



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Johnnathan Sperandio Farel

# **Deflexão da luz e lentes gravitacionais em espaços esfericamente simétricos**

Campina Grande, Paraíba, Brasil

9 de março de 2025



Johnnathan Sperandio Farel

## **Deflexão da luz e lentes gravitacionais em espaços esfericamente simétricos**

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Victor Ignacio Afonso, apresentada ao curso de Pós-Graduação em Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Professor Dr. Victor I. Afonso

Campina Grande, Paraíba, Brasil

9 de março de 2025

F222d

Farel, Johnathan Sperandio.

Deflexão da luz e lentes gravitacionais em espaços esfericamente simétricos / Johnathan Sperandio Farel. – Campina Grande, 2024.

77 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.

"Orientação: Prof. Dr. Victor Ignacio Afonso".

Referências.

1. Física de Partículas. 2. Cosmologia e Gravitação. 3. Lente Gravitacional. 4. Buracos Negros. 5. Espalhamento de Luz. I. Afonso, Victor Ignacio. II. Título.

CDU 539.12(043)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
POS-GRADUACAO EM FISICA

Rua Aprigio Veloso, 882, - Bairro Universitario, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

**FOLHA DE ASSINATURA PARA TESES E DISSERTAÇÕES**

**JOHNNATHAN SPERANDIO  
FAREL**

Deflexão da luz e lentes gravitacionais em espaços esfericamente simétricos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 07/06/2024

**Victor Ignácio Afonso**

Presidente da Comissão e Orientador

**João Rafael Lucio dos Santos**

Examinador Interno

**Morgana   Lígia de Farias Freire**

Examinadora Externa



Documento assinado eletronicamente por **FRANCISCO DE ASSIS DE BRITO, COORDENADOR(A)**, em 02/07/2024, às 20:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **JOAO RAFAEL LUCIO DOS SANTOS, PROFESSOR(A) DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 02/07/2024, às 20:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento

no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **VICTOR IGNACIO AFONSO, PROFESSOR 3 GRAU**, em 02/07/2024, às 20:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Morgana Ligia de Farias Freire, Usuário Externo**, em 02/07/2024, às 22:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufcg.edu.br/autenticidade>, informando o código verificador **4496432** e o código CRC **FFF21902**.

---



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
POS-GRADUACAO EM FISICA

Rua Aprigio Veloso, 882, - Bairro Universitario, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

REGISTRO DE PRESENÇA E ASSINATURAS

REGISTRO DE PRESENÇA E ASSINATURAS

ATA DA DEFESA PARA CONCESSÃO DO GRAU DE MESTRE EM FÍSICA, REALIZADA  
EM 07 DE JUNHO DE 2024

Aos sete dias do mês de junho do ano de dois mil e vinte e quatro, reuniram-se em caráter de solenidade pública, os membros da comissão designada para avaliar **JOHNNATHAN SPERANDIO FAREL** ao grau de Mestre em Física, área de concentração Física. Foram componentes da Banca Examinadora os especialistas: o professor **Victor Ignácio Afonso** (Orientador) – Doutor em Física, o professor **João Rafael Lucio dos Santos** – Doutor em Física, a professora **Morgana Lígia de Farias Freire** – Doutora em Física, sendo o primeiro e o segundo integrantes do corpo docente da Universidade Federal de Campina Grande, e a terceiro, integrante do corpo docente da Universidade Estadual da Paraíba. HORA DE INÍCIO: **10h00min** – LOCAL: **Sala Virtual**. Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca, professor **João Rafael Lúcio dos Santos**, após declarar os objetivos da reunião, apresentou o(a) candidato(a) **JOHNNATHAN SPERANDIO FAREL**, a quem concedeu a palavra para que dissertasse oral e sucintamente sobre o tema apresentado, intitulado “Deflexão da luz e lentes gravitacionais em espaços esfericamente simétricos”. Após discorrer o referido tema, o(a) candidato(a) foi arguido(a) pelos examinadores na forma regimental. Ato contínuo, passou a Comissão, em caráter secreto, a proceder a avaliação e julgamento do trabalho, concluindo por atribuir-lhe o conceito Aprovado. Face à aprovação, declarou o Presidente estar o(a) avaliado(a), legalmente habilitado(a) a receber o Grau de Mestre em Física, cabendo à Universidade Federal de Campina Grande, providências para a expedição do Diploma a que o(a) mesmo(a) faz jus. Nada mais havendo a tratar, foi lavrada a ata, que será submetida à aprovação da Comissão Examinadora. Campina Grande, 07 de junho de 2024.

**Victor Ignácio Afonso**

Presidente da Comissão e Orientador

**João Rafael Lucio dos Santos**

Examinador Interno

**Morgana   Lúgia de Farias Freire**

Examinadora Externa

**Johnnathan Sperandio Farel**

Candidato(a)

**Francisco de Assis de Brito**

Coordenador do Programa

## 2 - APROVAÇÃO

2.1. Segue a presente Ata de Defesa de Tese de Mestrado do(a) candidato(a) **JOHNNATHAN SPERANDIO FAREL**, assinada eletronicamente pela Comissão Examinadora acima identificada.

2.2. No caso de examinadores externos que não possuam credenciamento de usuário externo ativo no SEI, para igual assinatura eletrônica, os examinadores internos signatários certificam que os examinadores externos acima identificados participaram da defesa da tese e tomaram conhecimento do teor deste documento.



Documento assinado eletronicamente por **FRANCISCO DE ASSIS DE BRITO, COORDENADOR(A)**, em 02/07/2024, às 20:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **JOAO RAFAEL LUCIO DOS SANTOS, PROFESSOR(A) DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 02/07/2024, às 20:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **VICTOR IGNACIO AFONSO, PROFESSOR 3 GRAU**, em 02/07/2024, às 20:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Morgana Ligia de Farias Freire, Usuário Externo**, em 02/07/2024, às 22:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Johnnathan Sperandio Farel, Usuário Externo**, em 04/07/2024, às 13:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).

*À minha mãe que me deu a vida e ao meu pai que me ensinou a vivê-la*



# Agradecimentos

- Ao Prof. Victor I. Afonso, pela orientação, paciência, sugestão, estímulo e competência com que conduziu este trabalho.
- A todos os professores desta Unidade Acadêmica que contribuíram com a minha formação.
- A meu amigo Willames Silva Pinheiro por compartilhar momentos de estudo e trocas de conhecimentos que auxiliaram a minha formação.
- Aos meus familiares pelo apoio financeiro, emocional, confiança e incentivo.
- A minha mulher Maria Alcione Bezerra que teve a paciência e deu suporte me apoiando nos momentos difíceis.
- Aos colegas de pós-graduação e funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade.
- A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.



*Saber muito não lhe torna inteligente.  
A inteligência se traduz na forma que você recolhe,  
julga, maneja e, sobre tudo,  
onde e como aplica esta informação.  
Carl Sagan*



# Resumo

O conceito de lente gravitacional nos ajuda a entender como a gravidade de objetos compactos massivos desvia a luz de estrelas distantes, resultando em imagens distorcidas e amplificadas. Assim, as lentes gravitacionais fornecem informações sobre a curvatura do espaço-tempo em torno de objetos astrofísicos compactos como estrelas de nêutrons, galáxias, buracos negros, buracos de minhoca, etc. No presente trabalho consideramos espaço-tempos esfericamente simétricos, estáticos e assintoticamente planos, e exploramos conceitos fundamentais da Relatividade Geral para obter as expressões necessárias (ângulo de deflexão de uma partícula submetida à força gravitacional), nos limites de campo gravitacional fraco e forte. Examinamos as condições desse fenômeno óptico e fornecemos uma representação visual para os casos do um buraco negro de Schwarzschild e o de Reissner-Nordström. Para analisar as propriedades ópticas associadas a esses tipos específicos de buracos negros, traçamos as trajetórias das curvas correspondentes aos caminhos da luz ao redor do buraco negro para diferentes parâmetros de impacto, em que usamos as representações gráficas do software Mathematica<sup>TM</sup>. Esperamos que este estudo dos fenômenos ópticos devido aos efeitos gravitacionais que influenciam a trajetória da luz em torno dos buracos negros traga uma compreensão das evidências observacionais desses objetos hoje disponíveis para a comunidade científica.

**Palavras-chave:** Lente Gravitacional, Buracos Negros, Espalhamento de luz.



# Abstract

The concept of gravitational lensing helps us understand how the gravity of massive compact objects deflects light from distant stars, resulting in distorted and magnified images. Thus, gravitational lenses provide information about the curvature of spacetime around compact astrophysical objects such as neutron stars, galaxies, black holes, wormholes, etc. In this work, we consider spherically symmetric, static, and asymptotically flat spacetimes, and explore fundamental concepts of General Relativity to obtain the necessary expressions (deflection angle of a particle subjected to the gravitational force), in the limits of weak and strong gravitational field. We examine the conditions for this optical phenomenon and provide a visual representation for the cases of a Schwarzschild black hole and a Reissner-Nordström black hole. To analyze the optical properties associated with these specific types of black holes, we plot the trajectories of the curves corresponding to the paths of light around the black hole for different impact parameters, using the graphical representations of the Mathematica software. We hope that this study of optical phenomena due to the gravitational effects that influence the trajectory of light around black holes will bring an understanding of the observational evidence of these objects that is available to the scientific community today.

**Keywords:** Black Holes, Schwarzschild, Gravitational Lensing.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – A esquerda temos a simulação da sombra de um Buraco Negro, formada por um disco de acreção (1979) [1] e a direita temos imagem instantânea de uma simulação em uma noite observação do M87* [2] . . . . .	22
Figura 2 – Comportamento do potencial efetivo $V(r)$ definido com termo Newtoniano (lado esquerdo) e com termo Relativístico (lado direito) . . . . .	32
Figura 3 – Três tipos de órbitas de raios de luz na geometria de Schwarzschild, correspondentes a diferentes valores de $b$ . De cima para baixo: uma órbita circular, uma órbita de dispersão e uma órbita de mergulho. O potencial e a sua relação com $b$ são apresentados do lado esquerdo. . . . .	35
Figura 4 – Deflexão na trajetória de fótons próximos a um buraco negro de Schwarzschild. [3] . . . . .	36
Figura 5 – Estrela cuja imagem é desviada pela curvatura do espaço-tempo causada pelo Sol[4] . . . . .	37
Figura 6 – Diagrama de deflexão angular da luz [5] . . . . .	43
Figura 7 – Raio de luz na direção do objeto. . . . .	50
Figura 8 – Raio de luz entrando (azul) e saindo (vermelho) próximo a um buraco negro. . . . .	50
Figura 9 – Raios correspondentes a distintos parâmetros de impacto $b$ . . . . .	50
Figura 10 – Trajetórias dos raios de luz com parâmetro de impacto maiores do que valor crítico ( $b > b_c$ ). . . . .	51
Figura 11 – Raios maiores próximos ao parâmetro de impacto crítico. ( $b_c$ ) . . . . .	52
Figura 12 – Representação aproximada do anel de fótons . . . . .	52
Figura 13 – Combinação de todas as classes de trajetórias dos raios de luz defletida pelo buraco negro de Schwarzschild. . . . .	53
Figura 14 – Geodésicas nulas com parâmetro de impacto $b = \sqrt{27}$ , no entorno de buracos negros estáticos com carga variando de zero a 1. . . . .	54
Figura 15 – Trajetórias dos raios de luz com carga $Q = 1$ ; parâmetros de impacto maiores do que valor crítico ( $b > b_c$ ). . . . .	55
Figura 16 – Raios maiores porém próximos ao parâmetro de impacto crítico ( $b \gtrsim b_c$ ), com carga $Q = 1$ . . . . .	56
Figura 17 – Representação aproximada do anel de fótons com carga. $Q = 1$ . . . . .	56
Figura 18 – Combinação de todas as classes de trajetórias dos raios de luz de um Buraco Negro carregado com carga $Q = M = 1$ . . . . .	57



# Sumário

1	<b>INTRODUÇÃO</b>	21
2	<b>SOLUÇÕES ESFERICAMENTE SIMÉTRICAS</b>	23
2.1	Soluções estacionárias	24
2.2	Soluções estáticas	24
2.3	Solução de Schwarzschild	25
3	<b>DEFLEXÃO DA LUZ</b>	29
3.1	Geodésicas em um espaço-tempo com simetria esférica	29
3.2	Órbitas Circulares	32
3.3	Parâmetro de impacto	33
3.4	Ângulo de deflexão	34
4	<b>LIMITES DE CAMPO FRACO E CAMPO FORTE E EQUAÇÃO DA LENTE GRAVITACIONAL</b>	37
4.1	Limite de campo fraco	37
4.2	Limite de campo forte	39
4.3	Equação da lente e seus observáveis	42
4.4	Posição das imagens	43
5	<b>APLICAÇÕES</b>	45
5.1	Buraco negro de Schwarzschild	45
5.2	Buraco negro de Reissner-Nordström	46
6	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	49
6.1	Traçado de raios luminosos	49
6.1.1	Buraco negro de Schwarzschild	49
6.1.2	Buraco negro de Reissner-Nordström	54
7	<b>CONCLUSÕES</b>	59
	<b>REFERÊNCIAS</b>	61
	<b>APÊNDICES</b>	65
	<b>APÊNDICE A – SCRIPT MATHEMATICA PARA A VARIAÇÃO DO PARÂMETRO DE IMPACTO CRÍTICO</b>	67

A.1	Integrador Básico . . . . .	67
A.2	Integrador Automático para N Geodésicas . . . . .	68
	<b>APÊNDICE B – SOLUÇÃO DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD</b>	<b>69</b>
B.1	Componentes do Símbolo de Christoffel . . . . .	69
B.2	Componentes do tensor de Ricci . . . . .	71

# 1 Introdução

O estudo sobre as lentes gravitacionais ajuda a entender o efeito que a gravidade de objetos maciços causa sobre a luz vinda de fontes distantes, ocasionando uma distorção e amplificação das suas imagens. Dessa forma, os fenômenos ópticos gravitacionais fornecem dados acerca da deformação do espaço-tempo próximo de objetos, tanto de escala estelar e galáctica.

Os buracos negros são objetos com gravidade extremamente intensa e com uma estrutura que apresenta um horizonte de eventos, sendo a fronteira a partir da qual nem a luz consegue escapar.[6] Logo, por definição, eles não podem ser observados diretamente, mas podemos observar os efeitos dos sua enorme influência gravitacional na matéria próxima podem ser examinados.

No centro de um buraco negro existe o fenômeno chamado de “singularidade”.[7] Uma forma qualitativa de descrever esse efeito, consiste em considerar que a massa teria se aglutinado tanto em uma região extremamente pequena (um ponto), provocando um campo gravitacional muito intenso, representado por uma curvatura divergente do espaço-tempo.

No caso de buracos negros astrofísicos (com massa de ordem estelar), é possível a existência de um disco de acreção, formado por matéria difusa em movimento orbital em torno dele. Quando acelerada, essa matéria emite radiação eletromagnética a partir da superfície do disco. Ao passar por uma região com um campo gravitacional extremamente intenso, a luz segue trajetórias curvas. Assim, os feixes de luz que atravessam regiões muito próximas aos horizontes de eventos, serão capazes de produzir imagens, comparado aos feixes que não conseguem “escapar”, que definem regiões de sombra nas imagens.

Essas sombras de buracos negros em conjunto a deflexão da luz vem sendo estudados a mais de cem anos, com trabalhos pioneiros de Jean-Pierre Luminet 1979 [1] iniciaram criando simulações numéricas para criar imagens dessas sombras. Hoje em dia graças aos avanços tecnológicos e teóricos podemos obter as observações revolucionárias do Event Horizon Telescope (EHT)[8] e as imagens do EHT, como as do buraco negro supermassivo no centro da galáxia M87\* [9]:

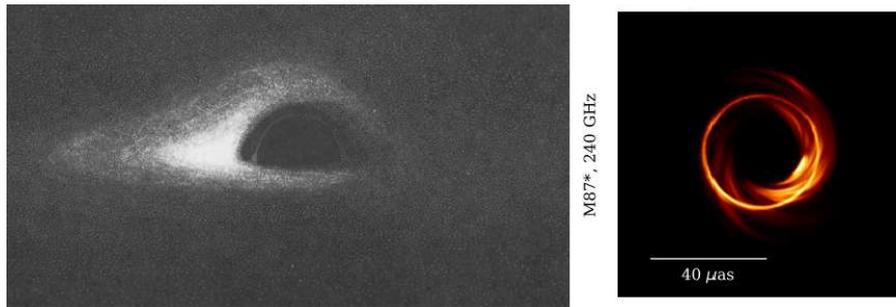


Figura 1 – A esquerda temos a simulação da sombra de um Buraco Negro, formada por um disco de acreção (1979) [1] e a direita temos imagem instantânea de uma simulação em uma noite observação do M87\* [2]

Na figura 1 podemos analisar o desenvolvimento das simulações teóricas desenvolvidas por softwares, na primeira imagem vemos a formação do buraco negro composto por um disco de acreção e uma singularidade. Já na segunda imagem vemos com mais detalhes a formação de um anel de fótons, que segundo a relatividade geral os fótons, devem fluir ao longo de trajetórias que sofrem uma curvatura extrema da luz dentro de alguns raios de Schwarzschild do horizonte antes de escapar.

Com isso, a caracterização das esferas de fótons e das sombras tem sido ampliada por trabalhos teóricos que investigam a dinâmica e a geometria desses campos gravitacionais, ([10], [11]), explorando a luz desviada e moldada ao redor dos buracos negros, como discutido por Mishra et al. (2019) [12] e da Silva (2023) [13]. Revisões abrangentes de estudos analíticos sobre cálculos de sombras, como as realizadas por Perlick e Tsupko (2022) [14], fornecem uma visão detalhada dos métodos e resultados até agora alcançados. Além disso, investigações sobre como buracos de minhoca e buracos negros não singulares afetam a aparência óptica e as trajetórias de luz, conforme descrito por Ohgami e Sakai (2015) [15] e Guerrero et al. (2021) [16]. Por fim, as correções de holonomia e suas implicações no lenteamento gravitacional de buracos negros de Schwarzschild, abordadas por Soares (2023) [17], destacam a complexidade e a riqueza das interações entre luz e gravidade em contextos relativísticos. O propósito deste trabalho é analisar os elementos teóricos relacionados à deflexão da luz e o consequente efeito de “lente gravitacional” causado por buracos negros. O estudo inclui trabalhar com um algoritmo baseado nesses conceitos para determinar trajetórias dos raios de luz defletidos por um buraco negro estelar, explorando as distintas regiões de valores do parâmetro de impacto. Isso permite, analisar o efeito da lente sobre os fótons, identificando o parâmetro de impacto crítico, relacionado à esfera de fótons que se encontra próxima do horizonte de eventos e as imagens formadas pelas lentes gravitacionais.

## 2 Soluções esfericamente simétricas

A simetria esférica é um conceito importante na física e na matemática porque descreve objetos que exibem a mesma aparência ou propriedades em todas as direções radiais. Na Relatividade Geral, a simetria esférica desempenha um papel fundamental na compreensão da geometria do espaço-tempo em torno de objetos massivos, como buracos negros e estrelas de nêutrons, descrevendo-as com a simplificação das equações de campo de Einstein.

Matematicamente, um espaço-tempo é considerado esfericamente simétrico quando o seu grupo de isometrias contém um subgrupo isomórfico ao grupo  $SO(3)$ . Especificamente, as órbitas desse subgrupo correspondem a superfícies esféricas bidimensionais, como a esfera  $S_2$ . Portanto, o grupo de isometrias  $SO(3)$  pode ser interpretado fisicamente como rotações de superfícies ao redor de um ponto específico, resultando em um espaço-tempo com simetria esférica. No contexto da Relatividade Geral, um espaço-tempo esfericamente simétrico é aquele onde a métrica permanece inalterada (isometria) sob rotações.

As simetrias intrínsecas de um espaço-tempo podem ser identificadas por meio dos diferentes vetores de Killing definidos na variedade. Em um espaço tridimensional, o grupo  $SO(3)$  é responsável por gerar famílias de rotações, que, por sua vez, estão associadas aos vetores de Killing [18]. Em coordenadas polares  $(\theta, \phi)$ , esses vetores de Killing são expressos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} K_1 &= \sin(\varphi)\partial_\theta + \cot(\theta)\cos(\varphi)\partial_\varphi , \\ K_2 &= -\cos(\varphi)\partial_\theta + \cot(\theta)\sin(\varphi)\partial_\varphi , \\ K_3 &= -\partial_\varphi . \end{aligned} \tag{2.1}$$

que satisfazem:

$$[K_i, K_j] = \varepsilon_{(ijk)}K_k , \tag{2.2}$$

com  $(i, j, k = 1, 2, 3)$  sendo considerados ciclicamente. Assim, um espaço-tempo esfericamente simétrico pode ser definido como aquele que possui três vetores de Killing, que obedecem às relações de comutação desses valores acima.

O elemento de linha, em termos das coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$ , é escrito na forma [19]:

$$ds_M^2 = -e^{\xi(t,r)} dt^2 + e^{\lambda(t,r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) . \tag{2.3}$$

onde  $\xi(t, r)$  e  $\lambda(t, r)$  são funções desconhecidas, e  $r$  é definido como raio da esfera cuja área é  $4\pi r^2$ .

A seguir apresentamos as equações de campo de vácuo, o caso mais simples da simetria esférica.

## 2.1 Soluções estacionárias

Em um espaço-tempo esféricamente simétrico, as soluções estacionárias referem-se a configurações nas quais as propriedades físicas não variam em relação ao tempo e são simétricas em torno de um ponto central. “Isto não significa que a solução não seja de modo algum evolutiva, mas, simplesmente, que o tempo não entra explicitamente.”[19].

Naturalmente, num sistema de coordenadas arbitrário a métrica provavelmente dependerá explicitamente de todas as coordenadas. Uma métrica será estacionária se existir um sistema de coordenadas especial na qual ela é independente do tempo, ou seja:

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^0} \doteq 0, \quad (2.4)$$

sendo  $x^0$  uma coordenada temporal. Assim, se definirmos um campo vetorial como:

$$X^a \doteq \delta_0^a \equiv \frac{\partial x^a}{\partial x^0}, \quad (2.5)$$

nesse sistema de coordenadas especial, o tensor é considerado:

$$L_X g_{ab} = X^c g_{ab,c} + g_{ac} X^c_{,b} + g_{bc} X^c_{,a} \doteq \delta_0^c g_{ab,c} = g_{ab,0} = 0. \quad (2.6)$$

A derivada de Lie da métrica ao longo do vetor  $X^c$ ,  $L_X g_{ab}$ , é um tensor e, portanto, se este é nulo num sistema de coordenadas específico, então será igual em todos os sistemas de coordenadas. Assim,  $X^a$  corresponde a um vetor de Killing temporal. A situação inversa é igualmente válida. Dado um vetor de Killing temporal  $X^a$ , se existe um sistema de coordenadas compatível com o mesmo para o qual a Equação (2.5) é válida tem-se que:

$$0 = L_X g_{ab} \doteq g_{ab,0}, \quad (2.7)$$

então a métrica é estacionária e o espaço-tempo é estacionário se, e somente se, admite um vetor de Killing tipo-tempo.

## 2.2 Soluções estáticas

A métrica de um espaço-tempo estacionário, num sistema de coordenadas adaptado, é independente do tempo. Mas, em geral, o elemento de linha contém termos cruzados ( $dt dx^a$ ). Para soluções estáticas, nada muda se corrêsemos o tempo para atrás. Ou seja, estático significa que o tempo é simétrico em relação a qualquer origem escolhida.

O intervalo entre dois eventos  $(t, x^1, x^2, x^3)$  e  $(t + dt, x^1 + dx^1, x^2, x^3)$ , no sistema de coordenadas no qual a métrica é estacionária. Temos então:

$$ds^2 \doteq g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{01}dx^0 dx^1 + g_{11}(dx^1)^2, \quad (2.8)$$

onde  $g_{ab}$  depende unicamente de  $x^a$ . Sob reversão temporal  $t \rightarrow t' = -t$ , as componentes  $g_{ab}$  permanecem inalteradas. No entanto,  $ds^2$  torna-se:

$$ds^2 \doteq g_{00}(dx^0)^2 - 2g_{01}dx^0dx^1 + g_{11}(dx^1)^2. \quad (2.9)$$

Numa métrica estática o elemento de linha deve permanecer invariante sob reversão temporal, portanto, nas equações (2.8) e (2.9) as componentes  $g_{01}$  devem anular-se (o mesmo ocorre com as componentes  $g_{02}$  e  $g_{03}$  para o caso geral), o que implica que o vetor de Killing, dado pela Equação (2.5), seja ortogonal às superfícies espaciais que geram o espaço-tempo.

“Em um espaço-tempo estático, existe um sistema de coordenadas adaptado ao campo vetorial de Killing, a métrica é independente do tempo, e nenhum termo cruzado aparece no elemento de linha que envolve o tempo, isto é,  $g_{0\alpha} \doteq 0$ ” [19]. Em base a essa sentença definimos então, que um espaço-tempo estático é além de estacionário, possui um vetor de Killing tipo-tempo ortogonal às superfícies tipo-espaço.

## 2.3 Solução de Schwarzschild

A solução de Schwarzschild foi uma das primeiras respostas extraídas das equações de campo de Einstein, encontrada pelo físico e astrônomo alemão Karl Schwarzschild no ano de 1916, poucos meses após a publicação da Teoria da Relatividade Geral por Einstein. Sendo a solução não trivial, no entanto, a mais simples das equações de campo de Einstein, a solução de Schwarzschild desempenha um papel importante na discussão e compreensão conceitual da Teoria da Relatividade Geral, por exemplo, revelando a existência de horizontes de eventos, singularidades no espaço-tempo, e aspectos da teoria quântica de campos em espaços curvos (por exemplo, a radiação Hawking). Essa solução forneceu os primeiros passos para compreender o fenômeno de colapso gravitacional, motiva a elaboração de modelos teóricos para estrelas relativísticas.

Em termos observacionais, a solução de Schwarzschild resulta uma descrição apropriada do campo gravitacional externo de objetos massivos que estão estáticos ou giram muito lentamente, como estrelas e planetas. Ela tem sido especialmente bem-sucedida ao explicar a precessão do periélio de Mercúrio e o fenômeno da lente gravitacional. Trata-se de uma ferramenta crucial para entender a gravidade gerada por objetos massivos, com aplicações importantes na descrição de fenômenos astrofísicos, como a precessão de órbitas e a distorção da luz pela gravidade de objetos.[20] [4]

A solução de Schwarzschild descreve a geometria de um espaço-tempo vazio, estático e esfericamente simétrico ao redor de um objeto com massa  $M$ . Como discutido em [19], em um sistema de coordenadas esféricas temos:

$$ds^2 = e^{\lambda(r)}dt^2 - e^{\xi(r)}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (2.10)$$

onde  $d\Omega^2 = d\theta + \sin^2\theta d\varphi^2$ , e  $\xi(r)$  e  $\lambda(r)$  são duas funções a determinar. Para recuperarmos a relatividade restrita (espaço de Minkowski) em pontos muito distantes da fonte, espera-se que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^\xi = \lim_{r \rightarrow \infty} e^\lambda = 1, \quad (2.11)$$

Para determinarmos as funções que definem o tensor métrico (2.10) utilizamos as equações de campo de Einstein, escritas como

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.12)$$

No vácuo, onde  $T_{\mu\nu} = 0$ , (2.12) essas equações se reduzem para

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (2.13)$$

pois o traço de (2.12) implica em:  $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = R - 2R = -R = 0$ .

O tensor de curvatura de Ricci é definido como:

$$R_{\mu\nu}(\Gamma) \equiv \partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - \partial_\sigma\Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho\Gamma_{\rho\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\rho\Gamma_{\rho\sigma}^\sigma, \quad (2.14)$$

onde as componentes da conexão afim,  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ , são dadas pelos símbolos de Christoffel (conexão de Levi-Civita):

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \equiv \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (2.15)$$

Usando a métrica estática esférica (2.16) e sua inversa:

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} e^{\lambda(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\xi(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}, \quad [g^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} e^{-\lambda(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\xi(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

os símbolos de Christoffel (calculados no Apêndice (B.1)) não nulos e suas derivadas são tais que

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= -\frac{\xi'}{2}, & \Gamma_{tt}^r &= \frac{\lambda'}{2}e^{(\lambda-\xi)}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -re^{-\xi}, \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r \sin^2(\theta)e^{-\xi}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin(\theta)\cos(\theta), & \Gamma_{rt}^r &= \frac{\lambda'}{2}, \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \cot(\theta). \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde a linha denota derivada com respeito à coordenada  $r$ . Portanto, as componentes do tensor de Ricci não nulas são escritas como:

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \frac{\lambda''}{2} + \frac{\lambda'^2}{4} - \frac{\lambda'\xi'}{4} + \frac{\lambda'}{r}, \\ R_{tt} &= \frac{\lambda''}{2} + \frac{\lambda'^2}{4} - \frac{\lambda'\xi'}{4} - \frac{\xi'}{r}, \\ R_{\theta\theta} &= e^{-\xi} \left( 1 + \frac{r}{2}(\lambda' - \xi') \right) - 1, \\ R_{\varphi\varphi} &= R_{\theta\theta} \sin^2\theta. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Logo, se igualarmos as componentes do tensor de Ricci a zero (Eq.(2.13)), obtemos um sistema de equações diferenciais não lineares, acopladas com duas incógnitas. Resolvendo então esse sistema, determinamos explicitamente as funções  $\xi(r)$  e  $\lambda(r)$ :

$$r(R_{rr} - R_{tt}) = \lambda' + \xi' = (\lambda + \xi)' = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda + \xi = \text{constante.} \quad (2.19)$$

Analisando o problema de um objeto massivo *compacto*, podemos supor que, se nos afastarmos a uma longa distância, ( $r$  tendendo ao infinito, como descrito em (2.11)) a curvatura do espaço-tempo tenderá a zero, ou seja

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \xi = \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda = 0. \quad (2.20)$$

Sendo verdadeira essa sentença, percebemos que

$$\lambda + \xi = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\xi, \quad (2.21)$$

Substituindo na expressão do tensor de Ricci ( $R_{\theta\theta}$ ) obtemos

$$R_{\theta\theta} = e^\lambda \left( 1 + \frac{r}{2}(\lambda' - \xi') \right) - 1. \quad (2.22)$$

Igualhando a zero, temos

$$e^\lambda(1 + r\lambda') = 1 \quad \Rightarrow \quad (re^\lambda)' = 1, \quad (2.23)$$

o que implica em

$$e^\lambda = 1 - \frac{k}{r} = e^{-\xi}, \quad (2.24)$$

onde  $k$  é uma constante. Finalmente encontramos as soluções das equações

$$e^\lambda = 1 + \frac{k}{r} \quad \text{e} \quad e^\xi = \left( 1 + \frac{k}{r} \right)^{-1}, \quad (2.25)$$

e podemos comprovar que as expressões de (2.25) satisfazem cada uma das equações  $R_{\mu\nu} = 0$ . Logo, o elemento de linha (2.10) torna-se:

$$ds^2 = \left( 1 + \frac{k}{r} \right) dt^2 - \left( 1 + \frac{k}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (2.26)$$

Dado que a métrica (2.26) descreve um espaço-tempo estático e com simetria esférica, a aplicação de maior importância deste tipo de solução é na representação da geometria do espaço-tempo da região exterior de estrelas, planetas ou sistemas semelhantes. Mas para isso devemos dar uma interpretação consistente da constante  $k$  em termos de algum parâmetro físico. Notando que nesses casos o limite de campo fraco ou limite newtoniano, deverá ser reproduzido pela métrica dada pela Equação (2.10), temos que, no limite em questão devemos ter

$$g_{tt} = -(1 + 2\Phi), \quad g_{rr} = (1 + 2\Phi), \quad (2.27)$$

onde  $\Phi = -M/r$  é o potencial gravitacional newtoniano gerado por uma distribuição de massa  $M$ . Vemos então, que  $k = -2M$ , de modo que a métrica toma a forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.28)$$

A Equação (2.28), que representa a solução exata das equações de campo de Einstein com simetria esférica no vácuo, é a chamada solução de Schwarzschild.

**Horizonte de eventos.** O raio de Schwarzschild  $r_S = 2M$ , apesar de ser localmente perfeitamente regular, funciona como um ponto sem retorno: uma vez que uma partícula de teste se aproxima do centro para além desse raio, já não poderá escapar. Definimos o *horizonte de eventos* como uma superfície, da qual as partículas nunca podem escapar para o infinito.[21] Assim, no modelo Schwarzschild o horizonte de eventos está localizado em  $r = r_S$ .

Apesar de estar localizado em coordenadas radiais fixas, o horizonte de eventos é uma superfície nula, e não uma superfície temporal. Por esse motivo, determina a estrutura causal do espaço-tempo, no sentido de impossibilitar cruzar o horizonte em direção externa ao buraco, ou seja, para  $r$  crescente. Uma vez que, nada pode escapar do horizonte de eventos, é impossível observarmos o centro de um buraco negro, por ser uma região do espaço-tempo separada do infinito. Essas são as chamadas “superfícies atrapadas fechadas”, conceito definido por Roger Penrose em 1965.

## 3 Deflexão da luz

### 3.1 Geodésicas em um espaço-tempo com simetria esférica

Um dos pilares da Relatividade Geral é o princípio da equivalência, que propõe que, na ausência de forças externas, os observadores viajam ao longo de geodésicas da geometria de fundo. As curvas geodésicas são as soluções da equação geodésica, dada por

$$\frac{d^2 x^\mu}{du^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{du} \frac{dx^\beta}{du} = 0, \quad (3.1)$$

onde as componentes da conexão,  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ , na Relatividade Geral são obtidas a partir dos símbolos de Christoffel (2.15), que dependem da métrica  $g_{\mu\nu}$  e de suas derivadas.[22] Contudo, para descrever as órbitas de partículas em um espaço-tempo com simetria esférica representando um objeto compacto, é conveniente explorar também uma análise hamiltoniana. [23]

Partindo da relação entre métrica e distância, o elemento diferencial de linha (distância infinitesimal no espaço-tempo) ao longo de uma curva  $x^\mu(\lambda)$ , parametrizada por  $\lambda$ , ([24]) pode ser escrito na forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu. \quad (3.2)$$

Sendo a métrica (2.28), podemos definir a Lagrangiana  $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ , ou explicitamente[25]

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2(x) \dot{\theta}^2 - r^2(x) \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right]. \quad (3.3)$$

A expressão (2.28) mostra que a geometria não é afetada pelas translações  $t \rightarrow t + \Delta t$ ,  $\varphi \rightarrow \varphi + \Delta\varphi$ . Isto é, as coordenadas  $t$  e  $\varphi$  são variáveis cíclicas de  $\mathcal{L}$ . Logo, os momentos conjugados

$$p_t \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = -E \quad \text{e} \quad p_\varphi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \pm L \quad (L \geq 0), \quad (3.4)$$

são conservados. Essa circunstância permite deduzir imediatamente as principais características dessa dinâmica. A magnitude do quadri-vetor energia-momento é dada pela massa em repouso  $\mu$  da partícula, a partir da seguinte equação

$$g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = -\mu^2. \quad (3.5)$$

Pelo princípio de equivalência, as partículas seguem o mesmo caminho, independente da massa. Portanto, o que é relevante para o movimento das partículas não são a energia e o momento angular em si, mas suas razões, ou seja,

$$E = \frac{\bar{E}}{\mu} \quad \text{e} \quad L = \frac{\bar{L}}{\mu}, \quad (3.6)$$

correspondentes à energia e momento angular por unidade de massa em repouso, respectivamente.

Desta representação verifica-se que os momentos associados às variáveis  $t$ ,  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  independem da massa em repouso, e tomam a forma:

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \dot{t} \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \\ p_r &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = -\dot{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \\ p_\theta &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = -r^2 \dot{\theta}, \\ p_\varphi &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

O hamiltoniano é definido segundo a equação

$$H = p_t \dot{t} + p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\varphi \dot{\varphi} - \mathcal{L}. \quad (3.8)$$

Substituindo os momentos (3.7) e a lagrangiana (3.3) observamos que, devido à ausência de termos potenciais, o hamiltoniano é dado por

$$H = \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2(x) \dot{\theta}^2 - r^2(x) \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right] = \mathcal{L}. \quad (3.9)$$

coincidindo com a lagrangiana e pode, portanto, ser escrito como:

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(x) p_\mu p_\nu. \quad (3.10)$$

Logo, calculando as equações de Hamilton, temos

$$\dot{x}^\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} = g^{\mu\nu} p_\nu, \quad (3.11)$$

$$\dot{p}_\mu = \frac{\partial H}{\partial x^\mu} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu g^{\alpha\beta}) p_\alpha p_\beta \Rightarrow \dot{p}_t = \dot{p}_\varphi = 0. \quad (3.12)$$

De onde concluímos que  $p_t$  e  $p_\varphi$  são constantes do movimento, que implica dizer que existe uma simetria temporal e outra simetria na direção azimutal, conservando a energia total ( $E$ ) e o momento angular ( $L$ ) do sistema, conforme o obtido em (3.4). Temos as expressões (3.7) que

$$p_t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right) \equiv E, \quad (3.13)$$

$$p_\varphi = \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right) r^2(x) \sin^2 \theta \equiv L. \quad (3.14)$$

Analisando o hamiltoniano (3.10) ficamos com

$$\begin{aligned} 2H &= e^{-\lambda(r)} p_t^2 - e^{-\xi(r)} p_r^2 - \frac{p_\theta^2}{r^2(x)} - \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\dot{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\right)^2 - \frac{p_\theta^2}{r^2(x)} - \frac{L^2}{r^2 \sin^2 \theta} \\ &= \frac{E^2}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{L^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Na última igualdade fixamos  $\theta = \pi/2$  ( $\Rightarrow p_\theta = 0$ ). Não há perda de generalidade nessa escolha, pois sendo o espaço-tempo isotrópico (radialmente simétrico), como mostramos, o momento angular é conservado, o que garante que o movimento está confinado a um plano. Escolhemos então, nosso sistema de coordenadas orientado de modo tal que a órbita e do plano equatorial,  $\theta = \pi/2$ .

Desde que  $H \neq 0$  redefinimos o parâmetro afim  $\lambda \rightarrow \lambda/\sqrt{2H}$ , de modo que apenas o sinal de  $H$  seja fisicamente relevante. Este sinal permite classificar as geodésicas em três famílias: aquelas com  $H > 0$  (tipo espaço), aquelas com  $H < 0$  (tipo tempo) e aquelas com  $H = 0$  (nulo), esclarecendo o significado desta quantidade conservada. Denotando  $k \equiv 2H$  (com  $k = 1, 0, -1$  correspondendo a geodésicas espaciais, nulas e temporais, respectivamente), assim reescrevemos (3.15) como

$$\dot{r}^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} - k\right). \quad (3.16)$$

Nesta expressão identificamos o termo  $\dot{r}^2 = \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2$  como a energia cinética de uma partícula de teste, vemos que (3.16) é semelhante à equação da energia de uma partícula de massa unitária que se move em um potencial efetivo unidimensional, cuja dinâmica é

$$\dot{r}^2 = E^2 - V_{eff}(r), \quad (3.17)$$

onde o potencial efetivo tem a forma

$$V_{eff} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} - k\right). \quad (3.18)$$

Perceba que para  $k = -1$ , o potencial efetivo para uma partícula que é igual ao potencial efetivo Newtoniano:

$$V_{eff} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + 1\right). \quad (\text{partícula}) \quad (3.19)$$

e para o fóton usamos  $k = 0$

$$V_{eff} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2}\right). \quad (\text{fóton}) \quad (3.20)$$

A vantagem desta formulação com o potencial efetivo é que podemos usar as mesmas técnicas que descrevem as órbitas de partículas na mecânica clássica. O momento angular e a mudança de coordenadas de tempo são encontrados a partir das equações (3.13) e (3.14). A grande mudança fornecida pela Relatividade Geral na Equação (3.19) é que, além do “termo newtoniano”  $\left(-\frac{2M}{r}\right)$ , e do “termo da barreira centrífuga”  $\left(\frac{L^2}{r^2}\right)$ , temos um termo de barreira centrífuga  $\left(-\frac{ML^2}{r^3}\right)$ , que influencia valores pequenos de  $r$ .

Comparemos os potenciais efetivos da Mecânica Clássica e da Relatividade Geral ilustrados na Figura 2.

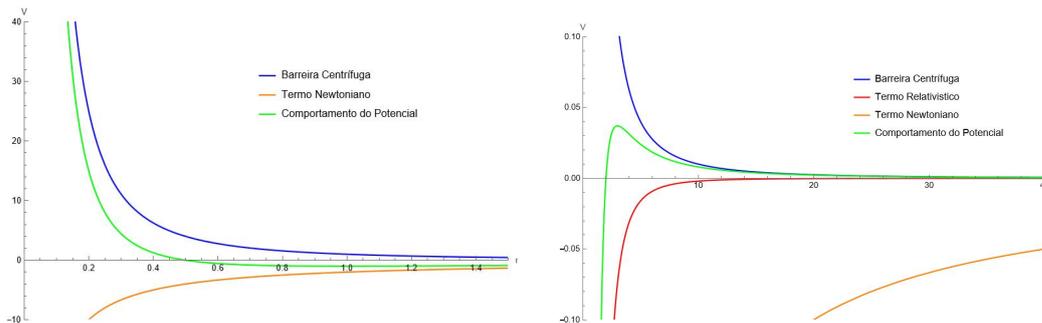


Figura 2 – Comportamento do potencial efetivo  $V(r)$  definido com termo Newtoniano (lado esquerdo) e com termo Relativístico (lado direito)

Para o modelo relativístico o potencial efetivo de Schwarzschild assemelha a um “poço” ou depressão, que ocorre para valores de  $r$  muito pequenos (tendendo ao raio de Schwarzschild). Na prática, o efeito desse poço do potencial, permite à partícula chegar em  $r = 0$ , se a energia for suficientemente grande ou o momento angular for pequeno. Esse potencial efetivo desempenha um papel importante na determinação das órbitas circulares, descritas no próximo item.

## 3.2 Órbitas Circulares

Analisando a trajetória de uma partícula de teste sem rotação orbitando um objeto massivo central, podemos obter os raios máximos e mínimos nos quais a partícula consegue sustentar uma órbita circular *estável*. Tomemos como exemplo um fóton que segue uma geodésica circular, ou seja, seu movimento ocorre em um caminho que forma um círculo no espaço-tempo curvo. Essa curvatura surge devido à presença de massa ou energia, resultando na deformação do espaço-tempo ao redor de objetos como planetas, estrelas ou buracos negros massivos.

Para compreender esse fenômeno no contexto do buraco negro de Schwarzschild, derivamos o potencial efetivo (3.18) com relação ao raio  $r$  para obter a força efetiva, cuja forma é

$$V'_{eff}(r) = \frac{2M}{r^2} \left( \frac{L^2}{r^2} - k \right) - \frac{2L^2}{r^3} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right), \quad (3.21)$$

Logo, a condição de equilíbrio,  $V'_{eff}(r) = 0$ , resulta no vínculo

$$-kr^2M = L^2(r - 3M). \quad (3.22)$$

Como as partículas físicas só podem percorrer geodésicas temporais ou nulas ( $k = -1$  ou  $k = 0$ , respectivamente), a Equação (3.22) só pode ser satisfeita se  $r \geq 3M$ . O máximo do potencial corresponde então a um raio crítico, que define as órbitas de equilíbrio.

**Esfera de fótons.** No caso dos fótons ( $k = 0$ ), a órbita de equilíbrio define uma esfera de raio <sup>1</sup>

$$r_m = 3M. \quad (3.23)$$

Para geodésicas tipo tempo ( $k = -1$ ), substituindo na equação (3.22) obtemos

$$Mr_m^2 - L^2r_m + 3ML^2 = 0, \quad (3.24)$$

de onde:

$$r_m = \frac{L^2}{2M} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \left( \frac{\sqrt{12}M}{L} \right)^2} \right], \quad (3.25)$$

Para partículas massivas, o movimento circular corresponde a dois tipos de órbitas: estáveis e instáveis. A solução (3.25) leva implícita a condição

$$L \geq \sqrt{12}M. \quad (3.26)$$

requerida para órbitas estáveis (para valores de  $L$  menores ocorre uma queda para o centro de atração). Essas duas órbitas circulares ficam mais próximas quanto menor for  $L$ , coincidindo quando o discriminante em (3.25) se anula, em  $L = \sqrt{12}M$ .

**ISCO.** Substituindo (3.26) em (3.25), obtemos o raio da menor órbita circular estável, dado por:

$$r_{ISCO} = 6M. \quad (3.27)$$

Uma vez que esta é a última superfície (raio) em que uma partícula maciça pode permanecer estável, é denominada de “Órbita Circular Estável mais Interna” (*Innermost Stable Circular Orbit — ISCO*). Essa constante desempenha um papel relevante na descrição dos discos de acreção de buracos negros.

### 3.3 Parâmetro de impacto

Inicialmente, precisamos compreender com clareza o desvio sofrido por um fóton que está orbitando em torno de um buraco negro de Schwarzschild. Para esse propósito consideramos um fóton que se origina no infinito assintótico sendo desviado pelo buraco negro em um raio específico  $r_0$ , onde  $r_0 > r_m$  (o raio da esfera de fótons).

Para descrever esse fenômeno, recorreremos às equações geodésicas que derivamos anteriormente, (3.17), onde o raio mínimo é dado pela equação  $\dot{r} = 0$ . Aplicando a expressão do potencial de Schwarzschild da Equação (3.18), no caso de geodésicas nulas ( $k = 0$ ), obtemos a solução desejada:

$$E^2 = \left( \frac{L^2}{r_0^2} \right) \left( 1 - \frac{2M}{r_0} \right), \quad (3.28)$$

<sup>1</sup> Uma perturbação sobre esses fótons os levará a sofrer uma queda para a singularidade ou um afastamento para o infinito.

ou

$$\frac{E}{L} = \frac{1}{r_0} \sqrt{1 - \frac{2M}{r_0}}. \quad (3.29)$$

onde  $r_0$  representa a distância mínima que a partícula ou fóton se aproximar do centro de atração gravitacional.

**Parâmetro de Impacto.** Geodésicas nulas possuem energia  $E$  e momento angular  $L$  conservados, sendo apenas sua razão  $b \equiv L/E$  relevante para a trajetória. Esse quociente é o chamado “parâmetro de impacto”. No caso de Schwarzschild, para geodésicas nulas que atingem o infinito,  $b$  toma a forma [26] :

$$b = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_0}}}. \quad (3.30)$$

Como vimos, a esfera de fótons do buraco negro de Schwarzschild tem um raio  $r_m = 3M$ . Substituindo esse valor em (3.30) obtemos o parâmetro de impacto limite em que um fóton consegue escapar de ser capturado pela gravidade do buraco negro:

$$b_c = 3\sqrt{3}M \approx 5,19615M. \quad (3.31)$$

A interpretação física para um fóton ser capturado pelo espaço-tempo curvo é inversamente proporcional ao potencial efetivo ( $V_{eff} = \frac{1}{b^2}$ ), determinado na seção anterior.

Essa relação do potencial efetivo com o raio é ilustrada na Figura 3, onde mostramos as órbitas correspondentes a três diferentes valores do parâmetro de impacto  $b$  (super-crítico, crítico e sub-crítico). Para entender as características dos três tipos de órbitas que os fótons podem percorrer na geometria de Schwarzschild. Tem-se que a única órbita circular possível para o fóton é  $r_m = 3M$ , obtida em (3.23).

### 3.4 Ângulo de deflexão

Para obtermos o ângulo de deflexão da luz, suponhamos novamente um fóton que, vindo de uma distância infinita, passe próximo do buraco negro, a uma distância mínima  $r_0$  e continue seu percurso até o infinito. A ideia aqui é pressupor raios de luz paralelos, indo do observador até o buraco negro.

Os fótons com parâmetro de impacto por baixo do raio da esfera de fótons sofrem uma deflexão mínima causada pela força gravitacional sendo absorvidos. Porém, se os fótons viajarem próximos ao parâmetro de impacto crítico  $b_c$  obtido em (3.31), ocorrerá uma deflexão máxima, beirando a esfera de fótons, antes de serem refletidos para o infinito. Na Figura 4, apresentamos o comportamento dos fótons em cada estado, relacionado ao potencial descrito na Figura 3.

Em função do parâmetro de impacto, o comportamento orbital de um fóton se resume na seguinte estrutura:

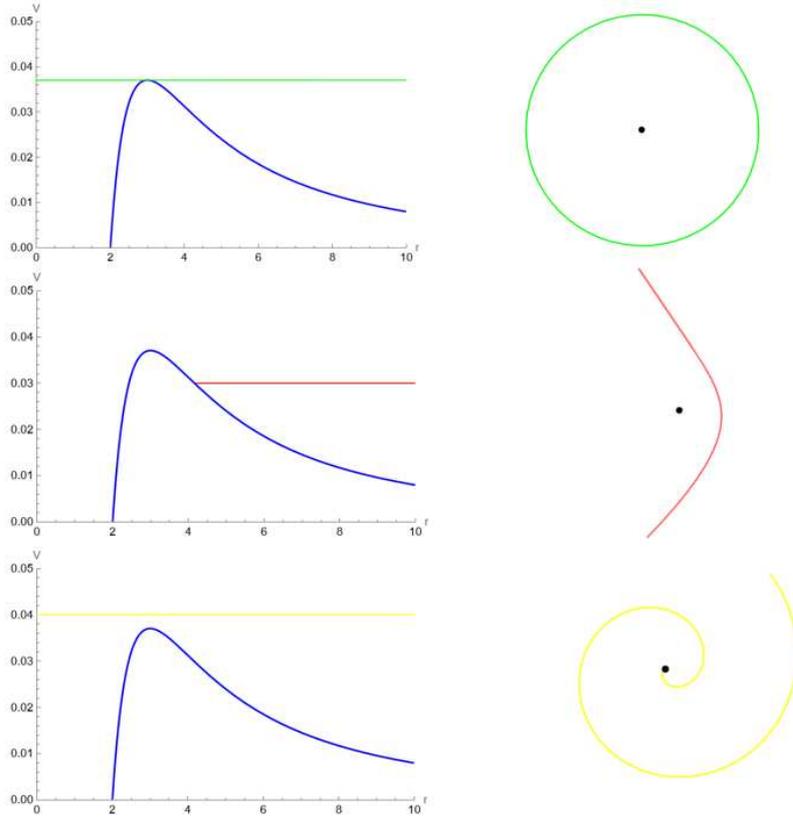


Figura 3 – Três tipos de órbitas de raios de luz na geometria de Schwarzschild, correspondentes a diferentes valores de  $b$ . De cima para baixo: uma órbita circular, uma órbita de dispersão e uma órbita de mergulho. O potencial e a sua relação com  $b$  são apresentados do lado esquerdo.

1. Se  $b < 3\sqrt{3}M$ : o fóton cai para  $r_s = 2M$  e é absorvido pelo buraco negro.
2. Se  $b > 3\sqrt{3}M$ : o fóton é desviado em um ângulo  $\varphi$  e será defletido para fora da barreira potencial  $r = \infty$ . Nesse evento temos duas possibilidades:
  - $b \gg 3\sqrt{3}M$ . Então, a órbita é quase uma linha reta com uma pequena deflexão de um ângulo ( $\alpha = \frac{4M}{r}$ ) onde  $r$  é a distância de maior aproximação. Este é o caso habitualmente examinado na teoria das lentes gravitacionais fracas, quando o parâmetro de impacto é muito maior que o raio de Schwarzschild da lente;
  - $0 < b - 3\sqrt{3}M < M$ . Nesse intervalo a partícula circulará várias vezes ficando em órbita estável com  $r \approx 3M$  antes de regressar para  $r \rightarrow \infty$ .

Para compreender este fenômeno, determinamos a deflexão sofrida por um raio de luz pela atração de um objeto massivo.

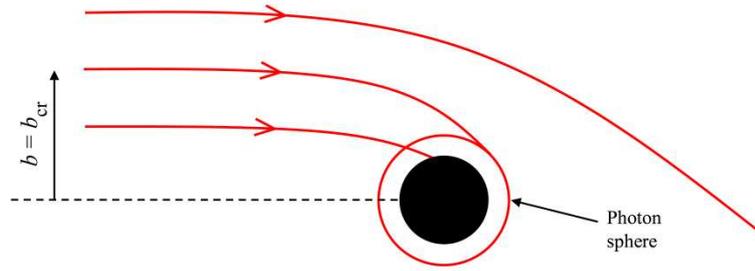


Figura 4 – Deflexão na trajetória de fótons próximos a um buraco negro de Schwarzschild. [3]

Partindo da Equação (3.17), multiplicamos por  $\frac{1}{L^2}$  para obter:

$$\frac{1}{L^2} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = \frac{E^2}{L^2} - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left( \frac{L^2}{r^2} \right) \left( \frac{1}{L^2} \right). \quad (3.32)$$

Reescrevendo os valores do parâmetro de impacto ( $b^2 = \frac{L^2}{E^2}$ ) como

$$\frac{1}{b^2} = \frac{1}{L^2} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left( \frac{1}{r^2} \right). \quad (3.33)$$

Relacionamos o raio com o ângulo, isolando as derivadas das equações (3.33) e (3.14), obtemos que:

$$\frac{dr}{d\lambda} = L \sqrt{\frac{1}{b^2} - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left( \frac{1}{r^2} \right)} \quad \text{e} \quad \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2}, \quad (3.34)$$

em que o quociente entre  $d\varphi/d\lambda$  e  $dr/d\lambda$  nos fornece uma relação entre o ângulo e o raio:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{b^2} - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left( \frac{1}{r^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.35)$$

A Equação (3.35) descreve o comportamento da deflexão da luz em torno de buracos negros de Schwarzschild, a taxa de mudança do ângulo está relacionada a distância radial ( $r$ ) em relação ao centro do buraco negro e o parâmetro de impacto ( $b$ ) determina a distância mínima de aproximação da luz.

## 4 Limites de campo fraco e campo forte e equação da lente gravitacional

As equações da deflexão da luz obtidas na seção anterior, podemos descrever a deflexão nos limites de campo fraco e forte. Os limites do campo são importantes para o estudo que auxilia observações astronômicas, onde é possível obter a curvatura da luz causada por campos gravitacionais fracos e fortes.[27] Se a luz passar por uma região muito distante da fonte que gerou o campo gravitacional, a deflexão angular é pequena e chamamos este regime de limite de campo fraco. Já o limite de campo forte, concentra a atenção na região em torno de um objeto muito massivo, como um buraco negro, onde os efeitos da gravidade são extremamente intensos. Para o nosso trabalho, interessa o limite de campo forte. Mas, por completeza, descreveremos ambos os casos.

### 4.1 Limite de campo fraco

Para este caso abordaremos uma análise da deflexão da luz causada pelo Sol Este efeito é importante, pois foi um dos testes experimentais da Relatividade Geral sobre o estudo ótico da astronomia, comprovando a deflexão da luz causada por galáxias e aglomerados. [4]

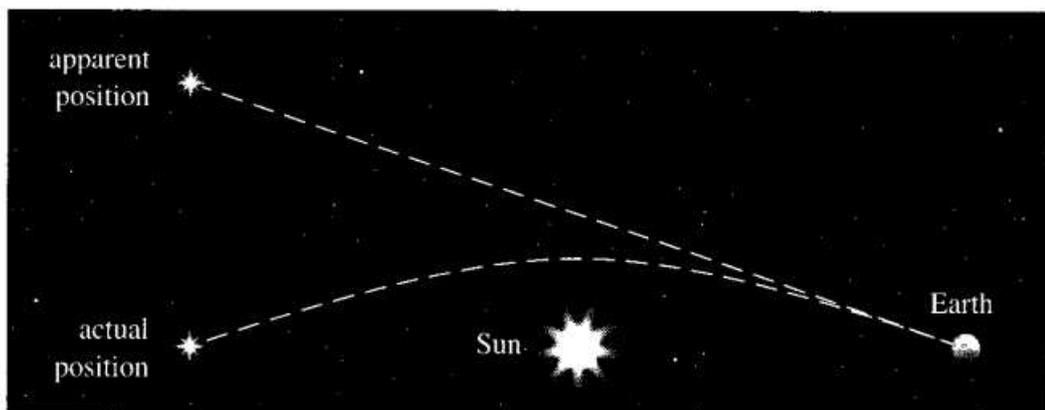


Figura 5 – Estrela cuja imagem é desviada pela curvatura do espaço-tempo causada pelo Sol[4]

Suponhamos que exista uma estrela bem distante do Sol, mas com um parâmetro de impacto próximo ao parâmetro crítico  $b_c$  (3.31). Para esse problema precisamos conhecer a variação  $\Delta\varphi = \varphi_{+\infty} - \varphi_{-\infty}$ , onde  $\varphi$  é a coordenada angular de um raio de luz na geometria de Schwarzschild, que percorre uma trajetória como ilustrado na Figura 5. Para o fóton

não ser curvado, o parâmetro de impacto  $b$  deve ser muito maior do que o parâmetro crítico  $b_c$  de (3.31).

O fóton se aproxima do centro de atração até o ponto de retorno em  $r = r_m$ , após o qual segue para o infinito, emergindo desviado em um ângulo  $\alpha$ . Esse ângulo de deflexão é  $\Delta\varphi - \pi$ . Partindo da Equação (3.35), temos que:

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{\frac{r^4}{b^2} - r(r - 2M)}}. \quad (4.1)$$

Tomamos por conveniência a mudança de variável  $u = \frac{1}{r}$  e o que resulta em:

$$\Delta\varphi = 2 \int_0^{1/r_m} \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - u^2 + 2Mu^3}}. \quad (4.2)$$

Substituindo  $b$  com a Equação (3.30) é expressa como:

$$\Delta\varphi = 2 \int_0^{1/r_m} \frac{du}{\sqrt{r^{-2} - 2Mr^{-3} - u^2 + 2Mu}}. \quad (4.3)$$

Diferenciando essa ultima expressão com relação a  $M$ , e determinando o resultado em  $M = 0$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial M} \right|_{M=0} &= 2 \int_0^{1/r_m} \frac{(r^{-3} - u^3)du}{(r^{-2} - 2Mr^{-3} - u^2 + 2Mu)^{3/2}} \Big|_{M=0} \\ &= 2 \int_0^{1/b} \frac{b^{-3} - u^3}{(b^{-2} - u^2)^{3/2}} du \\ &= \frac{4}{b}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Logo, em primeira ordem em  $M$ , a deflexão da luz é dada por:

$$\alpha = \Delta\varphi - \pi \approx M \left. \frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial M} \right|_{M=0} = \frac{4M}{b}. \quad (4.5)$$

Assim, a curvatura é tão fraca, que só se observa quando os fótons passam praticamente pela superfície da estrela. [28]

Usando a fórmula (4.5) em unidades do Sistema Internacional e substituindo os valores da massa e o raio do Sol ( $M_{\odot} = 1.98 \times 10^{33} g$ ,  $R_{\odot} = 6.96 \times 10^{10} cm$ ), vemos que o ângulo de deflexão devido ao Sol é:

$$\alpha_{\odot} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \approx 8,478 \times 10^{-6} rad = 1,749''. \quad (4.6)$$

Essa expressão foi fundamental para a confirmação observacional da deflexão de luz, causada pelo Sol. Confirmada a partir de um eclipse solar em 1919, na cidade de Sobral e na ilha de Porto Príncipe, conforme previsto por Einstein[29].

## 4.2 Limite de campo forte

A resolução equação no limite de campo forte, nosso principal interesse, adotaremos a métrica estática e esfericamente simétrica (2.3), escrita na forma:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + C(r)(d\theta^2 + \sin^2 d\varphi), \quad (4.7)$$

Na Seção 3.1 discutimos as geodésicas em um espaço-tempo com simetria esférica. Vimos a relação da energia (3.13) e o momento angular (3.14), e determinamos a relação de  $\dot{r}$  (3.17) com o potencial (3.18). Em termos das funções  $A$ ,  $B$  e  $C$ , essas expressões, tem a forma:

$$\dot{r} = \frac{E^2}{A(r)B(r)} - \frac{L^2}{B(r)C(r)}, \quad (4.8)$$

$$\text{e } V_{eff} = \frac{L^2 P(r)}{B(r)C(r)} \quad \text{com} \quad P(r) = \frac{C(r)}{A(r)b^2} - 1. \quad (4.9)$$

O movimento do fóton é permitido na região  $V_{eff}(r) \geq 0$ . Definindo  $D(r)$  como:

$$D(r) = \frac{C'(r)}{C(r)} - \frac{A'(r)}{A(r)}, \quad (4.10)$$

onde  $'$  denota a derivada em relação à coordenada radial  $r$ , assumimos que existe ao menos uma solução positiva de  $D(r) = 0$ . Chamamos a solução mais positiva obtida desta equação como o raio da esfera de fótons,  $r_m$ .

Da mesma forma, relacionamos (4.8) com a substituição  $\dot{r} = \frac{dr}{d\lambda} / \frac{d\varphi}{d\lambda}$ , obtemos

$$\left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{P(r)C(r)}{B(r)}, \quad (4.11)$$

Quando o fóton vindo do infinito se movimentava próximo a um objeto gravitacional, após atingir a distância mais próxima  $r = r_0$ , é espalhado e retorna para o infinito. No caso de espalhamento, a condição  $r_0 > r_m$  deve ser satisfeita. Em  $r = r_0$  corresponde a maior raiz positiva de  $P(r) = 0$ , e que  $B$  e  $C$  não divergem para  $r \geq r_0$ . Com isso o potencial se anula em  $r = r_0$ . Assim, de (4.8), temos:

$$\frac{A_0}{C_0} = \frac{E^2}{L^2} = \frac{1}{b^2}, \quad (4.12)$$

onde o sub-índice zero indica as quantidades avaliadas em  $r = r_0$ . Sem perda de generalidade, consideramos o parâmetro de impacto  $b$  positivo, desde que consideremos apenas um raio de luz. Reescrevemos a equação (4.12) como

$$P(r) \equiv \frac{A_0 C}{A C_0} - 1, \quad (4.13)$$

para o parâmetro de impacto, definido segundo

$$b_c(r_m) = \lim_{r_0 \rightarrow r_m} \sqrt{\frac{C_0}{A_0}}. \quad (4.14)$$

indicando ( $r_0 \rightarrow r_m$  ou  $b \rightarrow b_c$ ) como o limite de deflexão forte. Com isso, o ângulo de deflexão pode ser obtido como função de  $r_0$ , e sua forma é dada por

$$\alpha(r_0) = I(r_0) - \pi, \quad (4.15)$$

onde

$$I(r_0) = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{\frac{P(r)C(r)}{B(r)}}}. \quad (4.16)$$

Aplicamos a transformação de coordenada:

$$z = 1 - \frac{r_0}{r}, \quad (4.17)$$

a nossa integral, toma a forma

$$I(r_0) = 2 \int_0^1 f(z, r_0) dz, \quad (4.18)$$

onde  $f(z, r_0)$  é dada por

$$f(z, r_0) \equiv \frac{2r_0}{\sqrt{G(z, r_0)}}, \quad (4.19)$$

com  $G(z, r_0)$  definida segundo

$$G(z, r_0) \equiv P \frac{C}{B} (1 - z)^4. \quad (4.20)$$

Expandindo a função (4.13) em série de potências de  $z$  temos

$$X = X_0 + X'_0 r_0 z + \left( \frac{1}{2} X''_0 r_0^2 + X'_0 r_0 \right) z^2 + O(z^3), \quad (4.21)$$

e

$$\frac{1}{X} = \frac{1}{X_0} - \frac{X'_0 r_0}{X_0^2} z + \frac{r_0}{X_0^3} \left( -\frac{1}{2} X_0 X''_0 r_0 + X_0'^2 r_0 - X_0 X'_0 \right) z^2 + O(z^3). \quad (4.22)$$

A expansão de  $P(r)$  é dada como:

$$P(r) = D_0 r_0 z + \left[ \frac{r_0}{2} \left( \frac{C''_0}{C_0} - \frac{A''_0}{A_0} \right) + \left( 1 - \frac{A'_0 r_0}{A_0} \right) D_0 \right] r_0 z^2 + O(z^3). \quad (4.23)$$

Das Equações (4.21) e (4.23), obtemos a expansão de  $G(z, r_0)$  em potências de  $z$  da seguinte forma

$$G(z, r_0) = c_1(r_0) z + c_2(r_0) z^2, \quad (4.24)$$

em que

$$c_1(r_0) = \frac{C_0 D_0 r_0}{B_0}, \quad (4.25)$$

e

$$c_2(r_0) = \frac{C_0 r_0}{B_0} \left\{ D_0 \left[ \left( D_0 - \frac{B'_0}{B_0} \right) r_0 - 3 \right] + \frac{r_0}{2} \left( \frac{C''_0}{C_0} - \frac{A''_0}{A_0} \right) \right\}. \quad (4.26)$$

No limite de campo forte  $r_0 \rightarrow r_m$ , de  $D_m = D(r_m) = 0$ , temos:

$$c_1(r_m) = 0 \quad \text{e} \quad c_2(r_m) = \frac{C_m r_m^2}{2B_m} D'_m, \quad (4.27)$$

onde

$$D'_m = \frac{C''_m}{C_m} - \frac{A''_m}{A_m}, \quad (4.28)$$

e, portanto,

$$G_m(z, r_m) = c_2(r_m)z^2 + O(z^3). \quad (4.29)$$

Com isso mostramos que a divergência de  $f(z, r_0)$  está associada a um fator  $z^{-1}$ , em que a integral  $I(r_0)$  diverge logaritmicamente no limite de deflexão forte  $r_0 \rightarrow r_m$ .  $\square$

Para analisar esta divergência, separamos a integral  $I(r_0)$  em uma parte divergente  $I_D(r_0)$  e uma parte regular  $I_R(r_0)$ . Definimos a parte divergente  $I_D(r_0)$  como

$$I_D(r_0) = \int_0^1 f_D(z, r_0) dz \quad \text{com} \quad f_D(z, r_0) = \frac{2r_0}{\sqrt{c_1(r_0)z + c_2(r_0)z^2}}. \quad (4.30)$$

Podemos integrar  $I_D(r_0)$ , obtendo

$$I_D(r_0) = \frac{4r_0}{\sqrt{c_2(r_0)}} \log \frac{\sqrt{c_2(r_0)} + \sqrt{c_1(r_0) + c_2(r_0)}}{\sqrt{c_1(r_0)}}, \quad (4.31)$$

Uma vez que, as expansões de  $c_1(r_0)$  e  $b(r_0)$  em potências de  $r_0 - r_m$  são dadas por

$$c_1(r_0) = \frac{C_m r_m D'_m}{B_m} (r_0 - r_m) + O(r_0 - r_m)^2, \quad (4.32)$$

e

$$b(r_0) = b_c(r_m) + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{C_m}{A_m}} D'_m (r_0 - r_m)^2 + O(r_0 - r_m)^3, \quad (4.33)$$

o coeficiente  $c_1(r_0)$  no limite de deflexão forte  $r_0 \rightarrow r_m$  é descrito por

$$\lim_{r_0 \rightarrow r_m} c_1(r_0) = \lim_{b \rightarrow b_c} \frac{2C_m r_m \sqrt{D'_m}}{B_m} \left( \frac{b}{b_c} - 1 \right)^{1/2}. \quad (4.34)$$

Assim, obtemos a parte divergente de  $I_D(b)$  no limite de deflexão forte  $b \rightarrow b_c$ , é dada da seguinte maneira:

$$I_D(r_0) = -\frac{r_m}{\sqrt{c_2(r_m)}} \log \left( \frac{b}{b_c} - 1 \right) + \frac{r_m}{\sqrt{c_2(r_m)}} \log r_m^2 D'_m + O[(b - b_c) \log(b - b_c)]. \quad (4.35)$$

Definindo agora a parte regular como:

$$I_R(r_0) \equiv \int_0^1 f_R(z, r_0) dz \quad \text{onde} \quad f_R(z, r_0) = f(z, r_0) - f_D(z, r_0), \quad (4.36)$$

Em que  $I(r_0) = I_D(r_0) + I_R(r_0)$ . Expandindo  $I_R(r_0)$  em potências de  $r_0 - r_m$  e concentrando no termo principal  $I_R(r_m)$ , visto que estamos interessados na parte regular  $I_R$  no limite de deflexão forte  $r_0 \rightarrow r_m$  ou  $b \rightarrow b_c$ , deve-se integrar analítica ou numericamente a parte regular, ou seja

$$I_R(r_0) = \int_0^1 f_R(z, r_m) dz + O[(r_0 - r_m) \log(r_0 - r_m)], \quad (4.37)$$

ou

$$I_R(b) = \int_0^1 f_R(z, b_c) dz + O[(b - b_c) \log(b - b_c)]. \quad (4.38)$$

O ângulo de deflexão no limite de campo forte é dado por:

$$\alpha(b) = -\bar{a} \log\left(\frac{b}{b_c} - 1\right) + \bar{b} + O[(b - b_c) \log(b - b_c)], \quad (4.39)$$

a qual  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  são

$$\bar{a} = \sqrt{\frac{2B_m A_m}{C_m'' A_m - C_m A_m''}}. \quad (4.40)$$

e

$$\bar{b} = \bar{a} \log\left[r_m^2 \left(\frac{C_m''}{C_m} - \frac{A_m''}{A_m}\right)\right] + I_R - \pi. \quad (4.41)$$

### 4.3 Equação da lente e seus observáveis

Quando um fóton se aproxima de um valor crítico em seu parâmetro de impacto  $b$ , sua trajetória se aproxima a órbitas circulares, podendo realizar múltiplos *loops*. Isto produz uma série de imagens, chamadas *imagens relativísticas*. Utilizamos a equação da lente para interpretar as imagens que vemos deformadas pela gravidade. Dessa maneira, analisamos o evento em três fatores: a fonte de luz, a lente (uma espécie de “curvador” de luz), e a posição do observador.

Assumiremos que tanto a fonte quanto a lente estão longe o suficiente de outros objetos muito massivos (buracos negros, por exemplo) para podermos considerar os efeitos gravitacionais como se estivéssemos em um espaço plano. Também, para fins didáticos, supomos que tudo está muito bem alinhado, nos permitindo resolver o problema em um plano específico.

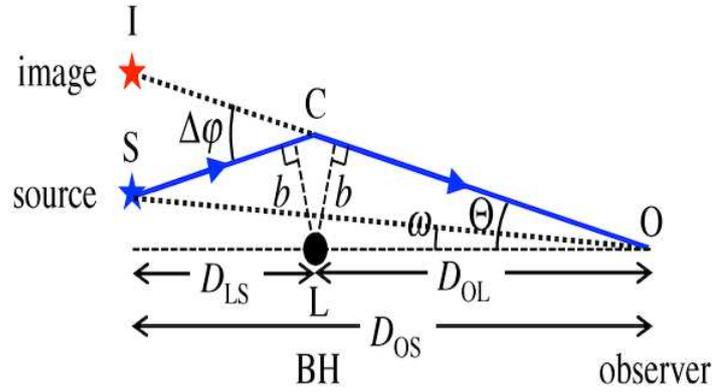


Figura 6 – Diagrama de deflexão angular da luz [5]

Nessa configuração, a Figura 6 representa a deflexão da luz. Nela temos a fonte (S), a lente (L), o observador (O) e a imagem (I). [30] A equação da lente pode ser escrita utilizando relações trigonométricas e tem a forma

$$\tan \omega = \tan \Theta - \frac{D_{LS}}{D_{OS}} [\tan(\varphi - \Theta) + \tan(\Theta)]. \quad (4.42)$$

onde  $\omega$  é a posição angular da fonte,  $\Theta$  a posição angular da imagem,  $D_{LS}$  é a distância entre a lente e a fonte,  $D_{OS}$  é a distância entre o observador e a fonte e  $\varphi$  é o ângulo de deflexão. Da Figura 6 também observamos que o parâmetro de impacto tem a forma  $b = \sin \theta D_{OL}$ , onde acontece a mudança de direção, provocando alteração da trajetória original da luz causada pelo campo gravitacional. Se  $\varphi$  e  $\Theta$  forem menores que 1, podemos considerar a aproximação de ângulos extremamente pequenos. Também delimitamos as distâncias entre a lente e a fonte ( $D_{LS}$ ) e a distância entre o observador e a fonte ( $D_{OS}$ ), para assim, expressamos a equação da lente da seguinte forma

$$\omega = \Theta - \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \Delta\varphi_n. \quad (4.43)$$

A equação (4.43) descreve a curvatura da luz causada pela gravidade de objetos massivos, e nos ajuda a relacionar os ângulos e distâncias envolvidos. Considerando que

$$\Delta\varphi_n \equiv \varphi(\theta) - 2\pi n, \quad (4.44)$$

é o menor deslocamento do ângulo de deflexão quando subtraímos todos os *loops* percorridos pelo fóton. Essa redução é possível quando fazemos uma aproximação para pequenos ângulos, ou seja,  $\theta, \omega, \alpha \ll 1$ .

## 4.4 Posição das imagens

Quando olhamos para uma lente gravitacional, podemos relacionar o desvio da luz com a maneira na qual a lente está posicionada em relação a nós (observador). Suponhamos

que a luz venha de uma estrela distante até nós[7]. Se medirmos o ângulo entre a lente (o objeto massivo) e a estrela (fonte), esse ângulo é  $\Theta$ ; e a distância entre o observador e a lente,  $D_{OL}$ , então podemos usar a relação entre os parâmetros:

$$b \simeq \Theta D_{OL}. \quad (4.45)$$

Da equação (4.39) estimamos  $\Delta\varphi(\Theta)$ . Reescrevendo a Equação do angulo da deflexão em relação a o angulo do observador temos:

$$\Delta\varphi(\Theta) = -\bar{a} \log \left( \frac{D_{OL}\Theta}{b_c} - 1 \right) + \bar{b}. \quad (4.46)$$

Expandimos  $\Delta\varphi(\Theta)$ , próximo de  $\Theta = \Theta_n^0$ , onde  $\Delta\varphi(\Theta_n^0) = 2n\pi$ . deste modo, obtemos:

$$\Delta\varphi_n = \left. \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\Theta} \right|_{\Theta=\Theta_n^0} (\Theta - \Theta_n^0). \quad (4.47)$$

Substituindo  $\Delta\varphi(\Theta_n^0) = 2n\pi$  em (4.46) temos:

$$2n\pi = -\bar{a} \log \left( \frac{D_{OL}\Theta}{b_c} - 1 \right) + \bar{b}, \quad (4.48)$$

$$\Theta = \frac{b_c}{D_{OL}} \left( 1 + e^{\frac{\bar{b}-2n\pi}{\bar{a}}} \right), \quad (4.49)$$

$$\Theta_n^0 = \frac{b_c}{D_{OL}} (1 + e_n) \quad \text{onde} \quad e_n = e^{\frac{(\bar{b}-2n\pi)}{\bar{a}}}. \quad (4.50)$$

Substituindo (4.46) e (4.50) em (4.47), o que resulta em:

$$\Delta\varphi_n = -\frac{\bar{a}D_{OL}}{b_c e_n} (\Theta_n - \Theta_n^0). \quad (4.51)$$

Finalmente, substituindo (4.51) na equação de lente (4.43), teremos a expressão da enésima posição da imagem [31], ou seja:

$$\Theta \simeq \Theta_n^0 + \frac{b_c e_n}{\bar{a}} \frac{D_{OS}}{D_{OL} D_{LS}} (\omega - \Theta_n^0). \quad (4.52)$$

sendo válida tanto para as imagens de um lado da fonte quanto do outro. Para avaliarmos esse efeito consideramos  $\omega$  negativo. Para o caso dos anéis de Einstein, onde  $\omega = 0$  temos:

$$\theta_n = \theta_n^0 - \frac{b_c e_n D_{OS}}{\bar{a} D_{LS} D_{OL}} (\theta_n^0). \quad (4.53)$$

fornecendo assim as posições das imagens relativísticas em função dos coeficientes  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  e  $b_c$ .

## 5 Aplicações

Neste capítulo, após a apresentação do limite de campo forte em espaços esfericamente simétricos, vamos apresentar aplicações considerando dois casos bem conhecidos. Para isso, iremos reproduzir os resultados da deflexão da luz para a solução de Schwarzschild obtidos por Bozza [27] e Tsukamoto [32]. Em seguida, vamos aplicá-lo em outra solução também esfericamente simétrica mas carregada, o buraco negro de Reissner-Nordström. Enfatizamos que o objetivo é obter o desvio da luz no limite de campo forte de maneira analítica.

### 5.1 Buraco negro de Schwarzschild

Para verificar o método discutido em [33], vamos explorá-lo na solução de Schwarzschild. Para isso, usaremos as componentes da métrica de Schwarzschild, conforme a notação (4.7):

$$A(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad B(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad C(r) = r^2. \quad (5.1)$$

Usaremos a transformação (4.17) e o fato que no regime de campo forte,  $r \rightarrow r_m$ . Para o caso da esfera de fótons  $r_m = 3M$ . Para simplificar os cálculos dos coeficientes  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$ , e o ângulo de deflexão da luz, adotaremos  $M = 1$ .

De acordo com (4.24), (4.25) e (4.26) obtemos:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 9 \quad \rightarrow \quad G(z) = -6z^3 + 9z^2. \quad (5.2)$$

Com isso, temos o resultado das expressões para (4.30) e (4.36) no regime de campos fortes são:

$$f_D(z) = \frac{2}{z} \quad \text{e} \quad f_R(z) = -2 \frac{-3 + \sqrt{-6z + 9}}{z\sqrt{-6z + 9}}. \quad (5.3)$$

Usando as equações acima, é possível calcular  $I_R$ , da integral (4.18):

$$I_R = 2 \ln(12 - 6\sqrt{3}). \quad (5.4)$$

A partir desse resultado, substituindo nas Equações (4.40) e (4.41) obtemos os coeficientes de  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$ , que tomam os valores

$$\bar{a} = 1, \quad \bar{b} = \ln[216(7 - 4\sqrt{3})] - \pi. \quad (5.5)$$

Esses resultados são exatamente os encontrados em [33] e [32].

Dessa forma, podemos concluir que o ângulo de deflexão da luz em função do parâmetro de impacto, no caso da métrica de Schwarzschild, é dado por

$$\alpha(b) = -\ln\left(\frac{b}{3\sqrt{3}} - 1\right) + \ln[216(7 - 4\sqrt{3})] - \pi. \quad (5.6)$$

Com esse resultado podemos avaliar que a dependência do ângulo de deflexão em relação ao parâmetro de impacto no limite de campo forte. A gravidade nestas regiões é significativamente mais intensa, devido às distorções no espaço-tempo, as quais são mais pronunciadas e, portanto, têm um impacto mais forte na trajetória da luz. Como resultado, verificamos uma dependência do ângulo de deflexão em relação ao parâmetro de impacto é mais acentuada nessas regiões.

## 5.2 Buraco negro de Reissner-Nordström

A segunda aplicação refere-se a métrica de Reissner-Nordström, que representa uma solução das equações de campo de Einstein que descreve o espaço-tempo em torno de um corpo esfericamente simétrico, sem rotação, com massa  $M$ , e carregado eletricamente com carga  $Q$ . A seguir será exposta resumidamente essa solução, baseado em [19], [4], [34].

Dado que a solução tem simetria esférica e é estática, a forma geral da métrica é, mais uma vez, dada pela Equação (4.7). As duas funções  $A(r)$  e  $B(r)$  são determinadas resolvendo as equações completas de Einstein-Maxwell na região exterior do objeto esférico. Assim, as componentes da métrica de Reissner-Nordström resultam:

$$A(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad B(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}, \quad C(r) = r^2. \quad (5.7)$$

O elemento de linha (4.7) para a solução de Reissner-Nordström é:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta + \sin^2 d\varphi). \quad (5.8)$$

Como vemos, conforme a carga elétrica  $Q$  tende a zero, a métrica torna-se semelhante à métrica de Schwarzschild.

Obtida a solução, podemos estabelecer o horizonte de eventos de um buraco negro carregado é determinado através da solução de  $g^{rr} = \Delta = 0$ :

$$\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2, \quad (5.9)$$

$$r_H \equiv M + \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (5.10)$$

Utilizando o método de [33], descrito na seção (4.2), podemos descrever o raio de fótons a partir da Eq. (4.10):

$$r_m = \frac{3M + \sqrt{9M^2 - 8Q^2}}{2}. \quad (5.11)$$

Se a carga for  $Q = 0$  recuperamos, como esperado, o valor do raio de fótons (3.23) do caso Schwarzschild. Assim como para  $Q = M$  obtemos também o raio de Schwarzschild ( $r_{sch} = 2M$ ).

A trajetória de um raio de luz é uma geodésica nula ( $k_\mu k^\mu = 0$ ,  $k^\mu \equiv \dot{x}^\mu$ ) portanto, a energia e o momento angular do fóton continuam sendo dados pelas grandezas conservadas

$$E \equiv \frac{\Delta}{r^2} \dot{t} \quad \text{e} \quad L \equiv r^2 \dot{\varphi}. \quad (5.12)$$

Assumindo a energia  $E$  positiva a equação do parâmetro de impacto é dada por

$$b \equiv \frac{L}{E} = \frac{\Delta(r) \dot{t}}{r^4 \dot{\varphi}}. \quad (5.13)$$

Da mesma forma que no caso Schwarzschild, sem afetar a generalidade dos resultados, utilizamos  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Com isso obtemos a equação da trajetória no espaço-tempo de Reissner-Nordström

$$-\frac{\Delta}{r^2} \dot{t}^2 + \frac{r^2}{\Delta} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = 0. \quad (5.14)$$

Isolando  $\dot{r}$  definimos o potencial como:

$$\dot{r}^2 = E^2 - \frac{\Delta}{r^4} L^2 \quad \text{ou} \quad V(r) = \dot{r}^2. \quad (5.15)$$

O fóton vindo do infinito ( $r \rightarrow \infty$ ), é refletido pelo objeto compacto na distância mais próxima ( $r = r_0$ ), antes de retornar para o infinito e no ponto mais próximo  $\dot{r}$  se anula. Sendo assim podemos usar a Equação (4.14) para obter a equação do parâmetro de impacto:

$$b(r_0) = \frac{r_0^2}{\sqrt{\Delta_0}}, \quad (5.16)$$

onde o subíndice zero denota a distância  $r = r_0$ .

O limite de  $r_0 \rightarrow r_m$  (ou  $b \rightarrow b_c$ ) é referência à aproximação de campo forte. Esse resultado nos leva a entender que o raio de luz gira em torno da esfera de luz no limite de deflexão forte. Da Equação (4.11) obtemos a deflexão da luz para um buraco negro de Reissner-Nordström

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r^2 \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{r^2 - 2Mr + Q^2}{r^4}}}. \quad (5.17)$$

Perceba que se a carga for igual a  $Q = 0$ , obteremos a mesma Equação (3.35). Os coeficientes  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  são calculados através das Equações (4.40) e (4.41), resultando em

$$\bar{a} = \frac{r_m}{\sqrt{3Mr_m - 4Q^2}} \quad (5.18)$$

e

$$\bar{b} = \bar{a} \log \left[ \frac{8(3Mr_m - 4Q^2)}{M^2 r_m^2 (Mr_m - Q^2)^2} \left( 2\sqrt{Mr_m - Q^2} - \sqrt{3Mr_m - 4Q^2} \right)^2 \right] - \pi. \quad (5.19)$$

No caso se buraco negro tiver a máxima carga (ou seja  $Q = M$ ), obtemos

$$b_c = 4, \quad \bar{a} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \bar{b} = 2\sqrt{2} \log[4(2 - \sqrt{2})] - \pi Q. \quad (5.20)$$

Assim, o ângulo de deflexão da luz em função do parâmetro de impacto, para um objeto compacto descrito pela métrica Reissner-Nordström resulta:

$$\alpha(b) = -\sqrt{2} \ln \left( \frac{b}{4} - 1 \right) + \ln 2\sqrt{2} \log[4(2 - \sqrt{2})] - \pi. \quad (5.21)$$

## 6 Resultados e Discussão

As órbitas geodésicas obtidas num espaço com simetria esférica, para analisar os raios de luz que passam perto de um objeto compacto massivo, foram ilustradas considerando a solução exterior do buraco negro de Schwarzschild e do de Reissner-Nordström. No presente capítulo iremos apresentar a implementação numérica utilizando um programa de traçado de raios de luz em espaços curvos desenvolvido na plataforma Mathematica™, por um grupo de pesquisadores (UV-QG) da Universidade de Valência [35]. Para isso foi necessário adquirir um conhecimento básico de uso do software Mathematica, para poder implementar as equações pertinentes obtidas no contexto da Relatividade Geral, e resolvê-las numericamente.

### 6.1 Traçado de raios luminosos

Os raios luminosos que se aproximam do buraco negro, com distintas faixas de valores do parâmetro de impacto, apresentam comportamentos diferentes. Assim, em primeiro lugar buscamos identificar, com ajuda das ferramentas computacionais, o parâmetro do impacto crítico (3.31), onde a transição entre comportamentos acontece.

#### 6.1.1 Buraco negro de Schwarzschild

Para realizar a integração numérica reescrevemos a equação em forma adimensional, substituindo  $A(x) = 1 - \frac{x_s}{x}$  e introduzindo as variáveis adimensionais  $x \rightarrow My$  e  $\tau \equiv E \frac{\lambda}{M}$ , obtemos a expressão:

$$\frac{dy}{d\tau} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{y^2} \left(1 - \frac{2}{y}\right)}, \quad (6.1)$$

onde  $b \equiv \frac{L}{EM}$  é o parâmetro de impacto, crucial para o qual recuperamos satisfatoriamente a constante obtida em (3.31).

Como seguinte passo, usamos o programa para calcular uma solução descrevendo a trajetória de um único raio de luz com condições iniciais  $\{y_i = 0, \tau_i = 0\}$ , obtendo a solução da equação diferencial ilustrada Figura 7. Assim, a Figura 7 caracteriza uma solução de integração mínima, onde a trajetória tenta desviar, mas não o faz porque a integral atinge um número máximo de passos alcançados no ponto  $\tau = 102.58110448218909'$ . Essa condição é monitorada durante o processo de integração, quando ela é detectada, fornecemos informações adicionais ao programa. Utiliza-se a interpolação linear para terminar os passos e obter os intervalos de entrada e saída como apresentados na Figura 8.

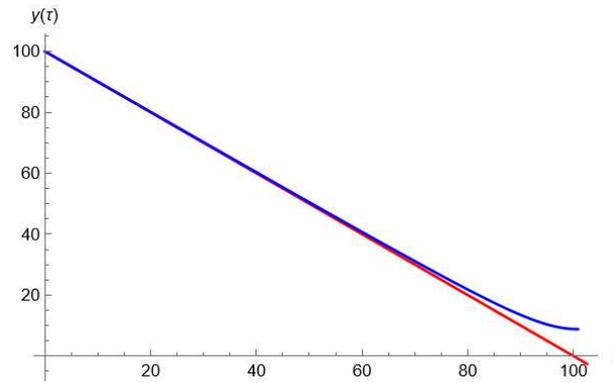


Figura 7 – Raio de luz na direção do objeto.

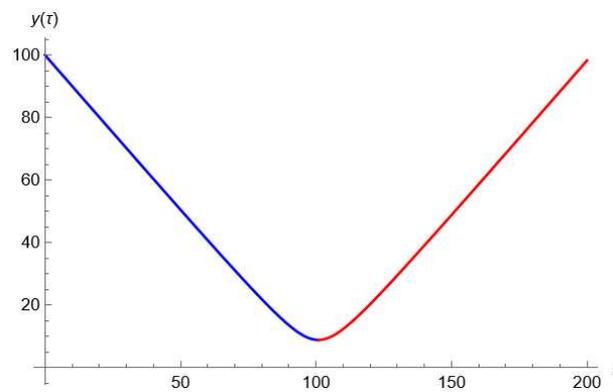


Figura 8 – Raio de luz entrando (azul) e saindo (vermelho) próximo a um buraco negro.

Ao conseguir descrever o comportamento dos raios de luz que interagem no meio em que chegam próximo a um buraco negro, aplicamos o procedimento a dez parâmetros de impacto  $b$  iniciais, buscando descrever as trajetórias dos fótons com parâmetro de impacto maiores e menores do que o valor crítico, como na Figura 9.

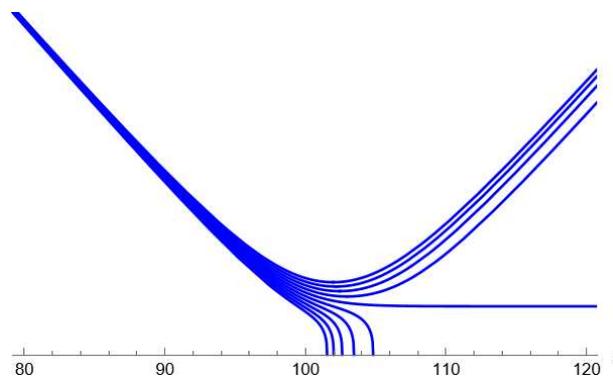


Figura 9 – Raios correspondentes a distintos parâmetros de impacto  $b$ .

O próximo passo é representar graficamente o resultado da integração em um plano, para ilustrar como é a trajetória da curva, à medida que o raio se aproxima da região

central. Para isso, utilizamos a dedução do ângulo de deflexão da Seção 3.4:

$$\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 = E^2 \left(1 - \frac{L^2}{E^2} \frac{A(x)}{x^2}\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = \frac{L^2}{x^4}, \quad (6.2)$$

Assim, reescrevendo a relação (6.2) que descreve a dependência angular da trajetória dos raios em forma adimensional podemos implementar a integração numérica, ou seja:

$$\frac{d\phi}{dy} = \pm \frac{b/y^2}{\sqrt{1 - \frac{b^2 A(y)}{y^2}}}. \quad (6.3)$$

Posteriormente, estabelecemos os parâmetros iniciais ( $b_i$ ) e finais ( $b_f$ ) conforme o parâmetro de impacto crítico ( $b_c$ ). Inicialmente, utilizamos os valores dos  $b_i = b_c \frac{1+300}{100}$  e  $b_f = b_c \left(\frac{1+19}{100}\right)$ , para obtermos o resultado apresentado na Figura 10, que ao diminuimos o parâmetro de impacto os raios sofrem deflexões maiores. Já para os raios com parâmetro de impacto maior, a atração é menor, assim como a deflexão. Nesse caso, devido à grande distância radial dos fótons, estamos descrevendo o campo gravitacional no seu limite fraco.

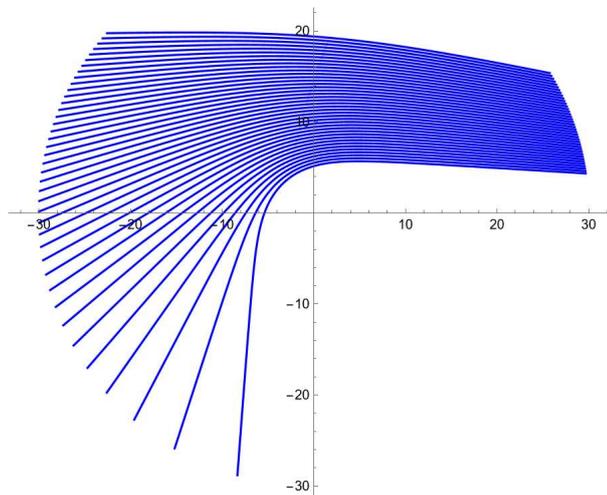


Figura 10 – Trajetórias dos raios de luz com parâmetro de impacto maiores do que valor crítico ( $b > b_c$ ).

Ao considerar o intervalo  $b_i = b_c \left(\frac{1+18}{100}\right)$  e  $b_f = b_c \left(\frac{1+62}{10000}\right)$ , os valores do parâmetro, devido à maior aproximação do centro, os raios são fortemente defletidos. Assim, na Figura 11, obtemos que as trajetórias dos fótons que se aproximam do valor crítico ( $b_c$ ) começam a circular à medida que se aproxima do centro, chegando a quase fechar uma volta completa (*loop*) em torno do buraco negro.

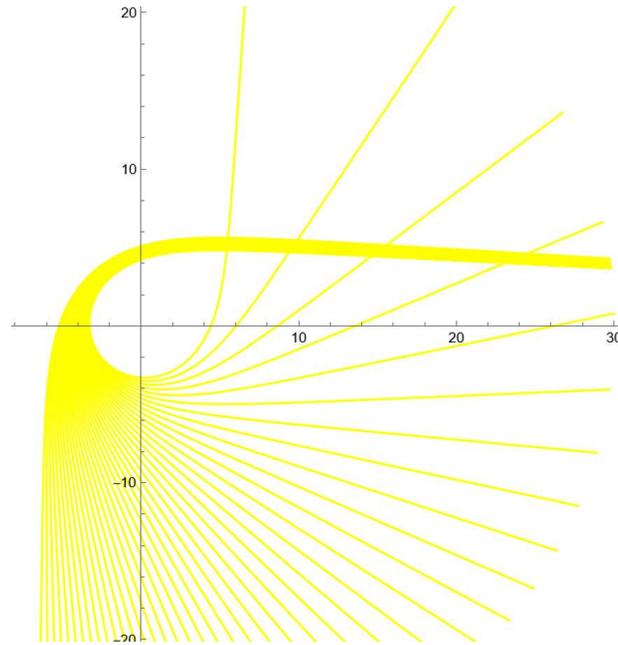


Figura 11 – Raios maiores próximos ao parâmetro de impacto crítico. ( $b_c$ )

Consideramos os valores do parâmetro  $b$  no intervalo entre  $b_i = b_c(\frac{1+59}{10000})$  e  $b_f = b_c(\frac{1+1}{10000})$ , temos a Figura 12, em que se aproxima os parâmetros iniciais e finais do parâmetro de impacto crítico, chegamos a ter a deflexão máxima dos raios luz formando o conhecido anel de fótons; sendo o último limite estável em torno do buraco negro ou limite da visibilidade do buraco negro. Note que usamos como exemplo 40 soluções (trajetórias de raios) para ilustrar o efeito do anel de fótons

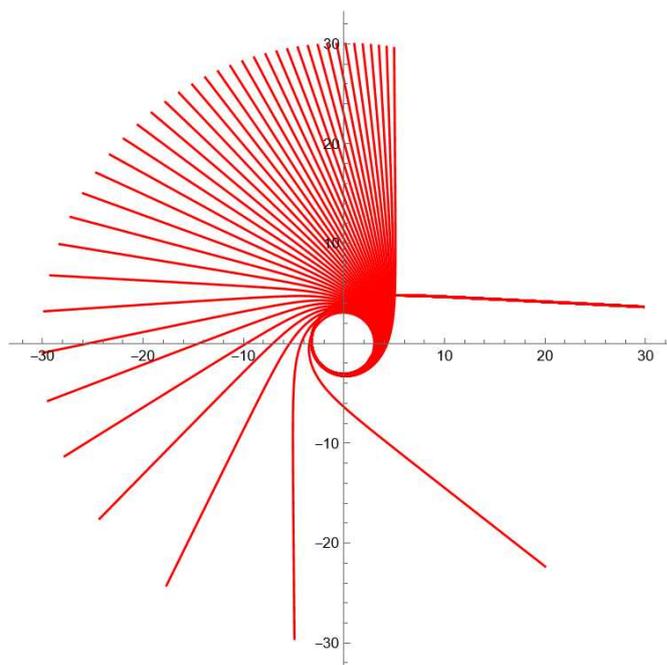


Figura 12 – Representação aproximada do anel de fótons

Finalmente, para termos uma visão completa do efeito do buraco negro sobre os raios luminosos apresentamos, na Figura 13, uma sobreposição as Figuras 10, 11 e 12. Podemos, então, observar todas as classes de trajetórias percorridas pelos raios de luz incidindo com parâmetros de impacto nas distintas faixas de valores.

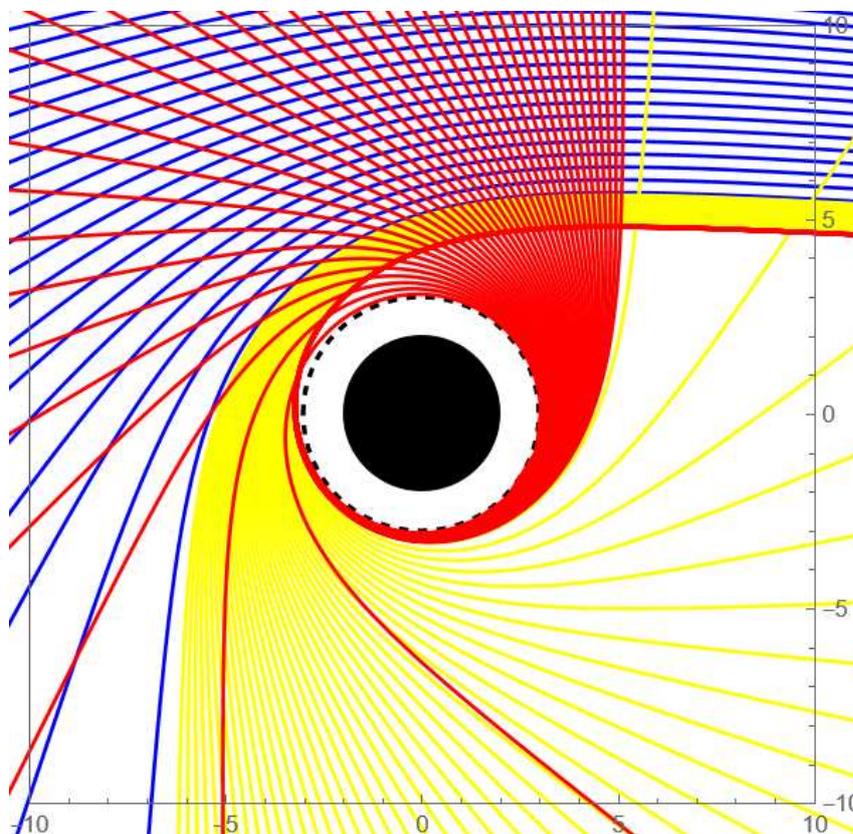


Figura 13 – Combinação de todas as classes de trajetórias dos raios de luz defletida pelo buraco negro de Schwarzschild.

A Figura 13 apresenta as trajetórias dos fótons associadas a variação de parâmetros de impacto com espaçamento de  $1/100$ ,  $1/1000$  e  $1/100000$  nas regiões de imagens diretas, lenteadas e do anel de fótons, respectivamente.

**“Sombras” de buracos negros.** Note que, no centro da Figura 13, se observa um disco sólido preto, com um raio menor do que a órbita mais interior de fótons (*fotosfera*), representada pela linha tracejada.<sup>13</sup> Essa região da imagem é conhecida sob o nome de “sombra” do buraco negro, e corresponde a um setor onde os raios de luz, têm parâmetro de impacto menor ao crítico, dirigidos para dentro do horizonte de eventos, em que se obtém na imagem uma região sem iluminação, ou seja sombras.

### 6.1.2 Buraco negro de Reissner-Nordström

Para mostrarmos a influência que a carga tem no fenômeno de deflexão da luz, implementamos numericamente a métrica de Reissner-Nordström, que representa um objeto compacto massivo estático, esfericamente simétrico e eletricamente carregado.

Mudando o valor de  $A(x) = 1 - \frac{x_s}{x}$  para  $A(x) = 1 - \frac{x_s}{x} + \frac{Q}{x^2}$ , e mantendo as variáveis  $x$  e  $\tau$  obtemos a equação

$$\frac{dy}{d\tau} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{y^2} \left(1 - \frac{2}{y} + \frac{Q^2}{y^2}\right)}, \quad (6.4)$$

Para  $Q = 0$ , recuperamos a expressão do Buraco Negro de Schwarzschild. Mas, se analisarmos a carga entre  $0 < Q/M < 1$ , o buraco negro continua possuindo um anel de fótons e um horizonte de eventos. Portanto, aplicamos no programa valores decimais para ver o comportamento das trajetórias influenciadas pela carga a medida que esta aumenta.

Na Figura 14 escolhemos  $b = \sqrt{27}M$ , a qual é o valor crítico do parâmetro de impacto para um buraco negro de Schwarzschild. As geodésicas são menos encurvadas à medida que a carga do buraco negro aumenta de  $Q/M = 0$  (Schwarzschild) até  $Q/M=1$  (buraco negro extremamente carregado ou “extremo”).

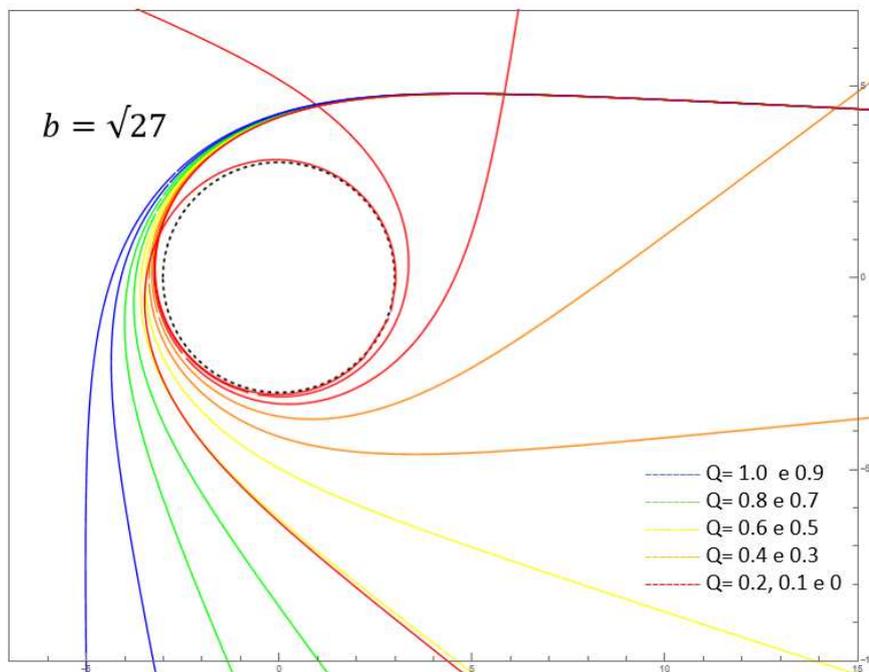


Figura 14 – Geodésicas nulas com parâmetro de impacto  $b = \sqrt{27}$ , no entorno de buracos negros estáticos com carga variando de zero a 1.

Como ilustrado na Figura 14, a presença de carga elétrica (representada por valores de  $Q$  mais altos) leva a uma deflexão mais pronunciada da luz. Isso ocorre porque o campo elétrico afeta a curvatura, como consequência as trajetórias dos raios de luz, fazendo com que ela se curve mais significativamente.

O próximo passo desenvolvido na aplicação para buracos negros de Reissner-Nordström foi demonstrar os resultados da integração graficamente em um plano, traçado na região central. Para isso, usamos a Equação (6.3), substituindo a métrica de Reissner-Nordström (5.7)

$$\frac{d\phi}{dy} = \pm \frac{b}{y^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2 \left(1 - \frac{2}{y} + \frac{Q^2}{y^2}\right)}{y^2}}}. \quad (6.5)$$

Para representar graficamente o resultado da integração em um plano, ilustrando as trajetórias das curvas à medida que o raio se aproxima da região central, usamos as mesmas aproximações de parâmetros ( $b_i$  e  $b_f$ ) do caso de Schwarzschild, em que obtemos as trajetórias para valores do parâmetro maiores do que o parâmetro de impacto crítico, e assim o limite da visibilidade do buraco negro 15, 16 e 17

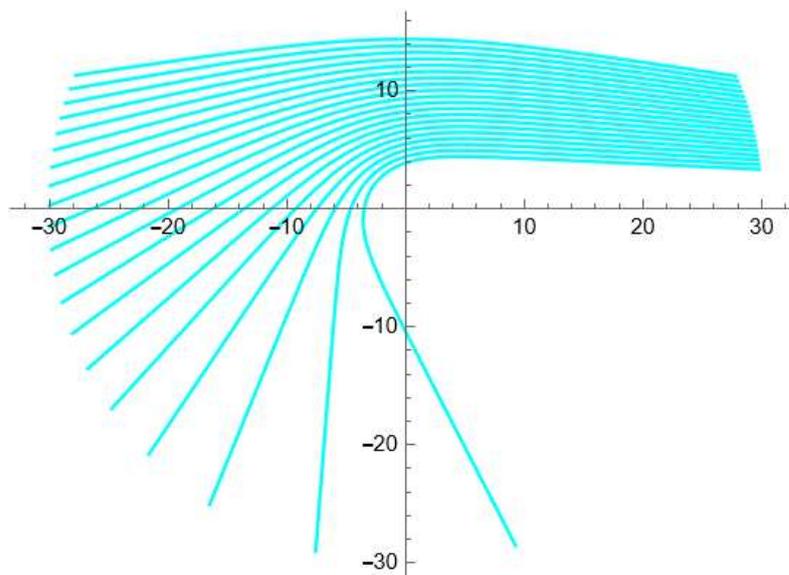


Figura 15 – Trajetórias dos raios de luz com carga  $Q = 1$ ; parâmetros de impacto maiores do que valor crítico ( $b > b_c$ ).

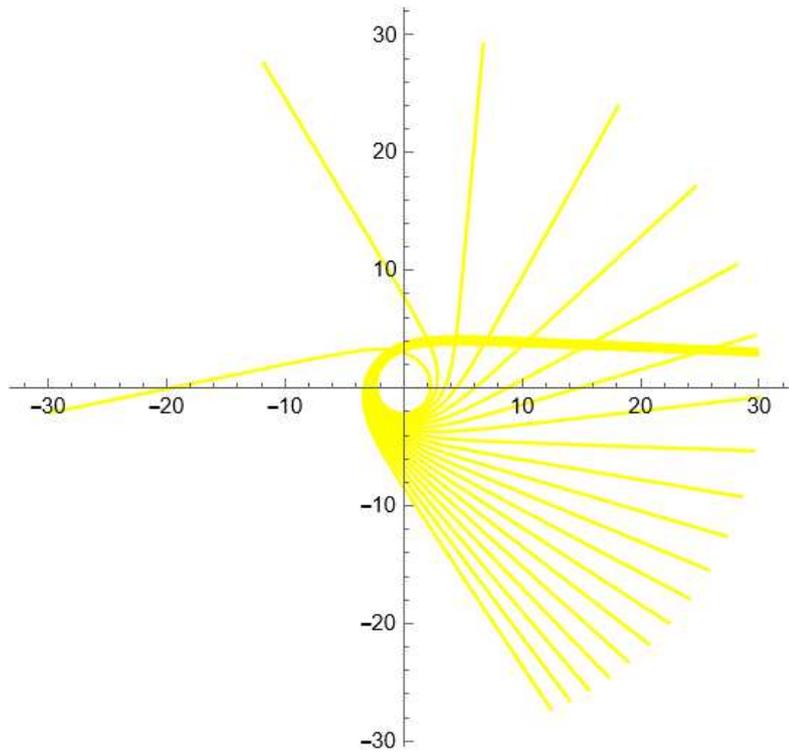


Figura 16 – Raios maiores porém próximos ao parâmetro de impacto crítico ( $b \gtrsim b_c$ ), com carga  $Q = 1$ .

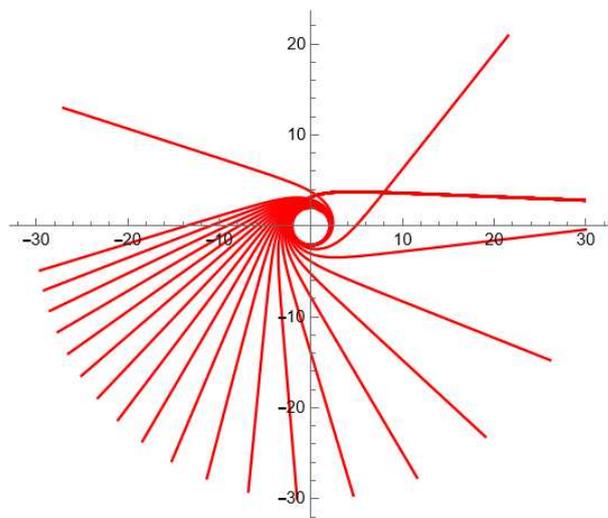


Figura 17 – Representação aproximada do anel de fótons com carga.  $Q = 1$

Por fim, construímos a sobreposição dos raios apresentados nas figuras anteriores, para obter uma visão completa dos distintos tipos de trajetórias percorridas pelos raios de luz em torno de um buraco negro de Reissner-Nordström.

A Figura (18) apresenta todas as classes de trajetórias dos fótons associadas a variação de parâmetros de impacto com espaçamento de  $1/100$ ,  $1/1000$  e  $1/100000$  nas regiões de imagens diretas, lenteadas e do anel de fótons, respectivamente.

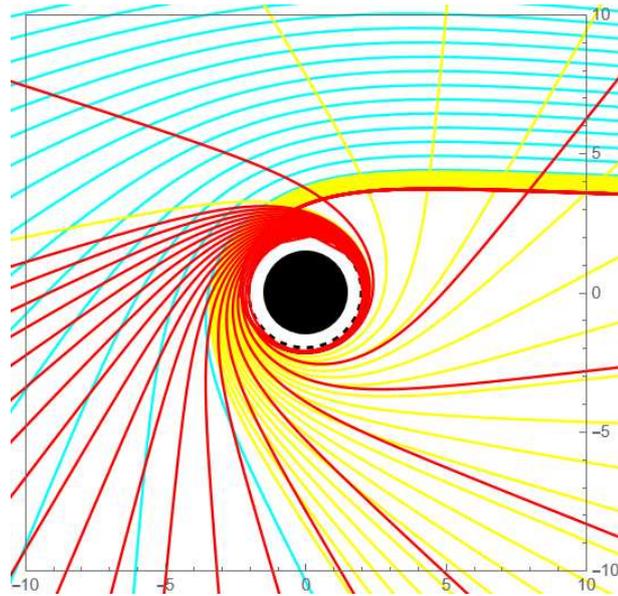


Figura 18 – Combinação de todas as classes de trajetórias dos raios de luz de um Buraco Negro carregado com carga  $Q = M = 1$

A presença da carga elétrica adiciona novos aspectos às órbitas das partículas, (Figura 18) como para o caso de Schwarzschild, existem órbitas circulares estáveis e instáveis. No entanto, as posições dessas órbitas são modificadas pela presença do termo adicional  $Q^2/y^2$ .



## 7 Conclusões

Neste trabalho, investigamos o espalhamento (deflexão) da luz por buracos negros, com foco nas soluções de Schwarzschild e Reissner-Nordström. Para isso, apresentamos como os conceitos de soluções esfericamente simétricas na Relatividade Geral, e o conceito de parâmetro de impacto, foram importante para entender o funcionamento das órbitas causadas pela gravidade de objetos maciços provocando a deflexão da luz.

Os limites de campos gravitacionais fortes e fracos, apresentando um método desenvolvido por Bozza [27] e aprimorado por Tsukamoto [32], que nos permitiu determinar o desvio da luz muito próximo da esfera de fótons. Com a equação da lente e a equação da deflexão da luz, mostramos a formação das lentes gravitacionais e como deduzir as posições das imagens relacionando a posição do ângulo de deflexão. Assim, conseguimos calcular, em forma analítica, em soluções tipos buracos negros, com e sem carga.

Como o software Mathematica, usamos o traçado de raios de luz em espaços curvos desenvolvido pelo grupo de pesquisa (UV-QG, da Universidade de Valencia [35]), para analisarmos as trajetórias com distintos parâmetros de impacto, descrevendo sequencialmente as trajetórias dos raios de luz a medida em que se aproximavam do parâmetro de impacto crítico. Também, analisamos a métrica de Reissner-Nordström para observar o comportamento das trajetórias em função da carga elétrica presente. A carga mais forte influência também na curvatura fazendo com que as trajetórias dos raios se curvem mais significativamente.

É importante destacar que um estudo mais preciso para a descrição de buracos negros mais realísticos requer o uso de soluções tipo Kerr, que apresentam uma simetria axial, desde que consideram a rotação dos buracos negros, caracterizada pelo seu momento angular. As soluções de Kerr descrevem de forma mais fiel às imagens obtidas de buracos negros reais, como o M87 e, o mais recente, Sgr A\*. Contudo, apesar de suas limitações, as soluções de Schwarzschild e Reissner-Nordström abordadas neste trabalho, oferecem uma base teórica sólida e simplificada para entender muitos aspectos dos efeitos que a presença de buracos negros imprime às trajetórias dos raios luminosos que deles se aproximam, facilitando o estudo inicial e a compreensão dos efeitos gravitacionais básicos.

Além disso, a análise detalhada em função dos parâmetros de impacto revelou-se essencial para a compreensão da dinâmica das trajetórias dos fótons em torno de buracos negros. Esses parâmetros desempenham um papel crucial na caracterização de fenômenos ópticos notáveis, como o anel de fótons e as lentes gravitacionais.

Para prosseguir com esta linha de trabalho, pretendemos ampliar a pesquisa em duas direções. Por um lado, iremos considerar sistemas simétricos com rotação, para

compreender o funcionamento dos buracos negros mais realísticos. Como seguinte passo, estudaremos distintos modelos de discos de acreção, objetos que acontecem naturalmente no entorno de buracos negros, tanto nos que residem nos centros das galáxias quanto nos que formam pares com estrelas próximas que acabam, sendo devoradas pelos buracos negros.

Para futuros trabalhos planejamos utilizar uma abordagem analítico-numérica para modelar as geodésicas associadas a esses sistemas complexos, permitindo uma visualização detalhada das trajetórias da luz em torno dos buracos negros de Kerr. Além de outros desenvolvimentos mais aprimorados para o estudo mais profundado das imagens desses sistemas, como é o caso das sombras.

# Referências

- 1 LUMINET, J. P. Image of a spherical black hole with thin accretion disk. *Astron. Astrophys.*, v. 75, p. 228–235, 1979. Citado 3 vezes nas páginas 17, 21 e 22.
- 2 LUPSASCA, A. et al. The Black Hole Explorer: Photon Ring Science, Detection and Shape Measurement. 6 2024. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 22.
- 3 BISNOVATYI-KOGAN, G. S.; TSUPKO, O. Y. Strong Gravitational Lensing by Schwarzschild Black Holes. *Astrophysics*, v. 51, p. 99–111, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 36.
- 4 HARTLE, J. B. *Gravity an Introduction to Einstein's Relativity Geral*. [S.l.]: Pearson Education, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 17, 25, 37 e 46.
- 5 RUBIERA-GARCIA, D. *Física elementar e avançada de buracos negros: um guia do praticante moderno*. [S.l.]: Complutense University of Madrid, Spain, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 43.
- 6 HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. *The Large Scale Structure of Space-Time*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2023. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). Citado na página 21.
- 7 WALD, R. M. *General Relativity*. [S.l.]: ADAGP, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 44.
- 8 AKIYAMA, K. et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *Astrophys. J. Lett.*, v. 875, p. L1, 2019. Citado na página 21.
- 9 AKIYAMA, K. et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. VI. The Shadow and Mass of the Central Black Hole. *Astrophys. J. Lett.*, v. 875, n. 1, p. L6, 2019. Citado na página 21.
- 10 SHOR, P. W. Scrambling Time and Causal Structure of the Photon Sphere of a Schwarzschild Black Hole. 7 2018. Citado na página 22.
- 11 AMARILLA, L. *Sombras de agujeros negros en teorías alternativas de gravitación*. Tese (Doutorado) — Buenos Aires U., 2013. Citado na página 22.
- 12 MISHRA, A. K.; CHAKRABORTY, S.; SARKAR, S. Understanding photon sphere and black hole shadow in dynamically evolving spacetimes. *Phys. Rev. D*, v. 99, n. 10, p. 104080, 2019. Citado na página 22.
- 13 SILVA, L. F. D. da et al. Photon rings as tests for alternative spherically symmetric geometries with thin accretion disks. 7 2023. Citado na página 22.
- 14 PERLICK, V.; TSUPKO, O. Y. Calculating black hole shadows: Review of analytical studies. *Phys. Rept.*, v. 947, p. 1–39, 2022. Citado na página 22.
- 15 OHGAMI, T.; SAKAI, N. Wormhole shadows. *Phys. Rev. D*, v. 91, n. 12, p. 124020, 2015. Citado na página 22.

- 16 GUERRERO, M. et al. Shadows and optical appearance of black bounces illuminated by a thin accretion disk. *JCAP*, v. 08, p. 036, 2021. Citado na página 22.
- 17 SOARES, A. R.; PEREIRA, C. F. S.; VITÓRIA, R. L. L. Holonomy corrected Schwarzschild black hole lensing. 9 2023. Citado na página 22.
- 18 DIAZ, R. J. A. *Condições de junção para duas soluções estáticas e esfericamente simétricas numa esfera  $S^3$* . Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, 2010. Citado na página 23.
- 19 D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. [S.l.]: Oxford University Press, 1998. Citado 4 vezes nas páginas 23, 24, 25 e 46.
- 20 CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry: Introction to General Relativity*. [S.l.]: Adisson Wesley, 2004. Citado na página 25.
- 21 WÜRZ, G. *Buracos negros de Schwarzschild e de Kerr: uma abordagem usando o Python*. Tese (Doutorado) — Universidade de Brasília Instituto de Física, 2022. Citado na página 28.
- 22 DÍAZ, R. J. A. *Cálculo tensorial e relatividade geral*. 2016. Citado na página 29.
- 23 KALA, S. et al. Geodesics and bending of light around a BTZ black hole surrounded by quintessential matter. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 36, n. 31, p. 2150224, 2021. Citado na página 29.
- 24 VOJINOVIC, M. *Schwarzschild solution in General Relativity*. [S.l.: s.n.], 2010. Citado na página 29.
- 25 CHANDRASEKHAR, S. *The Mathematical Theory of Black Holes*. [S.l.]: New York: Oxford University Press, 1983. Citado na página 29.
- 26 GRALLA, S. E.; HOLZ, D. E.; WALD, R. M. Black Hole Shadows, Photon Rings, and Lensing Rings. *Phys. Rev. D*, v. 100, n. 2, p. 024018, 2019. Citado na página 34.
- 27 BOZZA, V. Gravitational Lensing by Black Holes. *Gen. Rel. Grav.*, v. 42, p. 2269–2300, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 37, 45 e 59.
- 28 MAGUEIJO, J. Stars and black holes in varying speed of light theories. *Phys. Rev. D*, v. 63, p. 043502, 2001. Citado na página 38.
- 29 LIMA, J. A. S.; SANTOS, R. C. Do eclipse solar de 1919 ao espetáculo das lentes gravitacionais. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Sociedade Brasileira de Física, v. 41, p. e20190199, 2019. ISSN 1806-1117. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2019-0199>>. Citado na página 38.
- 30 BOZZA, V. et al. Strong field limit of black hole gravitational lensing. *Gen. Rel. Grav.*, v. 33, p. 1535–1548, 2001. Citado na página 43.
- 31 NASCIMENTO, J. R. et al. Gravitational lensing in black-bounce spacetimes. *Phys. Rev. D*, v. 102, n. 4, p. 044021, 2020. Citado na página 44.
- 32 TSUKAMOTO, N. Deflection angle in the strong deflection limit in a general asymptotically flat, static, spherically symmetric spacetime. *Phys. Rev. D*, v. 95, n. 6, p. 064035, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 59.

- 
- 33 BOZZA, V. Gravitational lensing in the strong field limit. *Phys. Rev. D*, v. 66, p. 103001, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.
- 34 M.P.HOBSON, G. E.; LASENBY, A. *General Relativity an Introduction for Physicists*. [S.l.]: Cambridge University press, 2006. Citado na página 46.
- 35 UV-QG. *Grupo de pesquisa: Gravedad, Campos Cuánticos y Agujeros Negros, Depto. Física Teórica, Universidad de Valencia*. 2020. Disponível em: <<http://www.uv-qg.es/#1>>. Citado 3 vezes nas páginas 49, 59 e 67.



# Apêndices



# APÊNDICE A – Script Mathematica para a variação do parâmetro de impacto crítico

O Mathematica é uma plataforma de computação que uma vasta gama de recursos para cálculos matemáticos numéricos e simbólicos. Com ele, podemos resolver equações, realizar integrações numéricas, gerar gráficos e executar uma variedade de manipulações matemáticas com eficiência e precisão.

Para explorar o problema da deflexão da luz próximo de buracos negros, examinamos e implementamos um código escrito na linguagem do Mathematica, desenvolvido por grupo de pesquisa parceiro na colaboração científica [35].

O código está estruturado em três etapas distintas. Primeiramente, é realizado a implementação do algoritmo básico. Em seguida, ocorre a repetição do algoritmo básico juntamente com instruções condicionais para a avaliação de eventos físicos específicos. Na etapa subsequente, o processo é repetido uma vez mais, com a reaplicação do algoritmo integrador e a atualização das novas quantidades, o qual são armazenadas em distintas classes de listas. Por fim, na última fase, são desenvolvidos e aplicados os modelos matemáticos para a análise e apresentação das soluções do problema.

## A.1 Integrador Básico

As funções e as constantes iniciais; consideramos a equação do parâmetro de impacto (3.30) e analisamos o potencial efetivo (3) para um buraco negro de Schwarzschild, empregando o comando **NDSolve** resolvemos numericamente a equação diferencial do potencial efetivo ( $V_e' f f = 0$ ) obtendo como solução o raio de fótons (3.23), e avaliamos o potencial nesse ponto, obtendo parâmetro de impacto crítico (3.31).

A partir desta fase, é gerado um gráfico paramétrico da trajetória da partícula com o comando **ParametricPlot**.

Quando a equação é muito complexa ou quando a precisão exigida é demasiado alta, fazendo com que o cálculo precise de mais iterações para alcançar uma solução satisfatória o algoritmo integrador usado pelo **NDSolve** atinge o número máximo de etapas permitido durante a resolução da equação diferencial, emitindo erros do tipo “Maximum number of steps reached”. Para resolver esse problema adiciona-se mais condições para “proteger” o processo. Entre elas foi adicionado o **WorkingPrecision** (que é um comando que controla a precisão interna dos cálculos) e **PrecisionGoal** e **AccuracyGoal**, sendo comandos que controlam especificam os objetivos de precisão desejados para a solução final; e, por fim, o

comando **MaxSteps** que estabelece o número máximo de passos permitidos.

Definido o conjunto desses parâmetros para obter uma precisão aceitável, parte para o próximo passo, ou seja, o integrador Automático para N Geodésicas.

## A.2 Integrador Automático para N Geodésicas

Utilizamos as mesmas funções e constantes iniciais e parametrização. Também foi adicionado o comando **Flag** que permite controlar o fluxo do programa com base em eventos específicos que ocorrem durante a integração da equação diferencial. Nesse caso, deve-se enfatizar que os dois eventos estão sendo monitorados usando o **WhenEvent**, determinamos a seguir como eventos 1 e 2:

- **Evento 1:** Quando a condição  $Abs[1 - (bi^2(1 - 2/y))/y^2] < 10^{-15}$  é satisfeita, o valor de **Flag** é definido como 1 e a integração é interrompida. Isso indica que uma condição importante foi alcançada durante a integração e que é necessário parar o processo.
- **Evento 2:** Quando a condição  $y < y_f$  é satisfeita, o valor de **Flag** é definido como 0 e a integração é interrompida. Isso pode indicar que outra condição importante foi alcançada durante a integração que o processo deve ser interrompido de maneira diferente.

Tendo esse controle dos cálculos numéricos agora podemos usar a equação da deflexão da luz para resolver e encontrar as trajetórias dos fótons que viajam perto de um buraco negro. Resolvemos novamente a EDO usando o comando **NDSolve**. E, a seguir, é gerado um gráfico paramétrico das trajetórias das partículas com o comando **ParametricPlot**. Para a formação da imagem da Figura 13 foi preciso adicionar a função **Figs**, adicionando a figura atual a uma lista de figuras.

# APÊNDICE B – Solução da métrica de Schwarzschild

## B.1 Componentes do Símbolo de Christoffel

Nesta seção, calcularemos todos os símbolos de Christoffel, partindo da equação (2.15). Devemos permutar os índices  $\sigma$ ,  $\mu$  e  $\nu$  e achar todas as configurações possíveis, considerando as propriedades apresentadas. É possível perceber que existem quatro possibilidades para permutar os índices, 1) todos os índices são iguais ,2) os índices inferiores são iguais e diferente do índice superior ,3) um índice superior é igual a um inferior ,4) todos os índices são diferentes descritos a seguir.

1) Todos os índices são iguais:  $\mu = \nu = \sigma$ . Substituindo os índices na Equação (2.15) e permutando de 0 a 3, encontraremos as seguintes relações:

$$\Gamma_{\sigma\sigma}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\sigma}\partial_{\sigma}g_{\sigma\sigma}, \quad (\text{B.1})$$

$$\sigma = 0, \Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}g^{00}\partial_0g_{00} \rightarrow \Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}\frac{1}{e^{\lambda(r)}}\frac{\partial}{\partial t}(e^{\lambda(r)}) = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$\sigma = 1, \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{11} \rightarrow \Gamma_{11}^1 = -\frac{\xi(r)}{2}, \quad (\text{B.3})$$

$$\sigma = 2, \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}g^{22}\partial_2g_{22} \rightarrow \Gamma_{22}^2 = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$\sigma = 3, \Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2}g^{33}\partial_3g_{33} \rightarrow \Gamma_{33}^3 = 0. \quad (\text{B.5})$$

2) Índices inferiores iguais e diferentes do índice superior:  $\mu = \sigma; \sigma = \nu$

$$\Gamma^n u_{\sigma\sigma} = \frac{1}{2}g^{\nu\nu}\partial_{\nu}g_{\sigma\sigma} \quad (\text{B.6})$$

Fixando  $\nu = 0$  e variando  $\sigma$ :

$$\Gamma_{11}^0 = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0g_{11} \rightarrow \Gamma_{11}^0 = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\Gamma_{33}^0 = \Gamma_{22}^0 = \Gamma_{11}^0 = \Gamma_{00}^0 = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0g_{\mu\mu} = 0 \quad (\text{B.8})$$

Fixando  $\nu = 1$  e variando  $\sigma$ :

$$\Gamma_{00}^1 = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{00} \rightarrow \Gamma_{00}^1 = \frac{\lambda'(r)}{2}e^{(\lambda(r)-\nu(r))}; \quad (\text{B.9})$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{22} \rightarrow \Gamma_{22}^1 = -re^{-\nu(r)}; \quad (\text{B.10})$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{33} \rightarrow \Gamma_{33}^1 = -re^{-\nu(r)}\sin^2\theta. \quad (\text{B.11})$$

Fixando  $\nu = 2$  e variando  $\sigma$ :

$$\Gamma_{00}^2 = -\frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g_{00} \rightarrow \Gamma_{00}^2 = 0; \quad (\text{B.12})$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g_{11} \rightarrow \Gamma_{11}^2 = 0; \quad (\text{B.13})$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g_{33} \rightarrow \Gamma_{33}^2 = -\sin\theta \cos\theta. \quad (\text{B.14})$$

Fixando  $\nu = 3$  e variando  $\sigma$ :

$$\Gamma_{00}^3 = -\frac{1}{2}g^{33}\partial_3 g_{00} \rightarrow \Gamma_{00}^3 = 0. \quad (\text{B.15})$$

3) Índice superior é igual a um inferior:  $\nu = \sigma$ .

$$\Gamma_{\mu\sigma}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\sigma}\partial_\mu g_{\sigma\sigma} \quad (\text{B.16})$$

Fixando  $\mu = 0$  e variando  $\sigma$ :

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2}g^{11}\partial_0 g_{11} \rightarrow \Gamma_{01}^1 = 0; \quad (\text{B.17})$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2}g^{\sigma\sigma}\partial_0 g_{\sigma\sigma} = 0. \quad (\text{B.18})$$

Fixando  $\mu = 1$  e variando  $\sigma$ :

$$\Gamma_{10}^0 = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_1 g_{00} \rightarrow \Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = \frac{\lambda'(r)}{2}; \quad (\text{B.19})$$

$$\Gamma_{12}^2 = -\frac{1}{2}g^{22}\partial_1 g_{22} \rightarrow \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}; \quad (\text{B.20})$$

$$\Gamma_{13}^3 = -\frac{1}{2}g^{33}\partial_1 g_{33} \rightarrow \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}. \quad (\text{B.21})$$

Fixando  $\mu = 2$  e variando  $\sigma$ :

$$\Gamma_{20}^0 = \frac{1}{2}g^{00}\partial_2 g_{00} \rightarrow \Gamma_{20}^0 = \Gamma_{02}^0 = 0, \quad (\text{B.22})$$

$$\Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2}g^{11}\partial_2 g_{11} \rightarrow \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = 0, \quad (\text{B.23})$$

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2}g^{33}\partial_2 g_{33} \rightarrow \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot\theta. \quad (\text{B.24})$$

Fixando  $\mu = 3$  e variando  $\sigma$ :

$$\Gamma_{3\sigma}^\sigma = \Gamma_{\sigma 3}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\sigma}\partial_\psi g_{\sigma\sigma} = 0, \quad (\text{B.25})$$

$$\Gamma_{30}^0 = \Gamma_{03}^0 = \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{32}^2 = \Gamma_{23}^2 = 0. \quad (\text{B.26})$$

4) Todos os índices são diferentes  $\mu \neq \nu \neq \sigma$ . Fazendo uma permutação cíclica dos índices, chegaremos em  $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = 0$ .

## B.2 Componentes do tensor de Ricci

Agora calcularemos os componentes do tensor de Ricci, sendo resolvidos através da Equação (2.13). Para isso o número de equações de 16 para 4 já que os outros componentes são zero, tendo em vista que os termos da diagonal são os componentes não nulos:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma \rightarrow R_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{B.27})$$

quando  $\mu = \nu = 0$ ;  $\mu = \nu = 1$ ;  $\mu = \nu = 2$ ;  $\mu\nu = 3$ . Substituindo os índices na Equação(B.27), teremos o seguinte conjunto de equações:

$$\mu = \nu = 0 \rightarrow R_{00} = \partial_\sigma \Gamma_{00}^\sigma - \partial_0 \Gamma_{0\sigma}^\sigma + \Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma - \Gamma_{0\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^\sigma; \quad (\text{B.28})$$

$$\mu = \nu = 1 \rightarrow R_{11} = \partial_\sigma \Gamma_{11}^\sigma - \partial_1 \Gamma_{1\sigma}^\sigma + \Gamma_{11}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma - \Gamma_{1\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha 1}^\sigma; \quad (\text{B.29})$$

$$\mu = \nu = 2 \rightarrow R_{22} = \partial_\sigma \Gamma_{22}^\sigma - \partial_2 \Gamma_{2\sigma}^\sigma + \Gamma_{22}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma - \Gamma_{2\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha 2}^\sigma; \quad (\text{B.30})$$

$$\mu = \nu = 3 \rightarrow R_{33} = \partial_\sigma \Gamma_{33}^\sigma - \partial_3 \Gamma_{3\sigma}^\sigma + \Gamma_{33}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma - \Gamma_{3\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha 3}^\sigma. \quad (\text{B.31})$$

Para  $\mu \neq \nu$ , temos outras 12 equações zeradas. Resolvemos a Equação(B.28), calculando o primeiro termo, temos:

$$\partial_\sigma \Gamma_{00}^\sigma = \partial_0 \Gamma_{00}^0 + \partial_1 \Gamma_{00}^1 + \partial_2 \Gamma_{00}^2 + \partial_3 \Gamma_{00}^3. \quad (\text{B.32})$$

Observamos nas relações dos símbolos de Christoffel tem-se apenas o segundo termo da expressão acima:

$$\partial_\sigma \Gamma_{00}^\sigma = \partial_1 \Gamma_{00}^1 = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\lambda'}{2} e^{\lambda(r)-\xi(r)} \right), \quad (\text{B.33})$$

que simplificando, obtemos que:

$$\partial_\sigma \Gamma_{00}^\sigma = \partial_1 \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} e^{\lambda(r)-\xi(r)} (\lambda''(r) + \lambda'(r)(\lambda'(\lambda'(r) - \xi'(r))). \quad (\text{B.34})$$

O segundo termo da equação será nulo, termo que se refere ao sistema estático.

Expandindo o terceiro termo, temos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma = & \Gamma_{00}^0 (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) + \Gamma_{00}^1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) \\ & + \Gamma_{00}^2 (\Gamma_{20}^0 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) + \Gamma_{00}^3 (\Gamma_{30}^0 + \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3), \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

organizando os termos, ele é expresso como:

$$\Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma = \frac{1}{2} \lambda'(r) \left( \frac{1}{2} \lambda'(r) + \frac{1}{2} \xi'(r) + \frac{2}{r} \right) e^{\lambda(r)-\xi(r)}. \quad (\text{B.36})$$

Para o quarto termo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{0\alpha}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^\sigma = & \Gamma_{00}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{02}^0 \Gamma_{00}^2 + \Gamma_{03}^0 \Gamma_{00}^3 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{10}^1 + \Gamma_{02}^1 \Gamma_{10}^2 + \Gamma_{03}^1 \Gamma_{10}^3 \\ & + \Gamma_{00}^2 \Gamma_{20}^0 + \Gamma_{01}^2 \Gamma_{20}^1 + \Gamma_{02}^2 \Gamma_{20}^2 + \Gamma_{03}^2 \Gamma_{20}^3 + \Gamma_{00}^3 \Gamma_{30}^0 + \Gamma_{01}^3 \Gamma_{30}^1 + \Gamma_{02}^3 \Gamma_{30}^2 + \Gamma_{03}^3 \Gamma_{30}^3, \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Simplificando encontramos

$$\begin{aligned}\Gamma_{0\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^\sigma &= \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0, \\ \Gamma_{0\alpha}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^\sigma &= \frac{\lambda'^2}{2} e^{(\lambda(r)-\xi(r))}.\end{aligned}\quad (\text{B.38})$$

Com isso montamos a primeira equação:

$$\begin{aligned}R_{00} = 0 \rightarrow R_{00} &= \frac{1}{2} e^{(\lambda(r)-\xi(r))} (\lambda''(r) + \lambda'(r)(\lambda'(r) - \xi'(r))) \\ &+ \frac{1}{2} \lambda'(r) + \frac{1}{2} \xi'(r) + \frac{2}{r} e^{\lambda(r)-\xi(r)} + \frac{\lambda'^2}{2} e^{\lambda(r)-\xi(r)}.\end{aligned}\quad (\text{B.39})$$

Simplificando a expressão, chegaremos a:

$$\frac{\lambda''(r)}{2} + \frac{\lambda'^2(r)}{4} - \frac{\lambda'(r)\xi'(r)}{4} + \frac{\lambda'(r)}{r} = 0.\quad (\text{B.40})$$

A solução da segunda equação é:

$$R_{11} = 0 \rightarrow R_{11} = \partial_\sigma \Gamma_{11}^\sigma - \partial_1 \Gamma_{1\sigma}^\sigma + \Gamma_{11}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma - \Gamma_{1\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha 1}^\sigma.\quad (\text{B.41})$$

Para o primeiro termo:

$$\partial_\sigma \Gamma_{11}^\sigma = \partial_1 \Gamma_{11}^1 = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2} \xi'(r) \right), \quad \partial_\sigma \Gamma_{11}^\sigma = \frac{1}{2} \xi''(r),\quad (\text{B.42})$$

para o segundo

$$\begin{aligned}\partial_1 \Gamma_{1\sigma}^\sigma &= \partial_1 \Gamma_{10}^0 + \partial_1 \Gamma_{11}^1 + \partial_1 \Gamma_{12}^2 + \partial_1 \Gamma_{13}^3, \\ \partial_1 \Gamma_{1\sigma}^\sigma &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2} \lambda'(r) \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2} \xi'(r) \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right).\end{aligned}\quad (\text{B.43})$$

simplificando, podemos encontrar que:

$$\partial_1 \Gamma_{1\sigma}^\sigma = \frac{1}{2} \lambda''(r) + \frac{1}{2} \xi''(r) - \frac{2}{r^2}.\quad (\text{B.44})$$

o terceiro termo, é dado como:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma &= \Gamma_{11}^0 (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) \\ &+ \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{20}^0 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) + \Gamma_{11}^3 (\Gamma_{30}^0 + \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3)\end{aligned}\quad (\text{B.45})$$

organizando os termos, temos que

$$\Gamma_{11}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma = \frac{\xi'(r)^2}{4} + \frac{\lambda'(r)\xi'(r)}{4} + \frac{\xi'(r)}{r}.\quad (\text{B.46})$$

Já o quarto termo

$$\begin{aligned}\Gamma_{1\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha 1}^\sigma &= \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{10}^2 \Gamma_{21}^0 + \Gamma_{10}^3 \Gamma_{31}^0 \\ &+ \Gamma_{11}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{31}^1 \\ &+ \Gamma_{12}^0 \Gamma_{01}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{12}^3 \Gamma_{31}^2 \\ &+ \Gamma_{13}^0 \Gamma_{01}^3 + \Gamma_{13}^1 \Gamma_{11}^3 + \Gamma_{13}^2 \Gamma_{21}^3 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3.\end{aligned}\quad (\text{B.47})$$

simplificando temos

$$\Gamma_{1\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha 1}^\sigma = \frac{\lambda'^2(r)}{4} + \frac{\xi'^2(r)}{4} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}. \quad (\text{B.48})$$

e a segunda equação fica

$$R_{11} = 0; \quad R_{11} = \frac{1}{2}\xi''(r) - \left(\frac{1}{2}\lambda''(r) + \frac{1}{2}\xi''(r) - \frac{2}{r^2}\right) + \frac{\xi'^2}{4} + \frac{\lambda'(r)\xi'(r)}{4} + \frac{\xi'(r)}{r} - \left(\frac{\lambda'^2(r)}{4} + \frac{\xi'^2(r)}{4} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\right). \quad (\text{B.49})$$

Organizando a expressão, chegaremos a

$$\frac{\lambda''(r)}{2} + \frac{\lambda'^2(r)}{4} - \frac{\lambda'(r)\xi'(r)}{r^2} - \frac{\xi'(r)}{r} = 0 \quad (\text{B.50})$$

Resolvendo a terceira equação

$$\mu = \nu = 2; \quad R_{22} = \partial_\sigma \Gamma_{22}^\sigma - \partial_2 \Gamma_{2\sigma}^\sigma + \Gamma_{22}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma - \Gamma_{2\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha 2}^\sigma \quad (\text{B.51})$$

No primeiro termo temos:

$$\partial_\sigma \Gamma_{22}^\sigma = \partial_0 \Gamma_{22}^0 + \partial_1 \Gamma_{22}^1 + \partial_2 \Gamma_{22}^2 + \partial_3 \Gamma_{22}^3, \quad (\text{B.52})$$

$$\partial_\sigma \Gamma_{22}^\sigma = \partial_1 \Gamma_{22}^1 = r\xi'(r)e^{-\xi(r)} - e^{-\xi(r)}. \quad (\text{B.53})$$

para o segundo termo temos:

$$\partial_2 \Gamma_{2\sigma}^\sigma = \partial_2 \Gamma_{20}^0 + \partial_2 \Gamma_{21}^1 + \partial_2 \Gamma_{22}^2 + \partial_2 \Gamma_{23}^3, \quad (\text{B.54})$$

$$\partial_2 \Gamma_{2\sigma}^\sigma = \partial_2 \Gamma_{23}^3 = -\csc^2 \theta \quad (\text{B.55})$$

ao desenvolvemos o terceiro termo, obtemos que

$$\Gamma_{22}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma = \Gamma_{22}^0 (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) + \Gamma_{22}^1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) \quad (\text{B.56})$$

$$+ \Gamma_{22}^2 (\Gamma_{20}^0 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) + \Gamma_{22}^3 (\Gamma_{30}^0 + \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3) \quad (\text{B.57})$$

igualmente que

$$\partial_2 \Gamma_{2\sigma}^\sigma = -\frac{\lambda'(r)re^{-\xi(r)}}{2} - \left(\frac{-\xi're^{-\xi(r)}}{2}\right) - e^{-\xi(r)}. \quad (\text{B.58})$$

No quarto termo temos

$$\begin{aligned} \partial_2 \Gamma_{2\sigma}^\sigma &= \Gamma_{20}^0 \Gamma_{02}^0 + \Gamma_{20}^1 \Gamma_{12}^0 + \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{20}^3 \Gamma_{32}^0 \\ &+ \Gamma_{21}^0 \Gamma_{02}^1 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{21}^3 \Gamma_{32}^1 \\ &+ \Gamma_{22}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{32}^2 \\ &+ \Gamma_{23}^0 \Gamma_{02}^3 + \Gamma_{23}^1 \Gamma_{12}^3 + \Gamma_{23}^2 \Gamma_{22}^3 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

Substituindo os símbolos e reorganizando, teremos

$$\begin{aligned} \partial_2 \Gamma_{2\sigma}^\sigma &= \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3; \\ \partial_2 \Gamma_{2\sigma}^\sigma &= \cot^2 \theta - e^{-\xi(r)}. \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

Agora a terceira equação fica

$$\begin{aligned} R_{22} &= 0; \\ R_{22} &= r\xi'(r)e^{-\xi(r)} - e^{-\xi(r)} - (-\csc^2 \theta) \\ &+ \left(-\frac{\lambda'(r)re^{-\xi(r)}}{2} - \left(\frac{-\xi're^{-\xi(r)}}{2}\right) - e^{-\xi(r)} - (\cot^2 \theta - e^{-\xi(r)}).\right. \end{aligned} \quad (\text{B.61})$$

simplicando, teremos que

$$\left(1 + \frac{r}{2}(\lambda'(r) - \xi'(r))\right)e^{-\xi(r)} - 1 = 0. \quad (\text{B.62})$$

assim a quarta equação é:

$$R_{33} = 0 ; R_{33} = \partial_\sigma \Gamma_{33}^\sigma - \partial_3 \Gamma_{3\sigma}^\sigma + \Gamma_{33}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma - \Gamma_{3\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha 3}^\sigma. \quad (\text{B.63})$$

No primeiro termo, temos

$$\partial_\sigma \Gamma_{33}^\sigma = \partial_0 \Gamma_{33}^0 + \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2 + \partial_3 \Gamma_{33}^3; \quad (\text{B.64})$$

$$\partial_\sigma \Gamma_{33}^\sigma = -e^{-\xi(r)} \sin^2 \theta + r\xi'(r)e^{-\xi(r)} \sin^2 \theta + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta, \quad (\text{B.65})$$

no segundo termo

$$\partial_3 \Gamma_{3\sigma}^\sigma = \partial_3 \Gamma_{30}^0 + \partial_3 \Gamma_{31}^1 + \partial_3 \Gamma_{32}^2 + \partial_3^3; \quad (\text{B.66})$$

$$\partial_3 \Gamma_{3\sigma}^\sigma = 0, \quad (\text{B.67})$$

abrindo o terceiro termo

$$\begin{aligned} \Gamma_{33}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma &= \Gamma_{33}^0 (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) + \Gamma_{33}^1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) \\ &+ \Gamma_{33}^2 (\Gamma_{20}^0 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) + \Gamma_{33}^3 (\Gamma_{30}^0 + \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3). \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

Reduzimos a equação anterior para

$$\Gamma_{33}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma = \Gamma_{33}^1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 \quad (\text{B.69})$$

$$\Gamma_{33}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma = -re^{-\xi(r)} \sin^2 \theta \left( \frac{1}{2} \lambda'(r) + \frac{1}{2} \xi'(r) + \frac{2}{r} \right) + (-\sin \theta \cos \theta) \cot \theta, \quad (\text{B.70})$$

o quarto termo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{3\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha 3}^\sigma &= \Gamma_{30}^0 \Gamma_{03}^0 + \Gamma_{30}^1 \Gamma_{13}^0 + \Gamma_{30}^2 \Gamma_{23}^2 + \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 \\ &+ \Gamma_{31}^0 \Gamma_{03}^1 + \Gamma_{31}^1 \Gamma_{13}^1 + \Gamma_{31}^2 \Gamma_{23}^1 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 \\ &+ \Gamma_{32}^0 \Gamma_{03}^2 + \Gamma_{32}^1 \Gamma_{13}^2 + \Gamma_{32}^2 \Gamma_{23}^2 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 \\ &+ \Gamma_{33}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{33}^3 \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

Se resume a

$$\Gamma_{3\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha 3}^\sigma = \Gamma_{31}^3 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3. \quad (\text{B.72})$$

e simplificando temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{3\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha 3}^\sigma &= \frac{1}{r} (-re^{-\xi(r)} \sin^2 \theta) + (-\sin \theta \cos \theta) \cot \theta \\ &+ (-re^{-\xi(r)} \sin^2 \theta) \frac{1}{r} + (-\sin \theta \cos \theta) \cot \theta. \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

Organizando os termos com as equações encontradas anteriormente, montamos a quarta equação

$$R_{33} = 0; \quad (\text{B.74})$$

$$\begin{aligned} R_{33} = & -e^{-\xi(r)} \sin^2 \theta + r\xi'(r)e^{-\xi(r)} \sin^2 \theta + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ & -re^{-\xi(r)} \sin^2 \theta \left( \frac{1}{2}\lambda'(r) + \frac{1}{2}\xi'(r) + \frac{2}{r} \right) \\ & + (-\sin \theta \cos \theta) \cot \theta + (-re^{-\xi(r)} \sin^2 \theta) \frac{1}{r} \\ & + (-\sin \theta \cos \theta) \cot \theta. \end{aligned} \quad (\text{B.75})$$

Simplificando a equação anterior, chegaremos em

$$\left[ \left( 1 + \frac{r}{2} (\lambda'(r) - \xi'(r)) \right) e^{-\xi(r)} \sin^2 \theta \right] = 0. \quad (\text{B.76})$$

Com isso, montamos o seguinte sistema de equações

$$\frac{\lambda''(r)}{2} + \frac{\lambda'^2(r)}{4} - \frac{\lambda'(r)\xi'(r)}{4} + \frac{\lambda'(r)}{r} = 0 \quad (\text{B.77})$$

$$\frac{\lambda''(r)}{2} + \frac{\lambda'^2(r)}{4} - \frac{\lambda'(r)\xi'(r)}{r^2} - \frac{\xi'(r)}{r} = 0 \quad (\text{B.78})$$

$$\left( 1 + \frac{r}{2} (\lambda'(r) - \xi'(r)) \right) e^{-\xi(r)} - 1 = 0 \quad (\text{B.79})$$

$$\left[ \left( 1 + \frac{r}{2} (\lambda'(r) - \xi'(r)) \right) e^{-\xi(r)} \sin^2 \theta \right] = 0. \quad (\text{B.80})$$