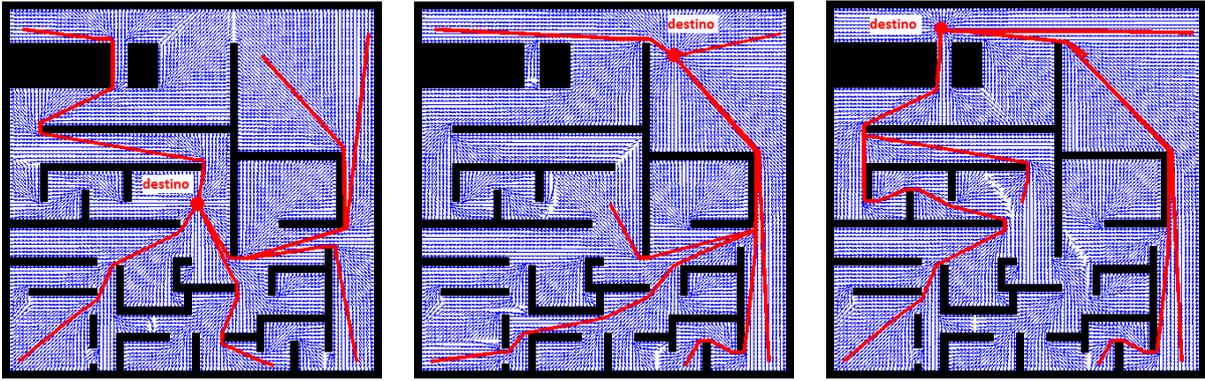


Figura 6.19: Planejamento baseado na CHC para três pontos de destino diferentes (ambiente proposto 1).

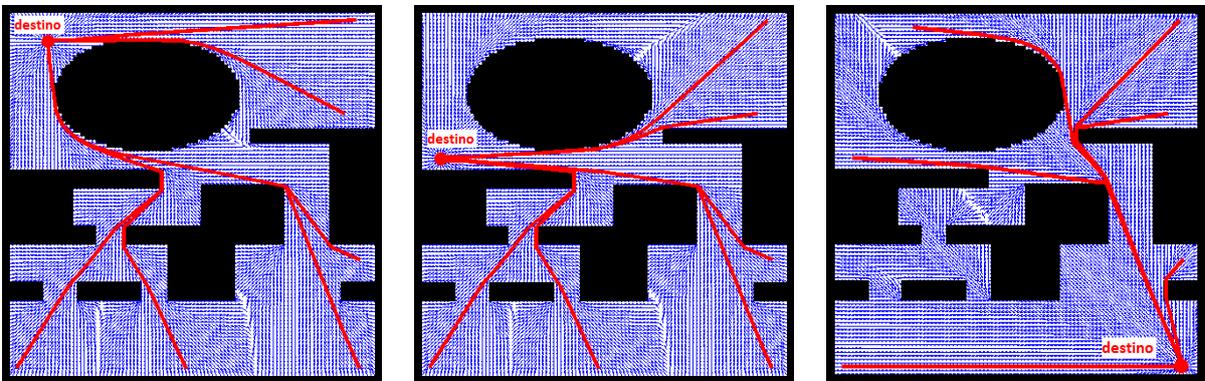


Figura 6.20: Planejamento baseado na CHC para três pontos de destino diferentes (ambiente proposto 2).

destino distintas, quais sejam: (i) uma linha reta na vertical; e (ii) uma região retangular. As trajetórias obtidas para diferentes pontos de partida nas situações descritas são apresentados nas figuras 6.25.a e 6.25.b, respectivamente.

Observando a Figura 6.25, é possível notar que as trajetórias obtidas pela técnica desenvolvida nesta tese de doutorado mantêm suas características de buscar o menor caminho. Isso é evidenciado pelas trajetórias em linha reta até o ponto de destino mais próximo, característica observada para todos os pontos de partida considerados.

Para o problema de planejamento considerando regiões de destino, assim como no caso de planejamento multiobjetivos, mais de uma região objetivo pode ser utilizada em um mesmo ambiente. Um resultado para duas linhas retas verticais de destino, equidistantes em relação ao centro do ambiente, é apresentado na Figura 6.26.a para diferentes pontos de partida. Adicionalmente, é possível ainda considerar ponderações diferentes para regiões diferentes do ambiente, assim como no caso de múltiplos objetivos isolados. Para ilustrar essa característica, o experimento por simulação apresentado na Figura 6.26.a foi repetido utilizando os mesmos pontos de partida, utilizando agora uma temperatura de destino

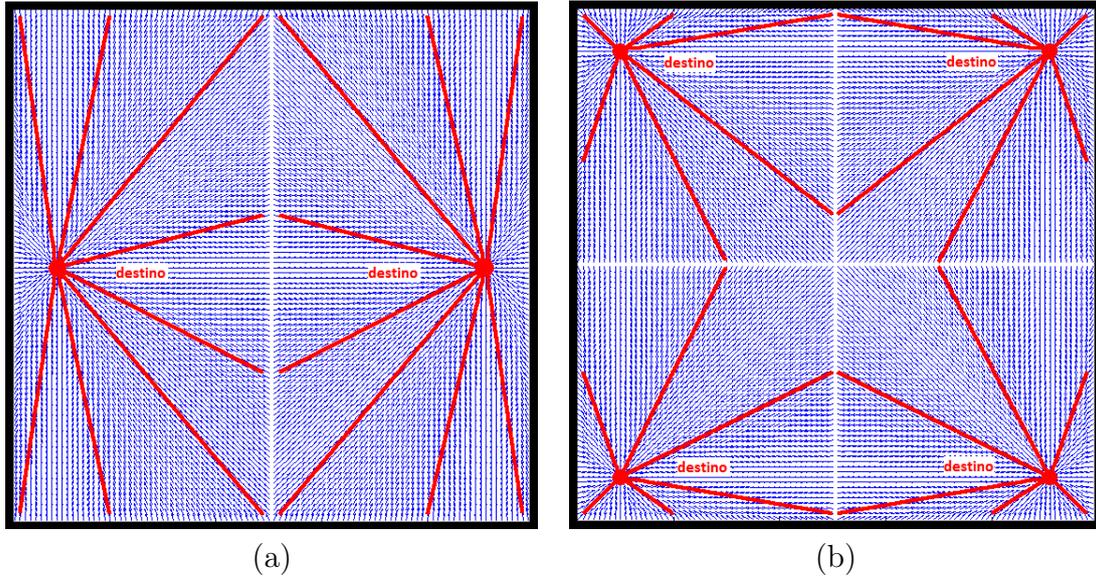


Figura 6.21: A CHC para planejamento multiobjetivos em dois ambientes distintos.

10^{10} vezes maior para a região de destino da direita. O resultado obtido é apresentado na Figura 6.26.b.

Nos resultados apresentados, pode-se ainda observar a manutenção da busca pelo menor caminho, fato que é evidenciado pela mudança de direção no campo vetorial do potencial, observada na linha vertical que passa pelo centro do ambiente na Figura 6.26.a.

A aplicação da CHC considerando regiões de destino pode também ser utilizada para ambientes com obstáculos sem nenhum trabalho adicional, como ilustrado no ambiente da Figura 6.27. No resultado apresentado, diferentes pontos de partida foram utilizados para duas regiões de destino diferentes. Na Figura 6.27.a foi utilizada uma reta horizontal como região objetivo e na Figura 6.27.b essa região foi particionada em três regiões independentes, ilustrando também a aplicação para múltiplas regiões de destino.

6.2.5 A CHC para planejamento com regiões de diferentes navegabilidades

O problema básico de planejamento parte do pressuposto de que todas as configurações livres de obstáculos do ambiente apresentam as mesmas características. Dessa forma, no caso das técnicas baseadas em campos potenciais, um potencial é definido atribuindo pesos iguais para todas as configurações navegáveis (pertencentes ao C_{free}). No entanto, essa característica nem sempre é observada na prática, onde diferentes regiões navegáveis do ambiente podem apresentar características diferentes como diferentes inclinações, tipo de solo, aderência, risco de colisão, dinamicidade dos obstáculos, entre outras. A extensão do problema básico de planejamento que considera em sua formalização esse tipo de característica é chamado de planejamento considerando diferentes

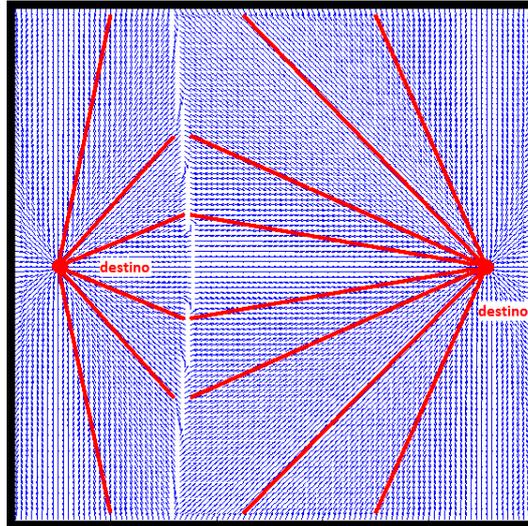


Figura 6.22: A CHC para planejamento multiobjetivos ponderados com maior atração para o destino da direita.

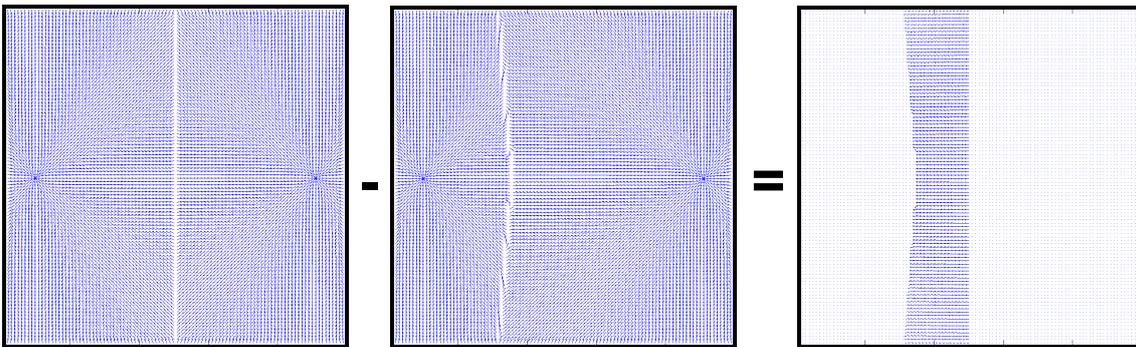


Figura 6.23: Subtração elemento por elemento do campo vetorial resultante da utilização da CHC para planejamento multiobjetivos ponderados e não ponderados.

navegabilidades.

No caso do potencial resultante da CHC, um único parâmetro permite alguma flexibilidade na idealização do potencial, a constante de condutividade térmica, K_{term} . Nos experimentos por simulação apresentados até o momento, todas as regiões navegáveis do ambiente foram associadas a uma mesma condutividade térmica, o que permitiu a utilização da CHC na geração do potencial, resultando em trajetórias que buscam o menor caminho até o destino. No entanto, não há restrição no equacionamento da CHC no tocante à escolha do K_{term} , ficando este limitado apenas ao intervalo aberto entre 0 e 1.

Para o caso do problema de planejamento considerando regiões com diferentes navegabilidades, a CHC pode facilmente ser adaptada, bastando para isso determinar diferentes condutividades para diferentes regiões navegáveis. Dessa forma, é possível atribuir uma maior condutividade (maior K_{term}) para as regiões com uma navegabilidade mais fácil (piso plano e regular, por exemplo) e uma menor condutividade para as regiões de nave-

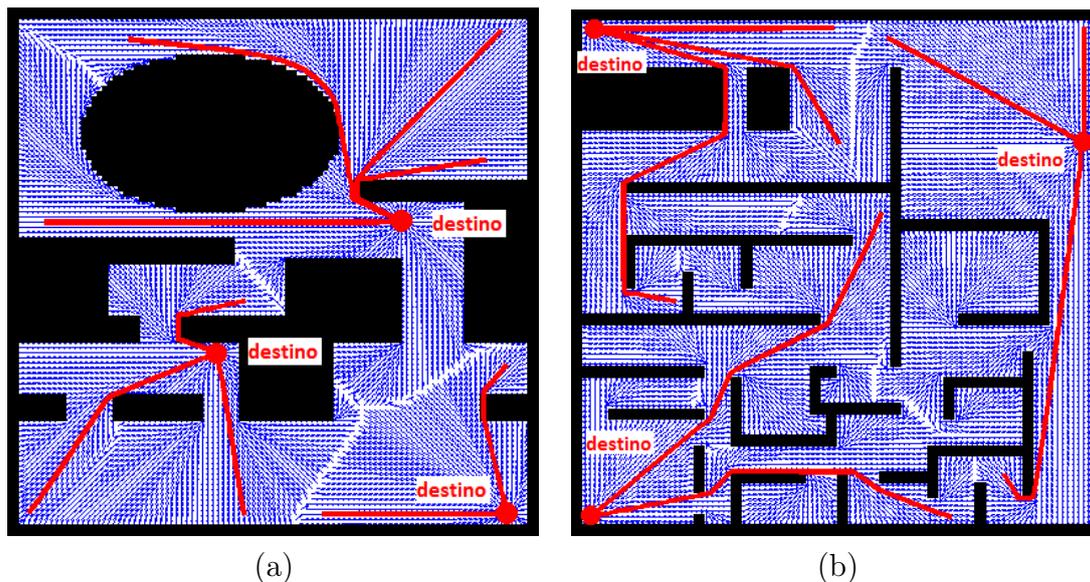


Figura 6.24: A CHC para planejamento multiobjetivos com: (a) dois pontos de destino; e (b) quatro pontos de destino.

gabilidade mais difícil (grama, por exemplo). Dessa forma, a distribuição de temperatura no ambiente levará em consideração as diferentes condutividades, resultando em um perfil térmico cujo gradiente busca, naturalmente, as regiões de maior navegabilidade (condutividade), podendo passar por regiões de menor condutividade sempre que necessário. Assim, a relação entre os diferentes coeficientes de condutividade, determinará a relação de custo benefício que levará o robô a navegar por uma ou outra região.

Para ilustrar o conceito apresentado, foi realizado um experimento por simulação com regiões de diferentes navegabilidades. Em uma primeira etapa, todo o ambiente navegável recebeu o mesmo valor de $K_{term} = 0,1$ e uma região de destino horizontal foi definida na parte inferior do ambiente. O resultado para diferentes pontos de partida é apresentado na Figura 6.28.a. Em seguida, foi inserida no centro do ambiente uma região com uma navegabilidade diferente ($K_{term} = 0,2$), ou seja, melhor que o restante do ambiente. Um experimento por simulação nessas condições foi, então, realizado para os mesmos pontos de partida da Figura 6.28.a. O resultado obtido é apresentado na Figura 6.28.b. Por fim, a mesma região de diferente navegabilidade foi mantida no centro do ambiente mas agora com um outro valor de condutividade, $K_{term} = 0,4$. A simulação foi, então, repetida para os mesmos pontos de partida e o resultado obtido é apresentado na Figura 6.28.c.

O resultado apresentado na Figura 6.28 evidencia que, quanto maior a navegabilidade da região central em relação ao restante do ambiente, maior é a tendência de que as trajetórias executadas pelo robô busquem essa região, por ser este um caminho mais fácil de tráfegar. Note ainda que, dentro de uma região de mesma navegabilidade, as trajetórias executadas pelo robô mantêm a característica da CHC, ou seja, buscando alcançar o menor caminho para atravessar essa região. Além disso, pode-se observar ainda na Figura 6.28.b

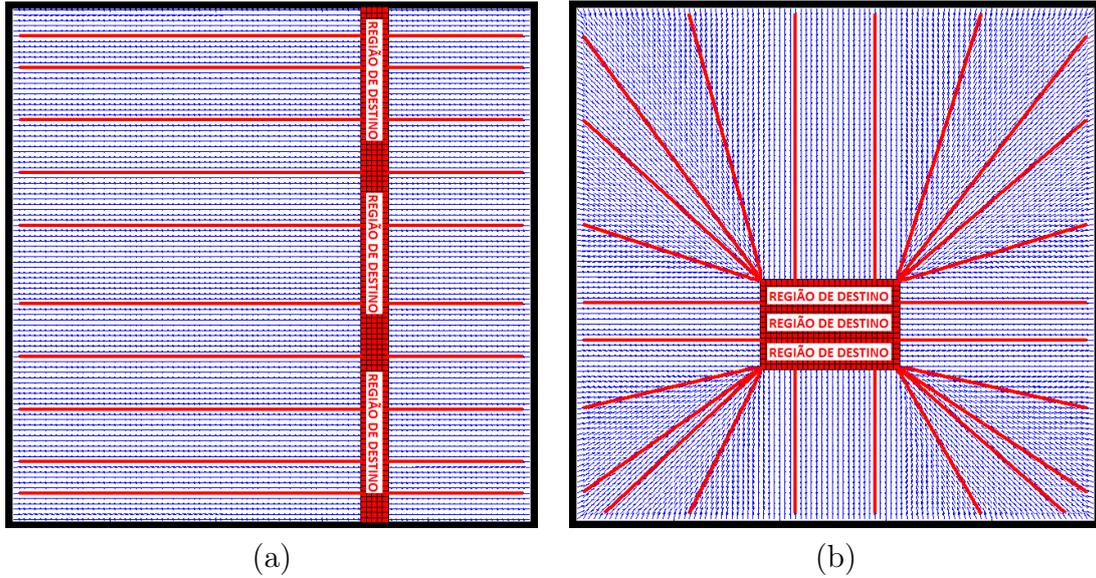


Figura 6.25: A CHC para planejamento com regiões de destino (destacadas na imagem) para: (a) uma região descrita por uma linha vertical cruzando todo o ambiente; e (b) uma região descrita por um retângulo.

que, para o caso dos pontos de partida das extremidades, o ganho da condutividade não compensa um desvio na trajetória do robô e por isso, graças às características impostas pela CHC, não há nenhum desvio na trajetória executada pelo mesmo em relação ao resultado apresentado na Figura 6.28.a. Ou seja, a trajetória do robô só é desviada se com isso houver ganho na relação custo/benefício. Do contrário, a trajetória permanece inalterada.

Pelo observado no resultado apresentado na Figura 6.28, quanto maior a diferença entre a navegabilidade das diferentes regiões do ambiente, maior é a influência da região de maior navegabilidade no potencial resultante. Essa característica pode levar o robô a executar caminhos mais longos, se estes apresentarem melhor navegabilidade a ponto de compensar a maior distância. Um experimento por simulação para melhor ilustrar essa característica é apresentado na Figura 6.29. Nesse ambiente, um caminho mais extenso leva o robô até o destino por uma região de maior navegabilidade ($K_{term} = 0,8$) e o restante do ambiente apresenta uma navegabilidade mais baixa dada por três valores de condutividade no equacionamento da CHC: (i) $K_{term} = 0,7$; (ii) $K_{term} = 0,4$; e (iii) $K_{term} = 0,1$. Os resultados obtidos são apresentados na 6.29.

Observando os resultados apresentados na Figura 6.29, é possível notar que para uma menor diferença entre as navegabilidades o robô prefere atravessar a região de menor navegabilidade para obter um menor caminho. À medida que a diferença entre as navegabilidades aumenta, o robô tende a seguir totalmente a região de características mais favoráveis.

Um outro experimento simulado considerando a CHC no problema de planejamento

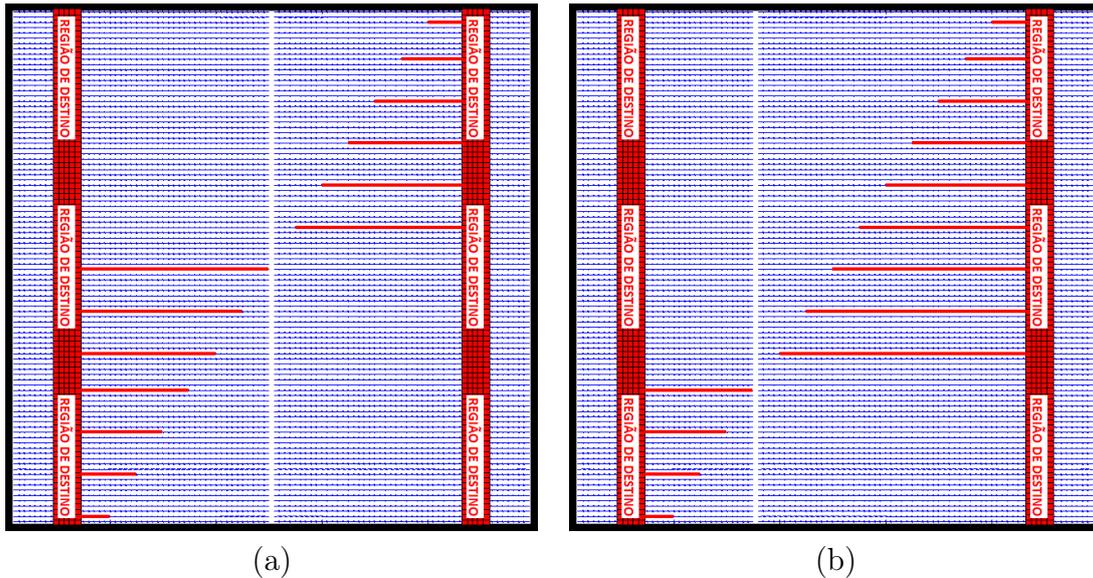


Figura 6.26: A CHC para planejamento com múltiplas regiões de destino (duas retas verticais equidistantes do centro do ambiente): (a) regiões não ponderadas; e (b) região da direita com peso 10^{10} vezes maior.

com regiões de diferentes navegabilidades é apresentado na Figura 6.30. Nesse resultado, o caminho central é mantido com $K_{term} = 0,8$ e um obstáculo é adicionado ao ambiente. Na Figura 6.30.a, é apresentado o resultado obtido para o restante do ambiente com mesma navegabilidade ($K_{term} = 0,1$). Na Figura 6.30.b, a parte de cima do ambiente tem sua navegabilidade alterada para $0,4$ e o experimento por simulação é repetido para os mesmos pontos de partida e destino. Por fim, na Figura 6.30.c, a parte superior do ambiente recebe uma navegabilidade de $0,1$ e a parte inferior uma navegabilidade de $0,4$ e uma nova trajetória é obtida.

Analisando os resultados apresentados na Figura 6.30, é possível notar que, como era esperado, a trajetória é desviada para cima ou para baixo para evitar o obstáculo, a depender do valor de condutividade atribuído às diferentes regiões. Note ainda que, no caso apresentado na Figura 6.30.a, como a diferença de navegabilidade é muito alta entre o caminho central ($0,8$) e o restante do ambiente ($0,1$), o robô segue uma trajetória que tenta, ao máximo, permanecer no caminho de maior navegabilidade, desviando apenas para evitar a colisão com o obstáculo e retornando em seguida para completar a tarefa.

6.2.6 A CHC para planejamento de movimento de robôs manipuladores

Nas tarefas de planejamento apresentadas até o momento para ilustrar a aplicabilidade da CHC, os ambientes apresentavam diversas características distintas, mas sempre ilustrando um espaço de configurações de duas dimensões onde o robô, suas característi-

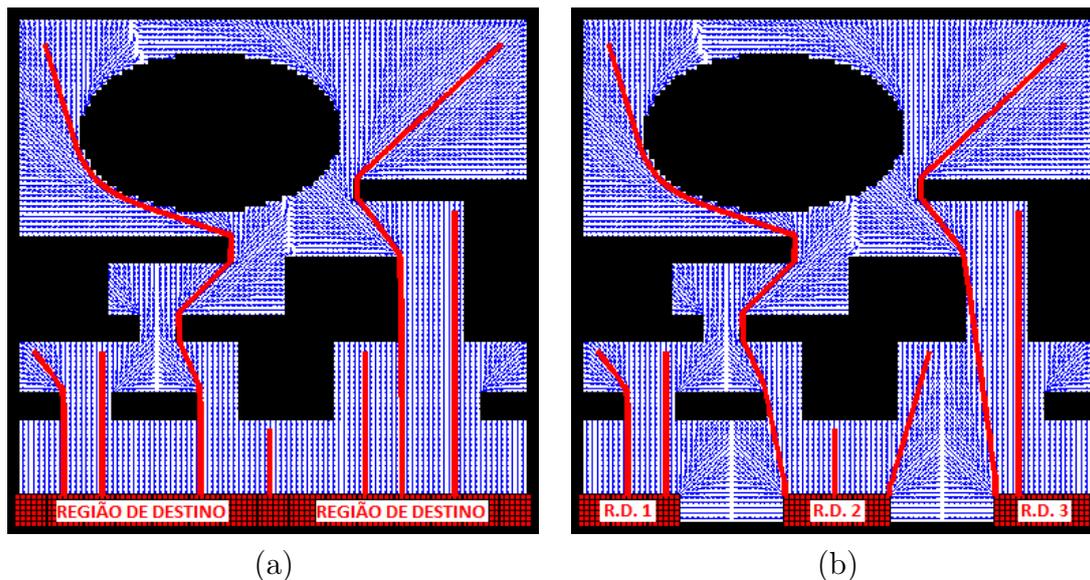


Figura 6.27: A CHC para planejamento com regiões de destino (destacadas na imagem) em um ambiente com obstáculos: (a) com uma única região objetivo; e (b) três regiões de destino.

cas físicas e o seu ambiente de trabalho eram mapeadas em um espaço onde o robô pode ser representado por um ponto, simplificando assim a tarefa de planejamento. A criação de tal espaço (C_{space}) não foi discutida nos testes realizados por não ser este o foco do trabalho aqui apresentado. No entanto, para ilustrar melhor a aplicabilidade desse tipo de mapeamento, é apresentada nessa seção o planejamento baseado na CHC aplicado no espaço de configurações de um robô manipulador planar composto por três juntas de revolução, o que resulta em um espaço de configurações de três dimensões.

Inicialmente o manipulador, juntamente com seu ambiente, é mapeado no espaço de configurações no qual cada dimensão representa a posição angular de uma das juntas. Para cada possível combinação das três juntas do manipulador é verificado se o robô (nessa configuração) estaria ou não em colisão com o obstáculo. Se em uma configuração o robô estiver em colisão com um obstáculo essa configuração é adicionada ao C_{obs} , do contrário, ela é adicionada ao C_{free} . O manipulador e o ambiente considerado é representado na Figura 6.31.a e o espaço de configurações resultante é apresentado na Figura 6.31.b, na qual preto representa as configurações no C_{obs} e branco as configurações no C_{free} .

Como o C_{space} do manipulador é um espaço de três dimensões e, além disso, a densidade dos obstáculos no espaço de configurações é muito maior, a visualização deste espaço fica prejudicada, como observado na Figura 6.31.b.

Construído o espaço de configurações, é então determinada uma configuração (posição angular das juntas) de partida e uma de destino que definam a tarefa de navegação a ser executada. Essas duas configurações são ilustradas na Figura 6.32.a. Definida a tarefa a ser executada, a CHC é então aplicada no C_{space} do manipulador e a trajetória obtida

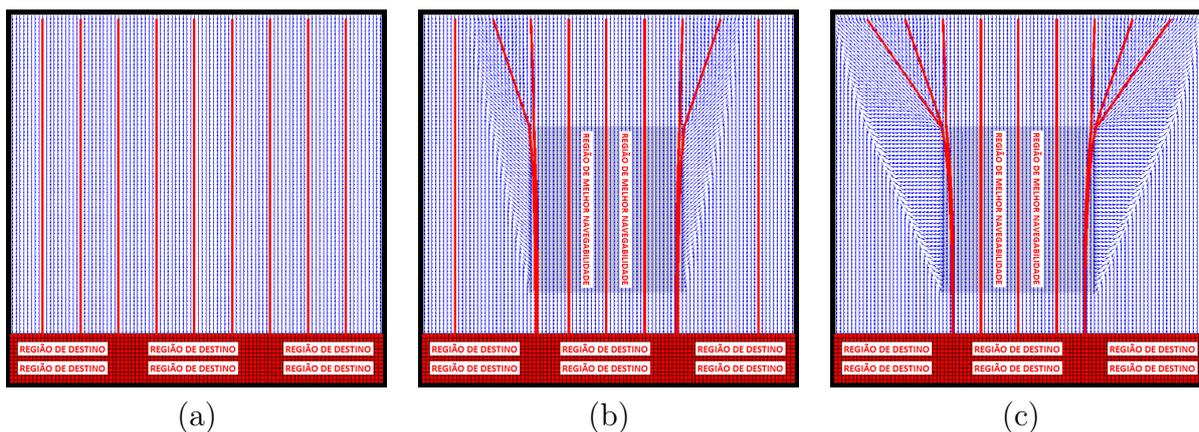


Figura 6.28: A CHC aplicada em planejamento com regiões de diferentes navegabilidades considerando: (a) navegabilidade uniforme ($K_{term} = 0, 1$); (b) região de melhor navegabilidade ($K_{term} = 0, 2$); e (c) região de melhor navegabilidade ($K_{term} = 0, 4$).

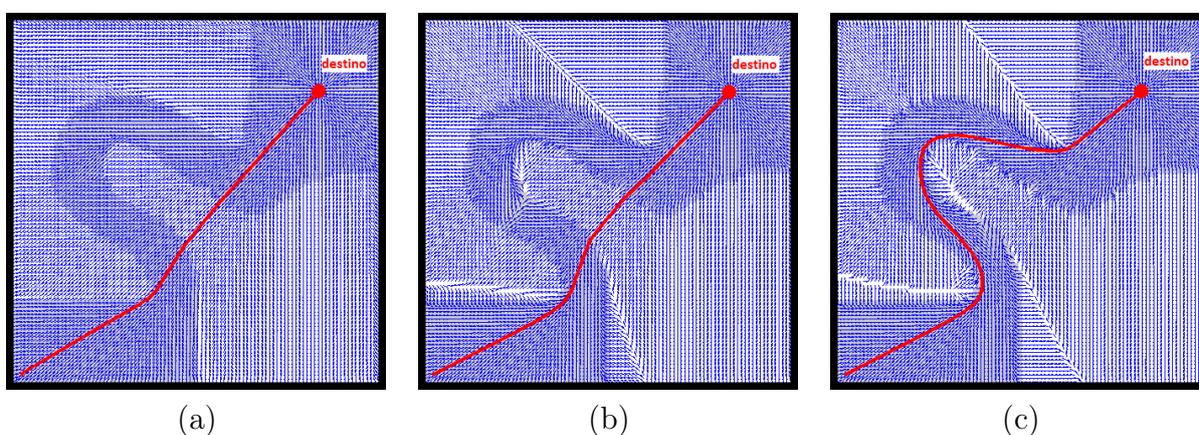


Figura 6.29: A CHC e diferentes navegabilidades para um caminho mais longo com melhor navegabilidade ($K_{term} = 0, 8$) em um ambiente de navegabilidade mais baixa dada por: (a) $K_{term} = 0, 7$; (b) $K_{term} = 0, 4$; e (c) $K_{term} = 0, 1$.

(sequência de comandos de posição angular das juntas) é implementada no manipulador em seu espaço de trabalho. A trajetória executada pelo manipulador é apresentada na Figura 6.32.b.

Apesar de ser apresentada nessa seção a aplicação do método desenvolvido nesta tese em um ambiente tridimensional, a demonstração de convergência apresentada no capítulo 5 não é válida para espaços de dimensão diferente de dois. No entanto, apesar de não ser apresentada neste trabalho, uma demonstração de convergência para espaços de dimensão maior que dois pode ser obtida seguindo os mesmos passos indicados na prova aqui apresentada.

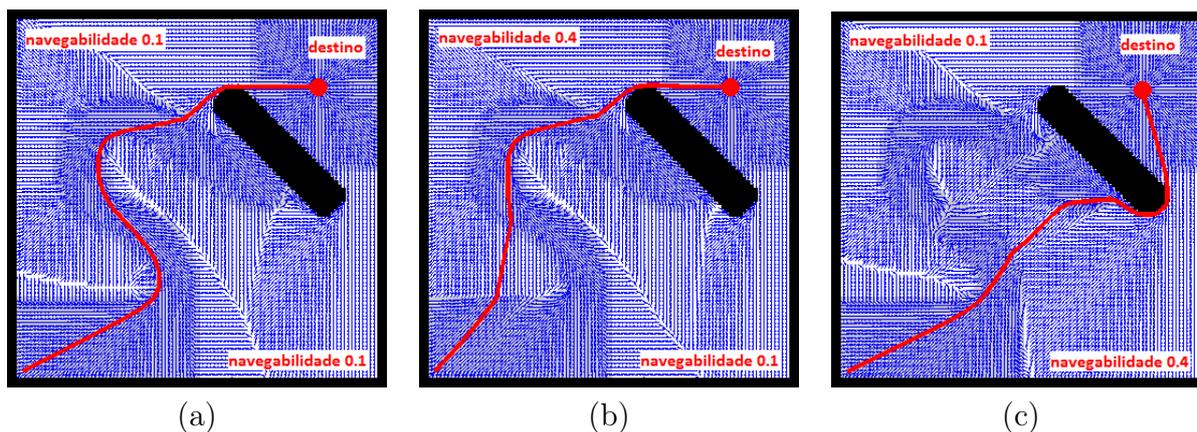


Figura 6.30: A CHC e diferentes navegabilidades: um caminho mais longo com melhor navegabilidade ($K_{term} = 0,8$) em um ambiente com obstáculo, separado em duas regiões de menor navegabilidade.

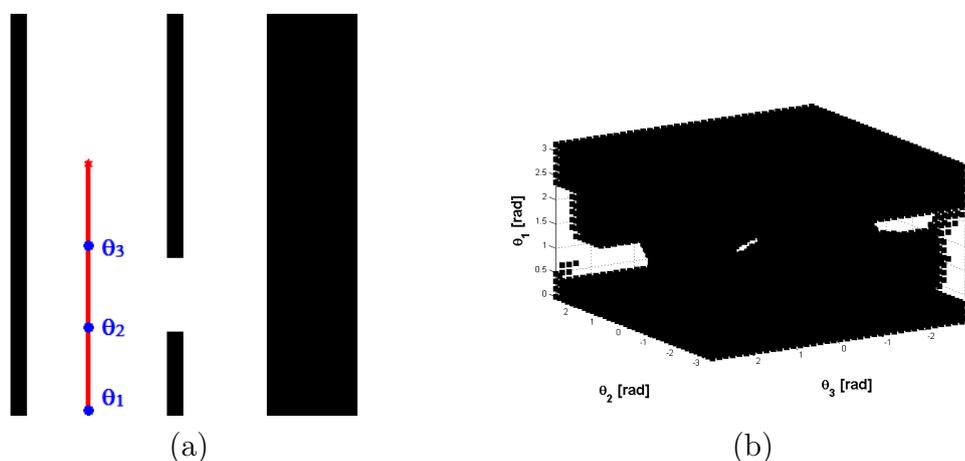


Figura 6.31: Manipulador planar com três juntas de revolução: (a) manipulador em seu espaço de trabalho; e (b) espaço de configurações de três dimensões.

6.2.7 Implementação da CHC em grades irregulares

Há muitos anos, métodos numéricos são utilizados na solução de problemas envolvendo equações diferenciais parciais em diversas áreas do conhecimento. Na área de planejamento de movimento de robôs móveis, o método de diferenças finitas, aplicado neste trabalho, tem sido utilizado desde os trabalhos de Connolly *et al.* [4, 55, 121, 122], na década de 1990. Mais recentemente, em 2004 e 2005, Pimenta *et al.* [5, 131], pioneiramente, utilizaram o método de elementos finitos para solucionar o problema de planejamento de movimento de robôs móveis. Os resultados obtidos nesses trabalhos possibilitaram uma melhor representação de ambientes complexos, uma vez que o método de elementos finitos é formatado considerando grades irregulares.

A realização da CHC proposta neste trabalho foi desenvolvida considerando uma grade regular e, por isso, fez uso da técnica de diferenças finitas na solução da equação diferencial

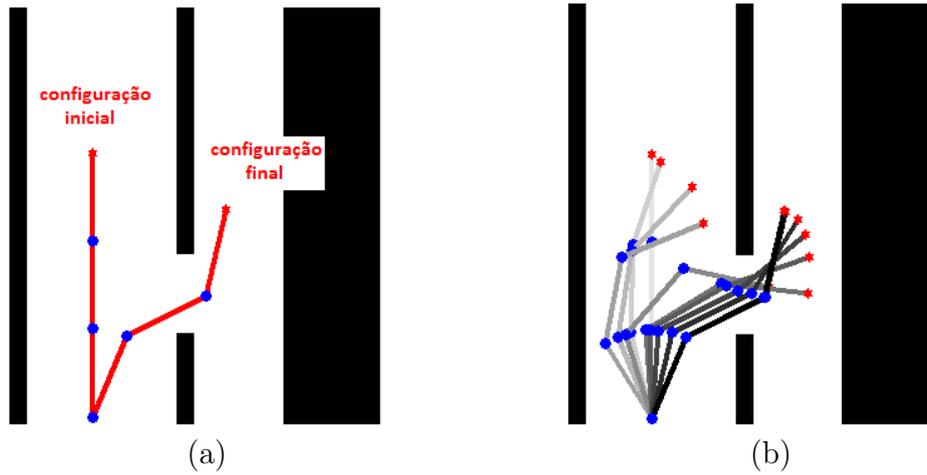


Figura 6.32: Planejamento de movimento de um manipulador usando a CHC: (a) configurações inicial e final; e (b) trajetória executada no espaço de trabalho.

formulada. No entanto, conforme a discussão apresentada no Capítulo 5, a realização apresentada na Seção 5.2 é apenas uma das possíveis realizações da idéia intuitiva da CHC, apresentada formalmente na Definição 8.

Alternativamente, a definição apresentada pode também ser utilizada para formatar uma realização para a CHC considerando um ambiente discretizado de forma irregular, possibilitando assim o uso da técnica de elementos finitos na solução do problema de planejamento baseado na CHC.

Na implementação da técnica de elementos finitos utilizada neste trabalho, foram considerados elementos triangulares definidos por três nós (i , j e k). Dentro de cada elemento, o potencial linear U é aproximado por um plano dado pela seguinte equação [143]:

$$U = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad (6.1)$$

graficamente ilustrado na Figura 6.33.

Ainda segundo [143], considerando a Equação 6.1 e U_v como o valor da função U no ponto (X_v, Y_v) do elemento, o potencial U nesse elemento pode ser reescrito em função de seus valores em cada um dos nós i , j e k , como sendo:

$$U = N_i U_i + N_j U_j + N_k U_k, \quad (6.2)$$

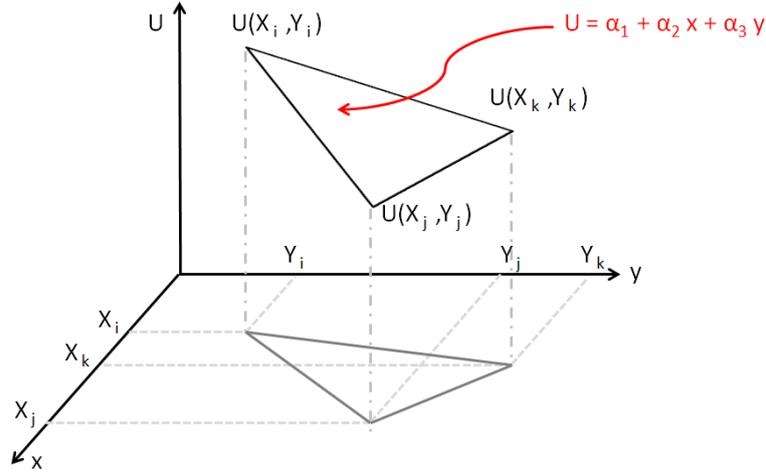


Figura 6.33: Representação gráfica de um elemento triangular linear, sua expressão analítica e seus parâmetros [7].

na qual:

$$N_i = \frac{1}{2A}[a_i + b_i x + c_i y] \quad (6.3)$$

$$N_j = \frac{1}{2A}[a_j + b_j x + c_j y] \quad (6.4)$$

$$N_k = \frac{1}{2A}[a_k + b_k x + c_k y], \quad (6.5)$$

a variável A representa a área do elemento avaliado e:

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j, \quad b_i = Y_j - Y_k \quad e \quad c_i = X_k - X_j \quad (6.6)$$

$$a_j = X_k Y_i - X_i Y_k, \quad b_j = Y_k - Y_i \quad e \quad c_j = X_i - X_k \quad (6.7)$$

$$a_k = X_i Y_j - X_j Y_i, \quad b_k = Y_i - Y_j \quad e \quad c_k = X_j - X_i. \quad (6.8)$$

O gradiente em cada elemento, como explicado na Seção 5.3, é constante, uma vez que o potencial no elemento é aproximado por um plano. Dessa forma, o gradiente em todos os pontos do elemento é composto pelas derivadas parciais de U nas direções de movimento (x e y), em que U é dado pela Equação 6.2.

Com a definição da equação que relaciona os diferentes pontos distribuídos irregularmente no ambiente uns com os outros, resta agora definir a relação desses pontos com o contorno no ambiente.

A realização da CHC proposta para elementos finitos, faz uso da mesma ideia de continuidade do ambiente utilizada na realização da CHC para diferenças finitas, apresentada na Seção 5.2, ou seja, nos pontos de contorno, uma simulação da continuidade da placa condutora (ambiente navegável) passa a influenciar o potencial naquele ponto.

Considere um elemento de fronteira como aquele definido na Seção 5.4 e ilustrado na

Figura 5.5. Nesse contexto, a CHC é, então, definida para cada elemento de fronteira como uma extrapolação linear da função potencial U definida no elemento (Equação 6.2). Essa extrapolação é utilizada para estimar o valor do potencial em um ponto E pertencente ao obstáculo e também pertencente à reta que passa por C e C' (ver Teorema 1 na Seção 5.4).

Dessa forma, o valor do potencial $U(E)$ é totalmente determinado a partir dos valores de U nos vértices do elemento de contorno através da Equação (6.2), assim como foi feito para o método de diferenças finitas.

A implementação do planejamento baseado na CHC, utilizando grades irregulares triangulares e a técnica de elementos finitos descrita, foi realizada para o ambiente motivacional apresentado na introdução desse trabalho e o resultado obtido para diferentes pontos de partida é apresentado na Figura 6.34.

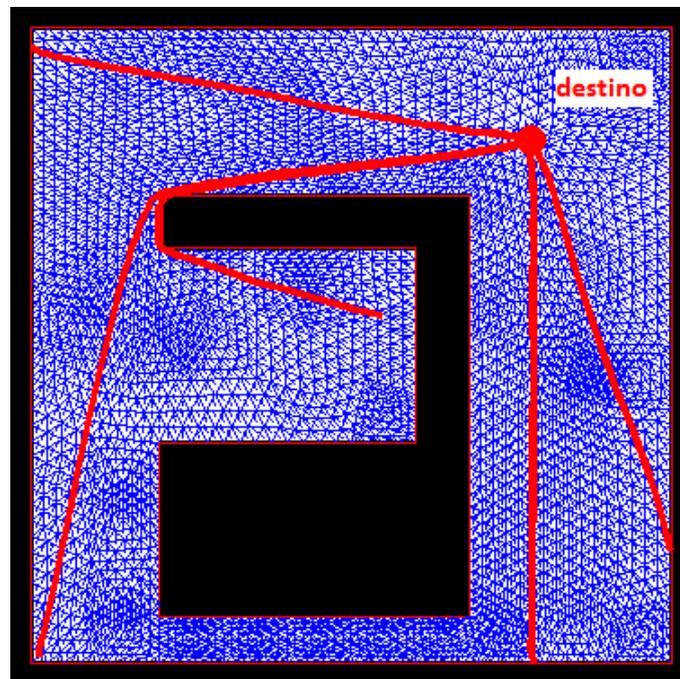


Figura 6.34: Resultado obtido da aplicação do planejamento baseado na CHC utilizando uma discretização irregular com elementos triangulares.

Note que, assim como na implementação para grades regulares, as trajetórias executadas pelo robô ao seguir o gradiente descendente do potencial gerado pela CHC, utilizando uma discretização irregular do ambiente, mantêm suas características qualitativas básicas, buscando reduzir a influência das distorções causadas pelos obstáculos no potencial resultante.

6.2.8 Planejamento baseado na CHC e o método *Wavefront*

O método de planejamento baseado em frente de onda, conhecido como *Wavefront* foi proposto por Jérôme Barraquand *et al.* em 1992 [144]. Esse método é bastante popular na área de navegação de robôs móveis pelo seu bom resultado associado a um baixo custo computacional.

Aplicado a ambientes representados por grades regulares (como aquelas utilizadas na formalização da CHC), o *Wavefront* define uma função potencial a partir da propagação do valor do potencial do ponto de destino (ilustrado na Figura 6.35 como a configuração de valor igual a 1) para os seus vizinhos, atribuindo a estes um potencial de valor 2. Esse procedimento é repetido até que tenha sido atribuído um valor de potencial para todas as configurações navegáveis do ambiente, fazendo com que cada célula de valor i crie em seus vizinhos um potencial de valor $i + 1$. A ideia descrita para o algoritmo *Wavefront* é apresentada graficamente na Figura 6.35.

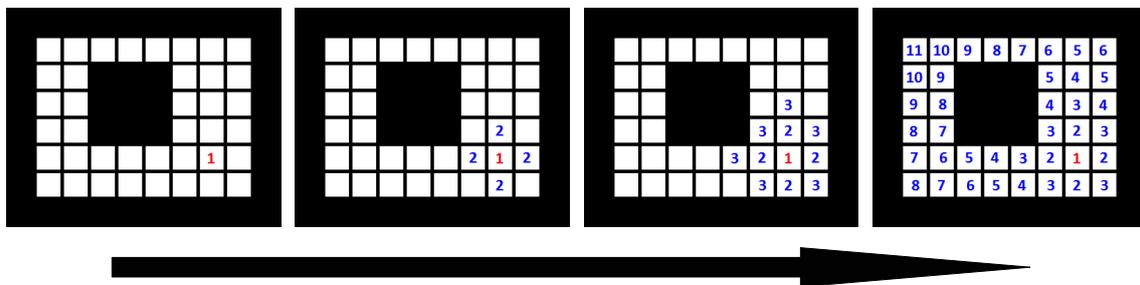


Figura 6.35: Propagação tipo frente de onda observada na construção do potencial no algoritmo de planejamento *Wavefront*.

Dessa forma, com um custo computacional reduzido, o *Wavefront* propaga o potencial do destino para todos os pontos navegáveis do ambiente, atribuindo a estes pontos valores de potencial cada vez maiores, à medida que a distância para o destino aumenta. A simplicidade associada à sua obtenção e a sua aplicação em ambientes com as mesmas características dos ambientes considerados para a CHC motivou a comparação entre as duas técnicas, apresentada na presente seção.

Resultados da CHC e do *Wavefront* para um mesmo ambiente

Para permitir uma comparação mais clara entre o potencial da CHC e o *Wavefront*, o ambiente motivacional deste trabalho, apresentado no Capítulo 1, foi novamente utilizado na implementação do planejamento utilizando as duas técnicas, considerando os mesmos pontos de partida e destino para os dois casos. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 6.36.

Seguindo o gradiente descendente do potencial resultante, o robô executou trajetórias diferentes nos dois casos para os diversos pontos de partida utilizados. Vale ressaltar que,

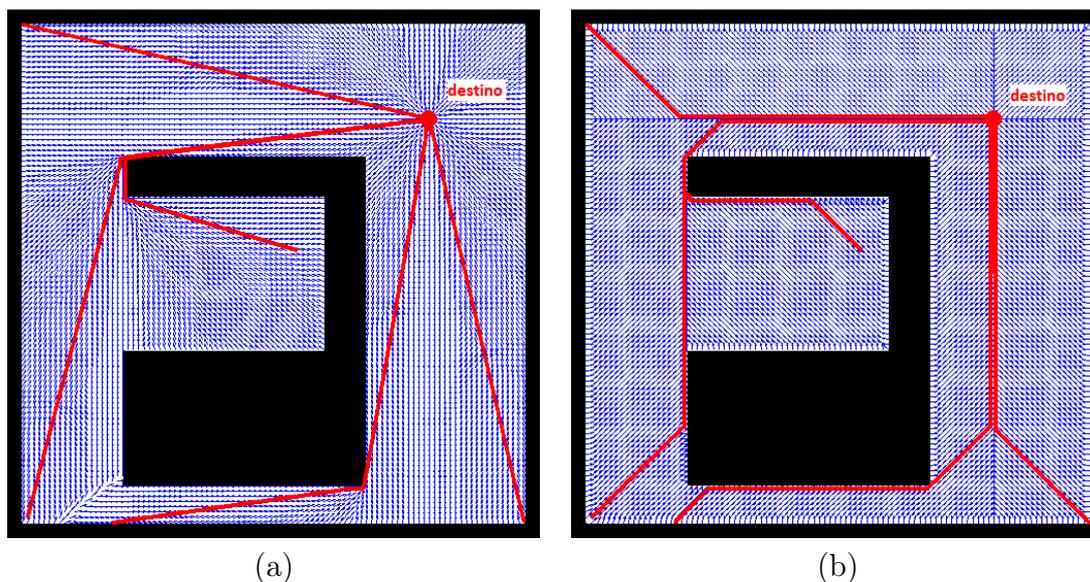


Figura 6.36: Resultado comparativo para o ambiente motivacional desse trabalho utilizando: (a) CHC; e (b) *Wavefront*.

em ambos resultados (CHC e *Wavefront*), o método utilizado para o cálculo do gradiente do potencial discretizado é aquele apresentado na Seção 5.3, mesmo método utilizado para a obtenção do gradiente em todos os experimentos desse trabalho e no artigo original do *Wavefront* [144].

Claramente, as trajetórias resultantes do método proposto nessa tese de doutorado apresentam uma trajetória mais curta, se comparada com aquela observada como resultado do método *Wavefront* para os mesmos pontos de partida.

Outro resultado comparando os dois métodos de planejamento em questão em um novo ambiente é apresentado na Figura 6.37. Nessa figura, os mesmos pontos de partida e de destino foram utilizados para as duas técnicas e os resultados obtidos são qualitativamente equivalentes aos apresentados na Figura 6.36.

Limitações do gradiente no *Wavefront*

Analisando o campo vetorial da Figura 6.36.b (resultante da aplicação do *Wavefront*), é possível notar que há uma limitação das possíveis direções admissíveis para o movimento do robô, o que o impede de executar o menor caminho até o destino. Essa característica pode ser melhor entendida observando a formação do potencial do *Wavefront*, apresentada na Figura 6.35. A formação quantizada do potencial, com incrementos de passo fixo, apresentada nessa figura implica uma limitação nas possíveis direções para o campo vetorial desse potencial em oito direções (N , S , E , O , NO , NE , SO e SE) para todos os pontos internos do potencial (sem vizinhança com obstáculos). Essa restrição não existe no potencial da CHC, uma vez que o potencial de cada célula do ambiente pode assumir qualquer valor real, a ser determinado pela solução da equação diferencial. Essa caracte-

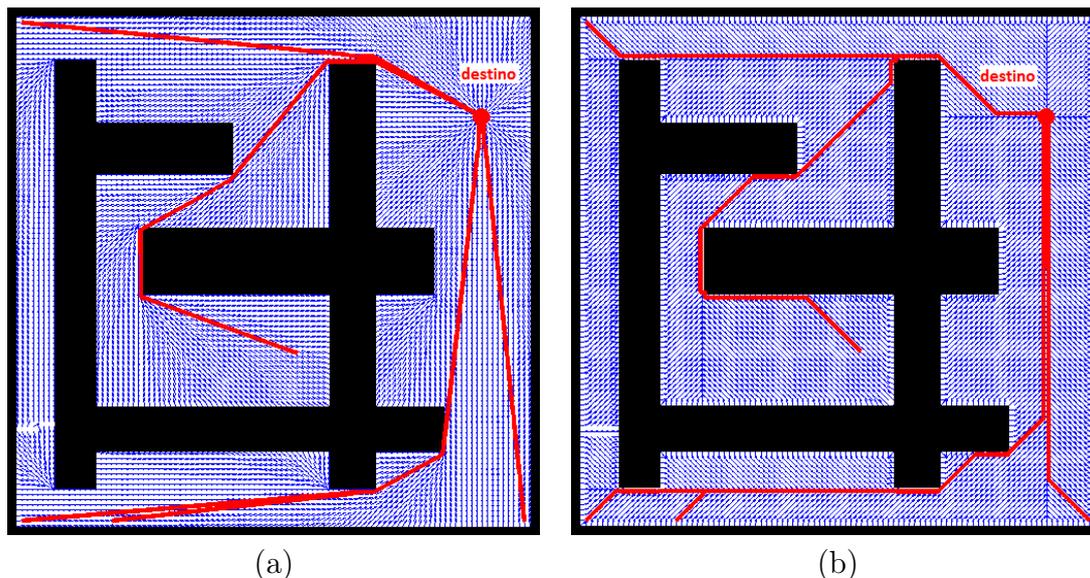


Figura 6.37: Resultado comparativo para outro ambiente utilizando: (a) CHC; e (b) *Wavefront*.

terística permite que o gradiente obtido a partir do potencial gerado pela CHC possa assumir quaisquer direções, possibilitando a obtenção de trajetórias em linha reta até o ponto de destino, mesmo para ambientes discretizados.

Otimalidade do *Wavefront* e o menor caminho

O *Wavefront*, no contexto de planejamento de movimento de robôs móveis, é uma técnica ótima no sentido de obter o menor caminho até o destino. No entanto, essa otimalidade está associada à menor distância L_1 e não à menor distância euclidiana. Isso significa que o *Wavefront* não garante o menor caminho até o destino, mas sim um caminho percorrendo o menor número de células, considerando assim uma trajetória também discretizada que, como mostrado nas figuras 6.36 e 6.37, não garantem um caminho mínimo no sentido de menor distância percorrida.

No caso da CHC, apesar de não existir uma demonstração matemática de que esta técnica possibilita a obtenção do menor caminho até o destino, a condição de contorno proposta nessa tese de doutorado foi desenvolvida objetivando a obtenção desse menor caminho, característica observada experimentalmente em diferentes configurações de ambientes, obstáculos, pontos de partida e destinos.

Custo computacional

No quesito custo computacional, como era de se esperar, o planejamento utilizando o *Wavefront* apresenta resultados muito melhores que aqueles observados quando a CHC é aplicada. No entanto, a redução do custo computacional possibilitada pela a discretização

da magnitude do potencial, aliada à sua construção incremental têm reflexos na qualidade do potencial resultante, como já explicado anteriormente nessa seção.

Para possibilitar uma comparação quantitativa do custo computacional, foram realizados diversos testes em ambientes com diferentes configurações de obstáculos, todos discretizados em 10000 células (100×100), utilizando ambos os métodos sempre com os mesmos pontos de destino. Todos os testes foram realizados em um mesmo computador (especificado na Seção 5.3), utilizando o *software Matlab*[®]. Foi calculada, então, a média do tempo necessário para a obtenção do potencial para cada um dos métodos, resultando em um tempo de 0,06 *segundos* para o *Wavefront* e 0,4 *segundos* para o planejamento baseado na CHC. Esse resultado ilustra bem a diferença de custo computacional existente entre os dois métodos.

Aplicação em grades irregulares

Uma outra característica que diferencia o método proposto neste trabalho do *Wavefront* é a possibilidade de utilização em diferentes representações do ambiente. O *Wavefront* é um método extremamente simples com características de custo computacional excelentes, no entanto, a simplicidade da sua ideia o limita a aplicações em grades regulares. Já no caso da CHC, sua aplicação não se restringe ao caso de ambientes representados por uma discretização regular, como mostrado na Seção 6.2.7 onde a CHC é implementada para grades irregulares usando a técnica de elementos finitos, o que figura como uma outra vantagem do planejamento proposto nesta tese de doutorado.

Capítulo 7

Conclusões

Inicialmente, foi apresentada neste trabalho uma ampla revisão bibliográfica sobre arquiteturas de navegação e planejamento de movimento em geral. Nessa revisão, foram mostrados diferentes métodos de planejamento dando destaque para as técnicas baseadas em campos potenciais, em especial aquelas baseadas em funções harmônicas, cuja principal característica é a obtenção de um potencial sem mínimos locais, problema normalmente observado nesse tipo de estratégia.

Por meio de uma revisão bibliográfica específica sobre os trabalhos desenvolvidos na área de planejamento baseado em funções harmônicas, foi mostrado que a grande maioria dos trabalhos de pesquisa desenvolvidos nessa área, até o momento, tinham como foco principal as características de processamento, voltando sua atenção principalmente para a obtenção de formas de acelerar a convergência do potencial resultante, sem apresentar análises aprofundadas quanto à qualidade das trajetórias obtidas.

Foi feita então uma análise comparativa evidenciando as características positivas e negativas das duas principais condições de contorno utilizadas nas técnicas de planejamento de movimento baseadas em funções harmônicas, a condição de Dirichlet e a condição de Neumann. Nesse momento da pesquisa, percebeu-se uma lacuna entre as estratégias de planejamento baseadas em funções harmônicas e a busca pelo caminho mais curto até o destino, tendo sido encontrados poucos trabalhos abordando esta característica, o que motivou a elaboração do trabalho proposto.

Para desenvolver a estratégia de planejamento proposta nesta tese de doutorado, buscou-se compreender o efeito das diferentes condições de contorno no potencial resultante, considerando para tanto uma analogia com a ideia de propagação térmica. Observou-se nesse momento que, se fosse suprimida a distorção causada no potencial pelas condições de contorno clássicas, então seria possível a obtenção de um potencial cujo gradiente levaria o robô até o destino buscando o menor caminho. Para tanto foi então elaborada uma nova forma de definição do contorno chamada de Condição de Horizonte Continuado (CHC), cuja ideia central é a base da estratégia de planejamento aqui desenvolvida.

Foi apresentada uma demonstração formal da convergência do método proposto nesta tese de doutorado, no entanto, não foi obtida uma prova formal de que os caminhos obtidos através da utilização da CHC são os menores possíveis. Por esse motivo, como explicado no Capítulo 6, usou-se no desenvolvimento desta tese o termo “busca pelo menor caminho” para indicar a motivação da idealização da CHC, sem, contudo, alegar que o caminho obtido é o menor possível.

No que diz respeito à etapa experimental, os resultados obtidos em todos os experimentos por simulação realizados durante o período de desenvolvimento desse trabalho mostraram resultados melhores para a CHC, no sentido de menor distância percorrida, quando comparados àqueles obtidos para as condições de Dirichlet e Neumann. Esse resultado é atribuído às características desejadas para a CHC em sua idealização, cujo objetivo principal foi reduzir a influência dos obstáculos nas características qualitativas do potencial resultante. No entanto, é preciso ainda uma demonstração formal que permita a generalização dessas observações para ambientes quaisquer.

Para evidenciar as possibilidades de aplicações em robótica móvel do método proposto, foram realizados diversos experimentos por simulação utilizando o planejamento baseado na CHC para solucionar extensões do problema básico de planejamento, entre elas problemas como planejamento multiobjetivos, considerando regiões de destino e regiões de diferentes navegabilidades.

Para destacar as contribuições e as características do planejamento proposto neste trabalho, serão apresentados a seguir os principais pontos observados a partir dos resultados obtidos.

Contribuições e características do planejamento baseado na CHC:

- Ausência de mínimos locais: uma vez que o campo potencial obtido é baseado em funções harmônicas, os pontos de máximo e mínimo apenas podem ocorrer nas singularidades inseridas no potencial. Dessa forma a ocorrência de mínimos (ou máximos) fica restrita aos pontos de destino, uma vez que estes são os únicos pontos críticos inseridos no interior do ambiente. Ainda existe a possibilidade de ocorrência de pontos de sela a depender da configuração do ambiente. No entanto, estes pontos não são um problema uma vez que representam um equilíbrio instável. Além disso, a discretização do ambiente faz com que, normalmente, estes pontos não sejam observados.
- Condição de Horizonte Continuado: a CHC é uma forma original de definição do contorno desenvolvida neste trabalho inspirada na ideia de propagação térmica. Essa condição de contorno minimiza a influência dos obstáculos no perfil do potencial, possibilitando assim a busca pelo menor caminho até o destino. Pode-se dizer que, na definição do contorno proposta, o ambiente define a temperatura no contorno e

este, por sua vez, não tem influência (ao menos idealmente) sobre a temperatura do ambiente, diferentemente do que acontece para as condições de contorno clássicas. Além disso, por ser a CHC uma nova condição de contorno, a solução do sistema de equações que resulta no potencial proposto nessa tese de doutorado não se restringe ao método de solução do sistema aqui utilizado. Uma vez equacionado o problema, o sistema matricial pode fazer uso dos diversos avanços propostos pela comunidade científica com o intuito de acelerar a obtenção do potencial discretizado (apresentados na Seção 4.2). Assim, a utilização da CHC abre caminhos para a utilização dos resultados de pesquisa dessa área na obtenção, de forma mais rápida e eficiente, de um novo perfil de potencial concentrado na busca pelo caminho mais curto até o destino.

- O potencial da CHC e o planejamento completo: uma das características mais importantes para as estratégias de planejamento baseadas em campos potenciais é a sua capacidade de levar o robô até o ponto de destino a partir de todos os pontos do ambiente que possuam conexão com o mesmo. As técnicas de planejamento que possuem essa característica são classificadas como métodos completos, descritos na Seção 3.4.4 deste trabalho. Como o potencial é formalizado a partir da construção discretizada de uma função harmônica, não são observados mínimos locais nos pontos internos do ambiente, ficando estes restritos aos pontos críticos inseridos no potencial (pontos de destino) e nas regiões de contorno. Uma vez que não há mínimos locais no interior do potencial, ao seguir o gradiente discretizado da função resultante da CHC, o robô sempre consegue alcançar o destino (se existir um caminho até ele), mesmo quando é considerada uma condutividade não ideal (K_{term} diferente de 1), desde que a condutividade seja diferente de zero, o que impossibilitaria a propagação da temperatura. Considerando um potencial sem mínimos locais, a CHC é, então, elaborada de modo a calcular o valor de temperatura em cada ponto do contorno, no sentido de simular neste a continuidade do ambiente de navegação, considerando para isso apenas os valores de temperatura nos pontos próximos a ele. Dessa forma, o valor de temperatura no contorno (calculado pela CHC) reduz a influência do contorno no gradiente dos pontos vizinhos, uma vez que essa temperatura é calculada usando a mesma equação que caracteriza o potencial, simulando assim a sua continuidade. Com isso, a direção do movimento do robô nos pontos vizinhos ao contorno é mantida, garantindo a obtenção de um caminho até o destino, como demonstrado formalmente no Capítulo 5. Com as características mencionadas acima e considerando que o potencial é calculado para um ambiente discretizado, o método proposto pode ser enquadrado em uma das formas relaxadas de completude, apresentadas no Capítulo 3, como sendo um método completo por resolução.

- O potencial da CHC e a função de navegação: em [47], Rimon e Koditschek propuseram um conjunto de condições que, se atendidas, caracterizam uma dada função potencial como sendo uma *função de navegação*. A função potencial proposta neste trabalho de doutorado não se enquadra em todas as características apresentadas em [47], não podendo, então, ser tratada como uma função de navegação. Uma característica necessária que não é atendida é a exigência de que o valor do potencial seja constante em todos os pontos de contorno, o que, claramente, não pode ser atendido pela função potencial gerada a partir da CHC, uma vez que nesse potencial, a temperatura no contorno é induzida pelos valores das temperaturas próximas a ele. Assim, os pontos de contorno mais próximos ao destino devem apresentar temperaturas com valores diferentes, se comparados com os pontos mais distantes do destino, não satisfazendo a condição mencionada. O fato do método proposto não ser uma função de navegação no sentido de Rimon e Koditschek, não invalida ou desqualifica a técnica desenvolvida, como pode ser observado nos diversos resultados apresentados na Seção 6.2.
- Busca pelo menor caminho e a otimalidade: os resultados apresentados ilustram que os objetivos propostos foram alcançados, tendo sido desenvolvida uma estratégia de planejamento que reduz a distorção causada pelos obstáculos no potencial, o que resulta em um planejamento que busca a obtenção de um caminho mais curto até o destino, independentemente das características do ambiente. Tal característica é uma inovação na área de planejamento baseado em funções harmônicas, uma vez que os poucos trabalhos que abordam tal especificidade o fazem de forma tangencial, não apresentando resultados conclusivos, o que evidencia a originalidade do trabalho aqui desenvolvido. A otimalidade, no sentido de menor distância, não pôde ser demonstrada para ambientes discretizados, uma vez que a variação do K_{term} gera uma suavização das curvas, o que, naturalmente, aumenta a distância percorrida pelo robô. No entanto, foi mostrado em diversos experimentos por simulação que, mesmo com a suavização das curvas para valores elevados de K_{term} , o desvio em relação ao caminho mais curto continua pequeno, se restringindo, basicamente, às proximidades das quinas do ambiente, onde a velocidade angular do robô é maior. Adicionalmente, o método proposto foi comparado com o método *Wavefront*, sabidamente ótimo no sentido de número de células trafegadas até o destino. Nessa comparação, foi observado para o caso da CHC que, mesmo sendo o potencial calculado em pontos discretos do ambiente, o gradiente não é limitado em termos de direção de movimento. Dessa forma, mesmo não sendo o planejamento baseado na CHC matematicamente ótimo para o menor caminho, é possível através dessa nova condição de contorno a obtenção de caminhos mais curtos até o destino quando comparada aos resultados do *Wavefront*.

- Um potencial, infinitos pontos de partida: outra vantagem que é observada no planejamento proposto é que, para um contorno definido pela CHC, não é necessário incluir um ponto crítico na origem do movimento, ou seja, o ponto de partida não precisa ser modelado. Dessa forma, a trajetória obtida seguindo o gradiente descendente do potencial a partir de qualquer posição do mapa, levará o robô até o destino, buscando o menor caminho, podendo uma nova trajetória ser obtida para um novo ponto de partida, sem que para isso seja necessário recalcular o potencial, diferentemente do que acontece para a condição de Neumann, em que o ponto de partida deve ser definido obrigatoriamente.
- Planejamento realimentado: a estratégia de planejamento proposta, apesar de desenvolvida sem pretensões nesse sentido, pode ser utilizada como uma estratégia de planejamento realimentado, uma vez que para cada posição do robô no ambiente existe uma direção associada que aponta para o destino. Dessa forma, ao desenvolver uma estratégia de controle baseada no potencial obtido, é possível a obtenção de um caminho até o destino para qualquer posição instantânea do robô, independente desta fazer parte ou não do caminho inicialmente idealizado, o que pode ser considerado como um tipo de replanejamento instantâneo por reposicionamento do robô no ambiente, diferentemente do que acontece quando a solução do sistema de planejamento é apresentada na forma de um caminho ou uma trajetória isolada.
- Planejamento multiobjetivos e com regiões de destino: considerando a forma que o planejamento proposto foi equacionado, a adaptação deste para solucionar o problema de planejamento multiobjetivos (ou considerando regiões de destino) é muito simples, sendo necessário apenas acrescentar mais de um elemento diferente de zero no vetor \mathbf{t}_d , nas posições referentes aos pontos de destino desejados, formem eles uma região, pontos isolados ou mesmo regiões independentes. Além disso, essa alteração não implica modificações nas demais etapas do planejamento apresentado, o que garante a manutenção das características obtidas pela utilização da CHC.
- Planejamento com diferentes navegabilidades: o planejamento proposto, foi formado considerando uma mesma condutividade (K_{term}) para todo o ambiente navegável. No entanto, o condutividade (se mantida em valores maiores que zero e menores que um) pode ser diferente para diferentes regiões do ambiente. Dessa forma, foi associado o conceito de condutividade (da analogia com a propagação térmica) com o conceito de navegabilidade (da área de planejamento de movimento). Os resultados apresentados mostraram que, para regiões com diferentes navegabilidades, a CHC mantém as características do potencial resultante dentro das regiões de mesma navegabilidade. Com isso, o potencial gerado pela CHC conduz o robô buscando o menor caminho até o destino, podendo, no entanto, mudar de região sempre que a

relação de custo e benefício entre navegabilidade e busca pelo menor caminho indicar. Essa é uma extensão do problema básico de planejamento bastante promissora, sendo utilizada principalmente para ambientes externos onde características como tipo de terreno e inclinação do mesmo influenciam drasticamente na navegação do robô, tendo o planejamento baseado na CHC apresentado bons resultados para esse tipo de problema.

- Comparação com os resultados clássicos: na seção de resultados foi apresentada uma comparação entre os resultados obtidos pela CHC e os resultados clássicos, associados às condições de Dirichlet e Neumann (Seção 6.2.1). Essa comparação evidenciou que, mesmo para valores elevados de K_{term} , para os quais as curvas são suavizadas, a trajetória executada pelo robô ao seguir o gradiente do potencial da CHC é menor que aquelas obtidas pelas condições de Neumann e Dirichlet, resultado que já era esperado dada a motivação da condição de contorno proposta neste trabalho. Foi mostrado ainda na Seção 6.2.1 que, mesmo com a suavização das curvas para valores elevados de K_{term} , o campo vetorial do potencial resultante mantém a região de máximo do ambiente no mesmo lugar que foi observado para valores menores de K_{term} . Dessa forma, apesar da suavização da trajetória nas curvas, a direção do movimento se mantém a mesma nas diferentes porções do ambiente, mantendo, assim, a busca pelo menor caminho mesmo para valores elevados de condutividade, com a diferença que, nesses casos, é admitida a suavização das curvas em detrimento do caminho mais curto com curvas “fechadas”. Os diferentes resultados experimentais apresentados na Seção 6.2.1 são ainda uma evidência experimental de que os caminhos obtidos através da CHC são mais curtos que aqueles obtidos pelas condições de contorno clássicas. No entanto, como mencionado anteriormente, a generalização desse resultado depende de uma demonstração formal dessa característica, não obtida nesse trabalho.
- Fácil definição do parâmetro K_{term} : uma vantagem do método proposto é a busca pelo caminho mais curto para quaisquer ambientes sem que para isso seja necessária a realização de ajustes ou sintonia de parâmetros de qualquer tipo. A constante térmica, K_{term} , é o único parâmetro ajustável em toda a estratégia de planejamento, podendo este produzir resultados muito próximos para uma larga faixa de valores, como apresentado na Seção 6.1.2, cuja diferença na trajetória resultante é imperceptível a olho nu, como pôde ser observado na Figura 6.2.
- Possibilidade de suavização da trajetória: muitas vezes as restrições cinemáticas do robô fazem com que curvas abruptas sejam inexecutáveis. Por outro lado, a existência destas é quase que garantida quando existe a intenção do planejamento de buscar o menor caminho. Assim, para tornar o caminho executável por estes robôs, é preciso suavizar o caminho obtido. No planejamento proposto, essa suavização pode ser feita

sem custos adicionais de processamento ou adição de uma nova etapa, bastando para isso escolher valores mais altos de K_{term} , como ilustrado nos testes apresentados na Seção 6.1.

- Limitações do método proposto: apesar dos resultados positivos apresentados, algumas limitações do método desenvolvido foram observadas ao longo deste trabalho, a principal delas está associada ao decaimento exponencial da distribuição de temperatura no potencial. Os valores de temperatura do potencial são menores quanto maior é a distância para o destino. No entanto, como esse decaimento é muito rápido, o método proposto pode apresentar problemas de convergência computacional para ambientes grandes ou para ambientes discretizados em uma grade de alta resolução. No outro extremo, pode existir algum ambiente onde a demonstração de convergência apresentada pode requerer uma resolução de discretização arbitrária (podendo ser elevada) para que a prova seja válida, o que indica uma outra restrição do método. Uma outra limitação observada é a impossibilidade de definir um ponto de destino em um nó vizinho a um obstáculo. Essa limitação é também uma consequência direta das restrições impostas ao método para possibilitar a demonstração formal de sua convergência. A alocação de um ponto de destino nessas condições implica o surgimento de um mínimo dentro da região BCD definida na Seção 5.4, o que desqualificaria a prova de convergência apresentada.

Além das contribuições obtidas com a estratégia de planejamento de movimento desenvolvida nesta tese de doutorado, a ampla revisão bibliográfica realizada sobre planejamento de movimento motivou a criação de um capítulo (Capítulo 3) que apresenta uma visão geral e qualitativa bastante atual da área, condensando diferentes pontos de vista em uma classificação unificada, considerada por este autor como uma contribuição de fundo para futuros trabalhos na área de planejamento, uma vez que, durante a revisão realizada, não foram encontrados textos que unificassem estas diferentes percepções de planejamento.

Assim como no Capítulo 3, foi apresentada no Capítulo 4 uma ampla revisão bibliográfica específica sobre planejamento baseado em funções harmônicas, contextualizando o estado da arte do referido tema. Tal trabalho pode ser considerado como uma contribuição significativa para a referida linha de pesquisa, uma vez que não foram encontrados trabalhos de revisão sobre o tema, ainda que desatualizados.

No desenvolvimento desse trabalho, surgiram diferentes questões que, ou fugiam do tema central aqui explorado, ou foram consideradas como pontos a serem explorados em desdobramentos futuros dessa tese de doutorado. Esses possíveis temas de pesquisa são elencados aqui como trabalhos futuros a serem considerados nas pesquisas que seguirão após o término dessa tese de doutorado.

Trabalhos futuros:

A obtenção do potencial resultante da CHC em um único passo (inversão de matrizes esparsas) é também uma característica original deste trabalho, se considerados os trabalhos relacionados com planejamento de movimento de robôs móveis. A motivação principal está no fato de que métodos numéricos exatos não utilizam explicitamente um valor de convergência admissível, como é de praxe em métodos iterativos. No entanto, apesar de terem sido obtidos resultados bastante animadores em relação ao tempo de processamento, quando considerada a característica esparsa da matriz, métodos numéricos iterativos encontrados na revisão bibliográfica podem ainda apresentar resultados semelhantes ou, talvez, melhores. Dessa forma, um possível tema de pesquisa vislumbrado ao longo desse trabalho é a realização de um estudo comparativo entre métodos numéricos exatos e aproximados, considerando a esparsidade da matriz do sistema nos dois casos.

O método proposto foi idealizado em uma representação discretizada do ambiente, representando-o como uma grade regular. Na seção de resultados, a inspiração na ideia de propagação térmica é revisitada e o planejamento baseado na CHC é implementado para uma grade irregular formada por elementos triangulares. Uma outra possível continuidade desse trabalho está associada ao tipo de representação do ambiente. Possíveis pesquisas futuras podem basear-se na mesma ideia aqui apresentada para implementar a CHC em outras formas de discretização do ambiente ou mesmo para uma representação no domínio contínuo, ampliando assim o leque de aplicações da técnica apresentada.

O planejamento baseado em funções harmônicas tem sido aplicado a diversas outras extensões do problema básico de planejamento como planejamento considerando múltiplos robôs, obstáculos móveis, obstáculos dinâmicos, planejamento exploratório, entre outros. Assim, possíveis desdobramentos desse trabalho podem considerar a utilização do planejamento baseado na CHC nessas extensões.

Neste trabalho, foi apresentada uma demonstração formal da convergência do método proposto. No entanto, apesar dos resultados experimentais apresentados, o método desenvolvido carece ainda de outras demonstrações matemáticas que permitam provar que é possível obter o caminho mais curto até o destino através da CHC para algum valor de K_{term} . Uma outra demonstração formal que pode ser foco de pesquisas futuras é aquela que permita afirmar, de forma geral, que o caminho obtido através do planejamento baseado na CHC nunca é maior que aqueles obtidos pelas condições de contorno clássicas.

Outros trabalhos podem ser alvo de pesquisas futuras como a investigação das características da matriz M , a comparação do método proposto com o menor caminho topológico e a demonstração formal de convergência do método para problemas de dimensão maior que dois.

Referências Bibliográficas

- [1] Paolo Pirjanian. An overview of system architecture for action selection in mobile robotics. Technical report, Laboratory of Image Analysis: Aalborg University, 1997.
- [2] Ronald C. Arkin. *Behavior-Based Robotics (Intelligent Robotics and Autonomous Agents)*, volume I. MIT Press, 1998.
- [3] Roland Siegwart, Illah R. Nourbakhsh e Davide Scaramuzza. *Introduction to Autonomous Mobile Robots*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, second edition, 2011.
- [4] C. I. Connolly, J. B. Burns e R. Weiss. Path planning using Laplace’s equation. In *Proceedings IEEE International Conference on Robotics & Automation*, pages 2102–2106, may 1990.
- [5] L.C.A. Pimenta, A.R. Fonseca, G.A.S. Pereira, R.C. Mesquita, E.J. Silva, W.M. Caminhas e M.F.M. Campos. On computing complex navigation functions. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3452 – 3457, april 2005.
- [6] Edson Prestes e Silva Jr., Paulo Martins Engel, Marcelo Trevisan e Marco Aurélio Pires Idiart. Exploration method using harmonic functions. *Robotics and Autonomous Systems*, 40:25–42, 2002.
- [7] Jugurta R. Montalvão Filho. Avaliação da acústica de recintos pelo método dos elementos finitos. Master’s thesis, UNICAMP, 1995.
- [8] S. M. LaValle. *Planning Algorithms*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2006. Available at <http://planning.cs.uiuc.edu/>.
- [9] S.M. LaValle. Motion planning - part i: The essentials. *Robotics Automation Magazine, IEEE*, 18(1):79 –89, 2011.
- [10] J.-C. Latombe. *Robot Motion Planning*. Kluwer Academic Publisher (KAP), Norwell, Massachusetts, 1991.

- [11] J. Borenstein, Y. Koren e Senior Member. The vector field histogram - fast obstacle avoidance for mobile robots. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 7:278–288, 1991.
- [12] H. Choset, K. M. Lynch, S. Hutchinson, G. Kantor, W. Burgard, L. E. Kavraki e S. Thrun. *Principles of Robot Motion: Theory, Algorithms, and Implementations*. MIT Press, Cambridge, MA, 2005.
- [13] S.M. LaValle e S.A. Hutchinson. Optimal motion planning for multiple robots having independent goals. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 14(6):912–925, 1998.
- [14] S. M. LaValle. Motion planning - part ii: Wild frontiers. *Robotics Automation Magazine, IEEE*, 18(2):108–118, 2011.
- [15] J.-C. Latombe, A. Lazanas e S. Shekhar. Robot motion planning with uncertainty in control and sensing. *Artificial Intelligence Journal*, 52:1–47, 1991.
- [16] Lydia E. Kavraki, Florent Lamiroux e Christopher Holleman. Towards planning for elastic objects, 1998.
- [17] Florent Lamiroux e Lydia E. Kavraki. Planning paths for elastic objects under manipulation constraints. *International Journal of Robotics Research*, 20:188–208, 2001.
- [18] J. Barraquand e J.-C. Latombe. Robot motion planning: a distributed representation approach. *International Journal of Robotics Research*, 10(6):628–649, 1991.
- [19] Jean-Paul Laumond e Mark Overmars, editors. *Algorithms for Robotic Motion and Manipulation*. A. K. Peters, Ltd., Natick, MA, USA, 1997.
- [20] S. J. J. Smith, D. S. Nau e T. Throop. Computer bridge: A big win for AI planning. *AI Magazine*, 19(2):93–105, 1998.
- [21] J. W. Hartmann. *Counter-Intuitive Behavior in Locally Optimal Solar Sail Escape Trajectories*. PhD thesis, University of Illinois, Urbana, IL, may 2005.
- [22] N. M. Amato e G. Song. Using motion planning to study protein folding pathways. *Journal of Computational Biology*, 9(2):149–168, 2002.
- [23] S. Chien, R. Sherwood, D. Tran, B. Cichy, D. Mandl, S. Frye, B. Trout, S. Shulman e D. Boyer. Using autonomy flight software to improve science return on Earth Observing One. *Journal of Aerospace Computing, Information, and Communication*, 2:196–216, apr 2005.

- [24] J. Funge. *Artificial Intelligence for Computer Games*. A. K. Peters, Wellesley, MA, 2004.
- [25] S. K. Gupta, D. A. Bourne, K. Kim e S. S. Krishnan. Automated process planning for robotic sheet metal bending operations. *Journal of Manufacturing Systems*, 17(5):338–360, 1998.
- [26] H. Chang e T. Y. Li. Assembly maintainability study with motion planning. In *Proceedings IEEE International Conference on Robotics & Automation*, pages 1012–1019, 1995.
- [27] T. Lozano-Pérez e M. A. Wesley. An algorithm for planning collision-free paths among polyhedral obstacles. *Communications of the ACM*, 22(10):560–570, 1979.
- [28] T. Lozano-Pérez. Spatial planning: A configuration space approach. *IEEE Transactions on Computing*, C-32(2):108–120, 1983.
- [29] S. Udupa. *Collision Detection and Avoidance in Computer Controlled Manipulators*. PhD thesis, Dept. of Electrical Engineering, California Institute of Technology, 1977.
- [30] Alexander Benjamin Doyle. *Algorithms and computational techniques for robot path planning*. PhD thesis, School of Electronic Engineering and Computer Systems, University of Wales, Bangor-UK, september 1995.
- [31] J. F. Canny. *The Complexity of Robot Motion Planning*. ACM Doctoral Dissertation Award 1987. MIT Press, Cambridge, MA, 1988.
- [32] L. E. Kavraki, P. Svestka, J.-C. Latombe e M. H. Overmars. Probabilistic roadmaps for path planning in high-dimensional configuration spaces. *IEEE Transactions on Robotics & Automation*, 12(4):566–580, 1996.
- [33] H. Takeda, C. Facchinetti e J.-C. Latombe. Planning the motions of a mobile robot in a sensory uncertainty field. *IEEE Transactions Pattern Analysis Machine Intelligence*, 16(10):1002–1017, 1994.
- [34] G. Jacob. Lyndon discretization and exact motion planning. In *Proceedings European Control Conference*, 1991.
- [35] Ellips Masehian e Davoud Sedighizadeh. Classic and heuristic approaches in robot motion planning - a chronological review. In *Proc. World Academy of Science, Engineering and Technology*, pages 101–106, 2007.
- [36] Simon Even. *Graph Algorithms*. Pitman, London, 1979.

- [37] Robert Tarjan. Depth-first search and linear graph algorithms. *SIAM Journal on Computing*, 1(2):146–160, 1972.
- [38] E. W. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1:269–271, 1959.
- [39] Judea Pearl. *Heuristics: intelligent search strategies for computer problem solving*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1984.
- [40] P.E. Hart, N.J. Nilsson e B. Raphael. A formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths. *Systems Science and Cybernetics, IEEE Transactions on*, 4(2):100–107, july 1968.
- [41] Peter E. Hart, Nils J. Nilsson e Bertram Raphael. Correction to "a formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths". *SIGART Bull.*, pages 28–29, dec 1972.
- [42] A. Stentz. Optimal and efficient path planning for partially-known environments. In *Proceedings IEEE International Conference on Robotics & Automation*, pages 3310–3317, 1994.
- [43] Oussama Khatib. Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots. *International Journal of Robotics Research*, 5(1):90–98, 1986.
- [44] Paul Morris. The breakout method for escaping from local minima. In *Proceedings of the eleventh national conference on Artificial intelligence, AAAI'93*. AAAI Press, 1993.
- [45] J. Barraquand e J.-C. Latombe. A Monte-Carlo algorithm for path planning with many degrees of freedom. In *Proceedings IEEE International Conference on Robotics & Automation*, pages 1712–1717, 1990.
- [46] M. Khatib e R. Chatila. An extended potential field approach for mobile robot sensor motion. In *Proceedings of the Intelligent Autonomous Systems, IAS-4*, pages 490–496, Karlsruhe, Germany, march 1995. IOS Press.
- [47] E. Rimon e D. E. Koditschek. Exact robot navigation using artificial potential fields. *IEEE Transactions on Robotics & Automation*, 8(5):501–518, October 1992.
- [48] J.-O. Kim e P. Khosla. Real-time obstacle avoidance using harmonic potential functions. Technical report, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, 1990.
- [49] S. Akishita, S. Kawamura e K. Hayashi. Laplace potential for moving obstacles avoidance and approach of a mobile robot. In *Proceedings of Japan-USA Symposium on Flexible Automation*, pages 139–142, 1990.

- [50] E.C. Zachmanoglou e D.W. Thoe. *Introduction to Partial Differential Equations With Applications*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications, 1986.
- [51] S.J. Axler, P. Bourdon e W. Ramey. *Harmonic Function Theory*. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 1992.
- [52] Farbod Fahimi. *Autonomous robots: modeling, path planning, and control*. Springer, 2008.
- [53] L. Tarassenko e A. Blake. Analogue computation of collision-free paths. In *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 540–545 vol.1, 1991.
- [54] H. J. S. Feder e J.-J. E. Slotine. Real-time path planning using harmonic potentials in dynamic environments. In *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 874–881 vol.1, 1997.
- [55] Christopher I. Connolly e Roderic A. Grupen. Applications of harmonic functions to robotics. *Journal of Robotic Systems*, 10:931–946, 1992.
- [56] T. Tyrrell. *Computational Mechanisms for Action Selection*. PhD thesis, University of Edinburgh, 1993.
- [57] Pattie Maes. How to do the right thing. *Connection Science Journal*, 1:291–323, 1989.
- [58] T. Bailey e H. Durrant-Whyte. Simultaneous localisation and mapping (slam): Part i - the essential algorithms. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 13(2), 2006.
- [59] T. Bailey e H. Durrant-Whyte. Simultaneous localisation and mapping (slam): Part ii - state of the art. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 13(3), 2006.
- [60] John E. Laird, Allen Newell e Paul S. Rosenbloom. Soar: an architecture for general intelligence. *Artif. Intell.*, 33(1):1–64, 1987.
- [61] E. Bicho, P. Mallet e G. Schoner. Using attractor dynamics to control autonomous vehicle motion. *Industrial Electronics Society, 1998. IECON '98. Proceedings of the 24th Annual Conference of the IEEE*, 2:1176–1181 vol.2, 1998.
- [62] C. S. Andersen, H. I. Christensen, N. O. S. Kirkeby, L. F. Knudsen e C. B. Madsen. A system for vision supported navigation. In *Proceedings of Nordic Summer School on Active Vision and Geometric Modeling*, pages 251–258, 1992.

- [63] Ken Currie, Austin Tate e South Bridge. O-plan: the open planning architecture. *Artificial Intelligence*, 52:49–86, 1991.
- [64] A. Kosaka e A. Kak. Fast vision-guided mobile robot navigation using model-based reasoning and prediction of uncertainties. *Intelligent Robots and Systems, 1992., Proceedings of the 1992 IEEE/RSJ International Conference on*, 3:2177–2186, Jul 1992.
- [65] H.P. Moravec. The stanford cart and the cmu rover. *Proceedings of the IEEE*, 71(7):872–884, July 1983.
- [66] R. Brooks. A robust layered control system for a mobile robot. *Robotics and Automation, IEEE Journal of*, 2(1):14–23, Mar 1986.
- [67] E.O. Freire, T.F. Bastos-Filho, M. Sarcinelli-Filho e R. Carelli. A control architecture for mobile robots using fusion of the output of distinct controllers. *Intelligent Control, 2002. Proceedings of the 2002 IEEE International Symposium on*, pages 142–147, 2002.
- [68] E.O. Freire. *Controle de Robôs Móveis por Fusão de Sinais de Controle Usando Filtro de Informação Descentralizado*. PhD thesis, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória-ES, Agosto 2002.
- [69] Ronald C. Arkin. Motor schema based navigation for a mobile robot: An approach to programming by behavior. *Robotics and Automation. Proceedings. 1987 IEEE International Conference on*, 4:264–271, Mar 1987.
- [70] E. Freire, T. Bastos-Filho, M. Sarcinelli-Filho e R. Carelli. A new mobile robot control approach via fusion of control signals. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B, IEEE Transactions on*, 34(1):419–429, Feb. 2004.
- [71] Julio Rosenblatt. Damn: A distributed architecture for mobile navigation. In *Journal of Experimental and Theoretical Artificial Intelligence*, pages 339–360. AAAI Press, 1997.
- [72] Jonathan H. Connell. Sss: A hybrid architecture applied to robot navigation. In *Proceedings of the 1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2719–2724, 1992.
- [73] Erann Gat. Integrating planning and reaction in a heterogeneous asynchronous architecture for mobile robot navigation. *SIGART Bull.*, 2(4):70–74, 1991.
- [74] Alessandro Saffiotti, Kurt Konolige e Enrique H. Ruspini. A multivalued logic approach to integrating planning and control. *Artificial Intelligence*, 76:481–526, 1995.

- [75] Ronald C. Arkin. Towards the unification of navigational planning and reactive control. In *AAAI Spring Symposium on Robot Navigation*, pages 1–5, 1989.
- [76] Ronald C. Arkin e Tucker Balch. Aura: Principles and practice in review. *Journal of Experimental and Theoretical Artificial Intelligence*, 9:175–189, 1997.
- [77] Hans Blaasvaer, Paolo Pirjanian e Henrik I. Christensen. An autonomous mobile robot navigation system. In *in Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, pages 2266–2271, 1994.
- [78] Paolo Pirjanian. Behavior coordination mechanisms - state-of-the-art. Technical report, Institute of Robotics and Intelligent Systems, School of Engineering, University of Southern California, October 1999.
- [79] L. Molina. desenvolvimento de uma arquitetura de navegação deliberativa para robôs móveis utilizando a teoria de controle supervisorio. Master’s thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, março 2010.
- [80] Oussama Khatib. *Commande dynamique dans l’espace opérationnel des robots manipulateurs en présence d’obstacles*. PhD thesis, Ecole Nationale de la Statistique et de l’Administration Economique, France, 1980.
- [81] C. Galindo, J.-A. Fernandez-Madrigo e J. Gonzalez. Improving efficiency in mobile robot task planning through world abstraction. *Robotics, IEEE Transactions on*, 20(4):677 – 690, aug. 2004.
- [82] Cipriano Galindo, Juan-Antonio Fernandez-Madrigo, Javier González e Alessandro Saffiotti. Robot task planning using semantic maps. *Robotics and Autonomous Systems*, 56(11):955 – 966, 2008.
- [83] N. J. Nilsson. A mobile automaton: An application of artificial intelligence techniques. In *1st International Conference on Artificial Intelligence*, pages 509–520, 1969.
- [84] Y. K. Hwang e N. Ahuja. Gross motion planning - a survey. *ACM Comput. Surv.*, 24:219–291, 1992.
- [85] Elyson A. N. Carvalho, José G. N. Carvalho Filho, Lucas Molina, Eduardo O. Freire, Raimundo C. S. Freire e Benedito A. Luciano. Medição de velocidade angular com alta resolução usando encoders de baixa resolução e pll. *Controle & Automação*, 21:616–625, 12 2010.
- [86] Lydia Kavraki e Jean-Claude Latombe. Randomized preprocessing of configuration space for fast path planning. In *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2138–2145, 1994.

- [87] Lydia E. Kavraki e Jean-Claude Latombe. *Livro: Practical Motion Planning in Robotics*, chapter 4: Probabilistic Roadmaps for Robot Path Planning. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1998.
- [88] S. M. LaValle. Rapidly-exploring random trees: A new tool for path planning. Technical Report 98-11, Computer Science Dept., Iowa State University, October 1998.
- [89] R. A. Brooks. Solving the find-path problem by good representation of free space. *IEEE Transactions on Systems, Man, Cybernetics*, 13(3):190–197, 1983.
- [90] W. Meyer e P. Benedict. Path planning and the geometry of joint space obstacles. In *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 215–219 vol.1, apr 1988.
- [91] H. Rohnert. Shortest paths in the plane with convex polygonal obstacles. *Information Processing Letters*, 23:71–76, 1986.
- [92] Y. Liu e S. Arimoto. Path planning using a tangent graph for mobile robots among polygonal and curved obstacles. *International Journal of Robotics Research*, 11(4):376–382, 1992.
- [93] J. Canny. A voronoi method for the piano-movers problem. In *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 2, pages 530 – 535, mar 1985.
- [94] T. Lozano-Pérez. A simple motion-planning algorithm for general robot manipulators. *IEEE Journal of Robotics & Automation*, RA-3(3):224–238, June 1987.
- [95] A. Elfes. Using occupancy grids for mobile robot perception and navigation. *IEEE Journal - Computer*, 22(6):46–57, june 1989.
- [96] S. Kambhampati e L. Davis. Multiresolution path planning for mobile robots. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 2(3):135–145, sep 1986.
- [97] Oussama Khatib, M. Llibre e R. Mampey. Fonction décision-commande d’un robot manipulateur. Technical Report 2/7156 (Rapport Scientifique), DERA-CERT, Toulouse, France, July 1978.
- [98] V. V. Pavlov e A. N. Voronin. The method of potential functions for coding constraints of the external space in an intelligent mobile robot. *Sovietic Automatic Control*, 6, 1984.

- [99] Neville Hogan. Impedance control: An approach to manipulation (part iii - applications). *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 107(1):17–24, 1985.
- [100] F. Miyazaki e S. Arimoto. Sensory feedback based on the artificial potential for robots. In *Proceedings of the 9th Triannual World Congress of International Factory Automation*, pages 2381–2386, Budapest, july 1984. Pergamon Press.
- [101] D. E. Koditschek. Exact robot navigation by means of potential functions: Some topological considerations. In *Proceedings IEEE International Conference on Robotics & Automation*, pages 1–6, 1987.
- [102] Y K Hwang e N Ahuja. A potential field approach to path planning. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 8(1):23–32, 1992.
- [103] D. Aarno, D. Kragic e H.I. Christensen. Artificial potential biased probabilistic roadmap method. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 1, pages 461–466, 2004.
- [104] M. Kazemi e M. Mehrandezh. Robotic navigation using harmonic function-based probabilistic roadmaps. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 5, pages 4765–4770, april-1 may 2004.
- [105] M. Kazemi, M. Mehrandezh e K. Gupta. An incremental harmonic function-based probabilistic roadmap approach to robot path planning. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2136 – 2141, april 2005.
- [106] J. Rosell e P. Iniguez. Path planning using harmonic functions and probabilistic cell decomposition. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1803–1808, april 2005.
- [107] I. Chattopadhyay, G. Mallapragada e A. Ray. L*: An intelligent path planning algorithm based on renormalized measure of probabilistic regular languages. In *Proceedings of 2008 American Control Conference*, pages 1249–1254, 2008.
- [108] I. Chattopadhyay, G. Mallapragada e A. Ray. v*: a robot path planning algorithm based on renormalised measure of probabilistic regular languages. *International Journal of Control*, 82(5):849–867, 2009.
- [109] C. G. Cassandras e S. Lafortune. *Introduction to Discrete Event Systems*. Springer-Verlag New York, Inc., 2006.

- [110] Xi Wang e Asok Ray. A language measure for performance evaluation of discrete-event supervisory control systems. *Applied Mathematical Modeling*, 28:817 – 833, 2004.
- [111] Jean-Paul. Laumond. Trajectories for mobile robots with kinematic and environment constraints. In *Proceedings International Conference on Intelligent Autonomous Systems*, pages 346–354, 1986.
- [112] Jean-Paul. Laumond. *Robot Motion Planning and Control*. Springer-Verlag, Berlin, 1998. Available online at <http://www.laas.fr/~jpl/book.html>.
- [113] B. R. Donald, P. G. Xavier, J. Canny e J. Reif. Kinodynamic planning. *Journal of the ACM*, 40:1048–66, November 1993.
- [114] E. Rimon e D.E. Koditschek. Exact robot navigation using cost functions: the case of distinct spherical boundaries in en. In *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 3, pages 1791 –1796, apr 1988.
- [115] Edson Prestes e Silva Júnior. *Navegação exploratória baseada em problemas de valores de contorno*. PhD thesis, Instituto de Informática da UFRGS, Porto Alegre, fevereiro 2003.
- [116] José Gilmar Nunes de Carvalho Filho. Modelagem e síntese para coordenação de sistemas multi-robôs baseada numa estrutura de jogo. Master’s thesis, Programa de Pós-graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da UFSC, Florianópolis, fevereiro 2012.
- [117] Luca Iocchi, Daniele Nardi e Massimiliano Salerno. Reactivity and deliberation: A survey on multi-robot systems. In *Balancing Reactivity and Social Deliberation in Multi-Agent Systems*, pages 9–34, London, UK, 2001. Springer-Verlag.
- [118] Joseph S. B. Mitchell e Christos H. Papadimitriou. The weighted region problem: finding shortest paths through a weighted planar subdivision. *J. ACM*, 38(1):18–73, January 1991.
- [119] Dennis G. Zill e Michael R. Cullen. *Matemática avançada para engenharia*, volume 3. Bookman, 3 edition, 2009.
- [120] S. Akishita, T. Hisanobu e S. Kawamura. Fast path planning available for moving obstacle avoidance by use of laplace potential. In *Proceedings of the 1993 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, volume 1, pages 673 –678, jul 1993.
- [121] Christopher I. Connolly e Roderic A. Grupen. On the applications of harmonic functions to robotics. *Journal of Robotic Systems*, 10:931–946, 1993.

- [122] Christopher I. Connolly e Roderic A. Grupen. Nonholonomic path planning using harmonic functions. Technical report, Computer Science Department of University of Massachusetts at Amherst, June 1994. UM-CS-1994-050.
- [123] Yunfeng Wang e G. S. Chirikjian. A new potential field method for robot path planning. In *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 2, pages 977–982, 2000.
- [124] Z. X. Li e T. D. Bui. Robot path planning using fluid model. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 21:29–50, 1998.
- [125] Pedro Iñiguez e Jan Rosell. Efficient path planning using harmonic functions computed on a non-regular grid. In M. Escrig, Francisco Toledo e Elisabet Golobardes, editors, *Topics in Artificial Intelligence*, volume 2504 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 345–354. Springer Berlin / Heidelberg, 2002.
- [126] P. Iñiguez e J. Rosell. Probabilistic harmonic-function-based method for robot motion planning. In *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, volume 1, pages 382–387, oct. 2003.
- [127] A. Saudi e J. Sulaiman. Robot path planning based on four point-egsor iterative method. In *IEEE Conference on Robotics Automation and Mechatronics (RAM)*, pages 476–481, june 2010.
- [128] A. Saudi e J. Sulaiman. Red-black strategy for mobile robot path planning. In *International MultiConference of Enginners and Computer Scientists*, volume 3, March 2010.
- [129] R. Silveira, E. Prestes e L. Nedel. Fast path planning using multi-resolution boundary value problems. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 4710–4715, oct. 2010.
- [130] Achi Brandt. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Mathematics of Computation*, 31(138):333–390, April 1977.
- [131] L.C.A. Pimenta, G.A.S. Pereira, R.C. Mesquita, W.M. Caminhas e M.F.M. Campos. Elementos finitos na navegação de robôs móveis. In *Proceedings of the XV Congresso Brasileiro de Automática*, Gramado-RS, Brasil, Setembro 2004.
- [132] Marcelo Trevisan, Marco A. Idiart, Edson Prestes e Paulo M. Engel. Exploratory navigation based on dynamical boundary value problems. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 45(2):101–114, February 2006.

- [133] G. Faria, E. Prestes, M.A.P. Idiart e R.A.F. Romero. Multi robot system based on boundary value problems. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 2065 –2069, oct. 2006.
- [134] G. Faria, R.A.F. Romero, E. Prestes e M.A.P. Idiart. Comparing harmonic functions and potential fields in the trajectory control of mobile robots. In *IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics*, volume 2, pages 762 – 767, dec. 2004.
- [135] M.O. Silva, W.C. Silva e R.A.F. Romero. Performance analysis of path planning techniques based on potential fields. In *Latin American Robotics Symposium and Intelligent Robotic Meeting (LARS)*, pages 115 –119, oct. 2010.
- [136] S.A. Masoud e A.A. Masoud. Motion planning in the presence of directional and regional avoidance constraints using nonlinear, anisotropic, harmonic potential fields: a physical metaphor. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 32(6):705–723, nov 2002.
- [137] D. Keymeulen e J. Decuyper. The fluid dynamics applied to mobile robot motion: the stream field method. In *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 1, pages 378 –385, may 1994.
- [138] S. Sasaki. A practical computational technique for mobile robot navigation. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*, volume 2, pages 1323 –1327, sep 1998.
- [139] D. Gingras, E. Dupuis, G. Payre e J. de Lafontaine. Path planning based on fluid mechanics for mobile robots using unstructured terrain models. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 1978–1984, may 2010.
- [140] C. Louste e A. Liegeois. Near optimal robust path planning for mobile robots: the viscous fluid method with friction. *Journal of Intelligent and Robotics Systems*, 27:99–112, January 2000.
- [141] E. Prestes e M. Idiart. Sculpting potential fields in the bvp path planner. In *IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, pages 183 –188, dec. 2009.
- [142] Song Li. *Fast Algorithms for Sparse Matrix Inverse Computations*. PhD thesis, Institute for Computational and Mathematical Engineering, STANFORD UNIVERSITY, September 2009.

- [143] Larry J. Segerlind. *Applied Finite Element Analysis*. John Wiley and Sons, 2 edition, 1984.
- [144] J. Barraquand, B. Langlois e J.-C. Latombe. Numerical potential field techniques for robot path planning. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, 22(2):224–241, 1992.