



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ESTUDO DA QED EFETIVA DE MYERS-POSPELOV
VIOLANDO AS SIMETRIAS DE LORENTZ-CPT**

Pablo Francisco Honorato Sampaio

CAMPINA GRANDE

- 2012 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ESTUDO DA QED EFETIVA DE MYERS-POSPELOV
VIOLANDO AS SIMETRIAS DE LORENTZ-CPT**

Pablo Francisco Honorato Sampaio

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE

- 2012 -

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

S192e Sampaio, Pablo Francisco Honorato.
Estudo da QED efetiva de Myers-Pospelov violando as simetrias de Lorentz-CPT / Pablo Francisco Honorato. -- Campina Grande, 2012.
39 f.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2012.

"Orientação: Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos".
Referências.

1. Eletrodinâmica Quântica Estendida. 2. Quebra de Simetrias.
3. Correções Quânticas. I. Passos, Eduardo Marcos Rodrigues dos.
II. Título.

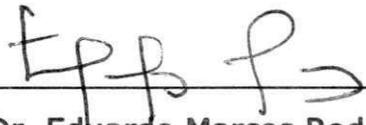
CDU 537.8(043)

PABLO FRANCISCO HONORATO SAMPAIO

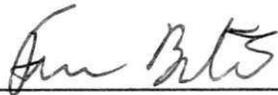
**ESTUDO DA QED EFETIVA DE MYERS-POSPELOV VIOLANDO
AS SIMETRIAS DE LORENTZ-CPT**

Dissertação aprovada em 21/12/2012

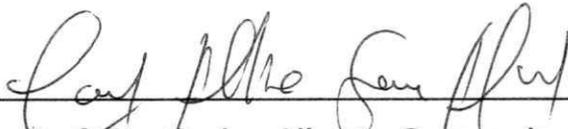
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
Unidade Acadêmica de Física - UFCG
(Presidente)



Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Unidade Acadêmica de Física - UFCG
(Membro interno)



Prof. Dr. Carlos Alberto Gomes de Almeida
Departamento de Física - UFPB
(Membro externo)

*Dedico esse trabalho aos meus pais, Lina
e Francisco e aos meus irmãos Greyce e
Franklin.*

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aos professores do curso que me apoiaram, juntamente aos funcionários que participaram da minha caminhada.

A minha família que me incentiva muito, especialmente meu pai que é o ausente mais presente que já existiu na minha vida, pela sua história de vida e como as pessoas o reconhecem pelo que ele fez. Minha mãe por ser pai e mãe ao mesmo tempo, e meus irmãos por brigarem comigo sempre me fazendo aprender cada vez mais a viver.

Aos meus amigos de fora e de dentro da universidade, pelas noitadas estudando para as avaliações e seminários.

A Débora Sales por tudo.

Ao professor Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos pela paciência e oportunidade ao me orientar neste trabalho.

A CAPES pelo apoio financeiro concedido.

E por último, ao primeiro, que é o nosso Senhor Deus, por ter colocado todas essas pessoas citadas em minha vida.

”A principal meta da educação é criar homens que sejam capazes de fazer coisas novas. Não simplesmente repetir o que outras gerações já fizeram. Homens que sejam criadores, inventores, descobridores. A segunda meta da educação é formar mentes que estejam em condições de criticar, verificar e não aceitar tudo que a elas se propõe”. (Jean Piaget)

RESUMO

Neste trabalho, consideramos a QED efetiva de Myers-Pospelov com operadores de dimensão-5 para estudar alguns aspectos tais como as características superluminais de neutrinos apontadas pelo experimento OPERA e a projeção dessa teoria de 4D-2D. No estudo da dinâmica superluminal, verificamos que operadores tipo o de dimensão-5 podem ser acoplados nos setores dos campos de calibre e fermiônico como background que controla a violação das simetrias de Lorentz e CPT. Neste caso, observamos que a presença de tais operadores na teoria, podem produzir curvas capazes de descrever dados de neutrinos superluminais obtidos pelos experimentos OPERA, MINOS e supernova SN1987a. No processo de projeção da QED de Myers-Pospelov de 4D-2D, obtemos operadores análogos dos operadores de dimensão-5. Obtemos uma nova teoria quântica de campos bi-dimensional em função da interação de campos escalares e fermiônicos e parametrizadas por operadores de dimensão-3 violando as simetrias de Lorentz e CPT. Novas estruturas de defeitos são também encontradas via o setor do campo escalar de teoria bi-dimensional. Além disso, encontramos que essa mesma teoria efetiva, pode ser induzida via correções quânticas de determinante fermiônico em 2D.

Palavra-chave: eletrodinâmica quântica estendida, quebra de simetrias, correções quânticas, teorias efetivas, redução dimensional.

ABSTRACT

In this work, we consider the effective Myers-Pospelov QED with dimension-5 operators to study some aspects such as issue of superluminal neutrinos recently pointed out in OPERA experiments and the 2D-4D projection of theory. In the superluminal dynamics, we assume these operators in the photon and neutrino sectors coupled to Lorentz-violating backgrounds in a preferred frame defined by a time-like direction. We show that such operators can produce a curve with that fits OPERA, MINOS and supernova SN1987a data. In the process of 4D-2D projection of the Myers-Pospelov QED we get analogs of these operators. Namely, we obtain a new two-dimensional theory with corresponding scalar and fermionic 2D Myers-Pospelov Lorentz-violating dimension-3 operators. New defect structures can also be found from this new projected out 2D scalar sector. Furthermore, we also show that this 2D scalar sector can be also induced via quantum correction from fermionic determinate in 2D.

Keywords: extended quantum electrodynamics, breaking of symmetries, quantum corrections, effective theories, dimensional reduction.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	A Eletrodinâmica de Maxwell-Carrol-Field-Jackiw	6
2.1	O Modelo de Maxwell-Carrol-Field-Jackiw	6
2.2	O Efeito da Birrefringência da Luz no Vácuo	8
3	A Eletrodinâmica Quântica de Myers-Pospelov	10
3.1	O Setor do Campo de Calibre	11
3.2	O Setor do Campo Fermiônico	13
3.3	Estimativas e Discussões sobre Velocidades Superluminais	14
3.3.1	Velocidade dos Neutrinos	15
3.3.2	Velocidades dos Fótons	16
4	Projeção 4D-2D da Eletrodinâmica Quântica de Myers-Pospelov	17
4.1	O Setor do Campo de Calibre	18
4.2	O Setor do Campo Fermiônico	19
5	Ação Efetiva Induzida que Modifica o Setor do Campo Escalar em 2D	22
5.1	A Construção da Ação Efetiva	22
5.2	Ação Efetiva Induzida	25
6	Estudo de Defeitos Topológicos via o Modelo de Myers-Pospelov em 2D	28
6.1	As Equações de Movimento	28
6.2	As Soluções Estacionárias	29
7	Conclusão	31
A	O Espaço-Tempo de Minkowski	33
B	As Equações de Maxwell	34
	Bibliografia	36

Capítulo 1

Introdução

O conhecimento das propriedades de simetrias é o mais importante ingrediente para o desenvolvimento da física moderna. Neste cenário destaca-se a importância das simetrias de Lorentz e de CPT. A invariância de Lorentz é composta pela transformações de Lorentz: rotações e boosts. Enquanto que a invariância por CPT é composta pelas transformações discretas: conjugação de carga (C), paridade (P) e reversão temporal (T). Assim, para que um sistema físico seja invariante de Lorentz e de CPT, é necessário que as leis da física inerentes a tal sistema permaneçam inalteradas frente as transformações de rotações e boosts e pelas transformações de (C), (P) e (T) quando aplicadas simultaneamente. Ambas as simetrias são consideradas leis fundamentais da natureza, e suas ocorrências têm sido confirmadas através de experimentos de alta precisão [1]. Além disso, o Modelo Padrão atual que descreve a física das partículas elementares é por definição invariante frente as transformações de Lorentz e de CPT.

Entretanto, estudos recentes questionam se a invariância de Lorentz e de CPT sejam de fato, simetrias exatas da natureza. Uma justificativa teórica, é a sempre procura de uma física além da descrita pelo Modelo Padrão. E a experimental, surge com o crescente avanço tecnológico que pode oferecer boas perspectivas de se detectar efeitos oriundos de uma escala de comprimento fundamental que seja incompatível com a invariância frente as transformações de Lorentz. Isto pode justificar possíveis

modificações ou até mesmo extensões na física convencional.

A moderna teoria quântica de campos já admite a possibilidade da quebra da invariância de Lorentz pelo mecanismo da quebra espontânea de simetrias via a solução de vácuo da teoria. Contudo, o Modelo Padrão não possui dinâmica suficiente para causar a violação espontânea da simetria de Lorentz. Então considera-se que a quebra de simetrias tão fundamentais como a de Lorentz e a de CPT venha a ocorrer em teorias mais fundamentais, tais como Teoria de Cordas, Gravidade Quântica, etc., e a teoria resultante pode ser efetivamente descrita por uma estrutura que seja superior a atual estrutura do Modelo Padrão emergindo da escala de Planck. Esta ideia levou ao desenvolvimento da técnica da Extensão do Modelo Padrão (SME em inglês) proposta por Colladay e Kostelecky na década de 90 [2].

Na prática, a SME é estudada através de uma Lagrangeana efetiva que contém todos os possíveis operadores construídos a partir de campos fundamentais que sejam renormalizáveis por contagem de potência, invariante de calibre e escalares de Lorentz por construção. Nesta estrutura, os campos fermiônicos e bosônicos são acoplados a tensores constantes que representam campos de fundo (background). Esses tensores podem ser usados para parametrizar experimentalmente limites de ocorrência da possível violação das simetrias de Lorentz e de CPT. Em paralelo ao desenvolvimento teórico da SME, existem fortes estudos experimentais que analisam a consistência e quais os possíveis valores associados a esses parâmetros que podem realmente determinar sinais de violações das simetrias de Lorentz ou CPT. Até agora, tais testes experimentais relacionam-se a estudos referentes a espectroscopia de hidrogênio e anti-hidrogênio[3, 4], observações do comportamento do pêndulo de torção de um spin polarizado[5, 6], medidas cosmológicas sobre a polarização da luz proveniente de galáxias distantes[7, 8], entre outros.

Apesar do forte desenvolvimento experimental, é na descrição teórica que o modelo da SME vem obtendo maior visibilidade. Um bom exemplo, é o volume de estudo

atribuído a uma modificação de CPT ímpar no setor do campo de calibre do Modelo Padrão. Construída por Carrol, Field e Jackiw, esta extensão corresponde a um operador semelhante ao termo de Chern-Simons quadri-dimensional: $\mathcal{L}_{CS} \sim k_\mu \varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu} F_{\alpha\beta} A_\nu$ [8]. Neste caso, a quantidade $k_\mu = (k_0, \vec{k})$ é um quadri-vetor constante, com dimensão de massa que controla a violação da simetria de Lorentz. Além disso, esse termo preserva a invariância de calibre na ação e prever que fótons adquirem diferentes polarizações e propagam-se com velocidades diferentes da velocidade da luz no vácuo. Este efeito é conhecido como birrefringência da luz no vácuo. Sua ocorrência é investigada através da radiação da luz emitida por galáxias distantes[8, 10, 9, 11, 12]. Recentemente, um aparato experimental chamado de PVLAS, investiga efeitos birrefringentes no vácuo produzidos por perturbações geradas através de campos magnéticos intensos[13]. Testes astrofísicos, têm limitado a intensidade do coeficiente de Chern-Simons ao valor de $k_0 < 2 \times 10^{-42} \text{GeV}$ para vácuo birrefringentes.

Contudo, a existência de uma escala fundamental tal como a escala de Planck, pode sugerir modificações para a relação de dispersão de partículas altamente energéticas no mesmo cenário da gravidade da quântica. Este aspecto motivou Robert C. Myers e Maxim Pospelov a propor uma generalização da SME baseada em operadores de dimensão-5 irreduzíveis a derivadas totais e as equações de movimento de ordem inferiores. Esta proposta pode conduzir as modificações cúbicas nas relações de dispersão atribuídas a partículas escalares, fermiônicas e vetoriais. Além disso, a teoria de Myers-Pospelov impõe um limite de $\eta < 10^{-15}$ para raios cósmicos ultraenergéticos. Neste caso, η é um parâmetro tipo-tempo que controla a violação da simetria de Lorentz no setor do campo de calibre desta teoria [14].

O objetivo principal desta dissertação é o de estudar alguns aspectos da eletrodinâmica quântica de Myers-Pospelov. Em particular estudamos as características superluminais desta teoria que prever partículas com dinâmica que violam a simetria de Lorentz. Além disso, investigamos a possibilidade de se obter uma teoria efetiva

bi-dimensional que modifica a teoria de campos escalares, e assim, sugerindo uma nova possibilidade de se estudar a violação da simetria de Lorentz no contexto de defeitos topológicos e não-topológicos. A geração desta teoria bi-dimensional é o principal resultado desta dissertação. Investigamos este problema usando primeiro a técnica de redução dimensional (projetando quatro dimensões para duas dimensões do espaço-tempo) e depois via correções quânticas de determinante fermiônico.

Esta dissertação está organizada na seguinte forma: no Cap.2 revisamos algumas características associadas ao modelo de Maxwell-Carrol-Field-Jackiw que estende a eletrodinâmica usual de um termo do tipo ao de Chern-Simons de CPT ímpar que controla a quebra explícita da invariância de Lorentz. Dentre tais características, discutimos alguns aspectos das equações de movimento, a invariância de calibre, os modos de propagação de ondas que podem ser associados ao efeito da birrefringência da luz no vácuo. No Cap.3 apresentamos a eletrodinâmica quântica de Myers-Pospelov que acopla operadores de dimensão-5 nos setores dos campos de calibre e fermiônico e assim, oferecendo um novo background que controla a quebra da invariância de Lorentz. Através da escolha de uma específica componente temporal do parâmetro que controla a quebra de Lorentz, discutimos as características dos neutrinos superluminais que recentemente foram evidenciadas pelo experimento OPERA. Além disso, constatamos que a presença de tais operadores na teoria, podem oferecer curvas que fitam as inclinações dos dados provenientes dos experimentos OPERA, MINOS e supernova SN1987a. No Cap.4 projetamos a QED de Myers-Pospelov de quatro dimensões para duas dimensões. Neste estudo, obtemos a emergência de uma nova teoria quântica de campos bi-dimensional parametrizada por operadores de dimensão-3. No Cap.5 tratamos do mesmo problema via indução radiativa ao nível de um-loop construído pelo método de expansão derivativa de determinantes fermiônicos. Finalmente no Cap.7 apresentamos nossas conclusões e trabalhos futuros.

Ao longo da dissertação adotaremos o sistema de unidades naturais($c = \hbar = 1$).

Destacamos aqui, que a presente dissertação produziu o seguinte trabalho:

F. A. Brito, M. S. Guimaraes, E. Passos, P. Sampaio and C. Wotzasek, Phys. Rev.

D **86**, 105036 (2012) [hep-th/1210.2369]

Capítulo 2

A Eletrodinâmica de Maxwell-Carrol-Field-Jackiw

Atualmente, a possibilidade de violar as simetrias de Lorentz e CPT vem sendo o motivo de grande parte das discussões científicas. Seguindo a proposta da Extensão do Modelo Padrão, essas discussões aparecem quando o assunto a ser tratado é modificar a Lagrangeana desta teoria via a adição de termos não-convencionais. O objetivo principal deste capítulo é o de rever vários resultados relacionados a extensão do setor do campo de calibre do Modelo Padrão por um termo tipo ao de Chern-Simons em quatro dimensões do espaço-tempo.

2.1 O Modelo de Maxwell-Carrol-Field-Jackiw

A teoria que modifica a eletrodinâmica de Maxwell sugerida por Carrol, Field e Jackiw na presença de fontes externas j^μ é descrita pela seguinte Lagrangeana:

$$\mathcal{L}_{MCS} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + k_\mu A_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu. \quad (2.1.1)$$

Aqui, o tensor de campo eletromagnético $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e seu dual $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ são definidos usualmente. O quadri-vetor constante k_μ determina uma direção privilegiada no espaço-tempo, e assim, controlando a violação das simetrias de

Lorentz e CPT. Apesar desta teoria possuir a conservação da carga: $\partial_\mu j^\mu = 0$, ela só consegue manter a simetria de calibre na ação clássica a menos de uma derivada total.

Afim de obtermos as equações de movimento, devemos considerar a lagrangeana acima e escrever a seguinte equação de Euler-Lagrange:

$$\partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{MCS}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_{MCS}}{\partial A_\mu} = 0. \quad (2.1.2)$$

Assim, obtemos primeiro

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{MCS}}{\partial A_\mu} = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\mu \partial_\rho A_\sigma - j^\mu, \quad (2.1.3)$$

e depois

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{MCS}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} &= -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} F^{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right) - \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\mu \frac{\partial(\partial_\rho A_\sigma)}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \\ &= -\frac{1}{2} (\delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu - \delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\mu) F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\mu A_\nu \delta_\rho^\nu \delta_\sigma^\mu \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Logo ao substituir as Eq.(2.1.3) e Eq.(2.1.4) na expressão (2.1.2), obtemos as seguintes equações de Maxwell modificadas:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + 2k_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = j^\nu \quad (2.1.5)$$

as quais são invariantes de calibre como o esperado. A partir da expressão (2.1.5), podemos obter as Leis de Coulomb e Ampère modificadas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - 2\vec{k} \cdot \vec{B} = \rho, \quad (2.1.6)$$

$$-\vec{E} + \vec{\nabla} \times \vec{B} - 2k_0 \vec{B} + 2\vec{k} \times \vec{E} = \vec{j}. \quad (2.1.7)$$

Enquanto que o grupo das equações de Maxwell homogêneas permanecem inalteradas. Note que a introdução da contribuição que viola a simetria de Lorentz na teoria, permite que os campos elétricos funcionem como fontes para cargas elétricas e os campos magnéticos como fontes de correntes magnéticas, caso exista.

2.2 O Efeito da Birrefringência da Luz no Vácuo

Nesta seção, estudamos os modos de propagação das ondas eletromagnéticas afim de verificar como a Lagrangeana (2.1.1) prever o fenômeno da birrefringência da luz no vácuo. Então, reescrevemos inicialmente a Eq.(2.1.5) em termos dos potenciais $A_\mu = (A_0, \vec{A})$ e na ausência de correntes $j^\mu = 0$:

$$(\square\eta^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu - 2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}k_\rho\partial_\sigma)A_\nu = 0. \quad (2.2.8)$$

Agora aplicamos a seguinte solução de ondas planas:

$$A_\mu(x) = \epsilon_\mu \exp(-ip \cdot x), \quad \text{com } p_\mu \equiv (\omega, p_i) \quad (2.2.9)$$

na Eq.(2.1.5) para $j^\mu = 0$. Assim, encontramos uma nova equação que pode ser escrita como:

$$(p^2\eta^{\mu\nu} + 2i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}k_\rho p_\sigma)\epsilon_\nu = 0. \quad (2.2.10)$$

No gauge de Feynman: $\partial \cdot A = 0$. Agora multiplicamos convenientemente a equação acima por seu complexo conjugado:

$$(p^2\eta_{\mu\nu} - 2i\varepsilon_{\mu\nu\beta\lambda}k^\beta p^\lambda)(p^2\eta^{\mu\nu} + 2i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}k_\rho p_\sigma) = 0. \quad (2.2.11)$$

Após manipularmos esta expressão, obtemos a seguinte relação de dispersão:

$$(p^4 - 4((p \cdot k)^2 - p^2k^2)) = 0. \quad (2.2.12)$$

Esta equação determina a frequência de onda ω em função de um determinado tri-vetor \vec{p} . Aqui podemos estudar esta relação de dispersão apenas para o quadri-vetor k_μ tipo-tempo, isto é, $k_\mu = (k_0, \vec{0})$. Esta aproximação não afeta a estrutura causal da teoria. Então obtemos as seguintes soluções:

$$\omega_\pm = \pm\sqrt{|\vec{p}|(|\vec{p}| \pm 2k_0)} = \pm|\vec{p}|\sqrt{1 \pm \frac{2k_0}{|\vec{p}|}}. \quad (2.2.13)$$

Ou para grandes momentos: $|\vec{p}| \gg 2k_0$, temos ainda a seguinte solução para o sinal (+):

$$\omega_+ \approx |\vec{p}| \pm k_0. \quad (2.2.14)$$

Este resultado indica que a onda pode viajar com diferentes velocidades violando os boosts de Lorentz e a simetria de paridade, ou seja, o sistema pode adquirir direções privilegiadas. Note que para a condição de grandes momentos que adotamos para aproximar as soluções, faz com que tanto a velocidade de grupo quanto a velocidade de fase não exceda a intensidade da velocidade da luz.

Capítulo 3

A Eletrodinâmica Quântica de Myers-Pospelov

Neste capítulo, descrevemos algumas propriedades da eletrodinâmica sugerida por Myers e Pospelov [14] e descrita de forma explícita em [15]. Esta teoria é descrita em termos de operadores de dimensões superiores e representa um novo ponto de vista de se estudar a violação da simetria de Lorentz em teoria quântica de campos. A densidade de lagrangeana associada, pode ser escrita em função de operadores de dimensão-5. Neste caso, escrevemos a seguinte teoria efetiva:

$$\mathcal{L}_{qed} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - g\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}n_\mu\hat{D}F_{\nu\lambda}A_\rho + \bar{\psi}(i\hat{\not{D}} - m)\psi + \tilde{g}\bar{\psi}\not{n}\gamma_5\hat{D}\psi - e\bar{\psi}\not{A}\psi \quad (3.0.1)$$

onde n_μ é um coeficiente constante e adimensional que controla a quebra de simetria de Lorentz. As quantidades $g = \xi/M$ e $\tilde{g} = \eta/M$ com ξ e η sendo parâmetros adimensionais e M é a massa associada a ocorrência de uma nova física tal como o aparecimento da violação das simetrias de Lorentz e CPT. O operador \hat{D} é dado pela combinação de derivadas parciais com os parâmetros tal como n_μ . Para que tenhamos operadores de dimensão-5 na Lagrangeana (3.0.1), esta estrutura pode ser escrita na forma estendida:

$$\hat{D} = (\partial \cdot n)^2 - \partial^2 n^2. \quad (3.0.2)$$

Ambas as extensões do setor do campo de calibre e do fermiônico são ímpares por conjugação de cargas. O objetivo principal do presente capítulo é o de estudar o comportamento superluminal dos modos de propagação de onda para os setores do campo de calibre e fermiônico de forma independente.

3.1 O Setor do Campo de Calibre

Consideramos inicialmente a Lagrangeana de Maxwell-Myers-Pospelov na presença de uma corrente externa:

$$\mathcal{L}_{MMP} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - g\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}n_\mu\hat{D}F_{\nu\lambda}A_\rho - j_\mu A^\mu. \quad (3.1.3)$$

Através das equações de Euler-Lagrange, as equações de movimento associadas a Lagrangeana (3.1.3) podem ser escritas na forma:

$$(\partial^2\eta^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu + 2\varepsilon^{\alpha\mu\lambda\rho}\hat{D}n_\lambda\partial_\rho)A_\nu = j^\mu. \quad (3.1.4)$$

A equação acima é invariante de calibre como esperado. Note também que as leis de Gauss e de Ampère contidas na expressão (3.1.4) são modificadas e as equações homogêneas permanecem inalteradas.

No sentido de analisar os modos de propagação das ondas eletromagnéticas, usamos inicialmente a seguinte solução de ondas planas:

$$A_\mu(x) = \epsilon_\mu \exp(-ik \cdot x), \quad \text{com} \quad k_\mu \equiv (\omega, k_i) \quad (3.1.5)$$

e aplicamos na Eq.(3.1.4) na ausência de fontes externas. Assim obtemos

$$(k^2\eta^{\mu\nu} - 2i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}K_n n_\lambda k_\rho)\epsilon_\nu = 0 \quad (3.1.6)$$

A estrutura da Eq.(3.1.6) foi obtida com auxílio do calibre de Lorentz: $(\partial_\mu A^\mu = 0)$.

Através dessa mesma estrutura podemos escrever a seguinte expressão:

$$(k^2\eta_{\mu\nu} + 2i\varepsilon_{\mu\nu\beta\sigma}K_n n^\beta k^\sigma)(k^2\eta^{\mu\nu} - 2i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}K_n n_\lambda k_\rho) = 0. \quad (3.1.7)$$

Após o desenvolvimento algébrico da expressão acima, devemos encontrar como resultado a seguinte relação de dispersão:

$$k^4 - 4K_n^3 = 0. \quad (3.1.8)$$

onde a quantidade K_n é dado por

$$K_n = (k \cdot n)^2 - k^2 n^2. \quad (3.1.9)$$

A relação de dispersão (3.1.8) é capaz de determinar a frequência angular ω do sistema dependente do vetor de onda \vec{k} . Neste ponto pretendemos analisar as soluções da relação de dispersão acima considerando apenas que a componente temporal do parâmetro que controla a quebra de simetria de Lorentz seja diferente de zero. Isto implica que podemos usar $n_\mu = (n_0, \vec{0})$ para obtermos,

$$(\omega^2 - |\vec{k}|^2)^2 - 4g^2 n_0^6 |\vec{k}|^6 = 0. \quad (3.1.10)$$

Ou ainda,

$$\omega^2 = |\vec{k}|^2 \pm 2gn_0^3 |\vec{k}|^3. \quad (3.1.11)$$

Resolvendo esta equação encontramos as seguintes soluções:

$$\omega_\pm(\vec{k}) = \pm |\vec{k}| \sqrt{1 \pm 2gn_0^3 |\vec{k}|} \quad (3.1.12)$$

A velocidade de grupo neste caso, representa a velocidade para os fótons [16]:

$$v_\gamma = \frac{\partial \omega_\pm}{\partial |\vec{k}|} = \frac{(1 \pm 3gn_0^3 |\vec{k}|)}{\sqrt{1 \pm 2gn_0^3 |\vec{k}|}}. \quad (3.1.13)$$

Para momentos muito grandes e considerando que $|2gn_0^3 \vec{k}| \ll 1$, encontramos o seguinte resultado superluminal para o modo de propagação dos fótons:

$$v_\gamma - 1 \approx 2\alpha |\vec{k}|. \quad (3.1.14)$$

onde definimos que $\alpha = gn_0^3$.

3.2 O Setor do Campo Fermiônico

Neste caso a Lagrangeana de Dirac-Myers-Pospelov é dada na forma:

$$\mathcal{L}_{DMP} = \bar{\psi}(i\hat{\not{D}} - m)\psi + \tilde{g}\bar{\psi}\not{n}\gamma_5\hat{D}\psi. \quad (3.2.15)$$

Assim, obtemos as equações de movimento para os férmions determinadas a partir de Eüler-Lagrange:

$$(i\hat{\not{D}} - m + \tilde{g}\hat{D}\not{n}\gamma_5)\psi(x) = 0. \quad (3.2.16)$$

No sentido de analisar os modos de propagação para os férmions, usamos inicialmente a seguinte solução de ondas planas:

$$\psi(x) = u(p) \exp(-ip \cdot x), \quad \text{com} \quad p_\mu \equiv (\omega, p_i) \quad (3.2.17)$$

e aplicamos na Eq.(3.2.16) para escrever a seguinte equação no espaço dos momentos:

$$(\not{p} - m - \tilde{g}P_n\not{n}\gamma_5)u(p) = 0. \quad (3.2.18)$$

onde a quantidade P_n é dada como

$$P_n = (n \cdot k)^2 - n^2 k^2. \quad (3.2.19)$$

Após a manipulação algébrica do seguinte produto de operadores:

$$\begin{aligned} & ((\not{p} + m - \tilde{g}P_n\not{n}\gamma_5)(\not{p} - m - \tilde{g}P_n\not{n}\gamma_5)) \\ & \times ((\not{p} + m - \tilde{g}P_n\not{n}\gamma_5)(\not{p} - m - \tilde{g}P_n\not{n}\gamma_5)) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

encontramos que o espectro contínuo livre é governado pela lei de dispersão

$$(p^2 - m^2 - \tilde{g}^2 n^2 P_n^2)^2 - 4\tilde{g}^2 P_n^3 = 0. \quad (3.2.21)$$

Esta equação foi obtida com auxílio da álgebra das matrizes de Dirac.

Agora consideramos uma direção tipo-tempo para parâmetro que controla a quebra de simetria de Lorentz: $n_\mu = (n_0, \vec{0})$ e assim obtemos

$$(\omega^2 - |\vec{k}|^2 - m^2 - \tilde{g}^2 n_0^6 |\vec{k}|^4)^2 - 4\tilde{g}^2 n_0^6 |\mathbf{k}|^6 = 0 \quad (3.2.22)$$

onde as soluções são dadas por

$$\omega_{\pm} = \pm \sqrt{|\vec{k}|^2 (1 \pm gn_0^3 |\vec{k}|)^2 + m^2}. \quad (3.2.23)$$

Assumindo que a velocidade dos neutrinos seja representada pela velocidade de grupo e determinada através das soluções (3.2.23), a equação passa a ser escrita como

$$v_{\nu} = \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial |\vec{k}|} = \frac{|\vec{k}| (1 \pm \tilde{g}n_0^3 |\vec{k}|) (1 \pm 2\tilde{g}n_0^3 |\vec{k}|)}{\sqrt{|\vec{k}|^2 (1 \pm \tilde{g}n_0^3 |\vec{k}|)^2 + m_{\nu}^2}}. \quad (3.2.24)$$

Agora expandimos a Eq.(3.2.23) para grandes momentos, isto é, $|\vec{k}|^2 \gg m_{\nu}^2$, porém mantendo a quantidade $\tilde{g}n_0^3 |\vec{k}| \ll 1$, encontramos

$$v_{\nu} \approx 1 \pm 2\tilde{g}n_0^3 |\vec{k}| - \frac{m_{\nu}^2}{2|\vec{k}|^2} (1 - 4\tilde{g}^2 n_0^6 |\vec{k}|^2). \quad (3.2.25)$$

Se mantivermos somente termos lineares em \tilde{g} devemos encontrar o seguinte resultado para o setor de sinal positivo:

$$v_{\nu} - 1 \approx \pm 2\tilde{g}n_0^3 |\vec{k}| - \frac{m_{\nu}^2}{2|\vec{k}|^2}. \quad (3.2.26)$$

Note que para férmions sem massa ou até mesmo com massa muito pequena como é o caso dos neutrinos, temos a possibilidade de velocidades superluminais.

3.3 Estimativas e Discussões sobre Velocidades Superluminais

Nesta seção, pretendemos estimar alguns limites de ocorrência para o parâmetro que controla a quebra de simetria de Lorentz e também analisar o comportamento superluminal das velocidades dos neutrinos e dos fótons.

Para o caso dos férmions é possível estimar um valor para a constante de acoplamento \tilde{g} que controla a quebra de Lorentz se adotarmos que o regime de energia $E_{\nu} \sim |\vec{k}|$ e a massa m_{ν} dos neutrinos superluminais satisfaçam o seguinte limite:

$$4\tilde{g}n_0^3 |\vec{k}|^3 > m_{\nu}^2. \quad (3.3.27)$$

Como poderemos observar depois, esta relação satisfaz exatamente as previsões obtidas pelo experimento OPERA's [17] onde $\tilde{\alpha} \equiv \tilde{g}n_0^3 \sim (1.7 \times 10^6 \text{GeV})^{-1}$.

3.3.1 Velocidade dos Neutrinos

Agora, obteremos a velocidade dos neutrinos em termos da velocidade da luz (no vácuo) como função do momento e da curva de inclinação $\tilde{\alpha}$:

$$\frac{v_\nu - c}{c} \cong 2\tilde{\alpha}|\vec{k}|, \quad (3.3.28)$$

onde escolhemos $c = 1$. Portanto, para o experimento OPERA's¹ temos que $v_\nu - 1 \sim 10^{-5}$ com energia $E_\nu \sim |\vec{k}| \sim 17 \text{ GeV}$ é encontrado a seguinte inclinação:

$$\tilde{\alpha} \sim \frac{1}{1.7 \times 10^6 \text{ GeV}} \sim 10^{-22} \text{ m}, \quad (3.3.29)$$

o que define o parâmetro que controla a quebra de simetria de Lorentz $\tilde{\alpha}$ podendo testar efeitos de superluminaridade até a energia 1000TeV, que representa a escala de energia primária originada nas explosões de estrelas massivas [18]. Agora podemos substituir a Eq.(3.3.29) na Eq.(3.3.28) para obtermos a curva

$$\frac{v_\nu - c}{c} \sim 10^{-5} \left(\frac{|\vec{k}|}{17\text{GeV}} \right). \quad (3.3.30)$$

Este resultado está também de acordo com o experimento MINOS [19] com a energia $E_\nu \sim |\vec{k}| \sim 3\text{GeV}$. Para comparar com o experimento OPERA e com as medidas de neutrinos proveniente de estrela supernova SN1987a [20, 21, 22] usamos $E_\nu \sim |\vec{k}| \sim 10\text{MeV}$ para obter o seguinte resultado:

$$\frac{v_\nu - c}{c} \sim 10^{-5} \left(\frac{10^{-3}}{1.7} \right), \quad (3.3.31)$$

que está consistente com o limite imposto para os neutrinos via dados da SN1987a: $|v_\nu - c|/c < 2 \times 10^{-9}$ [20, 21, 22]. Portanto, concluímos que os limites obtidos através da

¹Este experimento embora não tenha reproduzido os resultados iniciais, nosso modelo prevê este efeito sob a ação de um background que viola as simetrias de Lorentz. Neste sentido não existe qualquer conflito com a relatividade.

velocidade da luz em neutrinos superluminais obedecem um perfil de uma curva linear como função da energia e a inclinação do experimento OPERA $\tilde{\alpha} \sim 0.5 \times 10^{-6} \text{GeV}^{-1}$. Essa característica pode ser observada em investigações recentes[23, 24, 25].

3.3.2 Velocidades dos Fótons

Por outro lado, pode-se usar a velocidade de grupo dos fótons dada pela Eq.(3.1.14) para descrever a velocidade dos neutrinos através da velocidade da luz (na presença da quebra da simetria de Lorentz) até a primeira ordem no vetor de onda:

$$\frac{v_\nu - v_\gamma}{v_\gamma} = 2(\tilde{\alpha} - \alpha)|\vec{k}|. \quad (3.3.32)$$

Relembrando que $\tilde{\alpha} = \tilde{g}n_0^3$ e $\alpha = gn_0^3$ com $\tilde{g} = \eta/M$ e $g = \xi/M$ onde assume-se a partir de agora que $n_0 = 1$. A esperada superluminaridade dos neutrinos (com massa $m_\nu \sim 0.2\text{eV}$ e energia $E_\nu \sim |\vec{k}| \sim 17\text{GeV}$) é negligenciada, e assim

$$\frac{v_\nu - v_\gamma}{v_\gamma} = 10^{-21}. \quad (3.3.33)$$

Esta equação é consistente com as observações. Note que mesmo que os fótons e as partículas sejam superluminais ($v_\gamma, v_\nu > c$) a diferença não é superluminal.

Agora podemos usar este resultado acima na Eq.(3.3.32) e determinar um limite de ocorrência para os acoplamentos η e ξ , que medem a intensidade que as componentes temporais dos parâmetros de violação da simetria de Lorentz atuam no comportamento dos neutrinos e dos fótons. Portanto, na escala de Planck $M \sim 10^{19}\text{GeV}$ obtemos

$$\eta - \xi \approx \frac{10^{-21}M}{2 \times 17\text{GeV}} \sim 2.5 \times 10^{-4}. \quad (3.3.34)$$

O limite para a quantidade η pode ser encontrado através do valor $\xi \sim 10^{-6}$ para os fótons como segue:

$$\frac{\eta}{\xi} \approx 1 + \frac{2.5 \times 10^{-4}}{\xi} \sim 10^2, \quad (3.3.35)$$

que corresponde a $\eta \sim 10^{-4}$ para os neutrinos. Isto significa que na escala de Planck os neutrinos interagem com o meio que possuem a quebra de simetria de Lorentz 100 vezes a mais do que os fótons podem interagir.

Capítulo 4

Projeção 4D-2D da Eletrodinâmica Quântica de Myers-Pospelov

Em duas dimensões, temos que a violação da simetria de Lorentz pode ser atribuída ao setor do campo escalar estendido de um termo efetivo que também pode caracterizar uma direção privilegiada para duas dimensões do espaço-tempo. Modelos desta natureza foram sugeridos e estudados no contexto de estrutura de defeitos [26, 27, 28], deformação da estrutura canônica e dualidade UV/IR [29], indução radiativa via determinante fermiônico [30].

Neste capítulo, estamos interessados em estudar a redução dimensional da eletrodinâmica de Myers-Pospelov descrita pela Lagrangeana (3.0.1) sugerida em [31]. Nosso principal objetivo é o de obter teorias de derivadas superiores capazes de oferecer uma nova física em baixas dimensões. O procedimento que devemos usar é a técnica de projeção de uma teoria de quatro dimensões para uma teoria de duas. Consideramos os setores eletromagnético e fermiônico da presente teoria, e os projetamos independentemente no plano bi-dimensional que será escolhido de forma conveniente. Tal processo de redução dimensional já foi mostrado [32, 33, 34, 35] para se obter uma teoria de três dimensões capaz de violar a simetria de Lorentz.

4.1 O Setor do Campo de Calibre

Neste ponto, desejamos projetar o setor do campo de calibre da QED estendida (3.0.1) no plano $x_0 - x_3$. Naturalmente, devemos considerar a coordenada temporal, porém a inclusão da terceira coordenada x_3 é escolhida de forma conveniente.

Primeiramente, o termo de Maxwell assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}(F_{ij}F^{ij} + 2F_{0a}F^{0a} + 2F_{3a}F^{3a} + F_{ab}F^{ab}) \\ &= -\frac{1}{4}(F_{ij}F^{ij} + 2\partial_0 A_a \partial^0 A^a + 2\partial_3 A_a \partial^3 A^a), \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

onde $i, j = 0, 3$; $a, b = 1, 2$, e o método de projeção implica em dizer que $\partial_1 = \partial_2 = 0$ quando atuar em qualquer campo (consequentemente, $F_{ab} = 0$). Aqui, optamos em usar a métrica escrita em (A.1), de modo que $A^a = -A_a$. E definimos também que $A_1 = \phi$ e $A_2 = \chi$ que nos leva a obter a relação:

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{1}{2}\partial_i \phi \partial^i \phi + \frac{1}{2}\partial_i \chi \partial^i \chi. \quad (4.1.2)$$

Este novo modelo sem a presença do termo de massa, representa a teoria de Maxwell mais uma teoria de dois campos escalares em 2D.

Considerando $\partial^2 n^2 = 0$ no operador (3.0.2), vamos discutir a contribuição de Myers-Pospelov. Mantendo as mesmas condições descritas acima, obtemos

$$\begin{aligned} g\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} n_\mu (n \cdot \partial)^2 \partial_\nu A_\rho A_\sigma &= g(n_i \partial^i + n_a \partial^a)^2 (\epsilon^{ij\rho\sigma} n_i \partial_j A_\rho A_\sigma + \epsilon^{ai\rho\sigma} n_a \partial_i A_\rho A_\sigma) \\ &= g(n_i \partial^i + n_a \partial^a)^2 (\epsilon^{ij} n_i \chi \partial_j \phi + \epsilon^{ai\rho\sigma} n_a \partial_i A_\rho A_\sigma), \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

onde $\epsilon^{ij} \equiv \epsilon^{ij12}$. Perceba que o segundo termo da Eq.(4.1.3) mistura o campo de calibre e os campos escalares em 2D, porém por simplicidade não devemos considerar este termo. Para este fim, consideramos a partir de agora que $n_a = 0$. Assim o primeiro termo da Eq.(4.1.3) é de nosso maior interesse. Portanto, a projeção dimensional do setor do campo de calibre da QED_{4D} para uma teoria bi-dimensional é finalmente dada por:

$$\mathcal{L}_{2D} = -\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{1}{2}\partial_i \phi \partial^i \phi + \frac{1}{2}\partial_i \chi \partial^i \chi - g\epsilon^{ij} n_i (n_i \partial^i)^2 \chi \partial_j \phi. \quad (4.1.4)$$

Esta teoria é constituída por campos bi-dimensionais que vivem num espaço-tempo de duas dimensões. Chamaremos o novo termo que surgiu durante o processo de redução dimensional de modelo de Myers-Pospelov bi-dimensional.

4.2 O Setor do Campo Fermiônico

Agora, vamos investigar o processo de projeção dimensional para o setor fermiônico da QED estendida (3.0.1) cujo a Lagrangeana é dada como:

$$\mathcal{L}_{fermi_{4D}} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} + \tilde{g}(n \cdot \partial)^2 \not{n} \gamma_5 - M)\psi - e\bar{\psi}A\psi. \quad (4.2.5)$$

Nesta teoria também tomamos $n^2 \partial^2 = 0$ tal como foi feito no setor do campo de calibre. Consideramos agora a seguinte representação das matrizes de Dirac em 4D:

$$\gamma_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \Gamma^\mu = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ -\bar{\sigma}^\mu & 0 \end{bmatrix}; \quad (4.2.6)$$

onde,

$$\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma}); \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma}). \quad (4.2.7)$$

Também podemos definir

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix}, \quad (4.2.8)$$

com $\bar{\psi} = \psi^\dagger \Gamma^0$. Então podemos reescrever a Eq.(4.2.5) na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{f_{4D}} &= \begin{bmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu - e\bar{\sigma}^\mu A_\mu + \tilde{g}(n \cdot \partial)^2 \bar{\sigma}^\mu n_\mu & -M \\ -M & i\sigma^\mu \partial_\mu - e\sigma^\mu A_\mu - \tilde{g}(n \cdot \partial)^2 \sigma^\mu n_\mu \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Como é bem conhecido, temos que os setores ψ_L e ψ_R podem desacoplar somente para $M = 0$. Neste sentido, consideramos aqui $M = 0$ e escrevemos apenas uma Lagrangeana para o setor ψ_R que pode ser escrita na forma:

$$\mathcal{L}_{f_{4D}}^R = \psi_R^\dagger (i\sigma^\mu \partial_\mu - e\sigma^\mu A_\mu + \tilde{g}(n \cdot \partial)^2 \sigma^\mu n_\mu) \psi_R. \quad (4.2.10)$$

Neste ponto, implementamos o procedimento de projeção dimensional para o plano $x_0 - x_3$ na Lagrangeana acima. As matrizes de Dirac em duas dimensões podem ser definidas como,

$$\gamma_5 = \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \gamma^0 = \sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \gamma^1 = -i\sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.2.11)$$

Note que γ^1 é a única matriz associada com a direção espacial em duas dimensões. Como no nosso estudo escolhemos a direção x_3 , então renomeamos a matriz γ^1 para γ^3 . Isto é apenas uma mudança de nomenclatura, que é necessária para que as somas tomem o sentido na escolha $i = 0, 3$. A razão para a escolha dessa representação das matrizes de Dirac pode ser observada, quando impomos as condições $\partial_1 = \partial_2 = 0$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \sigma^\mu \partial_\mu &= \sigma^0 \partial_0 + \sigma^3 \partial_3 = \gamma^0 \gamma^0 \partial_0, \\ u \cdot \partial &= u^0 \partial_0 + u^3 \partial_3 \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

que possui a estrutura necessária para se construir o termo cinético de Dirac em duas dimensões.

Seguindo o mesmo procedimento aplicado ao setor do campo de calibre, temos que $A_1 = \phi$ e $A_2 = \chi$. Então podemos concluir que a Lagrangeana (4.2.10) quando projetada é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{f_2D}^R &= \bar{\psi}_R (i\gamma^i \partial_i - e\gamma^i A_i - e\phi - ie\gamma_5 \chi \\ &+ \tilde{g}(n_i \partial^i + n_a \partial^a)^2 \gamma^i n_i + n_1 + i\gamma_5 n_2) \psi_R. \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Impomos aqui, as mesmas condições impostas para o setor do campo de calibre para a quantidade n_μ , ou seja, $n_1 = n_2 = 0$, e obtemos a seguinte teoria fermiônica na ausência de um termo de massa:

$$\mathcal{L}_{fermi2D}^R = \bar{\psi}_R (i\gamma^i \partial_i - e\gamma^i A_i - e\phi - ie\gamma_5 \chi + \tilde{g}(n_i \partial^i)^2 \gamma^i n_i) \psi_R. \quad (4.2.14)$$

Contudo, no sentido de estudar problemas inerentes à correções radiativas que veremos depois, podemos considerar a versão massiva da teoria acima que pode ser dada na

forma:

$$\mathcal{L}_{2D} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m + \tilde{g}(n_i\partial^i)^2\eta)\psi - \tilde{e}\bar{\psi}(\phi + i\gamma_5\chi)\psi. \quad (4.2.15)$$

Em duas dimensões, a constante de acoplamento \tilde{e} tem dimensão de massa e a definimos como $\tilde{e}^2 = e^2/(4\pi R^2)$, sendo R o raio da dimensão de compactificação que se relaciona com a massa na forma $m \sim 1/R$, com e sendo a constante de acoplamento da QED em 4D.

Capítulo 5

Ação Efetiva Induzida que Modifica o Setor do Campo Escalar em 2D

Neste capítulo investigamos a possibilidade de induzir via correções quânticas a ação efetiva bi-dimensional descrita pelo terceiro termo da Lagrangeana (6.0.1). Esta tarefa pode ser possível, desde que o setor fermiônico dado pelo modelo (4.2.15) tenha a propriedade de induzir esta ação efetiva radiativamente. Para este fim, iremos usar o método de expansão derivativa de determinantes fermiônicos associado as fórmulas de regularização dimensional em duas dimensões.

5.1 A Construção da Ação Efetiva

Para estudarmos explicitamente a questão da indução radiativa da ação efetiva bi-dimensional observada na Eq.(4.1.4), primeiro devemos considerar o setor fermiônico associado a Lagrangeana (4.2.15) e escrevê-lo em termos de uma ação clássica:

$$\mathcal{S}_f = \int d^4x \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m\tilde{g}(\partial \cdot n)^2 \not{n} - \tilde{e}(\phi + i\gamma_5 \chi)) \psi. \quad (5.1.1)$$

Após a integração nos campos fermiônicos, escrevemos

$$e^{iS[n, \phi, \chi]} = \int D\bar{\psi} D\psi \exp^{i \int d^4x (\cancel{p} - m - \tilde{g}(p \cdot n)^2 \not{n} - \tilde{e}(\phi + i\gamma_5 \chi))} \quad (5.1.2)$$

onde a ação efetiva é dada por

$$S[n, \phi, \chi] = -i \text{Tr} \ln [\cancel{p} - m - \tilde{g}(p \cdot n)^2 \not{n} - \tilde{e}(\phi + i\gamma_5 \chi)]. \quad (5.1.3)$$

Ou ainda,

$$S[n, \phi, \chi] = -i\text{Tr} \ln [(\not{p} - m - \tilde{g}(p \cdot n)^2 \not{n}) \times (1 - \frac{\tilde{e}}{(\not{p} - m - \tilde{g}(p \cdot n)^2 \not{n})}(\phi + i\gamma_5 \chi))]. \quad (5.1.4)$$

Ao aplicarmos na expressão acima a seguinte propriedade da função logaritmo $\ln(A \times B) = \ln A + \ln B$, devemos ter uma contribuição independente dos campos ϕ e χ a qual pode ser descartada para presente investigação, e uma outra contribuição que depende de tais campos, e deve ser considerada de agora em diante. Portanto, a Eq.(5.1.4) toma a forma:

$$S[n, \phi, \chi] = -i\text{Tr} \ln [1 + i\tilde{e}G_n(p)(\phi + i\gamma_5 \chi)]. \quad (5.1.5)$$

onde $G_n(p)$ é o propagador exato dos férmions dado na forma

$$G_n(p) = \frac{i}{\not{p} - m - \tilde{g}(p \cdot n)^2 \not{n}}. \quad (5.1.6)$$

Podemos aplicar agora na equação (5.1.5) a seguinte fórmula:

$$\ln(1 + x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{1+l} x^{1+l}, \quad \text{para } x = i\tilde{e}G_n(p)(\phi + i\gamma_5 \chi) \quad (5.1.7)$$

e assim, obtermos

$$S[n, \phi, \chi] = -i\text{Tr} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{1+l} [i\tilde{e}G_n(p)(\phi + i\gamma_5 \chi)]^{1+l}. \quad (5.1.8)$$

Esta expressão representa uma generalização da ação efetiva para a ordem de $l+1$ nos campos escalares e no propagador, com $l = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Para investigar a possível indução de tal ação efetiva como uma função de dois pontos, basta considerarmos $l = 1$ na Eq.(5.1.8). Neste sentido, encontramos

$$S[n, \phi, \chi] = -\frac{i\tilde{e}^2}{2} \text{Tr} [G_n(p)(\phi + i\gamma_5 \chi)G_n(p)(\phi + i\gamma_5 \chi)]. \quad (5.1.9)$$

Ou ainda,

$$S[n, \phi, \chi] = \frac{\tilde{e}^2}{2} \text{Tr} [G_n(p)\phi(x)G_n(p)\gamma_5 \chi(x) + G_n(p)\gamma_5 \chi(x)G_n(p)\phi(x)]. \quad (5.1.10)$$

Neste ponto, usamos a seguinte expansão de operadores

$$\frac{1}{\hat{A} + \hat{B}} = \frac{1}{\hat{A}} + \frac{1}{\hat{A}} \hat{B} \frac{1}{\hat{A}} + \frac{1}{\hat{A}} \hat{B} \frac{1}{\hat{A}} \hat{B} \frac{1}{\hat{A}} \dots \quad (5.1.11)$$

para expandir o propagador (5.1.6) até a primeira ordem na g' - constante de acoplamento. E assim, devemos considerar a conveniente redefinição: $\hat{A} = (\not{p} - m)$ e $\hat{B} = g'((p \cdot n)^2 - p^2 n^2) \not{n}$ de forma que tal propagador pode ser aproximado na forma:

$$G_n(p) \approx S_F(p) + S_F(p) (-i\tilde{g}(p \cdot n)^2 \not{n}) S_F(p) \quad \text{com} \quad S_F(p) = \frac{i}{(\not{p} - m)}. \quad (5.1.12)$$

Então, podemos aplicar a Eq.(5.1.12) na estrutura (5.1.9) e reescrever esta ação efetiva na forma:

$$\begin{aligned} S[n, \phi, \chi] &= -i\tilde{g}\tilde{e}^2 \text{Tr}[(p \cdot n)^2 (S_F(p) \not{n} S_F(p) \gamma_5 \chi(x) S_F(p) \phi(x) \\ &\quad + S_F(p) \not{n} \phi(x) S_F(p) \gamma_5 \chi(x))]. \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

A forma da Eq.(5.1.13) foi obtida com auxílio da propriedade cíclica do traço de operadores. O traço Tr que aparece nas expressões anteriores, atua sobre as matrizes gama e nos espaços internos dos campos e dos propagadores. Neste sentido, a expressão para a ação efetiva em geral não pode ser escrita de tal forma que podemos separar tais campos que são estruturas dependentes das coordenadas e dos referidos propagadores que são explicitamente escritos no espaço dos momentos. Na realidade, isto acontece pelo fato de que coordenadas e momentos não comutam ao nível quântico. Para contornar esse problema, podemos usar a principal relação do método de expansão derivativa [36], e observar também [37, 38, 39]:

$$\phi(x) f(p) = (f(p - i\partial) \phi(x)) \quad (5.1.14)$$

o qual nos permite converter qualquer função dependente da variável momento numa quantidade que pode ser dependente da coordenada. Observe que na Eq.(5.1.14) a derivada atua diretamente na função $\phi(x)$. Neste caso, a contribuição de dois pontos

(5.1.13) torna-se agora:

$$\begin{aligned}
S[n, \phi, \chi] &= -i\tilde{g}\tilde{e}^2 \text{Tr}[(p \cdot n)^2 \times (S_F(p)\not{n}S_F(p)\gamma_5(S_F(p-i\partial)\chi(x))\phi(x) \\
&\quad + S_F(p)\not{n}S_F(p)(S_F(p-i\partial)\phi(x))\gamma_5\chi(x))] \quad (5.1.15)
\end{aligned}$$

onde,

$$S_F(p-i\partial) = \frac{i}{\not{p} - i\not{\partial} - m}. \quad (5.1.16)$$

Usando a expressão (5.1.11), podemos expandir o propagador (5.1.16) na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
S_F(p-i\partial)\chi(x) &= S_F(p)\chi(x) + S_F(p)\not{\partial}S_F(p)\chi(x) + S_F(p)\not{\partial}S_F(p)\not{\partial}S_F(p)\chi(x) + \\
&\quad S_F(p)\not{\partial}S_F(p)\not{\partial}S_F(p)\not{\partial}S_F(p)\chi(x) + \dots \quad (5.1.17)
\end{aligned}$$

e aplicar este resultado diretamente na Eq.(5.1.15), até a terceira ordem derivativa.

Assim, encontramos

$$\begin{aligned}
S_{eff}[n, \phi, \chi] &= -i\tilde{g}\tilde{e}^2 \int d^2x \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} (p \cdot n)^2 \times \\
&\quad \left[(\text{tr}[S_F(p)\not{n}S_F(p)\gamma_5 S_F(p)\not{\partial}S_F(p)\not{\partial}S_F(p)\not{\partial}S_F(p)]\chi(x))\phi(x) + \right. \\
&\quad \left. (\text{tr}[S_F(p)\not{n}S_F(p)S_F(p)\not{\partial}S_F(p)\not{\partial}S_F(p)\not{\partial}S_F(p)\gamma_5]\phi(x))\chi(x) \right] \quad (5.1.18)
\end{aligned}$$

onde tr representa o traço do produto das matrizes gama.

5.2 Ação Efetiva Induzida

Esta seção é destinada para mostrar o cálculo explícito da indução da ação bi-dimensional. Tomando como ponto de partida a Eq.(5.1.18), vamos reescrevê-la como,

$$\begin{aligned}
S_{eff}[n, \phi, \chi] &= -i\tilde{g}\tilde{e}^2 \int d^2x \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{(p \cdot n)^2}{(p^2 - m^2)^5} \times \\
&\quad \left[(\text{tr}[\not{\partial}(\not{p} + m)\not{\partial}(\not{p} + m)\not{\partial}(\not{p} + m)(\not{p} + m)\not{n}\gamma_5]\chi(x))\phi(x) + \right. \\
&\quad \left. (\text{tr}[\not{n}(\not{p} + m)(\not{p} + m)\not{\partial}(\not{p} + m)\not{\partial}(\not{p} + m)\not{\partial}\gamma_5]\phi(x))\chi(x) \right] \quad (5.2.19)
\end{aligned}$$

e podemos simplificar e calcular o traço associado a esta estrutura, usando as seguintes identidades:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\mu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5) = 2\varepsilon^{\mu\nu}. \quad (5.2.20)$$

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} S_{eff}[n, \phi, \chi] &= -2i\tilde{g}\tilde{e}^2 \int d^2x n_\alpha (\partial_\beta \partial_\mu \partial_\nu \chi(x)) \phi(x) \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{(p \cdot n)^2}{(p^2 - m^2)^5} \\ &\quad \left[(p^2 - m^2)^2 \eta^{\mu\nu} \varepsilon^{\alpha\beta} + 2(p^2 - m^2) [\eta^{\mu\nu} p^\beta p_\lambda \varepsilon^{\alpha\lambda} - 2p^\mu p^\nu \varepsilon^{\alpha\beta} + m^2 \eta^{\mu\nu} \varepsilon^{\alpha\beta}] \right. \\ &\quad \left. - 8m^2 p^\mu p^\nu \varepsilon^{\alpha\beta} \right]. \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

por razões de simetrias omitimos todos os termos de ordem ímpares no p -momento de integração.

Note que através de contagem de potência em p -momento, as integrais da Eq.(5.2.21) envolvem somente contribuições convergentes. Assim, não temos a necessidade de aplicar algum esquema de regularização de integrais divergentes. Tais integrais podem ser calculadas pelo uso direto das fórmulas:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{p^2}{(p^2 - m^2)^n} &= \frac{(-1)^{n-1} i}{4\pi} \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-2)}{(m^2)^{n-2}} \\ \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - m^2)^n} &= \frac{(-1)^{n-1} i}{4\pi} \frac{\eta^{\mu\nu}}{2\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-2)}{(m^2)^{n-2}}, \\ \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{p^2 p^\mu p^\nu}{(p^2 - m^2)^n} &= \frac{(-1)^n i}{4\pi} \frac{\eta^{\mu\nu}}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-3)}{(m^2)^{n-3}} \\ \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma}{(p^2 - m^2)^n} &= \frac{(-1)^n i}{4\pi} \frac{G^{\mu\nu\rho\sigma}}{4\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-3)}{(m^2)^{n-3}} \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

onde $G^{\mu\nu\rho\sigma} = \eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}$. No restante dos cálculos, desprezamos todas as contribuições proporcionais ao fator $n^2 \partial^2$. Portanto, usando a Eq.(5.2.22) na Eq.(5.2.21), obtemos

$$S_{eff}[n, \phi, \chi] = \lambda \int d^2x u_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta} (u \cdot \partial)^2 \chi(x) \partial_\beta \phi(x) \quad (5.2.23)$$

onde $\lambda = \frac{\tilde{g}\tilde{e}^2}{12\pi m^2} \sim \tilde{g}e^2$ considerando que $m \sim 1/R$ como antecipamos.

Assim, a Lagrangeana efetiva completa, capaz de propor novos estudos em duas dimensões é dada na forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2D} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + \lambda\varepsilon^{\alpha\beta}n_\alpha(n\cdot\partial)^2\chi\partial_\beta\phi + \bar{\psi}(i\rlap{\not{\partial}} - m + g'(n\cdot\partial)^2\rlap{\not{n}})\psi \\ &- \tilde{e}\bar{\psi}(\phi + i\gamma_5\chi)\psi. \end{aligned} \tag{5.2.24}$$

Note que o setor fermiônico da teoria (5.2.24) tem o potencial de induzir radiativamente uma teoria efetiva bi-dimensional inicialmente obtida através de um processo de projeção de 4D para 2D.

Capítulo 6

Estudo de Defeitos Topológicos via o Modelo de Myers-Pospelov em 2D

Baseada nos capítulos anteriores em que obtemos teorias projetadas em duas dimensões, neste capítulo propomos uma nova teoria com dois campos escalares reais e com dinâmica de derivadas superiores. Esta teoria em duas dimensões pode ser escrita na forma:

$$\mathcal{L}_{2D} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + g\epsilon^{\alpha\beta}n_\alpha(u \cdot \partial)^2\chi\partial_\beta\phi - V(\phi, \chi) \quad (6.0.1)$$

onde $\mu = 0, 1$ e $n_\mu = (n_0, n_1)$. Esta teoria pode gerar novos efeitos para defeitos topológicos e não-topológicos gerados por dois campos escalares reais com uma escolha própria de um potencial escalar $V(\phi, \chi)$.

6.1 As Equações de Movimento

Nesta seção, pretendemos obter as equações de movimento associadas a teoria (6.0.1). Neste sentido, temos que as equações de movimento para os campos escalares

ϕ e χ , são dadas respectivamente como,

$$\begin{aligned}\square\phi + g\epsilon^{\alpha\beta}n_\alpha(n \cdot \partial)^2\partial_\beta\chi + \frac{\partial V}{\partial\phi} &= 0, \\ \square\chi - g\epsilon^{\alpha\beta}n_\alpha(n \cdot \partial)^2\partial_\beta\phi + \frac{\partial V}{\partial\chi} &= 0.\end{aligned}\tag{6.1.2}$$

Agora, podemos reescrever essas equações para soluções estáticas. Então, assumindo que $\phi = \phi(x)$ e $\chi = \chi(x)$, encontramos

$$\begin{aligned}-\phi'' + gn_1^3\chi''' + \frac{\partial V}{\partial\phi} &= 0, \\ -\chi'' - gn_1^3\phi''' + \frac{\partial V}{\partial\chi} &= 0.\end{aligned}\tag{6.1.3}$$

Note que estas equações não dependem da componente tipo-tempo n_0 . Assim, se a princípio considerarmos somente a componente n_0 diferente de zero, não devemos observar efeitos relacionados a quebra da simetria de Lorentz sobre soluções no regime estacionário. Perceba também que para um potencial constante V (ou na ausência dele), as equações (6.1.3) a menos de uma constante, podem ser reduzidas em sua ordem derivativa na forma:

$$\begin{aligned}\phi - gn_1^3\chi' &= 0, \\ \chi + gn_1^3\phi' &= 0.\end{aligned}\tag{6.1.4}$$

Estas equações são equivalentes as encontradas em [26] no mesmo regime. Isto nos mostra que o operador de Myers-Pospelov no regime estático e sem nenhuma contribuição de potencial, torna-se um operador redutível em duas dimensões. As equações de movimento (6.1.4) podem ser obtidas através da seguinte Lagrangeana bi-dimensional:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + \kappa_\alpha\epsilon^{\alpha\beta}\chi\partial_\beta\phi,\tag{6.1.5}$$

sobre a influência da componente n_0 .

6.2 As Soluções Estacionárias

Nesta seção estudamos as soluções estacionárias associadas a presente teoria. Retornando as equações (6.1.4) encontramos que elas são satisfeitas através das soluções

oscilatórias:

$$\phi = \cos kx, \quad \chi = \sin kx, \quad k = \frac{1}{gn_1^3}. \quad (6.2.6)$$

A seguir, devemos considerar potenciais não-triviais V . Considerando que V satisfaça as seguintes relações:

$$\int \frac{\partial V}{\partial \phi} dx = -\frac{\partial U}{\partial \chi}, \quad \int \frac{\partial V}{\partial \chi} dx = \frac{\partial U}{\partial \phi}, \quad (6.2.7)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \phi} = -\frac{\partial U}{\partial \chi}, \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \chi} = \frac{\partial U}{\partial \phi}. \quad (6.2.8)$$

Então podemos reduzir as equações de movimento como

$$\begin{aligned} -\phi' + gn_1^3 \chi'' - \frac{\partial U}{\partial \chi} &= c_1, \\ -\chi' - gn_1^3 \phi'' + \frac{\partial U}{\partial \phi} &= c_2, \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

onde c_1, c_2 são constantes de integração que devemos considerar iguais a zero no nosso presente estudo. Vamos reescalonar essas equações na forma familiar[26]

$$\begin{aligned} -\phi'' - k\chi' + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \phi} &= 0, \\ -\chi'' + k\phi' + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \chi} &= 0, \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

onde $\tilde{U} = kU$. Note que várias das soluções encontradas em [26] podem ser consideradas como soluções do nosso sistema.

Capítulo 7

Conclusão

Neste trabalho estudamos alguns aspectos clássicos e quânticos da violação das simetrias de Lorentz e de CPT via teorias efetivas. Estudamos algumas propriedades da QED estendida proposta pela técnica da SME e sua generalização desenvolvida por Myers-Pospelov. A abordagem da violação da simetria de Lorentz pela SME foi desenvolvida a título de revisão e portanto, não encontramos outros resultados diferentes da literatura. Enquanto que o estudo associado a QED de Myers-Pospelov foi desenvolvido com mais interesse, uma vez que essa teoria é o objeto principal da presente dissertação.

Estudamos as propriedades superluminais que a QED-MP é capaz de prever para certas partículas, tais como os neutrinos. Note que esse modelo é invariante de Lorentz exceto pela aparência do background que caracteriza a violação de Lorentz dado pelo quadri-vetor n_μ . E esta característica, pertence a mesma classe de teorias [40, 41] que se destinam a descrever o comportamento de partículas superluminais. Neste contexto, podemos sempre escolher um sistema de repouso para os neutrinos, e através dele, estudar o seu decaimento em outras partículas. Pois da invariância de Lorentz a quantidade de energia-momento é conservada localmente e assim, o decaimento de neutrinos altamente energéticos em outras partículas de menor energia é terminantemente proibido [40]. Isto deve ser o suficiente para fugir dos limites impostos por

Cohen-Glashow para se descrever partículas superluminais [42].

Além disso, investigamos a projeção de 4D-2D da QED-MP construída em função de operadores de dimensão-5. Neste caso, mostramos que é possível diminuir a ordem do operador de dimensão-5 para um de dimensão-3 via o processo de projeção. Uma das principais características atribuídas à operadores de altas dimensões, refere-se a descrição do Ultra-Violeta na gravidade quântica [14]. Então, podemos dizer que tanto teorias bi-dimensionais quanto de dimensões superiores, podem absorver em sua estrutura operadores de ordem superiores. Através do método de projeção, foi possível unir essas duas possibilidades numa mesma configuração. Uma outra característica que observamos foi que a esses operadores que violam a simetria de Lorentz descrevem novas estruturas de defeitos via uma teoria de campos escalares bi-dimensional que emerge via projeção de uma teoria quadri-dimensional e de correções radiativas de determinantes fermiônicos.

Quanto as perspectivas, podemos estudar primeiramente, detalhes da aplicação da teoria de campos escalares efetiva em 2D para descrever novos efeitos de estruturas de defeitos no cenário de violação da simetria de Lorentz com operadores de dimensão-3. Depois, podemos aplicar o método de projeção de 4D para 2D para SME. O objetivo aqui, é de se obter uma teoria de campos escalares e efetiva e descrever também efeitos relacionados a estrutura de defeitos.

Apêndice A

O Espaço-Tempo de Minkowski

O espaço-tempo de Minkowski descreve os eventos que ocorrem em algum lugar no espaço, e em um certo momento. Podendo então ser caracterizado pela métrica $g_{\mu\nu}$ com $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

onde as coordenadas do quadrivetor espaço-tempo seguem novamente para $c = 1$ a seguinte notação

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \vec{r}), \quad (\text{A.2})$$

cuja função acontece mediante uma transformação de Lorentz, dada na forma covariante por

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (t, -\vec{r}). \quad (\text{A.3})$$

Apêndice B

As Equações de Maxwell

Sabe-se que as equações de Maxwell descrevem o eletromagnetismo e que as mesmas foram o foco de pesquisas entre o fim do século XIX e o início do século XX, sendo responsáveis pelo comportamento dos fenômenos elétricos e magnéticos. Essas equações podem ser escritas na presença das densidades de carga $\rho(x, t)$ e corrente $\vec{j}(x, t)$, na forma diferencial

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad (\text{B.1})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (\text{B.2})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{B.4})$$

no qual $\vec{E}(x, t)$ e $\vec{B}(x, t)$ são os campos elétrico e magnético que satisfazem as equações acima. Já, para $c = 1$, as equações de onda desses campos são dadas por:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{B.5})$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{B.6})$$

As equações de Maxwell podem ser escritas na forma covariante a partir da densidade de lagrangeana

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \quad (\text{B.7})$$

em termos das componentes vetoriais passa a ser expressa como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \rho\phi + \vec{j} \cdot \vec{A}. \quad (\text{B.8})$$

A partir de (B.7) podemos encontrar as equações de movimento de Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{B.9})$$

na ausência de fontes, e

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (\text{B.10})$$

na presença de fontes.

Bibliografia

- [1] HAGIWARA, K., *et al.*, *Review of particle properties*, Phys. Rev. D **66**, 010001 (2002).
- [2] COLLADAY, D. e KOSTELECKY, V. A., *CPT violation and the standard model*, Phys. Rev. D **55**, 6760-6774 (1997); *Lorentz-violating extension of the standard model*, Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998).
- [3] BLUHM, R., *et al.*, Phys. Rev. Lett., **82**, 2254 (1999).
- [4] PHILLIPS, D.F., *et al.*, Phys. Rev. Lett., **63** 111101 (2001).
- [5] BLUHM, R. e KOSTELECKY, V. A., Phys. Rev. Lett., **84**, 1381 (2000).
- [6] HECKEL, R., B. KURSUNOGLU, N., MINTZ, S. L. e PERLMUTTER, A. *Elementary Particles and Gravitation*, Plenum, New York, (1999).
- [7] JACKIW, R. e TEMPLETON, S. Phys. Rev. D **23**, 2291 (1981).
- [8] CARROLL, S., FIELD, G., e JACKIW, R. Phys. Rev. D **41**, 123 (1990).
- [9] CARROLL, S. e FIELD, G. Phys. Rev. Lett., **79**, 2394 (1997).
- [10] JACKIW, R. e KOSTELECKY, V. A. Phys. Rev. Lett., **82**, 3572 (1999).
- [11] GOLDHABER, M. e TRIMBLE, V. J. Astrophys. Astron., **17**, 17 (1996).
- [12] JACOBSON, T., LIBERATI, S., MATTINGLY, D. e STECKER, F. Phys. Rev. Lett., **93**, 021101 (2004.)

- [13] SPPONER, J. C. e KUDRYAVTSEV, N. *The identification of dark matter*. World Scientific, (2001).
- [14] MYERS, R. C. e POSPELOV, M. Phys. Rev. Lett. **90**, 211601 (2003) [arXiv:hep-ph/0301124].
- [15] ALMEIDA, C. A. G., ANACLETO, M. A., BRITO, F. A. e PASSOS, E. Eur. Phys. J. C **72**, 1855 (2012) [arXiv:1111.0093 [hep-ph]].
- [16] REYES, C. M. Phys. Rev. D **82** , 125036 (2010).
- [17] ADAM, T. *et al.* (OPERA Collaboration), arXiv:1109.4897 [hep-ex].
- [18] AMENOMORI, M. *et al.* (Tibet AS(gamma) Collaboration), Phys. Rev. D **62**, 112002 (2000). arXiv:0010292 [astro-ph].
- [19] ADAMSON, P. *et al.* (MINOS Collaboration), Phys. Rev. D **76**, 072005 (2007). arXiv:0706.0437 [hep-ex].
- [20] HIRATA, K. *et al.*, Phys. Rev. Lett. **58**, 1490 (1987).
- [21] BIONTA, R., BLEWITT, G., BRATTON, C., CASPER, D., CIOCIO, A. *et al.*, Phys. Rev. Lett. **58**, 1494 (1987).
- [22] LONGO, M.J., Phys. Rev. D **36**, 3276 (1987).
- [23] ANACLETO, M.A., BRITO, F.A., PASSOS, E., arXiv:1109.6298 [hep-th]
- [24] TAMBURINI, F., LAVEDER, M. arXiv:1109.5445 [hep-ph].
- [25] ELLIS, J., JANKA, H.T., MAVROMATOS, N.E., SAKHAROV, A.S., SARKIS-SYAN, E.K.G. arXiv:1110.4848 [hep-ph].
- [26] BARRETO, M. N., BAZEIA D., MENEZES, R. Phys. Rev. D **73**, 065015 (2006) [hep-th/0506262].

- [27] BAZEIA, D., FERREIRA, M. M., GOMES, A. R. e MENEZES, R. *Physica D* **239**, 942 (2010) [arXiv:1001.5286 [hep-th]].
- [28] DUTRA, A. d. S. e CORREA, R. A. C., *Phys. Rev. D* **83**, 105007 (2011) [arXiv:1012.0268 [hep-th]].
- [29] GRIGORIO, L. S., GUIMARAES, M. S. e WOTZASEK, C., *Phys. Rev. D* **77** 105015 (2008).
- [30] PASSOS, E. e PETROV, A. Y., *Phys. Lett. B* **662**, 441 (2008) [Erratum-ibid. B **664**, 318 (2008)] [arXiv:0801.4946 [hep-th]].
- [31] BRITO, F. A., GUIMARAES, M. S., PASSOS, E., SAMPAIO, P. e WOTZASEK, C. *Phys. Rev. D* **86**, 105036 (2012) [hep-th/1210.2369].
- [32] BELICH, H., FERREIRA, M. M., HELAYEL-NETO, J. A. *Eur. Phys. J. C* **38**, 511 (2005) [hep-th/0401235].
- [33] BELICH, H., FERREIRA, M. M., HELAYEL-NETO, J. A., ORLANDO, M.T.D. *Phys. Rev. D* **67**, 125011 (2003); Erratum-ibid., *Phys. Rev. D* **69**, 109903 (2004).
- [34] GAETE, E. P., SPALLUCCI, E. J. *Phys. A* **39**, 6021 (2006) [hep-th/0512178]; P. Gaete, *On external backgrounds and linear potential in three dimensions* [hep-th/0501136]; P. Gaete, C. Wotzasek, *Phys. Rev. D* **75**, 057902 (2007) [hep-ph/0607321].
- [35] CASANA, R., CARVALHO, E. S., e FERREIRA, M. M., Jr, *Phys. Rev. D* **84**, 045008 (2011) [arXiv:1107.2664 [hep-th]].
- [36] AITCHISON, I. J. R. e FRASER, C. M., *Phys. Lett. B* **146**, 63 (1984); *Phys. Rev. D* **31**, 2605 (1985); C. M. Fraser, *Z. Phys. C* **28**, 101 (1985); VAINSHTEIN, A. I., ZAKHAROV, V. I., NOVIKOV, V. A. e SHIFMAN, M. A. *Yad. Fiz. (Sov. J. Nucl. Phys.)* **39**, 77 (1984); J. A. Zuk, *Phys. Rev. D* **32**, 2653 (1985); M. K.

- Gaillard, Nucl. Phys. B **268**, 669 (1986); A. Das e A. Karev, Phys. Rev. D **36**, 623 (1987); K. S. Babu, A. Das, e P. Panigrahi, Phys. Rev. D **36**, 3725 (1987).
- [37] BRITO, F. A., NASCIMENTO, J. R., PASSOS, E., PETROV, A. Yu. JHEP **06**, 016 (2007).
- [38] BRITO, F. A., GRIGORIO, L. S., GUIMARAES, M. S., PASSOS, E. e WOTZASEK, C. Phys. Rev. D **78**, 125023 (2008) [arXiv:0810.3180 [hep-th]].
- [39] BRITO, F. A., PASSOS, E. e SANTOS, P. V. Europhys. Lett. **95**, 51001 (2011) [arXiv:1101.5390 [hep-th]].
- [40] NOJIRI, S., ODINTSOV, S.D. Eur. Phys. J. C **71**, 1801 (2011). arXiv: 1110.0889 [hep-ph]
- [41] LI, T., NANOPOULOS, D.V. arXiv:1110.3451 [hep-ph].
- [42] COHEN, A.G., GLASHOW, S.L. Phys. Rev. Lett. **107**, 181803 (2011). arXiv:1109.6562 [hep-ph].