



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Soluções das equações de Einstein em RSII pelo Método de Imersão
José Igor Vasques Eloi Araújo

CAMPINA GRANDE - PB

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Soluções das equações de Einstein em RSII pelo Método de Imersão
José Igor Vasques Eloi Araújo

Dissertação realizada sob a orientação do
Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia, apre-
sentada à Unidade Acadêmica de Física em
complementação aos requisitos para ob-
tenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE - PB

- 2025 -

A663s Araújo, José Igor Vasques Eloi.
Soluções das equações de Einstein em RSII pelo método de Imersão /
José Igor Vasques Eloi Araújo. – Campina Grande, 2025.
48 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina
Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2013.

"Orientação: Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia".

Referências.

1. Hiperespaço. 2. Dimensões Extras. 3. Buracos Negros. 4. Método
de Imersão. I. Dahia, Fábio Leal de Melo. II. Título.

CDU 531-4(043.3)

JOSÉ IGOR VASQUES ELOI ARAÚJO

SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN EM RSII PELO MÉTODO DE IMERSÃO

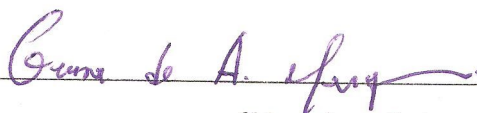
Dissertação aprovada em 18/12/2013

BANCA EXAMINADORA



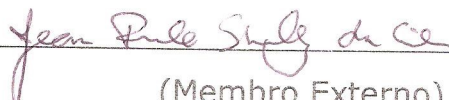
(Presidente)

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
Departamento de Física – UFPB



(Membro Interno)

Profª. Dra. Geusa de Araújo Marques
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro Externo)

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva
Departamento de Física – UEPB

*Dedico esse trabalho a minha família,
amigos e namorada, principalmente a
Marluce Vasques Eloi que não pôde
ver este trabalho.*

AGRADECIMENTOS

À Deus, por tudo e por mais este passo. Por todas as bençãos recebidas a cada dia.

À minha mãe, Marluce Vasques Eloi, por tudo que tenho de mais valioso, pelo simples fato de ser minha mãe. Ao meu pai José Antônio, aos meus irmãos Ibrahim, Idiléu, Iago e Helena e a Glayds pelo incentivo permanente, que mesmo com todas barreiras e distância, deram seus apoios e suas lições para que eu pudesse chegar até aqui, através de brincadeiras, reclamações e motivação. À minha namorada Isis, por estar lá sempre que precisei e independente da situação, pelo carinho e pelo amor.

Ao meu orientador Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia que sob sua grande orientação conseguimos realizar este trabalho. Pela paciência com os sumiços e com os erros do maple; e por todo o conhecimento e apoio transmitido.

Aos meus amigos Jhonny, Jack, José, Hery, Bruno e Mikael pelas longas conversas de bar, pelos risos, diversão e pelo DominóCabulosoDaMadruga que queimou meu último pc. Agradeço também aos meus amigos da sala 102; Thiago Guerra, Pablo Sampaio e Marcílio pela ajuda seja com as disciplinas, seja com a pesquisa, seja dando carona. Pablo Rafael por ter me cedido a mesa, sem ele nunca teria feito parte daquele ambiente; e principalmente à Júlio, pelas incontáveis vezes em que segurou as pontas, solucionou problemas que não eram dele e deu dicas valiosas.

Aos professores, alunos e funcionários da UAF-UFCG por colaborarem com a formação necessária para a conclusão desta etapa. À banca examinadora deixo meus sinceros agradecimentos por disponibilizar um tempo para analisar meu trabalho e ajudar no que for preciso para melhorá-lo. Agradeço também a CAPES pelo suporte

financeiro.

À você que está lendo este trabalho, e a todos que diretamente ou indiretamente participaram deste processo.

*”Não se preocupe muito com as suas
dificuldades em Matemática, posso
assegurar-lhe que as minhas são ainda
maiores.”
(Albert Einstein)*

RESUMO

Há razões teóricas, inspiradas nas teorias de unificação, para acreditarmos na existência de dimensões extras. Neste cenário um dos modelos mais instigantes do ponto de vista teórico é o modelo de branas conhecido como RSII, em que o nosso espaço-tempo quadridimensional está imerso em um espaço ambiente com uma dimensão extra de comprimento infinito. Um dos maiores desafios desse modelo é encontrar soluções exatas que representem buracos negros ou estrelas confinados na brana. Nosso trabalho visa oferecer um método para obter soluções exatas que descreve corpos confinados na brana a partir de métricas, já conhecidas, do espaço ambiente com simetria axial. Para tanto utilizaremos um método indireto de obtenção destas soluções, o Método de Imersão, que consiste na aplicação do Método "Deslocar, Cortar e Refletir" ao formalismo de imersão. Com isto, podemos determinar as propriedades físicas da distribuição de matéria, valendo ressaltar que este método pode ser aplicado a uma brana com uma forma qualquer. Estudamos alguns casos particulares e reproduzimos resultados já obtidos.

Palavra-chave: Dimensões extras, buracos negros, método de imersão.

ABSTRACT

There are theoretical reasons, inspired in the theories of unification, that allows us to believe in the existence of extra dimensions. In such a scenario, one of the most thought-provoking, according to the theoretical point of view is the Brane model known as RSII, in which our quadri-dimensional space-time is immersed in a space environment contains one extra dimension with infinite length. One of the biggest challenges in this model is to find exact solutions that represent black holes or stars that are confined in the Brane. Our goal in this paper is to offer a method for obtaining of exact solutions that describes the matter that is confined in the Brane starting from the already known metrics of the space environment with axial symmetry. To achieve this goal, we will use one indirect method for obtaining these solutions, the Immersion method, which consists in using the Shifting, Reflecting and Stretching Method to the immersion formalism. With this, we can determine the physical properties of distribution of matter, pointing out that such a method can be used to Branes with any shapes. By studying some particular cases, we reproduced results already obtained before.

Keywords: Extra dimensions, Black Holes, Immersion method.

Conteúdo

Lista de Figuras	ii
1 Introdução	1
2 Dimensões Extras	4
2.1 Modelo Kaluza-Klein	5
2.2 ADD	8
2.3 Modelo RSI	14
2.4 Modelo RSII	17
3 Método Deslocar, Cortar e Refletir	18
3.1 O método	19
3.2 Aplicação a Teoria Newtoniana	20
3.3 Aplicação a Teoria da Relatividade	24
4 Método de Imersão	30
4.1 O Método	32
4.2 Espaço <i>Schwarzschild</i> – AdS_5	38
5 Resultados e Conclusões	45
Bibliografia	47

Lista de Figuras

2.1	Cilindro KK segundo a topologia circular [4]	6
2.2	Solução parede de domínio. [4]	9
2.3	Gráfico potencial.[4]	10
2.4	Representação das imagens topológicas. A forma como se dá a distribuição discreta e forma contínua como é vista a longas distâncias.[4] . .	13
3.1	Representação do método ilustrando cada etapa do mesmo. a) o deslocamento e a linha de corte; b) corte e exclusão da região e inferior; c) reflexão da parte restante.[13]	19
3.2	Região de corte que divide o espaço em dois($z=c$), acima do horizonte de eventos(R_+).[14]	27
3.3	Comportamento da densidade de matéria(cor vermelha) e da pressão(cor azul) em função de R . [14]	29
4.1	Método “Deslocar, Cortar e Refletir” aplicado a Imersão[13]	43

Capítulo 1

Introdução

Em sua Teoria da Relatividade Geral - TRG, publicada em 1915, Einstein concluiu que a gravidade não é uma força, como Newton julgava, mas sim curvatura do espaço-tempo. Assim como na Teoria da Relatividade Restrita -TRR-, tal espaço-tempo têm (3+1) dimensões, sendo três dimensões espaciais e uma temporal. Contudo, sua geometria é modificada pela presença de matéria e energia[1, 2]. Na TRG, toda informação geométrica do espaço-tempo está contida em um objeto matemático chamado de tensor métrico, $g_{\mu\nu}$ [1, 2]. Por outro lado, a distribuição de matéria e energia presentes no espaço-tempo é representada pelo tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$. De acordo com a TRG, a dinâmica do campo gravitacional (geometria do espaço-tempo) é descrita por um conjunto de equações denominado por equações de Einstein. Estas equações estabelecem uma relação entre os tensores $g_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$, permitindo determinar qual deve ser a geometria do espaço-tempo, gerado por uma determinada configuração de matéria e energia. Pelo menos, para campos gravitacionais fracos, podemos afirmar que a TRG é uma teoria extremamente bem sucedida, com uma base experimental bastante consolidada. Suas previsões vão desde a existência de buracos negros, até radiação gravitacional.

Todas estas soluções foram obtidas a partir de informações sobre a distribuição de matéria e energia, isto é, as equações de Einstein foram resolvidas a partir do conhecimento do tensor energia-momento e determinando a métrica do espaço. Desta forma,

partindo de um determinado grau de simetria, esférica e axial são as mais comuns, para tornar mais simples a resolução destas equações, foram obtidas as chamadas *Soluções Exatas* da relatividade geral. Estas soluções possuem interpretações claras e entre elas estão:

- Solução de Schwarzschild(Solução esfericamente simétrica e estática).
- Solução de Reissner-Nordstrom(Solução esfericamente simétrica e com carga elétrica).
- Solução de Kerr(Solução esfericamente simétrica e com rotação).
- Métrica de Robertson-Walker(Descreve modelos cosmológicos homogêneos e isotrópicos)

Contudo, podemos resolver estas equações no sentido inverso. Primeiro consideramos a métrica do espaço-tempo, para, em seguida, determinarmos a fonte de energia (tensor energia-momento) responsável pela respectiva geometria. Esta forma de obter soluções cosmológicas e relativísticas é interessante por não ter que resolver diretamente as equações(já que as mesmas não são triviais), permitindo trabalhar com modelos de dimensões extras, sobre tudo o RSI e o RSII.

Entre os métodos pode-se destacar o "Deslocar, Cortar e Refletir"(método que é capaz de gerar solução com distribuição de matéria a partir de uma solução de vácuo utilizando métrica na forma de Weyl) e o método de imersão (método que gera soluções quando consideramos um espaço de dimensões superiores no qual está imerso um espaço menor que é o objeto de estudo).

Desta forma, propomos estudar, através do método de imersão, soluções com simetria axial no modelo de RSII de dimensões extras. No capítulo 2 é feita uma revisão sobre o estudo de dimensões extras, desde o modelo precursor de Kaluza-Klein até o modelo utilizado como base para o estudo, o RSII. Neste capítulo, também apresentamos, de maneira sucinta, os aspectos sobre a massa dos grávitons e como está distribuída de maneira discreta(modos Kaluza-Klein), porque não podemos observar a

dimensão extra e seus métodos de compactação dos diferentes modelos apresentados. No capítulo 3 mostra-se o funcionamento do método ”Deslocar, Cortar e Refletir” e aplicação do mesmo ao espaço *Schwarzschild – AdS₅*. No capítulo 4 desenvolve-se o Método da Imersão, o qual é caracterizado pela aplicação do formalismo de imersão ao método ”Deslocar, Cortar e Refletir”. Por fim, no capítulo 5 são apresentadas as considerações finais.

Capítulo 2

Dimensões Extras

Unificar as forças fundamentais: esta era a intensão por trás da teoria de Theodor Kaluza. Por ele foi proposto a análise de um espaço com mais dimensões, com dimensões extras além das quatro já conhecidas. Neste cenário a teoria da relatividade geral de Einstein uniria as forças fundamentais, até então gravitacional e eletromagnética, através de uma aplicação em cinco dimensões[7]. Tal forma de pensar ganhou base física e matemática mais sólida quando Oscar Klein explicou a aparência quadridimensional do Universo. Segundo ele, a quinta dimensão tinha topologia circular e um raio muito pequeno, na escala de Planck, impossibilitando, desta forma, a detecção direta.

Apesar de unificar de maneira formal as interações, o modelo de Kaluza-Klein não explicava porque a força gravitacional era tão fraca se comparada com as outras, o chamado *Problema de Hierarquia*. Com o propósito de resolve-lo, Arkani, Dimopoulos e Dvali desenvolveram um novo modelo de estudo para as dimensões extras, o ADD.

O modelo ADD é o primeiro modelo de branas que trabalha com a idéia de que a nossa realidade quadridimensional está imersa em um universo de dimensões maiores, como uma subvariedade dentro de uma variedade de dimensões superiores. Nesta subvariedade estariam aprisionadas todas as forças fundamentais, exceto a gravitacional. Esta última pode se propagar na dimensão extra e por isso seria tão mais fraca que as outras na subvariedade. Assim, este foi bem aceito. Outra característica, que o

torna muito interessante é a possibilidade da dimensão extra, embora compacta, ser da ordem submilimétrica, muito maior que Planck. Contudo, faz-se necessário, pelo menos, duas dimensões extras para garantir consistência com os resultados experimentais obtidos até então.

Talvez por isso os modelos RSI e RSII, ambos propostos por Lisa Randall e Raman Sundrum, despertaram grande interesse também. Ambos são modelos que utilizam branas, mas ao contrário do seu predecessor, trabalham com apenas uma dimensão extra sem ser incompatível com os dados experimentais, podendo ter a dimensão extra compacta(RSI) ou não(RSII).

Este capítulo está organizado da seguinte forma: Na seção 4.1 apresentamos o modelo de Kaluza-Klein. Na seção 4.2 apresentamos o modelo ADD, mostrando o método de aprisionamento dos campos e porque não há detecção da dimensão extra. Na seção 2.3 descrevemos o RSI e por fim na seção 2.4 falamos do RSII.

2.1 Modelo Kaluza-Klein

Proposto inicialmente por Kaluza e Nordstron, de maneira independente, tal modelo de dimensão extra tinha o objetivo de unificar a teoria da gravitação, sob a forma da relatividade geral de Einstein, e o eletromagnetismo de Maxwell a partir da adição de uma dimensão extra. Com a adição de uma quinta dimensão, surgiu um problema. Por que a quinta dimensão não era observada na natureza? Para justificar isso Klein propôs que

- A dimensão extra não aparece por ser compactada com comprimento de ordem do comprimento de Planck, de tal maneira que as escalas experimentais de energia não possibilitam a observação da mesma;
- A topologia desta deve ser cilíndrica, que faz com que as derivadas com respeito a dimensão extra sejam nulas para baixas energias.

Kaluza demonstrou que trabalhando com uma teoria de vácuo pentadimensional, em Relatividade Geral, obteríamos um espaço quadridimensional na presença de um campo eletromagnético sob as leis de Maxwell.

$$G_{AB} = 0 \quad (2.1.1)$$

$$G_{\alpha\beta}^{(4)} = T_{\alpha\beta}^{EM} \quad (2.1.2)$$

No qual os índices maiúsculos representam 5D ($0 \rightarrow 4$) e os índices gregos representam 4D ($0 \rightarrow 3$).

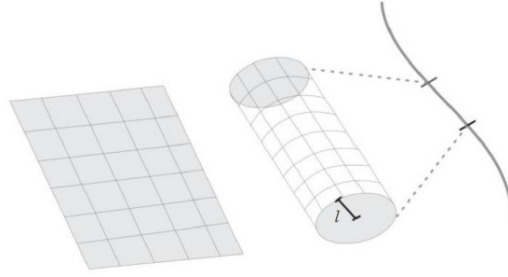


Figura 2.1: Cilindro KK segundo a topologia circular [4]

A métrica utilizada tinha assinatura $(-, +, +, +, +)$ com $\kappa = 8\pi G$ e $c = \hbar = 1$ [3], e foi colocada no forma:

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + k^2 \phi A_\mu A_\nu & \phi A_\mu \\ \phi A_\nu & k^2 \phi \end{pmatrix}$$

onde, $g_{\mu\nu}$ seria a métrica quadridimensional, $g_{\mu z}$ teria o papel de campo eletromagnético A_μ e g_{zz} seria um campo escalar.

Com respeito as suposições tomadas:

$$\frac{\partial g_{AB}}{\partial z} = 0 \quad (2.1.3)$$

Para entendermos melhor o mecanismo de Klein para esconder a dimensão extra, vamos considerar uma campo escalar no espaço “cilíndrico” de cinco dimensões. Por

ter uma topologia circular, todos os campos são periódicos com respeito a dimensão extra. Assim, um campo escalar pode ser expresso por:

$$\varphi(x^\mu, z) = \sum_n \varphi^{(n)}(x^\mu) e^{inz/l} \quad (2.1.4)$$

No qual l é o raio da dimensão extra e os campos $\varphi^{(n)}(x^\mu)$ são chamados de modos Kaluza-Klein, modos KK[8].

Admitindo um cilindro homogêneo e a métrica plana podemos escrever os campos como um produto de funções:

$$\varphi(x^\mu, z) = X(x^\mu) \alpha(z) \quad (2.1.5)$$

E as equações de Klein-Gordon para o campo escalar φ ;

$$\square_{(5)} \varphi = 0 \quad (2.1.6)$$

$$\square_{(5)} = \square + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.1.7)$$

aplicando o D’lambertiano ao potencial,

$$\square_{(5)} \Phi(x^\mu, z) \equiv (\partial_\mu^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \phi(x_\mu, z) = 0 \quad (2.1.8)$$

admitindo que ambas as partes dessa equação devem ser iguais a uma constante, temos que:

$$\square \chi(x^\mu) = C \chi(x^\mu) \quad (2.1.9)$$

$$\alpha(z) = A \sin \sqrt{C} z + B \cos \sqrt{C} z \quad (2.1.10)$$

Na equação (2.1.10) a constante c pode ser interpretada como a massa do campo escalar quadridimensional, $\varphi^{(n)}$, $c = m^2$. Pelas condições de periodicidade, $c = \frac{m^2}{l^2}$ representa os valores permitidos de modo que a massa assume:

$$m_n = \frac{|n|}{l} \quad (2.1.11)$$

Para n igual a zero, a massa é nula. Por isso, o campo $\chi_\phi^{(0)}$ é chamado de modo zero. Se apenas este modo estiver excitado, o campo não dependerá da dimensão extra. Os outros os modos, chamados de modos KK, podem ser considerados partículas diferentes cuja a massa depende do tamanho da dimensão extra e cada um destes modos pode ser considerado uma partícula diferente que depende da dimensão extra, do inverso do seu raio, como é mostrado na equação anterior[7].

Desta forma, para excitarmos umas partículas, é necessário uma energia mínima para cada modo. Por esta ser inversamente proporcional ao raio da quinta dimensão, a única forma de explicar porque não é possível detectar as partículas do primeiro modo KK é considerar o raio muito pequeno, da ordem do comprimento de Planck $l_p \approx 10^{-35}m$.

Assim, a energia mínima seria muito grande, indisponível para a experimentação atual[4].

2.2 ADD

É, historicamente, o primeiro modelo a tentar solucionar o problema da hierarquia usando dimensões extras e foi elaborado por Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali [6].

O ADD, como é conhecido, inicia-se assumindo que o espaço-tempo é uma composição $(4 + n)$, com $n \geq 1$, um espaço ambiente. Depois, todas as partículas do modelo padrão estão localizadas em um espaço menor, uma subvariedade(3-branas), em uma parede $(1 + 3)$ dimensional[8], Vamos descrever o mecanismo de localização

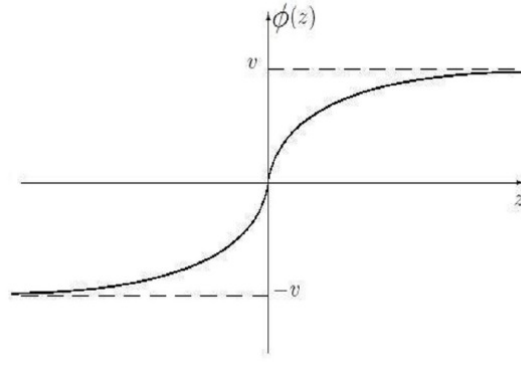


Figura 2.2: Solução parede de domínio. [4]

do campo de matéria.

Utilizando a teoria de campos, podemos considerar um campo escalar definido no espaço superior, $\phi(x^{(\mu)}, z)$. Sendo a ação[4]:

$$S = \int d^4x dz \left[\frac{1}{2} (\partial_A \phi)^2 - V(\phi) \right] \quad (2.2.12)$$

com $V(\phi)$, o potencial escalar, dado por:

$$V(\phi) = \frac{(\lambda)^2}{8} (\phi^2 - V^2)^2 \quad (2.2.13)$$

Tal potencial possui dois pontos de mínimo que são os *Estados de Vácuo*. Utilizando a equação de Euler-Lagrange em cinco dimensões;

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_A \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_A \phi)} \right) = 0 \quad (2.2.14)$$

fazendo (2.2.12) aplicada a (2.2.14) podemos obter a equação:

$$\partial_z^2 \phi - \partial_\mu^2 \phi + \frac{\lambda^2}{\alpha} \phi (\phi^2 - v^2) = 0 \quad (2.2.15)$$

da qual uma das soluções possíveis é:

$$\phi_o(z) = v \tanh \left(\frac{\lambda v z}{\alpha} \right) \quad (2.2.16)$$

Pode-se evidenciar o comportamento do potencial com relação a dimensão extra[4].

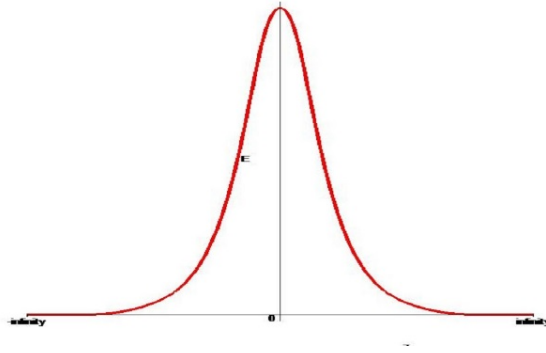


Figura 2.3: Gráfico potencial.[4]

É importante notar que, quando $\phi(z) = \pm v$ para $z = \pm\infty$, temos o valores de mínimo citados anteriormente. Tais valores são separados por um pico de energia em $z = 0$.

Este acontecimento mostra que toda a energia do campo está concentrado em torno desta região. Por isto esta solução é conhecida como parede de domínio. Calculando a densidade de energia desta região:

$$\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} H_0 dz \quad (2.2.17)$$

Com σ igual a densidade de energia por 3-volume e H_0 a densidade de Hamiltoniano do campo escalar. Sendo,

$$H_0 = \frac{1}{\alpha} (\partial_A \phi)^2 + \frac{\lambda^2}{8} (\phi^2 - v^2)^2 \quad (2.2.18)$$

então para a solução encontrada, temos:

$$H_0 = \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 v^4}{\cosh^4\left(\frac{\lambda v z}{2}\right)} \quad (2.2.19)$$

portanto de (2.2.17) obtemos:

$$\sigma = \frac{\alpha \lambda v^3}{3} \quad (2.2.20)$$

O termo λ pode ser interpretado como o inverso da largura da parede. Agora se fizermos $\lambda \rightarrow \infty$ a energia é mantida constante, damos origem a uma 3-brana localizada em $z=0$.

Uma vez que descrevemos a parede de domínio, nos falta o confinamento. Para isto, vamos pensar no confinamento dos férmions [6].

Partindo da equação de Dirac em 5D,

$$(i\Gamma^A \partial_A - M)\Psi = 0 \quad (2.2.21)$$

no qual Γ^A são as matrizes de Dirac em 5D, e Ψ é o espinor em 5D

$$\Gamma^{mu} = \gamma^\mu \quad (2.2.22)$$

$$\Gamma^z = -i\gamma^{(5)} \quad (2.2.23)$$

Admitindo uma interação tipo Yukawa entre os férmions e o campo escalar, temos a ação:

$$S = \int (d^4x dz (i\Psi \Gamma^A \partial_A \Psi - M\Psi\phi - h\phi_0\Psi\Psi)) \quad (2.2.24)$$

Considerando férmions sem massa, com a ação obtemos a equação de movimento dos mesmos:

$$i\Gamma^z \partial_z \Psi + i\Gamma^\mu \partial_\mu \Psi - h\phi_0 \Psi = 0 \quad (2.2.25)$$

Aplicando o método de separação de variáveis ($\psi = \psi(x)f(z)$), obtemos de (2.2.25);

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 \quad (2.2.26)$$

e

$$\frac{df(z)}{dz} = (m - h\phi)f(z) \quad (2.2.27)$$

onde $\psi(x)$ será o espinor em 4D. A constante de separação "m" funciona como a massa deste espinor. Devemos enfatizar que admitimos a condição $\Gamma^5\Psi = -\psi$. Resolvendo (2.2.27) encontramos:

$$f(z) = \exp(-h \int_0^z \phi_0(z) dz) \quad (2.2.28)$$

em que $\phi_0(z)$ é a solução da parede de domínio. Agora, considerando o espinor de modo zero, podemos verificar que será uma função de onda em 5D descrita por:

$$\Psi = \exp\left(-\int_0^z h\phi_0(z) dz\right) \psi_0(x) \quad (2.2.29)$$

Como $f(z)$ tende a zero exponencialmente no infinito, logo temos que o modo zero fermiônico está localizado próximo de $z=0$.

Uma vez entendido o mecanismo do confinamento, falta dizer porque a gravidade é tão fraca no nosso universo com três dimensões espaciais e porque recuperam o comportamento quadridimensional para longas distâncias. Considerando o espaço como uma topologia R^4 , o campo produzido por uma forma puntiforme pode ser expresso por:

$$\phi(R) = -\frac{G^{(5)}m}{R^2} \quad (2.2.30)$$

Como a dimensão extra tem topologia circular (S^1), o espaço ambiente acaba tendo topologia de cilindro ($R^3 \times S^1$). Tal forma nos permite pensar em várias linhas de campo que partem da massa e percorrem o cilindro, modificando a percepção de um observador, que verá mais de uma massa pontual separadas umas das outras por uma distância constante de $2\pi L$, que representa o comprimento da dimensão extra. Tais imagens são chamadas de *Imagens Topológicas*, que podem ser vistas como uma distribuição contínua caso a distância para o observador for muito grande.

Neste caso, usando a Lei de Gauss, podemos obter o potencial gravitacional [4],

$$\phi(R) = -\frac{G^{(5)}m}{2\pi} 1/R \quad (2.2.31)$$

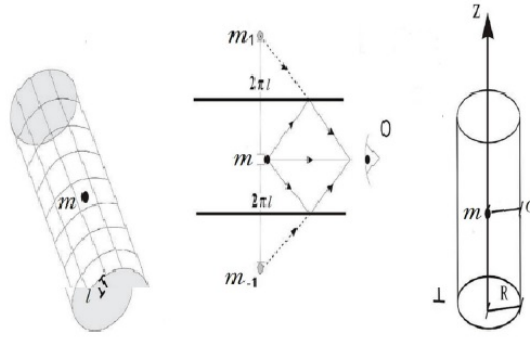


Figura 2.4: Representação das imagens topológicas. A forma como se dá a distribuição discreta e forma contínua como é vista a longas distâncias.[4]

se indentificarmos $G^{(5)} = G^{(4)}2\pi l$, então:

$$\phi(R) = -\frac{G^{(4)}m}{R} \quad (2.2.32)$$

Pelo fato de os demais campos não revelarem a dimensão extra devido ao confinamento na brana, o comprimento da dimensão extra pode ser maior que o apresentado no modelo anterior, chegando a ordem submilimétrica. Sendo assim, faz-se necessário ajustar o l para justificar a não detecção da dimensão extra [7, 8], por efeitos gravitacionais.

Baseados a relação, que aplicamos anteriormente,

$$\frac{G^{(5)}}{G^{(4)}} = l_c \quad (2.2.33)$$

onde l_c é o comprimento da dimensão extra, podemos generalizar para n -dimensões,

$$\frac{G^{(n)}}{G^{(4)}} = l_c^{n-4} \quad (2.2.34)$$

por sua vez, podemos reescrever $G^{(n)}$ e $G^{(4)}$ em termos de comprimento de Planck definidos no espaço-tempo com dimensão n , $(l_p^{(n)})$ e 4, (l_p) [4]. Assim chegamos a solução

$$l_c = l_p^{(n)} \left(\frac{l_p^{(n)}}{l_p} \right)^{\frac{2}{n-4}} \quad (2.2.35)$$

Desta forma, chegamos a conclusão que o comprimento das dimensões extras está relacionada ao número de dimensões do espaço ambiente.

Para resolver o problema de hierarquia faríamos $l_p^{(n)} = 10^{-19}m$. Neste caso, com $n = 5$, l_c chegaria a ordem de $10^{12}m$ tornando o modelo incoerente com a experimentação. No entanto, $n = 6$ para a dimensão seria de ordem submilimétrica [8].

2.3 Modelo RSI

O modelo proposto é construído em um sistema de 3-branas em cinco dimensões com uma constante cosmológica negativa.

Como elementos integrantes do RSI temos:

- Dimensão extra com comprimento finito, assumindo uma forma $\frac{S_1}{Z_2}$, que pode ser entendida como um círculo.
- S_1 é como um círculo com dois pontos opostos (θ e $-\theta$) identificados. Esta identificação, tem dois pontos fixos que são $\theta = 0$ e $\theta = \pi$
- Duas branas são postas nestes pontos da dimensão extra, sendo uma com tensão positiva e a outra com tensão negativa.

Neste modelo, o elemento de linha assume a seguinte forma [9]:

$$ds^2 = \exp(-A(z))\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dz^2 \quad (2.3.36)$$

no qual $A(z) = 2\kappa|z|$ chamado de fator de deformação. Considerando o espaço ambiente, as equações de Einstein serão;

$$R_{AB} - \frac{1}{2}g_{AB}R = T_{AB} \quad (2.3.37)$$

cujos índices mostrados correspondem a um espaço em cinco dimensões. Analisando o segundo membro, o tensor energia momento, teremos uma contribuição das branas, τ_{AB} , e uma contribuição da constante cosmológica do ambiente, Λ [14].

$$T_{AB} = \Lambda g_{AB} + 8\pi G_{(5)} \tau_{AB} \quad (2.3.38)$$

Já τ_{AB} tomará a forma,

$$\tau_{\mu\nu} = \sigma g_{\mu\nu}^{(5)} \delta(z) - \sigma g_{\mu\nu}^{(5)} \delta(z - z_c) \quad (2.3.39)$$

indicando a presença de uma brana com tensão positiva σ em $z = 0$ e outra com tensão negativa $-\sigma$ em $z = z_c$. Além disso, $\tau_{AZ} = 0$, garantindo que não há fluxo de energia entre a bra e o espaço ambiente.

Utilizando (2.3.37) e (2.3.38), podemos verificar que a métrica (2.3.36) é solução das equações de Einstein desde que:

$$\Lambda = -6\kappa^2 \quad (2.3.40)$$

e

$$\sigma^2 = -\frac{3}{32\pi^2 G_{(5)}^2} \Lambda \quad (2.3.41)$$

Esta constante cosmológica negativa implica em um espaço-tempo anti-de Sitter em cinco dimensões, AdS_5 , e o valor da tensão está ajustado ao da constante cosmológica.

Para estudarmos o campo gravitacional na brana devemos considerar que os campos e matérias presos a brana influenciam o campo gravitacional. Essa influência resulta em uma perturbação da métrica, que pode ser descrita pelo seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = [a^2(z)\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x, z)]dx^\mu dx^\nu - dz^2 \quad (2.3.42)$$

tendo $h_{\mu\nu} \ll 1$.

Neste cenário (Matéria + Brana + Constante Cosmológica) as equações de Einstein podem ser escritas como:

$$\square\Phi_{\rho\nu}(x) + C\Phi_{\rho\nu}(x) = 0 \quad (2.3.43)$$

e

$$\Psi_{,zz(m)}(z) - 4\kappa^2\Psi_{(m)}(z) + \frac{C}{a^2}\Psi_{(m)}(z) = 0 \quad (2.3.44)$$

onde fazemos $h_{\rho\nu}(\chi, z) = \psi(z)\Phi_{\rho\nu}(x)$.

Devemos ressaltar que C é uma constante de separação não-negativa, portanto, que pode ser escrita como $C = m^2[10]$. Logo:

$$\square\Phi_{\rho\nu} + m^2\Phi_{\rho\nu} = 0 \quad (2.3.45)$$

e

$$\Psi_{(m),zz}(z) - 4\kappa^2\Psi_{(m)}(z) + \frac{m^2}{a^2}\Psi_{(m)}(z) = 0 \quad (2.3.46)$$

A primeira equação representa uma equação de Klein-Gordon para o campo gravitacional $\Phi_{\rho\nu}$ com massa “m”, sendo interpretado como um campo grávitons de massa “m”. Cada valor de m permitido representa um modo possível para o campo $\Phi_{\rho\nu}$, o que nos leva a pensar grávitons com massa como modos KK. Aplicando as condições de contorno em $z = 0$ e $z = z_c$ à (2.3.44), podemos mostrar, que o primeiro valor não nulo de m é dado por

$$m \cong \kappa e^{-\kappa z_c} \quad (2.3.47)$$

Assim podemos constatar que a massa da gráviton depende do comprimento da dimensão extra e de $\kappa = \sqrt{\frac{-\Lambda}{6}}$. Admitindo $z_c = \frac{1}{\kappa}$ e que κ é muito grande, os grávitons massivos necessitariam de muita energia, não aparecendo nos experimentos realizados.

2.4 Modelo RSII

Nos outros modelos, vimos que o termo constante "m" que poderia ser interpretado como a massa do gráviton e que seus valores permitidos formavam um conjunto discreto inversamente dependente do raio da dimensão extra. Removendo a segunda brana, no entanto, teríamos uma mudança nessa distribuição, que passaria de discreto para contínuo e como consequência os modos KK que representam os grávitons mais leves já deveriam ter sido observados.

No entanto, segundo Randall e Sundrum, a uma forte supressão dos gravitões leves, devido a curvatura do espaço ocasionada por um termo cosmológico constante e negativo. Em função disso é possível mostrar que a função de green

$$G(R) = -\frac{\kappa}{4\pi R}\left[1 + \frac{1}{\kappa^2 R^2}\right] \quad (2.4.48)$$

associada as equações (2.3.43) e (2.3.44) tem a forma de (2.4.48) que recupera o comportamento 4D para longas distâncias.

Usando (2.4.48), pode-se mostrar que a métrica gerada por um corpo simetricamente esférico na brana:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2G^{(4)}M}{r} - \frac{4G^{(4)}M}{3\kappa^2 r^3}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2G^{(4)}M}{r} - \frac{4G^{(4)}M}{3\kappa^2 r^3}\right)} - r^2 d\Omega^2 \quad (2.4.49)$$

Por possibilitar a existência de uma dimensão extra não-compacta, o modelo RSII é alvo de estudo afim de obter soluções das equações de Einstein, sobre tudo, soluções que possam descrever buracos negros na brana.

Capítulo 3

Método Deslocar, Cortar e Refletir

A obtenção de soluções que representam fenômenos gravitacionais, campos e potenciais, por muito tempo foi condicionada a Teoria Newtoniana; onde, a partir de um potencial, pode-se calcular a equação de Poisson para encontrar a massa e o campo. Hoje, sabe-se que o campo gravitacional é uma deformação do espaço que é gerada por um corpo portador de massa, passando a ser visto como um fenômeno geométrico.

Tal ideia é apresentada pela relatividade geral de Einstein, onde toda e qualquer distribuição de matéria pode gerar uma deformação espaço-temporal. Essas características estão relacionadas pelas equações de Einstein.

$$R_{AB} - \frac{1}{2}g_{AB}R = T_{AB} \quad (3.0.1)$$

No qual o primeiro membro define a geometria do espaço e o segundo a distribuição de matéria e energia. As soluções dessas equações representam os fenômenos gravitacionais e podem ser obtidas de duas maneiras [5]:

1. Método Direto; que consiste em resolver tais equações a partir de uma distribuição de matéria, a fim de achar a geometria.
2. Método Inverso; que consiste em determinar a matéria a partir de uma métrica dada.

Este capítulo está dividido da seguinte forma: Na sec.3.1 mostramos o método Deslocar, Cortar e Refletir, na sec.3.2 desenvolvemos a aplicação do método a Teoria Newtoniana, e na 3.3 aplicamos a Teoria da Relatividade com métrica Schwarzschild- AdS_5 .

3.1 O método

Um dos métodos inversos que pode ser utilizado é o Deslocar, Cortar e Refletir. Tal método pode ser entendido como uma extensão do método das imagens, podendo ser visto no processo de construção de modelos com simetria axial, a exemplo do discos galáticos. O método consiste de três passos [5].

Primeiro, vamos assumir um espaço-tempo com singularidade localizada em $z=0$. Após isso, deslocamos o eixo z para uma posição $z=a$, estabelecendo uma linha de corte e dividindo o espaço em duas partes: uma com fonte e outra sem. Neste plano estabelecido é descartada a parte detentora de fonte. Por último, faz-se uma reflexão, da parte que sobrou, no lugar da parte extraída, estabelecendo um novo espaço que possui matéria e energia[5, 13, 14].

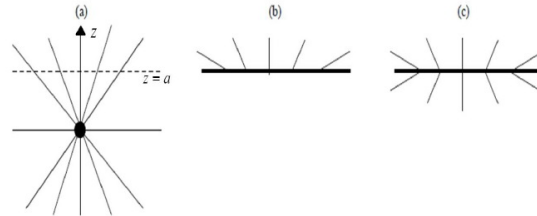


Figura 3.1: Representação do método ilustrando cada etapa do mesmo. a) o deslocamento e a linha de corte; b) corte e exclusão da região e inferior; c) reflexão da parte restante.[13]

3.2 Aplicação a Teoria Newtoniana

Na teoria gravitacional newtoniana, o potencial gravitacional em uma determinada região do espaço é gerado por uma distribuição de matéria e ambas grandezas estão relacionadas pela equação de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi^{(0)}(R) = 4\pi G \rho(R) \quad (3.2.2)$$

O potencial no vácuo, $\Phi^{(0)}(R, z)$, é solução da equação de Laplace, cuja forma em coordenadas cilíndricas é dada por:

$$\nabla^2 \Phi^{(0)} = \frac{1}{R} \Phi_{,R}^{(0)} + \Phi_{,RR}^{(0)} + \Phi_{,zz}^{(0)} \quad (3.2.3)$$

Sendo $\Phi^{(0)} = \Phi^{(0)}(R, z)$. Através desse potencial vamos construir uma nova função $\Phi(R, z)$ que represente o potencial gravitacional gerado por uma distribuição de matéria, que neste caso será um disco. Para tanto, vamos aplicar o método “Deslocar, Cortar e Refletir” ao potencial de vácuo, fazendo uma transformação de coordenadas $z \rightarrow z' = h(z) + a$.

Desta forma, o novo potencial $\Phi(R, z)$ será:

$$\Phi(R, z) = \Phi^{(0)}(R, z') \quad (3.2.4)$$

A função $h(z)$, além de par, deve ser escolhida de tal modo que $h(z)$ e $h(z')_{,z}$ sejam contínuas na região $-a \leq z \leq a$, além do que $h(z')_{,z}$ e $h(z')_{,zz}$ devem ser escolhidos de modo que a densidade de massa seja não negativa.

Tomando o potencial $\Phi(R, z)$, podemos determinar a distribuição de matéria do disco por meio da equação de Poisson.

$$\nabla^2 \Phi(R, z) = 4\pi G \rho(R, z) \quad (3.2.5)$$

Calculando o laplaciano para este potencial:

$$\nabla^2 \Phi(R, z) = \frac{1}{R} \Phi_{,R} + \Phi_{,RR} + \Phi_{,zz} \quad (3.2.6)$$

Da forma deste potencial, podemos ressaltar:

$$\frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial z} = \frac{\partial \Phi^{(0)}(R, z')}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} \quad (3.2.7)$$

que resulta em;

$$\frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial z} = \frac{\partial \Phi^{(0)}(R, z')}{\partial z'} \frac{dh}{dz} \quad (3.2.8)$$

quando aplicamos $z' = h(z) + a$. Reescrevendo na notação apresentada em 3.2.3:

$$\Phi_{,z} = \Phi_{,h}^{(0)} h_{,z} \quad (3.2.9)$$

e

$$\Phi_{,zz} = h_{,zz} \Phi_{,h}^{(0)} + h_{,z} \Phi_{,hh}^{(0)} \quad (3.2.10)$$

De posse de 3.2.9 e 3.2.10, o laplaciano toma a forma de:

$$\nabla^2 \Phi(R, z) = \frac{1}{R} \Phi_{,R}^{(0)} + \Phi_{,RR}^{(0)} + h_{,zz} \Phi_{,h}^{(0)} + h_{,z} \Phi_{,hh}^{(0)} \quad (3.2.11)$$

E a equação de Poisson:

$$\frac{1}{R} \Phi_{,R}^{(0)} + \Phi_{,RR}^{(0)} + h_{,zz} \Phi_{,h}^{(0)} + h_{,z} \Phi_{,hh}^{(0)} = 4\pi G \rho(R, z) \quad (3.2.12)$$

Assim escrevemos a densidade de massa referente a $\Phi(R, z)$ em função do potencial de vácuo $\Phi^{(0)}(R, z)$ e da função $h(z)$.

Nas coordenadas (R, z') a equação de Laplace do potencial de vácuo poder escrita como:

$$\nabla^2 \Phi^{(0)}(R, z') = \frac{1}{R} \Phi_{,R}^{(0)} + \Phi_{,RR}^{(0)} + \Phi_{,z'z'}^{(0)} = \frac{1}{R} \Phi_{,R}^{(0)} + \Phi_{,RR}^{(0)} + \Phi_{,hh}^{(0)} = 0 \quad (3.2.13)$$

o que nos fornece,

$$\frac{1}{R} \Phi_{,R}^{(0)} + \Phi_{,RR}^{(0)} = -\Phi_{,hh}^{(0)} \quad (3.2.14)$$

Aplicando (3.2.14) em (3.2.12) temos que:

$$\rho(R, z) = \frac{1}{4\pi G} \left\{ h_{,zz} \Phi_{,h}^{(0)} + [(h_{,z})^2 - 1] \Phi_{,hh}^{(0)} \right\} \quad (3.2.15)$$

A equação representa a expressão geral da densidade de massa $\rho(R, z)$ associada ao novo potencial, já que possibilita encontrar qualquer distribuição de matéria através do potencial de vácuo e da escolha da função $h(z)$.

Para o estudo dos discos finos, devemos tomar $h(z) = |z|$, ressaltando que, $h_{,z} = \partial_z |z| = 2\theta(z) - 1$, onde $\theta(z)$ é a função de Heaveside, e $h_{,zz} = 2\delta(z)$ é a função delta de Dirac.

Aplicando as derivadas da função $h(z)$ a expressão da densidade de massa, obtemos a densidade do disco fino em função do potencial de vácuo.

$$\rho(R, z) = \frac{1}{2\pi G} \Phi_{,h}^{(0)} \delta(z) \quad (3.2.16)$$

Mostrando que a densidade de massa $\rho(R, z)$ é proporcional a $\delta(z)$, significando que esta densidade respresenta uma distribuição de massa concentrada no plano $z = 0$, cuja densidade superficial é:

$$\sigma(R) = \frac{1}{2\pi G} \Phi_{,h}^{(0)} \quad (3.2.17)$$

Escolhendo o potencial newtoniano de uma massa pontual M escrito em coordenadas cilíndricas, para ilustrar o método;

$$\Phi^{(0)}(R, z') = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + z'^2}} \quad (3.2.18)$$

podemos construir o novo potencial Φ . Aplicando a transformação de coordenadas $z \rightarrow z' = h(z) + a$ e $h(z) = |z|$, o novo potencial de vácuo passa a ser expresso por:

$$\Phi^{(0)}(R, z') = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (|z| + a)^2}} \quad (3.2.19)$$

Para encontrar a densidade de massa, segundo (3.2.16), basta encontrar a forma de $\Phi_{,h}^{(0)}$. Logo, para $z > 0$:

$$\Phi_{,h}^{(0)} = \frac{GM(|z| + a)^{3/2}}{R^2 + (|z| + a)^2} \quad (3.2.20)$$

Como a matéria está concentrada em $z = 0$:

$$\Phi_{,h}^{(0)} = \frac{GMa^{3/2}}{R^2 + a^2} \quad (3.2.21)$$

Finalmente resultando em,

$$\rho(R, z) = \frac{Ma}{2\pi(R^2 + a^2)^{3/2}} \delta(z) \quad (3.2.22)$$

cuja densidade superficial será:

$$\sigma(R, z) = \frac{Ma}{2\pi(R^2 + a^2)^{3/2}} \quad (3.2.23)$$

O resultado encontrado é uma reprodução do modelo proposto por Kuzmin, quando aplicamos à ele a solução particular.

3.3 Aplicação a Teoria da Relatividade

Como mencionado anteriormente, há duas formas de encontrar soluções exatas; o método direto e o método inverso. Utilizaremos o método Deslocar, Cortar e Refletir para encontrar uma solução esfericamente simétrica e estática. É importante ressaltar que parte do processo a ser aplicado consistirá em utilizar as coordenadas de Weyl para encontrar o espaço-tempo associado aos potenciais presentes na métrica[5].

Vamos considerar a métrica do espaço sendo a de Schwarzschild- AdS_5 [15].

$$ds^2 = -U(R)dt^2 + \frac{1}{U(R)}dR^2 + R^2d\chi^2 + R^2\sin^2\chi d\Omega^2 \quad (3.3.24)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ e

$$U(R) = 1 + \kappa^2 R^2 - \frac{m}{R^2} \quad (3.3.25)$$

Podemos escrever essa métrica na forma de Weyl[14],

$$ds^2 = -e^{\frac{2\sqrt{3}\Phi}{3}}dT^2 + e^{-\frac{\sqrt{3}\Phi}{3}}[\alpha_0^{-\frac{1}{2}}e^{2\psi}(dR^2 + d\chi^2) + \alpha_0(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)] \quad (3.3.26)$$

com:

$$\Phi_0(r, z) = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln U(R) \quad (3.3.27)$$

E:

$$\alpha_0(r, z) = R^2 \sin^2\chi U^{\frac{1}{2}}(R) \quad (3.3.28)$$

$$\Psi_0(r, z) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{R^3 \sin\chi U^{3/4}}{\xi^2} \right] \quad (3.3.29)$$

onde ξ é definido por

$$\int \frac{dR}{U^{\frac{1}{2}} R} = \int \frac{d\xi}{\xi} \quad (3.3.30)$$

De posse dos potenciais da forma de Weyl vamos aplicar o método "Deslocar,Cortar e Refletir" para encontrar uma solução nova que contenha agora a brana. Segundo o método descrito na seção anterior, fazemos as seguintes transformações:

$$\Phi(r, z) = \Phi_0(r, z') \quad (3.3.31)$$

$$\alpha(r, z) = \alpha_0(r, z') \quad (3.3.32)$$

e

$$\Psi(r, z) = \Psi_0(r, z') \quad (3.3.33)$$

Calculando o tensor energia-momento e substituindo os potenciais, com $h(z) = |z|$, temos:

$$\tilde{\rho} = \frac{6c}{(8\pi G^{(5)})R^2} [1 - (1 + K^2 R^2 - \frac{m}{R^2})^{1/2}] \delta(z) \quad (3.3.34)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p} = \frac{2c}{(8\pi G^{(5)})R^2} \left\{ 2[(1 + K^2 R^2 - \frac{m}{R^2})^{1/2} - 1] + \right. \\ \left. \left(K^2 R^2 + \frac{m}{R^2} \right) \left(1 + K^2 R^2 - \frac{m}{R^2} \right)^{-1/2} \right\} \delta(z) \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

$$\tilde{P}_z = 0 \quad (3.3.36)$$

onde $\tilde{\rho} = -T_t^T$ representa a densidade de matéria; e $\tilde{p} = \tilde{p}_r = \tilde{p}_\theta = \tilde{p}_\phi$ são as pressões.

Como as equações dependem de $\delta(z)$ podemos concluir que as pressões e a energia serão distribuída em $z = 0$, ou seja, na hipersuperfície. Tomando a integral das equações anteriores em relação a direção transversal à hipersuperfície, obtemos distribuição de energia e pressão sobre a brana, ou seja, a distribuição volumétrica 3D.

$$T_B^A = \lim_{l \rightarrow 0} \int_{-l}^{+l} \tilde{T}_B^A \sqrt{g_{zz}} dz \quad (3.3.37)$$

portanto,

$$\rho = \frac{6c}{(8\pi G^{(5)})\eta R} [1 - (1 + k^2 R^2 - \frac{m}{R^2})^{1/2}] \quad (3.3.38)$$

e

$$\begin{aligned} p = & \frac{2c}{(8\pi G^{(5)})\xi R} \left\{ 2 \left[\left(1 + k^2 R^2 - \frac{m}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] + \right. \\ & \left. + \left(k^2 R^2 + \frac{m}{R^2} \right) \left(1 + k^2 R^2 - \frac{m}{R^2} \right) \right\}^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.3.39)$$

no qual ρ representa a densidade de energia 3D da brana. Tal distribuição, formado pelo método D.C.R, depende de R , sugerindo que há, além da própria brana em $z = 0$, um corpo esférico e estático confinado a mesma.

Analisando a expressão para a densidade de energia e para pressão, vemos que há uma dependência de R , incluindo $\xi(R)$. É importante lembrar que $R = R(r, z)$ e que aplicamos $z \rightarrow z' = |z| + c$. Para a posição da brana, $z = 0$, $R = R(r, c)$. Desta forma estabelece-se um valor mínimo para R quando fazemos $r = 0$; tal valor, $R(c)$, deve ser superior a R_+ já que este último refere-se ao horizonte de eventos (ver figura (3.2)).

O $R(c)$ está determinado por:

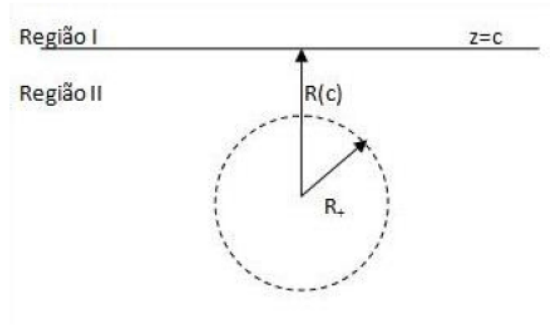


Figura 3.2: Região de corte que divide o espaço em dois ($z=c$), acima do horizonte de eventos (R_+). [14]

$$\int_{R_+}^{R(c)} \frac{1}{RU^{1/2}} dR = \ln\left(\frac{C}{\xi_+}\right) \quad (3.3.40)$$

Analisando assintoticamente as densidades de energia e pressões por 3-volume, obtemos

$$\sigma_{brana} = \frac{6c}{(8\pi G^{(5)})\xi_*} \quad (3.3.41)$$

e

$$p_{brana} = -\sigma_{brana} \quad (3.3.42)$$

para ξ_* representando o valor de ξ para a situação assintótica ($R \rightarrow \infty$). Os resultados anteriores nos mostram uma brana com tensão negativa. A tensão podendo ser ajustada pelo parâmetro c [14].

Como já dissemos anteriormente, (3.3.37) e (3.3.38), representam toda a distribuição de energia confinada na brana. Isso inclui evidentemente, o corpo.

Então, o tensor (3.3.37) é uma composição de brana e matéria:

$$T_{AB} = T_{AB}^{corpo} + T_{AB}^{brana} \quad (3.3.43)$$

relacionando as equações “originais” e as assintóticas, temos;

$$\rho_{corpo} = \rho - \sigma_{brana} \quad (3.3.44)$$

e

$$p_{corpo} = p + \sigma_{brana} \quad (3.3.45)$$

o que resulta em:

$$\rho_{corpo} = \frac{6c}{8\pi G^{(5)}} \left[\frac{1}{R\xi} \left[1 - \left(1 + k^2 R^2 - \frac{m}{R^2} \right)^{1/2} \right] + \frac{k}{\xi_*} \right] \quad (3.3.46)$$

e

$$p_{corpo} = \frac{2c}{8\pi G^{(5)}} \left\{ \frac{1}{R\xi} \left[2 \left(1 + k^2 R^2 - \frac{m}{R^2} \right)^{1/2} - 2 + \left(k^2 R^2 + \frac{m}{R^2} \right) \left(1 + k^2 R^2 - \frac{m}{R^2} \right)^{-1/2} \right] - \frac{3k}{\xi_*} \right\} \quad (3.3.47)$$

Podemos analisar os comportamentos arbitrando valores para k , m , c . Logo os gráficos de energia e pressão com respeito a distância para $m = 0, 3$, $k = 1$, $c = 2$, $R_{(c)} = 0,686$ e $R_+ = 0,492$.

Podemos verificar que a densidade de energia ρ_{corpo} é positiva em todos os pontos. Portanto, a matéria de que é feito o corpo satisfaz à condição fraca de energia [16]. No entanto, observemos que $\rho_{corpo} \geq p_{corpo}$, do centro do corpo até um raio $R_0 \cong 0,94$ (para os valores escolhidos). Para pontos além desse raio: $p_{corpo} > \rho_{corpo}$. Sendo assim, a condição de energia dominante ($\rho_{corpo} \geq 0$ e $\rho_{corpo} \geq p_{corpo}$) não é satisfeita em todos os pontos. Se a condição de energia dominante não é satisfeita, isto indica que o fluxo de energia pode ocorrer a uma velocidade superior a velocidade da luz para alguns observadores [16]. Portanto, este corpo não será constituído de matéria ordinária.

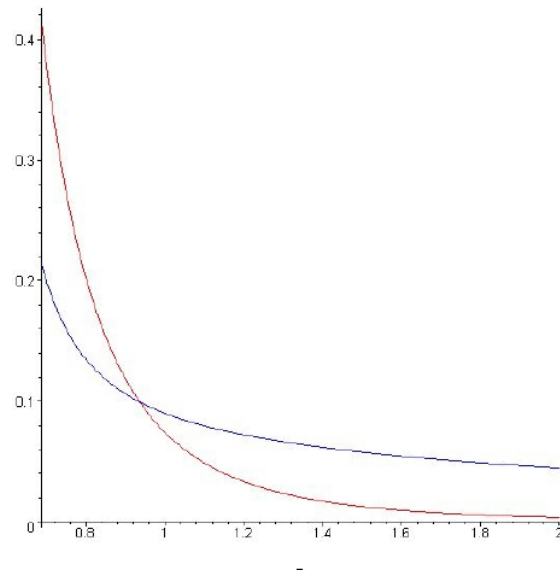


Figura 3.3: Comportamento da densidade de matéria(cor vermelha) e da pressão(cor azul) em função de R . [14]

Sendo assim, podemos dizer que este método não produz uma solução totalmente satisfatória do ponto de vista físico.

Capítulo 4

Método de Imersão

Com finalidade de encontrar solução para as equações de Einstein, foi apresentado no capítulo anterior o método Deslocar, Cortar e Refletir, no qual partimos de uma métrica na forma de Weyl para encontrar uma solução, método que é utilizado para encontrar soluções de discos e com simetria esférica.

No presente capítulo abordaremos um outro método, o *Método de Imersão*; que é considerado mais abrangente que o anterior, já que não exige que a brana tenha a forma de um plano ($z=\text{constante}$) nas coordenadas de Weyl. Por meio de imersão podemos levar um espaço n -dimensional, M^n , chamado de hipersuperfície ou subvariedade, para um espaço maior $(n + 1)$ -dimensional, M^{n+1} , também espaço ambiente ou variedade, através da identificação dos pontos pertencentes de um espaço com o outro, feita a partir de funções paramétricas, as *funções de imersão*, que definem como os sistemas de coordenadas são relacionados. Dito isto, podemos definir a função de imersão como:

$$y^A = f^A(x^\alpha) \tag{4.0.1}$$

no qual os índices latinos representam o espaço maior e os índices gregos o espaço menor.

Reconhecendo o fato de que os vetores pertencentes ao espaço menor também pertencem ao espaço maior, podemos escrever os vetores da hipersuperfície em termos

dos vetores ∂_A do espaço ambiente. De (4.0.3), temos;

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial y^A}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^A} = e_\alpha^A \partial_A \quad (4.0.2)$$

onde definimos:

$$e_\alpha^A = \frac{\partial f^A}{\partial x^\alpha} \quad (4.0.3)$$

Além disso, podemos determinar a métrica induzida na hipersuperfície pela métrica da variedade ambiente. A idéia é que na hipersuperfície é definida pela métrica do espaço ambiente “tomada emprestada” para calcular o produto interno dos vetores da hipersuperfície. Sendo assim, a métrica da hipersuperfície pode ser expressa por

$$h_{\alpha\beta} = e_\alpha^A e_\beta^B g_{AB} \quad (4.0.4)$$

onde g_{AB} é a métrica do espaço ambiente.

Pelo conceito de imersão, temos uma superfície que pode ser vista de duas formas:

- Pela visão dos “habitantes” da brana, onde ficam explícitas as características intrínsecas da brana.
- Pela visão do espaço ambiente, onde fica explícito como a hipersuperfície se comporta com relação ao espaço ambiente, ou seja, as características extrínsecas da hipersuperfície, cuja definição é:

Esta última é analisada com base no *Tensor de Curvatura Extrínseca*,

$$K_{\alpha\beta} = e_\alpha^A e_\beta^B (\nabla_B N_A) \quad (4.0.5)$$

que é essencial para encontrar a distribuição energética que gera tal fenômeno, tensor energia-momento, utilizando as condições de Junção de Israel.

$$T_{\mu\nu} = 2(K_{\mu\nu} - Kh_{\mu\nu}) \quad (4.0.6)$$

$$T_{\nu}^{\mu} = 2(K_{\nu}^{\mu} - K\delta_{\nu}^{\mu}) \quad (4.0.7)$$

Onde K é o traço do tensor de curvatura extrínseca.

Este Capítulo, está organizado da seguinte forma: Na seção 4.1 descreveremos o método para encontrar solução com simetria esférica confinada na brana, caso de estrelas e buracos negros; posteriormente, em 4.2, faremos uma aplicação ao caso *Schwarzschild* – *AdS₅* na forma Weyl com intuito de achar uma distribuição que represente um fluido perfeito na brana.

4.1 O Método

Vamos considerar que o espaço ambiente é axialmente simétrico e estático. Assim, sua métrica pode ser colocada na chamada *forma de Weyl*:

$$ds^2 = -e^{\frac{2\sqrt{3}\Phi}{3}} dT^2 + e^{-\frac{\sqrt{3}\Phi}{3}} [\alpha_0^{-\frac{1}{2}} e^{2\psi} (dR^2 + d\chi^2) + \alpha_0 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)] \quad (4.1.8)$$

No qual as funções Φ , ψ e α tem o seguinte comportamento:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi(R, \chi) \\ \Psi &= \Psi(R, \chi) \\ \alpha &= \alpha(R, \chi) \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Como na seção anterior, para utilizar o método de imersão, seguem as funções de imersão:

$$T = t \quad (4.1.10)$$

$$R = r \quad (4.1.11)$$

$$\chi = \chi(r) \quad (4.1.12)$$

$$\theta = \theta \quad (4.1.13)$$

$$\phi = \phi \quad (4.1.14)$$

De posse de (4.1.10), podemos calcular as derivadas das mesmas com respeito às coordenadas do espaço menor utilizando (4.2.46), obtendo:

$$\begin{aligned} e_t^T &= 1 \\ e_r^R &= 1 \\ e_r^\chi &= \chi_{,r} \\ e_\theta^\theta &= 1 \\ e_\phi^\Phi &= 1 \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Utilizando os termos do elemento de linha 4.2.71 e as derivadas 4.1.15 em 4.0.4, obtemos a métrica induzida da hipersuperfície.

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -e^{\frac{2\sqrt{3}\Phi}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{-\sqrt{3}\Phi}{3}}\alpha^{-\frac{1}{2}}e^{2\Psi}(1 + \chi_{,r}^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{-\sqrt{3}\Phi}{3}}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{-\sqrt{3}\Phi}{3}}\alpha \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Considerando um deslocamento arbitrário na hipersuperfície, escrito na base do espaço ambiente,

$$dl^A = (dt; dr; \chi_{,r}dr; d\theta; d\phi) \quad (4.1.16)$$

vamos tomar um vetor normal ao deslocamento, N^A :

$$N_A dl^A = 0 \quad (4.1.17)$$

$$N_0 dl^0 + N_1 dl^1 + N_2 dl^2 + N_3 dl^3 + N_4 dl^4 = 0 \quad (4.1.18)$$

$$N_0 dt + N_1 dr + \chi_{,r} N_2 dr + N_3 d\theta + N_4 d\phi = 0 \quad (4.1.19)$$

Como dt , dr , $d\theta$ e $d\phi$ são variações arbitrárias e independentes, então, concluímos que $N_0 = N_3 = N_4 = 0$ e que:

$$N_1 dr + \chi_{,r} N_2 dr = 0 \quad (4.1.20)$$

esta equação se torna verdadeira quando $N_1 = -\chi_{,r}$ e $N_2 = 1$. Portanto, o vetor normal será

$$N_A = N(0; -\chi, r; 1; 0; 0) \quad (4.1.21)$$

cujo fator de normalização, N , será dado por:

$$g^{AB} N_A N_B = 1 \rightarrow g^{11} (N_1)^2 + g^{22} (N_2)^2 = 1 \quad (4.1.22)$$

$$N = \left(\frac{e^{\frac{2\sqrt{3}\Phi}{3}} e^{2\Psi}}{-e^{2\Psi} - e^{\sqrt{3}\Phi} e^{2\Psi} \alpha^{\frac{1}{2}} \chi_{,r}^2} \right)^{1/2} \quad (4.1.23)$$

Agora, para calcular as componentes do tensor de curvatura extrínseca, precisaremos dos símbolos de Christoffel com respeito a métrica do espaço maior. Com os termos não nulos e o vetor normal 4.1.20, calculamos o tensor de curvatura extrínseca a partir de 4.0.5, cujos termos não nulos são:

$$K_{tt} = N \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \alpha^{1/2} e^{\sqrt{3}\Phi} e^{2\psi} [-\chi_{,r} \Phi_{,r} + \Phi_{,\chi}] \right] \quad (4.1.24)$$

$$K_{\theta\theta} = N \left[\frac{\alpha^{1/2}}{6e^{2\psi}} [-\chi_{,r} (\sqrt{3}\Phi_{,r} \alpha - 3\alpha_{,r}) + (\sqrt{3}\Phi_{,\chi} \alpha - 3\alpha_{,\chi})] \right] \quad (4.1.25)$$

$$K_{\phi\phi} = N \left[\frac{\alpha_{1/2} \sin^2(\theta)}{6e^{2\psi}} [-\chi_{,r}(\sqrt{3}\Phi_{,r}\alpha - 3\alpha_{,r}) + (\sqrt{3}\Phi_{,\chi}\alpha - 3\alpha_{,\chi})] \right] \quad (4.1.26)$$

Utilizando a métrica induzida e os termos de curvatura extrínseca, calculamos o traço do mesmo.

$$K = K_{\alpha}^{\alpha} = h^{\alpha\beta} K_{\beta\alpha} \quad (4.1.27)$$

$$\begin{aligned} K = & N \left[\left[-\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\alpha^{1/2} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}\Phi}}{e^{2\psi}} [-\chi_{,r}\Phi_{,r} + \Phi_{,\chi}] + 2 \left[\frac{1}{6\alpha^{1/2} e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\Phi} e^{2\psi}} [-\chi_{,r}(\Phi_{,r}\alpha - 3\alpha_{,r}) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. (\Phi_{,\chi}\alpha - 3\alpha_{,\chi}) \right] + \left[\frac{1}{e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\Phi} \alpha^{1/2} e^{2\psi} (1 + \chi_{,r}^2)} [-\chi, rr + \frac{\chi_{,r}}{6\alpha} [\chi_{,r}(2\sqrt{3}\Phi_{,\chi}\alpha - 12\psi_{,\chi}\alpha + 3\alpha_{,\chi}) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. (2\sqrt{3}\Phi_{,r} - 12\psi_{,r}\alpha + 3\alpha_{,r}) \right] + \frac{(1 - \chi_{,r}^2)}{12\alpha} [\chi_{,r}(2\sqrt{3}\Phi_{,r} - 12\psi_{,r}\alpha + 3\alpha_{,r}) + \right. \\ & \left. \left. (2\sqrt{3}\Phi_{,\chi}\alpha - 12\psi_{,\chi}\alpha + 3\alpha_{,\chi}) \right] \right] \right] \quad (4.1.28) \end{aligned}$$

Utilizando a Junção de Israel, 4.0.6, obtemos finalmente as componentes do tensor energia-momento:

$$\begin{aligned} T_t^t = & 2N \left[-2 \left[\frac{1}{6\alpha^{1/2} e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\Phi} e^{2\psi}} [-\chi_{,r}(\Phi_{,r}\alpha - 3\alpha_{,r}) + (\Phi_{,\chi}\alpha - 3\alpha_{,\chi})] - \right. \right. \\ & \left. \left[\frac{1}{e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\Phi} \alpha^{1/2} e^{2\psi} (1 + \chi_{,r}^2)} [-\chi, rr + \frac{\chi_{,r}}{6\alpha} [\chi_{,r}(2\sqrt{3}\Phi_{,\chi}\alpha - 12\psi_{,\chi}\alpha + 3\alpha_{,\chi}) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - (2\sqrt{3}\Phi_{,r} - 12\psi_{,r}\alpha + 3\alpha_{,r}) \right] + \frac{(1 - \chi_{,r}^2)}{12\alpha} [\chi_{,r}(2\sqrt{3}\Phi_{,r} - 12\psi_{,r}\alpha + 3\alpha_{,r}) \right. \\ & \left. \left. + (2\sqrt{3}\Phi_{,\chi}\alpha - 12\psi_{,\chi}\alpha + 3\alpha_{,\chi}) \right] \right] \right] \quad (4.1.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_r^r = & 2N \left[\left[\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\alpha^{1/2} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}\Phi}}{e^{2\psi}} [-\chi_{,r}\Phi_{,r} + \Phi_{,\chi}] \right. \right. \\ & \left. - 2 \left[\frac{1}{6\alpha^{1/2} e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\Phi} e^{2\psi}} [-\chi_{,r}(\Phi_{,r}\alpha - 3\alpha_{,r}) + \right. \right. \\ & \left. \left. (\Phi_{,\chi}\alpha - 3\alpha_{,\chi}) \right] \right] \right] \quad (4.1.30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_\theta^\theta &= 2N \left[\left[\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\alpha^{1/2} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}\Phi}}{e^{2\psi}} [-\chi_{,r} \Phi_{,r} + \Phi_{,\chi}] - \left[\frac{1}{6\alpha^{1/2} e^{\frac{-\sqrt{3}\Phi}{3}} e^{2\psi}} [-\chi_{,r} (\Phi_{,r} \alpha - 3\alpha_{,r}) \right. \right. \right. \\
&+ \left. \left. (\Phi_{,\chi} \alpha - 3\alpha_{,\chi}) \right] - \left[\frac{1}{e^{\frac{-\sqrt{3}\Phi}{3}} \alpha^{1/2} e^{2\psi} (1 + \chi_{,r}^2)} [-\chi_{,rr} + \frac{\chi_{,r}}{6\alpha} [\chi_{,r} (2\sqrt{3}\Phi_{,\chi} \alpha - 12\psi_{,\chi} \alpha + 3\alpha_{,\chi}) \right. \right. \\
&- \left. \left. (2\sqrt{3}\Phi_{,r} - 12\psi_{,r} \alpha + 3\alpha_{,r}) \right] + \frac{(1 - \chi_{,r}^2)}{12\alpha} [\chi_{,r} (2\sqrt{3}\Phi_{,r} - 12\psi_{,r} \alpha + 3\alpha_{,r}) + (2\sqrt{3}\Phi_{,\chi} \alpha \right. \\
&- \left. 12\psi_{,\chi} \alpha + 3\alpha_{,\chi}) \right] \right] \right] \quad (4.1.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_\phi^\phi &= 2N \left[\left[\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\alpha^{1/2} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}\Phi}}{e^{2\psi}} [-\chi_{,r} \Phi_{,r} + \Phi_{,\chi}] - \left[\frac{1}{6\alpha^{1/2} e^{\frac{-\sqrt{3}\Phi}{3}} e^{2\psi}} [-\chi_{,r} (\Phi_{,r} \alpha - 3\alpha_{,r}) \right. \right. \right. \\
&+ \left. \left. (\Phi_{,\chi} \alpha - 3\alpha_{,\chi}) \right] - \left[\frac{1}{e^{\frac{-\sqrt{3}\Phi}{3}} \alpha^{1/2} e^{2\psi} (1 + \chi_{,r}^2)} [-\chi_{,rr} + \frac{\chi_{,r}}{6\alpha} [\chi_{,r} (2\sqrt{3}\Phi_{,\chi} \alpha - 12\psi_{,\chi} \alpha + 3\alpha_{,\chi}) \right. \right. \\
&- \left. \left. (2\sqrt{3}\Phi_{,r} - 12\psi_{,r} \alpha + 3\alpha_{,r}) \right] + \frac{(1 - \chi_{,r}^2)}{12\alpha} [\chi_{,r} (2\sqrt{3}\Phi_{,r} - 12\psi_{,r} \alpha + 3\alpha_{,r}) \right. \\
&+ \left. \left. (2\sqrt{3}\Phi_{,\chi} \alpha - 12\psi_{,\chi} \alpha + 3\alpha_{,\chi}) \right] \right] \right] \quad (4.1.32)
\end{aligned}$$

Se quisermos encontrar um fluido perfeito na brana, temos que seguir a condição de que a pressão é igual em todas as direções:

$$P = P_r = P_\theta = P_\phi \quad (4.1.33)$$

Portanto, devemos impor que:

$$T_r^r = T_\phi^\phi \quad (4.1.34)$$

Obtendo a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
2N &\left\{ -\frac{1}{e^{\frac{-\sqrt{3}\Phi}{3}} \alpha^{1/2} e^{2\psi} (1 + \chi_{,r}^2)} \left[-\chi_{,rr} + A \left(\frac{\chi_{,r}^2}{6\alpha} \left(1 - \frac{1}{2} \right) + 1 \right) + B \left(\frac{\chi_{,r}}{6\alpha} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) - \chi_{,r}^3 \right) \right] \right. \\
&+ \left. \left[\frac{1}{6\alpha^{1/2} e^{\frac{-\sqrt{3}\Phi}{3}} e^{2\psi}} [-\chi_{,r} (\Phi_{,r} \alpha - 3\alpha_{,r}) + (\Phi_{,\chi} \alpha - 3\alpha_{,\chi})] \right] \right\} = 0
\end{aligned}$$

$$(4.1.36)$$

Escolhida uma solução para a eq (4.1.35), ou seja, uma forma conveniente para a hipersuperfície, podemos através de T_t^t , (4.1.29), determinar diretamente a densidade de energia do fluido confinado na brana. Se usarmos a eq (4.1.35) para eliminr o termo $\chi_{,rr}$ da equação (4.1.29), podemos reescrevê-la na forma:

$$\rho = -T_t^t = 2N \left\{ -\frac{3}{6\alpha^{1/2}e^{-\frac{\sqrt{3}\Phi}{3}}e^{2\psi}} [-\chi_{,r}(\Phi_{,r}\alpha - 3\alpha_{,r}) + (\Phi_{,\chi}\alpha - 3\alpha_{,\chi})] \right\} \quad (4.1.37)$$

Finalmente, falta-nos determinar a pressão do fluido para caracterizá-lo completamente. Isso pode ser feito diretamente da componetente T_r^r dada na equação (4.1.30). Ou podemos introduzir a equação de estado do fluido:

$$p_{(r)} = \omega \rho_{(r)} \quad (4.1.38)$$

onde ω é um fator que define o estado. A partir de T_t^t e T_r^r , podemos mostrar que:

$$\omega = \frac{2\alpha\sqrt{3}}{3} \left[\frac{-\chi_{,r}\Phi_{,r} + \Phi_{,\chi}}{-\chi_{,r}(\Phi_{,r}\alpha - 3\alpha_{,r}) + (\Phi_{,\chi}\alpha - 3\alpha_{,\chi})} \right] - \frac{2}{3} \quad (4.1.39)$$

Devemos lembrar que $\chi_{(r)}$ define a forma da hipersuperfície no espaço ambiente. Sendo assim, no primeira conclusão é que $\chi_{(r)}$ não pode ser uma função arbitrária se queremos gerar um fluido perfeito na brana. De fato, a função χ deve ser solução da equação (4.1.35).

Portanto, se conhecermos uma solução do espaço ambiente, i.e, se temos α , Φ , ψ , então, as expressões (4.1.37) e (4.1.39) nos permitem calcular diretamente as propriedades do fluido que será “gerado” na brana cuja localização é descrita pela função $\chi = \chi_{(r)}$, que, por sua vez, deve satisfazer a equação da brana (4.1.35).

4.2 Espaço *Schwarzschild* – *AdS*₅

Para verificar a validade deste método, vamos aplicá-lo ao espaço-tempo *Schwarzschild*–*AdS*₅. Como já vimos na seção anterior, nas coordenada de Weyl, a métrica é:

$$ds^2 = -e^{\frac{2\sqrt{3}\Phi}{3}} dT^2 + e^{-\frac{\sqrt{3}\Phi}{3}} [\alpha_0^{-\frac{1}{2}} e^{2\psi} (dR^2 + d\chi^2) + \alpha_0 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)] \quad (4.2.40)$$

com;

$$\Phi_0(r, z) = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln U(R) \quad (4.2.41)$$

$$\alpha_0(r, z) = R^2 \sin^2 \chi U^{\frac{1}{2}}(R) \quad (4.2.42)$$

$$\Psi_0(r, z) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{R^3 \sin \chi U^{3/4}}{\xi^2} \right] \quad (4.2.43)$$

Com objetivo de encontrar soluções esfericamente simétricas utilizaremos o espaço de *Schwarzschild* – *AdS*₅ cujo elemento de linha, do qual pode ser extraída a métrica deste espaço é dado por:

$$ds^2 = -U_{(R)} dt^2 + \frac{1}{U_{(R)}} dR^2 + R^2 d\chi^2 + R^2 \sin^2(\chi) d\Omega^2 \quad (4.2.44)$$

No qual $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2$ e $U_{(R)} = 1 + K^2 R^2 - \frac{m}{R^2}$ definem os demais termos do elemento de linha.

Como dito anteriormente, a imersão trabalha com a identificação dos pontos da hipersuperfície com os pontos do espaço ambiente, ou BULK. Esse processo é feito a partir das funções paramétricas supracitadas, funções de imersão, que mostram como as coordenadas de um espaço estão ligadas as coordenadas do outro.

Considerando os sistemas de coordenadas do espaço ambiente $(T, R, \chi, \theta, \Phi)$ e da hipersuperfície (t, r, θ, ϕ) , as funções de imersão que adotaremos serão:

$$\begin{aligned} T &= t \\ R &= r \\ \chi &= \chi(r) \\ \theta &= \theta \\ \Phi &= \phi \end{aligned} \tag{4.2.45}$$

De posse de 4.2.45, podemos calcular as derivadas das mesmas com respeito ao espaço menor,

$$e_{\alpha}^A = \frac{\partial y^A}{\partial x^{\alpha}} \tag{4.2.46}$$

obtendo:

$$\begin{aligned} e_t^T &= 1 \\ e_r^R &= 1 \\ e_r^{\chi} &= \chi_{,r} \\ e_{\theta}^{\theta} &= 1 \\ e_{\phi}^{\Phi} &= 1 \end{aligned} \tag{4.2.47}$$

Utilizando os termos do elemento de linha 4.2.44 e as derivadas 4.2.47 em 4.0.4, obtemos a métrica induzida da hipersuperfície.

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -U_{(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{U_{(r)}} + \chi_{,r}^2 r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2(\chi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\chi) \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Considerando um deslocamento arbitrário, escrito na base do espaço ambiente,

$$dl^A = (dt; dr; \chi_{,r} dr; d\theta; d\phi) \quad (4.2.48)$$

vamos tomar um vetor normal ao deslocamento, N^A :

$$\begin{aligned} N_A dl^A &= 0 \\ N_0 dl^0 + N_1 dl^1 + N_2 dl^2 + N_3 dl^3 + N_4 dl^4 &= 0 \\ N_0 dt + N_1 dr + \chi_{,r} N_2 dr + N_3 d\theta + N_4 d\phi &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.49)$$

Assumindo que,

$$N_1 dr + \chi_{,r} N_2 dr = 0 \quad (4.2.50)$$

esta equação se torna verdadeira quando $N_1 = -\chi_{,r}$ e $N_2 = 1$. Portanto, o vetor normal será

$$N_A = N(0; -\chi_{,r}; 1; 0; 0) \quad (4.2.51)$$

cujo fator de normalização, N , será dado por:

$$\begin{aligned} g^{AB} N_A N_B &= 1 \rightarrow g^{11} (N_1)^2 g^{22} (N_2)^2 = 1 \\ N &= \frac{1}{(\chi_{,r}^2 U_{(r)} + \frac{1}{R^2})^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (4.2.52)$$

De posse do vetor normal, podemos então descobrir o tensor de curvatura extrínseca. É a partir deste tensor que poderemos encontrar a distribuição energética em questão. Para tanto, o tensor de curvatura extrínseca mede a variação do vetor normal da hipersuperfície ao longo de suas direções paralelas, uma projeção da derivada covariante do vetor normal; sendo dado por:

$$K_{\alpha\beta} = -e_{\alpha}^A e_{\beta}^B (\nabla_B N_A) \quad (4.2.53)$$

$$K_{\alpha\beta} = -\frac{\partial y^A}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial N^A}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial y^A}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial y^B}{\partial x^{\beta}} \Gamma_{AB}^C N^C \quad (4.2.54)$$

Podemos calcular os símbolos de Christoffel por:

$$\Gamma_{AB}^C = \frac{1}{2} g^{CD} (g_{DA,B} + g_{DB,A} + g_{AB,D}) \quad (4.2.55)$$

Tomando a métrica inversa a partir de 4.2.44, utilizando o vetor normal 4.2.51 e os símbolos de Christoffel não nulos calculando através da equação anterior, teremos os seguintes termos não nulos do tensor de curvatura extrínseca:

$$K_{tt} = -N \left[\frac{1}{2} U_{(r)} U_{,r} \chi_{,r} \right] \quad (4.2.56)$$

$$K_{rr} = N \left[\chi_{,rr} + \frac{1}{2} \frac{U_{,r} \chi_{,r}}{U_{(r)}} + \frac{2\chi_{,r}}{r} + U_{(r)} r \chi_{,r}^3 \right] \quad (4.2.57)$$

$$K_{\theta\theta} = N [U_{(r)} (r \sin^2(\chi)) \chi_{,r} - \sin(\chi) \cos(\chi)] \quad (4.2.58)$$

$$K_{\phi\phi} = N [U_{(r)} (r \sin^2(\chi)) \sin^2(\theta) \chi_{,r} - \sin(\chi) \cos(\chi) \sin^2(\theta)] \quad (4.2.59)$$

Elevando o primeiro índice dos termos deste tensor a partir da interação com a métrica do espaço menor, temos que os termos mistos seguem a seguinte forma:

$$K_{\beta}^{\alpha} = K_{\mu\beta} h^{\alpha\mu} \quad (4.2.60)$$

Assumindo:

$$K_t^t = -\frac{1}{2}NU_{,r}\chi_{,r} \quad (4.2.61)$$

$$K_r^r = -\frac{N}{1 + \chi_{,r}^2 r^2 U_{(r)}} [U_{(r)}\chi_{,rr} + \frac{1}{2}U_{,r}\chi_{,r} + \frac{2\chi_{,r}U_{(r)}}{r} + U_{(r)}^2\chi_{,r}^3 r] \quad (4.2.62)$$

$$K_\theta^\theta = -N[\frac{U_{(r)}\chi_{,r}}{r} - \cot(\chi)] \quad (4.2.63)$$

$$K_\phi^\phi = -N[\frac{U_{(r)}\chi_{,r}}{r} - \frac{\cot(\chi)}{r^2}] \quad (4.2.64)$$

Analisando o tensor de curvatura extrínseca como uma matriz, temos de 4.2.61 a 4.2.64 representando os elementos da diagonal desta matriz. Sendo o traço de qualquer tensor a soma dos elementos da diagonal principal da matriz representante, para os termos acima, teremos o seguinte traço do tensor de curvatura extrínseca:

$$K = K_\alpha^\alpha = K_t^t + K_r^r + K_\theta^\theta + K_\phi^\phi \quad (4.2.65)$$

$$K = -N[\frac{1}{2}U_{,r}\chi_{,r} + \frac{1}{1 + \chi_{,r}^2 r^2 U_{(r)}} [U_{(r)}\chi_{,rr} + \frac{1}{2}U_{,r}\chi_{,r} + \frac{2\chi_{,r}U_{(r)}}{r} + U_{(r)}^2\chi_{,r}^3 r] + 2[\frac{U_{(r)}\chi_{,r}}{r} - \frac{\cot(\chi)}{r^2}]] \quad (4.2.66)$$

Como já foi dito anteriormente, este método é mais abrangente que o "Deslocar, Cortar e Refletir", graças a liberdade quanto a manipulação da métrica do espaço maior e a hipersuperfície escolhida para dividir o espaço em dois (como no método "Deslocar, Cortar e Refletir") não precisa ser constante.

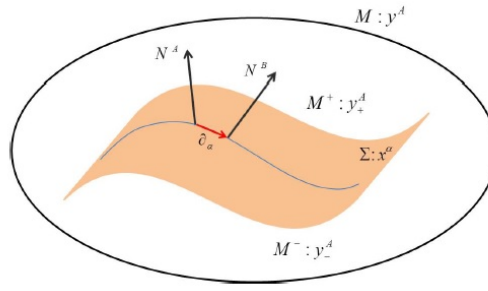


Figura 4.1: Método “Deslocar, Cortar e Refletir” aplicado a Imersão[13]

Quando a hipersuperfície em questão divide o bulk em duas regiões, temos o cálculo da curvatura possível tanto por uma região quanto por outra. Essas curvaturas, a priori, coincidem. Contudo, quando existe energia na brana há uma descontinuidade, não havendo coincidência entre as curvaturas calculadas nestas regiões.

A partir desta continuidade é possível encontrar o conteúdo energético da hipersuperfície através da Junção de Israel. Com os termos mistos e não nulos do tensor de curvatura extrínseca e seu traço, podemos então encontrar a distribuição energética da situação, segundo 4.0.7: Os termos do tensor energia-momento serão:

$$T_t^t = 2 \left\{ \frac{N}{1 + \chi_{,r}^2 r^2 U_{(r)}} \left[\frac{U_{,r} \chi_{,r}}{2} + \frac{4U_{(r)} \chi_{,r}}{r} + 3U_{(r)}^2 3\chi_{,r}^3 r + \right. \right. \\ \left. \left. + U_{(r)} \chi_{,rr} - 2 \cot(\chi) \chi_{,r}^2 U_{(r)} - 2 \frac{\cot(\chi)}{r^2} \right] \right\} \quad (4.2.67)$$

$$T_r^r = 2N \left[\frac{U_{,r} \chi_{,r}}{+} 2 \left(\frac{U_{(r)} \chi_{,r}}{r} - \frac{\cot(\chi)}{r^2} \right) \right] \quad (4.2.68)$$

$$T_\theta^\theta = \frac{N}{1 + \chi_{,r}^2 r^2 U_{(r)}} \left\{ 2U_{,r} \chi_{,r} + 4U_{(r)}^2 \chi_{,r}^3 r + 6 \frac{U_{(r)} \chi_{,r}}{r} + U_{(r)} \chi_{,r}^3 r^2 U_{,r} + \right. \\ \left. + 2U_r \chi_{,rr} - \frac{\cot^2(\chi)}{r^2} - 2 \cot(\chi) \chi_{,r}^2 U_{(r)} \right\} \quad (4.2.69)$$

$$T_\phi^\phi = T_\theta^\theta \quad (4.2.70)$$

Escolhendo a forma da hipersuperfície para a divisão do bulk em regiões como $\chi_{(r)} = \arccos(\exp(-\int \frac{1}{rU^{1/2}}))$ e aplicando aos termos T_t^t e T_r^r , teremos então a densidade de energia e a pressão radial, respectivamente.

$$T_t^t = \frac{6y}{r}[U^{1/2} - 1] \quad (4.2.71)$$

$$T_r^r = \frac{2y}{r}[2[(1 + k^2r^2 - \frac{m}{r^2})^{1/2} - 1] + (k^2r^2 + \frac{m}{r^2})(1 + k^2r^2 - \frac{m}{r^2})^{-1/2}] \quad (4.2.72)$$

No qual $y = \exp(-\int(\frac{1}{rU^{1/2}}dr))$. Portanto, $\epsilon = -T_t^t$ e $\rho = T_r^r$, respectivamente a densidade de matéria e energia e a pressão radial. Adotando os mesmos valores utilizados no capítulo anterior para os termos k e m , enquanto que o limite inferior da integral será $R = 0,686$. Tal escolha do raio se deve pelo fato de que a distância mínima deve ser maior que o Raio de Schwarzschild, o horizonte de eventos.

Ao aplicar tais valores constamos o retorno a solução anteriormente obtida, 3.3, nos permitindo concluir que o método exposto é mais abrangente que o Deslocar, Cortar e Refletir.

Capítulo 5

Resultados e Conclusões

No decorrer deste trabalho, tivemos como principal motivação a possibilidade de encontrar soluções das equações de Einstein que representem buracos negros em dimensões extras no modelo RSII. Para tanto, utilizamos dois métodos indiretos aplicados ao cenário de dimensões extras. Este último foi abordado através de uma revisão sobre a ideia de Kaluza-Klein, o modelo ADDe os modelos de Randall e Sundrum, RSI e RSII.

O primeiro método utilizado foi, o “Deslocar, Cortar e Refletir”. Vimos que, a partir de uma solução de vácuo é possível adquirir solução com distribuição de matéria. Isto é possível através de uma transformação de coordenadas, que fisicamente equivale a estabelecer um plano ao longo da coordenada extra, dividindo o espaço em duas partes: uma com singularidade, ou fonte, e outra sem. Descarta-se a parte com fonte e a parte sem fonte é refletida em seu lugar. Como resultado temos o surgimento de uma distribuição de matéria no plano de corte. A partir disto utilizamos as equações de Einstein para estudar propriedades físicas da distribuição presente na hipersuperfície. Este método foi aplicado a métrica de *Schwarzschild* – AdS_5 e então analisamos a pressão e a densidade na hipersuperfície. Vimos que a pressão e a densidade obtidas são positivas e diminuem com o aumento da coordenada radial, permitindo concluir que a distribuição encontrada corresponde a de um corpo com simetria esférica, possivelmente uma estrela confinada na brana. Com tudo, chegará o ponto em que a pressão

será maior que a densidade, quebrando a condição de energia dominante. Como queríamos analisar soluções em modelos RSII e o método anterior não permitia um plano de corte arbitrário, utilizamos um outro procedimento. O Método de Imersão permite um plano de corte arbitrário e sem uma forma específica. Nele, a brana está imersa em um espaço de dimensões maiores, espaço ambiente, e sua localização é definida por $\chi_{(R)}$. Partindo de uma métrica axial e estática, induzimos a métrica na brana, através da condição da Junção de Israel podemos encontrar o conteúdo energético da brana e a pressão utilizando o tensor da curvatura extrínseca. Ao comparar os resultados dos dois métodos, pela forma do plano de corte ser arbitrário e por poder ser dependente do tempo, constatamos que o método de imersão é mais abrangente.

Em pesquisas futuras, pretendemos aplicar o método a métrica Schwarzschild-AdS5 na tentativa de construir uma hipersuperfície que cruze o horizonte de eventos e passe pela singularidade. Talvez, nesta situação, a solução obtida tenha características de buraco negro na brana. Além da métrica acima, pretendemos usar as métricas de Garriga-Tanaka, D.M.P.R e *Vaidya* – AdS_5 e analisar as características físicas presentes na hipersuperfície.

Bibliografia

- [1] D’Inverno, R., “Introducing Einstein’s Relativity”, Oxford University Press, First Edition, Oxford, 1992,
- [2] Carroll, S., “Spacetime and Geometry: an Introduction to General Relativity”, Benjamin Cummings, 2004,
- [3] Duff, M. J., “Kaluza-Klein Theory in perspective”. The Oskar Klein centenary, 1994,
- [4] Silva, A. A., “Um Estudo sobre Dimensões Extras”. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Campina Grande. 2009, [
- [5] Letelier, P.S., “Soluções exatas das equações de Einstein com simetria axial”. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 27, n. 1, p. 121-136, (2005),
- [6] Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S., Dvali, G., “The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter” Phys.Lett.B 429 263 (1998),
- [7] Shifman, M., LARGE EXTRA DIMENSIONS: Becoming acquainted with an alternative paradigm. Jul 2009. 33pp [e-Print: arXiv:0907.3074],
- [8] Gabadadze, G., ICTP Lectures on Large Extra Dimensions [hep-ph/0308112],
- [9] Csáki, Csaba., TASI Lectures on Extra Dimensions and Branes [hep-ph/0404096],
- [10] Randall, L., Sundrum, R., “Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension”, Phys. Rev. Lett. 83, 3370 (1999),

- [11] Randall, L., Sundrum, R., “An Alternative to Compactification”, Phys. Rev. Lett.83, 4690 (1999),
- [12] Overduin, J.M., Wesson, P.S., “Kaluza-Klein Gravity” Phys.Rept.283:303 (1997),
- [13] Leite, C. S. R., “Modelagem de discos galácticos via formalismo de imersão na Relatividade Geral”. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Campina Grande. 2012,
- [14] De Vasconcelos, K. C., “Soluções exatas com simetria axial na Relatividade Geral: Um estudo sobre estrelas em modelos de branas.”. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Campina Grande. 2010,
- [15] Creek, S., Gregory, R., Kanti, P., Mistry, B., “Braneworld stars and black holes”,Class. Quant. Grav. 23 (2006) 6633-6658,
- [16] Hawking, S. W., Ellis, G., “The large Scale Structure of Space-Time”. Cambridge University Press, 1999.