



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE HUMANIDADES  
UNIDADE ACADÊMICA DE ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE  
COORDENAÇÃO DE ESTÁGIO SUPERVISIONADO

LIZANDRA HENRIQUES SILVA

APLICAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA VIA *SOLVER* DO *MICROSOFT*  
*EXCEL* NA DETERMINAÇÃO DE CARTEIRAS DE RISCO MÍNIMO

CAMPINA GRANDE

2014

LIZANDRA HENRIQUES SILVA

APLICAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA VIA *SOLVER* DO *MICROSOFT EXCEL* NA DETERMINAÇÃO DE CARTEIRAS DE RISCO MÍNIMO

Monografia apresentada à disciplina Estágio Supervisionado como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Administração pela Universidade Federal de Campina Grande na área de Administração Financeira.

Orientador: Prof<sup>o</sup> Ms. Adail Marcos de Lima Silva

CAMPINA GRANDE

2014

LIZANDRA HENRIQUES SILVA

APLICAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA VIA *SOLVER* DO *MICROSOFT EXCEL* NA DETERMINAÇÃO DE CARTEIRAS DE RISCO MÍNIMO

**COMISSÃO DE ESTÁGIO**

Membros:

---

Lizandra Henriques Silva

**Graduanda**

---

Adail Marcos de Lima Silva

**Professor Orientador**

---

Patrícia Trindade Caldas

**Coordenadora de Estágio Supervisionado**

LIZANDRA HENRIQUES SILVA

APLICAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA VIA *SOLVER* DO *MICROSOFT EXCEL* NA DETERMINAÇÃO DE CARTEIRAS DE RISCO MÍNIMO

Monografia apresentada à disciplina Estágio Supervisionado como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Administração pela Universidade Federal de Campina Grande na área de Administração Financeira.

Data de aprovação: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

Nota \_\_\_\_\_

BANCA EXAMINADORA

---

Prof<sup>o</sup> Ms. Adail Marcos de Lima Silva - UFCG  
(Orientador)

---

Prof<sup>a</sup> Ms. Cláudia Gomes de Farias - UFCG  
(Examinadora)

---

Prof<sup>o</sup> Ms. José Sebastião Rocha - UFCG  
(Examinador)

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, ao meu Deus, por ter me dado toda a força, coragem e perseverança para enfrentar as adversidades e empecilhos do dia a dia, me ajudando nos momentos mais difíceis e estendendo a mão quando eu mais necessitava.

Aos meus pais, Maria do Socorro Henriques Silva e Veneziano Marques da Silva, que me educaram, amaram e me ajudaram em toda a minha vida, para que meus sonhos não passassem despercebidos. A eles eu devo tudo o que sou e que serei. A eles devo minha vida, meu respeito, meu amor e dedicação. Mainha e Painha, amo vocês!

Aos meus amados irmãos e irmãs, que me deram força, ajuda e conselhos em toda minha vida. Aos presentes e aos ausentes, todos são especiais e atuaram de forma singular em minha vida, tornaram-se exemplo de persistência a serem seguidos por mim.

Ao meu querido amigo, e amado professor orientador e exemplo de profissional, Adail Marcos de Lima Silva, pela paciência, pelo carinho, pelo companheirismo, pela amizade e pela enorme bagagem que me proporcionou ao longo do curso, e também, ao longo do trabalho realizado. Grata eternamente, grande professor!

Aos meus amigos, em especial, minhas amigas, que me acompanharam em toda essa caminhada, que estudaram, sofreram e riram ao meu lado. A elas, também, devo grande parte do que hoje sou, sem elas, tudo seria mais árduo e difícil de enfrentar. Vocês sempre estarão em meu coração, sempre lembrarei com carinho de cada uma, com amor e saudade pelo tempo que passou, pelos momentos juntas. Enfim, amo-as!

Aos meus colegas de estudo, nobres futuros colegas de profissão, que em um momento ou outro, me auxiliaram em dúvidas e em debates, ajudando-me quando necessitava. Tenham a certeza, que tudo foi muito válido pra mim.

Às professoras Sebastião Rocha e Cláudia, pelas disponibilidades e contribuições à análise de minha pesquisa.

E, por fim, a todos que direta ou diretamente contribuíram para que fosse possível a realização da pesquisa em questão.

“O sucesso nasce do querer, da determinação e persistência em se chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo fará coisas admiráveis.”

José de Alencar

SILVA, Lizandra Henriques. **Aplicação da Programação Quadrática via *Solver* do *Microsoft EXCEL* na determinação de Carteiras de Risco Mínimo.** 74 f. Monografia – Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2014.

## RESUMO

O presente estudo consiste em uma pesquisa realizada com base nos dados de retornos diários das ações que compõem a carteira do IBRX50 da BM&F Bovespa. O objetivo geral da pesquisa é demonstrar a contribuição didática da aplicação da Programação Quadrática via *solver* do *Microsoft EXCEL* à formação de carteiras de ações consideradas conservadoras segundo a teoria de Markowitz. Quanto à metodologia utilizada, realizou-se uma pesquisa descritiva-explicativa em relação aos fins e bibliográfica quanto aos meios, caracterizando-se por espaço amostral as ações que compõem a carteira do IBRX50 da BM&F Bovespa. Quanto à abordagem de tratamento de dados executada no estudo, trata-se de uma abordagem quantitativa. Os resultados encontrados na pesquisa em questão evidenciam a aplicabilidade didática do uso do *solver* e da programação quadrática no processo de diversificação de carteiras, uma vez que, mediante o estudo realizado, está perceptível que há a diminuição de riscos ao investidor conforme ele passa a trabalhar com a lógica de carteiras com ações menos correlacionadas, a fim de se compor um portfólio eficiente, diversificado e com maior segurança no investimento do capital.

**Palavras-chave:** Diversificação de carteiras. Programação Quadrática. Solver. Investimento. Risco Mínimo

SILVA, Lizandra Henriques. Application of Quadratic Programming Microsoft EXCEL Solver via the determination of Minimum Risk Portfolios. 74 f. Monograph - Federal University of Campina Grande, Campina Grande, 2014.

### **ABSTRACT**

This study consists of a survey based on data from the daily stocks that make up the portfolio of IBRX50 BM&F Bovespa returns. The overall objective of the research is to demonstrate the application of didactic contribution via Quadratic Programming solver Microsoft EXCEL training stock portfolios considered conservative according to the theory of Markowitz. Regarding methodology, we conducted a descriptive-explanatory research in relation to the purposes and literature as to the means, characterized by sample space stocks in the portfolio of IBRX50 BM&F Bovespa. As for the data processing performed in the study approach, it is a quantitative approach. The findings of the research in question showed the applicability of using didactic and quadratic programming solver in the portfolio diversification process, since, by the study, is noticeable that there is a reduction of risk for the investor as he starts to work with the logic of portfolios with less correlated actions in order to compose an efficient, diversified and safer in capital investment portfolio.

**Keywords: Diversification of portfolios. Quadratic Programming. Solver. Investment. Minimal-risk.**



## LISTA DE EQUAÇÕES E FÓRMULAS

EQUAÇÃO 1 – Modelo simbólico geral de <b>NLP</b> segundo Moore.....	35
EQUAÇÃO 2 – Modelo de carteira de títulos para duas ações segundo Moore.....	38
FÓRMULA 1 – Retorno de um ativo segundo Gitman.....	18
FÓRMULA 2 – Taxa de retorno esperada segundo Brigham.....	19
FÓRMULA 3 – Retorno da carteira segundo Gitman.....	21
FÓRMULA 4 – Desvio Padrão dos retornos segundo Gitman.....	24
FÓRMULA 5 – Coeficiente de variação segundo Gitman.....	25
FÓRMULA 6 – Equação da Reta característica segundo Assaf Neto.....	26
FÓRMULA 7 – Coeficiente angular da reta segundo Assaf Neto.....	27
FÓRMULA 8 – Coeficiente beta segundo Assaf Neto.....	27
FÓRMULA 9 – Desvio Padrão da carteira segundo Assaf Neto.....	31
FÓRMULA 10 – Coeficiente de correlação de 2 ativos – Assaf Neto.....	32
FÓRMULA 11 – Beta da carteira segundo Assaf Neto.....	34
FÓRMULA 12 – Função quadrática em variáveis <b>n</b> .....	37

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 – Retornos esperados de diferentes composições de portfólio.....	22
FIGURA 2.2 – Fronteira eficiente.....	23
FIGURA 2.3 – Distribuição normal.....	29
FIGURA 2.4 – Risco baixo e risco alto.....	30
FIGURA 2.5 – Correlação entre ativos M e N.....	32
FIGURA 2.6 – Redução do risco pela diversificação.....	33
FIGURA 3.1 – Modelo para obtenção da carteira com risco mínimo – 2 ativos.....	43
FIGURA 3.2 – Aplicação do Solver: carteira de risco mínimo – 2 ativos.....	44
FIGURA 3.3 – Modelo para obtenção da carteira com risco mínimo – 3 ativos.....	45
FIGURA 3.4 – Aplicação do Solver: carteira de risco mínimo – 3 ativos.....	45
FIGURA 3.5 – Modelo para obtenção da carteira com risco mínimo – 4 ativos.....	46
FIGURA 3.6 – Aplicação do Solver: carteira de risco mínimo – 4 ativos.....	46
FIGURA 3.7 – Modelo para obtenção da carteira com risco mínimo – 5 ativos.....	47
FIGURA 3.8 – Aplicação do Solver: carteira de risco mínimo – 5 ativos.....	47
FIGURA 3.9 – Modelo para obtenção da carteira com risco mínimo – 10 ativos.....	48
FIGURA 3.10 – Aplicação do Solver: carteira de risco mínimo – 10 ativos.....	48
FIGURA 4.1 – Aplicação do <i>solver</i> : <b>CMIG4</b> e <b>CTIP3</b> .....	50
FIGURA 4.2 – Características da carteira: <b>CMIG4</b> e <b>CTIP3</b> .....	51
FIGURA 4.3 – Conjunto de oportunidades: <b>CMIG4</b> e <b>CTIP3</b> .....	52
FIGURA 4.4 – Aplicação do <i>solver</i> : <b>BRAP4</b> e <b>VALE3</b> .....	53
FIGURA 4.5 – Características da carteira: <b>BRAP4</b> e <b>VALE3</b> .....	54
FIGURA 4.6 – Conjunto de oportunidades: <b>BRAP4</b> e <b>VALE3</b> .....	55
FIGURA 4.7 – Aplicação do <i>solver</i> : <b>CMIG4</b> , <b>CTIP3</b> e <b>CIEL3</b> .....	57
FIGURA 4.8 – Características da carteira: <b>CMIG4</b> , <b>CTIP3</b> e <b>CIEL3</b> .....	58
FIGURA 4.9 – Aplicação do <i>solver</i> : <b>CMIG4</b> , <b>CTIP3</b> , <b>CIEL3</b> e <b>OIBR4</b> .....	59
FIGURA 4.10 – Características da carteira: <b>CMIG4</b> , <b>CTIP3</b> , <b>CIEL3</b> e <b>OIBR4</b> .....	60
FIGURA 4.11 – Aplicação do <i>solver</i> : <b>CMIG4</b> , <b>CTIP3</b> , <b>CIEL3</b> , <b>OIBR4</b> e <b>NATU3</b> .....	62
FIGURA 4.12 – Características da carteira: <b>CMIG4</b> , <b>CTIP3</b> , <b>CIEL3</b> , <b>OIBR4</b> e <b>NATU3</b> .....	63
FIGURA 4.13 – Aplicação do <i>solver</i> : <b>CMIG4</b> , <b>CTIP3</b> , <b>CIEL3</b> , <b>OIBR4</b> , <b>NATU3</b> , <b>FIBR3</b> , <b>EMBR3</b> , <b>JBSS3</b> , <b>BRKM5</b> e <b>PCAR4</b> .....	65

**FIGURA 4.14 – Características da carteira: CMIG4, CTIP3, CIEL3, OIBR4, NATU3, FIBR3, EMBR3, JBSS3, BRKM5 e PCAR4.....66**

## LISTA DE SIGLAS

CMIG4 – Ação preferencial da CEMIG

CTIP3 – Ação ordinária da CETIP

BRAP4 – Ação preferencial da BRADESPAR

VALE3 – Ação ordinária da VALE

CIEL3 – Ação ordinária da CIELO

OIBR4 – Ação preferencial da OI

NATU3 – Ação ordinária da NATURA

FIBR3 – Ação ordinária da FIBRIA

EMBR3 – Ação ordinária da EMBRAER

JBSS3 – Ação ordinária da JBS

BRKM5 – Ação preferencial da BRASKEM

PCAR4 – Ação preferencial da P. AÇUCAR – CBD

IBRX50 – Índice Brasil 50

BM&F Bovespa – Bolsa de Mercadorias e Futuros e Bolsa de Valores de São Paulo

LHS – Left-hand side

NPL – Programação não linear

PL – Programação Linear

## LISTA DE TABELAS

TABELA 4.1 - Comparação entre risco x retornos na carteira de risco mínimo.....	67
---	----

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	15
2 REFERENCIAL TEÓRICO.....	18
2.1 Retorno do Investimento em ações.....	18
2.1.1 Investimento Isolado.....	20
2.1.2 Carteira de ações.....	20
2.2 Risco de Investimento em Ações.....	23
2.2.1 Investimento Isolado.....	28
2.2.2 Carteira de ações.....	30
2.3 Pesquisa Operacional e Gestão da Carteira de Ações.....	34
2.3.1 Programação Quadrática.....	36
2.3.2 Programação Quadrática e Carteira Ótima de Ações.....	37
3 METODOLOGIA DA PESQUISA.....	39
3.1 Tipo de pesquisa.....	39
3.2 Universo e Amostra.....	39
3.3 Coleta de Dados.....	40
3.4 Tratamento de Dados.....	41
4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	49
4.1 Carteira com duas ações.....	49
4.1.1 Menor correlação.....	49
4.1.2 Maior correlação.....	52
4.1.3 Carteira com duas ações: maior x menor correlação.....	55
4.2 Carteira com três ações.....	56
4.3 Carteira com quatro ações.....	58
4.4 Carteira com cinco ações.....	60
4.5 Carteira com dez ações.....	64
4.6 Análise geral das composições de carteiras otimizadas.....	67
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	69
REFERÊNCIAS.....	71
ANEXOS.....	73

## 1 INTRODUÇÃO

Os processos de investimentos, de modo geral, são impulsionados pela perspectiva de uma contraprestação em forma de ganhos gerados, em razão dos diversos riscos que o capital está sob influência quando investido em determinado ativo. Todo o processo de investimento, seja ele em grande ou pequeno valor monetário, é acompanhado de risco que, conforme a situação do ativo, pode ser tido como alto ou baixo. Os ativos de maior risco são acompanhados de maiores retornos e, seguindo tal raciocínio, os ativos que apresentam menor parcela de risco são acompanhados de retornos com menores proporções. Fica evidenciada, assim, a relação entre risco x retorno no momento da análise de propostas a respeito de um dado investimento.

Os cenários de maiores e menores riscos e retornos devem obedecer à individualidade do ativo e à teoria do portfólio. O retorno e o risco envolvido em um ativo individualmente é fruto do mercado e das próprias políticas do ativo em questão, uma vez que o retorno está totalmente interligado a perspectiva do risco do ativo, este subdividido em risco específico e risco sistemático. À medida que o ativo acompanha o mercado, ou seja, possui forte correlação com o mesmo, ele estará sob a tendência de seguir o que acontece com o mercado como um todo.

Em cenários de investimentos em carteiras de ações, o retorno e o risco serão provenientes da relação existente entre os diversos ativos e proporções que os mesmos detém no portfólio. À medida que se incluem ou diminuem-se a quantidade ou a proporção dos ativos que fazem parte do portfólio, haverá, portanto, uma mudança nas perspectivas de retornos e riscos inerentes a cada um. O retorno e o risco, em contexto de carteira, estão ligados a fatores determinantes, como a quantidade de ativos, a correlação existente entre eles e à proporção que cada um possui no portfólio.

Em consonância à formulação de carteiras de investimento, surge a implementação da Pesquisa Operacional, em específico, a programação quadrática, como forma de otimização dos investimentos, a fim de se chegar ao investimento que possui as proporções ideais para um determinado risco ou retorno preestabelecido. Nesse sentido, a utilização da ferramenta *Solver* do *EXCEL* facilita relevantemente o processo de formação de carteiras eficientes, atuando de forma pontual e eficaz na melhor composição das carteiras de investimentos.

Existem, portanto, metodologias que buscam facilitar a aplicação da programação quadrática via *Solver* do Microsoft *EXCEL* na formação de carteiras de ações em consonância com a teoria de Markowitz. O modelo de Moore e Weatherford (2005), por exemplo,

encontrado no livro Tomada de Decisão em Administração com Planilhas Eletrônicas, ressalta a utilidade de tais métodos à aplicação da pesquisa operacional na gestão de carteiras de ações, tendo por finalidade colaborar com os trabalhos executados por investidores, pesquisadores e estudantes.

Dessa forma, considera-se relevante desdobrar na presente pesquisa o seguinte questionamento: **através da programação quadrática, facilitada, ainda, pelo uso da ferramenta solver do EXCEL, a prática da composição de carteiras de investimentos em ações pode ser tornada mais didática e instrutiva para estudantes, profissionais de investimentos e investidores?**

### 1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral da pesquisa é demonstrar a contribuição didática da aplicação da Programação Quadrática via *solver* do *Microsoft EXCEL* à formação de carteiras de ações consideradas conservadoras segundo a teoria de Markowitz.

### 1.2 Objetivos específicos

Visando o alcance do objetivo geral, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Determinação da composição de risco mínimo para carteiras de duas ações;
- Processamento da composição do risco mínimo para carteira com três ações;
- Especificação da composição de risco mínimo para carteiras com quatro ações;
- Identificação da composição de risco mínimo para carteira com cinco ações;
- Elucidação da composição de risco mínimo para carteira com dez ações.

### 1.3 Delimitação da Pesquisa

A pesquisa pretende abordar, segundo a teoria de Markowitz, as múltiplas possibilidades de formação de carteiras de ações de risco mínimo com a aplicação da programação quadrática, possibilitada pelo uso do *Solver* (ferramenta do *Microsoft EXCEL*). Nesse sentido, a pesquisa delimita-se à demonstração da aplicabilidade do uso do *Solver* como ferramenta de auxílio às decisões de investimento em carteiras de ações, vislumbrando



enxergar a relação existente entre risco x retorno nas composições das carteiras de risco mínimo com dois, três, quatro, cinco e dez ativos.

Como forma de elucidação e aplicação da pesquisa operacional no processo de composição de carteiras, propôs-se a utilização do modelo de Moore e Weatherford (2005), que traz modelos de utilização de programação quadrática na composição de carteiras de ações, facilitada ainda, pelo Microsoft EXCEL.

#### **1.4 Justificativa**

Os investimentos, quando tomados à luz do empirismo, tornam-se bastante perigosos ao investidor que decide alocar seu capital em determinado ativo. Quando o investidor decide por investir em determinada ação unicamente por meios não racionais e metódicos, ele estará expressivamente exposto ao risco de perda de seu patrimônio. O empirismo e o achismo nas decisões de investimento em ações são os grandes vilões dos investidores, que decidem investir unicamente pela tendenciosidade do mercado ou pelas deduções, quase sempre, errôneas a respeito de determinadas ações.

Quando o investidor detém maior racionalidade de métodos de análise de cenários no momento em que decide investir em determinadas ações, ele estará mais bem embasado para formar carteiras adequadas ao seu perfil de risco. Ao lançar mão do empirismo em razão dos métodos existentes de análise de investimentos em ações, o investidor deterá maior capacidade de enxergar os riscos intrínsecos, resultando em maior segurança com relação aos retornos previstos nos métodos quantitativos.

Finalmente, a presente pesquisa torna-se relevante em razão de sua contribuição voltar-se à demonstração do uso da programação quadrática via *Solver* do *Microsoft EXCEL* no aperfeiçoamento didático do processo de investimento em ações por meio da formação de carteiras.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 Retorno de investimentos em ações

Em termos gerais, o *retorno* é entendido como o regresso ou a contraprestação de algo investido. Rotineiramente, são estabelecidas relações de investimento tendo como objetivo um determinado retorno, que podem facilmente ser identificados nas relações de troca que são estabelecidas pelo mercado, seja na compra da cesta básica (onde se investe determinada quantia para obter alimentos), seja na aplicação de dinheiro em poupança (com o intuito de se obter um retorno monetário pela aplicação), e é exatamente nesse ponto que se adentra na significância do retorno na perspectiva financeira.

Diante da perspectiva financeira, o retorno pode ser compreendido, assim como em termos gerais, como a contraprestação ou compensação que se obtém ao decidir-se investir determinada quantia de capital em um ativo qualquer. Ao decidir investir, o investidor tem como parâmetro de compensação da aplicação o próprio retorno, que será usufruído no futuro. Para o investidor, a atratividade de um ativo está fortemente relacionada à perspectiva de retorno que tal ativo lhe trará em relação sob uma dada taxa de risco envolvida, assim, se o investidor não achar o investimento minimamente atraente ao observar os fatores de risco e retorno envolvidos, ele optará por não investir no ativo.

Para Gitman (2010, p.204), retorno:

é o ganho ou prejuízo total que se tem com um investimento ao longo de um determinado período de tempo. Costuma ser medido como distribuições de caixa durante o período mais a variação de valor, este, expresso como porcentagem do valor do investimento no início do período.

O retorno de um ativo deve ser calculado a partir da fórmula 01, descrita logo abaixo:

$$r_t = \frac{C_t + P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (01)$$

Onde:

$r_t$  = taxa de retorno efetiva, esperada ou exigida durante o período t

$C_t$  = (fluxo de) caixa recebido do investimento no ativo durante o período de t-1 a t

$P_t$  = preço (valor) do ativo no tempo t

$P_{t-1}$  = preço (valor) do ativo no tempo t-1

Para Brigham e Houston (1999), configura-se como a taxa de retorno esperada ( $\hat{k}$ ), chamada de “k-chapéu”, a taxa de retorno que se espera de um determinado investimento, obtida através da média ponderada da distribuição de probabilidade dos resultados possíveis, expresso na fórmula 02 a seguir:

$$\hat{k} = \sum_{i=1}^n P_i \times k_i \quad (02)$$

Onde:

P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub>... P<sub>n</sub>: Probabilidades de ocorrências dos eventos 1,2,3...n.

k<sub>1</sub>, k<sub>2</sub>, k<sub>3</sub>...k<sub>n</sub>: Taxas de retornos em caso de ocorrência de tais condições

Ao falar-se de retorno em um mercado, é de suma importância salientar as variadas formas de obtenção de retorno. Os retornos podem dar-se mediante a rentabilidade/lucro de um investimento, como também através do ganho de capital ou variações mercadológicas do valor de mercado do ativo. A rentabilidade via lucro, é proveniente do resultado do fluxo de caixa gerado pelos ativos. O ganho de capital é a forma de retorno que se apresenta conforme as variações mercadológicas do preço, que é base fundamental para a análise de retorno em investimento em ações.

Segundo Coelho (2010, p.13) “o retorno pode ser representado pelos ganhos de capital e pelos dividendos distribuídos”.

Outra variante necessária para a compreensão do retorno de investimento é a caracterização dos diferentes tipos de ativos, que trarão retornos conforme a particularidade de cada um. Desta forma, é de vital importância tornar clara a existência dos diversos tipos de investimento, seja ele de renda fixa ou renda variável, os quais se diferenciam pelo estabelecimento ou não de um retorno antes do ato de investir.

Segundo Cerbasi (2008) *apud* Martini (2012), “os investimentos em renda fixa caracterizam-se como aqueles que geram rendimentos fixos, onde a rentabilidade é previamente determinada no momento da aplicação ou no momento do resgate da mesma”.

Os investimentos em renda fixa possibilitam aos investidores maior segurança quanto ao retorno proveniente de sua aplicação, algo que não ocorre quando se fala em investimentos de renda variável, que sofrem diferentes tipos de interações com o mercado, fazendo com que o retorno do investimento não possa ser estipulado. Os fatores existentes no mercado é que determinam o retorno que aquele investimento obterá ao longo do tempo.

Para Póvoa (2007) *apud* Pereira *et al* (2008, p.18):

esses fatores podem interferir nas expectativas dos investidores em relação a um ativo, influenciando na demanda desse ativo. Então entra em ação a lei da oferta e demanda, ou seja, quando a oferta de um produto excede à demanda, seus preços tendem a cair.

Para Pereira *et al* (2008, p.18), “os rendimentos variáveis oferecem mais riscos que os investimentos fixos, pois não há como prever todos os fatores externos, e como esses fatores podem interferir na procura por esses ativos”.

Diante das observações expostas com relação às particularidades dos investimentos, bem como dos retornos provenientes de tais investimentos, fica clara a necessidade de uma análise mais aprofundada e sólida, no que diz respeito ao retorno proveniente de investimentos em ativos isoladamente e em um contexto de carteira de ações.

### **2.1.1 Investimento isolado**

O investimento em um único ativo faz com que a taxa de retorno que se espera em torno da ação esteja condicionado às características da mesma. Quando se investe isoladamente, aplica-se todo o capital em uma única fonte de investimento, sujeitando-se ao risco pertencente unicamente a tal fonte.

O investimento em ações possibilita ao investidor dois tipos de retornos: o lucro ou rentabilidade e o ganho de capital. A rentabilidade inerente ao investimento em uma ação qualquer é obtida sob a forma de dividendo que é pago ao investidor pela disponibilização do capital investido na ação. O ganho de capital de uma ação, por sua vez, é obtido através da variação observada no preço da ação no mercado (GITMAN, 2010).

Ao decidir investir em uma ação, o investidor observa, primeiramente, se a taxa de retorno que o investimento lhe trará no futuro compensa o risco pelo qual o capital está exposto. O investidor estará disposto a aplicar o seu capital em ações que satisfaçam a relação risco/retorno eficientemente. Dessa forma, poucos são os investidores de capital que se propõem a investir em ações com um risco similar a de outras ações, entretanto com uma taxa de retorno menor. De modo geral, o investidor tende a exigir maior retorno em razão do maior risco do investimento (BRIGHAM; HOUSTON, 1999).

### **2.1.2 Carteira de ações**

O retorno, quando enxergado isoladamente, é o resultado do investimento integral do capital em um determinado ativo, que detém um determinado nível de risco com relação ao

retorno que se espera do mesmo. Quando observado pela perspectiva de carteira de ações, o retorno obtido passa a depender de outras variáveis, como a parcela e o risco inerente a cada ativo, configurando-se como fatores determinantes para a geração do valor do retorno da carteira (GITMAN, 2010).

Segundo Gitman (2010, p.215), “o retorno de uma carteira é dado pela média ponderada dos retornos dos ativos individuais que a compõem”.

Para encontrar o retorno da carteira, aplica-se a fórmula 3:

$$\bar{r} = \sum_{j=1}^n r_j \times w_j \quad (03)$$

Onde:

$w_i$ = proporção do valor total em unidades monetárias da carteira representado pelo ativo j.

$r_j$ = retorno do ativo j.

As diferentes proporções de cada ativo numa carteira de ações fazem como que haja diferentes possibilidades de retorno. Os ativos, apesar de serem os mesmos, passam a ter proporções diversas, e como possuem riscos diversos, influenciam diretamente no valor que se pode obter no retorno geral da carteira. Percebendo tais alternativas, faz-se necessário encontrar uma composição ótima, onde o retorno seja maximizado em razão do risco oferecido pelo investimento. A figura 2.1 ilustra a relação entre as proporções dos ativos nas carteiras e os retornos correspondentes:

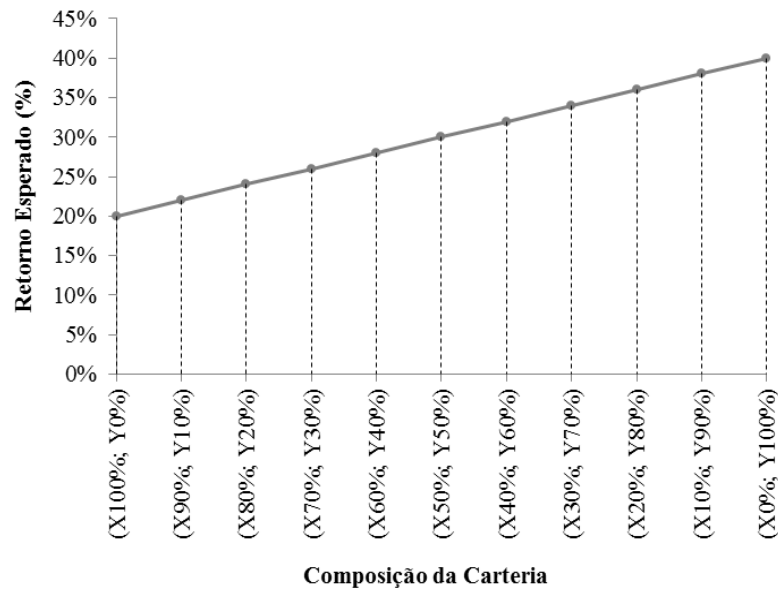


Figura 2.1: retornos esperados de diferentes composições de portfólio

Fonte: adaptado de Assaf Neto (2006).

As participações das ações na carteira contribuem para a formação de diferentes composições que a mesma pode possuir. Conforme se mudam as participações de cada ação na carteira, mudará também a composição geral da carteira, influenciando no nível de risco e retorno. O conjunto de combinações diversas que uma mesma carteira pode possuir possibilita a seleção da composição mais atrativa para o investidor com base na relação risco/retorno. Assim, restringe-se a seleção de oportunidades de investimentos a partir de uma fronteira eficiente, ou seja, onde as relações entre o risco e retorno possibilitem a melhor tomada de decisão de investimento possível.

Para Assaf Neto (2006, p.245), “na fronteira eficiente, é possível selecionar uma carteira que apresenta, para determinado retorno, o menor risco possível”.

A figura 2.2 demonstra a fronteira eficiente na relação de dois ativos:

O ponto **m** representa a composição de carteira de risco mínimo. Abaixo do ponto **m** encontram-se as composições que formam o conjunto ineficiente, dada a relação inversamente proporcional entre risco/retorno. Acima do ponto **m**, encontram-se as composições que formam o conjunto eficiente, dada a relação diretamente proporcional entre risco/retorno.

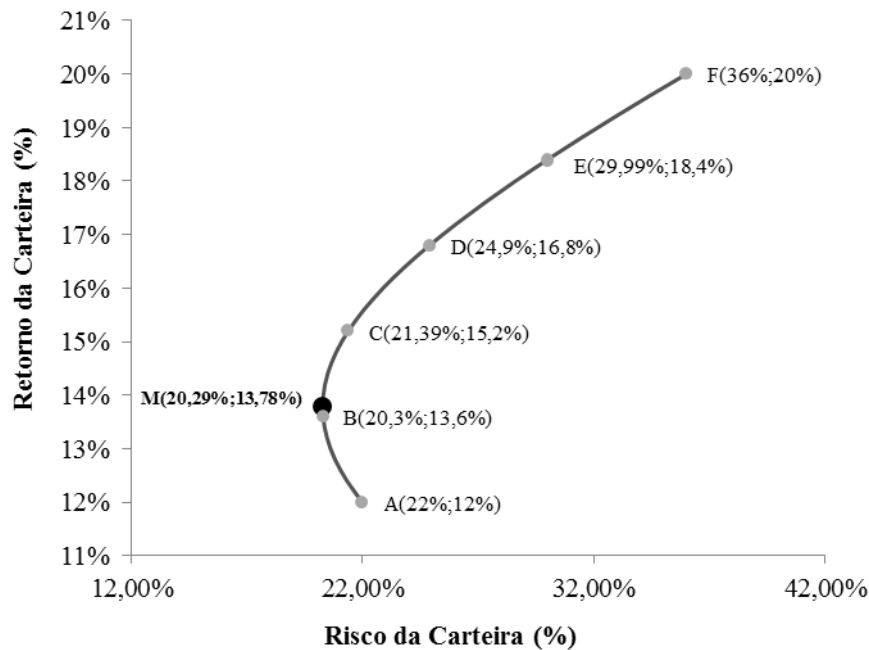


Figura 2.2: fronteira eficiente

Fonte: adaptado de Assaf Neto (2006).

Finalmente, oportunidades de investimentos eficazes estão localizadas sobre a curva do gráfico. Pontos alheios a essa curva, configuram-se como pontos ineficientes de investimentos, pois, com um dado risco pode-se obter um retorno maior do que o que se encontra nos pontos abaixo da fronteira.

## 2.2 Risco de investimento em ações

A decisão de investir em um ativo ou em carteira de ações é o resultado da análise de fatores intrínsecos à empresa e fatores relacionados ao mercado. Assim, partindo-se de tais perspectivas, poderá ser mensurado o provável sucesso ou insucesso do investimento.

Esse ambiente de incerteza intrínseco ao mercado incita o investidor a mensurar até que ponto ele está sensível a tais fatores. Dentro dessa perspectiva, traz-se a aceção de risco, que, segundo Gitman (2010, p.203), “é a probabilidade de perda financeira ou, mais formalmente, a variabilidade dos retornos associados a um dado ativo”.

Segundo Assaf Neto (2006, p.207), “o risco é, na maioria das vezes, representado pela medida estatística do desvio padrão, ou variância, indicando-se o valor médio esperado e representativo do comportamento observado”.

Para Brigham e Houston (1999, pag. 159) “O risco do investimento, então, está

relacionado com a probabilidade de se obter um retorno menor do que o esperado”.

Segundo Gitman (2010, pag. 210), “o indicador estatístico mais comum de risco de um ativo é o desvio padrão,  $\sigma_r$ , que mede a dispersão em torno do valor esperado”.

A fórmula 04 mostra o desvio padrão dos retornos:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{j=1}^n (r_j - \bar{r})^2 \times Pr_j} \quad (04)$$

Onde:

$\sigma$  = desvio-padrão

$\bar{r}$  = valor esperado do retorno

$r_j$  = retorno para o  $j^{\circ}$  resultado

$P_{rj}$  = probabilidade de ocorrência do  $j^{\circ}$  resultado

Segundo Brigham e Houston (1999, pag. 163), “o desvio padrão é essencialmente uma média ponderada dos desvios em torno do valor esperado e dá a ideia de quanto acima ou abaixo do valor esperado é provável que esteja o valor realizado”.

Como o desvio padrão é a representação probabilística do risco, por meio dele pode-se ter maior embasamento para as decisões de investimento em um ativo x ou y, uma vez que, a partir de sua mensuração, pode-se deduzir qual ativo possui menor ou maior risco com relação ao outro. Em resumo, quanto maior o desvio padrão, maior é o risco do ativo. De forma contrária, quanto menor o desvio padrão, menor é o risco do ativo (BRIGHAM; HOUSTON, 1999).

Apesar de o desvio padrão ser uma técnica comprovada quanto à análise de risco de retornos, ele por si só não dá ao investidor total certeza da melhor escolha de investimento. Sendo assim, torna-se necessária outra ferramenta que ratifique ou retifique os dados que o desvio-padrão mostra. Em alternativa a isso, surge a análise do coeficiente de variação, que mostra sua real utilidade quando se compara riscos de ativos com retornos esperados diversos (GITMAN, 2010).

Para Gitman (2010, pag. 212), “o coeficiente de variação, CV, consiste em uma medida relativa que é útil a comparação dos riscos de ativos com diferentes retornos esperados”.

A equação 05 dá a expressão do coeficiente de variação:



$$CV = \frac{\sigma_r}{\bar{r}} \quad (05)$$

Onde:

$C_V$  = coeficiente de variação

$\sigma_r$  = desvio-padrão do retorno

$\bar{r}$  = valor esperado do retorno

Segundo Gitman (2010, pag. 212), “quanto maior o coeficiente de variação, maior o risco e, portanto, maior o retorno esperado”.

O risco de um investimento é uma combinação de fatores externos e internos que fazem com que haja uma maior ou menor variância do retorno do investimento. Diante desses conceitos, é necessária a compreensão da composição básica do risco total de um investimento, compreendida como a soma entre risco específico (não sistemático ou diversificável) e risco sistemático (mercado) (GITMAN, 2010).

O risco sistemático é inerente a todos os ativos negociados no mercado e é determinado por eventos de natureza política, econômica e social. Cada ativo comporta-se de forma diferente diante da situação conjuntural estabelecida (ASSAF NETO, 2006, pag. 216).

Brigham e Houston (1999, pag. 174) afirmam que “o risco de mercado tem origem em fatores que afetam sistematicamente a maioria das empresas: guerra, inflação, recessões e taxas de juros altas”.

O risco não sistemático é identificado nas características do próprio ativo, não se alastrando aos demais ativos da carteira. É um risco intrínseco, próprio de cada investimento realizado, e sua eliminação de uma carteira é possível pela inclusão de ativos que não tenham correlação positiva entre si. (ASSAF NETO, 2006, pag. 216).

Para Brigham e Houston (1999, pag. 174), “o risco diversificável é ocasionado por eventos aleatórios, como processos judiciais, programas de marketing bem ou malsucedidos, ganho ou perda de grandes contratos e outros eventos específicos a uma empresa”.

A combinação entre o risco diversificável e risco não diversificável resulta no risco total ou desvio padrão dos retornos do investimento (GITMAN, 2010). O risco sistemático é inerente ao mercado, e, portanto, nenhuma técnica de minimização do risco pode ser aplicada. Em contrapartida, tem-se a oportunidade de, através da diversificação em carteira de ativos,

minimizar grande parcela ou até mesmo eliminar o risco específico do ativo, possibilitando uma redução considerável do risco total inerente à composição da carteira de ações (GITMAN, 2010).

Em meio às discussões sobre os riscos e suas interferências nos retornos dos ativos no momento do investimento, surge, em complemento e com grande relevância, o modelo de precificação de ativos (CAPM), que busca complementar, em forma de análise, o relacionamento do risco total de um ativo isolado ou de uma carteira com o risco de mercado.

Segundo Assaf Neto (2006, p.253), “o modelo de CAPM é derivado da teoria do Portfólio, buscando, mais efetivamente, respostas de como devem ser relacionados e mensurados os componentes básicos de uma avaliação de ativos: risco e retorno”.

O CAPM é bastante utilizado nas várias operações do mercado de capitais, participando do processo de avaliação de tomada de decisões em condições de risco. Por meio desse modelo, é possível também apurar-se a taxa de retorno requerida pelos investidores. O coeficiente **beta**, medida obtida do modelo, indica o incremento necessário no retorno de um ativo de forma a remunerar adequadamente seu risco sistemático (ASSAF NETO, 2006, p. 253).

Conforme Assaf Neto (2006, p.262), “após serem identificados os retornos dos ativos e da carteira do mercado, todos os dados são plotados em gráfico, permitindo a observação da reta característica”.

Diante do comportamento positivamente correlacionado dessas variáveis, a reta característica é obtida mediante regressão linear. Nessa regressão são identificadas duas importantes medidas financeiras, o coeficiente beta ( $\beta$ ) e o coeficiente ( $\alpha$ ), que representam o parâmetro angular e linear da reta de regressão, respectivamente (ASSAF NETO, 2006, p. 262).

Segundo Assaf Neto (2006, p.262), a equação da reta característica, de acordo com a equação da reta ( $Y=a+bx$ ), é expressa da forma seguinte:

$$R_j - R_f = \alpha + \beta(R_m - R_f) + \varepsilon_j \quad (06)$$

Onde:

$R_j$  = retorno proporcionado pela ação da Cia. J em cada ano do horizonte de tempo estudado;

$R_f$  = taxa de juros de títulos livres de risco (risk free);

$R_m$  = retorno da carteira do mercado;

$R_m - R_f$  = respectivamente, retorno adicional da ação da Cia. J e do mercado em relação ao

retorno dos títulos sem risco( prêmio de risco);

$\beta$  = coeficiente beta. Parâmetro angular da área de regressão, que identifica o risco sistemático do ativo em relação ao mercado;

$\alpha$  = coeficiente alfa. Parâmetro linear da reta de regressão;

$\varepsilon_j$  = erro randômico.

Segundo Assaf Neto (2006, p.262), “o parâmetro linear da reta de regressão, denominado coeficiente alfa, indica o retorno esperado em excesso de um ativo, na hipótese de o retorno em excesso da carteira de mercado ser nulo”.

Se alfa é negativo ( $\alpha < 0$ ), um investidor racional escolherá o melhor resultado esperado proveniente da combinação de um ativo sem risco com a carteira de mercado. Em contrapartida, para a situação de uma ação com coeficiente alfa positivo ( $\alpha > 0$ ), os investidores se sentirão atraídos para o investimento (ASSAF NETO, 2006).

O modelo CAPM exprime o risco sistemático de um ativo por seu coeficiente beta, identificado com o parâmetro angular na reta de regressão linear, também chamada de reta característica. Dessa forma, a carteira de mercado, por conter unicamente risco sistemático (o risco não sistemático foi todo eliminado pela diversificação), apresenta beta igual a 1,0 (ASSAF NETO, 2006).

O coeficiente angular de uma reta de regressão é calculado mediante a seguinte expressão:

$$b = \frac{\text{COV } x, y}{\text{VAR } x} \quad (07)$$

Colocando-se essa metodologia de cálculo no contexto do CAPM, tem-se:

$$\text{Coeficiente Beta } (\beta) = \frac{\text{COV } R_j, R_m}{\text{VAR } R_m} \quad (08)$$

As interpretações com relação ao coeficiente beta são as seguintes (ASSAF NETO, 2006): quando o beta de um ativo for exatamente igual a 1,0, diz-se que a ação movimenta-se conforme a direção da carteira de mercado, em termos de retornos esperados (deduz-se então, que o risco da ação analisada é igual ao risco do mercado como um todo); uma ação com beta maior que 1,0 possui um risco sistemático maior que o da carteira de mercado, e assim, o

retorno em excesso da ação varia mais que proporcionalmente ao de mercado, remunerado o risco adicional ao ativo. Quando o beta de uma ação é inferior a 1,0; observa-se um risco sistemático menor que o da carteira de mercado, e assim, o retorno em excesso é proporcionalmente menor ao retorno do mercado.

### **2.2.1 Investimento isolado**

Segundo Gitman (2010), o risco isolado é o risco a que o investidor estaria exposto se ele ou ela tivessem apenas um ativo. [...] a relação entre risco e retorno é tal que nenhum investimento será feito a menos que a taxa de retorno esperada seja suficientemente alta para compensar o investidor pelo risco percebido.

O risco de um ativo está diretamente relacionado à chance de ocorrência de um cenário desfavorável. Dessa forma, aplica-se esse raciocínio na análise de risco isolado de ações de mercado. Ao decidir investir em uma única ação, o investidor deverá ficar atento à relação risco x retorno estabelecida, onde, inicialmente deve-se observar a condição de que o retorno esperado seja condizente com o risco que a ação oferece ao integridade do capital investido.

Ao comparar-se duas ações pertencentes ao mercado, o investidor deverá estar atento às medidas de dispersão pertencentes de cada ação, para assim, escolher a ação que possua a melhor relação risco x retorno. Nessa dinâmica, o investidor deverá estar atento a dois principais métodos estatísticos de análise de dispersão: o desvio padrão e o coeficiente de variação.

As principais considerações em relação à análise do desvio-padrão estão relacionadas à escolha de qual ação é a que detêm menor chance de ter um evento desfavorável nos retornos. Assim, em um cenário onde duas ações possuem a mesmo retorno esperado, deve-se escolher a ação que possua menor desvio padrão.

Para Gitman (2010, p.212), “o coeficiente de variação,  $C_v$ , consiste em uma medida relativa que é útil a comparação dos riscos de ativos com diferentes retornos”.

Considerações interessantes acerca do coeficiente de variação podem ser obtidas, pois o mesmo possui a capacidade de relacionar a efetiva relação entre o risco e retorno de ações com retornos diferentes. O coeficiente de variação faz com que, em uma hipotética situação de duas ações que possuam retornos esperados diferentes, escolha-se, através da análise do mesmo, o melhor investimento em determinada ação. Ao analisarem-se duas ações, em uma perspectiva de aversão ao risco, escolher-se-á a ação da qual se obtiver menor coeficiente de

variação. De forma complementar a análise do risco de ações com base no desvio-padrão e variância, adota-se a hipótese de normalidade ao comportamento retorno histórico das ações.

A utilização da distribuição de probabilidade normal promove várias contribuições, tendo como principal delas fazer previsões relacionadas ao comportamento futuro do retorno da ação.

As distribuições de probabilidades fornecem uma visão mais quantitativa do risco de um ativo. A probabilidade de um dado resultado é a chance de que ele ocorra. Um resultado com probabilidade de ocorrência de 80% deverá ocorrer 8 vezes a cada dez. A ocorrência de um resultado com probabilidade de 100% é certa. Resultados com probabilidade zero jamais ocorrerão (GITMAN, 2010, p. 208).

Para Gitman (2010, p.212), “uma distribuição normal sempre lembra uma curva em ‘forma de sino’. É simétrica: do pico do gráfico, os dois lados da curva são imagens especulares (refletidas) um do outro”.

A simetria percebida da curva da distribuição da figura 2.3 a seguir indica que metade da probabilidade está associada a valores à esquerda do pico central e metade a valores à direita (GITMAN, 2010).

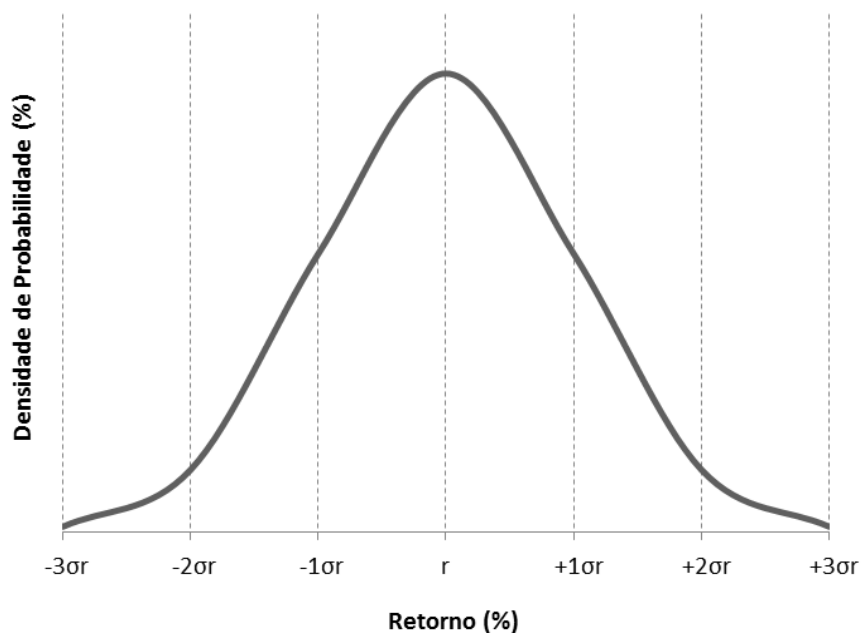


Figura 2.3: distribuição normal

Fonte: adaptado de Gitman (2010).

As medidas de dispersão observadas pela curva normal de probabilidade explicitam o nível de risco ao qual a ação está exposta. Quanto maior a dispersão de uma ação em relação à média na curva da distribuição normal de probabilidades, maior será o risco da ação. De forma contrária, quanto menor a dispersão observada em relação à média na curva normal de probabilidade, menor será o risco da ação.

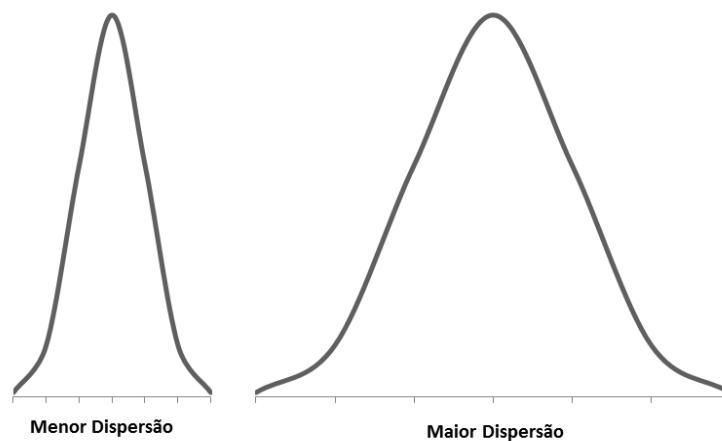


Figura 2.4: risco baixo e risco alto

Fonte: adaptado de Assaf Neto (2006).

Ao escolher por investir em uma ação isoladamente, o investidor dará importância necessária à análise do risco e retorno do capital investido na ação. Sendo assim, ao investir em uma ação de maior ou menor risco, o investidor necessita de um retorno que possa ser condizente com o risco ao qual o capital esteja submetido.

Ao tomar decisões de investimentos em ações isoladamente, o investidor deve estar atento às relações de risco x retorno que possam ser observadas ao comparar as informações inerentes à ação e o mercado. Assim, ao considerar o risco e retorno que determinada ação lhe proporcionará, observando-se se o mercado remunera mais ou menos do que a própria ação, o investidor estará tomando as melhores decisões com relação a investimentos de seu capital.

### 2.2.2 Carteira de ações

A introdução da análise da perspectiva de risco na carteira de ações é de fundamental importância para a prática de minimização do risco em investimentos.

O objetivo do estudo de carteiras de ativos, de acordo com a moderna teoria formulada do portfólio, é selecionar a carteira definida como ótima [...], ou seja: selecionar a carteira que oferece o maior retorno possível para determinado grau de risco, ou, de forma idêntica, selecionar carteira que produza o menor risco possível para determinado nível de retorno esperado (ASSAF NETO, 2006, p. 226).

O risco na perspectiva de carteiras de ações não é obtido da mesma forma quando analisado a partir de um ativo individualmente. O risco de uma carteira de ações é obtido através da inserção de um novo elemento: a correlação. A correlação entre as ações de uma mesma carteira é o fator que define o nível de risco ao qual a carteira está submetida, sendo ela, portanto, a base do estudo para a obtenção de uma carteira eficiente, por meio da diversificação de ações de uma carteira.

Para Assaf Neto (2006, p.235), “o risco de uma carteira depende não somente do risco de cada elemento que a compõe e de sua participação no investimento total, mas também da forma como seus componentes se relacionam (covariam) entre si”.

Como o risco de um único ativo não é similar ao risco sob a ótica de carteira de ações, então, pode-se deduzir que seu cálculo também se dá de forma singular. O risco de uma carteira é obtido através de desvios padrões de cada uma das ações aliado ao percentual de cada ação no portfólio, mas também a um terceiro fator definidor, chamado de coeficiente de correlação, que determinará a relações estabelecidas entre as ações da carteira, possibilitando a maximização ou minimização do risco da mesma.

A expressão geral do risco (desvio padrão) de uma carteira que contem  $n$  ativos, com base no modelo de portfólio desenvolvido por Markowitz, segundo Assaf Neto (2006), é a seguinte:

$$\sigma_p = \left[ \sum_{i=1}^N w_i^2 \times \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \cdot \sum_{j=1}^N w_i w_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j \right]^{\frac{1}{2}} \quad (09)$$

A correlação é a medida estatística da relação entre duas séries de números quaisquer. Se duas séries se movem na mesma direção, elas são positivamente correlacionadas. Quando se movem em direções opostas, são negativamente relacionadas. (GITMAN, 2010, p. 215)

Para Gitman (2010, p.215), “o grau de correlação é dado pelo coeficiente de correlação, que varia entre +1 para séries perfeita e positivamente correlacionadas e -1 para

séries perfeita e negativamente correlacionadas”.

Cálculo do coeficiente de correlação de dois ativos:

$$\rho_{x,y} = \frac{COV_{x,y}}{\sigma_x \times \sigma_y} \quad (10)$$

Onde:

$\rho_{x,y}$ =correlação entre os ativos x e y

$COV_{x,y}$ = covariância entre os ativos x e y

$\sigma_x \times \sigma_y$ = multiplicação dos desvios padrões de cada ativo.

Para a análise de carteiras eficientes, torna-se de fundamental importância o estudo da correlação existente entre os ativos pertencentes à carteira. A fim de se reduzir o risco total de uma carteira de ativos, é melhor diversificar por meio da combinação, ou acréscimo à carteira, de ativos com correlação negativa (ou positiva fraca). A combinação de ativos negativamente correlacionados pode reduzir a variabilidade geral em torno dos retornos, implicando em riscos menores (GITMAN, 2010).

Quanto menor a correlação existente entre os ativos em um portfólio, menor será o risco envolvido a tal composição. Conforme se percebe na figura 2.5, quando os ativos possuem relação diretamente proporcional, há dificuldade em diversificar-se. De modo contrário, quando a relação estabelecida entre dois ativos é inversamente proporcional, há maior possibilidade de diversificação.

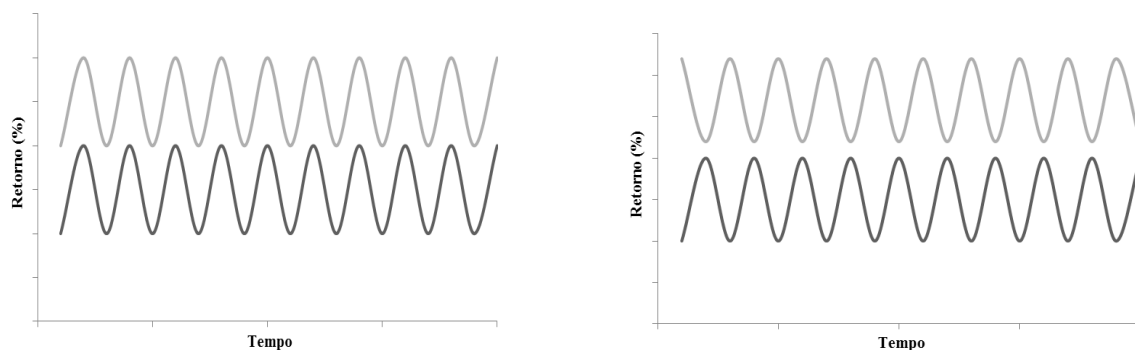


Figura 2.5: correlação entre os ativos M e N.

Fonte: adaptado de Gitman (2010).



Através da diversificação, há a possibilidade da minimização do risco total envolvido no investimento na carteira de ações. À medida que se estabelece um conjunto de ações pertencentes à carteira, que possuam correlação negativa ou o mais próximo disso, encaminha-se rumo a uma composição que minimize o risco total da carteira de ações.

Através da diversificação, é possível esperar que ativos com risco possam ser combinados no contexto de uma carteira (portfólio), influenciando em uma perspectiva de risco menor que aquele calculado para cada um dos ativos pertencentes ao portfólio. A redução do risco da carteira sempre será permitida com o incremento de ativos que não sejam perfeita e positivamente relacionados (ASSAF NETO, 2006).

Para Assaf Neto (2006, p. 227), “no entanto, essa redução constatada em uma carteira diversificada ocorre até certo limite, sendo impraticável a eliminação total do risco da carteira”.

O risco total de uma carteira, é assim como de um único ativo, composto por uma parte sistemática e específica; a única parcela da carteira que poderá ser diversificada é a parte específica inerente a cada um dos ativos, no entanto, a parcela do risco que vem do mercado, continuará intacta.

O risco diversificável é o que pode ser total ou parcialmente excluído mediante o processo de diversificação da carteira; por outro lado, o risco sistemático é o que não pode ser eliminado (ou reduzido) mediante qualquer processo de diversificação, esse risco sempre estará acompanhando a estrutura de risco do portfólio de investimento (ASSAF NETO, 2006).

A figura 2.6 evidencia a redução do risco, onde o risco específico detém menor representatividade no risco total, em razão da inserção de novos ativos negativamente correlacionados na carteira – o risco específico pode ser totalmente eliminado pela diversificação:

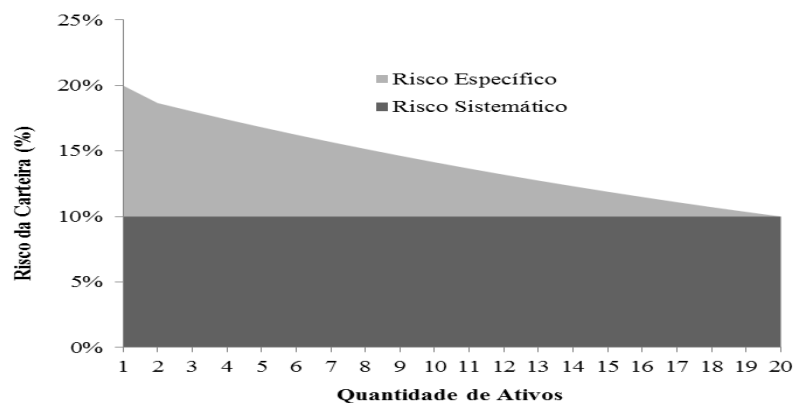


Figura 2.6: redução do risco pela diversificação.

Fonte: adaptado de Assaf Neto (2006).

Em complemento à teoria do portfólio e à diversificação dos ativos de uma carteira, surge o modelo de precificação de ativos - CAPM. O modelo CAPM, sob a ótica de composições de uma carteira de ações, busca relacionar e mensurar o risco ao mercado. A medida de avaliação de risco com base no CAPM é o beta da carteira.

Para Assaf Neto (2006), a avaliação do risco de uma carteira, o beta é entendido como a média ponderada de cada ativo contido na carteira, sendo determinado pela seguinte expressão:

$$\beta_p = \sum_{j=1}^n \beta_j \times W_j \quad (11)$$

Onde:  $\beta$  e  $W_j$  representam, respectivamente, o coeficiente beta (risco sistemático) e a participação relativa de cada ativo incluído na carteira, e o  $\beta_p$ , o beta da carteira.

### 2.3 Pesquisa operacional e gestão da carteira de ações

O processo de investimento em qualquer tipo de ativo necessita de um tratamento de otimização para que os recursos sejam alocados da melhor forma possível, a fim de se obter um objetivo, o maior retorno possível combinado ao menor risco possível. A pesquisa operacional entra em diversos campos de atuação, em contextos organizacionais, quando se necessita intensificar a utilização dos recursos com o intuito de maximizar a receita ou minimizar os custos de produção, bem como em outros campos de atuação externos à empresa, como na análise de investimentos.

A pesquisa operacional se utiliza, na tentativa de resolução de problemas, modelos de otimização lineares ou não lineares. A otimização linear, tomando-se como exemplo da relação preço e venda, caracteriza-se por presumir que o preço é uma constante dada,  $\mathbf{p}$ , e as vendas, a quantidade a ser vendida, é uma variável  $\mathbf{x}$  que se supõe ser independente do preço. Diz-se, portanto, que a receita é proporcional ao preço. A não linearidade, tomando-se como base o exemplo anterior, considera que o preço pode ser uma variável e a quantidade das vendas pode depender do preço, configurando-se uma relação de dependência (MOORE; WEATHERFORD, 2005).

Sob a perspectiva de tomadas de decisão em finanças, nota-se a maior aplicabilidade de utilização de modelos de programação não linear, em especial a Programação Quadrática, tendo em vista que a grande maioria dos problemas que envolvem tais decisões não se dá de



viável, em otimização PNL o solver usa o método ascendente, que se baseia em procedimento de busca de gradiente reduzido generalizado, chamado de GRG (MOORE; WEATHERFORD, 2005, pag. 319).

Segundo Moore e Weatherford (2005, p. 328), “a programação não linear constitui um tópico extremamente amplo, possibilitando identificar muitos tipos especiais interessantes de modelos NLP, muitos dos quais são designados para resolver modelos de NPL”.

Ao analisar sob a perspectiva de investimento em ativos no mercado financeiro, percebe-se a necessidade e aplicabilidade de métodos de otimização que a pesquisa operacional fornece às tomadas de decisões financeiras. Ao decidir compor uma carteira de ações, o investidor busca obter o menor risco possível para um dado retorno almejado. No entanto, sabe-se que a relação risco x retorno é altamente proporcional, desafiando os investidores a comporem suas carteiras de forma eficiente. É nesse sentido que a inserção de pesquisa operacional direcionada a tal decisão se faz necessária.

A utilização de pesquisa operacional com métodos de NLP quadrática aliada à teoria do portfólio moderna de finanças é a mais indicada quando se deseja encontrar um valor de otimização de composição da carteira de ações.

### 2.3.1 Programação quadrática

A programação não linear é um modelo matemático que desenvolve relações diversas, que objetivam a distribuição dos recursos limitados, sob restrições impostas pelos diversos aspectos, como tecnológicos e de mercado Auxiliam no processo decisório das organizações, sendo que uma das mais comuns é a programação quadrática (PAULO, 2006, pag.44).

Para Wagner (1986) *apud* Edilson Paulo (2006), a programação quadrática “consiste em uma função-objetivo constituída de termos lineares e quadráticos e de um conjunto de restrições lineares”.

Segundo Moore e Weatherford (2005) um programa quadrático (QP), assim como um programa linear com números inteiros (ILP), é primo-irmão de um programa linear, pois possui muitas propriedades que são inerentes a uma programação linear. Pode-se observar as similaridades entre os dois modelos de programação na comparação a seguir:

- *Modelo de programação linear:*

Maximiza ou minimiza o valor de uma função objetivo *linear* sujeita a um conjunto de restrições lineares de igualdade e desigualdade, assim como condições possíveis

de não-negatividade sobre os valores de variáveis de decisão (MOORE; WEATHERFORD, 2005, p.336).

- *Modelo de programação quadrática:*

Maximiza ou minimiza o valor de uma função objetivo *quadrática* sujeita a um conjunto de restrições lineares de igualdade e desigualdade, assim como condições possíveis de não-negatividade sobre os valores variáveis de decisão (MOORE;WEATHERFORD, 2005, p. 336)

Em geral, uma função quadrática em variáveis  $N$  pode ser redigida desta forma:

$$\sum_{i=1}^N A_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N B_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^N C_i x_i + D \quad (12)$$

Para Moore e Weatherford (2005), as similaridades entre a programação linear e a quadrática são observadas a partir do momento em que os coeficientes  $A_i$  e  $B_{ij}$  da fórmula acima são iguais à zero. Assim, a função, antes quadrática, passa a se configurar como uma função linear.

A otimização em modelos quadráticos de uma programação não linear dar-se-á de duas maneiras: com a utilização de um otimizador não linear, como o Solver, e outro é utilizar-se de um otimizador de programação quadrática especialmente elaborado (otimizador especializado fornecido pela *Solver Premium Edition*). A utilização de softwares como Solver ou um otimizador especializado em problemas de programação quadrática é o método de PNL mais indicado quando se fala em decisões de investimento para a otimização de carteiras de ações. A descoberta do conjunto de oportunidades bem como a composição ótima das variáveis existentes e suas ponderações na composição da carteira é o principal output gerado pela utilização de tal método. Fazendo com que, no momento de aplicar seu capital, o investidor possua maior segurança e embasamento, a partir de cálculos matemáticos, para saber em que composição de carteira maximizará seu retorno do capital investido (MOORE; WEATHERFORD, 2005).

### 2.3.2 Programação quadrática e carteira ótima de ações

A utilização de programação quadrática para a definição da composição otimizada da carteira de ações é uma ferramenta que chega com o objetivo de agregar valor ao processo de

investimento em portfólios eficientes. A teoria moderna de finanças, a partir do incremento da perspectiva de programação quadrática na análise do investimento, maior segurança e solidez com relação aos resultados obtidos com relação à composição das carteiras.

Para Moore e Weatherford (2005, p.338), “a seleção de carteira de títulos é um modelo fundamental em finanças modernas”.

O modelo de análise de carteira de títulos pode ser apresentado da seguinte forma: um investidor tem  $P$  dólares para investir em um conjunto de  $n$  ações e gostaria de saber quanto investir em cada tipo de ação. A coleção escolhida é chamada de carteira de títulos ou portfólio de investimentos. O investidor tem objetivos conflitantes: gostaria de uma carteira com muito retorno esperado e com pouco risco. Esses objetivos são conflitantes porque muitas vezes, no mundo real, as carteiras de títulos com alto retorno esperado também têm alto risco (MOORE; WEATHERFORD, 2005, p. 338).

A formulação de um modelo de carteira de títulos segue o modelo geral, que muda unicamente com relação ao número de ativos que são adicionados à carteira (MOORE; WEATHERFORD, 2005).

Modelo geral de carteiras com dois ativos segundo Moore e Weatherford (2005, p. 339):

$$\text{Min } \sigma_1^2 x_1^2 + 2 \sigma_{12} x_1 x_2 + \sigma_2^2 x_2^2 \text{ (variação do retorno)} \quad (2)$$

$$\text{s.a } x_1 + x_2 = I \text{ (todos os fundos devem ser investidos)}$$

$$x_1 R_1 + x_2 R_2 \geq b \text{ (lim. Inf. do retorno esperado da cart. de títulos)}$$

$$x_1 \leq S_1 \text{ (limite superior dos investimentos na ação 1)}$$

$$x_2 \leq S_2 \text{ (limite inferior dos investimentos na ação 2)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ (não-negatividade implica que não se permite “venda a$$

descoberto” de uma ação)}

Onde:

$\sigma_i^2$  = variância de retornos anuais da ação  $i, i = 1, 2$

$\sigma_{12}$  = covariância de retornos anuais das ações 1 e 2

$R_i$  = retorno anual esperado da ação  $i, i = 1, 2$

$b$  = limite inferior do retorno anual esperado do investimento total

$S_i$  = limite superior do investimento na ação  $i, i = 1, 2$

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 Tipo de pesquisa

A utilização de critérios de tipologia de pesquisa é fator essencial ao entendimento da abordagem utilizada em todo o processo de pesquisa. Segundo Vergara (2010), as abordagens de tipologia dão-se, no mínimo, seguindo dois critérios essenciais: quanto aos fins e quanto aos meios utilizados para a formulação da pesquisa.

Quanto aos fins, esta pesquisa classifica-se como descritiva e explicativa. Para Vergara (2010), a pesquisa descritiva evidencia características de uma população ou de determinado fenômeno; pode também estabelecer correlações entre variáveis e definir sua natureza; dessa forma, se enquadra no contexto deste trabalho, que visou descrever como encontrar carteiras de risco mínimo a partir da execução da programação quadrática com a utilização do *Microsoft EXCEL*. Segundo Vergara (2010), a investigação explicativa tem como principal objetivo esclarecer quais fatores contribuem para a concorrência de determinado fenômeno; sendo assim, tem-se que este trabalho também é explicativo quanto aos fins, pois buscou explicar a contribuição didática do uso da programação quadrática via solver do Microsoft Excel na determinação de carteiras de risco mínimo.

Quanto aos meios, classifica-se como bibliográfica, uma vez que os dados que sustentam os resultados foram coletados do banco de dados online disponibilizado pelo site [www.comdinheiro.com.br](http://www.comdinheiro.com.br) mediante cadastro. Ainda foram utilizados materiais didáticos, redes eletrônicas e sites de obtenção de dados, que permitiu a formação do arcabouço necessário para a realização da mesma, ressaltando seu caráter bibliográfico de acordo com Vergara (2010).

Segundo Soares (2003), a abordagem quantitativa adota a quantificação de dados obtidos para a pesquisa, se fazendo necessária a utilização de recursos e técnicas estatísticas, do mais simples ao mais complexo. Nesse sentido, a abordagem desta pesquisa utilizada se configura como quantitativa, uma vez que se utiliza dos seguintes tratamentos estatísticos: desvio-padrão, média, coeficiente de variação e coeficiente de correlação.

#### 3.2 Universo e amostra

De acordo com Vergara (2010), o campo de atuação do universo e amostra tem como base definir a população e a população amostral em pesquisa: entendendo-se população como

sendo um conjunto de elementos que possuem características que serão objetos de estudo; população amostral trata-se, portanto, de uma parte do universo segundo algum critério de representatividade, podendo ser classificada como probabilística ou não; as probabilísticas são classificadas como aleatórias simples, estratificadas e por conglomerado; com relação às não probabilísticas, classificam-se em por acessibilidade e por tipicidade.

O universo da pesquisa desenvolvida são as ações listadas na bolsa de valores de São Paulo – BM&FBOVESPA.

A BM&FBOVESPA é uma companhia que administra mercados organizados de títulos, valores mobiliários e contratos derivativos, além de prestar serviços de registro, compensação e liquidação, atuando, principalmente, como contraparte central garantidora da liquidação financeira das operações realizadas em seus ambientes (BM&FBOVESPA, 2014).

Segundo Vergara (2010), na amostra não probabilística por acessibilidade não há procedimentos estatísticos na seleção dos elementos abordados na pesquisa. Dessa forma, população amostral foi definida como tal, pois se tratou de um grupo de ações que formam o IBRX50 – ações selecionadas por critérios especificamente pré-determinados pela Bolsa de Valores de São Paulo.

O IBRX-50, grupo de ações abordado como espaço amostral da pesquisa, é um índice que mede o retorno total de uma carteira teórica composta por 50 ações selecionadas entre as mais negociadas na BM&FBOVESPA em termos de liquidez, ponderadas na carteira pelo valor de mercado das ações disponíveis à negociação (BM&FBOVESPA, 2014).

### **3.3 Coleta de dados**

A coleta de dados foi obtida por meio de pesquisa bibliográfica com acesso ao banco de dados de preços ajustados das ações que compõem o IBRX50 da BM&FBovespa, que constam no banco de dados de cotações do site COMDINHEIRO, instituição essa que tem por finalidade servir de apoio aos estudiosos que se dedicam às finanças, por meio de fornecimento de informações, cotações e ferramentas de auxílio à investigação de problemáticas financeiras. Foram coletados os dados de preços diários ajustados no período de 31/12/2009 a 31/12/2013 das ações pertencentes ao IBRX50.



### 3.4 Tratamento de dados

Os dados tratados na pesquisa em questão obedeceram a uma sequência de etapas ou passos, necessários ao atingimento dos objetivos específicos e final previamente definido. O passo-a-passo vem exposto a seguir:

**Passo 1.** Formação da matriz de correlação com todos os ativos aptos do IBRX50.

**Passo 2.** Formação de duas carteiras: uma carteira com duas ações de menor correlação e uma segunda carteira com duas ações de maior correlação.

**Passo 3.** Formação de carteiras com 3, 4, 5 e 10 ativos, baseados na menor correlação entre eles.

**Passo 4.** Para cada carteira de duas ações, calcularam-se os indicadores estatísticos de média, desvio-padrão, covariância, que aliados a ferramenta *solver*, proporcionou a obtenção do conjunto de oportunidades de investimento e da carteira de risco mínimo.

**Passo 5.** Para as carteiras compostas com três, quatro, cinco e dez ações, foram calculados os indicadores estatísticos de média, desvio-padrão, covariância, assim como a utilização *solver*, proporcionando o alcance da composição da carteira de risco mínimo de cada cenário.

O primeiro passo é, sem dúvida, o passo fundamental para se chegar a um bom resultado quanto à determinação da carteira de risco mínimo. No passo 1, é formulada a matriz de correlação entre os retornos diários no intervalo de 3 anos (somente dias úteis) das 43 empresas do IBRX50 aptas a compor o portfólio em análise. Assim, formulou-se a matriz de correlação entre tais retornos, visando identificar quais são os pares de ativos mais e menos correlacionados no portfólio. A partir daí, obteve-se os conjuntos mais e menos relacionados, que, mediante tratamento estatístico, serviram de composições das carteiras no presente estudo. Dos pares com menor correlação, pode-se citar, em sequência: 1º par – **CMIG4** e **CTIP3**; 2º par – **OIBR4** e **CIEL3**; 3º par – **CTIP3** e **NATU3**; 4º par – **FIBR3** e **CIEL3**; 5º par – **EMBR3** e **CIEL3**; 6º par – **JBSS3** e **CITP3**; 7º par – **NATU3** e **CIEL3**; 8º par – **CIEL3** e **BRKM5**; 9º par – **PCAR4** e **CIEL3**; 10º par – **HGTX3** e **CMIG4**. Do par com maior correlação (utilizado para compor a única carteira de maior correlação com dois ativos), pode-se citar: **BRAP4** e **VALE3**.

Sabendo-se das composições dos pares menos correlacionados e do par mais correlacionado, partiu-se, então, para a composição das duas carteiras com 2 ativos mais e menos correlacionados, e, em sequência, a formulação das demais carteiras de menor correlação, com 3, 4, 5 e 10 ativos.

O segundo passo foi compor uma carteira composta por duas ações menos correlacionadas entre si e outra carteira de dois ativos mais correlacionados, com a finalidade de exemplificar a aplicabilidade de teoria, que afirma que carteiras com ativos mais correlacionados entre si possuem risco maior que carteiras com ativos menos correlacionados. Para tanto, foi escolhida a composição com menor correlação, ou seja, com o 1º par – **CMIG4** e **CTIP3**, bem como a composição do par mais correlacionado **BRAP4** e **VALE3**.

O terceiro passo foi a formação das carteiras de 3, 4, 5 e 10 ativos com base na escala de correlação existente entre as ações aptas do IBRX50, como pôde ser observada no início do tópico de tratamento de dados. Assim, tomando-se por base tal escala de correlação, as carteiras foram compostas da seguinte forma:

- ✓ Carteira com 3 ativos: **CMIG4, CITP3 e CIEL3;**
- ✓ Carteira com 4 ativos: **CMIG4, CITP3, CIEL3 e OIBR4;**
- ✓ Carteira com 5 ativos: **CMIG4, CITP3, CIEL3, OIBR4 e NATU3;**
- ✓ Carteira com 10 ativos: **CMIG4, CITP3, CIEL3, OIBR4, NATU3, FIBR3, EMBR3, JBSS3, BRKM5 e PCAR4.**

O quarto passo evidencia o tratamento das duas carteiras com 2 ativos menos e mais correlacionadas. Foram feitos tratamentos estatísticos com base nos retornos diários de cada uma das ações, obedecendo ao intervalo de 3 anos de retornos diários das cotações. Na tabela de informações dos ativos é explicitado o retorno, covariância e desvio-padrão de cada ativo pertencente a cada carteira. Os preços de fechamento ajustado serviram de base para o cálculo da média dos retornos ( $k$ ) de cada ativo em cada carteira (mais ou menos correlacionadas). Em consequente, foram calculadas as variâncias de cada amostra (ação) de cada carteira, e, com base na variância, chegou-se ao resultado de desvio-padrão de cada ativo de cada uma das carteiras.

Os procedimentos formulados nesta pesquisa à formulação de carteiras de risco mínimo, abordados nas metodologias de composição de carteiras com 2, 3, 4, 5 e 10 ativos, foram permitidos a partir da proposta de Moore e Weatherford (2005), apresentada no livro intitulado Tomada de Decisão em Administração com Planilhas Eletrônicas, capítulo 7, páginas 338 a 343. O método proposto por tais autores foi adaptado às composições de carteiras de risco mínimo em modelos de planilhas eletrônicas desenvolvidos no Microsoft EXCEL 2010.

As figuras a seguir refletem as planilhas eletrônicas feitas à consecução dos objetivos específicos desta pesquisa, modelos que resultaram da adaptação do método de Moore e Weatherford (2005).

Na figura 3.1 mostra como se deu todo o procedimento de cálculos estatísticos para facilitar o processo de carteira de risco mínimo no *solver*. Nela, pode-se observar a matriz 1, onde são verificados os pesos de otimização de cada um dos ativos na composição da carteira, que somados implicam em um total de 100%. Na Matriz 2, são efetuados os cálculos de covariância entre os dois ativos que compõem a carteira. Na tabela de Carteira de Risco Mínimo, foram observados os valores de retorno, covariância e risco otimizados de cada carteira de investimentos. Com a utilização do *solver*, podemos chegar ao valor ótimo de composição da carteira com 2 ativos.

	A	B	C	D	E	F	G
1							Retorno do Ativo "A"
2							Retorno do Ativo "B"
3		Informações dos Ativos					Variância do Ativo "A"
4			A	B			Variância do Ativo "B"
5		k					Desvio Padrão do Ativo "B"
6		$\sigma^2$					Desvio Padrão do Ativo "A"
7		$\sigma$					
8							
9		Matriz 1 w (peso)					Peso do Ativo "A"
10			A	B	TOTAL		Peso do Ativo "B"
11					0%		=B12+C12
12							
13							
14		Matriz 2 $\sigma$ (covariância)					Covariância entre os Ativos "A" e "A" ou Variância do Ativo "A".
15			A	B			Covariância entre os Ativos "A" e "B"
16			A	0,0340%	0,0033%		Covariância entre os Ativos "B" e "B" ou Variância do Ativo "B".
17			B	0,0033%	0,0342%		
18							
19							
20		Carteira Risco Mínimo					Covariância entre os Ativos "A" e "B"
21			k	$\sigma^2$	$\sigma$		Desvio Padrão da Carteira =RAIZ(C23)
22			0,0000%	#VALOR!	#VALOR!		
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							

Figura 3.1: modelo para obtenção da carteira com risco mínimo –2 ativos

Fonte: elaboração própria, 2014.

Com relação ao uso do *solver*, são necessários *inputs* para que o mesmo funcione de forma satisfatória e atenda aos objetivos da aplicação da ferramenta. Na pesquisa em questão, os inputs utilizados foram: a célula objetivo – que expõe a finalidade se verificar no trabalho - no caso, o desvio padrão da carteira, os conjuntos de restrições - as composições que os ativos devem assumir na carteira -, devendo ser menor ou igual a 1, bem como a composição total, que deve obedecer a regra e ser igual a 1. Seleccionadas as células, foram observadas as configurações de programação não linear/quadrática, bem como se a função final é a otimização de maximizar ou minimizar. No caso, como se tratava do risco da carteira, seleccionou-se a opção “minimizar” e “finalizar” na aplicação do *solver*, para que então fosse possível chegar à composição otimizada de cada carteira presente na tabela de Carteira de Risco Mínimo. Todo esse processo pode ser observado na figura 3.2 abaixo:

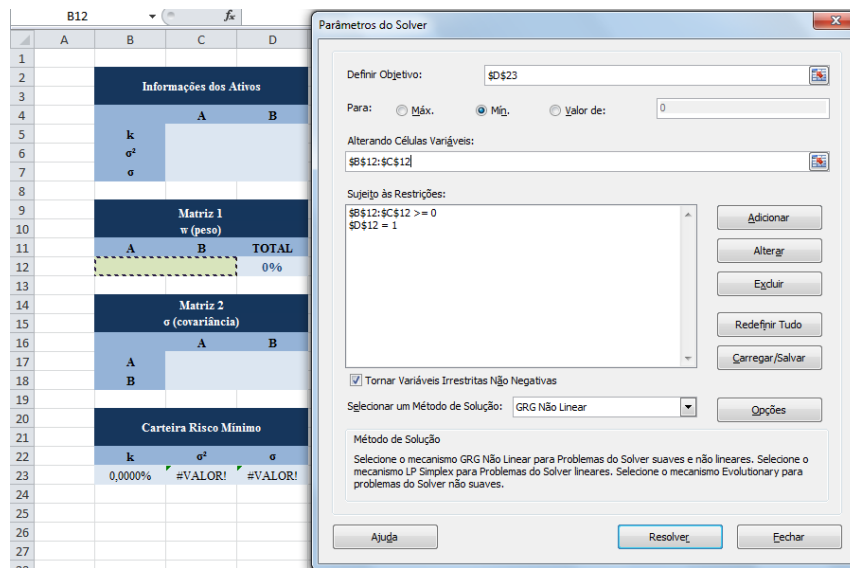


Figura 3.2: aplicação do *Solver* no modelo de obtenção da carteira de risco mínimo – 2 ativos.

Fonte: elaboração própria, 2014.

No quinto passo, buscou-se compor carteiras de 3, 4, 5 e 10 ativos, com base na mesma metodologia utilizada nas composições de carteira com dois ativos, mas com apenas ativos menos correlacionados. No entanto, tem vital relevância tornar compreensível que conforme o portfólio ganha novos ativos, também se faz necessário ajustá-los aos cálculos dos retornos, covariância e desvio-padrão da carteira. A aplicação técnica das carteiras de três, quatro, cinco e dez ações foi realizada de forma similar às carteiras de 2 ativos, sendo apenas necessários ajustes pontuais em razão do maior número de ativos em questão.

A seguir, são expostas a metodologia básica de obtenção e otimização da carteira de risco mínimo, possibilitada pelo *solver*, para cada caso: 3, 4, 5 e 10 ativos.

Metodologia – 3 ativos

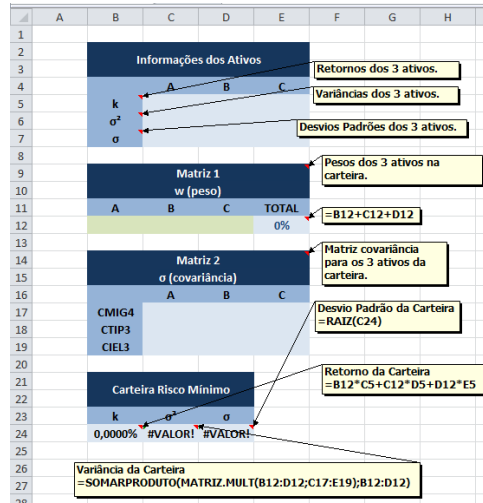


Figura 3.3: modelo para obtenção da carteira com risco mínimo –3 ativos

Fonte: elaboração própria, 2014.

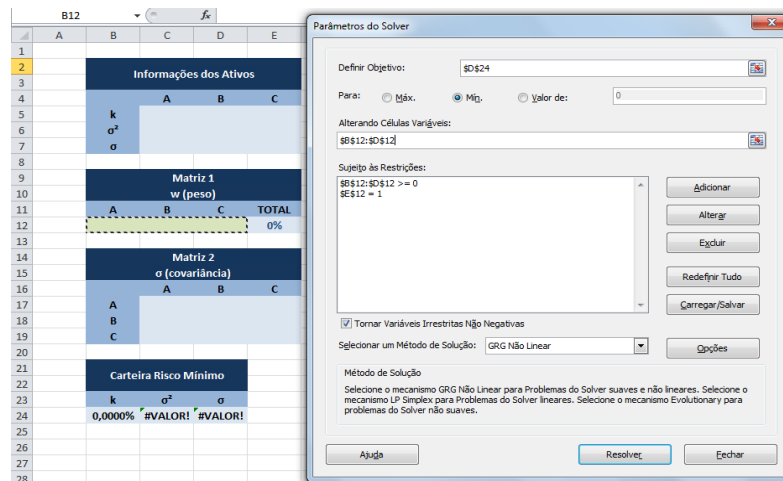


Figura 3.4: aplicação do Solver no modelo de obtenção da carteira de risco mínimo - 3 ativos

Fonte: elaboração própria, 2014.

Metodologia – 4 ativos

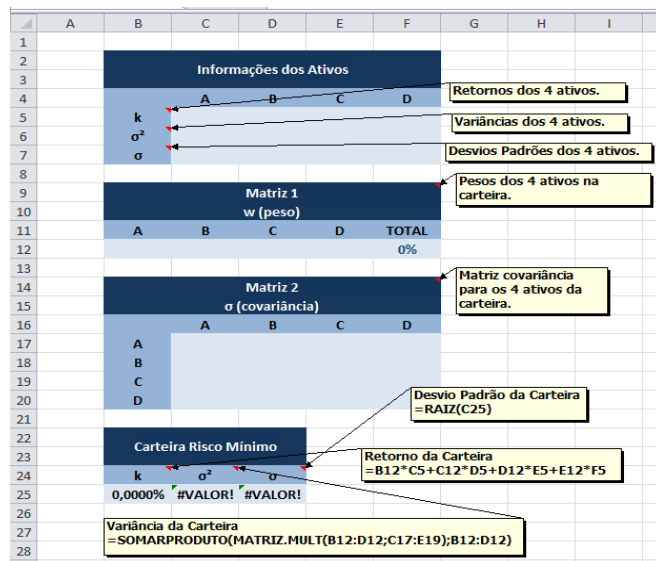
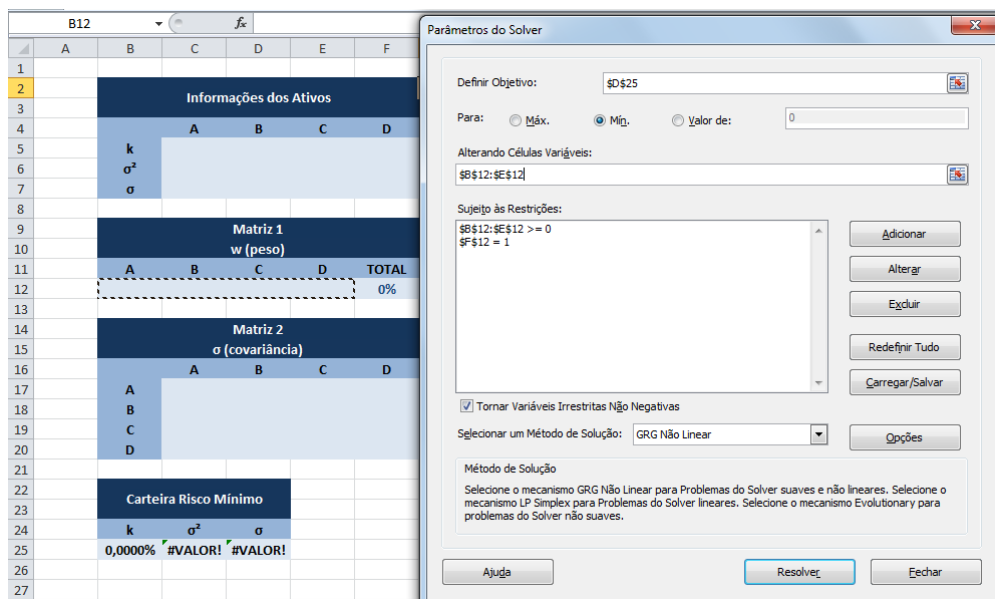


Figura 3.5: modelo para obtenção da carteira com risco mínimo – 4 ativos

Fonte: elaboração própria, 2014.



3.6: aplicação do Solver no modelo de obtenção da carteira de risco mínimo- 4 ativos

Fonte: elaboração própria, 2014.

## Metodologia - 5 ativos

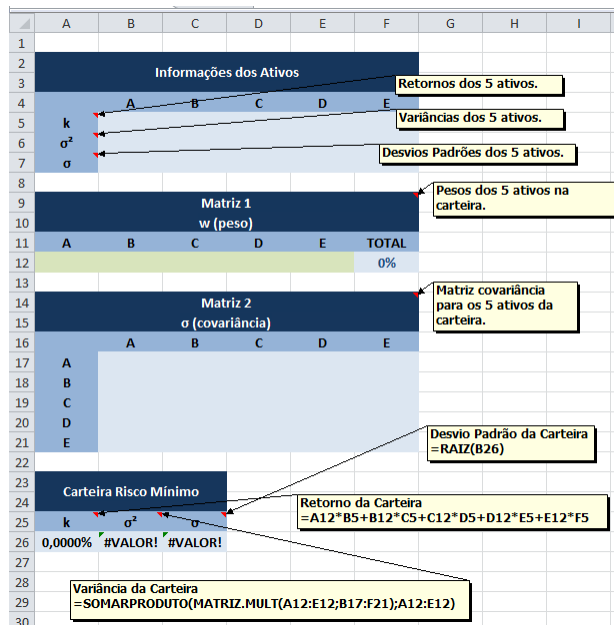


Figura 3.7: modelo para obtenção da carteira com risco mínimo – 5 ativos

Fonte: elaboração própria, 2014.

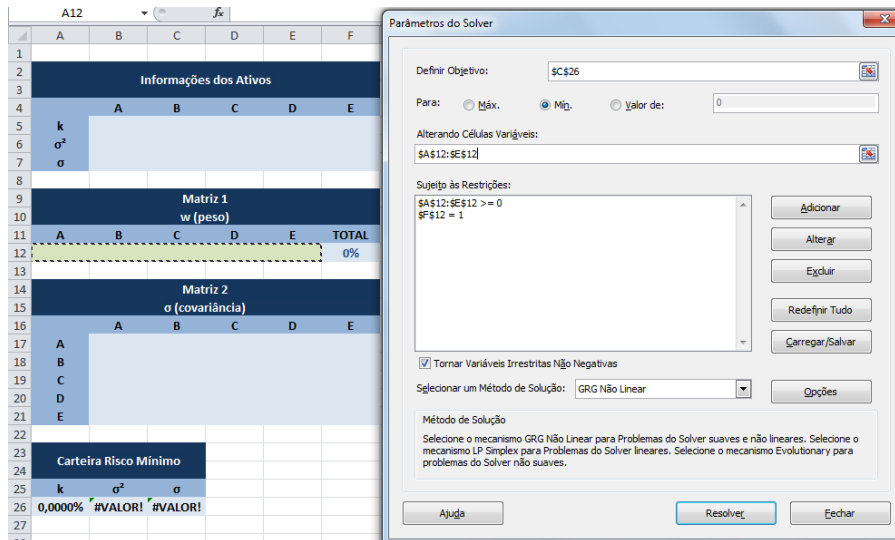


Figura 3.8: aplicação do Solver no modelo de obtenção da carteira de risco mínimo - 5 ativos

Fonte: elaboração própria, 2014.

Metodologia – 10 ativos

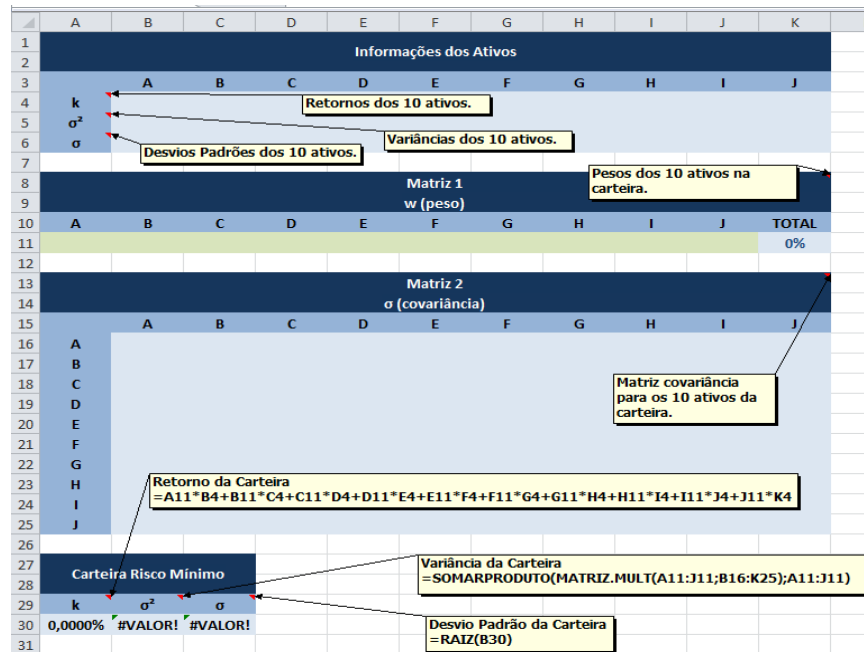


Figura 3.9: modelo para obtenção da carteira com risco mínimo –10 ativos

Fonte: elaboração própria, 2014.

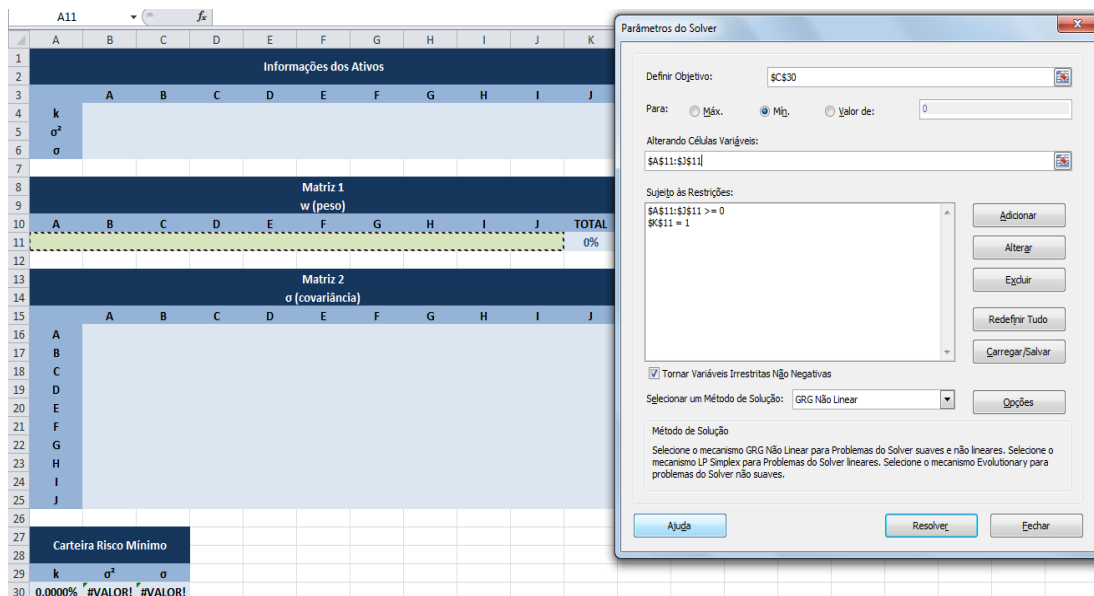


Figura 3.10: aplicação do Solver no modelo de obtenção da carteira de risco mínimo – 10 ativos

Fonte: elaboração própria, 2014.



## 4. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

As aplicações do método de composição de carteiras aliadas ao *solver* foram desenvolvidas em 6 cenários distintos: carteira com duas ações menos correlacionadas, carteira com duas ações mais correlacionadas, carteira com três ações, carteira com quatro ações, carteira com cinco ações e carteira com dez ações. Foram realizadas as metodologias aqui expostas, que serviram de embasamento para da análise dos resultados referente a cada um dos cenários das carteiras.

### 4.1 Carteira com duas ações

#### 4.1.1 Menor correlação

A carteira composta pelos ativos **CMIG4** e **CTIP3** foi desenvolvida com base no critério de menor correlação existente na análise das relações dos retornos diários das empresas do IBRX50.

A figura 4.1 expõe o procedimento de obtenção da carteira de risco mínimo para o par de ações menos correlacionadas. Nela, pode-se enxergar os parâmetros ou inputs necessários para se chegar à solução do problema. Em relação aos parâmetros do *solver*, identificados figura 4.1, pode-se citar: Definir célula objetivo e sua finalidade, células variáveis, restrições e o método utilizado. Com relação à célula objetivo e sua finalidade, foi selecionada a célula de risco da carteira (D23), e a finalidade da mesma, no caso, minimização do risco (mín.). Em relação às células variáveis, foram selecionadas as células presentes na matriz 1 (B12:C12), que correspondem aos pesos que cada uma das ações possuirão em uma dada perspectiva de carteira de risco mínimo. Os parâmetros de restrição são as presentes na matriz 1, que, no caso, são as de que a soma dos pesos deve ser maior ou igual a zero ( $B12+C12 \geq 0$ ) e de que o somatório dos pesos seja igual ao total ( $B12 + C12 = 1$ ). Finalizando, foi selecionado o método de aplicação, no caso, o GRG Não linear, representando a aplicação da programação não linear ao método do *solver*, e assim, clica-se em “resolver” para se chegar à carteira de risco mínimo e aos pesos de cada ação que permitem esse cenário.

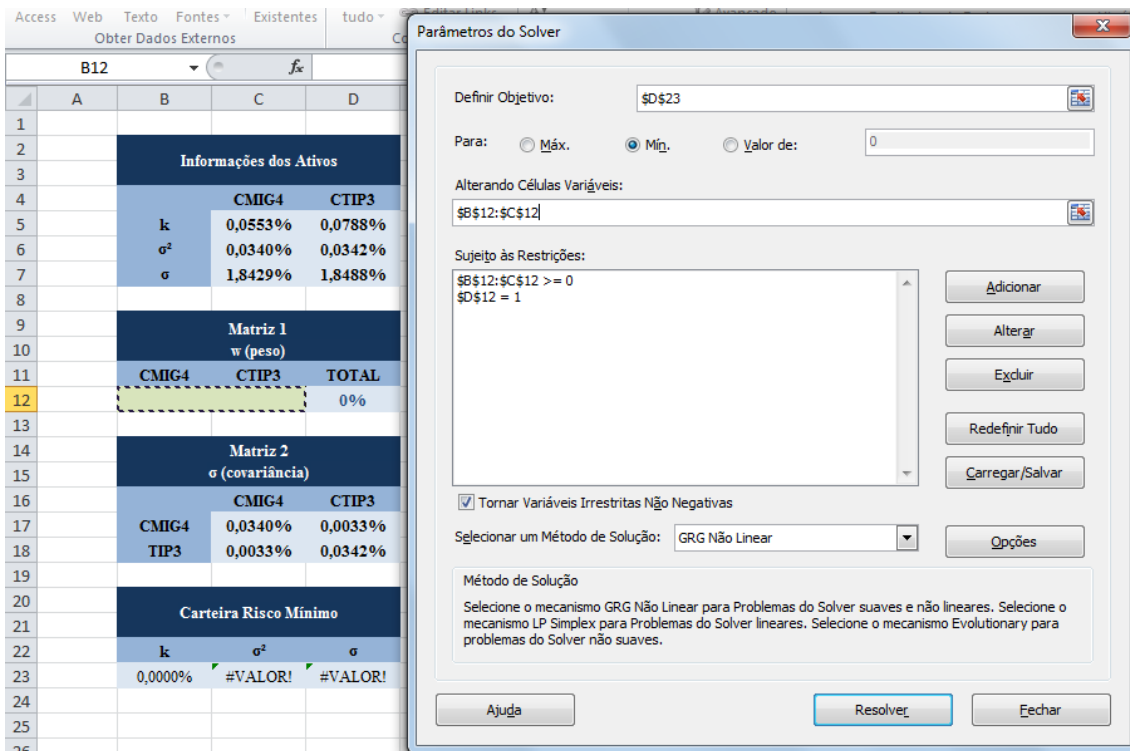


Figura 4.1: aplicação do *solver* na determinação da carteira de risco mínimo para os ativos **CMIG4** e **CTIP3**

Fonte: elaboração própria (dados da pesquisa), 2014.

A figura 4.2 expõe características e resultados que foram encontrados após a aplicação do método de composição de carteiras de duas ações, no caso, o par de menor correlação (CMIG4 e CTIP3). As características relevantes nessa figura são as de pesos de cada ação no total de capital investido, bem como os valores de risco e retorno encontrados.

Como resultados obtidos, identificou-se que a composição ideal da carteira de ações de risco mínimo é de aproximadamente 50,18% de capital investido na ação CMIG4 e 49,82% na ação CTIP3. A partir da referida composição, possibilitou-se o alcance de valores de risco de 1,3668% e retorno de 0,0670%.

	A	B	C	D	E
1					
2		Informações dos Ativos			
3					
4			CMIG4	CTIP3	
5		k	0,0553%	0,0788%	
6		$\sigma^2$	0,0340%	0,0342%	
7		$\sigma$	1,8429%	1,8488%	
8					
9		Matriz 1 w (peso)			
10					
11		CMIG4	CTIP3	TOTAL	
12		50,1780%	49,8221%	100%	
13					
14		Matriz 2 $\sigma$ (covariância)			
15					
16			CMIG4	CTIP3	
17		CMIG4	0,0340%	0,0033%	
18		TIP3	0,0033%	0,0342%	
19					
20		Carteira Risco Mínimo			
21					
22		k	$\sigma^2$	$\sigma$	
23		0,0670%	0,0187%	1,3668%	
24					

Figura 4.2: características da carteira formada pelos ativos **CMIG4** e **CTIP3**

Fonte: elaboração própria (dados da pesquisa), 2014.

Em continuidade às análises dos resultados encontrados, surge a necessidade de evidenciar o conjunto de oportunidades de investimento, bem como a fronteira que delimita os diversos pesos de cada ação na carteira, influenciando nos conjuntos eficientes e ineficientes.

Na figura 4.3 é exposta a tabela e o gráfico dos conjuntos de oportunidade de investimentos. Os resultados encontrados como valores de oportunidades de investimentos serviram de inputs para a formulação gráfica, que permite uma melhor visualização das oportunidades existentes entre 21 composições (com escala de 5% para as composições) possíveis entre as ações da **CMIG4** e **CTIP3**.

A partir da observação da figura 4.3, pode-se concluir que as composições de carteiras número 16, 17, 18, 19, 20 e 21 representam o conjunto eficiente, uma vez que os retornos acompanham diretamente os riscos incorridos - conforme o risco da carteira aumenta, o retorno também aumenta. Complementando a análise, as carteiras de números 1 a 15 representam o conjunto de composições de carteiras ineficientes, pois conforme o risco aumenta, o retorno não segue a mesma direção - pontos do gráfico distribuídos abaixo do ponto de risco mínimo (em vermelho).

Dessa forma, ao decidir investir na carteira que possui os ativos da **CMIG4** e **CTIP3**, o investidor deverá concentrar suas decisões de investimentos entre o ponto de risco mínimo

encontrado como valor otimizado do risco e, caso possua um perfil de menor aversão ao risco, adentrar no conjunto de oportunidades eficientes, onde se assume riscos maiores em razão de retornos maiores que poderão ser alcançados.

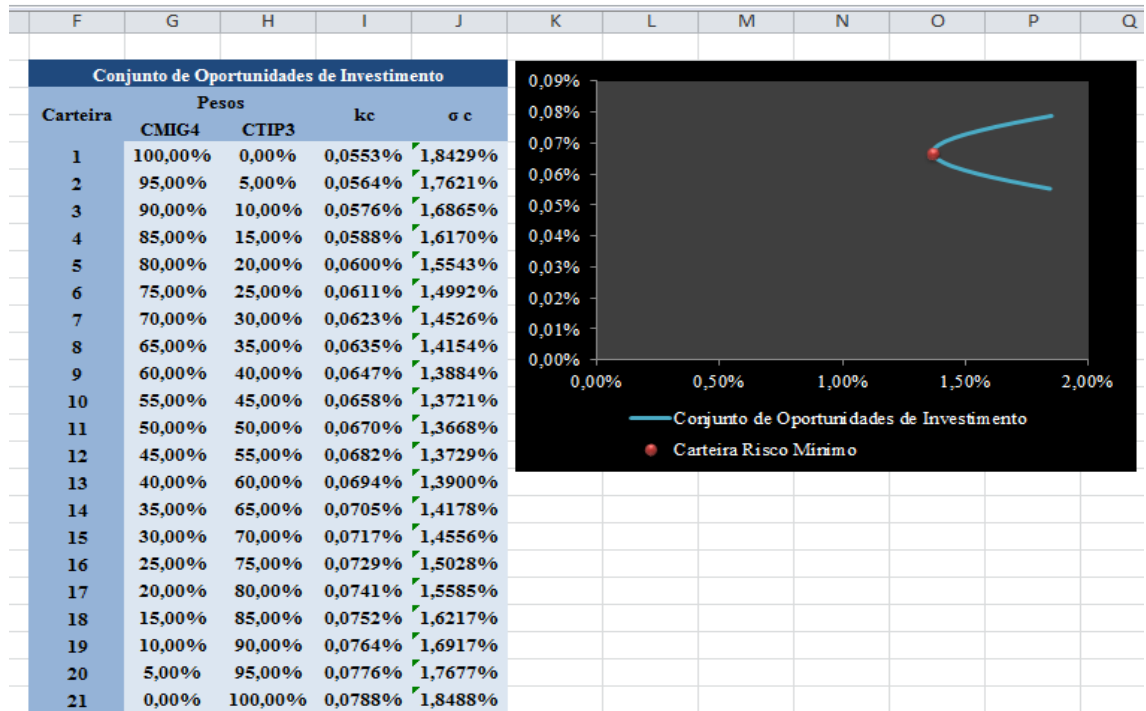


Figura 4.3: conjunto de oportunidades de investimento da carteira composta pelos ativos **CMIG4** e **CTIP3**

Fonte: elaboração própria (dados da pesquisa), 2014.

#### 4.1.2 Maior Correlação

A carteira composta pelos ativos **BRAP4** e **VALE3** foi desenvolvida com base no critério de maior correlação existente na análise das relações dos retornos diários das empresas do IBRX50 presentes no estudo. Assim como feito anteriormente, no caso de composições de carteiras com duas ações menos correlacionadas, foram feitas análises com as composições de carteiras mais correlacionadas, a fim de se evidenciar a didática do método.

A figura 4.4 expõe como foi realizado o procedimento de otimização de carteira de risco mínimo, no caso de par mais correlacionado. Nela, pode-se enxergar os parâmetros ou inputs necessários para se chegar à solução do problema. Em relação aos parâmetros do *solver*, identificados na figura 4.4, podemos citar: Definir célula objetivo e sua finalidade, células variáveis, restrições e o método utilizado. Com relação à célula objetivo e sua

finalidade, foi selecionada a célula de risco da carteira (D23), e a finalidade da mesma, no caso, minimização do risco (mín.). Com relação células variáveis, foram selecionadas o intervalo entre as células presentes na matriz 1 (B12:C12), que correspondem aos pesos que cada uma das ações possuirão em uma dada perspectiva de carteira de risco mínimo. Os parâmetros de restrição são as presentes na matriz 1, que, no caso, são as de que a soma dos pesos deve ser maior ou igual a zero ( $B12+C12 \geq 0$ ) e de que o somatório dos pesos seja igual ao total ( $B12 + C12 = 1$ ). Finalizando, assim como no primeiro caso menos correlacionado, foi selecionado o método de aplicação, no caso, o GRG Não linear, representando a aplicação da programação não linear ao método do *solver*, e assim, clica-se em “resolver” para se chegar à carteira de risco mínimo e aos pesos de cada ação que permitem esse cenário.

The image shows an Excel spreadsheet with the Solver Parameters dialog box open. The spreadsheet data is as follows:

Informações dos Ativos			
	BRAP4	VALE3	
k	-0,0081%	-0,0001%	
$\sigma^2$	0,0381%	0,0355%	
$\sigma$	1,9508%	1,8835%	

Matriz 1 w (peso)			
	BRAP4	VALE3	TOTAL
			0%

Matriz 2 $\sigma$ (covariância)			
	BRAP4	VALE3	
BRAP4	0,0381%	0,0334%	
VALE3	0,0334%	0,0355%	

Carteira Risco Mínimo			
	k	$\sigma^2$	$\sigma$
	0,0000%	#VALOR!	#VALOR!

The Solver Parameters dialog box is configured as follows:

- Definir Objetivo:  $\$D\$23$
- Para:  MÍN.  MÁX.  Valor de: 0
- Alterando Células Variáveis:  $\$B\$12:\$C\$12$
- Sujeito às Restrições:
  - $\$B\$12:\$C\$12 \geq 0$
  - $\$D\$12 = 1$
- Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas
- Selecionar um Método de Solução: GRG Não Linear
- Método de Solução: Seleccione o mecanismo GRG Não Linear para Problemas do Solver suaves e não lineares. Seleccione o mecanismo LP Simplex para Problemas do Solver lineares. Seleccione o mecanismo Evolutionary para problemas do Solver não suaves.

Figura 4.4: aplicação do *solver* na determinação da carteira de risco mínimo para os ativos

### BRAP4 e VALE3

Fonte: elaboração própria (dados da pesquisa), 2014.

A figura 4.5 expõe características e resultados que foram encontrados após a aplicação do método de composição de carteiras de duas ações, no caso, o par de maior correlação

(**BRAP4** e **VALE3**). As características relevantes nessa figura são as de pesos de cada ação no total de capital investido, bem como os valores de risco e retorno encontrados.

Como resultados obtidos, identificou-se que a composição ideal da carteira de ações de risco mínimo é de aproximadamente 30,93% de capital investido na ação **BRAP4** e 69,07% na ação **VALE3**. A partir da referida composição, possibilitou-se o alcance de valores de risco de 1,866% e retorno de -0,0026%.

	A	B	C	D	E
1					
2		<b>Informações dos Ativos</b>			
3					
4			<b>BRAP4</b>	<b>VALE3</b>	
5		<b>k</b>	-0,0081%	-0,0001%	
6		$\sigma^2$	0,0381%	0,0355%	
7		$\sigma$	1,9508%	1,8835%	
8					
9		<b>Matriz 1</b>			
10		<b>w (peso)</b>			
11		<b>BRAP4</b>	<b>VALE3</b>	<b>TOTAL</b>	
12		30,9278%	69,0723%	100%	
13					
14		<b>Matriz 2</b>			
15		<b><math>\sigma</math> (covariância)</b>			
16			<b>BRAP4</b>	<b>VALE3</b>	
17		<b>BRAP4</b>	0,0381%	0,0334%	
18		<b>VALE3</b>	0,0334%	0,0355%	
19					
20		<b>Carteira Risco Mínimo</b>			
21					
22		<b>k</b>	$\sigma^2$	$\sigma$	
23		-0,0026%	0,0348%	1,8662%	
24					

Figura 4.5: características da carteira formada pelos ativos **BRAP4** e **VALE3**

Fonte: elaboração própria (dados da pesquisa), 2014.

Na figura 4.6 é exposta a tabela e o gráfico dos conjuntos de oportunidade de investimentos. Os resultados encontrados como valores de oportunidades de investimentos serviram de inputs para a formulação gráfica, que permite uma melhor visualização das oportunidades existentes entre 21 composições (com escala de 5% para as composições) possíveis entre as ações da **BRAP4** e **VALE3**.

A partir da observação da figura 4.6, pode-se concluir que as composições de carteiras número 18, 19, 20 e 21 representam o conjunto eficiente, uma vez que os retornos acompanham diretamente os riscos incorridos - conforme o risco da carteira aumenta, o retorno também aumenta. Complementando a análise, as carteiras de números 1 a 17 representam o conjunto de composições de carteiras ineficientes, pois conforme o risco aumenta, o retorno não segue a mesma direção - pontos do gráfico distribuídos abaixo do

ponto de risco mínimo (em vermelho).

Dessa forma, ao decidir investir na carteira que possui os ativos da **BRAP4** e **VALE3**, o investidor deverá concentrar suas decisões de investimentos entre o ponto de risco mínimo encontrado como valor otimizado do risco e, caso possua um perfil de menor aversão ao risco, adentrar no conjunto de oportunidades eficientes, onde se assume riscos maiores em razão de retornos maiores que poderão ser alcançados.

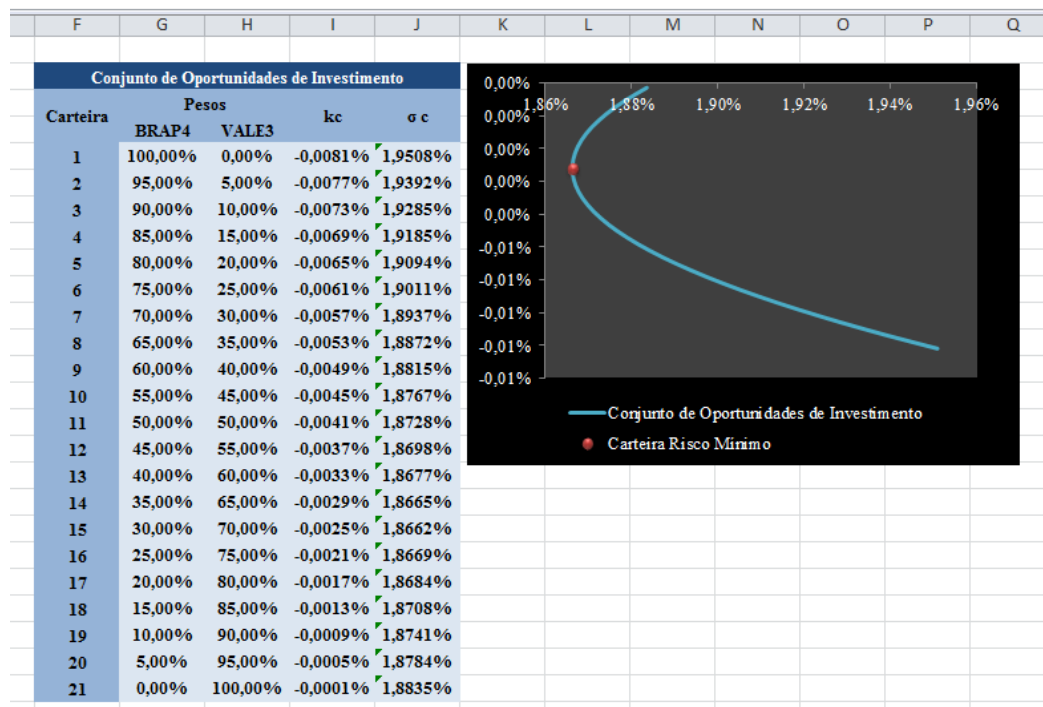


Figura 4.6: conjunto de oportunidades de investimento da carteira composta pelos ativos **BRAP4** e **VALE3**

Fonte: elaboração própria (dados da pesquisa), 2014.

#### 4.1.3 Carteira com duas ações: maior x menor correlação

Analisando-se o cenário de carteira com 2 ativos, cada um com uma perspectiva singular de maior ou de menor correlação, pode-se trazer a luz importantes reflexões acerca da correlação dos ativos na composição de um investimento de carteira de ações.

As carteiras de duas ações, sejam elas compostas pelo par menos correlacionado (**CMIG4** e **CTIP3**) e pelo par mais correlacionado (**BRAP4** e **VALE3**), proporcionam importantes conclusões em relação ao que diz a teoria a respeito da correlação e aos impactos da mesma na obtenção de resultados para o investidor.

As principais conclusões obtidas são com relação aos valores de retornos e riscos que são assumidos em cada uma das perspectivas. No cenário de par menos correlacionado (**CMIG4** e **CTIP3**), o retorno e risco na carteira de risco mínimo são de aproximadamente 0,0670% e 1,3668%, respectivamente. Enquanto que no cenário de par mais correlacionado (**BRAP4** e **VALE3**), o retorno e risco na carteira de risco mínimo são de -0,0026% e 1,866%, respectivamente.

A partir de tais dados, conclui-se que, conforme visto na didática, carteiras que possuem ativos menos correlacionados possuem vantagem na diversificação do risco e confiabilidade do retorno, em relação às carteiras que possuam maior correlação entre os seus ativos. Como pode ser visto no caso analisado, a carteira com menor correlação (**CMIG4** e **CTIP3**) detém melhores valores de risco e retorno em relação à carteira de maior correlação (**BRAP4** e **VALE3**), pois estas possuem valores de riscos maiores do que a carteira menos correlacionada e seus retornos são inferiores, apesar do maior risco sofrido.

#### 4.2 Carteira com três ações

A carteira composta pelos ativos **CMIG4**, **CTIP3** e **CIEL3** foi desenvolvida com base no critério de menor correlação existente na análise das relações dos retornos diários das empresas do IBRX50 presentes no estudo.

A figura 4.7 expõe como foi realizado o procedimento de otimização de carteira de risco mínimo para tais ações. Nela, podem-se enxergar os parâmetros ou inputs necessários para se chegar à solução do problema. Em relação aos parâmetros do *solver*, identificados figura 4.7, podemos citar: Definir célula objetivo e sua finalidade, células variáveis, restrições e o método utilizado. Com relação à célula objetivo e sua finalidade, foi selecionada a célula de risco da carteira (D24), e a finalidade da mesma, no caso, minimização do risco (mín.). Em relação às células variáveis, foram selecionadas as células presentes na matriz 1 (B12:D12), que correspondem aos pesos que cada uma das três ações possuirão em uma dada perspectiva de carteira de risco mínimo. Os parâmetros de restrição são as presentes na matriz 1, que, no caso, são as de que a soma dos pesos deve ser maior ou igual a zero ( $B12+C12+D12 \geq 0$ ) e de que o somatório dos pesos seja igual ao total ( $B12 + C12 + D12 = 1$ ). Finalizando, foi selecionado o método de aplicação, no caso, o GRG Não linear, representando a aplicação da programação não linear ao método do *solver*, clicando-se em “resolver” para se chegar à carteira de risco mínimo e aos pesos de cada ação que permitem esse cenário.



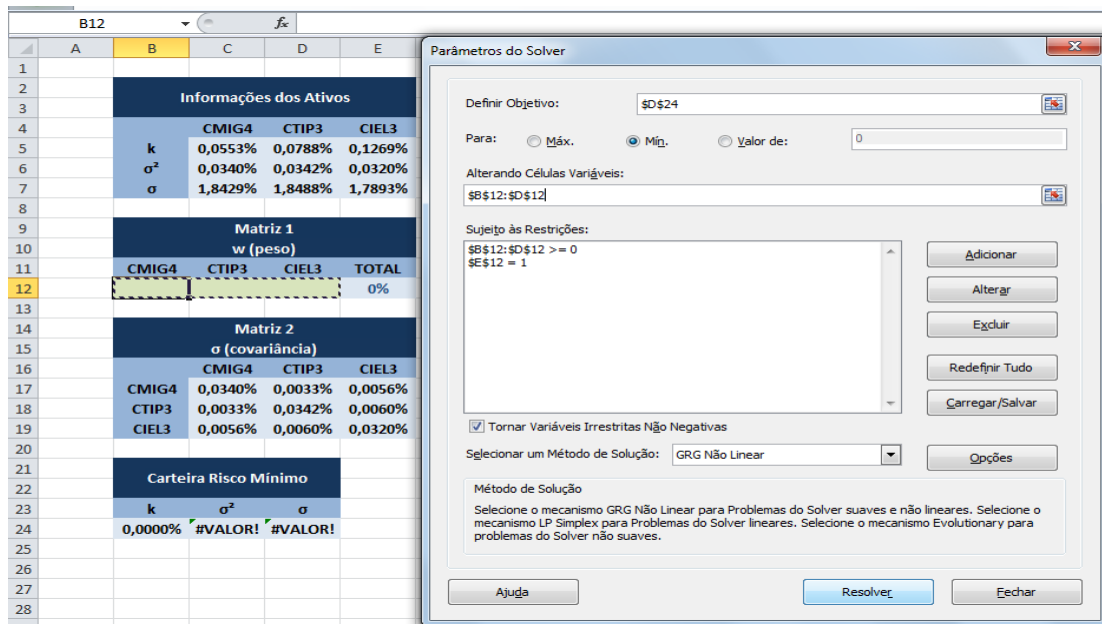


Figura 4.7: aplicação do *solver* na determinação da carteira de risco mínimo para os ativos **CMIG4**, **CTIP3** e **CIEL3**.

Fonte: elaboração própria (dados da pesquisa), 2014.

A figura 4.8 expõe características e resultados que foram encontrados após a aplicação do método de composição de carteiras de três ações (**CMIG4**, **CTIP3** e **CIEL3**). As características relevantes nessa figura são as de pesos de cada ação no total de capital investido, bem como os valores de risco e retorno encontrados.

Como resultados obtidos, identificou-se que a composição ideal da carteira de ações de risco mínimo é de aproximadamente 33,86% de capital investido na ação **CMIG4**, 33,16% na ação **CTIP3** e 32,98% na **CIEL3**. A partir da referida composição, possibilitou-se o alcance de valores de risco de 1,2011% e retorno de 0,0867%.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		<b>Informações dos Ativos</b>				
3						
4			CMIG4	CTIP3	CIEL3	
5		k	0,0553%	0,0788%	0,1269%	
6		$\sigma^2$	0,0340%	0,0342%	0,0320%	
7		$\sigma$	1,8429%	1,8488%	1,7893%	
8						
9		<b>Matriz 1</b>				
10		w (peso)				
11			CMIG4	CTIP3	CIEL3	TOTAL
12			33,8616%	33,1631%	32,9753%	100%
13						
14		<b>Matriz 2</b>				
15		$\sigma$ (covariância)				
16			CMIG4	CTIP3	CIEL3	
17		CMIG4	0,0340%	0,0033%	0,0056%	
18		CTIP3	0,0033%	0,0342%	0,0060%	
19		CIEL3	0,0056%	0,0060%	0,0320%	
20						
21		<b>Carteira Risco Mínimo</b>				
22						
23		k	$\sigma^2$	$\sigma$		
24		0,0867%	0,0144%	1,2011%		
25						

Figura 4.8: características da carteira formada pelos ativos **CMIG4**, **CTIP3** e **CIEL3**.

Fonte: elaboração própria (dados da pesquisa), 2014.

### 4.3 Carteira com quatro ações

A carteira composta pelos ativos **CMIG4**, **CTIP3**, **CIEL3** e **OIBR4** foi desenvolvida com base no critério de menor correlação existente na análise das relações dos retornos diários das empresas do IBRX50 presentes no estudo.

A figura 4.9 mostra como foi realizado o procedimento de otimização de carteira de risco mínimo para tais ações, podendo-se enxergar os parâmetros ou inputs necessários para se chegar à solução do problema. Em relação aos parâmetros do *solver*, identificados figura 4.9, podemos citar: Definir célula objetivo e sua finalidade, células variáveis, restrições e o método utilizado. Com relação à célula objetivo e sua finalidade, foi selecionada a célula de risco da carteira (D25), e a finalidade da mesma, no caso, minimização do risco (mín.). Em relação às células variáveis, foram selecionadas as células presentes na matriz 1 (B12:E12), que correspondem aos pesos que cada uma das quatro ações possuirão em uma dada perspectiva de carteira de risco mínimo. Os parâmetros de restrição são as presentes na matriz 1, que, no caso, são as de que a soma dos pesos deve ser maior ou igual a zero (B12+C12+D12+E12 >= 0) e de que o somatório dos pesos seja igual ao total

( $B12+C12+D12+E12=1$ ). Finalizando, foi selecionado o método de aplicação, no caso, o GRG Não linear, representando a aplicação da programação não linear ao método do *solver*, clicando-se em “resolver” para se chegar à carteira de risco mínimo e aos pesos de cada ação que permitem esse cenário.

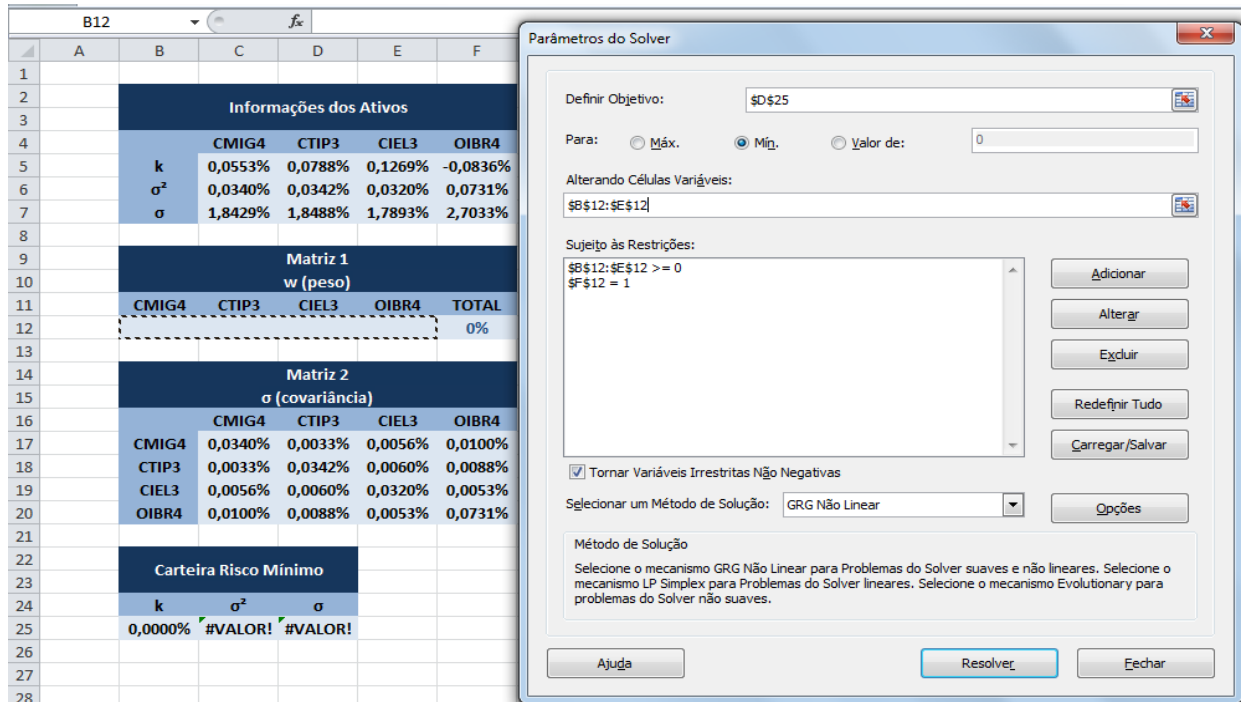


Figura 4.9: aplicação do *solver* na determinação da carteira de risco mínimo para os ativos

#### CMIG4, CTIP3, CIEL3 e OIBR4.

Fonte: elaboração própria (dados da pesquisa), 2014.

A figura 4.10 expõe características e resultados que foram encontrados após a aplicação do método de composição de carteiras de quatro ações (**CMIG4**, **CTIP3**, **OIBR4** e **CIEL3**). As características relevantes nessa figura são as de pesos de cada ação no total de capital investido, bem como os valores de risco e retorno encontrados.

Como resultados obtidos, identificou-se que a composição ideal da carteira de ações de risco mínimo é de aproximadamente 30,18% de capital investido na ação **CMIG4**, 29,90% na ação **CTIP3**, de 30,94% na ação da **CIEL3** e de 8,98% na ação da **OIBR4**. A partir da referida composição, possibilitou-se o alcance de valores de risco de 1,1770% e retorno de 0,0720%.

	A	B	C	D	E	F	G	
1								
2		<b>Informações dos Ativos</b>						
3								
4			<b>CMIG4</b>	<b>CTIP3</b>	<b>CIEL3</b>	<b>OIBR4</b>		
5		<b>k</b>	0,0553%	0,0788%	0,1269%	-0,0836%		
6		<b><math>\sigma^2</math></b>	0,0340%	0,0342%	0,0320%	0,0731%		
7		<b><math>\sigma</math></b>	1,8429%	1,8488%	1,7893%	2,7033%		
8								
9		<b>Matriz 1</b>						
10		<b>w (peso)</b>						
11		<b>CMIG4</b>	<b>CTIP3</b>	<b>CIEL3</b>	<b>OIBR4</b>	<b>TOTAL</b>		
12		30,1797%	29,9077%	30,9397%	8,9729%	100%		
13								
14		<b>Matriz 2</b>						
15		<b><math>\sigma</math> (covariância)</b>						
16			<b>CMIG4</b>	<b>CTIP3</b>	<b>CIEL3</b>	<b>OIBR4</b>		
17		<b>CMIG4</b>	0,0340%	0,0033%	0,0056%	0,0100%		
18		<b>CTIP3</b>	0,0033%	0,0342%	0,0060%	0,0088%		
19		<b>CIEL3</b>	0,0056%	0,0060%	0,0320%	0,0053%		
20		<b>OIBR4</b>	0,0100%	0,0088%	0,0053%	0,0731%		
21								
22		<b>Carteira Risco Mínimo</b>						
23								
24		<b>k</b>	<b><math>\sigma^2</math></b>	<b><math>\sigma</math></b>				
25		0,0720%	0,0139%	1,1770%				

Figura 4.10: características da carteira formada pelos ativos **CMIG4, CTIP3, CIEL3 e OIBR4**.

Fonte: elaboração própria (dados da pesquisa), 2014.

#### 4.4 Carteira com cinco ações

A carteira composta pelos ativos **CMIG4, CTIP3, CIEL3, OIBR4** e **NATU3** foi desenvolvida com base no critério de menor correlação existente na análise das relações dos retornos diários das empresas do IBRX50 presentes no estudo.

Em relação aos parâmetros na figura 4.11, podemos citar: Definir célula objetivo e sua finalidade, células variáveis, restrições e o método utilizado. Com relação à célula objetivo e sua finalidade, foi selecionada a célula de risco da carteira (D26), e a finalidade da mesma, no caso, minimização do risco (mín.). Em relação às células variáveis, foram selecionadas as células presentes na matriz 1 (A12:E12), que correspondem aos pesos que cada uma das cinco ações possuirão em uma dada perspectiva de carteira de risco mínimo. Os parâmetros de restrição são as presentes na matriz 1, que, no caso, são as de que a soma dos pesos deve ser maior ou igual a zero ( $A12+B12+C12+D12+E12 \geq 0$ ) e de que o somatório dos pesos seja igual ao total ( $A12+B12+C12+D12+E12=1$ ). Finalizando, foi selecionado o método de aplicação, no caso, o GRG Não linear, representando a aplicação da programação não linear

ao método do *solver*, clicando-se em “resolver” para se chegar à carteira de risco mínimo e aos pesos de cada ação que permitem esse cenário.

	A	B	C	D	E	F
1						
2	<b>Informações dos Ativos</b>					
3						
4		<b>CMIG4</b>	<b>CTIP3</b>	<b>CIEL3</b>	<b>OIBR4</b>	<b>NATU3</b>
5	<b>k</b>	0,0553%	0,0788%	0,1269%	-0,0836%	0,0418%
6	<b><math>\sigma^2</math></b>	0,0340%	0,0342%	0,0320%	0,0731%	0,0314%
7	<b><math>\sigma</math></b>	1,8429%	1,8488%	1,7893%	2,7033%	1,7734%
8						
9	<b>Matriz 1</b>					
10	<b>w (peso)</b>					
11	<b>CMIG4</b>	<b>CTIP3</b>	<b>CIEL3</b>	<b>OIBR4</b>	<b>NATU3</b>	<b>TOTAL</b>
12						0%
13						
14	<b>Matriz 2</b>					
15	<b><math>\sigma</math> (covariância)</b>					
16		<b>CMIG4</b>	<b>CTIP3</b>	<b>CIEL3</b>	<b>OIBR4</b>	<b>NATU3</b>
17	<b>CMIG4</b>	0,0340%	0,0033%	0,0056%	0,0100%	0,0063%
18	<b>CTIP3</b>	0,0033%	0,0342%	0,0060%	0,0088%	0,0037%
19	<b>CIEL3</b>	0,0056%	0,0060%	0,0320%	0,0053%	0,0048%
20	<b>OIBR4</b>	0,0100%	0,0088%	0,0053%	0,0731%	0,0100%
21	<b>NATU3</b>	0,0063%	0,0037%	0,0048%	0,0100%	0,0314%
22						
23	<b>Carteira Risco Mínimo</b>					
24						
25	<b>k</b>	<b><math>\sigma^2</math></b>	<b><math>\sigma</math></b>			
26	0,0000%	#VALOR!	#VALOR!			
27						
28						
29						

**Parâmetros do Solver**

Definir Objetivo:

Para:  Máx.  Mín.  Valor de:

Alterando Células Variáveis:

Sujeito às Restrições:

\$A\$12:\$E\$12 >= 0  
\$F\$12 = 1

Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas

Selecionar um Método de Solução:

Método de Solução  
Selecione o mecanismo GRG Não Linear para Problemas do Solver suaves e não lineares. Selecione o mecanismo LP Simplex para Problemas do Solver lineares. Selecione o mecanismo Evolutionary para problemas do Solver não suaves.

Figura 4.11: aplicação do *solver* na determinação da carteira de risco mínimo para os ativos **CMIG4**, **CTIP3**, **CIEL3**, **OIBR4** e **NATU3**.

Fonte: elaboração própria (dados da pesquisa), 2014.

A figura 4.10 expõe características e resultados que foram encontrados após a aplicação do método de composição de carteiras de cinco ações (**CMIG4**, **CTIP3**, **OIBR4**, **CIEL3** e **NATU3**). As características relevantes nessa figura são as de pesos de cada ação no total de capital investido, bem como os valores de risco e retorno encontrados.

Como resultados obtidos, identificou-se que a composição ideal da carteira de ações de risco mínimo é de aproximadamente 22,28% de capital investido na ação **CMIG4**, 24,03% na ação **CTIP3**, de 23,81% na ação da **CIEL3**, 4,99% na ação da **OIBR4** e de 24,89% na ação da **NATU3**. A partir da referida composição, possibilitou-se o alcance de valores de risco de 1,0837% e retorno de 0,0677%.

	A	B	C	D	E	F
1						
2	<b>Informações dos Ativos</b>					
3						
4		<b>CMIG4</b>	<b>CTIP3</b>	<b>CIEL3</b>	<b>OIBR4</b>	<b>NATU3</b>
5	<b>k</b>	0,0553%	0,0788%	0,1269%	-0,0836%	0,0418%
6	<b><math>\sigma^2</math></b>	0,0340%	0,0342%	0,0320%	0,0731%	0,0314%
7	<b><math>\sigma</math></b>	1,8429%	1,8488%	1,7893%	2,7033%	1,7734%
8						
9	<b>Matriz 1</b>					
10	<b>w (peso)</b>					
11	<b>CMIG4</b>	<b>CTIP3</b>	<b>CIEL3</b>	<b>OIBR4</b>	<b>NATU3</b>	<b>TOTAL</b>
12	22,2825%	24,0292%	23,8146%	4,9864%	24,8873%	100%
13						
14	<b>Matriz 2</b>					
15	<b><math>\sigma</math> (covariância)</b>					
16		<b>CMIG4</b>	<b>CTIP3</b>	<b>CIEL3</b>	<b>OIBR4</b>	<b>NATU3</b>
17	<b>CMIG4</b>	0,0340%	0,0033%	0,0056%	0,0100%	0,0063%
18	<b>CTIP3</b>	0,0033%	0,0342%	0,0060%	0,0088%	0,0037%
19	<b>CIEL3</b>	0,0056%	0,0060%	0,0320%	0,0053%	0,0048%
20	<b>OIBR4</b>	0,0100%	0,0088%	0,0053%	0,0731%	0,0100%
21	<b>NATU3</b>	0,0063%	0,0037%	0,0048%	0,0100%	0,0314%
22						
23	<b>Carteira Risco Mínimo</b>					
24						
25	<b>k</b>	<b><math>\sigma^2</math></b>	<b><math>\sigma</math></b>			
26	0,0677%	0,0117%	1,0837%			
27						

Figura 4.12: características da carteira formada pelos ativos **CMIG4**, **CTIP3**, **CIEL3**, **OIBR4** e **NATU3**.

Fonte: elaboração própria (dados da pesquisa), 2014.

#### 4.5 Carteira com dez ações

A carteira composta pelos ativos **CMIG4**, **CTIP3**, **CIEL3**, **OIBR4**, **NATU3**, **FIBR3**, **EMBR3**, **JBSS3**, **BRKM5** e **PCAR4** foi desenvolvida com base no critério de menor correlação existente na análise das relações dos retornos diários das empresas do IBRX50 presentes no estudo.

Em relação aos parâmetros ou inputs de alimentação do *solver* na figura 4.13, podemos citar: Definir célula objetivo e sua finalidade, células variáveis, restrições e o método utilizado. Com relação à célula objetivo e sua finalidade, foi selecionada a célula de risco da carteira (C30), e a finalidade da mesma, no caso, minimização do risco (mín.). Em relação às células variáveis, foram selecionadas as células presentes na matriz 1 (A11:J11), que correspondem aos pesos que cada uma das dez ações possuirão em uma dada perspectiva de carteira de risco mínimo. Os parâmetros de restrição são as presentes na matriz 1, que, no caso, são as de que a soma dos pesos deve ser maior ou igual a zero ( $A_{11}+B_{11}+C_{11}+D_{11}+E_{11}+F_{11}+G_{11}+H_{11}+I_{11}+J_{11} \geq 0$ ) e de que o somatório dos pesos seja igual ao total ( $A_{11} + B_{11} + C_{11} + D_{11} + E_{11} + F_{11} + G_{11} + H_{11} + I_{11} + J_{11} = 1$ ). Finalizando, foi selecionado o método de aplicação, no caso, o GRG Não linear, representando a aplicação da programação não linear ao método do *solver*, clicando-se em “resolver” para se chegar à carteira de risco mínimo e aos pesos de cada ação que permitem esse cenário.



Informações dos Ativos										
	CMIG4	CTIP3	CIEL3	OIBR4	NATU3	FIBR3	EMBR3	JBSS3	BRKM5	PCAR4
k	0,0553%	0,0788%	0,1269%	-0,0836%	0,0418%	-0,0033%	0,0945%	0,0301%	0,0752%	0,0651%
$\sigma^2$	0,0340%	0,0342%	0,0320%	0,0731%	0,0314%	0,0601%	0,0414%	0,0774%	0,0558%	0,0303%
$\sigma$	1,8429%	1,8488%	1,7893%	2,7033%	1,7734%	2,4515%	2,0338%	2,7815%	2,3623%	1,7414%

Matriz 1 w (peso)										
CMIG4	CTIP3	CIEL3	OIBR4	NATU3	FIBR3	EMBR3	JBSS3	BRKM5	PCAR4	TOTAL
										0%

Matriz 2 $\sigma$ (covariância)										
	CMIG4	CTIP3	CIEL3	OIBR4	NATU3	FIBR3	EMBR3	JBSS3	BRKM5	PCAR4
CMIG4	0,0340%	0,0033%	0,0056%	0,0100%	0,0063%	0,0084%	0,0072%	0,0110%	0,0100%	0,0065%
CTIP3	0,0033%	0,0342%	0,0060%	0,0088%	0,0037%	0,0102%	0,0065%	0,0075%	0,0099%	0,0061%
CIEL3	0,0056%	0,0060%	0,0320%	0,0053%	0,0048%	0,0056%	0,0049%	0,0098%	0,0064%	0,0047%
OIBR4	0,0100%	0,0088%	0,0053%	0,0731%	0,0100%	0,0159%	0,0088%	0,0175%	0,0156%	0,0087%
NATU3	0,0063%	0,0037%	0,0048%	0,0100%	0,0314%	0,0090%	0,0060%	0,0082%	0,0094%	0,0065%
FIBR3	0,0084%	0,0102%	0,0056%	0,0159%	0,0090%	0,0601%	0,0184%	0,0216%	0,0240%	0,0127%
EMBR3	0,0072%	0,0065%	0,0049%	0,0088%	0,0060%	0,0184%	0,0414%	0,0132%	0,0120%	0,0087%
JBSS3	0,0110%	0,0075%	0,0098%	0,0175%	0,0082%	0,0216%	0,0132%	0,0774%	0,0214%	0,0127%
BRKM5	0,0100%	0,0099%	0,0064%	0,0156%	0,0094%	0,0240%	0,0120%	0,0214%	0,0558%	0,0113%
PCAR4	0,0065%	0,0061%	0,0047%	0,0087%	0,0065%	0,0127%	0,0087%	0,0127%	0,0113%	0,0303%

Carteira Risco Mínimo		
k	$\sigma^2$	$\sigma$
0,0000%	#VALOR!	#VALOR!

**Parâmetros do Solver**

Definir Objetivo:

Para:  Máx.  Mín.  Valor de:

Alterando Células Variáveis:

Sujeito às Restrições:

\$A\$11:\$J\$11 >= 0  
\$K\$11 = 1

Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas

Selecionar um Método de Solução:

Método de Solução  
Selecione o mecanismo GRG Não Linear para Problemas do Solver suaves e não lineares. Selecione o mecanismo LP Simplex para Problemas do Solver lineares. Selecione o mecanismo Evolutionary para problemas do Solver não suaves.

Ajuda      Resolver      Fechar

Figura 4.13: aplicação do *solver* na determinação da carteira de risco mínimo para os ativos **CMIG4, CTIP3, CIEL3, OIBR4, NATU3, FIBR3, EMBR3, JBSS3, BRKM5 e PCAR4.**

Fonte: elaboração própria (dados da pesquisa), 2014.

A figura 4.14 expõe características e resultados que foram encontrados após a aplicação do método de composição de carteiras de dez ações (**CMIG4**, **CTIP3**, **CIEL3**, **OIBR4**, **NATU3**, **FIBR3**, **EMBR3**, **JBSS3**, **BRKM5** e **PCAR4**). As características relevantes nessa figura são as de pesos de cada ação no total de capital investido, bem como os valores de risco e retorno encontrados.

Como resultados obtidos, identificou-se que a composição ideal da carteira de ações de risco mínimo é de aproximadamente 15,75% de capital investido na ação **CMIG4**, 17,43% na ação **CTIP3**, de 18,74% na ação da **CIEL3**, 2,54% na ação da **OIBR4**, 18,17% na ação da **NATU3**, 0,0000% na ação da **FIBR3**, 10,19% na ação da **EMBR3**, 0,0000% na ação da **JBSS3**, 1,13% na ação da **BRKM5** e 16,05% na ação da **PCAR4**. A partir da referida composição, possibilitou-se o alcance de valores de risco de 1,0124% e retorno de 0,0726%.

Y35											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	<b>Informações dos Ativos</b>										
2											
3		<b>CMIG4</b>	<b>CTIP3</b>	<b>CIEL3</b>	<b>OIBR4</b>	<b>NATU3</b>	<b>FIBR3</b>	<b>EMBR3</b>	<b>JBSS3</b>	<b>BRKM5</b>	<b>PCAR4</b>
4	<b>k</b>	0,0553%	0,0788%	0,1269%	-0,0836%	0,0418%	-0,0033%	0,0945%	0,0301%	0,0752%	0,0651%
5	<b><math>\sigma^2</math></b>	0,0340%	0,0342%	0,0320%	0,0731%	0,0314%	0,0601%	0,0414%	0,0774%	0,0558%	0,0303%
6	<b><math>\sigma</math></b>	1,8429%	1,8488%	1,7893%	2,7033%	1,7734%	2,4515%	2,0338%	2,7815%	2,3623%	1,7414%
7											
8	<b>Matriz 1</b>										
9	<b>w (peso)</b>										
10	<b>CMIG4</b>	<b>CTIP3</b>	<b>CIEL3</b>	<b>OIBR4</b>	<b>NATU3</b>	<b>FIBR3</b>	<b>EMBR3</b>	<b>JBSS3</b>	<b>BRKM5</b>	<b>PCAR4</b>	<b>TOTAL</b>
11	15,7519%	17,4327%	18,7414%	2,5366%	18,1653%	0,0000%	10,1850%	0,0000%	1,1339%	16,0532%	100%
12											
13	<b>Matriz 2</b>										
14	<b><math>\sigma</math> (covariância)</b>										
15		<b>CMIG4</b>	<b>CTIP3</b>	<b>CIEL3</b>	<b>OIBR4</b>	<b>NATU3</b>	<b>FIBR3</b>	<b>EMBR3</b>	<b>JBSS3</b>	<b>BRKM5</b>	<b>PCAR4</b>
16	<b>CMIG4</b>	0,0340%	0,0033%	0,0056%	0,0100%	0,0063%	0,0084%	0,0072%	0,0110%	0,0100%	0,0065%
17	<b>CTIP3</b>	0,0033%	0,0342%	0,0060%	0,0088%	0,0037%	0,0102%	0,0065%	0,0075%	0,0099%	0,0061%
18	<b>CIEL3</b>	0,0056%	0,0060%	0,0320%	0,0053%	0,0048%	0,0056%	0,0049%	0,0098%	0,0064%	0,0047%
19	<b>OIBR4</b>	0,0100%	0,0088%	0,0053%	0,0731%	0,0100%	0,0159%	0,0088%	0,0175%	0,0156%	0,0087%
20	<b>NATU3</b>	0,0063%	0,0037%	0,0048%	0,0100%	0,0314%	0,0090%	0,0060%	0,0082%	0,0094%	0,0065%
21	<b>FIBR3</b>	0,0084%	0,0102%	0,0056%	0,0159%	0,0090%	0,0601%	0,0184%	0,0216%	0,0240%	0,0127%
22	<b>EMBR3</b>	0,0072%	0,0065%	0,0049%	0,0088%	0,0060%	0,0184%	0,0414%	0,0132%	0,0120%	0,0087%
23	<b>JBSS3</b>	0,0110%	0,0075%	0,0098%	0,0175%	0,0082%	0,0216%	0,0132%	0,0774%	0,0214%	0,0127%
24	<b>BRKM5</b>	0,0100%	0,0099%	0,0064%	0,0156%	0,0094%	0,0240%	0,0120%	0,0214%	0,0558%	0,0113%
25	<b>PCAR4</b>	0,0065%	0,0061%	0,0047%	0,0087%	0,0065%	0,0127%	0,0087%	0,0127%	0,0113%	0,0303%
26											
27	<b>Carteira Risco Mínimo</b>										
28											
29	<b>k</b>	<b><math>\sigma^2</math></b>	<b><math>\sigma</math></b>								
30	0,0726%	0,0102%	1,0124%								

Figura 4.14: características da carteira formada pelos ativos **CMIG4**, **CTIP3**, **CIEL3**, **OIBR4**, **NATU3**, **FIBR3**, **EMBR3**, **JBSS3**, **BRKM5** e **PCAR4**

Fonte: elaboração própria (dados da pesquisa), 2014.

#### 4.6 Análise geral das composições de carteiras otimizadas

A utilização de cenários de investimentos em carteiras de ações permitiu uma melhor observação do que é proposto na teoria do portfólio e de que forma os preceitos lá defendidos podem ser visto na prática. Foram propostos 6 cenários a fim de se avaliar as perspectivas de risco x retorno existentes, bem como a possibilidade de encontro da carteira de risco mínimo, mediante a utilização do *solver* com auxílio da programação quadrática.

Com relação aos resultados obtidos nos diversos cenários na carteira de risco mínimo, podem-se tirar algumas conclusões que podem ser vistas na tabela 4.1 a seguir:

Tabela 4.1: comparação entre risco x retornos na carteira de risco mínimo

Medidas estatísticas /Carteiras	Cart. 2 Ativos – corr.	Cart. 2 Ativos + corr.	Cart. 3 Ativos	Cart. 4 Ativos	Cart. 5 Ativos	Cart. 10 Ativos
Risco	1,3668%	1,866%	1,2011%	1,1770%	1,0837%	1,0124%
Retorno	0,0670%	-0,0026%	0,0867%	0,0720%	0,0677%	0,0726%

Fonte: elaboração própria, 2014.

A tabela 4.1 evidencia os impactos positivos da diversificação, seja ela possibilitada pela quantidade de ações numa carteira, seja pela composição de carteiras com ações com a menor correlação possível.

As primeiras análises são com relação às duas carteiras com 2 ativos: 1 carteira composta por duas ações menos correlacionadas, e a outra composta por 2 ações mais correlacionadas entre si.

Em relação ao risco: percebe-se que o risco, na concepção de carteira de risco mínimo, é menor quando se trata da composição com duas ações com menor correlação. O risco na carteira menos correlacionada é na ordem de 1,3668%, enquanto que na carteira de maior correlação é de 1,866%.

Em relação ao retorno: ao analisar-se o retorno, percebe-se que o mesmo é bem inferior (alcançando patamares negativos) no cenário de carteira com duas ações mais

correlacionadas. Nesse sentido, percebe-se a ineficiência da carteira, pois, enquanto a carteira mais correlacionada possui risco maior, seu retorno não acompanha proporcionalmente o risco envolvido na mesma. De forma contrária, a carteira de 2 ativos com menor correlação possui um risco menor que a carteira com 2 ativos mais correlacionados, no entanto, seu retorno de 0,0670% é superior ao retorno encontrado na carteira de ativos com maior correlação que é de -0,0026%.

As análises posteriores serão com relação às medidas de retornos e riscos encontrados nas carteiras de otimização de risco mínimo nos cenários de carteiras compostas por três, quatro, cinco e dez ações.

Com relação ao risco nas carteiras: as medidas de riscos sofrem consideráveis quedas conforme a carteira vai tornando-se mais diversificada. O risco na carteira de 3 ativos era de 1,2011%, que com o incremento de mais 1 ativo menos correlacionado chegou a um valor de 1,1770% de risco, que adicionando-se mais um ativo, chega a um valor de 1,0837%, que, com o incremento de mais 5 ativos no cenário de 10 ativos, chega a 1,0124%. Assim, percebe-se claramente a relação de decréscimo do risco em razão da diversificação do portfólio.

Com relação ao retorno nas carteiras: os valores de retornos alcançados nos diversos cenários, assim como o risco, se alteram conforme há a maior diversificação da carteira. O acréscimo de 1 ativo na carteira compostas por duas ações, possibilitou um cenário de retorno de 0,0867% em relação ao retorno da carteira com duas ações que era de 0,0670%. O incremento de mais 1 ativo em um novo cenário de carteira compostas por 4 ativos não possibilitou o aumento do retorno da carteira de risco mínimo, mas sim sua diminuição, de 0,0867% na carteira de 3 ativos para 0,0720% na carteira com 4 ativos. Ocorreu a mesma situação com a carteira de 5 ativos, que passou a possuir um valor de retorno inferior de 0,0677% ao da carteira com 4 ativos que foi de 0,0720%. Finalizando, o retorno obtido com o incremento de mais 5 ativos na composição do novo cenário de carteira com 10 ativos, possibilitou o aumento nos retornos da carteira de risco mínimo mediante a diversificação do portfólio.

Ficando expressas, portanto, as principais conclusões com relação aos resultados encontrados nos aspectos risco x retorno em cada um dos cenários que foram montados a fim de se evidenciar a importância de tais métodos na tomada de decisão, seja ela de cunho didático, por profissionais de mercados ou investidores individuais.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A tomada de decisão de investimento e o sucesso proveniente do mesmo são influenciados por um fator de relevância direta, o risco. Estudos sobre o risco e seus efeitos nos processos e sucessos de investimentos tem se intensificado cada vez mais, em razão, principalmente, na necessidade dos estudiosos e investidores lidarem com tal dilema. O risco em si, pode ser enxergado como instrumento propulsor de alavancagem de retorno, como também, como fator potencial de sucesso ou fracasso de um dado investimento. Dessa forma, fica evidente que a capacidade de manipulação e entendimento do risco e suas particularidades, trazem ao estudioso ou investidor uma melhor capacidade de gerenciamento de decisões acertadas a respeito das oportunidades de investimento existentes e qual dela são as mais acertadas.

A utilização de metodologias avançadas na aplicação didática e profissional de avaliação de risco, seja ele observado individualmente ou em uma composição de carteiras, dá maior segurança e solidez aos resultados possíveis, deixando em segundo plano aquela visão empirista de determinação do risco com ferramentas ultrapassadas. Dentre as técnicas mais eficazes na mensuração do risco mínimo dentro de um conjunto de oportunidades, destaca-se a utilização da programação quadrática, esta, possibilitada pelo *solver* do *Microsoft EXCEL*, que traz ao estudioso e ao investidor, maior embasamento e certeza dos dados ali encontrados. As ferramentas estatísticas e a utilização do *solver* trazem ao estudo do risco novas perspectivas que proporcionam aos profissionais da área, uma filosofia de abordagem do risco baseada na exatidão e melhor aproveitamento das técnicas disponíveis.

Agregar técnicas estatísticas ao processo de tomada de decisão em investimentos proporciona ao investidor um maior e mais claro campo de visão com relação aos vários tipos de investimentos que podem ser observados, e, conforme avaliação de projeções, escolher-se o mais adequado em razão de suas expectativas. Tais expectativas dependem dos retornos provenientes de cada investimento e do grau de aversão ao risco que o investidor detém no momento da escolha do investimento ideal.

No estudo em análise, optou-se pela perspectiva de carteira de risco mínimo, em razão de sua unanime preferência por investidores com perfil moderado quanto à exposição ao risco, prestigiando assim, a ótica dos investidores conservadores, que primam pela maior segurança no momento da decisão de investimento em alguns ativos. Os resultados em relação à análise das carteiras de risco mínimo identificadas no estudo foram singulares em

cada um dos cenários de investimentos, principalmente, no que diz respeito às composições de cada ativo nas carteiras, assim como o risco e retorno em cada uma das perspectivas.

Os principais resultados identificados na análise da carteira de risco mínimo composta por duas ações, em um cenário de carteira com ações menos correlacionadas e um cenário de carteira composta por ações mais correlacionadas, dizem respeito aos valores de risco e retorno alcançados em cada uma das perspectivas, cuja compreensão da aplicação foi facilitada pelo uso do *solver*, os quais se destacaram na carteira composta de ações menos correlacionadas em relação à carteira com maior correlação que obtiveram valores de risco e retorno bem abaixo do obtido pela primeira composição de menor correlação, ressaltando-se assim o poder da diversificação na composição de carteiras de investimento.

Os resultados da aplicação do *solver* nas carteiras de risco mínimo composta por três, quatro, cinco e dez ações, selecionadas mediante o critério de menor correlação, fizeram referência especial ao processo de diminuição do risco em detrimento do incremento de ativos às carteiras já compostas. O risco mínimo identificado na carteira com maior número de ações reafirmou o poder da diversificação de ações no portfólio como mecanismo de diminuição do risco da carteira. A aplicação da programação quadrática, auxiliada pelo *solver* do *Microsoft EXCEL*, permitiu uma melhor visualização da importância de metodologias como esta, e facilitou o entendimento de como acontece o processo de diversificação de carteiras sob uma ótica mais prática.

A utilização de técnicas estatísticas cada vez mais aprimoradas de auxílio à manipulação de investimentos com risco torna-se cada vez mais recorrente, em razão, principalmente, da sua eficácia pela forma sólida e objetiva de aplicação e descrição de tais processos. Assim, percebe-se a relevante aplicabilidade de metodologias e técnicas que facilitem o processo de tomada de decisão nos mais variados cenários de investimento, com o intuito de promover tal processo, da forma mais didática e instrutiva possível, aos estudiosos do risco, investidores e afins.

## REFERÊNCIAS

ASSAF NETO, Alexandre. **Finanças Corporativas e Valor**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2006.

BRIGHAM, Eugene, F; HOUSTON, Joel F. **Fundamentos da Moderna Administração Financeira**. 1. ed. São Paulo: Campus Elsevier, 1999.

BM&FBOVESPA. **Índices**. Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br/indices/ResumoIndice.aspx?Indice=IBRX50>> Acesso em: 16. Jan. 2014.

COELHO, Marco Antônio Serpa. **Gestão Financeira II**. Disponível em: [http://www.unicap.br/marcos\\_serpa/Administracao\\_Financeira\\_II.doc?](http://www.unicap.br/marcos_serpa/Administracao_Financeira_II.doc?) Acesso em 13. Jan. 2014

COMDINHEIRO. **Sobre o site**. Disponível em: <http://www.comdinheiro.com.br/SobreoSite> Acesso em 15. Jan. 2014.

GITMAN, Lawrence J. **Princípios da Administração Financeira**. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

MARTINI, Marcos F.G. **Renda fixa versus renda variável: uma análise descritiva entre as rentabilidades dos investimentos**. Revista Especialize On-line IPOG. V.1, 2013. Disponível em: < <http://ipog.edu.br/nao-aluno/revista-ipog/download/renda-fixa-versus-renda-variavel-uma-analise-descritiva-entre-as-rentabilidades-dos-investimentos>> Acesso em: 17. Jan. 2014.

MOORE, Jeffrey H; WEATHERFORD, Larry R. **Tomada de decisão em administração com planilhas eletrônicas**. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.

PEREIRA, Diego Cesar de Paulo; MENDONÇA, Gabriel Angelo Caetano; BARRETO, Gabriel Eduardo Souza; CARDOSO, Maria Isabel Fortes; OLIVEIRA, Murilo Toledo Andrade de. **Renda fixa versus variável: uma análise descritiva entre a rentabilidade dos investimentos em mercado de ações, caderneta de poupança e fundos DI no período de 2003 a 2009**. Trabalho de conclusão de curso – Faculdades Integradas Antônio Eufrásio de Toledo.SP,2008.Disponívelem:<<http://intertemas.unitoledo.br/revista/index.php/Negocios/article/view/875/845>>\_Acesso em: 27. Jan. 2014.

PAULO, Edilson. **Programação quadrática na determinação de preço de multiprodutos em um cenário de curto prazo**. Revista Universo Contábil. V. 2, 2006. Disponível em:<

<http://proxy.furb.br/ojs/index.php/universocontabil/article/viewFile/120/79>> Acesso em: 27. Jan. 2014.

SOARES, Edvaldo. **Metodologia Científica: Lógica, Epistemologia e Normas**. São Paulo: Atlas, 2003.

VERGARA, Sylvia C. **Projetos e Relatórios de Pesquisa em Administração**. 12. ed. São Paulo: Atlas, 2010.



ANEXOS

