



## **SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO EM COORDENADAS CILÍNDRICAS E APLICAÇÕES EM PROCESSOS DE SECAGEM.**

**Ivo Dantas de Araújo<sup>1</sup>, Célia Maria Rufino Franco<sup>2</sup>**

### **RESUMO**

Neste trabalho, foi realizado um estudo da Equação de Difusão sob o ponto de vista das aplicações, dando ênfase aos fenômenos de difusão transiente de massa em sólidos com forma geométrica cilíndrica. A solução numérica da Equação de Difusão bidimensional, em coordenadas cilíndricas foi obtida utilizando-se o Método de Volumes Finitos, com uma formulação totalmente implícita. O modelo matemático utilizado pressupõe condição de contorno de terceira espécie e permite que os parâmetros termofísicos sejam considerados constantes ou variáveis. A metodologia foi aplicada para estimar a variação de umidade no interior de sementes de uma árvore bem brasileira, o pinheiro (*Araucária angustifolia*), durante o processo de secagem contínua e intermitente na temperatura de 70°C. Resultados experimentais do teor de umidade do pinhão com casca, ao longo do tempo, foram comparados com valores obtidos através da solução da equação diferencial, a fim de validar o modelo. Utilizou-se um código computacional em linguagem Fortran para realização das otimizações/simulações. De acordo com os resultados dos parâmetros estatísticos, o modelo descreve bem as cinéticas de secagem contínua e intermitente de pinhão. O efeito das considerações adotadas quanto à difusividade ser constante ou variável foi observado e o modelo com a adoção do coeficiente de difusão dependente do teor de umidade descreve melhor a cinética de secagem contínua de pinhão na temperatura de 70°C.

**Palavras-chave:** Modelagem matemática, Difusão de massa, Secagem de pinhão.

---

<sup>1</sup>Graduando em Licenciatura em Matemática, Unidade Acadêmica de Física e Matemática, UFCG, Cuité, PB, e-mail: ivo\_dantas@outlook.com

<sup>2</sup>Doutora, Professora, Unidade Acadêmica de Física e Matemática, UFCG, Cuité, PB, e-mail: celiarufino@ufcg.edu.br

## **NUMERICAL SOLUTION OF THE DIFFUSION EQUATION IN CYLINDRICAL COORDINATES AND APPLICATIONS IN DRYING PROCESSES.**

### **ABSTRACT**

In this work, was performed a study of the Diffusion Equation from the point of view of applications, emphasizing the phenomena of transient mass diffusion in cylindrical geometric solids. The numerical solution of the 2-D diffusion equation in cylindrical coordinates was obtained using the Finite Volume Method with a fully implicit formulation. The mathematical model used assumes boundary condition of the third kind and constant and variable thermophysical parameters. The methodology was applied to estimate the moisture content variation inside seeds of a well Brazilian tree (*Araucaria angustifolia*), during the process of continuous and intermittent drying at a temperature of 70°C. Experimental results of the moisture content of rough pinhão over time were compared with values obtained through the solution of the differential equation, in order to validate the model. The Computational code in Fortran was used to perform the optimizations / simulations. According to the results of the statistical parameters, the model describes well the of pinhão continuous and intermittent drying kinetics. The effect of the adopted considerations regarding the constant or variable diffusivity was observed and the model with the diffusion coefficient dependent of moisture content better describes the pinhão continuous drying kinetics at a temperature of 70°C.

**Keywords:** Mathematical modeling, Mass diffusion, Drying of pinhão.

A663s Araújo, Ivo Dantas de.

Solução numérica da equação de difusão em coordenadas cilíndricas e aplicações em processos de secagem. / Ivo Dantas de Araújo. - cuité, 2022.  
20 f. : color.

Relatório (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2022.

"Orientação: Profa. Dra. Célia Maria Rufino Franco".

Referências.

1. Matemática. 2. Modelagem matemática. 3. Difusão de massa. 4. Secagem de Pinhão. 5. Solução numérica. 6. Coordenadas cilíndricas. I. Franco, Célia Maria Rufino. II. Título.

CDU 51(043)

## INTRODUÇÃO

Difusão de massa é encontrada em vários processos de interesse tecnológico, incluindo a secagem de produtos agrícolas. O processo de secagem envolve transferência de calor e massa (umidade) entre um produto higroscópico e o ar de secagem (BROOKER et al., 1992, FIOREZE, 2003). Em consequência, o modelo matemático adequado para descrever esses fenômenos envolve a solução da Equação de Difusão. Se a variável de interesse é a temperatura, tem-se um problema de difusão de calor. Por outro lado, se a variável de interesse é o teor de umidade de um determinado produto higroscópico, configura-se um problema de difusão de massa. Da mesma forma que um gradiente de temperatura é necessário para a transferência de calor, um gradiente de concentração de umidade é necessário para o transporte de água. O modelo matemático para transferência de massa abordado é baseado na teoria de difusão líquida no interior de sólidos, isto é, a difusão mássica ocorre no sentido da diminuição de concentração (umidade) e a água migra apenas na fase líquida.

Nesta pesquisa, foi realizado um estudo da solução numérica da equação de difusão utilizando discretização por volumes finitos, com uma formulação totalmente implícita. Esta formulação foi escolhida porque a solução obtida é incondicionalmente estável, para qualquer intervalo de tempo estipulado. Considerou-se condição de contorno de terceira espécie que leva em conta o fluxo convectivo resultante da transferência de massa entre a superfície do produto (aproximado por um cilindro) e o ar de secagem. A solução da equação de difusão foi comparada com dados experimentais de secagem de pinhão.

Pinhão é a semente de uma árvore bem brasileira, o pinheiro (*Araucária angustifolia*), encontrado no Sul do país e nas regiões altas de São Paulo, Rio de Janeiro e Minas Gerais. No âmbito do consumo doméstico, o pinhão é amplamente utilizado na elaboração de produtos de panificação (pães, bolos, biscoitos). Com a farinha de pinhão, vários pratos poderiam ser elaborados a partir de um produto prático e conveniente. Contudo, para fabricação da farinha é necessário que as sementes de pinhão passem por um processo de secagem.

O pinhão tem altos teores de proteínas de elevado valor biológico, pois contém todos os aminoácidos essenciais, que não são sintetizados pelo organismo humano, fibras elementares e amido. Seu potencial como alimento funcional tem atraído o interesse de pesquisadores e consumidores.

## MATERIAIS E MÉTODOS

### Metodologia matemática

#### Discretização da equação de difusão

Considere a equação geral de transporte para um volume de controle infinitesimal (PATANKAR, 1980; MALISKA, 2004):

$$\frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t} + \nabla(\lambda\vec{v}\Phi) = \nabla(\Gamma^{\Phi}\nabla\Phi) + S \quad (1)$$

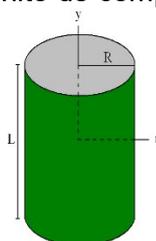
sendo  $\Phi$  a variável de interesse,  $\lambda$  e  $\Gamma^{\Phi}$  são os coeficientes de transporte,  $\vec{v}$  é o vetor velocidade do meio,  $t$  é o tempo e  $S$  é o termo fonte.

A equação que descreve o fenômeno de difusão para uma variável genérica  $\Phi$  é obtida da Equação (1) fazendo  $\vec{v} = 0$ , já que neste caso o meio encontra-se em repouso (velocidade nula) e a variação da grandeza dentro do volume de controle ocorre unicamente por difusão e  $S = 0$ , pois não acontece geração interna de energia. Logo, reescrevendo a equação (1), tem-se:

$$\frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t} = \nabla(\Gamma^{\Phi}\nabla\Phi) \quad (2)$$

Considere um cilindro de comprimento  $L$  e raio  $R$  e supondo que existe uma simetria em relação ao eixo central e outra radial em relação ao centro, obtém-se um domínio bidimensional como mostra a Figura 1.

Figura 1. Cilindro finito de comprimento  $L$  e raio  $R$ .



Fonte: autoria própria

A fim de descrever o processo de secagem de sementes de pinhão, considerou-se os fluxos nas direções radial e axial. Assim, considerou-se a equação de difusão bidimensional em coordenadas cilíndricas dada da seguinte forma:

$$\frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\Gamma^{\Phi} \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma^{\Phi} \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) \quad (3)$$

O método utilizado para discretização da equação de difusão foi o método dos volumes finitos (PATANKAR, 1980; SCHÄFER, 2006; MALISKA, 2013), devido as características favoráveis a problemas de transferência de massa.

Para obter uma solução numérica da Equação (3) foram admitidas as seguintes hipóteses: O cilindro possui raio  $R$  e comprimento  $L$ ; O cilindro é homogêneo e isotrópico; A distribuição espacial de grandeza de interesse dentro do cilindro possui simetrias radial e axial em relação ao eixo central; O único mecanismo de transporte de massa dentro do cilindro é a difusão; A difusividade efetiva pode variar durante a difusão, e o coeficiente de transferência convectiva de massa permanece constante.

A discretização inicia-se decompondo o domínio contínuo  $\Omega$  em um número finito de subdomínios  $V_i$  com  $i = 1, \dots, N$ , chamados *volumes de controle*. Estes volumes de controle são caracterizados por um ponto onde as variáveis desconhecidas são calculadas, os quais são conhecidos como *pontos nodais*.

Uma vez definidos os volumes de controle, a equação diferencial que modela o problema é integrada sobre cada um dos volumes de controle. A equação discretizada ainda dependerá da condição de contorno e da formulação escolhida.

Quando o problema em estudo encontra-se em regime transiente, é necessário saber qual instante no intervalo de tempo será considerado para expressar as derivadas espaciais. Para isso, utiliza-se interpolação no tempo da grandeza de interesse  $\Phi$ :

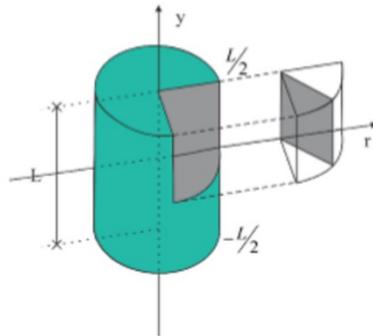
$$\Phi^\theta = \theta\Phi + (1 - \theta)\Phi^0, \quad (4)$$

onde  $\theta$  é o tempo de avaliação de  $\Phi$ .

Para uma formulação totalmente implícita, considera-se  $\theta = 1$  na Equação 4. Neste caso, a variável é avaliada no final do intervalo de tempo. Uma das principais características desta formulação é a sua estabilidade incondicional, isto é, qualquer intervalo de tempo pode ser considerado sem interferir na convergência da solução.

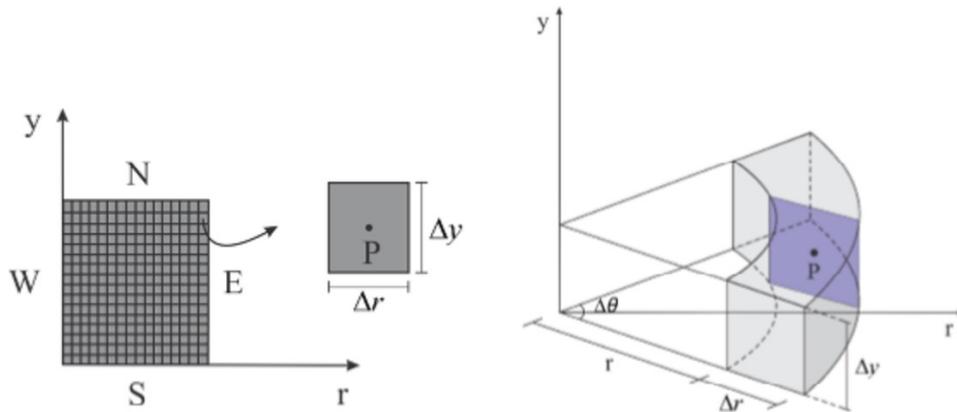
A partir do cilindro é destacada uma repartição como mostra a Figura 2, e devido as hipóteses de simetria considerou-se apenas um retângulo, no qual foi criado uma malha uniforme, como é possível ver na Figura 3. Na Figura 3(a) é apresentado um elemento de malha uniforme, onde é destacado o ponto nodal  $P$ , a largura ( $\Delta r$ ) e comprimento ( $\Delta y$ ). O volume de controle definido para cada elemento da malha é ilustrado na Figura 3(b). A malha bidimensional considerada possui 9 tipos de volumes de controle que são mostrados na Figura 4.

Figura 2. Corte considerando as hipóteses de simetria.



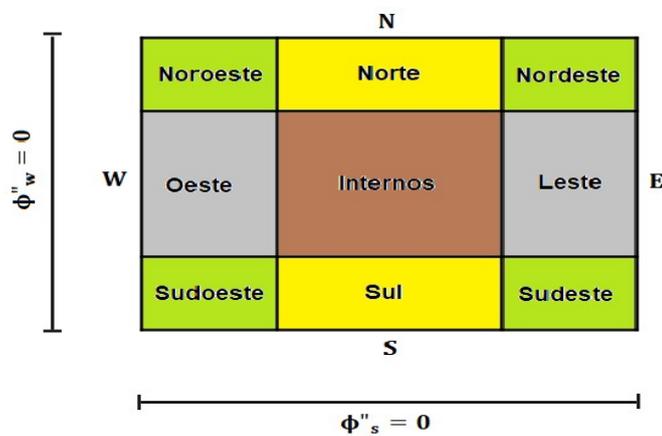
Fonte: SILVA JUNIOR, 2015

Figura 3. (a) Malha bidimensional para o caso do cilindro finito; (b) Volume de controle para geometria cilíndrica.



Fonte: SILVA JUNIOR, 2015

Figura 4. Tipos de volumes de controle da malha bidimensional



Fonte: autoria própria

Integrando a Equação (3) no espaço  $r_p \Delta \theta \Delta r \Delta y$  e no tempo  $\Delta t$ , tem-se:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial(\lambda \Phi)}{\partial t} \Delta \theta r_p dy dr dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \Delta \theta r_p dy dr dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \Delta \theta r_p dy dr dt \quad (5)$$

Usando as aproximações das derivadas:

$$\frac{\partial(\lambda \Phi)}{\partial t} \cong \frac{\lambda \Phi - \lambda^0 \Phi^0}{\Delta t}; \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \cong \frac{r_e \Gamma_e^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} |_e - r_w \Gamma_w^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} |_w}{\Delta r} \quad e$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \cong \frac{\Gamma_n^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} |_n - \Gamma_s^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} |_s}{\Delta y}$$

E lembrando que:

$$\int_s^n dy = \Delta y; \quad \int_w^e dr = \Delta r; \quad \int_t^{t+\Delta t} dt = \Delta t$$

obtem-se da Equação (5):

$$\int_w^e \int_s^n (\lambda_p \Phi_p - \lambda_p^0 \Phi_p^0) \Delta \theta r_p dr dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{1}{r_p} (r_e \Gamma_e^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} |_e - r_w \Gamma_w^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} |_w) \Delta \theta r_p dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e (\Gamma_n^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} |_n - \Gamma_s^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} |_s) \Delta \theta r_p dr dt \quad (6)$$

Fazendo as simplificações e efetuando as integrais restantes, para uma formulação totalmente implícita, tem-se:

$$(\lambda_p \Phi_p - \lambda_p^0 \Phi_p^0) \Delta \theta r_p \Delta y \Delta r = (r_e \Gamma_e^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} |_e - r_w \Gamma_w^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} |_w) \Delta \theta \Delta y \Delta t + (\Gamma_n^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} |_n - \Gamma_s^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} |_s) \Delta \theta r_p \Delta r \Delta t \quad (7)$$

Agora, multiplicando toda a equação (7) por  $\frac{1}{\Delta \theta \Delta t}$  tem-se

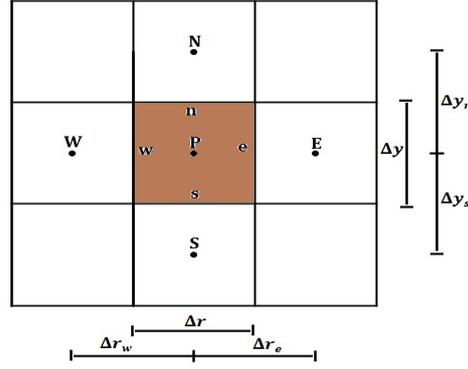
$$(\lambda_p \Phi_p - \lambda_p^0 \Phi_p^0) \frac{r_p \Delta r \Delta y}{\Delta t} = (r_e \Gamma_e^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} |_e - r_w \Gamma_w^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} |_w) \Delta y + (\Gamma_n^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} |_n - \Gamma_s^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} |_s) r_p \Delta r \quad (8)$$

Da equação (8) pode-se obter a equação discretizada para o volume de controle desejado.

## Discretização da equação de difusão para volumes de controle internos

Na Figura 5 é apresentado um volume de controle interno que tem vizinhos, ao norte, ao sul, a oeste e a leste.

Figura 5. Volume de controle interno e os vizinhos ao norte (N), a leste (E), ao sul (S) e a oeste (W)



Fonte: autoria própria

O teor de umidade em todos os pontos do volume de controle interno é igual ao do seu ponto nodal. Para uma malha uniforme, tem-se:  $\Delta y_n = \Delta y_s = \Delta y$  e  $\Delta r_w = \Delta r_e = \Delta r$ . Assim, considera-se as seguintes aproximações para as derivadas,

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_E \cong \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta r} \quad (9); \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_W \cong \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta r} \quad (10); \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_N \cong \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta y} \quad (11);$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_S \cong \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta y} \quad (12).$$

Daí, substituindo as equações (9), (10), (11) e (12) na Equação (8), tem-se

$$\left( \lambda_p \Phi_p - \lambda_p^0 \Phi_p^0 \right) \frac{r_p \Delta r \Delta y}{\Delta t} = r_e \Gamma_e^{\phi} \left( \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta r} \right) \Delta y - r_w \Gamma_w^{\phi} \left( \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta r} \right) \Delta y + \Gamma_n^{\phi} \left( \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta y} \right) r_p \Delta r - \Gamma_s^{\phi} \left( \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta y} \right) r_p \Delta r \quad (13)$$

Fazendo as distribuições e organizando os termos, tem-se

$$\left[ \lambda_p r_p \frac{\Delta r \Delta y}{\Delta t} + (r_e \Gamma_e^{\phi} + r_w \Gamma_w^{\phi}) \frac{\Delta y}{\Delta r} + (\Gamma_n^{\phi} + \Gamma_s^{\phi}) r_p \frac{\Delta r}{\Delta y} \right] \Phi_p = (r_e \Gamma_e^{\phi} \frac{\Delta y}{\Delta r}) \Phi_E + (r_w \Gamma_w^{\phi} \frac{\Delta y}{\Delta r}) \Phi_W + (\Gamma_n^{\phi} r_p \frac{\Delta r}{\Delta y}) \Phi_N + (\Gamma_s^{\phi} r_p \frac{\Delta r}{\Delta y}) \Phi_S + \lambda_p^0 \Phi_p^0 r_p \frac{\Delta r \Delta y}{\Delta t} \quad (14)$$

ou ainda,

$$A_p \Phi_p = A_e \Phi_E + A_w \Phi_W + A_n \Phi_N + A_s \Phi_S + B \quad (15)$$

onde

$$A_p = \lambda_p r_p \frac{\Delta r \Delta y}{\Delta t} + (r_e \Gamma_e^{\phi} + r_w \Gamma_w^{\phi}) \frac{\Delta y}{\Delta r} + (\Gamma_n^{\phi} + \Gamma_s^{\phi}) r_p \frac{\Delta r}{\Delta y}; \quad A_e = r_e \Gamma_e^{\phi} \frac{\Delta y}{\Delta r};$$

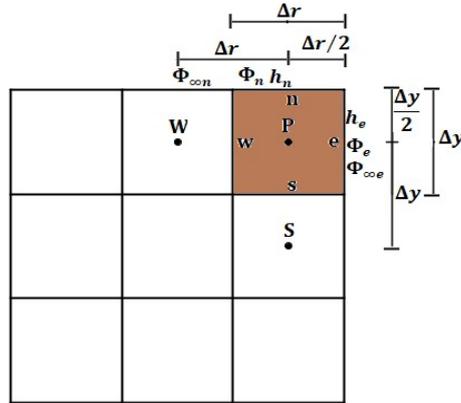
$$A_w = r_w \Gamma_w^{\phi} \frac{\Delta y}{\Delta r}; \quad A_n = \Gamma_n^{\phi} r_p \frac{\Delta r}{\Delta y}; \quad A_s = \Gamma_s^{\phi} r_p \frac{\Delta r}{\Delta y};$$

$$B = \lambda_p^0 \Phi_p^0 r_p \frac{\Delta r \Delta y}{\Delta t}.$$

## Discretização da equação de difusão para o volume de controle a nordeste

Na Figura 6 é mostrado o volume de controle a nordeste, que tem fronteiras ao norte e a leste em contato com o meio externo e vizinhos a oeste e ao sul.

Figura 6. Volume de controle nordeste com vizinhos a oeste (W) e ao sul (S).



Fonte: autoria própria

Considere os fluxos difusivos ao norte e a leste dados, respectivamente, por:

$$\dot{Q}_n'' = -\Gamma_n \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\phi_n - \phi_p}{\Delta y/2} \right) \quad (16);$$

$$\dot{Q}_e'' = -\Gamma_e \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\phi_e - \phi_p}{\Delta x/2} \right) \quad (17)$$

e os fluxos convectivos norte e leste, como segue

$$\dot{Q}_n'' = h_n (\phi_n - \phi_{\infty n}) \quad (18);$$

$$\dot{Q}_e'' = h_e (\phi_e - \phi_{\infty e}) \quad (19)$$

Igualando os fluxos convectivos e difusivos na fronteira norte e na fronteira leste respectivamente, tem-se:

$$\phi_n = \frac{\frac{\partial \Gamma_n}{\partial y} \phi_p + h_n \phi_{\infty n}}{\frac{\partial \Gamma_n}{\partial y} + h_n} \quad (20);$$

$$\phi_e = \frac{\frac{\partial \Gamma_e}{\partial x} \phi_p + h_e \phi_{\infty e}}{\frac{\partial \Gamma_e}{\partial x} + h_e} \quad (21)$$

onde  $\phi_n$  e  $\phi_e$  são os valores da grandeza de interesse nos contornos norte e leste, respectivamente.  $\phi_{\infty n}$  e  $\phi_{\infty e}$  denotam a grandeza de interesse de equilíbrio no meio externo a norte e a leste, respectivamente.

Substituindo as equações (20) e (21) nas expressões (16) e (17), tem-se

$$-\dot{Q}_n'' = \Gamma_n \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\phi_n - \phi_p}{\Delta y/2} \right) = \frac{\phi_{\infty n} - \phi_p}{\frac{1}{h_n} + \frac{\Delta y}{\partial \Gamma_n}} \quad (22); \quad -\dot{Q}_e'' = \Gamma_e \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\phi_e - \phi_p}{\Delta x/2} \right) = \frac{\phi_{\infty e} - \phi_p}{\frac{1}{h_e} + \frac{\Delta x}{\partial \Gamma_e}} \quad (23)$$

Agora fazendo as substituições das equações (10), (12), (22) e (23) na equação (8), temos

$$(\lambda_p \Phi_p - \lambda_p^0 \Phi_p^0) \frac{r_p \Delta r \Delta y}{\Delta t} = \left( r_s \frac{\Phi_{\infty s} - \Phi_p}{\frac{1}{h_s} + \frac{\Delta r}{2\Gamma_s^\Phi}} - r_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Phi_p - \Phi_w}{\Delta r} \right) \Delta y + \left( \frac{\Phi_{\infty n} - \Phi_p}{\frac{1}{h_n} + \frac{\Delta y}{2\Gamma_n^\Phi}} - \Gamma_s^\Phi \frac{\Phi_p - \Phi_s}{\Delta y} \right) r_p \Delta r \quad (24)$$

Que ainda pode ser reescrita da seguinte forma

$$A_p \Phi_p = A_w \Phi_w + A_s \Phi_s + B \quad (25)$$

onde

$$A_p = \lambda_p r_p \frac{\Delta r \Delta y}{\Delta t} + \frac{r_p \Delta y}{\frac{1}{h_s} + \frac{\Delta r}{2\Gamma_s^\Phi}} + r_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} + \frac{r_p \Delta r}{\frac{1}{h_n} + \frac{\Delta y}{2\Gamma_n^\Phi}} + r_p \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y};$$

$$A_w = r_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r}; \quad A_s = r_p \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y}; \quad B = \lambda_p^0 \Phi_p^0 r_p \frac{\Delta r \Delta y}{\Delta t} + \frac{r_p \Delta y}{\frac{1}{h_s} + \frac{\Delta r}{2\Gamma_s^\Phi}} \Phi_{\infty s} + \frac{r_p \Delta r}{\frac{1}{h_n} + \frac{\Delta y}{2\Gamma_n^\Phi}} \Phi_{\infty n}.$$

### Valor médio de $\Phi$ e avaliação do parâmetro $\Gamma^\Phi$ nas interfaces

A cada intervalo de tempo, a solução numérica fornece o valor da grandeza de interesse em cada ponto nodal. Como as contribuições de cada volume de controle não são iguais, o valor médio da grandeza de interesse, em cada intervalo, é calculado através da seguinte média ponderada:

$$\bar{\Phi} = \frac{\sum \Phi_p v_p}{\sum v_p} \quad (26)$$

onde  $v_p = \Delta \theta r_p \Delta r \Delta y$ .

Com relação à geometria do cilindro finito bidimensional, considera-se  $\Delta \theta = 1$ , e assim, obtém-se

$$v_p = r_p \Delta r \Delta y \quad (27)$$

Finalmente, para malhas uniformes, a equação (26) pode ser expressa apenas por

$$\bar{\Phi} = \frac{\sum \Phi_p r_p}{\sum r_p} \quad (28)$$

Considerando as hipóteses para obter a solução numérica da equação de difusão, foi feito a discretização assumindo que a difusividade  $\Gamma^\Phi$  pode variar com o valor local do teor de umidade  $\Phi$ , então

$$\Gamma^\Phi = f(\Phi, a, b) \quad (29)$$

onde  $a$  e  $b$  são os coeficientes de uma função que ajusta a solução numérica aos dados experimentais, e são determinados por processo de otimização.

Assim, o valor de  $\Gamma^\Phi$  nos pontos nodais é calculado pela Equação (29), a cada passo do processo de otimização.

Para calcular  $\Gamma^{\Phi}$  na interface entre os volumes de controle  $P$  e  $E$ , para uma malha uniforme, é utilizada a expressão (Patankar, 1980):

$$\Gamma_{eq}^{\Phi} = \frac{2\Gamma_P^{\Phi} \Gamma_E^{\Phi}}{\Gamma_P^{\Phi} + \Gamma_E^{\Phi}} \quad (30)$$

Para volumes de controle de contorno, em que o valor de  $\Gamma^{\Phi}$  na interface em contato com o meio externo não pode ser calculado pela equação (30), considera-se que os valores são iguais aos de  $\Gamma^{\Phi}$  nos pontos nodais do volume de controle correspondente.

A partir da formulação totalmente implícita é gerado um sistema de equações lineares, no qual, cada incógnita é o valor da variável de interesse no respectivo ponto nodal. Assim, faz-se necessário a aplicação de um método iterativo para solucionar o sistema linear. No código computacional utilizado, o sistema obtido foi solucionado pelo método iterativo de Gauss-Seidel (BARROSO et al., 1987; RUGGIERO e LOPES, 2004).

## **Metodologia Experimental**

Nesta pesquisa, foram utilizadas sementes de uma árvore bem brasileira, o pinheiro (*Araucaria angustifolia*), adquiridas em um mercado localizado na cidade de Campos do Jordão, estado de São Paulo. As sementes com casca foram armazenadas em saco plástico hermético totalmente fechado e conduzidas até a cidade de Cuité-PB onde foram mantidas em freezer a  $-18^{\circ}$  C. Duas horas antes da secagem, foram retiradas do freezer e descongeladas em temperatura ambiente até a realização do experimento. O estudo experimental ocorreu durante o mês de janeiro de 2020. Os experimentos de secagem contínua e intermitente em leito fixo de sementes de pinhão foram realizados em estufa de circulação e renovação de ar no Laboratório de Tecnologia e Alimentos (LTA) localizado no Centro de Educação e Saúde da UFCG (campus Cuité). Considerou-se uma camada fina usando uma cesta perfurada, permitindo que o ar flua através da amostra de sementes de pinhão.

Para melhor desenvolvimento do trabalho, foi feita uma seleção das sementes buscando aquelas que tivessem dimensões semelhantes. Duas cestas, contendo aproximadamente 89,5g de sementes de pinhão (Figura 7), foram colocadas simultaneamente na estufa com temperatura do ar de secagem pré-ajustada de  $70^{\circ}$  C. Em uma das amostras foi aplicado a técnica de secagem contínua enquanto

que a outra foi submetida a secagem intermitente com 1h ou 2h de pausa. A perda de massa foi medida pelo método gravimétrico. Assim, o avanço do processo foi seguido pela pesagem dos cestos contendo as sementes de pinhão em intervalos regulares de 5 min, no início da secagem, até cerca de 2 horas no final do processo, utilizando uma balança digital com escala de precisão  $\pm 0,001$  g. Para o experimento de secagem intermitente, inicialmente a amostra foi submetida à aplicação contínua de calor durante 15 min, seguido de uma pausa de 120 min, subsequente período de secagem de 120 min e novamente uma pausa de 120 min. Considerou-se cinco pausas, sendo que na quinta pausa a duração da têmpera foi de 60 min. Após a quinta pausa (último período de têmpera), a aplicação contínua de calor ocorreu até o final do processo de secagem.

Para determinar o teor de umidade de equilíbrio, a secagem ocorreu até que a massa atingisse seu valor de equilíbrio, e para confirmar que estava em equilíbrio permaneceu na estufa por 24 horas a 70°C. Após a secagem, as amostras foram colocadas novamente na estufa a temperatura de 105°C e mantidas por 24 horas, para medição da matéria seca. Informações gerais sobre os teores de umidade inicial e de equilíbrio das sementes de pinhão são dadas na Tabela 1.

Durante o período de têmpera, uma das amostras foi retirada da estufa e colocada em um recipiente hermético como mostra a Figura 8, em temperatura ambiente. Neste período, a amostra de secagem contínua permaneceu sob ação do calor, de forma que a estufa ficou sempre funcionando durante a realização dos experimentos.

Figura 7. Bandejas com sementes de pinhão com casca *in natura*



Fonte: Própria

**Tabela 1: Teores de umidade inicial e de equilíbrio das sementes de pinhão usadas neste estudo.**

	T (°C)	$M_i$ (b.s.)	$M_{eq}$ (b.s.)
Secagem contínua	70	0,5940	0,046
Secagem intermitente	70	0,5667	0,060

Fonte: autoria própria

Figura 8. Amostra em recipiente hermético durante o período de repouso



Fonte: autoria própria.

As dimensões do pinhão com casca foram obtidas, antes da secagem (in natura) e pós-secagem, utilizando-se um paquímetro digital. O comprimento, a largura e espessura, são denotados por  $\alpha'$ ,  $b'$  e  $c'$ , respectivamente. Na Tabela 2 são apresentados os valores médios das dimensões antes da secagem, e na Tabela 3, é mostrado a média das dimensões pós-secagem.

**Tabela 2. Dimensões das sementes de pinhão com casca in natura**

	Comprimento ( $\alpha'$ ) (mm)	Largura ( $b'$ ) (mm)	Espessura ( $c'$ ) (mm)
Secagem contínua	48,18	19,15	15,57
Secagem intermitente	52,24	19,30	16,15
Média	50,21	19,22	15,86

**Tabela 3. Dimensões das sementes de pinhão com casca pós-secagem**

	Comprimento ( $\alpha'$ ) (mm)	Largura ( $b'$ ) (mm)	Espessura ( $c'$ ) (mm)
Secagem contínua	47,42	18,58	14,91
Secagem intermitente	50,19	18,86	15,73

Fonte: autoria própria.

## DESENVOLVIMENTO

### RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foi realizado um estudo do método dos volumes finitos aplicado na solução numérica da Equação de Difusão bidimensional em coordenadas cilíndricas para condição de contorno de terceira espécie.

Com o objetivo de comparar a solução da Equação de Difusão (utilizada nesta pesquisa para difusão de umidade), dados experimentais de secagem de sementes de pinhão, na temperatura de 70°C, foram obtidos como descrito da metodologia.

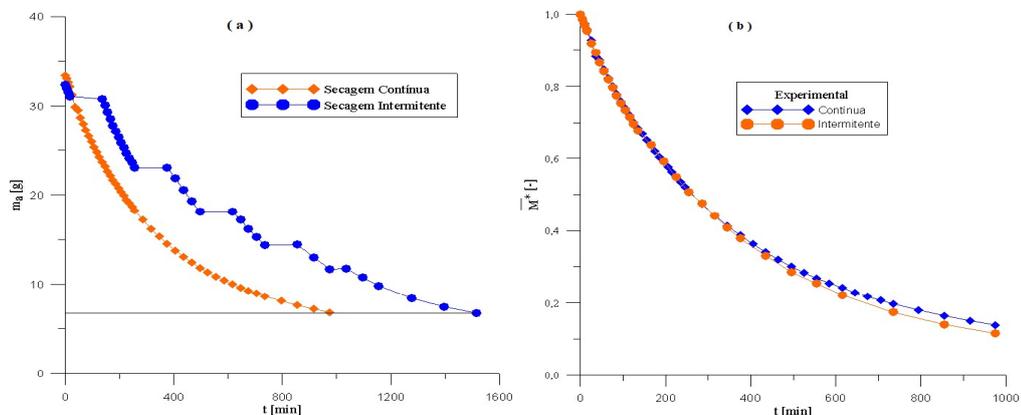
A Figura 9(a) mostra a evolução no tempo da massa de água das sementes de pinhão para os dois experimentos de secagem contínua e intermitente. Observa-se que, para atingir a mesma massa de água, a secagem intermitente demorou mais, devido aos períodos de pausa que foram impostos. Se eliminarmos a duração total das pausas (durante as quais nenhuma energia foi gasta), é possível verificar um pequeno aumento na taxa de secagem (Figura 9(b)) e, a partir do teste experimental realizado, estabelecer estratégias de economia de energia.

Os dados experimentais obtidos para as cinéticas de secagem apresentadas na Figura 9(b) foram utilizados na forma adimensional, dada pela equação:

$$\bar{M}^*(t) = \frac{\bar{M}(t) - M_{eq}}{M_i - M_{eq}} \quad (31)$$

de modo que  $M_{eq}$  (b.s.) é o teor de umidade de equilíbrio,  $\bar{M}(t)$  (b.s.) é o teor de umidade médio no tempo  $t$  e  $M_i$  (b.s.) é o teor de umidade inicial.

Figura 9. (a) Evolução da massa de água para os dois experimentos (incluindo os períodos de têmpera); (b) Teor de umidade médio adimensional de sementes de pinhão com casca durante a secagem contínua e intermitente excluindo os períodos de têmpera.



Fonte: autoria própria

Em muitos problemas de secagem, a resistência interna do sólido para a transferência de massa é maior do que a sua resistência à transferência de calor. Nestes casos, difusão de umidade é o mecanismo que controla o processo durante o período de taxa de secagem decrescente, e o modelo de difusão pode ser utilizado para prever o processo de secagem.

### Resultados da aplicação do modelo de difusão na secagem de pinhão usando solução analítica

A solução da Equação de Difusão para geometria cilindro finito e condição de contorno de terceira espécie foi ajustada aos dados experimentais de secagem de semente de pinhão na temperatura de 70°C. Na simulação foram utilizadas as dimensões da semente úmida *in natura* para obter as dimensões equivalentes do cilindro finito:  $L = 50,212$  mm e  $R = \frac{a+b}{4} = 8,77$  mm.

A Figura 10 mostra a comparação entre os valores simulados e experimentais do teor de umidade médio adimensional do pinhão com casca durante a secagem contínua e intermitente. Neste caso, os parâmetros termofísicos são considerados constante. O coeficiente de difusão ( $D$ ), o coeficiente de transferência de massa convectivo ( $h$ ) e o número de Biot ( $Bi$ ) foram obtidos e alguns parâmetros estatísticos que medem a qualidade do ajuste do modelo aos dados experimentais são dados na Tabela 4. Para tanto, utilizou-se o software Convective (SILVA e SILVA, 2009).

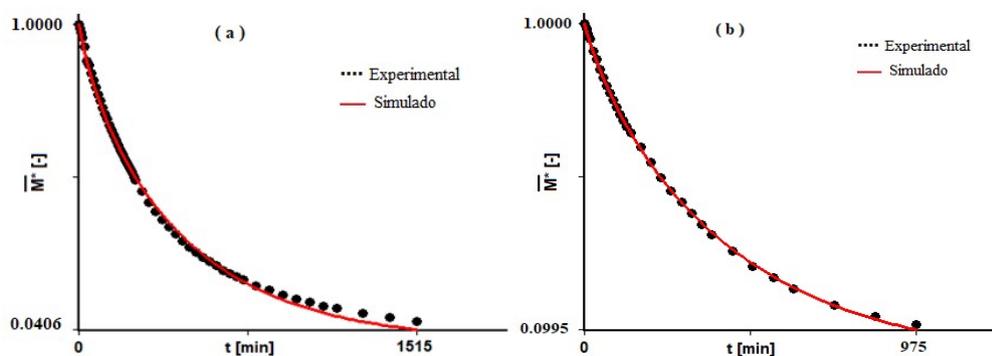
**Tabela 4. Resultados da otimização utilizando o software Convective**

Experimento	$D$ ( $m^2/min$ )	$h$ ( $m/min$ )	$Bi$	$\chi^2$	$R^2$
Secagem contínua	$3,8302 \times 10^{-08}$	$1,7906 \times 10^{-05}$	4,1	$8,003244 \times 10^{-03}$	0,998258
Secagem intermitente	$5,1727 \times 10^{-08}$	$1,5925 \times 10^{-05}$	2,7	$6,7621 \times 10^{-04}$	0,9997

Fonte: autoria própria

Observa-se que o número de Biot ( $Bi = \frac{hR}{D}$ ) para transferência de massa obtido na secagem intermitente é menor que o obtido na secagem contínua, o que indica que a técnica de secagem intermitente ocorre de forma mais uniforme quando comparada com a secagem com aplicação contínua de calor. Isto mostra que a técnica de secagem intermitente reduz os gradientes de umidade e, conseqüentemente, proporciona uma melhor qualidade do produto final.

Figura 10. Comparação entre os teores de umidade médio adimensional teórico e experimental durante a secagem de pinhão : (a) contínua; (b) intermitente (eliminando os períodos de têmpera)



Fonte: autoria própria

Observando os gráficos gerados pela simulação no *Convective* e a Tabela 4, é possível perceber que o modelo com difusividade constante se ajustou bem aos dados experimentais de secagem contínua e intermitente de pinhão. Neste sentido, considerou-se o efeito da difusividade variável apenas para secagem contínua e os resultados são apresentados a seguir.

### Resultados da aplicação do modelo de difusão na secagem de pinhão usando solução numérica

Inicialmente realizou-se um estudo para definir a malha e o número de passos no tempo de maneira que forneça resultados adequados sem exigir um custo computacional muito grande. Uma vez estabelecida a malha (15 x 10) e o número de passos de tempo (1500), procurou-se determinar uma expressão adequada para descrever a variação da difusividade efetiva de massa em função do teor de umidade ( $x$ ) durante a secagem contínua de pinhão, além de obter um valor ótimo para o coeficiente de transferência convectiva de massa. Para isto, utilizou-se o *software cilindro finito* descrito em SILVA JUNIOR, et al. (2015) que disponibiliza uma biblioteca com 30(trinta) expressões para a difusividade. Neste trabalho, foram testadas 5(cinco) funções que estão na biblioteca do *software* e são apresentadas na Tabela 5.

**Tabela 5. Expressões para a difusividade**

Notação	Função
$F_1$	$b$
$F_2$	$ax + b$
$F_3$	$ax^2 + b$
$F_4$	$b \exp(ax)$
$F_5$	$b \cosh(ax)$

Fonte: autoria própria

Os resultados dos valores ótimos dos parâmetros  $a$  e  $b$  foram obtidos por otimização e estão apresentados na Tabela 6 para as cinco funções, juntamente com o coeficiente de transferência convectiva de massa ( $h$ ) e os parâmetros estatísticos ( $R^2$ ) e qui-quadrado ( $\chi^2$ ). Os resultados encontram-se em ordem de melhor ajuste aos dados experimentais.

Analisando os resultados apresentados na Tabela 6, foi possível obter valores do qui-quadrado menores quando comparado com o qui-quadrado obtido com a utilização da solução analítica, o que indica que a solução numérica, que considera difusividade variável, é mais precisa para descrever a cinética de secagem contínua.

Com relação as funções testadas, todas apresentaram coeficiente de determinação  $R^2$  próximo de 1 e o valor do qui-quadrado  $\chi^2$  relativamente baixo, sendo a função  $F_2$  a que apresenta os melhores indicadores estatísticos.

**Tabela 6. Resultados das otimizações**

Função	$a$	$b$	$h$ (m/min)	$\chi^2$	$R^2$
$F_2$	$1,2646 \times 10^{-7}$	$1,0463 \times 10^{-8}$	$1,3267 \times 10^{-5}$	$4,3017 \times 10^{-4}$	0,999899
$F_3$	$2,9132 \times 10^{-7}$	$2,3038 \times 10^{-8}$	$1,2239 \times 10^{-5}$	$5,86 \times 10^{-4}$	0,99986
$F_4$	2,8522	$2,055904 \times 10^{-8}$	$1,2375 \times 10^{-5}$	$6,6035 \times 10^{-4}$	0,9998464
$F_5$	0,1003003	$3,5322 \times 10^{-8}$	$1,9664 \times 10^{-5}$	$7,2468 \times 10^{-3}$	0,998313781
$F_1$	0	$3,6190 \times 10^{-8}$	$1,9238 \times 10^{-5}$	$7,26 \times 10^{-3}$	0,998319

Fonte: autoria própria

A fim de confirmar a melhor expressão para a difusividade variável, buscou-se fazer uma análise do valor médio das funções  $F_1$  a  $F_5$ . O valor médio da difusividade é dado por:

$$\bar{D} = \frac{1}{M_i - M_{eq}} \int_{M_{eq}}^{M_i} F(x) dx \quad (32)$$

onde  $M_i$  e  $M_{eq}$  são os teores de umidade inicial e de equilíbrio (considerados 1 e 0, respectivamente) e  $F(x)$  corresponde as funções ( $F_1$  a  $F_5$ ).

O valor médio da difusividade foi obtido para cada função testada e os resultados estão apresentados na Tabela 7.

**Tabela 7. Resultados dos valores médios da difusividade**

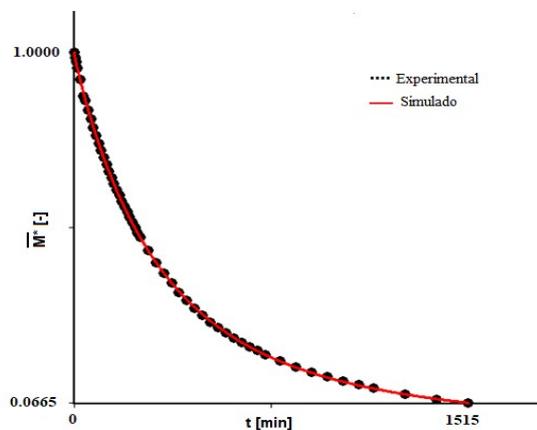
Notação	$\bar{D}$
$F_1$	$3,6190 \times 10^{-8}$
$F_2$	$7,3693000 \times 10^{-8}$
$F_3$	$1,201446667 \times 10^{-7}$
$F_4$	$1,176789649 \times 10^{-7}$
$F_5$	$3,538125390 \times 10^{-8}$

Fonte: autoria própria

Analisando a Tabela 7, percebe-se que as funções  $F_2$  e  $F_5$  são as que apresentaram valores médios mais próximos do valor da difusividade constante. No entanto, a função  $F_2$  apresentou os melhores indicadores estatísticos comparados com a função  $F_5$  e, portanto, foi a escolhida para a difusividade variável.

A Figura 11 mostra a comparação entre os dados experimentais e os dados obtidos na simulação considerando a difusividade variável dada pela função  $F_2$ , para secagem contínua de pinhão.

Figura 11. Gráfico com a simulação dos dados experimentais e os dados considerando a difusividade variável utilizando a função  $F_2$



Fonte: autoria própria

Em geral, o coeficiente de difusão é considerado constante ou dependente da temperatura e/ou do teor de umidade do sólido. Contudo, observa-se discrepâncias quando o coeficiente de difusão é considerado constante. Os indicadores estatísticos, obtidos com o ajuste da solução numérica, asseguram que a difusividade variável durante o processo é mais apropriada para descrever o fenômeno físico na temperatura considerada.

## **CONCLUSÃO**

Este trabalho proporcionou realizar experimentos de secagem contínua e intermitente das sementes da Araucária angustifolia, como também estudar o processo de difusão de massa em regiões cilíndricas e fazer comparações entre as soluções analítica e numérica. Verificou-se que a técnica de secagem intermitente pode ser aplicada para estabelecer estratégias de economia de energia. Foi possível determinar o coeficiente de transferência convectiva de massa e uma expressão para descrever a difusividade de massa em função do teor de umidade. Os indicadores estatísticos obtidos com o ajuste da solução numérica apresentaram valores significativamente melhores quando comparados aos obtidos com o ajuste realizado no *software convective* que considera solução analítica. Portanto, destaca-se a importância do estudo de métodos numéricos na implementação de modelos mais robustos para descrever processos de secagem com mais eficiência e aproximação da situação real.

## **AGRADECIMENTOS**

Os autores agradecem ao programa PIBIC/CNPq-UFCG. O presente trabalho foi realizado com o apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil.

## **REFERÊNCIAS**

- BARROSO, L. C.; BARROSO, M. M. A.; CAMPOS, F. F.; CARVALHO, M. L. B.; MAIA, M. L. **Cálculo numérico com aplicações**. São Paulo: Ed. Harbra, 1987.
- BROOKER, D. B.; BAKKER-ARKEMA, F. W.; HALL, C. W. **Drying and storage of grains and oilseeds**. New York: The AVI Publishing Company, 1992. 450 p.
- CARMO, J. E. F. **Fenômenos de difusão transiente em sólidos esferoidais oblatos. Estudo de caso: Secagem de lentilhas**. 2004. 139 p. (Tese Doutorado).

Doutorado em Engenharia de Processos, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande.

FARIAS, V. S. O. **Difusão 3D em sólidos com forma arbitrária usando coordenadas generalizadas**. 2011, 265 p. (Tese Doutorado). Doutorado em Engenharia de Processos, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande.

FIGLIOLA, R. **Princípios de secagem de produtos biológicos**. João Pessoa: Editora Universitária/UFPB, 2003. 229 p.

MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. Rio de Janeiro: LTC Editora S.A., 2004. 453 p.

PATANKAR, S. V.: **Numerical heat transfer and fluid flow**. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1980.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. São Paulo: Makron Books, 2004.

SCHÄFER, M. **Computational Engineering –Introduction to Numerical Methods**. Springer: Germany, 2006, 321 p.

SILVA, J. S. **Secagem e armazenagem de produtos agrícolas**. Viçosa: Aprenda Fácil, 2008. 560 p.

SILVA JUNIOR, A. F. **Desenvolvimento de ferramentas numéricas e computacionais para a descrição de transferência de massa em corpos cilíndricos: aplicação em desidratação osmótica e secagem complementar de banana**. Tese (Doutorado em Engenharia de Processos) — Universidade Federal de Campina Grande, 2015.

SILVA JUNIOR, A. F.; SILVA, W. P. **Desidratação osmótica e secagem complementar de fatias de banana: desenvolvimento de ferramentas numéricas e computacionais**. Novas Edições Acadêmicas: Beau Bassin, 2018.