

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA - CCT

PROBLEMAS DE FILAS

Gentil José de Lucena Filho

CAMPINA GRANDE

ESTADO DA PARAIBA - BRASIL

DEZEMBRO - 1974


PROBLEMAS DE FILAS

APLICAÇÃO DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

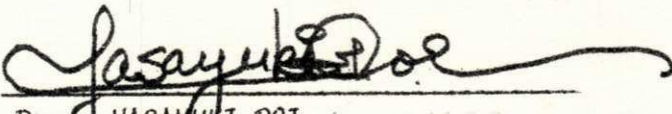
Gentil José de Lucena Filho


TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DO CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS - (M.Sc.).

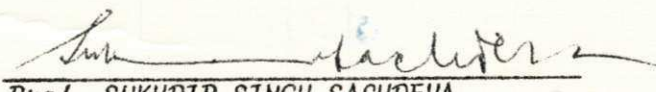
APROVADO POR:

  
Prof. VISHNUMOORTHI MATTU BHAT  
- Presidente -

COMISSÃO :

  
Prof. MASAYUKI DOI

  
Prof. MAMORU HARUNA  
-Orientador-

  
Prof. SUKHDIP SINGH SACHDEVA.

CAMPINA GRANDE  
ESTADO DA PARAIBA - BRASIL  
DEZEMBRO - 1974

19-2-01 ACM



L935p Lucena Filho, Gentil José de.  
Problemas de filas : aplicação da simulação de Monte Carlo / Gentil José de Lucena Filho. - Campina Grande, 1974.  
83 f.

Dissertação (Mestrado em Ciências) - Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 1974.  
"Orientação : Prof. Mamoru Haruna".  
Referências.

1. Teoria das Filas e Simulação. 2. Filas. 3. Aplicação da Simulação de Monte Carlo. 4. Dissertação - Ciências. I. Haruna, Mamoru. II. Universidade Federal da Paraíba - Campina Grande (PB). III. Título

CDU 519.872(043)

A todos os meus

## A G R A D E C I M E N T O S

Registramos aqui nosso reconhecimento a todos que contribuíram para a performance deste trabalho.

Em particular, agradecemos ao Prof. MAMORU HARUNA pela valiosa orientação dispensada, sem a qual não teria sido possível levá-lo a efeito.

R E S U M O

PROBLEMAS DE FILAS  
APLICAÇÃO DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

O principal objetivo deste estudo é estabelecer a base para o desenvolvimento da metodologia para resolver problemas de filas usando a técnica de simulação de Monte Carlo. Na realidade, desenvolvemos o sistema de simulação para o modelo de fila M/M/1.

A aplicabilidade da técnica de simulação em problemas de filas é discutida, comparando os resultados com aqueles obtidos analiticamente.

A discussão também envolve diversos problemas associados com a aplicação da teoria das probabilidades e estatística, e a teoria dos processos estocásticos. Entre estes estão a aleatoriedade dos números gerados na simulação e o estado estacionário do processo simulado.

Embora neste trabalho tenhamos estudado o problema de fila M/M/1, a metodologia pode ser estendida a problemas de filas mais complexos.

## A B S T R A C T

QUEUING PROBLEMS  
APPLICATION OF MONTE CARLO SIMULATION

The main purpose of this study is to establish the base for development of the methodology to solve queuing problems by use of Monte Carlo simulation technique. In fact, we develop the simulation system for the queuing model M/M/1.

The applicability of simulation technique to the queuing problem is discussed by comparing the results with the ones obtained by analytic approaches.

The discussion also involves several problems associated with the application of probability and statistic theory, and stochastic process theory in the simulation approach. Among those are the randomness of numbers generated in simulation and the steady state of simulated process.

Although the queuing model M/M/1 is studied in this paper, the methodology can be further extended to more complex queuing problems.

I N D I C E

CAPITULO I - INTRODUÇÃO	
1.1 - Problemas de Filas.....	01
1.2 - Objetivos da Pesquisa.....	05
CAPITULO II - O MODELO DA SIMULAÇÃO	
2.1 - Introdução.....	10
2.2 - Características do Modelo.....	10
2.3 - Fluxograma do Modelo.....	12
2.4 - Escolha dos Dados e Implementação do Modelo.....	19
2.5 - Resultados da Simulação.....	20
CAPITULO III - INFLUÊNCIA DA ALEATORIEDADE NOS RESULTADOS DA SIMULAÇÃO.	
3.1 - Introdução.....	23
3.2 - O Gerador de Números Aleatórios.....	24
3.3 - Teste de Kolmogorov-Smirnov (teste - KS).....	25
3.4 - Teste Qui-quadrado (teste - $\chi^2$ ).....	27
3.5 - Alguns Resultados da Simulação.....	28
3.6 - Observações.....	28
CAPITULO IV - O ESTADO ESTACIONÁRIO DO SISTEMA	
4.1 - Introdução.....	34
4.2 - Equações do M/M/1 ( $\infty$ ).....	35
4.3 - O tempo de Simulação.....	37
CAPITULO V - DIMENSIONAMENTO DO "QUANTUM" DE TEMPO DE SIMULAÇÃO.	



5.1 - Introdução.....	42
5.2 - Influência de $\Delta t$ na Simulação.....	42
5.3 - Observações.....	43
CAPITULO VI - CONCLUSÕES	
6.1 - Introdução.....	50
6.2 - Planejamento de Experiências de Simulação.....	50
APÊNDICE	
I. - Derivações de $P_n$ , $L$ e $\tilde{t}_w$ .....	59
II. - Tabelas	
a) Tabela - KS.....	64
b) Tabela - $\chi^2$ .....	65
III. - Programas.....	66

## INTRODUÇÃO

---

### CAPÍTULO I

#### 1.1 - PROBLEMAS DE FILAS

No cotidiano, frequentemente nos deparamos com filas (quer num aeroporto, num supermercado, num cinema, num banco, etc.), e isso tem se constituído como motivo de preocupação de estudiosos no sentido de estabelecerem um balançamento dos custos envolvidos entre o tempo de espera dos usuários no sistema (por exemplo, um aeroporto) e o número de estações de serviço do sistema. Essa preocupação se justifica plenamente pelo fato de que, enquanto o tempo de espera dos usuários pode ser reduzido, aumentando-se o número de estações de serviço do sistema, tal atitude poderá provocar um acréscimo no tempo ocioso dessas estações. Por outro lado, essa ociosidade poderá ser reduzida, diminuindo-se o número de estações de serviço no sistema. Nesse caso, eventualmente formar-se-iam longas filas, provocando assim um acréscimo no tempo de espera dos usuários.

Várias técnicas de solução para tais problemas têm sido desenvolvidas. A seguir, citamos algumas dessas técnicas, suas vantagens e desvantagens.

##### a) Métodos Analíticos

Estes requerem um perfeito controle dos parâmetros que definem o problema, os quais se fundamentam:

1º) - na maneira em que os usuários chegam às estações de serviço;

2º) - no número de estações de serviço;

3º) - no policiamento do serviço (p.ex., limitações da quantidade de serviço que pode ser oferecida);

4º) - na disciplina da linha de espera (ou fila), isto é a ordem em que os usuários são atendidos;

5º) - no serviço fornecido e sua duração.

Essencialmente, os métodos analíticos consistem em, a partir do processo em estudo, estabelecer um sistema de equações diferenciais, do qual a probabilidade,  $P_n(t)$ , de se encontrar  $n$  usuários no sistema no tempo  $t$ , pode ser obtida. Por exemplo, no caso de uma estação de serviço em que a taxa média de chegadas e a taxa média de serviço dos usuários dependem do comprimento da fila, o que representaremos por  $\lambda_n$  e  $\mu_n$ , respectivamente, essas equações tomam a seguinte forma:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t);$$

(1.1)

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0P_0(t) + \mu_1P_1(t).$$

Quando os fatores acima enumerados são bem definidos (ou controlados), e quando há solução para o sistema de equações diferenciais referido (o que não ocorre quando a aná

lise teórica da distribuição de probabilidades para as chegadas dos usuários ao sistema se torna demasiado complexa), tais métodos têm a vantagem de, apesar da complexidade matemática envolvida, conduzirem a soluções de acentuada precisão. Todavia, na prática, dificilmente se consegue controlar os parâmetros de definição do problema, de tal maneira que muitas vezes as soluções obtidas por esses métodos podem conduzir a resultados consideravelmente incompatíveis com os resultados observados.

Uma maneira de contornar os problemas envolvidos nas restrições dos métodos supracitados é através da técnica que ora passaremos a descrever.

#### b) Técnicas de Simulação

Essencialmente, a simulação é uma técnica que consiste em construir um modelo da situação real (a qual nos referiremos também como processo real ou sistema) e nele realizar experiências que seriam inviáveis e ou dispendiosas na prática.

Destinada a resolver problemas que envolvem alguma forma de processo estocástico (problemas de filas, fluxo de tráfego, processos de telecomunicações, etc.), como também problemas matemáticos determinísticos, que não podem ser facilmente resolvidos (quando há solução) por métodos estritamente determinísticos, destaca-se a técnica de simulação pelo método de Monte Carlo.

Fundamentalmente, esta técnica consiste na elaboração de um modelo probabilístico do processo a ser estudado, envolvendo a substituição de um universo estatístico real de elementos pelo seu correlativo teórico, ou seja, um universo descrito por uma determinada distribuição de probabilidades.

A técnica de Monte Carlo pode ser usada na resolução de problemas de fila, para os quais os dados requeridos possam ser coletados. Fundamentalmente, consiste na observação do sistema a ser estudado, a fim de colecionar dados que possibilitem:

1º) - O estudo do comportamento da taxa média de chegadas dos usuários ao sistema, a qual pode não ser uma constante e variar consideravelmente. Por sua vez, essa variação pode ser expressa em termos do desvio padrão estimado da distribuição do tempo entre-chegadas durante um certo período de observação;

2º) - A determinação da taxa média de serviço, a qual, se estiver sujeita a variações, estas também poderão ser expressas a partir de dados colhidos quando da observação do sistema.

A combinação de diversas configurações do modelo simulador do sistema e cada vez procedendo-se às etapas acima citadas, juntamente com um estudo estatístico do custo envolvido em cada uma das diferentes configurações, possibilitar-nos-á a escolha de uma configuração que resulte no balanceamento anteriormente referido.

Em virtude da realidade dos dados observados do sistema em estudo, a técnica de Monte Carlo poderá conduzir a resultados altamente precisos. Todavia, cuidado deve ser tomado, tanto no período de observação quanto na coleta dos dados.

A simulação pelo método de Monte Carlo pode ser considerada uma experimentação probabilística, e consequentemente os resultados são variáveis probabilísticas. A fim de se

estimar as estatísticas com precisão apropriada, as experimentações devem ser bem planejadas.

Atualmente, a técnica acima citada não se acha bem desenvolvida com vistas à eficiência.

Na aplicação da simulação pelo método de Monte Carlo ao caso particular de problemas de filas, as chegadas e saídas dos usuários no sistema são simuladas através de um gerador apropriado de números aleatórios, o que obviamente não condiz com o correspondente na prática, a não ser de forma aproximada. Consequentemente, a influência da randomicidade dos números gerados deve ser considerada.

Outro fator a considerar na aplicação dessa técnica, é o dimensionamento da unidade ou "quantum" de tempo da simulação, vez que esta interfere significativamente no estado do processo simulado.

## 1.2 - OBJETIVOS DA PESQUISA

Neste trabalho, utilizaremos a simulação pelo método de Monte Carlo num sistema de fila monostação em que as chegadas dos usuários obedecem à distribuição de probabilidades de Poisson com média  $\lambda$ , isto é, sendo  $\lambda$  a taxa média de chegadas, a probabilidade de ocorrerem exatamente  $n$  chegadas num período de tempo  $I$ , é dada por

$$F(n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \quad (1.2)$$

Facilmente se mostra (Ver Churchman<sup>1</sup>) que neste caso o tempo entre chegadas dos usuários obedece à seguinte distribuição exponencial:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (1.3)$$

Admitiremos também que a distribuição de probabilidades para o tempo de serviço é exponencial de parâmetro  $\mu$ , isto é,

$$g(t) = \mu e^{-\mu t} \quad (1.4)$$

Além disso, consideraremos que as distribuições de probabilidades para os tempos entre-chegadas e de serviço dos usuários são independentes, e que a disciplina de atendimento aos usuários é tal que estes são atendidos na ordem em que chegam à estação de serviço. Tal modelo é denominado por M/M/1 ( $\infty$ ), quando não houver restrições sobre o comprimento da fila e por M/M/1 (N) quando o comprimento da fila for limitado. (Ver FIGURA 1.1).



FIGURA 1.1

A figura 1.2 descreve o comportamento do sistema.



FIGURA 1.2

Acêrca de tal comportamento, usaremos o modelo da simulação para responder, entre outras, às seguintes perguntas:

19) - Qual o tempo médio de espera, por usuário no sistema?

29) - Qual o comprimento da fila ou linha de espera, após  $t$  unidades de tempo?

39) - Num período  $T$ , por quanto tempo a estação de serviço permanecerá ociosa?

Uma particularidade que introduziremos na simulação do M/M/1, é o fato de inspecionarmos o estado do sistema sempre que um usuário eventualmente dêixar a estação de serviço. Por isso mesmo, algumas vezes nos referiremos ao método utilizado como "método do exame eventual".



Uma vez elaborado o modelo da simulação, focalizaremos a atenção nos problemas, anteriormente citados, inerentes à utilização dessa técnica.

Inicialmente, estudaremos a influência do grau de aleatoriedade dos números gerados para os tempos entre chegadas e de serviço dos usuários no sistema. Isso será feito implementando-se o modelo com diferentes configurações de um certo gerador aleatório e procedendo à análise dos resultados obtidos da simulação tendo em vista os resultados teóricos.

Em seguida, abordaremos o problema do dimensionamento do "quantum" de tempo da simulação,  $\Delta t$ . Como a ordem de grandeza dos tempos entre-chegadas e de serviço dos usuários depende fundamentalmente dos valores das taxas médias de chegada e saída,  $\lambda$  e  $\mu$ , respectivamente, adiantamos que o "quantum" do tempo  $\Delta t$  deverá ser dimensionado de acordo com os mesmos, de tal forma que o modelo da simulação conduza a resultados compatíveis com os resultados teóricos. Isso será feito através da experimentação do modelo para diferentes combinações desses valores. O estabelecimento de uma relação teórica entre esses parâmetros está fora do escopo deste trabalho; todavia, a natureza desse relacionamento será discutida.

Outro problema que abordaremos refere-se ao estado estacionário do processo real na simulação. Tal característica descreveremos brevemente abaixo:

Conforme mostraremos no Capítulo IV, quando o tempo de observação  $t$ , do sistema, atingir um valor muito grande, o número médio de usuários no sistema, tenderá a um valor constante. Quando isso acontece, dizemos que o sistema atingiu o estado estacionário. Nesse caso se  $\lambda < \mu$ , a probabilidade de se encontrar  $n$  usuários no sistema e o número médio de usuários no sistema são dados, respectivamente por:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \quad (1.5)$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad (1.6)$$

Esses resultados possibilitar-nos-ão uma estimativa do tempo de simulação necessário, com relação à precisão dos resultados obtidos e ao custo do tempo de computação utilizado.

Como objetivo principal visamos a estabelecer uma metodologia que nos possibilite resolver problemas de filas por meio da simulação em computador. Daí termos escolhido o M/M/1 como processo real (o qual é, em si, o correlativo teórico de uma determinada situação prática), em vista de este já ter sido resolvido analiticamente, proporcionando-nos assim, não só uma avaliação da validade do modelo da simulação como também da metodologia utilizada, através da comparação dos resultados obtidos da simulação com resultados teóricos conhecidos.

Entretanto, estabelecida essa metodologia e a validade de nosso modelo, essa técnica poderá ser estendida não só a problemas de filas, com uma única estação de serviço cujas distribuições de probabilidades para os tempos entre-chegadas e de serviço dos usuários não sejam exponenciais (podendo inclusive ser empíricas, o que ocorre na prática), como também a problemas de filas mais complexos que, no momento, ou não podem ser resolvidos analiticamente, ou mesmo que o possam, apresentam viabilidade quanto à sua resolução por meio desta técnica de simulação.

## 2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, descreveremos inicialmente as características do modelo de simulação utilizado neste trabalho, para o sistema de fila M/M/1 ( $\infty$ ), com vistas a atender de terminadas restrições.

A seguir, apresentaremos um fluxograma do modelo simulador, tempo em que definiremos as variáveis ali utilizadas. Uma descrição do fluxograma é também apresentada.

Feito isso, abordaremos o problema da escolha dos dados necessários para a implementação do modelo da simulação, quando então apresentaremos os primeiros dados utilizados.

Finalmente, uma amostra dos resultados obtidos da simulação é apresentada.

## 2.2 - CARACTERÍSTICAS DO MODELO

Para a elaboração do nosso modelo simulador, tomamos por base, um modelo simplificado apresentado no livro do Naylor<sup>2</sup>, no qual procedemos modificações a fim de atender às seguintes restrições:

- a) Exame eventual do estado do sistema

Conforme adiantamos no capítulo anterior, ocasionalmente nos referiremos à técnica aqui utilizada na simulação do modelo de fila M/M/1 ( $\infty$ ), como método do exame eventual, acentuando com isso, o fato de inspecionarmos o estado do sistema sempre que um usuário deixá-lo. Para isso, necessário se faz atribuímos um número identificador para cada usuário que entre no sistema, possibilitando-nos assim acompanhar-lhe o fluxo através do sistema.

Dessa maneira, poderemos indiretamente controlar o tempo de simulação\* prefixando um número para o total de usuários do sistema e investigando o número do usuário a cada vez que este sair do sistema.

#### b) Material disponível

- Linguagem FORTRAN IV.
- Computador IBM 1130.
- Uma unidade de disco.
- Um "plotter" IBM 1627.
- Leitora/Perfuradora de Cartões IBM 1442.
- Impressora IBM 1132.

Para a avaliação da eficiência da técnica de Monte Carlo na simulação do M/M/1 ( $\infty$ ), precisaremos proceder à análise dos resultados da simulação através do levantamento de estatísticas das amostras ali obtidas.

Em virtude do computador disponível ser de pequeno porte (16 K de memória), o acoplamento ao programa simulador, de programas (que denominamos programas analisadores )

---

\* Isto porque, como veremos adiante, a priori, não temos idéia de quanto vai crescer o tempo de simulação, vez que isso depende de diversos parâmetros do modelo.

com vistas à obtenção das estatísticas acima referidas, tornou-se impraticável.

Em vista disso, a cada vez que implementamos o modelo simulador, arquivamos os resultados em disco para posterior análise. Detalhes do arquivamento serão fornecidos mais adiante.

Ainda com relação às características do modelo da simulação, levaremos em conta fatores do sistema real que se constituem em:

- *parâmetros*, como o tempo médio entre-chegadas e tempo médio de serviço dos usuários no sistema.

- *dados de entrada*, os quais se fundamentam nas distribuições de probabilidade para os tempos entre-chegadas e de serviço dos usuários; no nosso caso, distribuições exponenciais de parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$ , respectivamente.

- *dados de saída*, como o número de usuários, tempo total ocioso da estação de serviço, comprimento da fila, tempo de espera de cada usuário, etc, obtidos sempre que ocorrer a saída de um usuário do sistema.

### 2.3 - FLUXOGRAMA DO MODELO

Incluindo as modificações supracitadas o fluxograma do modelo da simulação é mostrado na figura 2.1\*. A seguir definiremos as variáveis utilizadas no mesmo e descrever-lhe-emos o funcionamento.

---

\* O programa correspondente pode ser encontrado no Apêndice.

## a) Definição das variáveis.

*NMAX* - número máximo de usuários que utilizarão o sistema em cada implementação do modelo. No Fluxograma da figura 2.1, *NMAX* é utilizado como "flag" para controlar a execução da simulação.

*ALAMB* - representa a taxa média de chegadas,  $\lambda$ , dos usuários no sistema.

*AMI* - representa a taxa média de serviço,  $\mu$ , dos usuários do sistema.

*DELTA* - representa a unidade de tempo de simulação,  $\Delta t$ .

As variáveis acima, funcionam como parâmetros de entrada para a simulação.

*ICONT* - variável de controle para o processo de gravação em disco\*.

---

\* Apesar da relativa rapidez com que o processo de gravação (desgravação) ou escrita (leitura) no disco é efetuada (em média 30 ms para ler ou escrever um setor, que corresponde a 320 "palavras"), procuramos reduzir o tempo gasto nesse processo durante a simulação, gravando os resultados a cada vez que os usuários de número  $k \times 150$  (onde  $k = 1, 2 \dots, M$  sendo  $M \times 150 = NMAX$ ) fossem liberados do sistema. Assim procedendo, dimensionamos arquivos de  $M$  setores, cada um com 150 ou 300 palavras dependendo dos dados gravados serem inteiros (1 "palavra" do disco, desde que usemos o controle \*ONE WORD INTEGERS; ver Pacitti<sup>8</sup>) ou reais (2 "palavras" do disco) respectivamente. Evidentemente, sendo mecânico o processo de gravação (desgravação) ganharemos tempo proceden-

la. *TESIN* - tempo de espera de cada usuário na fi-

ma. *TEC* - tempo entre-chegadas dos usuários ao siste

*TS* - tempo de serviço para cada usuário.

*TTEC* - tempo total entre chegadas.

*CLE* - comprimento da linha de espera.

*TA* - tempo absoluto ou tempo de simulação.

*TOCIT* - tempo total ocioso da estação de serviço.

*DTEC* - variável temporária para guardar os tempos entre chegadas.

*ICHAV* - indica o estado da estação de serviço. Assumirá os valores zero (estação de serviço desocupada) e um (estação de serviço ocupada).

*I* - número atribuído ao usuário no instante de sua entrada no sistema.

*J* - número de usuário que sai do sistema.

*ATEC*, *NUM*, *W*, *X*, *Y*, *Z* - variáveis temporárias que guardam os resultados da simulação antes de cada gravação.

---

\* - (continuação) - do dessa maneira ao invés de gravar a cada vez que um usuário deixasse o sistema.

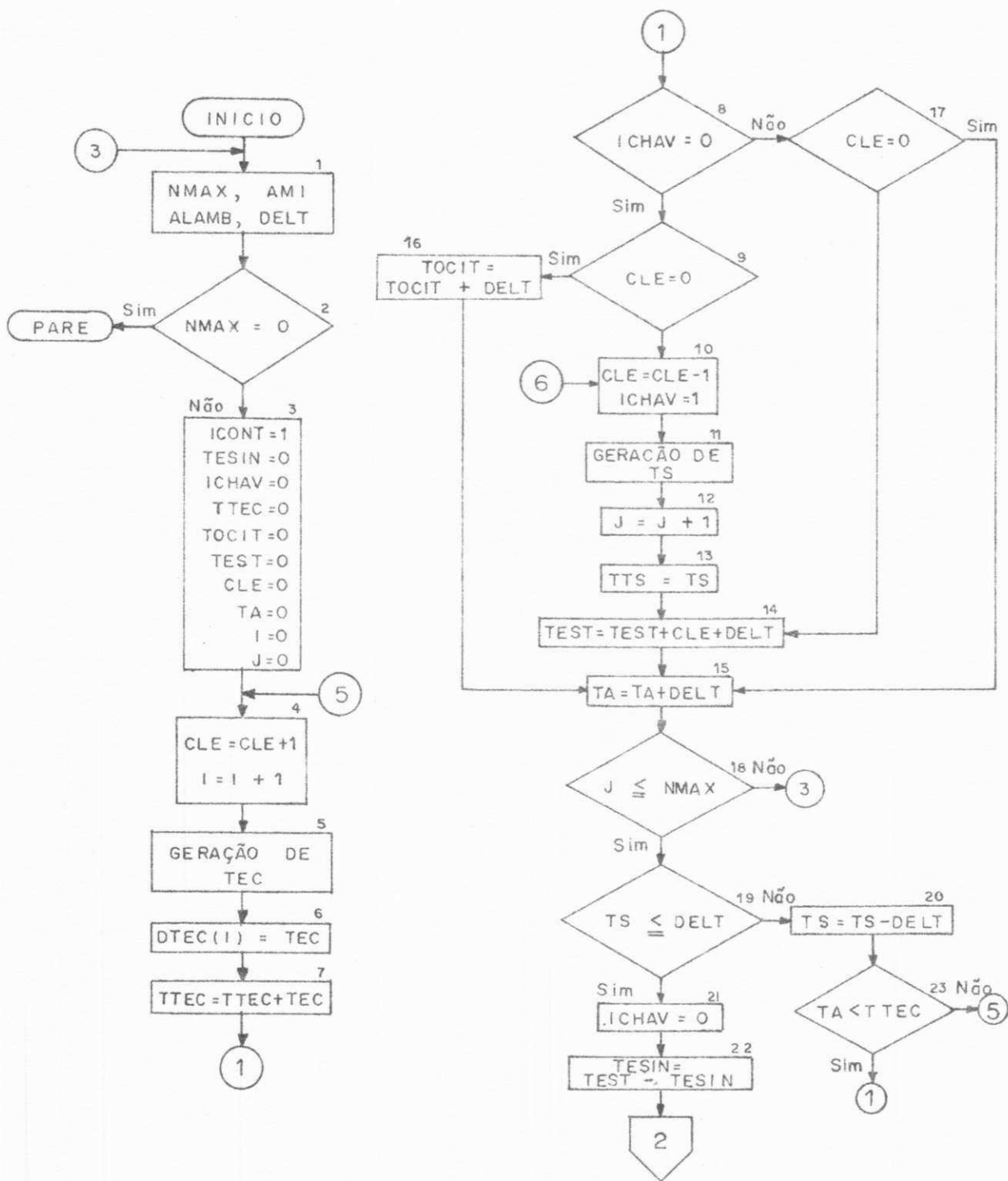


FIGURA 2.1



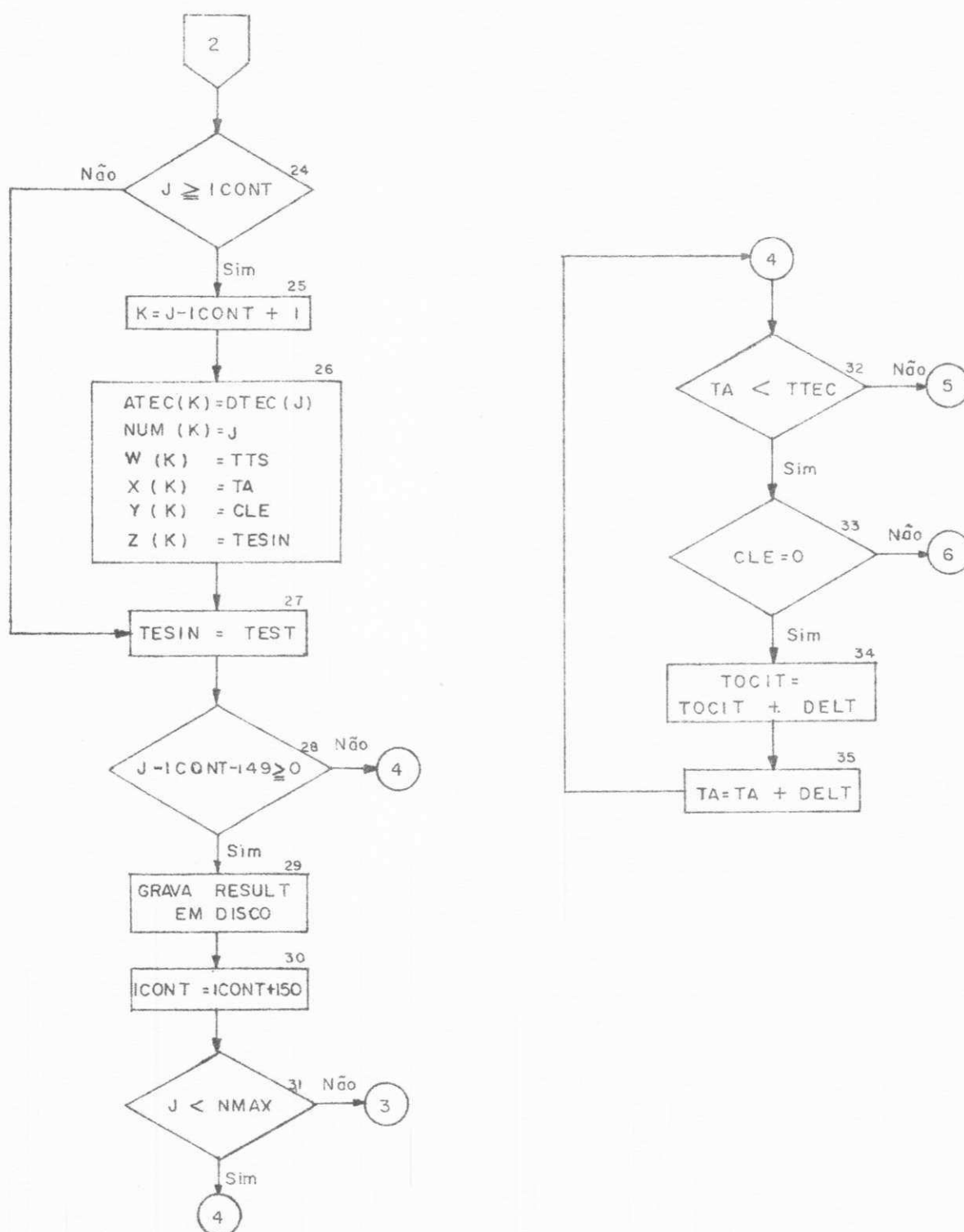


FIGURA 2.1 (Continuação)

K - índice utilizado pelas temporárias citadas no parágrafo anterior.

b) Descrição do fluxograma

Inicialmente, os dados necessários para inicializar a simulação são lidos (caixa 1), seguindo-se um teste (caixa 2) que dependendo do seu resultado parará a simulação. Na caixa 3 são definidas as condições iniciais necessárias para a simulação. Em seguida, é simulada a chegada de novo usuário, incrementando-se o comprimento da fila e atribuindo-se um número ao usuário recém-chegado (caixa 4). A seguir é gerado um tempo entre-chegadas, isto é, o tempo que decorrerá até a chegada de outro usuário ao sistema (caixa 5).

**OBSERVAÇÃO:** Como se disse anteriormente, os tempos entre chegadas e de serviço dos usuários no sistema obedecem à distribuições de probabilidades exponenciais,  $F(t)$  e  $G(t)$ , de parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$ , respectivamente. Mostra-se facilmente que se as funções densidades de probabilidade para os tempos entre-chegadas e de serviço forem dados por (1.3) e (1.4), respectivamente, ter-se-á, para as respectivas funções distribuição de probabilidades:

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 - e^{-\lambda t} \\ G(t) &= 1 - e^{-\mu t} \end{aligned} \quad (2.1)$$

O processo que utilizaremos na geração de números aleatórios exponencialmente distribuídos obedece ao método da transformação inversa, o qual exige o conhecimento da função distribuição de probabilidades (ver Naylor<sup>2</sup>, pp. 88-90 e 100-101). Outros métodos - da rejeição e da composição - podem ser encontrados na referência acima.

Após serem gerados, tais valores são guardados no conjunto DTEC para posterior análise de sua aleatoriedade (caixa 6). A seguir, atualiza-se o tempo total entre-chegadas TTEC (caixa 7). Essa atualização é necessária para a comparação entre TTEC e o tempo absoluto, feita nas caixas 23 e 32, de onde eventualmente será provocada a simulação da chegada de novo usuário ao sistema.

Nesse ponto, testa-se o estado da estação de serviço (caixa 8), a qual, se estiver vazia, provocará a verificação da presença de algum usuário na linha de espera (caixa 9); se houver, o usuário da "cabeça" da fila\* é admitido na estação de serviço e então a chave indicadora do estado da estação de serviço é ligada (caixa 10). Gera-se então um tempo de serviço para esse usuário (caixa 11), pelo processo de geração indicado na observação acima, e seu número é então colocado na variável J (caixa 12). Se não houver usuários na fila, adiciona-se uma unidade de tempo tanto ao tempo total ocioso da estação de serviço (caixa 16) como ao tempo absoluto (caixa 15). Se por outro lado, a estação de serviço estiver ocupada, verifica-se (agora na caixa 17) a presença de usuários na fila. Se confirmada, atualiza-se o tempo de espera total dos usuários, (caixa 14); se não, incrementa-se de uma unidade o tempo de simulação (caixa 15). Na caixa 18 verifica-se se o número do usuário admitido na estação de serviço é maior que NMAX. Caso o seja, retorna à caixa 1 e nova simulação é eventualmente inicializada. Caso contrário, desvia à caixa 19, onde verifica-se se o tempo de serviço gerado para o usuário é menor ou igual à unidade de tempo da simulação. Se não for; desvia para a caixa 20 onde TS é diminuído de uma unidade de tempo de simulação e na caixa 23 verifica-se se o tempo abso-

---

\* lembrar que a disciplina de atendimento aos usuários é tal que estes são atendidos na ordem em que chegam ao sistema (ver p. 06).

luto é menor que o tempo total entre-chegadas, caso que indica a não ocorrência de uma nova chegada no sistema. Então desvia para a caixa 8, repetindo-se o processo até que a estação de serviço fique novamente livre; caso contrário, isto é, se o tempo absoluto não for menor que o tempo total entre-chegadas, desvia para a caixa 4 onde é simulada a chegada de novo usuário ao sistema.

Se, por outro lado, o tempo de serviço gerado for menor ou igual que a unidade de tempo absoluto, a estação de serviço é imediatamente liberada (caixa 21) e o tempo de espera do usuário na fila é então calculado (caixa 22). Nesse ponto, verifica-se (caixas 24 a 30) se o usuário que deixou a estação de serviço tem um dos números  $k \times 150$  (onde  $k=1, 2, \dots, M$  sendo  $M \times 150 = NMAX$ ), caso em que, procede-se à gravação em disco dos resultados referentes aos últimos 150 usuários atendidos pela estação de serviço; caso contrário, armazena-se os resultados da simulação referentes àquele usuário em variáveis temporárias para posterior gravação em disco. Ainda sobre o referido usuário, verifica-se (caixa 31) se o seu número é menor que  $NMAX$ . Caso não seja, desvia para a caixa 1, onde eventualmente nova simulação será inicializada; caso contrário, verifica-se novamente se o tempo absoluto é menor que o tempo total entre-chegadas (caixa 32); caso em que verifica-se se há algum usuário na fila; se houver, desvia para a caixa 10, se não, atualiza-se o tempo total ocioso da estação de serviço e o tempo absoluto, retornando a seguir à caixa 32. Por outro lado, se o tempo absoluto não for menor que o tempo total entre-chegadas, desvia para a caixa 4 e dá continuidade ao processo.

#### 2.4 - ESCOLHA DOS DADOS E IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO

Em virtude de não dispormos de material didático que, de início, nos possibilitasse uma boa escolha de da-

dos para a simulação (no sentido de, a priori, contarmos com alguma eficiência do modelo simulador), procedemos a esta, de maneira completamente heurística, e recorreremos a diversas implementações do modelo.

À cada implementação, 10 conjuntos de dados eram processados, quando então procedíamos à implementação de alguns programas analisadores no sentido de obter informações que empiricamente nos conduzisse a uma outra e melhor escolha de dados.

**OBSERVAÇÃO:** A razão  $\lambda/\mu$ , nos referiremos como  $\rho$  - fator de atividade ou densidade de tráfego.

A seguir, nas tabelas 2.1, 2.2, 2.3, mostramos os primeiros conjuntos de dados utilizados.

## 2.5 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

Sõ para termos uma idéia da ordem de grandeza dos resultados obtidos da simulação, apresentamos na tabela 2.4 uma amostra desses resultados.

**OBSERVAÇÃO:** Já nesta fase da pesquisa, verificamos das implementações com os dados acima, após o levantamento de algumas estatísticas (o que será coberto mais adiante), que a unidade de tempo da simulação deve ser dimensionada de maneira inversamente proporcional ao fator de atividade  $\rho$ .

19: NMAX = 2100

$\lambda$	1	3	4	5	7	1	3	1	8	9
$\mu$	2	6	8	10	14	10	9	2	10	10
$\rho$	0,5					0,1	0,3	0,5	0,8	0,9
$\Delta t$	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05

TABELA 2.1

29: NMAX = 2100

$\lambda$	1	3	4	5	7	1	3	1	8	9
$\mu$	2	6	8	10	14	10	9	2	10	10
$\rho$	0,5					0,1	0,3	0,5	0,8	0,9
$\Delta t$	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,05	0,02	0,08	0,001	0,001

TABELA 2.2

39: NMAX = 2100

$\lambda$	1	2	3	4	5	7	1	8	9	1
$\mu$	2	4	6	8	10	14	10	10	10	2
$\rho$	0,5						0,1	0,8	0,9	0,5
$\Delta t$	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,03	0,005 0,002		0,10

TABELA 2.3

Nº DO USUÁRIO	TEMPO ENTRE CHEGADAS	TEMPO DE SERVIÇO	TEMPO TOTAL ENTRE CHE- GADAS	TEMPO TOTAL DE ESPERA	TEMPO TOTAL OCIOSO	COMPRIMENTO DA FILA	TEMPO ABSOLUTO	TEMPO DE ESPERA DE CADA USUÁRIO
.	.	.	.	.	.	.	.	.
642	0,539	0,001	700,279	10,749	622,125	0	699,811	0,000
643	1,740	0,039	702,019	10,749	622,625	0	700,360	0,000
644	0,055	0,198	702,279	10,899	624,322	1	702,258	0,149
645	0,203	0,187	704,781	11,049	624,322	1	702,457	0,149
646	2,502	0,049	704,781	11,049	624,322	0	702,507	0,000
647	0,875	0,065	705,657	11,049	626,619	0	704,904	0,000
648	0,143	0,367	706,893	11,449	627,417	2	706,102	0,399
649	0,158	0,174	706,893	11,649	627,417	1	706,302	0,199
650	0,934	0,440	706,893	11,649	627,417	0	706,751	0,000
651	6,465	0,091	713,358	11,649	627,567	0	707,001	0,000
652	0,126	0,163	713,791	11,749	633,958	1	713,591	0,099
653	0,307	0,181	713,791	11,749	633,958	0	713,791	0,000
654	0,149	0,162	714,013	11,799	634,008	1	714,040	0,049
655	0,072	0,001	715,183	11,849	634,008	1	714,090	0,049
656	1,270	0,043	715,183	11,849	634,008	0	714,140	0,000
657	0,774	0,076	715,957	11,849	635,056	0	715,289	0,000
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.

TABELA 2.4

RESULTADOS DA SIMULAÇÃO COM OS SEGUINTE PARÂMETROS:

$$\lambda = 1.0$$

$$\mu = 10.0$$

$$\Delta t = 0.05$$

$$\rho = 0.1 \quad N = \text{nº de usuários} = 2100$$

## INFLUÊNCIA DA ALEATORIEDADE NOS RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

### CAPÍTULO III

#### 3.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo estudaremos a influência da aleatoriedade dos números gerados na simulação, nos resultados obtidos quando de sua execução, a fim de obtermos informações que possibilitem optar por um determinado gerador de números aleatórios, quando nos dispusermos a utilizar a técnica da simulação visando a obtenção de bons resultados. Para isso, modificaremos o processo de geração de números aleatórios utilizado na simulação, de tal forma a obtermos sequências de números de diferentes graus de aleatoriedade.

Isso porque, em virtude do período do gerador aleatório (que limita a sequência gerada até que esta se repita), ser finito, não podemos falar de sequência completamente aleatória. Ao invés disso, referir-nos-emos a tais sequências como pseudo-aleatórias, cada uma com um certo grau de aleatoriedade.

Para determinar o grau de aleatoriedade das sequências geradas, utilizaremos dois dos mais conhecidos entre vários tipos de testes estatísticos: o teste de Kolmogorov - Smirnov (teste - KS) e o teste quiquadrado (teste -  $\chi^2$ ), dos quais uma breve descrição será apresentada. Apresentaremos também, os resultados da aplicação desses testes às sequências referentes aos tempos entre-chegadas e de serviço dos usuários no sistema, gerados durante a simulação.



Finalmente, inferiremos a influência da aleatoriedade das sequências geradas, nos resultados da simulação, através da comparação destes, com resultados teóricos conhecidos, tempo em que estabeleceremos a precisão dos resultados, estimando os erros neles cometidos, quando do uso dos diferentes processos de geração dos números aleatórios.

### 3.2 - O GERADOR DE NÚMEROS ALEATÓRIOS

O gerador de números aleatórios utilizado neste trabalho é do tipo congruencial linear, isto é, obedece à seguinte relação:

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \pmod{m}; \quad n \geq 0 \quad (3.1)$$

onde:

$X_0 \geq 0$  é o valor inicial,

$a \geq 0$  é o multiplicador,

$c \geq 0$  é o incremento,

$m > X_0, m > a, m > c$  é o módulo.

No nosso caso, tem-se:

$$c = 0, \quad a = 899 \quad e \quad m = 32768 (=2^{15}) \quad (3.2)$$

de modo que

$$X_{n+1} = (899 X_n) \pmod{32768}. \quad (3.3)$$

Num gerador de números aleatórios do tipo congruencial linear como dado em (3.1) em que o incremento  $c$  é zero, deve-se ter  $X_n$  relativamente primo a  $m$  para todo  $n$ , vez que tal condição limita o comprimento do período\* do gerador.

Resta-nos então, escolher convenientemente o valor inicial  $X_0$ , de tal forma a preservar a condição supracitada.

Inspecionando o livro do Pacitti<sup>8</sup>, verificamos que, usualmente, ao se utilizar o gerador dado por (3.3) é escolhido o valor inicial  $X_0=1$ . Mais tarde verificamos (através dos testes de aleatoriedade apresentados nas seções seguintes) que as sequências obtidas a partir de tal valor inicial podem ser consideradas como razoavelmente aleatórias. De (3.3) deduzimos que um valor impróprio para  $X_0$  no sentido de satisfazer a condição acima referida é escolher um valor *par* para  $X_0$ , o que confirmamos dos resultados da aplicação dos testes de aleatoriedade referidos acima às sequências obtidas de (3.3) com  $X_0=6$ .

Em vista do acima exposto, utilizaremos na simulação o gerador dado por (3.3) com  $X_0=1$  para obter sequências que denominaremos tipo A, e com  $X_0=6$  para obter sequências que denominaremos tipo B.

### 3.3 - TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV (teste - KS)

Consideremos uma amostra de  $n$  elementos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , retirada de uma população cuja função distribuição de probabilidades,  $H(x)$ , é conhecida. Nesse caso, podemos avaliar o grau de aleatoriedade da sequência  $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$  através do teste KS. (ver Knuth<sup>3</sup> - Vol. 2.)

---

\* Informações detalhadas sobre geração de números aleatórios poderão ser encontradas no livro do Knuth<sup>3</sup> - vol. 2.

Para isso, deve-se proceder inicialmente à determinação da função distribuição de probabilidades empírica  $H_n(x)^*$ , da amostra, onde

$$H_n(x) = \frac{\text{número de } X_i\text{'s que são } \leq x}{n} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

(3.4)

Essencialmente, o teste - KS baseia-se na diferença entre  $H(x)$  e  $H_n(x)$ , e no cálculo das seguintes estatísticas:

$$K_n^+ = \sqrt{n} \max_{-\infty < x < \infty} [H_n(x) - H(x)] ; \quad (3.5)$$

$$K_n^- = \sqrt{n} \max_{-\infty < x < \infty} [H(x) - H_n(x)] . \quad (3.6)$$

Um gerador aleatório fraco dará funções distribuições de probabilidades empíricas que não se aproximam suficientemente bem de  $H(x)$ .

\* Uma maneira de fácil implementação para obter  $H_n(x)$  é:

- passo 1 - rearranjar a sequência em ordem crescente, de modo a se ter  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ . (Eficientes algoritmos de ordenação - "sorting" - poderão ser encontrados no Knuth<sup>3</sup> - Volume 3. Aqui utilizamos o método denominado "Heapsort").
- passo 2 - utilizar a equação (3.4).

O desvio máximo entre  $H_n(x)$  e  $H(x)$  é medido por  $K_n^+$  quando  $H_n(x)$  é maior que  $H(x)$ , e por  $K_n^-$  quando  $H_n(x)$  é menor que  $H(x)$ .

Uma vez obtidas as estatísticas  $K_n^+$  e  $K_n^-$ , dadas por (3.5) e (3.6), respectivamente, consultamos uma tabela de valores selecionados da distribuição de  $K_n^+$  e  $K_n^-$  (que chamaremos Tabela - KS - ver Apêndice), para verificar quão significantes são os valores calculados para tais estatísticas.

Detalhes sobre como consultar a tabela, poderão ser encontrados na referência acima citada.

Conforme adiantamos no capítulo I, os tempos entre-chegadas e de serviço dos usuários no sistema, são simulados por números pseudo-aleatórios gerados durante a execução da simulação. A seguir, apresentamos os resultados da aplicação do teste - KS a tais números (ver Tabelas 3.1 e 3.2).

### 3.4 - TESTE QUI-QUADRADO (teste - $\chi^2$ )\*

Consideremos a sequência de números  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ), obtida de um certo gerador de números aleatórios, e admitamos que cada um dos termos da sequência esteja compreendido em uma de  $k$  categorias (ou classes).

Seja  $p_s$  a probabilidade que cada elemento da sequência esteja compreendido na classe  $s$ , e seja  $y_s$  o número observado de vezes que os elementos da sequência caíram na classe  $s$ .

O teste -  $\chi^2$  consiste no cálculo da estatística.

$$V = \sum_{1 \leq s \leq k} \frac{(y_s - np_s)^2}{np_s} \quad (3.7)$$

---

\* Os programas referentes aos testes KS e  $\chi^2$  podem ser encontrados no Apêndice.

e na seguinte questão: o que constitui um razoável valor de  $V$ ? A resposta, obtém-se consultando uma tabela de valores da "distribuição qui-quadrada com  $v$  graus de liberdade" (que chamaremos tabela -  $\chi^2$  - ver Apêndice) para vários valores de  $v$ .

Detalhes sobre como consultar a tabela poderão ser encontrados em Knuth<sup>3</sup> (vol. 2), Kreyszig<sup>4</sup>.

Da aplicação do teste -  $\chi^2$  às sequências tipo A e tipo B, geradas na simulação, referentes aos tempos entre-chegadas e de serviço dos usuários no sistema, obtivemos os resultados mostrados nas tabelas 3.3. e 3.4., respectivamente.

### 3.5 - ALGUNS RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

A fim de avaliarmos a influência do fenômeno da aleatoriedade na eficiência da simulação, mostramos nas tabelas 3.5 e 3.6, resultados da simulação referentes ao número médio de usuários no sistema e ao tempo médio de espera dos usuários na fila, respectivamente; resultados esses, obtidos inicializando o  $X_0$  no gerador utilizado (dado por (3.3.)) com os valores  $X_0 = 1$  e  $X_0 = 6$ .

### 3.6 - OBSERVAÇÕES

Dos resultados mostrados nas referidas tabelas, concluímos que, de modo geral, os resultados da simulação serão tão mais precisos quanto maior for o grau de aleatoriedade das sequências de números geradas durante sua execução.

Aconselha-se então, que antes de proceder-se à implementação da simulação, deve-se escolher um gerador de nú

meros aleatórios relativamente bom, no sentido de atender à precisão desejada para os resultados da simulação.

Para a escolha de um bom gerador indicamos o seguinte procedimento:

*etapa 1:* escolhe gerador

*etapa 2:* implementa e obtém sequências de números

*etapa 3:* procede a aplicação de alguns testes estatísticos\* (escolhendo os melhores, no sentido de eficiência e de fácil implementação).

*etapa 4:* a sequência "passou" em todos os testes?

Se sim, o gerador escolhido pode ser classificado como relativamente bom e pode ser usado na simulação. Caso contrário volta a *etapa 1* até que o gerador escolhido atenda às restrições pre-especificadas.

No capítulo seguinte, ao discutirmos sobre o estado estacionário do processo na simulação, condição necessária para a comparação dos resultados ali obtidos com resultados teóricos, mostraremos a influência da aleatoriedade dos números gerados durante a simulação, no tempo absoluto necessário para o sistema atingir o estado estacionário.

---

\* Se uma sequência tem procedimento aleatório com respeito aos testes  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , não podemos garantir que, em geral, esse procedimento aleatório seja preservado num teste  $T_{n+1}$ , ainda que cada teste aplicado comprove cada vez mais a aleatoriedade da sequência.

Tal assunto tem se constituído como estudo de inumeros pesquisadores.

1 n	2 $\Delta t$	3 $\lambda$	4 $\mu$	5 SEQUÊNCIAS TIPO A		6 RESULTADOS A	7 SEQUÊNCIAS TIPO B		8 RESULTADOS B
				$K_n^-$	$K_n^+$		$K_n^-$	$K_n^+$	
2100	0,02	1	2	0,6679	0,9871	(V, VI)	0,1474	0,7857	(IV, V)
2100	0,02	2	4	0,8003	0,9424	(V, VI)	0,1712	0,6047	(IV, V)
2100	0,02	3	6	0,7690	0,5932	(IV, V)	0,1546	0,4782	(III, IV)
2100	0,02	4	8	0,8345	0,4852	(V, VI)	0,2504	0,3789	(III, IV)
2100	0,02	5	10	0,9972	0,3107	(V, VI)	0,4808	0,3232	(III, IV)
2100	0,02	7	14	0,9895	0,0925	(V, VI)	0,3571	0,4127	(III, IV)
2100	0,08	1	10	0,8537	0,4244	(V, VI)	0,2234	0,0810	(II, III)

TABELA 3.1

SEQUÊNCIAS TESTADAS: TEMPOS ENTRE-CHEGADAS DOS USUÁRIOS  
NO SISTEMA.

1 n	2 $\Delta t$	3 $\lambda$	4 $\mu$	5 SEQUÊNCIAS TIPO A		6 RESULTADOS A	7 SEQUÊNCIAS TIPO B		8 RESULTADOS B
				$K_n^-$	$K_n^+$		$K_n^-$	$K_n^+$	
2100	0,02	1	2	0,4767	0,4747	(III, IV)	0,6931	0,1648	(IV, V)
2100	0,02	2	4	0,4733	0,5061	(III, IV)	0,4967	0,1667	(III, IV)
2100	0,02	3	6	0,7817	0,2752	(IV, V)	0,4040	0,2891	(III, IV)
2100	0,02	4	8	0,0799	0,7224	(IV, V)	0,3825	0,3774	(III, IV)
2100	0,02	5	10	0,0726	0,8097	(IV, V)	0,1736	0,4637	(III, IV)
2100	0,02	7	14	0,0697	0,9487	(V, VI)	0,2593	0,3468	(II, III)
2100	0,08	1	10	0,0905	0,5979	(IV, V)	0,0334	0,3421	(zero)

TABELA 3.2

SEQUÊNCIAS TESTADAS: TEMPOS DE SERVIÇO DOS USUÁRIOS NO  
SISTEMA.

OBSERVAÇÃO: Em virtude do critério essencialmente relativo na classificação de uma sequência quanto ao seu grau de aleatoriedade, limitaremos a enquadrar os resultados do teste - KS (Tabelas 3.1 e 3.2 - colunas 6 e 8) e do teste -  $\chi^2$  (seção seguinte - Tabelas 3.3 e 3.4 - colunas 7 e 9) nas diversas faixas de significância mostradas nas respectivas tabelas. (Ver Apêndice).

As figuras 3.1 e 3.2 mostram as distribuições de probabilidades empíricas, obtidas de sequências tipo A e tipo B, respectivamente, e a distribuição teórica do tempo de serviço para o caso  $\lambda = 5$ ,  $\mu = 10$ ,  $\Delta t = 0.02$  e  $n = 2100$ .

1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	$\Delta t$	$\lambda$	$\mu$	Nº GRAUS DE LIBERDADE.	SEQUÊNCIAS DO TIPO A V	RESULTADO A	SEQUÊNCIAS DO TIPO B V	RESULTADO B
2100	0,02	1	2	150	98,34	(zero)	51,32	(zero)
2100	0,02	2	4	75	54,19	(II, III)	24,80	(zero)
2100	0,02	3	6	50	34,33	(I, II)	16,67	(zero)
2100	0,02	4	8	42	30,37	(II, III)	14,25	(zero)
2100	0,02	5	10	37	31,37	(III, IV)	13,73	(zero)
2100	0,02	7	14	32	20,51	(II, III)	13,89	(I, II)
2100	0,08	1	10	37	24,12	(II, III)	2,07	(zero)

TABELA 3.3

SEQUÊNCIAS TESTADAS: tempos entre-chegadas dos usuários no sistema.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	$\Delta t$	$\lambda$	$\mu$	Nº GRAUS DE LIBERDADE.	SEQUÊNCIAS DO TIPO A V	RESULTADO A	SEQUÊNCIAS DO TIPO B V	RESULTADO B
2100	0,02	1	2	75	40,46	(zero)	24,61	(zero)
2100	0,02	2	4	42	22,53	(I, II)	16,35	(zero)
2100	0,02	3	6	32	21,05	(II, III)	10,28	(zero)
2100	0,02	4	8	25	13,03	(I, II)	9,52	(zero)
2100	0,02	5	10	19	14,75	(III, IV)	4,23	(zero)
2100	0,02	7	14	19	13,34	(III, IV)	5,78	(zero)
2100	0,08	1	10	4	2,03	(III, IV)	0,13	(zero)

TABELA 3.4

SEQUÊNCIAS TESTADAS: tempos de serviço para os usuários do sistema.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
 Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
 Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
 Rua Aprigio Veloso, 882 - Tel (083) 321-7222-R 355  
 58.100 - Campina Grande - Paraíba



n	$\Delta t$	$\lambda$	$\mu$	$\rho$	RESULTADO SIMULAÇÃO		RESULTADO TEÓRICO	ERRO RELATIVO		
					CHAVE INICIAL. $X_0=1$	CHAVE INICIAL. $X_0=6$		$E_A$	$E_B$	$E_B/E_A$
2100	0,02	1	2	0,5	1,03476	1,20857	1,00000	3,47%	20,85%	6
2100	0,02	2	4	0,5	1,04428	1,07904		4,42%	7,90%	2
2100	0,02	3	6	0,5	1,00857	1,14571		0,85%	14,57%	17
2100	0,02	4	8	0,5	0,97523	1,09952		2,47%	9,95%	4
2100	0,02	5	10	0,5	0,93857	1,02619		6,14%	2,61%	0.4
2100	0,02	7	14	0,5	1,06857	1,07380		6,85%	7,38%	1
2100	0,08	1	10	0,1	0,09952	0,09380	0,11111	10,43%	15,58	2

TABELA 3.5

Resultados referentes ao número médio de usuários no sistema a partir de seqüências de diferentes graus de aleatoriedade.

n	$\Delta t$	$\lambda$	$\mu$	$\rho$	RESULTADO SIMULAÇÃO		RESULTADO TEÓRICO	ERRO RELATIVO		
					CHAVE INICIAL. $X_0=1$	CHAVE INICIAL. $X_0=6$		$E_A$	$E_B$	$E_B/E_A$
2100	0,02	1	2	0,5	0,51693	0,64047	0,50000	3,38%	28,09%	8
2100	0,02	2	4	0,5	0,26826	0,28221	0,25000	7,30%	12,88%	2
2100	0,02	3	6	0,5	0,17819	0,21206	0,16666	6,92%	12,88%	4
2100	0,02	4	8	0,5	0,13109	0,15203	0,12500	4,87%	21,62%	4
2100	0,02	5	10	0,5	0,10067	0,10997	0,09999	0,68%	9,98%	15
2100	0,02	7	14	0,5	0,08772	0,08614	0,07142	22,82%	20,61%	1
2100	0,08	1	10	0,1	0,01474	0,01329	0,01111	32,67%	19,62%	0.6

TABELA 3.6

Resultados referentes ao tempo médio de espera dos usuários na fila, a partir de seqüências de diferentes graus de aleatoriedade.

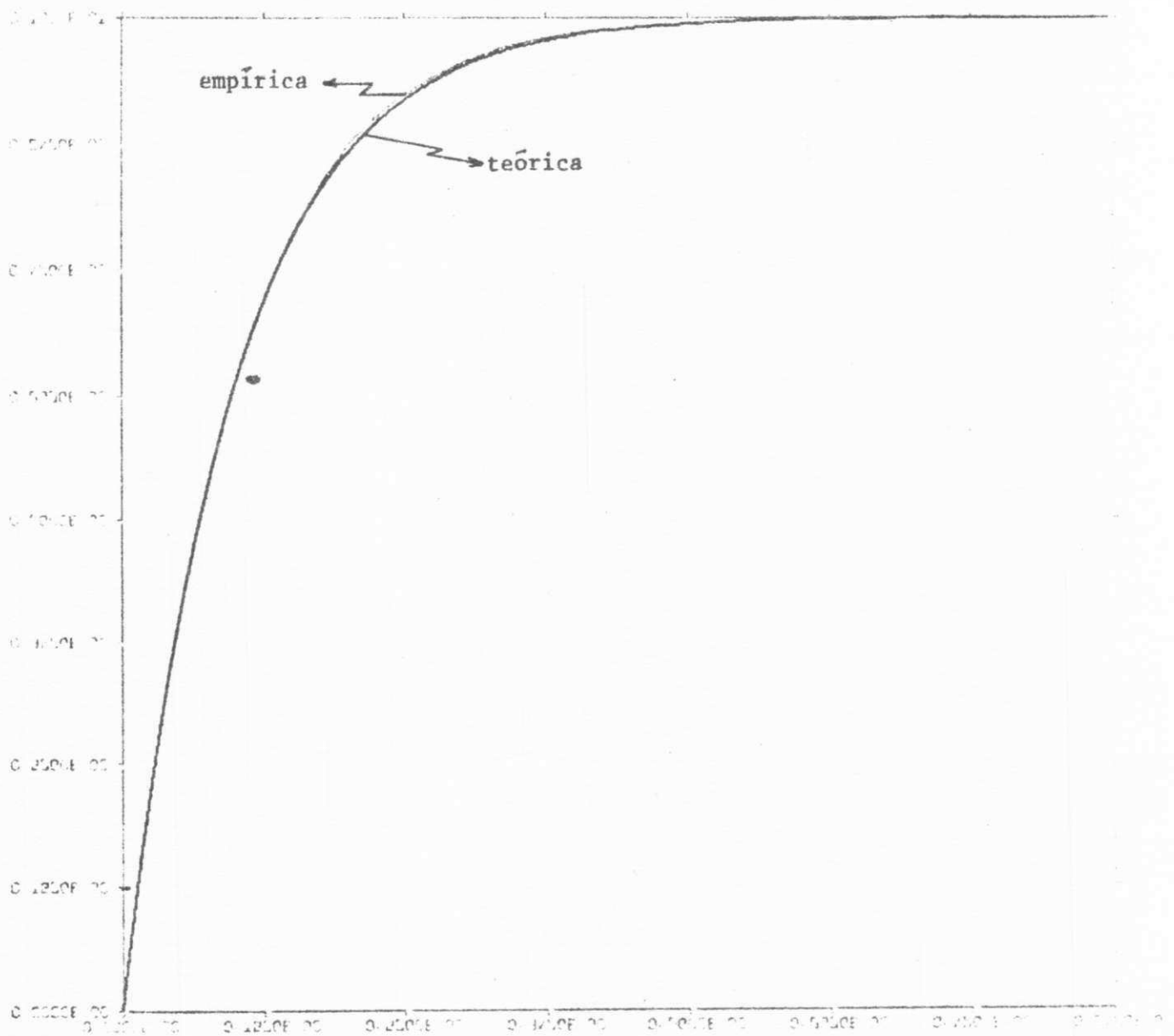


FIGURA 3.1  
DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES PARA O TEMPO DE SERVIÇO  
C/SEQUÊNCIAS TIPO A

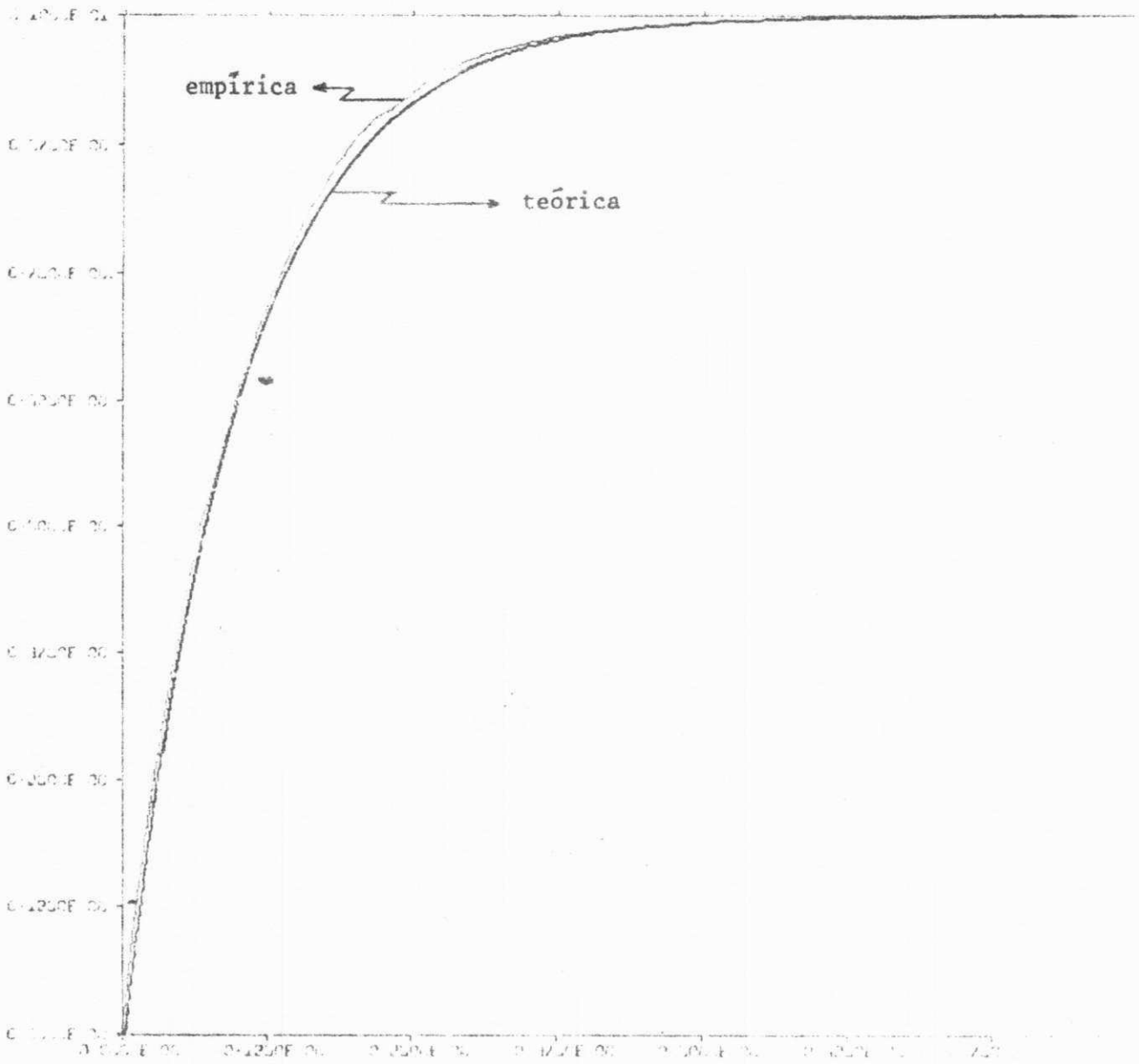


FIGURA 3.2

DISTRIBUIÇÃO DE PRÓBABILIDADES PARA O TEMPO DE SERVIÇO  
C/SEQUÊNCIAS TIPO B

#### 4.1 - INTRODUÇÃO

Consideremos que, após o decorrer de um período de tempo  $t$ , a probabilidade de se encontrar  $n$  usuários no sistema seja  $P_n(t)$ , onde a notação enfatiza que esta é uma função do período de tempo considerado. Não nos é difícil deduzir, que para grandes valores de  $t$ , essa probabilidade tenderá a assumir um valor constante, isto é, independente do tempo, quando então indicá-la-emos por  $P_n$ . Quando isso acontece, dizemos que o sistema atingiu o estado estacionário.

Com o propósito de estimarmos não só a validade do nosso modelo, como também a eficiência da técnica de simulação na resolução de problemas de filas, investigaremos neste capítulo, se o comportamento do modelo simulador, para grandes valores do tempo de simulação, tende ao estado estacionário do sistema simulado (o M/M/1 (N))

Inicialmente, estabeleceremos o sistema de equações diferenciais que rege o comportamento do M/M/1 (N), do qual forneceremos sua solução no estado estacionário e os resultados teóricos referentes ao número médio de unidades (usuários) no sistema e ao tempo médio dos usuários, na fila.

Conforme mostraremos na seção 4.3., um índice para o estado estacionário do sistema na simulação, será o tempo absoluto, vez que este corresponde ao tempo de observação,  $t$ , do sistema real.

A fim de avaliarmos o tempo de simulação necessário para que o sistema atinja o estado estacionário, investigaremos o comportamento do número médio de usuários no sistema com relação ao tempo absoluto, pois como mostraremos, teoricamente, este tende a um valor constante, para grandes valores do tempo.

Finalmente, estudaremos a influência de simulação da aleatoriedade dos números gerados no tempo necessário para o sistema atingir o estado estacionário.

#### 4.2 - EQUAÇÕES DO M/M/1 (N)

Sejam,  $\lambda$  a taxa média de chegadas dos usuários ao sistema,  $\mu$  a taxa média de serviço para os usuários do sistema e  $P_n(t)$  a probabilidade de se encontrar  $n$  usuários no sistema no tempo  $t$ . Considerando que num intervalo de tempo  $\Delta t$ , a probabilidade da ocorrência de uma chegada no sistema é  $\lambda\Delta t$ , e de uma saída,  $\mu\Delta t$ ; a probabilidade de se encontrar  $n$  usuários no sistema no tempo  $t+\Delta t$  será:

$$P_n(t+\Delta t) = (\lambda\Delta t)P_{n-1}(t) + (\mu\Delta t)P_{n+1}(t) + [(1-\lambda-\mu)\Delta t]P_n(t); \quad n > 0$$

$$P_0(t+\Delta t) = [(1-\lambda)\Delta t]P_0(t) + (\mu\Delta t)P_1(t). \quad n = 0 \quad (4.1)$$

∴

$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = P_{n-1}(t) + P_{n+1}(t) - (\lambda + \mu)P_n(t); \quad n > 0$$

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t). \quad n = 0$$

No limite quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dP_n(t)}{dt} &= \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) - (\lambda + \mu)P_n(t); \quad n > 0 \\ \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t); \quad n = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

O sistema de equações diferenciais (4.2) rege o comportamento do M/M/1(N). Suas soluções dependentes do tempo são muito difíceis\* de obter, dependendo da complexidade de  $P_n(t)$ . Todavia, quando  $t \rightarrow \infty$ , condição do estado estacionário, tem-se  $P_n(t) \rightarrow P_n$ . Nesse caso, obtemos de (4.2):

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{dt} = 0 &= \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} - (\lambda + \mu)P_n; \quad n > 0 \\ \frac{dP_0}{dt} = 0 &= -\lambda P_0 + \mu P_1; \quad n = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

e facilmente encontramos (ver Apêndice) que:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right); \quad \lambda < \mu \quad (4.4)$$

---

\* Para tal, é essencial a determinação das probabilidades de transição entre os diversos estados do sistema. Apesar de sua complexidade, esse problema já se encontra resolvido. Detalhes sobre o mesmo, poderão ser encontrados em qualquer livro avançado sobre teoria de filas. (Ver Cox<sup>5</sup>, Takács<sup>6</sup>, Saaty).

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad (4.5)$$

$$\tilde{\tau}_w = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (4.6)$$

onde  $L$  e  $\tilde{\tau}_w$  referem-se, respectivamente, ao número médio de usuários no sistema e ao tempo médio de espera dos usuários na fila. Lembrando que  $\lambda/\mu = \rho$  (densidade de tráfego), as equações (4.4) e (4.5) podem ser reescritas como:

$$P_n = \rho^n (1 - \rho); \quad (4.4a)$$

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad (4.5a)$$

#### 4.3 - O TEMPO DE SIMULAÇÃO

Como se vê do fluxograma da figura 2.1, o crescimento do tempo absoluto ou tempo de simulação, é função do número de vezes em que o controle da simulação é transferido para as caixas 8 e 10 do referido fluxograma, quando inevitavelmente o tempo absoluto será incrementado na caixa 15. Essas transferências de controle são funções da ordem de grandeza dos tempos entre-chegadas e de serviço gerados na simulação, que por sua vez, dependem dos parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$  de suas respectivas distribuições de probabilidades. Assim sendo, tornou-se-nos difícil estabelecer, a priori, um tempo máximo de simulação para cada conjunto de dados implementado. Ao invés dis-

so, controlamos a simulação fixando o número de usuários a serem atendidos na estação de serviço.

Da implementação do modelo com o número de usuários fixado em 42000, caso em que o tempo de simulação atingiu valores da ordem de 8500 uts\* para o caso  $\lambda=5, \mu=10, \rho=0,5, \Delta t=0,02$ ; verificamos que, com o crescimento do tempo de simulação, o número médio de usuários no sistema ali obtido, tende ao valor teórico dado por (4.5a). (Ver FIGURA 4.1).

A tabela 4.1 mostra os valores do número médio de usuários no sistema para o caso  $\lambda=5, \mu=10, \Delta t=0.05$ , obtidos da implementação do modelo com NMAX=42000 usuários, para diversos valores de N(tamanho das amostras consideradas).

**OBSERVAÇÃO:** Nesse ponto, aproveitamos para estudar a influência da aleatoriedade dos números gerados na simulação, no tempo absoluto necessário para o sistema atingir o estado estacionário.

Tal influência é mostrada na figura 4.2.

Para obter esse resultado implementamos o modelo com o seguinte conjunto de dados:

$\lambda=5, \mu=10, \rho=0.5, \Delta t=0.02$ , número de usuários: 42000

para o gerador aleatório referido no capítulo 3 com a chave inicial assumindo os valores  $X_0=1$  e  $X_0=6$ .

Como vemos, nesse caso, o tempo de simulação necessário para o sistema atingir o estado estacionário, ou mesmo para se obter resultados da simulação compatíveis com resultados referentes ao sistema real, tende a ficar demasiadamente grande.

---

\* uts  $\equiv$  unidade de tempo de simulação



1	2	3	4	5	6			
n	TEMPO DE SIMULAÇÃO (uts)	MEDIA DE SIMULAÇÃO	MEDIA TEORICA	DESVIO	INTERVALO DE CONFIANÇA P/ A MÉDIA.			
2100	440,26	0,93857	1.00000	0,05586	de	0,88270	a	0,99443*
4200	856,71	0,98095		0,03994	de	0,94100	a	1,02089
6300	1283,62	1,01349		0,03418	de	0,97930	a	1,04768
8400	1698,21	1,00726		0,02906	de	0,97819	a	1,03633
10500	2125,19	1,00800		0,02628	de	0,98171	a	1,03428
12600	2540,97	1,01261		0,02397	de	0,98864	a	1,03659
14700	2963,19	1,01483		0,02218	de	0,99264	a	1,03701
16800	3384,05	1,01482		0,02070	de	0,99411	a	1,03552
18900	3804,48	1,01428		0,01950	de	0,99477	a	1,03379
21000	4225,54	1,01557		0,01845	de	0,99711	a	1,03402
23100	4643,12	1,02086		0,01769	de	1,00316	a	1,03856**
25200	5068,41	1,01250		0,01681	de	0,99568	a	1,02931
27300	5486,03	1,01703		0,01626	de	1,00076	a	1,03329**
29400	5915,09	1,00908		0,01555	de	0,99352	a	1,02463
31500	6331,03	1,01276		0,01511	de	0,99764	a	1,02787
33600	6762,59	1,00633		0,01454	de	0,99179	a	1,02087
35700	7175,44	1,01086		0,01419	de	0,99667	a	1,02505
37800	7607,00	1,00452		0,01370	de	0,99081	a	1,01823
39900	8020,01	1,00874		0,01340	de	0,99533	a	1,02215
42000	8452,02	1,00207		0,01299	de	0,98807	a	1,01506

TABELA 4.1

NÚMERO MÉDIO DE USUÁRIOS NO SISTEMA VERSUS TEMPO DE SIMULAÇÃO

\* Na realidade, ao invés de  $S_{x_i}$  em (4.7) dever-se-ia usar o desvio padrão,  $\sigma$ , da população (no nosso caso, desconhecido). Todavia, para grandes amostras, sua variância  $S_x^2$  aproxima-se relativamente bem da variância da população,  $\sigma^2$ . Isto justifica o resultado da 1a. linha da coluna 6 da tabela 4.1.

O intervalo de confiança neste caso, foi obtido de:  $\bar{x} \pm 1,96 S_x/\sqrt{n}$ .

\*\* Em virtude do parâmetro  $c$  ser igual a zero na equação 3.1 do gerador aleatório utilizado neste trabalho, não nos é possível conhecer o período do gerador. Todavia podemos garantir que é menor que o módulo ( $m = 32768$ , no caso). Em vista disso, o fato dos intervalos de confiança referentes às amostras de 23100 e 27300 usuários não incluírem a média te

OBSERVAÇÃO: Apesar das flutuações das médias da simulação, apresentadas na coluna 4 da tabela acima, com relação à média teórica, verificamos que seu desvio diminui com o aumento de N (ou do tempo de simulação), o que significa dizer, que com o aumento de N, a dispersão dos valores das amostras com relação a média teórica diminui.

O desvio foi calculado pela seguinte expressão:

$$d = 1,96 S_{x_i} / \sqrt{n_i} \quad (4.7)$$

onde  $S_{x_i}$  = variância da amostra  $i$

$n_i$  = tamanho da amostra  $i$

1,96 = multiplicador referente ao nível de confiança 0,95 (95%).

---

\*\* - (Continuação) - órica, deve-se possivelmente a um pequeno grau de aleatoriedade das seqüências referentes a tais amostras. Além disso lembrar que a simulação é um experimento *probabilístico*.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
 Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
 Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
 Rua Aprígio Veloso, 832 Tel (083) 321-7222-R 355  
 58.100 - Campina Grande - Paraíba

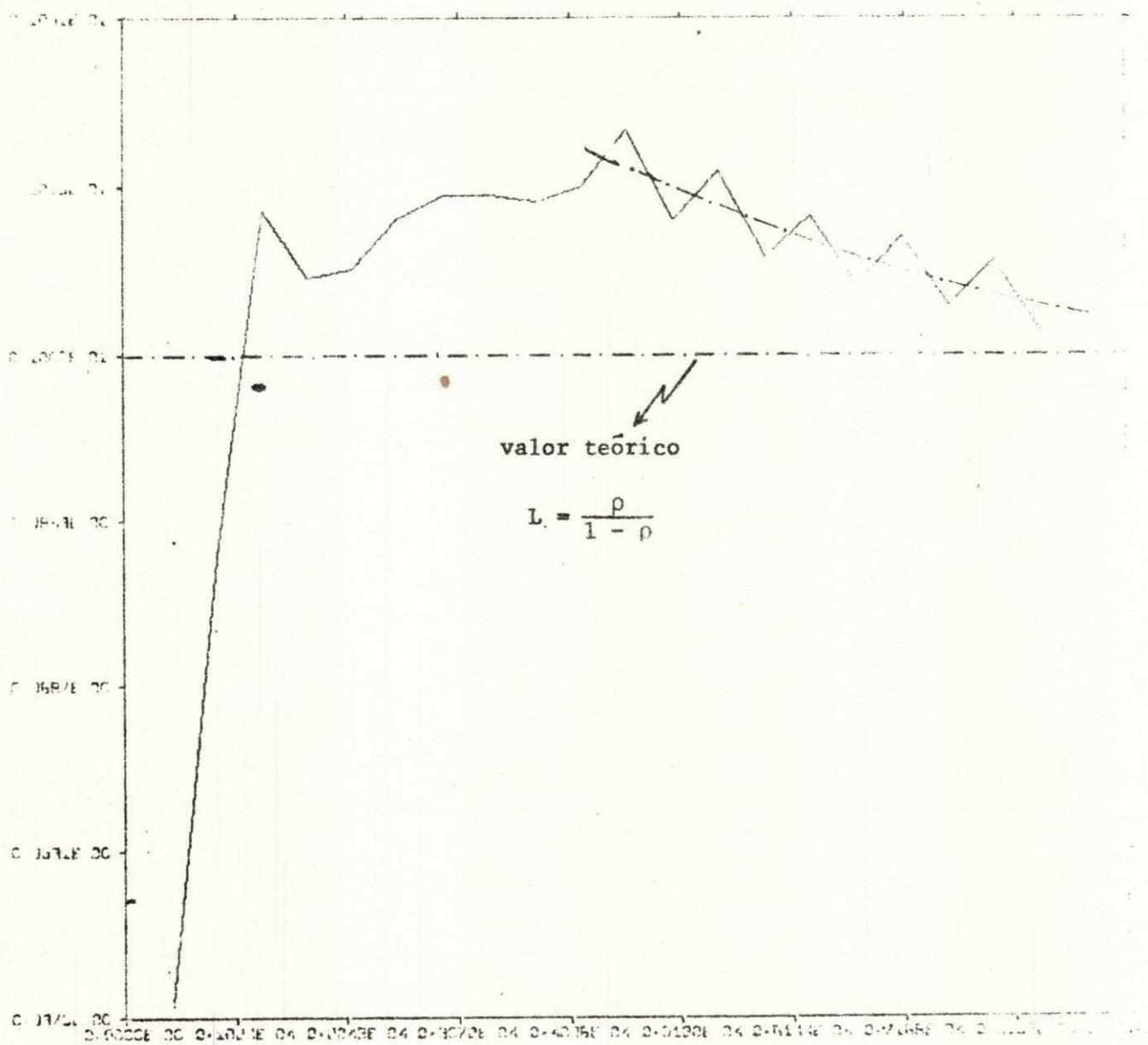


FIGURA 4.1

Número médio de usuários no sistema versus tempo de simulação

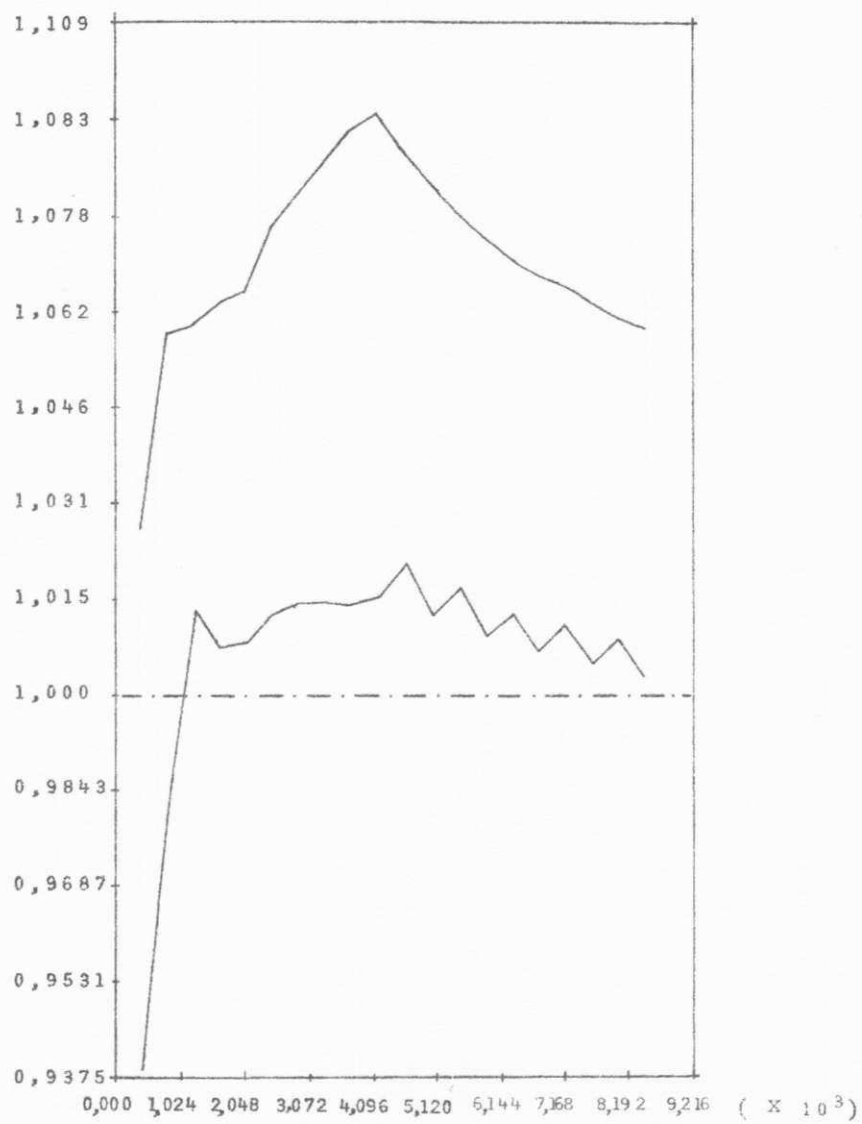


FIGURA 4.2  
INFLUENCIA DA ALEATORIEDADE NA SIMULAÇÃO

## DIMENSIONAMENTO DO "QUANTUM" DE TEMPO DE SIMULAÇÃO

CAPÍTULO V

### 5.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo abordaremos o problema do dimensionamento do "quantum" ou unidade de tempo,  $\Delta t$ , da simulação. Inicialmente, destacaremos sua importância na simulação, no sentido de que esta retrate de maneira fiel ao sistema real, de modo a conduzir a resultados confiáveis. Em seguida, apresentaremos os resultados da simulação referentes ao número médio de usuários no sistema e ao tempo médio de espera dos usuários na fila, para diferentes combinações de valores dos parâmetros: taxa média de chegadas,  $\lambda$ ; taxa média de serviço,  $\mu$ ; unidade de tempo de simulação,  $\Delta t$ .

Uma comparação desses resultados com resultados teóricos é feita, e em cada caso, estimamos o erro percentual relativo cometido. Com isso, teremos uma idéia quantitativa do relacionamento entre os parâmetros acima citados.

### 5.2 - INFLUÊNCIA DE $\Delta t$ NA SIMULAÇÃO

Como vemos das caixas 11, 19 e 20 no fluxograma do modelo (apresentado na figura 2.1), o tempo real disponível na simulação para um usuário na estação de serviço, depende não apenas do tempo de serviço,  $T_S$ , para ele gerado (caixa 11), como também do valor de DELT ( $\Delta t$ ).

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
Rua Aprígio Veloso, 882 - Tel. (083) 321-7222-R 355  
58.100 - Campina Grande - Paraíba

É muito comum a idéia de que o "quantum" de tempo,  $\Delta t$ , deve ser o menor possível. Todavia, como vemos da caixa 19 no referido fluxograma, pode ocorrer que, se  $\Delta t$  for muito pequeno, o usuário demore mais que o necessário no sistema, em virtude do aumento no tempo de espera do usuário na estação de serviço. Para isso, basta apenas que o tempo de serviço que lhe for gerado (caixa 11) seja bem maior que  $\Delta t$ .

Por outro lado, se  $\Delta t$  for muito grande, poderá ocorrer que o usuário passe pelo sistema sem ser atendido na estação de serviço, o que evidentemente não corresponde com qualquer situação prática (normal). Para isso, basta que o tempo de serviço gerado para o usuário, seja, logo na primeira passagem pela caixa 19, menor que  $\Delta t$ . Além disso, nesse caso o tempo absoluto poderia crescer demasiadamente, e em vista do teste feito nas caixas 25 e 32, eventualmente formar-se-iam longas filas de usuários no sistema, o que possivelmente não retrata o comportamento do sistema real simulado.

Do acima exposto, concluímos que a unidade de tempo de simulação,  $\Delta t$ , interfere significativamente no estado do sistema simulador. Em vista disso, muito cuidado deve ser tomado ao dimensioná-la, a fim de se obter resultados da simulação compatíveis com os referentes ao sistema real.

### 5.3 - OBSERVAÇÕES

Por causa da dependência direta entre  $\Delta t$  e os parâmetros  $\rho$ ,  $\lambda$  e  $\mu$ , não podemos prefixar um valor de terminado para  $\Delta t$  num experimento de simulação. Via de regra, um "quantum" ótimo para um certo conjunto de valores de  $\rho$ ,  $\lambda$  e  $\mu$ , é inadequado para outro conjunto.

Até o presente, não foi estabelecida uma relação matemática entre os parâmetros  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\Delta t$ .

Em vista disso, para a determinação de combinações adequadas desses parâmetros, no sentido de obter resultados da simulação compatíveis com resultados teóricos conhecidos, procedemos heurísticamente, da seguinte maneira:

Como  $0 < \rho < 1$ , implementamos inicialmente o modelo com os parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$ , tais, que  $\rho$  assumisse diversos de seus possíveis valores entre zero e um. Em particular, a fim de avaliarmos a influência do relacionamento entre a densidade de tráfego,  $\rho$ , e a unidade de tempo de simulação  $\Delta t$ , fizemos variar  $\lambda$  e  $\mu$ , mantendo fixos os valores de  $\rho$  e  $\Delta t$ .

Feito isso, com o propósito de avaliar quão bons foram os dados inicialmente escolhidos, após a implementação do modelo com os mesmos, procedemos ao cálculo de estatísticas referentes ao número médio de usuários no sistema e ao tempo médio de espera dos usuários na fila. Os programas referentes a tais cálculos podem ser encontrados no Apêndice, cujos resultados são mostrados na tabela 5.1.

**OBSERVAÇÃO 1:** Pelo erro percentual cometido nos resultados da simulação com relação aos resultados teóricos (colunas 7 e 10 da figura 5.1.), concluímos, no que se refere ao relacionamento entre  $\rho$  e  $\Delta t$ , que o valor 0,05 inicialmente escolhido para  $\Delta t$ , torna-se demasiadamente **grande**, à medida que  $\rho$  aumenta. Além disso, vemos como característica do particular relacionamento entre  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\Delta t$ , o fato de que, ao fixarmos  $\rho$  e  $\Delta t$ , os resultados da simulação, relativamente aos resultados teóricos, pioram com o crescimento de  $\lambda$  e  $\mu$ .

Nesse ponto, já podemos concluir que  $\Delta t$  deve ser dimensionado, de maneira inversamente proporcional aos valores de  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\rho$ .

A fim de melhor caracterizar o relacionamento entre  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  e  $\Delta t$ , implementamos o modelo com novas combinações de valores desses parâmetros, dessa vez, baseados nos resultados de tabela 5.1., e após o levantamento de estatísticas referentes ao número médio de usuários no sistema e ao tempo médio de espera dos usuários na fila, obtivemos os resultados mostrados nas tabelas 5.2. e 5.3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
$\lambda$	$\mu$	$\rho$	$A t$	NÚMERO MÉDIO DE USUÁRIOS NO SISTEMA. (SIMULAÇÃO). TEÓRICO	VARIÂNCIA	ERRO PERCENTUAL RELATIVO (%)	TEMPO MÉDIO DE ESPERA DOS USUÁRIOS NA FILA (SIMULAÇÃO) TEÓRICO	VARIÂNCIA	ERRO PERCENTUAL RELATIVO (%)		
1	2	0,5	0,05	0,95523	1,00000	1,68780	4,47	0,47747	0,50000	1,20178	4,50
2	4			1,01904		2,09350	1,90	0,28167	0,25000	0,46555	12,66
3	6			1,16666		2,46928	16,6	0,22729	0,16666	0,21325	36,37
4	8			1,15285		2,52084	15,3	0,17290	0,12500	0,13758	38,32
5	10			1,33476		2,86109	33,5	0,17050	0,09999	0,10932	70,51
7	14			1,26761		2,97246	26,7	0,12179	0,07142	0,05752	70,52
1	10			0,1		0,10904	0,11111	0,12007	1,86	0,01442	0,01111
3	9	0,3	0,60000	0,50000	1,10545	20,0	0,08656	0,05555	0,05412	55,82	
8	10	0,8	17,0500	3,99999	103,406	326,25	2,09628	0,40000	5,02723	424,07	
9	10	0,9	173,304	8,99999	10,899,41	1825,6	223254	0,90000	623,7735	2380,6	

TABELA 5.1

RESULTADOS DA SIMULAÇÃO REFERENTES AO NÚMERO MÉDIO DE USUÁRIOS NO SISTEMA E AO TEMPO MÉDIO DE ESPERA DOS USUÁRIOS NA FILA.

TAMANHO DAS AMOSTRAS : 2100



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
λ	μ	ρ	A <sub>t</sub>	NÚMERO MÉDIO DE USUÁRIOS NO SISTEMA		VARIÂNCIA	ERRO PERCENTUAL RELATIVO (%)	TEMPO MÉDIO DE ESPERA DOS USUÁRIOS NA FILA		VARIÂNCIA	ERRO PERCENTUAL RELATIVO (%)	
				(SIMULAÇÃO)	TEÓRICO			(SIMULAÇÃO)	TEÓRICO			
1	2	1,5	0,02	1,03476	1,00000	1,96547	3,47	0,5169	0,50000	1,41012	3,38	
2	4			1,04428		2,07430	4,42	0,26826	0,25000	0,39608	7,30	
3	5			1,00857		1,92511	0,85	0,17819	0,16666	0,17983	6,91	
4	8			0,97523		1,81498	2,47	0,13109	0,12500	0,09966	4,87	
5	10			0,93857		1,70745	6,14	0,10067	0,09999	0,05370	0,68	
7	14			1,06857		2,28931	6,85	0,0677	0,07142	0,04040	22,82	
1	10			0,1		0,08	0,09952	0,11111	0,11443	10,43	0,0147	0,01111
3	9	0,3	0,02	0,00190	0,50000	0,84023	10,38	0,0657	0,05555	0,02910	18,...	
0,9				0,005	6,81238	8,99999	39,9792	24,30	0,67580	0,90000	1,34240	24,91
				0,001	7,92666		80,1741	11,92	0,78192		2,26575	13,12
				0,008	15,1400		173,4823	68,22	1,53074		5,14529	70,08

TABELA 5.2

RESULTADOS REFERENTES AO NÚMERO MÉDIO DE USUÁRIOS NO SISTEMA  
E AO TEMPO MÉDIO DE ESPERA DOS USUÁRIOS NA FILA.

TAMANHO DAS AMOSTRAS : 2100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
A	n	p	At	NÚMERO MÈDIO DE USUÁRIOS NO SISTEMA (SIMULACÃO - TEÓRICO)	VARIÂNCIA	ERRO PERCENTUAL RELATIVO (%)	TEMPO MÉDIO DE ESPERA DOS USUÁRIOS NA FILA (SIMULACÃO - TEÓRICO)	VARIÂNCIA	ERRO PERCENTUAL RELATIVO (%)		
1	2	0,5	0,01	0,99380	1,00000	1,94945	0,62	0,49491	0,50000	1,46462	1,02
2	4			1,03476		1,96547	3,47	0,25846	0,25000	0,35253	3,38
3	6			1,01666		1,97496	1,66	0,17093	0,16666	0,16776	2,56
4	8			1,04428		2,07430	4,42	0,13413	0,12500	0,09902	7,30
5	10			0,97095		1,72375	2,90	0,09749	0,09999	0,04920	2,50
7	14			0,98619		1,76825	1,35	0,07342	0,07142	0,02764	2,80
1	2			0,08		0,97523	1,81498	2,47	0,52438	0,50000	1,59469
8	10	0,8	0,005	4,33571	3,99999	24,7637	8,39	0,43848	0,40000	0,72007	9,62
			0,008	5,10761		38,5754	27,69	0,52987		1,12917	32,46
			0,001	3,41952		15,1086	14,51	0,33628		0,41944	15,93

FIGURA 5.3

RESULTADOS REFERENTES AO NÚMERO MÉDIO DE USUÁRIOS NO SISTEMA E AO TEMPO MÉDIO DE ESPERA DOS USUÁRIOS NA FILA.

TAMANHO DAS AMOSTRAS : 2100

OBSERVAÇÃO 2: Os resultados apresentados nas tabelas acima, inicialmente sugerem-nos que  $\Delta t$  deve ser dimensionado de maneira inversamente proporcional a  $\rho$ . Todavia, em que pese a natureza probabilística da simulação, ao observar, por exemplo, os resultados referentes ao número médio de usuários no sistema para o caso  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 2$ ,  $\rho = 0,5$ , concluímos que o relacionamento entre  $\rho$  e  $\Delta t$  é bem mais complexo do que de imediato nos parece. Isso porque, tendo em vista o valor teórico .....  $L = 1,00000$ , e tendo obtido da simulação,

$$\bar{n} = 0,95523 \text{ para } \Delta t = 0,05; \text{ (erro} = 4,47\%),$$

$$\bar{n} = 1,03476 \text{ para } \Delta t = 0,02, \text{ (erro} = 3,47\%),$$

a conclusão imediata é que para  $0,02 < \Delta t < 0,05$  deve existir um valor de  $\Delta t$  tal que  $\bar{n}$  se aproxime de  $L$  suficientemente bem, e que para  $\Delta t < 0,02$  ou  $\Delta t > 0,05$ , o valor de  $\bar{n}$  se afaste cada vez mais de  $L$ . Entretanto, isso não ocorre (ver o caso  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 2$ ,  $\rho = 0,5$  e  $\Delta t = 0,01$ )! Tal comportamento também se verifica para o caso  $\lambda = 9$ ,  $\mu = 10$ ,  $\rho = 0,9$ . (Ver tabela 5.2 ).

Apesar disso, observando a redução de aproximadamente 12 vezes do erro cometido nos resultados referentes ao número médio de usuários no sistema e ao tempo médio de espera dos usuários na fila, para o caso  $\lambda = 8$ ,  $\mu = 10$ ,  $\rho = 0,8$  ao reduzir  $\Delta t$  de 0,05 para 0,008, deduzimos que  $\Delta t$  deve diminuir com o crescimento de  $\rho$ . Dos resultados da tabela 5.3, suspeitamos que para esse caso, o quantum ótimo deve estar compreendido entre 0,001 e 0,005.

OBSERVAÇÃO 3: No que se refere à influência dos parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$  no dimensionamento de  $\Delta t$ , verificamos das tabelas acima, que em geral, fixados os valores de  $\rho$  e  $\Delta t$ , os erros cometidos nos resultados da simulação relativamente aos resultados teóricos, aumentam (coluna 7 das referidas tabelas) à medida que  $\lambda$  e  $\mu$  crescem. Dos conjuntos de dados testados com  $\rho$  fixado em 0,5, verificamos que os melhores resultados ocorreram para  $\Delta t = 0,01$ .

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
Rua Aprígio Veloso, 882 - Tel. (083) 321-7222-R 355  
58.100 - Campina Grande - Paraíba

Finalmente em virtude de ainda não contarmos com uma relação matemática entre os parâmetros  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  e  $\Delta t$ , aconselhamos que, ao se utilizar o método do exame eventual para simular determinado problema de fila, em que  $\lambda$  e  $\mu$  são definidos (e consequentemente,  $\rho$ ) proceda-se à implementação do modelo da simulação para diferentes valores de  $\Delta t$ , até que os resultados da simulação sejam compatíveis com os referentes ao sistema real dentro de um grau de precisão pré-especificado. Além disso ao dimensionar  $\Delta t$ , deve-se ter em mente, não só o valor da densidade de tráfego  $\rho$ , como também das taxas médias de chegada e saída  $\lambda$  e  $\mu$ , respectivamente.

### 6.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo descreveremos inicialmente como proceder ao planejamento de experiências de simulação de problemas de filas, após o que enunciaremos as dificuldades ali encontradas. Finalmente, mostraremos como estender a técnica a problemas de filas mais complexos.

### 6.2 - PLANEJAMENTO DE EXPERIÊNCIAS DE SIMULAÇÃO

Uma vez estabelecido que, para a resolução de determinados problemas, em particular, problemas de filas, a simulação se constitui a técnica mais viável, do ponto de vista de aplicabilidade, custo e simplicidade, a prática sugere que, em geral, o planejamento de experiências de simulação deve fundamentar-se nas seguintes etapas:

a) Formulação do problema

Nesta etapa, deve-se dar ênfase à definição precisa dos objetivos da pesquisa que se propõe fazer, antes mesmo de se começar a pensar em iniciar o planejamento de uma experiência de simulação.

Evidentemente, sendo a formulação de problemas, um processo sequencial que, em geral, requer reformulação contínua e progressiva, não podemos esperar que uma definição inicial do problema seja definitiva. Ao invés, devemos sempre suspeitar que algum detalhe foi esquecido na análise da situação em foco, vez que, quanto mais informações dela tivermos, mais condições teremos para definir não só os objetivos da pesquisa, como também a viabilidade de nela utilizarmos alguma técnica de simulação.

Conforme foi evidenciado no capítulo I, devido à complexidade matemática envolvida na resolução de problemas de filas por métodos analíticos (quando possível), a simulação parece-nos ser a técnica mais viável para a abordagem de tais problemas.

#### b) Coleta e processamento de dados reais

Fundamentalmente, esta etapa se constitui no recolhimento dos dados disponíveis do sistema em estudo, para posterior processamento. As fontes de dados para a simulação, usualmente, dependem da natureza do problema em questão; entretanto, via de regra, podem incluir amostras, experiências físicas, levantamento de campo e outras fontes de documentos (como agências do governo, organizações privadas de pesquisas, etc.).

No caso particular de problemas de filas, tais dados referem-se aos intervalos de tempo decorrentes entre as chegadas dos usuários ao sistema, aos tempos de serviço disponíveis aos usuários do sistema, ao número de estações de serviço, ao policiamento da(s) linha(s) de espera e à disciplina de atendimento aos usuários, os quais, após um processamento inicial podem ser representados por valores médios, códigos, etc.

c) Formulação de um modelo matemático.

Em geral, a formulação de um modelo matemático para uma experiência de simulação num computador, requer razoável "background" matemático. Aqui, limitar-nos-emos a relacionar algumas das dificuldades primordiais com que eventualmente se defronta o construtor do modelo, na sua tentativa de descrever matematicamente o comportamento do sistema em estudo.

1ª) - a quantificação de certas variáveis que afetam o comportamento do sistema (p.ex., a unidade de tempo da simulação,  $\Delta t$ ).

2ª) - a limitação no número de variáveis que devem ser consideradas na descrição do sistema, com vistas à capacidade do computador disponível.

3ª) - o desconhecimento de eventuais variáveis (muitas vezes, significativas) que afetem o comportamento do sistema.

4ª) - o desconhecimento das relações entre as variáveis que afetam o comportamento do sistema\*, muitas vezes, impossíveis de serem expressas sob a forma de uma ou mais equações matemáticas.

---

\* No caso de problemas de filas, o relacionamento entre as taxas médias de chegada e saída, a densidade de tráfego e a unidade de tempo de simulação.

Essas dificuldades devem ser ponderadas e analisadas, no sentido de nos conduzirem a um modelo matemático que uma vez implementado, descreva o comportamento do sistema com razoável precisão e minimize os tempos de programação e processamento.

d) Estimativa de parâmetro a partir de dados reais.

Tendo, na segunda etapa do planejamento, coletado os dados apropriados do sistema e uma vez elaborado um modelo para a simulação, devemos agora estimar valores para os parâmetros do modelo (p.ex., a taxa média de chegadas dos usuários ao sistema, o tempo médio de serviço dispensado aos usuários, etc.) e testar, através de testes estatísticos, a significância dessas estimativas.

e) Avaliação do modelo.

Essa etapa se constitui simplesmente no primeiro de uma série de testes a que o modelo da simulação deve ser submetido, antes das passagens no computador. Nesse ponto deve-se testar as suposições feitas quando da elaboração do modelo, as quais funcionarão como entradas no futuro programa de computador. Mais tarde, ao se determinar a capacidade preditiva do modelo, através da comparação dos resultados da simulação com dados históricos, ter-se-á uma melhor inferência da validade do modelo.

No caso de problemas de filas, por exemplo, uma possível suposição na elaboração do modelo é que os tempos entre-chegadas dos usuários ao sistema, obtidos na fase da coleta de dados, podem ser simulados a partir de uma certa distribuição de probabilidades. Nesse caso, parâmetros dessa distri



buição, como valor esperado, variância e outros, devem ser testados quanto a sua significância estatística, no sentido de verificar se os mesmos se adaptam aos valores correspondentes obtidos a partir dos dados reais coletados.

f) Formulação de um programa de computador.

Essa etapa tem como finalidade possibilitar-nos realizar experiências de simulação com o modelo elaborado. Basicamente, devem ser considerados:

- o porte do computador e linguagem disponíveis;
- a entrada de dados e condições iniciais;
- a geração de dados.

De suma importância na formulação de um programa para o modelo simulador é a prévia elaboração de um fluxograma do modelo, dada a sua forma auto-descritiva. Desse ponto, a codificação do programa é imediata.

g) Experimentação do modelo.

Uma vez definidas as variáveis de entrada, de saída e os parâmetros do modelo (p.ex., intervalo de tempo entre-chegadas, tempo total de espera de um usuário no sistema, taxa média de serviço, respectivamente) podemos iniciar as experimentações do modelo.

Para isso, deve-se, na medida do possível, selecionar não só valores para os dados de entrada da simulação, estabelecendo diferentes combinações de intensidade para tais valores, como também a ordem das experimentações.

h) Análise dos dados de saída da simulação.

Basicamente, esta etapa consiste na coleta e processamento dos dados provenientes da simulação, na organização de estatísticas e na interpretação dos resultados.

i) Validação do modelo da simulação.

Baseados na comparação dos resultados obtidos na etapa anterior com resultados históricos, podemos estabelecer, por exemplo, um nível de significância para a diferença entre tais resultados, com relação ao qual podemos ou não validar o modelo.

Através da comparação acima citada, podemos inferir sobre a capacidade preditiva do modelo, o que pode nos servir como índice para o julgamento de sua validação.

Finalmente, aconselhamos o máximo de atenção aos planejamento de experiências de simulação, pois como em qualquer outro tipo de planejamento, isto é fundamental no êxito do empreendimento.

Focalizando a atenção para o projeto de simulação desenvolvido neste trabalho, convém ressaltar a importância não só do processo de geração de dados como também do valor dimensionado para a unidade de tempo de simulação.

O primeiro, em que pesem as limitações dos testes estatísticos de aleatoriedade existentes, se faz notar nos resultados obtidos no capítulo III, e com muito maior intensidade na figura 4.3. Ao se aumentar a amostra de dados para a simulação (a fim de aumentar o tempo absoluto), certamente, o tamanho desta ultrapassou o comprimento do período do gerador aleatório utilizado. Em vista disso, aconselhamos que, baseados nos objetivos da pesquisa, proceda-se à escolha de um gerador aleatório que conduza a resultados dentro do nível de precisão desejado.

Com relação ao segundo, conforme ficou evidenciado no capítulo V, este interfere significativamente no comportamento do sistema, e conseqüentemente, nos resultados da simulação. Infelizmente não contamos com uma equação matemática que relacione  $\Delta t$ , a unidade de tempo de simulação, com as taxas médias de chegada e saída, e o fator de atividade do sistema, respectivamente,  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\rho$ . Tal problema fica como sugestão para pesquisas futuras.

Finalmente, mostraremos como estender a técnica da simulação para a resolução de problemas de filas mais complexos.

Como vimos no capítulo IV, um problema de fila é analiticamente estabelecido através de um sistema de equações diferenciais (equações 4.2 para o M/M/1) cuja solução existe, dependendo da complexidade de  $P_n(t)$ , a probabilidade de se encontrar  $n$  usuários no sistema no tempo  $t$ .

No caso do M/M/1, vimos que no estado estacionário do sistema, seu comportamento é descrito pelas equações:

$$\lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} - (\lambda + \mu) P_n = 0, \quad n > 0 \quad (6.1)$$

$$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0, \quad n = 0.$$

Uma maneira de testar a eficiência da técnica de simulação na resolução de problemas de filas é a verificação das equações (6.1), utilizando as probabilidades empíricas obtidas a partir dos resultados da simulação, referentes ao número de usuários no sistema.

Para isso, faremos

$$I_1 = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} - (\lambda + \mu) P_n, \quad n > 0$$

(6.2)

$$I_2 = -\lambda P_0 + \mu P_1 \quad n = 0$$

e computamos os valores de  $I_1$  e  $I_2$  para diversos valores de  $n$ .

Conforme vimos no capítulo IV, um dos fatores que de modo geral, interfere na compatibilidade entre os resultados da simulação e teóricos, é o tempo de simulação, o qual neste trabalho, foi controlado pelo número de usuários na estação de serviço. Em vista disso, os valores de  $I_1$  e  $I_2$ , em média, estarão tão mais perto de zero (resultado teórico), quanto maior for o tamanho das amostras implementadas.

Tal fato é evidenciado nas Tabelas 6.1 e 6.2 onde mostramos os valores de  $I_1$  e  $I_2$  computados para alguns valores de  $n$ , e onde os resultados referentes a  $P_n$ , foram obtidos da implementação do modelo da simulação com os parâmetros  $\lambda=5$ ,  $\mu=10$ ,  $\rho=0,5$  e  $\Delta t=0,02$  para amostras de 2100 e 10500 usuários, respectivamente.

TABELA 6.1

n	$P_n$	$I_2$	$I_1$
0	0,52428	-0,1833	
1	0,24381	-	0,8310
2	0,12667	-	-0,6200
3	0,06095	-	0,0048
4	0,02957	-	0,0095
5	0,01333	-	-0,0033
6	0,00238	-	-

MÉDIA: -0,0936

TABELA 6.2

n	$P_n$	$I_2$	$I_1$
0	0,49028	0,0790	
1	0,25304	-	-0,0242
2	0,13200	-	-0,1006
3	0,06142	-	0,0615
4	0,03228	-	0,0019
5	0,01790	-	-0,0329
6	0,00742	-	0,0029
7	0,00247	-	0,0239
8	0,00238	-	-0,0177
9	0,00057	-	0,0053
10	0,00019	-	-

MÉDIA: - 0,00009

Dos resultados mostrados nas tabelas acima, verificamos que ao se aumentar o tamanho da amostra de 2100 para 10500 usuários (isto é, 5 vezes), o valor médio dos  $I_1$  diminuiu de aproximadamente 1000 vezes, donde concluímos que aumentando o tempo de simulação, obteremos desta, resultados cada vez mais compatíveis com os resultados teóricos referentes ao estado estacionário do sistema.

Conseqüentemente, para problemas de filas mais complexos, dos quais se conheça os sistemas de equações diferenciais que os regem, poderemos fazer uso de resultados análogos aos das tabelas 6.1 e 6.2, para estabelecer um índice, não só para a validade dos modelos de simulação ali utilizados como para a eficiência dessa técnica na resolução de tais problemas.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
 Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
 Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
 Rua Aprigio Veloso, 882 - Tel (083) 321-7222-R 355  
 58.100 - Campina Grande - Paraíba

Temos que

$$P_0 = P_0 \quad (3a)$$

$$P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 \quad (\text{da equação 2b}) \quad (3b)$$

$$P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 \quad (\text{fazendo } n=1 \text{ na equação } (3a) \text{ 2a e substituindo } P_1 \text{ da do por (3b)}). \quad (3c)$$

$$P_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 \quad (\text{fazendo } n=2 \text{ na equação } (3d) \text{ 2a e substituindo } P_2 \text{ da do por (3c)}).$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad (4)$$

Somando membro a membro, as equações acima, obtemos:

$$\sum_{i=0}^n P_i = P_0 \sum_{i=0}^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \quad (5)$$

No limite, quando  $n \rightarrow \infty$ , isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n P_i = P_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \quad (6)$$

temos:

$$1 = P_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \quad (7)$$

$$1 = P_0 \left[ 1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \dots \right],$$

∴

$$1 = P_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}, \quad (8)$$

∴

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}. \quad (8)$$

Levando (8) em (4), obtemos:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \quad (9)$$

Fazendo  $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$  e lembrando que  $\lambda < \mu$  (condição que deve ser satisfeita para garantir que o comprimento da fila não crescerá indefinidamente), obtemos de (9):

$$P_n = \rho^n (1 - \rho). \quad (10)$$

Seja  $L$  o número médio de usuários no sistema. Então

$$L = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n P_n}{\sum_{n=0}^{\infty} P_n} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n. \quad (11)$$

Tendo em vista (10), podemos escrever:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n (1-\rho) = (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n,$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} L &= (1-\rho) \rho \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1} \\ &= (1-\rho) \rho \frac{d}{d\rho} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \right), \\ &= (1-\rho) \rho \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1}{1-\rho} \right) = (1-\rho) \rho \frac{1}{(1-\rho)^2}, \end{aligned}$$

e portanto

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}. \quad (12)$$

Em termos de  $\lambda$  e  $\mu$ , como  $\rho = \lambda/\mu$ , obtemos:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}. \quad (13)$$



Sejam

$\tilde{t}_w \equiv$  o tempo médio de espera dos usuários na fila e

$\tilde{t}_s \equiv$  o tempo médio de serviço para os usuários,

Então, sendo  $\lambda$  a taxa média de chegada dos usuários ao sistema, podemos escrever:

$$L = \lambda(\tilde{t}_w + \tilde{t}_s) \quad (14)$$

Se a função densidade de probabilidades para o tempo de serviço dos usuários é como dada na equação (1.4), isto é:

$$g(t) = \mu e^{-\mu t} \quad (15)$$

então,

$$\tilde{t}_s = \int_0^{\infty} t \cdot g(t) dt = \frac{1}{\mu} \quad (16)$$

Logo, substituindo (16) e (13) em (14), obtemos para  $\tilde{t}_w$ :

$$\tilde{t}_w = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} \quad (17)$$

e portanto o tempo médio de espera dos usuários no sistema  $\tilde{t}_{sis}$  será:

$$\tilde{t}_{sis} = \tilde{t}_w + \tilde{t}_s, \quad (18)$$

$$\tilde{t}_{sis} = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (19)$$

## TABELA - KS

SELECTED VALUES OF THE DISTRIBUTION OF  $K_n^+$  AND  $K_n^-$ 

The approximations for  $n > 30$  are only conjectures which have not been proved, except when  $n = \infty$ .

	$p = 99\%$	$p = 95\%$	$p = 75\%$	$p = 50\%$	$p = 25\%$	$p = 5\%$	$p = 1\%$
$n = 1$	0.01000	0.05000	0.2500	0.5000	0.7500	0.9500	0.9900
$n = 2$	0.01400	0.06749	0.2929	0.5176	0.7071	1.0080	1.2728
$n = 3$	0.01699	0.07919	0.3112	0.5147	0.7539	1.1017	1.3589
$n = 4$	0.01943	0.08789	0.3202	0.5110	0.7642	1.1304	1.3777
$n = 5$	0.02152	0.09471	0.3249	0.5245	0.7674	1.1392	1.4024
$n = 6$	0.02336	0.1002	0.3272	0.5319	0.7703	1.1463	1.4141
$n = 7$	0.02501	0.1048	0.3280	0.5364	0.7755	1.1537	1.4246
$n = 8$	0.02650	0.1086	0.3280	0.5392	0.7797	1.1586	1.4327
$n = 9$	0.02786	0.1119	0.3274	0.5411	0.7823	1.1624	1.4388
$n = 10$	0.02912	0.1147	0.3297	0.5426	0.7845	1.1638	1.4443
$n = 11$	0.03028	0.1172	0.3330	0.5439	0.7863	1.1688	1.4484
$n = 12$	0.03137	0.1193	0.3357	0.5453	0.7880	1.1714	1.4521
$n = 15$	0.03424	0.1244	0.3412	0.5500	0.7926	1.1773	1.4606
$n = 20$	0.03807	0.1298	0.3461	0.5547	0.7975	1.1839	1.4698
$n = 30$	0.04354	0.1351	0.3509	0.5605	0.8036	1.1916	1.4801
$n > 30$	0.07089	0.1601	0.3793	0.5887	0.8326	1.2239	1.5174
	$-\frac{0.15}{\sqrt{n}}$	$-\frac{0.14}{\sqrt{n}}$	$-\frac{0.15}{\sqrt{n}}$	$-\frac{0.15}{\sqrt{n}}$	$-\frac{0.16}{\sqrt{n}}$	$-\frac{0.17}{\sqrt{n}}$	$-\frac{0.20}{\sqrt{n}}$

←

0

I

II

III

IV

V

VI

VII

VIII →

TABELA -  $\chi^2$ 

## SELECTED VALUES OF THE CHI-SQUARE DISTRIBUTION

(For further values, see *Handbook of Mathematical Functions*, ed. by M. Abramowitz and I. A. Stegun, U.S. Government Printing Office, 1964, Table 26.8.)

	$p = 99\%$	$p = 95\%$	$p = 75\%$	$p = 50\%$	$p = 25\%$	$p = 5\%$	$p = 1\%$
$\nu = 1$	0.00016	0.00393	9.1015	0.4549	1.323	7.879	10.828
$\nu = 2$	0.00201	0.1026	0.5753	1.386	2.773	5.991	9.210
$\nu = 3$	0.1148	0.3518	1.213	2.366	4.108	7.815	11.34
$\nu = 4$	0.2971	0.7107	1.923	3.357	5.385	9.488	13.28
$\nu = 5$	0.5543	1.1455	2.675	4.351	6.626	11.07	15.09
$\nu = 6$	0.8720	1.635	3.455	5.348	7.841	12.59	16.81
$\nu = 7$	1.239	2.167	4.255	6.346	9.037	14.07	18.48
$\nu = 8$	1.646	2.733	5.071	7.344	10.22	15.51	20.09
$\nu = 9$	2.088	3.325	5.899	8.343	11.39	16.92	21.67
$\nu = 10$	2.558	3.940	6.737	9.342	12.55	18.31	23.21
$\nu = 11$	3.053	4.575	7.584	10.34	13.70	19.68	24.73
$\nu = 12$	3.571	5.226	8.438	11.31	14.84	21.03	26.22
$\nu = 15$	5.229	7.261	11.04	14.34	18.25	25.00	30.58
$\nu = 20$	8.269	10.85	15.45	19.34	23.82	31.41	37.57
$\nu = 30$	14.95	18.49	24.48	29.34	34.80	43.77	50.89
$\nu = 50$	29.71	34.76	42.94	49.33	56.33	67.50	76.15
$\nu > 30$	approximately $\nu + 2\sqrt{\nu}x_p - \frac{1}{3}x_p^2 - \frac{2}{3}$						
$x_p =$	-2.33	-1.64	-0.675	0.00	0.675	1.64	2.33

←

0

I

II

III

IV

V

VI

VII

→ VIII

PAGE 1 29.11.74

// JOB

29.11.74

LOG DRIVE CART SPEC CART AVAIL PHY DRIVE  
0000 0007 0007 0000

V2 M12 ACTUAL 16K CONFIG 16K

// DUP

\*DELETE GENTI  
CART ID 0007 DB ADDR 2A30 DB CNT 08C0\*DELETE ITNEG  
CART ID 0007 DB ADDR 32F0 DB CNT 08C0\*DELETE TIGEN  
CART ID 0007 DB ADDR 32F0 DB CNT 08C0\*DELETE NEGTI  
CART ID 0007 DB ADDR 32F0 DE CNT 08C0\*DELETE TINEG  
CART ID 0007 DB ADDR 32F0 DB CNT 08C0\*DELETE ITGEN  
CART ID 0007 DB ADDR 2A30 DB CNT 08C0\*DELETE PARAM  
CART ID 0007 DB ADDR 2A30 DB CNT 00A0\*STOREDATA WS UA GENTI 140  
CART ID 0007 DB ADDR 2A30 DB CNT 08C0\*STOREDATA WS UA ITGEN 140  
CART ID 0007 DB ADDR 32F0 DB CNT 08C0\*STOREDATA WS UA ITNEG 140  
CART ID 0007 DB ADDR 3BB0 DB CNT 08C0\*STOREDATA WS UA TIGEN 140  
CART ID 0007 DB ADDR 4470 DB CNT 08C0\*STOREDATA WS UA NEGTI 140  
CART ID 0007 DB ADDR 4D30 DB CNT 08C0\*STOREDATA WS UA TINEG 140  
CART ID 0007 DB ADDR 55F0 DB CNT 08C0\*STOREDATA WS UA PARAM 10  
CART ID 0007 DB ADDR 5EB0 DB CNT 00A0

PAGE 1 29.11.74

// JOB

29.11.74

LOG DRIVE    CART SPEC    CART AVAIL    PHY DRIVE  
0000        0007        0007        0000

V2 M10    ACTUAL 16K    CONFIG 16K

// FOR

\*\* GERA NOS. ALEATORIOS UNIFORMENTE DISTRIBUIDOS

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*ONE WORD INTEGERS

PAGE 2 20.11.74 GERA NOS. ALEATORIOS UNIFORMENTE DISTRIBUIDOS

```
SUBROUTINE RANDA(IY,YFL)
COMMON IX
IY=IX*899
IF(IY)5,6,6
5 IY=IY+32767+1
6 YFL=IY
YFL=YFL/32767.
RETURN
END
```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR RANDA  
COMMON 2 VARIABLES 0 PROGRAM 50

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0005 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

\*STORE WS UA RANDA  
D 06 ENTRY POINT NAME ALREADY IN LET/FLET

// FOR  
\*\* GERA NOS. ALEATORIOS-EXPONENCIALMENTE DISTRIBUIDOS  
\*LIST SOURCE PROGRAM  
\*ONE WORD INTEGERS

PAGE 3 29.11.74 GERA NOS. ALEATORIOS EXPONENCIALMENTE DISTRIBU

```
SUBROUTINE EXPL(EX,X)
COMMON IX
CALL RANDA(IY,R)
IX=IY
X=-EX*ALOG(R)
RETURN
END
```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR EXPL  
COMMON 2 VARIABLES 6 PROGRAM 30

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0006 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

\*STORE WS UA EXPL  
D 06 ENTRY POINT NAME ALREADY IN LET/FLET

// FOR  
\*\* SIMULACAO DE SISTEMA DE FILA MONOCANAL MONOESTACAO  
\*IOCS(CARD,1132PRINTER,PLOTTER,DISK)  
\*LIST SOURCE PROGRAM  
\*ONE WORD INTEGERS

PAGE 4 29.11.74 SIMULACAO DE SISTEMA DE FILA MONOCANAL MONOESTACA

```
REAL NMAX,ICONT,J
INTEGER CLE,Y(150)
DIMENSION DTEC(5000),Z(150), W(150),X(150),ATEC(150),NUM(150)
COMMON IX
```

```
DEFINE FILE 1(140,150,U,I1)
DEFINE FILE 2(140,300,U,I2)
DEFINE FILE 3(140,300,U,I3)
DEFINE FILE 4(140,150,U,I4)
DEFINE FILE 5(140,300,U,I5)
DEFINE FILE 6(140,300,U,I6)
DEFINE FILE 7(10,9,U,I7)
```

```
I1=1
I2=1
I3=1
I4=1
I5=1
I6=1
I7=1
```

```
10 READ(2,71)NMAX,AMI,ALAMB,DELT
```

```
71 FORMAT(F10.0,3F10.2)
```

```
IX=1
```

```
IF(NMAX)25,25,26
```

```
25 WRITE(3,15)NMAX,AMI,ALAMB,DELT,I4,I5,I6,I7
```

```
15 FORMAT(1H0,'F I M D A G R A V A C A O',//1X,'NMAX=',F10.0'MI=',F
*7.2,' LAMBDA=',F7.2,' DELTAT=',F5.2,7I5)
```

```
CALL EXIT
```

```
C
26 WRITE(7'I7)NMAX,ALAMB,AMI,DELT,I4
```

```
WRITE(3,1002)I7
```

```
1002 FORMAT(1X,' I7 =',I8)
```

```
WRITE(3,20)NMAX,ALAMB,AMI,C :LT
```

```
20 FORMAT(1H1,9X,'NUMERO TOTAL DE USUARIOS ..',F10.0, '//10X,'PARAMETRO
*S..', //15X,'LAMBDA..',F10.1, '//15X,'MI ..',F10.1, '//10X,'QUANTUM D
```

```
*E TEMPO..',F10.5//)
```

```
C
C--INICIALIZACAO
```

```
C
ICONT=1
TESIN=0.0
ICHAV=0
TTEC=0.0
TOCIT=0.0
TEST=0.0
CLE=0
TA=0.0
I=0
J=0
```

```
C
C--CHEGA UM USUARIO
```

```
C
2 CLE=CLE+1
I=I+1
```

```
C
C--GERACAO DE UM INTERARRIVAL TIME
```

```
C
CALL EXPL(1./ALAMB,TEC)
DTEC(I)=TEC
```

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA  
Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
Rua Aprigio Veloso, 882 - Tel (083) 321-7222-R 355  
58.100 - Campina Grande - Paraíba



```

PAGE 5 29.11.74 SIMULACAO DE SISTEMA DE FILA MONOCANAL MONOESTACAO
C
C--ATUALIZACAO DO TEMPO TOTAL ENTRE CHEGADAS
C
      TTEC=TTEC+TEC
C
C--TESTA ESTADO DA ESTACAO DE SERVIDICO E DA FILA
C
      1 IF(ICHAV)3,4,3
      3 IF(CLE)7,9,7
      4 IF(CLE)5,6,5
      5 CLE=CLE-1
      ICHAV=1
      CALL EXPL(1./AMI,TS)
      J=J+1
      TTS=TS
      7 TEST=TEST+CLE*DELT
      GO TO 9
      6 TOCIT=TOCIT+DELT
C
C--INCREMENTA TEMPO ABSOLUTO
C
      9 TA=TA+DELT
C
C--COMPARA COM TMAX
C
      IF(J-NMAX)11,11,10
      11 IF(TS-DELT)12,12,13
      12 ICHAV=0
      TESIN=TEST-TESTIN
      IF(J-ICONT)100,101,101
      101 K=J-ICONT+1
      II=J
      ATEC(K)=DTEC(II)
      NUM(K)=J
      W(K)=TTS
      X(K)=TA
      Y(K)=CLE
      Z(K)=TESIN
      100 TESIN=TEST
      IF(J-ICONT-149)97,85,85
      85 WRITE(4,'I4)Y
      WRITE(5,'I5)X
      WRITE(6,'I6)Z
      WRITE(3,'I3)W
      WRITE(2,'I2)ATEC
      WRITE(1,'I1)NUM
      WRITE(3,1001)I4,I5,I6
      1001 FORMAT(1X,'CONTROLE',10I5)
      ICONT=ICONT+150
      IF(J-NMAX)97,10,10
      97 IF(TA-TTEC)99,2,2
      99 IF(CLE)5,98,5
      98 TOCIT=TOCIT+DELT
      TA=TA+DELT
      GO TO 97
      13 TS=TS-DELT
      IF(TA-TTEC)1,2,2

```

PAGE 6 29.11.74 SIMULACAO DE SISTEMA DE FILA MONOCANAL MONOESTAC

END

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
COMMON 2 VARIABLES 11598 PROGRAM 640

END OF COMPILATION

// XEQ 2

\*FILES(1,GENTI),(2,ITNEG),(3,TIGEN),(4,NEGTI),(5,TINEG),(6,ITGEN)

\*FILES(7,PARAM)

// JOB

21.11.74

LOG DRIVE    CART SPEC    CART AVAIL    PHY DRIVE  
 0000            0007            0007            0000

V2 M10    ACTUAL 16K    CONFIG 16K

// \* GENTIL

// FOR

\*IOCS(CARD,1132PRINTER,DISK)

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*ONE WORD INTEGERS

REAL MAX1,MAX2,N

DIMENSION F(2100), ARQ(150)

COMMON X(2100),N

DEFINE FILE 1(140,300,U,I1)

DEFINE FILE 2(10,9,U,I2)

I1=1

I2=1

ICONT=1

233 K1=0

READ(2,I2)N,ALAMB,AMI,DELT,ISU

WRITE(3,121)N,ALAMB,AMI,DELT

AMI=ALAMB

121 FORMAT(1H1,'NUMERO DE USUARIOS..',F10.0,/1X,'LAMBDA..',F10.5/1X,'M  
 \*I..',F10.5,/1X,'DELTAT..',F10.5//)

DO 16 J=1,14

READ(1,I1)(ARQ(I),I=1,150)

DO 7 I=1,150

K2=K1+I

7 X(K2)=ARQ(I)

16 K1=K1+150

MAX1=0.

MAX2=0.

L=N

RADN=SQRT(FLOAT(L))

CALL SORT

DO 6 J=1,L

F(J)=1.-EXP(-AMI\*X(J))

AJ=J

TEST=AJ/L-F(J)

IF(TEST)9,8,8

8 IF(TEST-MAX1)6,6,88

88 MAX1=TEST

GO TO 6

9 DNME= (F(J)-(AJ-1.)/L)

IF(DNME-MAX2)6,6,11

11 MAX2=DNME

6 CONTINUE

MAX1=RADN\*MAX1

MAX2=RADN\*MAX2

WRITE(3,2)MAX1,MAX2

2 FORMAT(1H0,4X,'+',29X,'-'/4X,'K =',F15.5,12X,'K =',F15.5)

IF(ICONT- 7)32,444,444

33 ICONT=ICONT+1

GO TO 233

---

 Teste de Kolmogorov-Smirnov-(Teste KS).

PAGE 2 21.11.74

444 CALL EXIT  
END

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
COMMON 4202 VARIABLES 4548 PROGRAM 380

END OF COMPILATION

// XEQ 1

\*FILES(1,ITNEG),(2,PARAM)

---

(Continuação): Teste - KS

PAGE 1 23.11.74

// JOB

23.11.74

LOG DRIVE CART SPEC CART AVAIL PHY DRIVE  
0000 0007 0007 0000

V2 M10 ACTUAL 16K CONFIG 16K

// FOR

\*IOCS(CARD,1132PRINTER,DISK)

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*ONE WORD INTEGERS

REAL N

DIMENSION P(800),F(800),X(2100),ARG(300)

DEFINE FILE 1(140,300,U,12)

DEFINE FILE 2(10,9,U,17)

I2=1

I7=1

ICONT=1

233 K1=0

READ(2'I7)N,ALAMB,AMI,DELT,ISU

WRITE(3,121)N,ALAMB,AMI,DELT

AMI=ALAMB

121 FORMAT(1H1,'NUMERO DE USUARIOS..',F10.0,/1X,'LAMBDA..',F10.5/1X,'

\*I..',F10.5,/1X,'DELTAT..',F10.5//)

DO 6 J=1,14

READ(1'I2)(ARG(I),I=1,150)

DO 7 I=1,150

K2=K1+I

7 X(K2)=ARG(I)

6 K1=K1+150

C

XMAX=10.397/AMI

LAMBDA=AMI

GO TO(10,20,30,40,44,50,50,60,60,61,61,61,61,61),LAMBDA

10 TSTAR=3.00

GO TO 17

20 TSTAR=1.50

GO TO 17

30 TSTAR=1.00

GO TO 17

40 TSTAR=0.85

GO TO 17

44 TSTAR=0.75

GO TO 17

50 TSTAR=0.65

GO TO 17

60 TSTAR=0.50

GO TO 17

61 TSTAR=0.40

17 K=TSTAR/DELT+1+0.00000001

A=- AMI\*TSTAR/(K-1)

P(1)=1-EXP(A)

L=K-1

DO 11 I=2,L

11 P(I)=EXP((I-1)\*A)-EXP(I\*A)

P(K)=EXP(- AMI\*TSTAR)-EXP(- AMI\*XMAX)

Teste Qui-quadrado (Teste

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA

Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior

Coordenação Setorial de Pós-Graduação

Rua Aprigio Veloso, 882 - Tel (083) 321-7222-R 355

58.100 - Campina Grande - Paraíba

PAGE 2 23.11.74

C ZERAR FERQUENCIAS

C

```

DO 1 J=1,K
1 F(J)=0

```

C

C GERACAO DOS NOS. E TABULACAO DAS FREQUENCIAS

C

```

B=TSTAR/(K-1)
NIKEL=N
DO 2 I=1,NIKEL
DO 8 J=1,L
IF(X(I)-(J-1)*B)8,5,66
66 IF(X(I)-J*B)9,41,8
8 CONTINUE
9 F(J)=F(J)+1
GO TO 2
5 IF(J-1)71,9,71
71 F(J-1)=F(J-1)+0.5
F(J)=F(J)+0.5
GO TO 2
41 F(J)=F(J)+0.5
F(J+1)=F(J+1)+0.5
2 CONTINUE
S1=0.
DO 19 I=1,L
19 S1=S1+F(I)
F(K)=N-S1

```

C

C--CALCULO DE D

C

```

S=0.
DO 3 J=1,K
WRITE(3,90)F(J),S,P(J)
90 FORMAT(1X,F8.1,2F15.4)
3 S=S+F(J)*F(J)/P(J)
D=S/N-N

```

C

C--S A I D A

C

```

WRITE(3,4) L,D
4 FORMAT(1H0,'NO. DE GRAUS DE LIBERDADE =',I5,' D=',F15.4)
IF(ICONT- 7)33,444,444
33 ICONT=ICONT+1
GO TO 233
444 CALL EXIT
END

```

FEATURES SUPPORTED  
 ONE WORD INTEGERS  
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
 COMMON 0 VARIABLES 8058 PROGRAM 730

END OF COMPILATION

// XEG 1

(Continuação): Teste -  $\chi^2$

PAGE 3 23.11.74

\*FILES(1,ITNEG),(2,PARAM)

---

(Continuação): Teste -  $\chi^2$

PAGE 2 05.12.74 ORDENA CONJUNTO

```

SUBROUTINE SORT
REAL N
INTEGER R,Z
COMMON LK(10500),N
Z=N
L=Z/2+1
R=N
110 IF(L-1)25,25,30
30 L=L-1
K=LK(L)
GO TO 35
25 K=LK(R)
LK(R)=LK(L)
R=R-1
IF(R-1)35,40,35
40 LK(L)=K
RETURN
35 J=L
90 I=J
J=2*J
IF(J-R)60,70,100
60 IF(LK(J)-LK(J+1))65,70,70
65 J=J+1
70 IF(K-LK(J))75,100,100
75 LK(I)=LK(J)
GO TO 90
100 LK(I)=K
GO TO 110
END

```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR SORT  
COMMON 10502 VARIABLES 8 PROGRAM 172

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 000A (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

\*STORE WS UA SORT  
CART\_ID 0009 DB ADDR 625E DB CNT 000C

**"Heapsort"**

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
Rua Aprígio Veloso, 882 Tel (083) 321-7222-R 355  
58.100 - Campina Grande - Paraíba



PAGE 2 20.11.74 LEVANTA DISTRIBUICOES DE PROBABILIDADES

```

SUBROUTINE DIST1
REAL N
DIMENSION FTEO(2100)
COMMON X(2100),N, ALAMB,AMI,RHO
C
FTEO(1)=0.
NN=N
K1=1
AK=1.
DO55 I=2,NN
IF(X(I)-X(I-1))75,76,75
76 AK=AK+1.
GO TO55
75 K1=K1+1
FTEO(K1)=AK/NN
AK=1.
IF(I-NN)55,78,78
55 CONTINUE
78 FTEO(K1+1)=AK/NN
C
C--AGRUPA OS X'S DIFERENTES
C
KK=1
DO 20 I=2,NN
IF(X(I)-X(I-1))21,20,21
21 KK=KK+1
X(KK)=X(I)
20 CONTINUE
C
C--CALCULA DISTRIBUICAO DE PROBABILIDADES EMPIRICA
C
SOMA=0.
DO111 I=1,KK
SOMA=SOMA+FTEO(I)
FTEO(I)=SOMA
111 CONTINUE
C
C--IMPRIME G R A F I C O
C
CALL GPLT(KK,X,FTEO)
C
C--CALCULA DISTRIBUICAO DE PROBABILIDADES TEORICA
C
DO 80 I=1,KK
FTEO(I)=1.-EXP(-X(I)*(AMI-ALAMB))
80 CONTINUE
C
C--IMPRIME G R A F I C O
C
CALL GPLT(KK,X,FTEO)
C
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR DIST1  
COMMON 4208 VARIABLES 4214 PROGRAM 260

PAGE 3 20.11.74 LEVANTA DISTRIBUICOES DE PROBABILIDADES  
RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 107C (HEX)  
END OF COMPILATION

// DUP

\*STORE WS UA DIST1  
CART ID 0007 DB ADDR 56C0 DB CNT 0013

// FOR

\*\* P R O G R A M A P R I N C I P A L  
\*IOCS(CARD,1132PRINTER,DISK,PLOTTER)  
\*LIST SCURCE PROGRAM  
\*ONE WORD INTEGERS

---

Cálculo do número médio de usuários no sistema

PAGE 4 20.11.74 PROGRAMA PRINCIPAL

```

REAL NMAX
DIMENSION ICOMP(150)
COMMON X1(2100),NMAX,ALAMB,AMI,RHO
DEFINE FILE 10(140,150,U,I2)
DEFINE FILE 12(10,9,U,I7)
I2=1
I7=1
DO 3 ICONT=1,7
SOMAT=0.
SQUAD=0.
K1=0
READ(12'I7)NMAX,ALAMB,AMI,DELT,ISU
RHO=ALAMB/AMI
DO 6 J=1,14
READ(10'I2)(ICOMP(I),I=1,150)
WRITE(3,9)I2,I7
9 FORMAT(1X,'** I2 =',I4,' I7 =',I4)
DO 7 I=1,150
K2=K1+I
7 X1(K2)=ICOMP(I)
6 K1=K1+150
LMAX=NMAX
DO 11 I=1,LMAX
SQUAD=SQUAD+X1(I)*X1(I)
11 SOMAT=SOMAT+X1(I)
AMED=SOMAT/NMAX
VAR=SQUAD/(NMAX-1.)-AMED*AMED
VAR1=VAR/NMAX
AMET1=1./(1.-RHO)
AMET2=RHO/(1.-RHO)
WRITE(3,7777)LMAX
7777 FORMAT(1H1,' NUMERO DE USUARIOS..=',I10)
WRITE(3,15)AMED,AMET1,AMET2,ALAMB,AMI,RHO,DELT,VAR,VAR1
15 FORMAT(1H0,'MEDIA EMPIRICA=',F15.6//1X,'COMP. MEDIO DE FILAS NAO V
*AZIAS =',F15.6//1X,'NO. ESPERADO DE UNIDADES NO SITEMA =',F15.6//
*1X,'TAXA MEDIA DE CHEGADA =',F15.6//1X,'TAXA MEDIA DE SAIDA =',F15
*.6//1X,'FATOR DE ATIVIDADE =',F15.6//1X,'QUANTUM DE TEMPO =',F15.6
*//1X,'VARIANCIA =',F15.6//1X,'SIGMA2/N =',F15.6//)
CALL SORT
CALL DIST1
3 CONTINUE
CALL EXIT
END

```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
COMMON 4208 VARIABLES 194 PROGRAM 462

END OF COMPILATION

// XEQ 1

\*FILES(10,NEGTI),(12,PARAM)

PAGE 1 21.11.74

// JOB

21.11.74

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0007	0007	0000

V2 M10 ACTUAL 16K CONFIG 16K

// FOR

\*\* P R O G R A M A P R I N C I P A L

\*IOCS(CARD,1132PRINTER,DISK,PLOTTER)

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*ONE WORD INTEGERS

---

Cálculo do tempo médio de espera dos usuários na fila

PAGE 2 21.11.74 PROGRAMA PRINCIPAL

```

REAL NMAX
DIMENSION ICOMP(150)
COMMON X1(2100),NMAX,ALAMB,AMI,RHO
DEFINE FILE 10(140,150,U,I2)
DEFINE FILE 12(10,9,U,I7)
I2=1
I7=1
DO 3 ICONT=1,7
SOMAT=0.
SQUAD=0.
K1=0
READ(12'I7)NMAX,ALAMB,AMI,DELT,ISU
RHO=ALAMB/AMI
DO 6 J=1,14
READ(10'I2)(ICOMP(I),I=1,150)
WRITE(3,9)I2,I7
9 FORMAT(1X,'** I2 =',I4,' I7 =',I4)
DO 7 I=1,150
K2=K1+I
7 X1(K2)=ICOMP(I)
6 K1=K1+150
LMAX=NMAX
DO 11 I=1,LMAX
SQUAD=SQUAD+X1(I)*X1(I)
11 SOMAT=SOMAT+X1(I)
AMED=SOMAT/NMAX
VAR=SQUAD/(NMAX-1.)-AMED*AMED
VAR1=VAR/NMAX
AMET1=1./(1.-RHO)
AMET2=RHO/(1.-RHO)
WRITE(3,7777)LMAX
7777 FORMAT(1H1,' NUMERO DE USUARIOS..=',I10)
WRITE(3,15)AMED,AMET1,AMET2,ALAMB,AMI,RHO,DELT,VAR,VAR1
15 FORMAT(1H0,'MEDIA EMPIRICA=',F15.6//1X,'COMP. MEDIO DE FILAS NAO V
*AZIAS =',F15.6//1X,'NO. ESPERADO DE UNIDADES NO SITEMA =',F15.6//
*1X,'TAXA MEDIA DE CHEGADA =',F15.6//1X,'TAXA MEDIA DE SAIDA =',F15.6
*.6//1X,'FATOR DE ATIVIDADE =',F15.6//1X,'QUANTUM DE TEMPO =',F15.6
*//1X,'VARIANCIA =',F15.6//1X,'SIGMA2/N =',F15.6//)
CALL SORT
CALL DIST1
3 CONTINUE
CALL EXIT
END

```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
COMMON 4208 VARIABLES 194 PROGRAM 462

END OF COMPILATION

// XEQ 1  
\*FILES(10,NEGTI),(12,PARAM)

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA  
Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
Rua Aprigio Veloso, 882 - Tel (083) 321-7222-R 355  
58.100 - Campina Grande - Paraíba

## REFERÊNCIAS

1. C.W. Churchman, R. L. Ackoff and E.L. Arnoff, "INTRODUCTION TO OPERATIONS RESEARCH". John Wiley & Sons, London, Sydney, 1957.
2. T.H. Naylor, J.L. Balintfy, D.S. Burdick, Kong Chu, "TÉCNICA DE SIMULAÇÃO EM COMPUTADORES". Vozes Ltda. 1971.
3. D.E. Knuth, "FUNDAMENTAL ALGORITHMS"- Vol. 1, Addison-Wesley, Reading, Mass.  
"SEMINUMERICAL ALGORITHMS"-Vol. 2, Addison-Wesley, 1969.  
"SORTING AND SEARCHING"-Vol. 3, Addison-Wesley, 1973.
4. E. Kreyszig, "MATEMATICA SUPERIOR"-Vols. 1 e 2, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1969.
5. D.R. Cox and W.L. Smith, "QUEUES" - Methuen, London, 1961.
6. L. Takács, "INTRODUCTION TO THE THEORY OF QUEUES" - Oxford Univ. Press, London and New York, 1962.
7. T.L. Saaty, "ELEMENTS OF QUEUING THEORY WITH APPLICATIONS" McGraw-Hill, New York, 1961.
8. T. Pacitti, "FORTRAN-MONITOR-PRINCIPIOS" - Ao Livro Técnico S.A, Rio de Janeiro, 1970.