

Arlindo G. Granado Filho
CPqD-TELEBRÁS

José Geraldo Chiquito
DECOM-FEE-UNICAMP

Resumo

A larga aplicação de medidores de correlação encontrada na moderna tecnologia, tem levado, nas duas últimas décadas, a um esforço no sentido de encontrar técnicas digitais que simplifiquem sua implementação e permitam operação com sinais de altas frequências. Neste trabalho mostra-se que o emprego de quantizadores com pequeno número de bits, chegando ao limite de um bit apenas, permite a obtenção da medida dentro de limites controláveis de erro. Neste contexto, mostra-se como o ruído de "dithering" pode ser empregado para linearização dos correladores digitais. Com respeito ao uso de quantizadores com espaçamento não uniforme entre os níveis, obteve-se alguns resultados até então não encontrados na literatura.

I. Introdução

As técnicas de medida de correlação encontram larga aplicação na moderna tecnologia em suas mais variadas áreas. Na área de comunicações é empregada em sistemas de radar, identificação de parâmetros em sistemas lineares, detecção de sinais FSK, etc. Na indústria mecânica permite a realização de medidas de torção em eixos, ou da velocidade de transporte das chapas de aço, em alta temperatura, nas laminadoras da indústria metalúrgica. Na área de instrumentação médica, as técnicas de correlação permitem a detecção de sinais de eletrocardiograma e eletroencefalograma em condições desfavoráveis de ruído. Em radioastronomia facilita a detecção de sinais muito fracos.

A correlação cruzada entre dois sinais aleatórios $x(t)$ e $y(t)$, estacionários e ergódicos, é dada por:

$$R_{xy}(\tau) = \langle x(t)y(t-\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t-\tau) dt \quad (I.1)$$

Para a implementação de um medidor de correlação, é necessário realizar as seguintes operações (fig. 01):

- 1) atrasar um dos sinais de τ segundos.
- 2) realizar a multiplicação de dois sinais.
- 3) integrar o resultado da multiplicação.

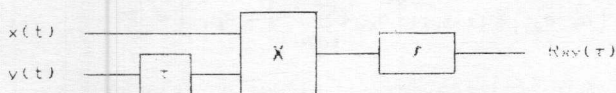


Fig. 01 - Correlador básico

Nas técnicas puramente digitais, os sinais são amostrados e codificados, o atrasador é construído com registradores de deslocamento e a integração se converte na soma ou acumulação dos valores fornecidos pelo multiplicador.

Existem basicamente 5 tipos diferentes de medidores de correlação:

1) Correlador Direto Analógico - Determina a correlação processando diretamente os sinais de entrada. Estes são atrasados, multiplicados e integrados empregando-se exclusivamente elementos analógicos. Nenhum tipo de quantização é realizada.

2) Correlador Direto Digital - Os sinais de entrada sofrem amostragem e conversão A/D e são processados numericamente. Os níveis de quantização são suficientemente pequenos para que não se manifestem de maneira significativa nos erros da medida. Apresentam como desvantagens principais a complexidade da implementação e a baixa velocidade de processamento.

3) Correlador Magnitude x Polaridade - Um dos sinais de entrada é amostrado e quantizado com resolução elevada. O outro fornece um valor igual a 1 ou -1 segundo a polaridade de sua amostra, o que elimina o emprego de um segundo conversor A/D. A multiplicação se converte em se tomar a amostra do primeiro sinal, ou este valor com sinal trocado. Mesmo com uma quantização tão grosseira, tal método permite estimar a correlação dentro de limites controláveis de erro, como será mostrado.

4) Correlador Polaridade x Polaridade - Em ambas as entradas do correlador toma-se apenas a polaridade do sinal. Constitui-se, obviamente, no método mais simples e com maior rapidez de processamento, dentre os digitais, para a realização da medida. O erro resultante desta quantização extremamente não-linear é controlável, podendo ser restrito a valores toleráveis.

5) Correlador Magnitude x Quantização em N níveis. Cons titui-se num caso intermediário entre os casos 2 e 3. O segundo quantizador é realizado com N níveis não necessariamente com espaçamento uniforme, constituindo uma não-linearidade acentuada. Este correlador representa uma solução de compromisso entre complexidade e desempenho.

Como característica comum dos métodos digitais, um dos sinais (ou os dois) é submetido a uma não-linearidade do tipo quantização. A correlação dos sinais originais é estimada através de suas versões quantizadas.

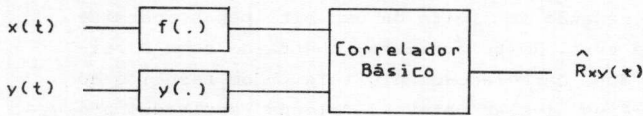


Fig. 02 - Esquema genérico do correlador

Deseja-se que $\hat{R}_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau)$.

Uma vez disponíveis os sinais digitais $f(x)$ e $g(y)$, a correlação é calculada tomando-se a média do produto das amostras de $f(x)$ multiplicadas pelas amostras de $g(y)$:

$$\hat{R}_{xy}(k) = \overline{f(x_n) \cdot g(y_{n-k})}$$

onde $x_n = x(nT)$ e $y_n = y(nT)$, sendo T a resolução do correlador no tempo. O cálculo da média pode ser feito via filtragem passa baixas (filtro digital), ou simplesmente pela acumulação de L valores e divisão por L (média direta), sendo este o caso considerado neste trabalho.

$$\hat{R}_{xy}(k) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} f(x_i) g(y_{i-k}) \quad (I.2)$$

II. Medidas de Correlação com Emprego de "Dithering"

Antes de ser submetido a uma quantização grosseira, o sinal de entrada é somado a um ruído branco, estacionário e cuja distribuição deve satisfazer determinadas condições, como será mostrado adiante. É necessário impor uma limitação em amplitude ao sinal de entrada.

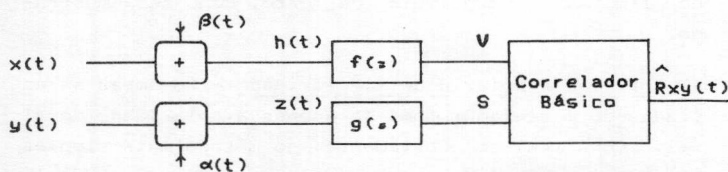


Fig. 03 - Correlador com "dithering"

II.1. Classes de Distribuição de "Dithering" que Linearizam a Medida

Quando ambas as entradas h e z estão sujeitas a quantizadores genéricos, a correlação é dada por:

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \iiint_{-\infty}^{\infty} f(x+\beta) g(y+\alpha) p_2(x,y) p_\beta(\beta) p_\alpha(\alpha) dx dy d\beta d\alpha \quad (II.1)$$

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x) \bar{g}(y) p_2(x,y) dx dy \quad (II.2)$$

onde

$$\bar{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\beta) p_\beta(\beta) d\beta \quad (II.3.a)$$

$p_2(x,y)$; $p_\alpha(\alpha)$ e $p_\beta(\beta)$ são densidades de probabilidade.

$$\bar{g}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y+\alpha) p_\alpha(\alpha) d\alpha \quad (II.3.b)$$

são denominadas funções de transferência médias dos quantizadores. Demonstrar-se-á que existe uma classe de distribuições do ruído de "dithering" para a qual tem-se $\bar{f}(x) = x$ e $\bar{g}(y) = y$.

Supondo $f(x)$ a curva de um quantizador genérico como o da fig.04, com número finito de níveis igual a $J+N$, pode-se escrever

$$\bar{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_\beta(\beta-x) d\beta$$

$$\bar{f}(x) = \sum_{k=-J}^{N-1} a_k \int_{b_k}^{b_{k+1}} p_\beta(\beta-x) d\beta + a_{N-1} \int_{-\infty}^{b_J} p_\beta(\beta-x) d\beta + a_{N-1} \int_{b_N}^{\infty} p_\beta(\beta-x) d\beta \quad (II.4)$$

O primeiro termo da eq. (II.4) resulta do trecho em "escada" do quantizador, onde não ocorre saturação. Usando a função distribuição acumulada $F(x)$, obtém-se

$$\bar{f}(x) = \sum_{k=-J+1}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) F(x - b_k) + [a_{N-1} + \sum_{k=-J+1}^{N-1} (-a_k + a_{k+1})] \quad (II.5)$$

com $F(x) = \int_{-\infty}^x p_\beta(x') dx'$

Para se ter $\bar{f}(x) = x$, é necessário que

$$\sum_{k=-J+1}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) F(x - b_k) + [a_{N-1} + \sum_{k=-J+1}^{N-1} (-a_k + a_{k+1})] = x \quad (II.6)$$

ou, diferenciando ambos os lados em relação a x :

$$\sum_{k=-J+1}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) p_\beta(x - b_k) = 1 \quad (II.7)$$

Com o mesmo procedimento, conclui-se que $\bar{g}(y) = y$ se

$$\sum_{k=-J+1}^{N-1} (c_k - c_{k-1}) p_{dx}(y - d_k) = 1$$

onde c_k e d_k são os níveis do quantizador do canal de $y(t)$ e $p_{dx}(y)$ é a fdp do ruído de "dithering" correspondente.

Se $\bar{f}(x) = x$ e $\bar{g}(y) = y$, então chega-se à conclusão fundamental de que $\hat{R}_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau)$ em (II.2).

Particularizando para o quantizador uniforme, com arredondamento e sem "zona morta" na origem, para o qual

$$a_i = q(i - \frac{1}{2}) \quad b_i = qi \quad e \quad J = N$$

resulta

$$q \sum_{i=-N+1}^{N-1} p_{dx}(x - qi) = 1 \quad (II.7.a)$$

O ruído com distribuição uniforme entre $-A$ e A ($A = q/2$ no caso do quantizador uniforme) é um caso particular de sinal que satisfaz (II.7) e corresponde à mínima largura de faixa de distribuição ainda capaz de linearizar a medida.

O ruído gaussiano não satisfaz a condição (II.7), no entanto, a escolha de um valor suficientemente grande para a variância pode levar a uma boa aproximação da característica linear desejada, como é ilustrado na fig. 05.

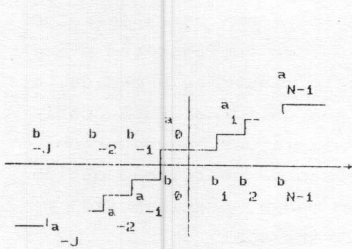


Fig. 04 - Curva do quantizador

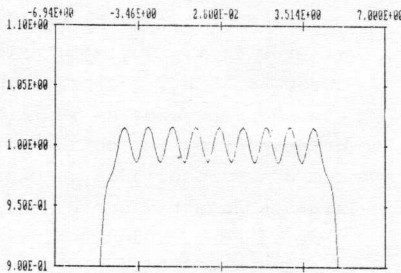


Fig. 05 - Gráfico de (II.7) com $p(x)$ gaussiano $\sigma=0,5$, $N=6$ e $q=1$.

O ruído de "dithering" pode ser empregado de duas maneiras:

- com quantização extremamente grosseira (1 bit, tipo polaridade). Neste caso, a linearização do quantizador somente será obtida com "dithering" uniforme. A função de transferência média do quantizador será linear apenas para sinais de entrada pertencentes ao intervalo $(-A, A)$. Isto requer que o sinal de entrada seja limitado em amplitude, e em geral este terá potência menor do que o ruído de "dithering".
- com quantização medianamente grosseira (alguns bits somente). O sinal de entrada pode assumir valores fora do intervalo $(-A, A)$. Não é necessário que a

distribuição do "dithering" seja uniforme, basta que a potência seja suficiente para "ultrapassar" a distância entre níveis de quantização.

Em ambos os casos, o "dithering" promove uma linearização da quantização. No caso (a), isto é necessário para sinais de qualquer amplitude. No caso (b), principalmente para sinais fracos comparados com o primeiro degrau de quantização.

II.2. Correlador Magnitude x Polaridade

Neste correlador $y[\gamma(t) + \alpha(t)] = A \sin \alpha[\gamma(t) + \alpha(t)]$. A entrada $x(t)$ é quantizada com alta resolução, o que dispensa o uso do ruído auxiliar $\beta(t)$. Com "dithering" uniforme, e $y(t)$ limitado ao intervalo $(-A, A)$, tem-se:

$$\bar{g}[\gamma(t)] = \gamma(t)$$

Aplicando este resultado em (II.2) resulta

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) \quad (II.8)$$

O estimador da correlação é dado por

$$\hat{R}_{xy}(k, L) = \frac{A}{L} \sum_{n=1}^L x_n \sin \alpha(z_{n-k}) \quad (II.9)$$

o qual é não polarizado

$$E[\hat{R}_{xy}(k, L)] = R_{xy}(k)$$

O erro quadrático médio é frequentemente empregado como critério de comparação entre diferentes métodos de medidas. Chamando de $\sigma_r^2(k, L)$ a variância do correlador direto digital, pode-se mostrar que [1]:

$$\sigma_r^2(k, L) = \frac{1}{L} R_{xy}(k) + \frac{2}{L^2} \sum_{l=1}^{L-1} (L-l) \mu_{xy}(l, k) - R_{xy}^2(k) \quad (II.11)$$

onde

$$\mu_{xy}(l, k) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L x_n y_{n-k} x_{n-l} y_{n-l-k} \quad (II.12)$$

é o momento misto de 4a. ordem de x e y .

A variância na medida fornecida pelo correlador magnitude x polaridade pode ser escrita em termos de $\sigma_r^2(k, L)$ [2]:

$$\sigma_R^2(k, L) = \sigma_r^2(k, L) + \frac{1}{L} [A^2 R_{xx}(0) - R_{xy}^2(k)] \quad (II.13)$$

A eq. (II.13) mostra que o erro neste correlador pode ser feito tão próximo quanto se queira de $\sigma_r^2(k, L)$, através de uma escolha apropriada de L e A . Valores elevados de A permitem maior excursão aos sinais de entrada, no entanto levam a um acréscimo no desvio da medida. Este efeito pode ser compensado com o emprego de L também elevado, o que corresponde a tomar um número maior de amostras para o cálculo de $\hat{R}_{xy}(k, L)$. No limite, à medida que o número de amostras cresce, o erro tende a uma constante, tornando-se igual ao erro do correlador direto digital.

II.3. Correlador Polaridade x Polaridade

São empregadas duas fontes de ruído auxiliar,

$\alpha(t)$ e $\beta(t)$, independentes entre si e de distribuição uniforme. Os quantizadores são $f(h) = A \cdot \text{sinal}(h)$ e $g(z) = A \cdot \text{sinal}(z)$.

A eq. (II.2) leva a

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) \quad (II.15)$$

A correlação é estimada de maneira bastante simples:

$$\hat{R}_{xy}(k, L) = \frac{A^2}{L} \sum_{n=1}^L \text{sinal}(R_n) \text{sinal}(z_{n-k}) \quad (II.16)$$

e $R_{xy} = E[\hat{R}_{xy}(k, L)]$.

A variância da medida é expressa por [1]:

$$\sigma_R^2(k, L) = \sigma_f^2(k, L) + \frac{1}{L} [A^4 - R_{x^2 y^2}(k)] \quad (II.17)$$

Como no caso do correlador magnitude x polaridade, o erro pode ser controlado pela escolha conveniente de A e L. Uma comparação entre (II.13) e (II.17) mostra que o desvio da medida é maior com o correlador polaridade-polaridade. Isto era de se esperar, uma vez que uma segunda fonte de ruído é empregada e as duas entradas sofrem quantização grosseira.

A implementação é bastante simples: o multiplicador se resume a uma porta OU-exclusivo e um inversor, e o somador a um contador. Como comentado na introdução, os elementos de atraso são registradores de deslocamento. Pode-se obter uma alta velocidade de processamento.

II.4. Medidas de Correlação com Maior Número de Níveis no Quantizador

Uma forma de reduzir o erro da medida, sem contudo aumentar em demasia a complexidade de implementação, pode ser obtida com o correlador magnitude x N níveis. Ao invés de tomar-se $N=2$, como feito até agora, toma-se um número maior, onde o valor de cada nível de saída do quantizador corresponde a uma potência de 2. Procedendo assim, as multiplicações das amostras consistem em simples deslocamentos das palavras digitais.

Os pontos b_i de transição de $g(y)$ não são uniformemente espaçados (vide fig. 06).

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} g(y+\alpha) p_x(\alpha) d\alpha] x p_2(x, y) dx dy \quad (II.18)$$

Na eq. (II.18) o termo entre colchetes é $\bar{g}(y)$.

No início desta seção discutiu-se a linearização de quantizadores uniformes. Para o quantizador não uniforme da fig. 06, a eq. (II.5) se torna:

$$\bar{g}(y) = q \sum_{i=1}^6 a_i F(y - b_i) - 4q \quad (II.19)$$

onde $a_1 = a_6 = 2q$ e $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = q$ correspondem às diferenças entre níveis de quantização adjacentes, e b_i são os pontos de transição no eixo y.

Em (II.19) pode-se também impor $\bar{g}(y) = y$

o que leva a

$$q \sum_{i=1}^6 a_i p_x(y - b_i) = 1 \quad (II.20)$$

Supondo ruído de "dithering" gaussiano, por exemplo, a eq. (II.20) jamais é satisfeita. No entanto, pode-se procurar um conjunto de pontos b_i que minimize o erro de ganho

$$\text{erro}(y) = q \sum_{i=1}^6 a_i p_x(y - b_i) - 1 \quad (II.21)$$

Na fig. 07 está mostrado o gráfico de erro(y) para $b_1 = 0,5 \cdot q$, $b_2 = 1,5 \cdot q$, $b_3 = 2,85 \cdot q$ e ruído de "dithering" com $\sigma_D = 0,5 \cdot q$.

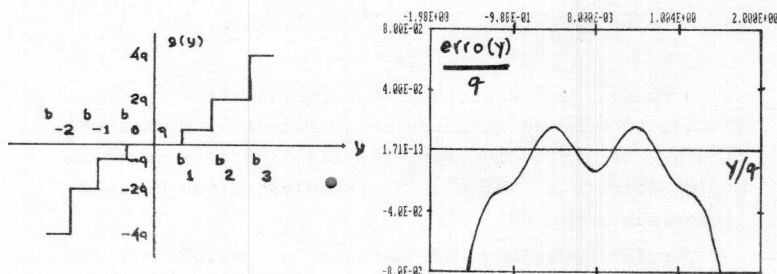


Fig. 06 - Quantizador não uniforme

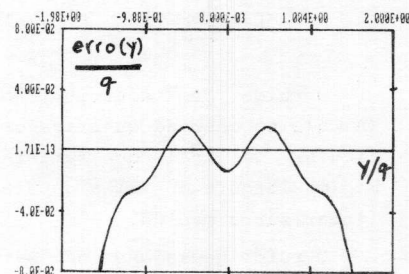


Fig. 07 - Curva de erro de ganho do quantizador

Percebe-se que este arranjo dos pontos b_i leva a um ganho praticamente unitário para uma certa faixa de valores de y. Ou seja, existe uma configuração ótima dos pontos b_i , que praticamente lineariza a medida, e que são espaçados de maneira não uniforme. Esta configuração ótima foi obtida via simulações em computador. Com estes resultados, a expressão da correlação obtida através do estimador \hat{R}_{xy} é, em média, praticamente a medida da correlação dos sinais de entrada:

A variância da medida pode ser obtida com

$$\sigma_R^2(k, L) = E[\hat{R}_{xy}^2(k, L)] - R_{xy}^2(k) \quad (II.22)$$

Pode-se mostrar que o desenvolvimento de (II.22) leva a

$$\sigma_R^2(k, L) = \sigma_f^2(k, L) + \frac{1}{L} [M(k) - R_{x^2 y^2}(k)] \quad (II.23)$$

onde

$$M(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left[q^2 \sum_{i=2}^3 (a_k^2 - a_{k-1}^2) F(y_{n-k} - b_i) + 16q^2 \right] p_2(x_n, y_{n-k}) dx_n dy_{n-k} \quad (II.24)$$

Esta técnica leva a uma variância da medida menor do que aquelas obtidas com os correladores polaridade x polaridade e magnitude x polaridade.

Há duas vantagens principais deste correlador sobre um que empregasse quantização em N níveis igualmente espaçados e "dithering" com distribuição uniforme:

- requer multiplicações apenas por potências de 2. O quantizador uniforme exigiria multiplicações por 1,2,3 ...;
- quando trabalhando com sinais de alta frequência é difícil gerar ruído de "dithering" branco e com distribuição uniforme. O ruído gaussiano é mais fácil de ser gerado neste caso.

II.5. Exemplo Quantitativo

Para permitir uma comparação quantitativa do desempenho dos três correladores discutidos, suponha que se deseja medir a auto-correlação de um sinal gaussiano $x(t)$, o qual é um ruído branco, com $R_{xx}(k) = \sigma^2 \cdot \delta(k)$. Particulariza-se para $\sigma = 0,4$ Volts. O ruído de "dithering" é uniforme, com $A = 1,6$ V, para os correladores magnitude x polaridade e polaridade x polaridade, de forma que o sinal de entrada fica praticamente limitado ao intervalo $(-A, A)$. Para o correlador magnitude x N níveis apresentado, faz-se $q = 1$ e emprega-se ruído de "dithering" gaussiano de $\sigma_D = 0,5$ V, o que garante pequeno erro de linearidade do quantizador para sinais de entrada pertencentes ao intervalo $-1,6$ V a $1,6$ V, conforme mostra a fig. 07.

A medida de $R_{xx}(0)$ leva a σ^2 . Definindo $\gamma = \sigma_R^2 / \sigma^2$ como a relação (erro da medida)/(valor medido), obtêm-se os seguintes valores para os três estimadores:

polaridade x polaridade (PxP): $\gamma = 40,8/L$
 magnitude x polaridade (MxP): $\gamma = 2,38/L$
 magnitude x quantização em N níveis (MxN): $\gamma = 0,65/L$

O cálculo de M foi feito via integração numérica.

Estes valores são apresentados em dB, em função de N, na fig.08.

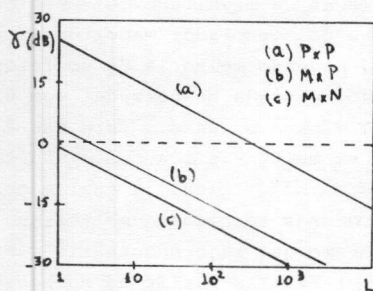


Fig. 08 - (erro da medida)/(valor medido) x L

O correlador magnitude x N níveis tem um desempenho sensivelmente melhor que os demais. Nos três casos, cada vez que se multiplica por 100 o número de pontos para cálculo da média (L), o erro da medida diminui de 20 dB.

III. Medidas de Correlação com Sinais Gaussianos

Os resultados apresentados na seção II são gerais,

valendo para medidas de correlação de sinais com distribuições quaisquer. Nesta seção serão discutidas as técnicas de medidas de correlação para a importante classe dos sinais gaussianos.

Os sinais gaussianos estão entre os sinais aleatórios mais frequentes na natureza. Além disso, permitem uma análise mais fácil que para outros sinais aleatórios. Para eles é possível implementar correladores com quantização grosseira mesmo sem o emprego de "dithering".

III.1. Correlador Tipo Magnitude-Polaridade

Considerando a não existência de ruído de "dithering":

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x p_2(x,y) dx dy \right] \quad (III.1)$$

Mostra-se em [3] que para sinais gaussianos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x p_2(x,y) dx = y p_{xy}(\tau) p_1(y) \quad (III.2)$$

Substituindo em (III.1):

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = C p_{xy}(\tau) \quad (III.3.a)$$

onde
$$C = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \int_{-\infty}^{\infty} y g(y) p_1(y) dy \quad (III.3.b)$$

e
$$p_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) / \sigma_x \sigma_y$$

No caso particular onde $g(y) = \text{sinal}(y)$:

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_x p_{xy}(\tau) \quad (III.4)$$

Mesmo tomando a polaridade de apenas uma das entradas, o correlador magnitude x polaridade fornece o valor correto da correlação entre $x(t)$ e $y(t)$, quando estes são gaussianos, sem necessidade do ruído de "dithering" para promover a linearização do correlador. Obviamente este é um resultado interessante, pois em geral o uso de "dithering" tende a aumentar a variância da medida.

III.2. Correlador Tipo Polaridade x Polaridade

Para sinais gaussianos, e sem o emprego de "dithering", o estimador da correlação fornece [3]:

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \arcsen [p_{xy}(\tau)] \quad (III.5)$$

Novamente tem-se uma expressão fechada, sendo necessário uma linearização da função arcsen para se obter a correlação entre $x(t)$ e $y(t)$.

Estas duas técnicas levam a implementações bastante simples, porém restritas a aplicações com sinais

gaussianos. Seu emprego com sinais não gaussianos, pode acarretar em erro de medida. Na prática é difícil de se saber a quais outros sinais, que não gaussianos, estes dois métodos são aplicáveis sem o uso de "dithering".

III.3. Correlador Magnitude x Quantização em N níveis

De acordo com (III.3.a):

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = C(\sigma_x, \sigma_y) \cdot \rho_{xy}(\tau)$$

e a equação (III.3.b) mostra como $C(\sigma_x, \sigma_y)$ deve ser calculado. Para a não-linearidade da fig. 6 tem-se

$$C(\sigma_x, \sigma_y) = 2q \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\sigma_x}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{b_i^2}{2\sigma_y^2}\right) \quad (III.6)$$

onde $a_1 = q$, $a_2 = q$, $a_3 = 2q$ e b_i são os pontos de transição no eixo y. No caso ideal, desejar-se-ia que $C(\sigma_x, \sigma_y) = \sigma_x \sigma_y$ para que se tivesse então

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \sigma_x \sigma_y \rho_{xy}(\tau)$$

Portanto, a grandeza

$$k(\sigma_y) = C(\sigma_x, \sigma_y) / \sigma_x \sigma_y \quad (III.7)$$

dá o ganho do correlador em relação ao caso ideal.

Na fig. 09.a está plotado o gráfico de $k(\sigma_y)$ para $b_1 = 0,5 \cdot q$, $b_2 = 1,5 \cdot q$, $b_3 = 3 \cdot q$, e na fig. 09.b o mesmo gráfico para $b_1 = 0,5 \cdot q$, $b_2 = 1,5 \cdot q$, $b_3 = 2,85 \cdot q$.

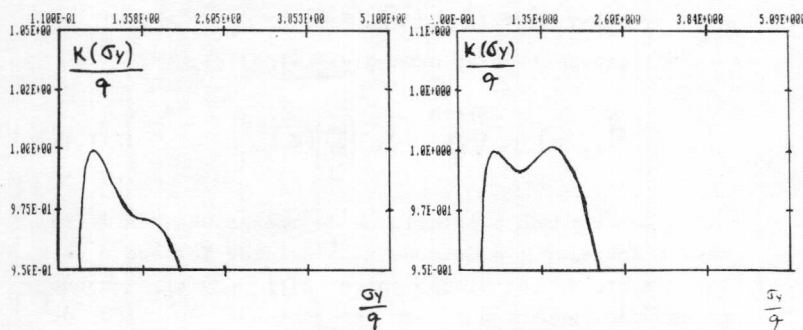


Fig. 09 - Curvas de ganho do correlador

O arranjo (b) dos pontos b_i leva a um ganho praticamente unitário para uma certa faixa de valores de σ_y . Esta faixa, no entanto, não se estende até a origem, o que é resolvido com a adição de ruído de "dithering". Neste caso, C é dado por $C = C(\sigma_x, \sigma_y, n)$ onde n é o ruído de "dithering". O ganho k é obtido fazendo

$$k(\sigma_y) = \langle C(\sigma_x, \sigma_y, n) \rangle n / \sigma_x \sigma_y \quad (III.8)$$

onde $\langle \cdot \rangle_n$ denota média em relação a n . O ruído empregado como fonte auxiliar é gaussiano, pois leva a um resultado mais próximo da linearização do quantizador, quando este é não uniforme, do que o ruído uniforme. Obtém-se para o ganho:

$$k(\sigma_y) = 2q \sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_D^2}} \exp\left[-\frac{b_i^2}{2\sigma_y^2} - \frac{\sigma_y^2 \sigma_D^2}{2\sigma_y^4 (\sigma_y^2 + \sigma_D^2)}\right] \quad (III.9)$$

sendo σ_D^2 a variância do ruído de "dithering", e a_i e b_i como definidos anteriormente. No limite, quando $\sigma_D^2 = 0$ (ausência de ruído), (III.9) fica igual a (III.7). Com $b_1 = 0,5 \cdot q$, $b_2 = 1,5 \cdot q$, $b_3 = 2,85 \cdot q$ e $\sigma_D = 0,5 \cdot q$ obtém-se o gráfico da fig. 10 para o ganho. O emprego de "dithering" permitiu estender a faixa de ganho linear do correlador até a origem.

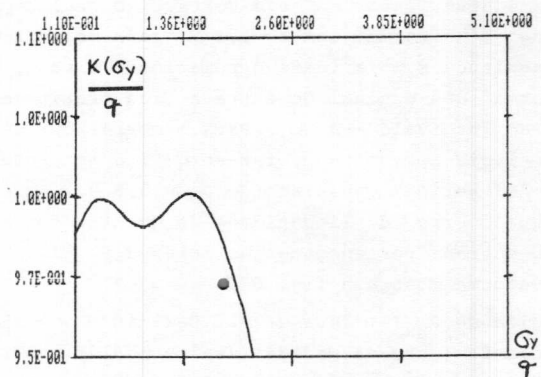


Fig. 10 - Ganho do correlador com "dithering"

Considerando os três tipos de quantização abordados, pode-se fazer algumas observações. No correlador polaridade x polaridade, uma vez que a função arcsen tenha sido linearizada, o ganho na medida do correlador com sinais gaussianos é igual a $1/\sigma^2$. Isto se deve à perda de informação da magnitude de ambos os sinais de entrada. No caso do correlador magnitude x polaridade, o ganho é $1/\sigma$, havendo melhoria de um fator σ . Ou seja, é como se cada entrada quantizada com sinal (x) contribuísse com $1/\sigma$ para o ganho. Este não é um problema grave, pois em muitas aplicações o usuário está interessado na medida normalizada, a qual é obtida sem erros através destas duas técnicas, uma vez que se sabe que $\rho_{xy}(0) = 1$. Mesmo que seja necessário a medida de $R_{xy}(\tau)$, ela pode ser feita a partir do conhecimento de σ^2 , a potência do sinal. Esta medida pode ser feita separadamente. Quando se tem o quantizador de N níveis, o ganho é praticamente linear numa certa faixa de σ , passando a $1/\sigma$ fora dela devido à saturação do quantizador.

O emprego de "dithering" leva, em todos os casos, a ganhos unitários, sem dependência com a potência ou com a forma da distribuição de probabilidade dos sinais de entrada.

IV. Conclusões

O trabalho mostrou a viabilidade de se construir

medidores de correlação através de circuitos bastante simples. O correlador polaridade x polaridade leva à implementação menos complexa dentre estes, e permite realizar as medidas com alta velocidade de processamento.

Uma solução de compromisso entre desempenho e complexidade é conseguida com o correlador magnitude x N níveis de quantização. Não tão elementar quanto o anterior, ele permite uma medida sujeita a menor variância. Para este correlador foram gerados alguns resultados ainda não encontrados na literatura.

Estas técnicas levam a equipamentos de custo reduzido e viabilizam medidas de correlação em sistemas que operam em altas frequências, como é o caso dos radares.

V. Referências Bibliográficas

- [1] H. BERNDT, "Correlation Function Estimation by a Polarity Method Using Stochastic Reference Signals", IEEE Trans. on Information Theory, vol. 14, No. 6, pp. 796-801, nov. 1968.
- [2] J.B. KNOWLES, H.T. TSUI, "Correlating Devices and their Estimation Errors", Journal of Applied Physics, vol. 38, No. 2, pp. 607-612, feb. 1967.
- [3] B. LEVINE, "Fondements Théoriques de la Radiotechnique Statistique", editora MIR-Moscou, Tomo 1.
- [4] B. WIDROW, "Statistical Analysis of Amplitude-Quantized Sampled-Data Systems", Trans. AIEEE on Appl. and Ind., vol. 79, pp. 555-568, jan. 1961.