

UM NOVO MÉTODO ITERATIVO PARA A COMPENSAÇÃO
DO EFEITO $\text{SEN } X/X$ EM CONVERSÕES D/A

S. Noceti Filho, José Carlos M. Bermudez e R. Seara

Laboratório de Instrumentação Eletrônica - LINSE
Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Santa Catarina
C.P. 476 - 88.049 - Florianópolis - SC

RESUMO: Este trabalho apresenta um novo método para a compensação do efeito $\text{sen } x/x$ inerente às conversões de sinais digitais ou amostrados em sinais contínuos. O novo método ajusta iterativamente os fatores de qualidade dos pólos da função de transferência original do sistema de forma a minimizar o erro na banda passante devido à conversão. O algoritmo proposto oferece garantia de convergência e exige um esforço computacional desprezível. Vários exemplos são apresentados para ilustrar a aplicabilidade e a eficiência do método proposto.

ABSTRACT: This work presents a new method for the compensation of the $\text{sin } x/x$ distortion which is inherent to signal conversions from digital or sampled-data waveforms to continuous-time waveforms. The new method iteratively adjusts the poles Q factors of the original transfer function of the system in order to minimize the passband error due to the signal conversion. The algorithm proposed is naturally convergent and requires very little computational effort. Examples are presented to illustrate the applicability and the efficiency of the proposed technique.

1. INTRODUÇÃO

O projeto e a implementação de sistemas modernos de processamento de sinais visam uma série de propriedades de natureza prática tais como reprodutibilidade em larga escala sem a necessidade de sintonia individual, baixo consumo, alta densidade de integração, possibilidade de integração simultânea de sistemas analógicos e digitais e alta precisão.

Devido a estes requisitos e a tecnologia atualmente disponível, sinais contínuos envolvendo frequências até 10MHz são frequentemente amostrados e processados por sistemas digitais ou analógicos amostrados (CCD ou capacitores chaveados). Após o processamento propriamente dito, as amostras do sinal resultante são convertidas em um trem de pulsos. Esta forma de onda é então filtrada (filtro de reconstrução) para a eliminação de componentes de frequência elevada que foram adicionadas ao sinal original pelo processo de amostragem.

O que ocorre na prática, no entanto, é que a conversão das amostras do sinal em um trem de pulsos provoca uma distorção na resposta em frequência ideal do sistema. A função de transferência do sistema é multiplicada pela função de transferência do "sample-and-hold". Esta distorção é conhecida como distorção $\text{sen } x/x$ devido à forma da magnitude da resposta em frequência do "sample-and-hold". Uma das principais características desta distorção é a de ser mais acentuada quanto menor for a relação entre a frequência de amostragem e a máxima frequência contida na informação, e/ou quanto maior for a largura do pulso na saída do conversor D/A ou do amostrador analógico.

Em termos de implementação, entretanto, é altamente desejável a redução da relação entre a frequência de amostragem e a banda de frequências do sinal. Isto permite o processamento de sinais de frequências mais elevadas e, no caso de sistemas a capacitores chaveados, leva a circuitos com menor dispersão entre os valores dos capacitores, o que melhora a precisão e reduz a área de integração. Para sistemas digitais, a redução da frequência de amostragem permite também uma melhora de desempenho por possibilitar um maior número de operações por período de amostragem. Quanto à redução da largura dos pulsos de amostragem, esta é acompanhada de uma perda de energia do sinal, implicando, portanto, na piora da relação sinal/ruído na saída do sistema.

Pelos motivos apresentados acima, em muitas aplicações onde é necessário o processamento de sinais em tempo real e existem limites restritos de banda passante, de precisão, e de disponibilidade de tempo de processamento ou de área em circuito integrado, torna-se inviável a utilização de elevadas frequências de amostragem. Nestes casos, a técnica mais empregada é a utilização de uma frequência de amostragem próxima à taxa de Nyquist, acompanhada da equalização da distorção $\text{sen } x/x$ introduzida pelo amostrador.

Esta equalização pode se dar pela pré-distorção da magnitude da resposta em frequência do sistema original [1], pela inclusão de um filtro equalizador em cascata com o sistema [2] ou ainda pela pré-distorção da resposta em frequência do filtro analógico de reconstrução [1,3,4]. Cada uma destas técnicas apresenta vantagens e desvantagens em

relação às demais e sua utilização dependerá das características específicas da aplicação em vista. O que existe em comum a todas estas técnicas é o problema matemático a ser resolvido. Tal problema consiste na determinação de uma função de transferência corrigida que, além de realizar o processamento original desejado, realize também a equalização da distorção sen x/x.

A determinação dos coeficientes da função de transferência corrigida, a partir dos coeficientes da função original e da expressão da distorção, é normalmente realizada por processos de otimização numérica visando a minimização de um erro médio quadrático. Estas técnicas, embora levem a bons resultados, geralmente requerem um grande esforço computacional. Além disso utilizam em sua maioria métodos clássicos de otimização, os quais estão sujeitos a problemas de convergência.

Em [3] foi proposta uma nova técnica, puramente analítica, para a compensação da distorção sen x/x através da pré-distorção da função de transferência do filtro analógico de reconstrução. Esta pré-distorção é realizada pelo ajuste dos fatores de qualidade (Q) dos pólos do filtro original através de um cálculo analítico não iterativo que, a despeito de sua simplicidade, leva a resultados muitas vezes comparáveis ao obtidos pelos métodos computacionais.

Existem aplicações práticas, no entanto, que requerem uma compensação mais cuidadosa do efeito sen x/x. Em processamento e transmissão de sinais, erros máximos especificados de $\pm 0,3\text{dB}$ na banda passante da resposta em frequência de um filtro são comuns. No caso de sistemas digitais de vídeo estas restrições podem chegar a $\pm 0,1\text{dB}$.

Este trabalho propõe um novo método para a compensação do efeito sen x/x que melhora sobremaneira a precisão obtida com o método apresentado em [3]. O novo método, embora iterativo, não apresenta problemas de convergência e pode ser facilmente implementado com uma simples calculadora de mão. Após a descrição do método, alguns exemplos são apresentados. Os resultados obtidos confirmam a aplicabilidade da técnica proposta.

2. MÉTODO DE CORREÇÃO:

O método a ser descrito aplica-se à compensação da distorção sen x/x de uma função de transferência no domínio s, H(s). Desta forma poderá ser utilizado para a pré-distorção da função de transferência de um sistema contínuo (filtro de reconstrução, por ex.) ou de qualquer sistema digital ou amostrado (capacitores chaveados) cuja função de transferência H(z) tenha sido obtida a partir de uma função H(s) por uma transformação de frequências que não afete a amplitude da magnitude da função (transf. bilinear, por ex.). Como uma grande parte dos projetos de filtros digitais ou amostrados com resposta ao impulso infinita (IIR) tem suas funções de transferência obtidas desta forma, o método pode ser considerado de grande utilidade para o projeto destes

filtros.

Considere a função de transferência H(s) de ordem n do filtro a ser otimizado dada por

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{D_0(s) \prod_{i=1}^k (s^2 + a_i s + b_i)} \quad (1)$$

onde:

Para n par, $k=n/2$ e $D_0(s)=1$;

Para n ímpar, $k=(n-1)/2$ e $D_0(s)=(s+a_0)$;

$a_i = \omega_{0i}/Q_i$, $i \geq 1$;

$b_i = \omega_{0i}^2$;

ω_{0i} = magnitude do pólo p_i ;

Q_i = fator de qualidade do pólo p_i .

A função de amostragem que pondera as respostas em frequência dos sistemas digitais e analógicos amostrados é dada por

$$S_a(\omega) = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\text{sen}(\omega T/2)}{(\omega T/2)} \cdot e^{-j(\omega T/2)} \quad (2)$$

onde:

T = período de amostragem;

τ = duração do pulso de amostragem;

ω = frequência em rad/s.

Conseqüentemente, tudo se passa como se o sinal fosse filtrado por uma função ponderada cuja magnitude é dada por

$$|H_p(\omega)| = |H(\omega)| |S_a(\omega)| = |H(s)| |S_a(\omega)| \Big|_{s=j\omega} \quad (3)$$

Para que a magnitude da função $H_p(\omega)$ se aproxime das especificações originais, deve-se pré-distorcer H(ω) de forma a transformá-la em uma função corrigida $H_c(\omega)$, de tal forma que a magnitude da função corrigida e ponderada seja

$$|H_{cp}(\omega)| = |H_c(\omega)| \cdot |S_a(\omega)| \cong |H(\omega)| \quad (4)$$

para todo ω na banda passante do sistema.

A transformação de H(s) em Hc(s) será obtida, a exemplo do que foi feito em [3], pela correção dos fatores de qualidade associados aos diferentes termos de segunda ordem do denominador de H(s) em (1). Desta forma buscamos os novos valores de a_i em (1) para que (4) seja satisfeita.

A correção dos fatores de qualidade Q_i será feita de acordo com o seguinte procedimento:

(i) Escolhe-se um conjunto de k frequências (igual

ao número de Q's) para as quais a expressão (4) será verificada como igualdade. Para os casos de filtros com as magnitudes das frequências naturais distribuídas ao longo da banda passante (funções Chebyshev e Elípticas, por ex.), escolhemos $\omega = \omega_{0i}$ para ajustar $H(\omega)$. No caso de filtros com função Butterworth (todos os ω_{0i} iguais) escolhemos as frequências correspondentes às projeções dos pólos sobre o eixo imaginário do plano s. Desta forma teremos

$$\omega_i = \sqrt{b_i} \quad \text{para funções Chebyshev e Elípticas} \quad (5)$$

$$\omega_i = \sqrt{b_i - a_i^2/4} \quad \text{para funções Butterworth} \quad (6)$$

para $i=1, \dots, k$.

A correção de cada fator de qualidade Q_i será feita utilizando os valores das magnitudes das funções de transferência em $\omega = \omega_i$.

(ii) Considere a função corrigida atual - a função corrigida inicial é igual a $H(s)$ - na frequência $\omega = \omega_i$. Determina-se então o fator de correção $F_{i\ell}$ pelo qual a magnitude da função corrigida atual deve ser dividida para obtermos $|H(\omega_i)| / |Sa(\omega_i)|$, ou seja

$$F_{i\ell} = \frac{|Hc_{\ell}(\omega_i)| |Sa(\omega_i)|}{|H(\omega_i)|} \quad (7)$$

onde $Hc_{\ell}(\omega)$ é a ℓ -ésima função corrigida gerada no processo e $Hc_0(\omega) = H(\omega)$.

(iii) Determina-se então a nova função corrigida $Hc_{\ell+1}(\omega)$ alterando o coeficiente $a_{i\ell}$ da função $Hc_{\ell}(\omega)$ de forma que

$$|Hc_{\ell+1}(\omega_i)| = \frac{|Hc_{\ell}(\omega_i)|}{F_{i\ell}} \quad (8)$$

Mostra-se facilmente que o novo coeficiente será dado por

$$a_{i,\ell+1} = F_{i\ell} \cdot a_{i\ell} \quad (9)$$

para funções Chebyshev e Elípticas e por

$$a_{i,\ell+1} = \sqrt{\frac{a_{i\ell}^4 (F_{i\ell}^2 - 1) + F_{i\ell}^2 a_{i\ell}^2}{16b_i}} \quad (10)$$

para funções Butterworth.

(iv) Determinada a nova função corrigida

$$Hc_{\ell+1}(\omega) = Hc_{\ell}(\omega) \Big|_{a_{i\ell} \rightarrow a_{i,\ell+1}} \quad (11)$$

fazemos $\ell = \ell + 1$ e $i = i + 1$ e retornamos à etapa (ii).

(v) Quando o índice $i=k$, fazemos $i=0$ e $\ell = \ell + 1$ e retornamos à etapa (ii) para uma nova iteração. O processo iterativo termina quando

$$|1 - F_{i\ell}| < \epsilon \quad (12)$$

para todo $i=1, \dots, k$ e com ϵ definido pelo usuário.

Na Fig.1 é apresentado o diagrama de fluxo correspondente ao algoritmo descrito acima. É importante observar que este algoritmo é extremamente simples de implementar e requer um esforço computacional desprezível se comparado com os métodos de otimização convencionais. Além disso, a convergência é garantida pelo próprio algoritmo, conforme pode ser verificado pela inspeção das equações (7) e (8). Por estas equações vemos que sempre que a magnitude da função corrigida ultrapassar o valor correspondente da função corrigida ideal em $\omega = \omega_i$, o valor de $F_{i\ell}$ aumentará por (7) e, conseqüentemente, a nova função corrigida será atenuada conforme (8).

3. EXEMPLOS:

Para verificar o desempenho do método proposto, diversos exemplos foram simulados para $\tau=T$, e alguns deles são mostrados a seguir. A Fig.2 ilustra a aplicação do método para correção do filtro passa baixas de recepção utilizado em um CODEC. Este filtro deve satisfazer as seguintes especificações de magnitude: limite superior da banda passante $f_p=3\text{kHz}$, "ripple" máximo de 0,25 dB na banda passante, atenuações de 14 dB e 30 dB em 4kHz e 4,6kHz respectivamente. Para satisfazer a estas especificações é usual projetar um filtro com características mais severas de "ripple" na banda passante. Isto torna-se necessário devido aos desvios inerentes à implementação e à dificuldade de uma perfeita correção do efeito sen x/x. Assim adotou-se para este filtro uma aproximação Elíptica de ordem 5 e "ripple" de 0,1 dB. A Fig. 2a mostra, para uma relação $f_s/f_p=5$, que a aplicação do método proposto levou a um "ripple" máximo de 0,125 dB na banda passante, satisfazendo plenamente as especificações. A Fig. 2b apresenta o mesmo filtro para uma relação $f_s/f_p=8/3$. Neste caso o "ripple" máximo obtido é de 0,25 dB, mantendo-se ainda dentro das especificações.

A Fig.3 mostra exemplos de comparação dos resultados obtidos pelo novo método de correção com aqueles obtidos pelo método analítico apresentado em

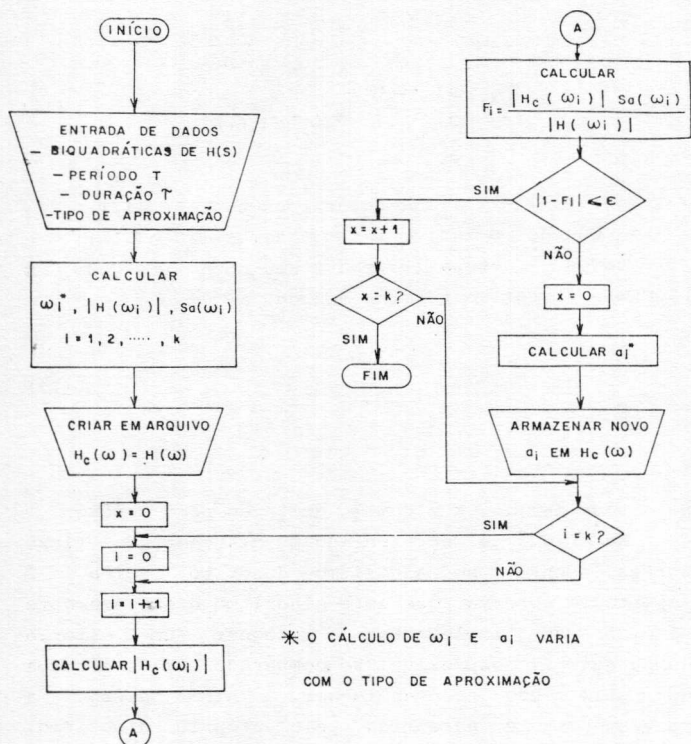


Fig. 1 - Diagrama de Fluxo do Algoritmo de Correção

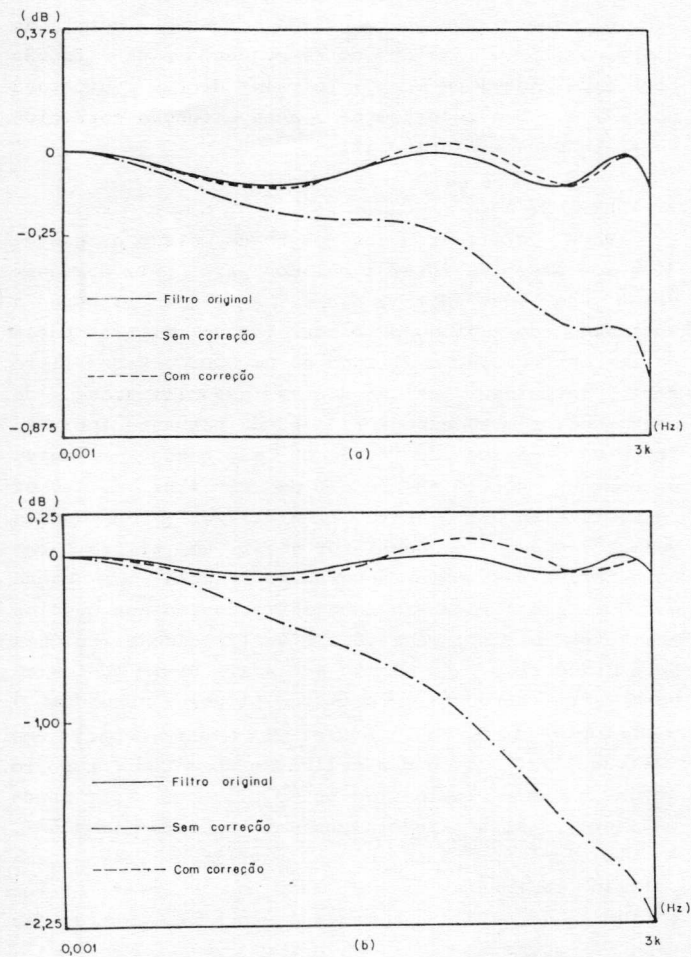


Fig. 2 - Filtros Elípticos de ordem 5 para um CODEC.
(a) $f_s = 15\text{kHz}$. (b) $f_s = 8\text{kHz}$.

[3], para uma relação $f_s/f_p=3$ e $\omega_p = 2\pi f_p = 1$. Nesta figura pode-se observar a melhora significativa alcançada pela aplicação do novo método.

A Tabela I mostra os coeficientes das funções originais e corrigidas, assim como os erros médios quadráticos (EMQ) conforme definido em [3], para os exemplos apresentados.

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado um novo método para a compensação da distorção sen x/x inerente à conversão de sinais amostrados em sinais contínuos. A correção é feita pelo ajuste iterativo dos fatores de qualidade dos pólos complexos conjugados da função de transferência do sistema. O novo método é de implementação simples e representa uma melhoria do método apresentado em [3] sendo recomendada sua utilização em aplicações práticas que requeiram uma compensação mais cuidadosa do efeito sen x/x. Além disso, devido a sua característica de interdependência entre as correções dos fatores de qualidade, estes terão valores finais menores (para filtros de ordem superior a três), levando a implementações de menor sensibilidade. Vários exemplos foram apresentados os quais confirmam a

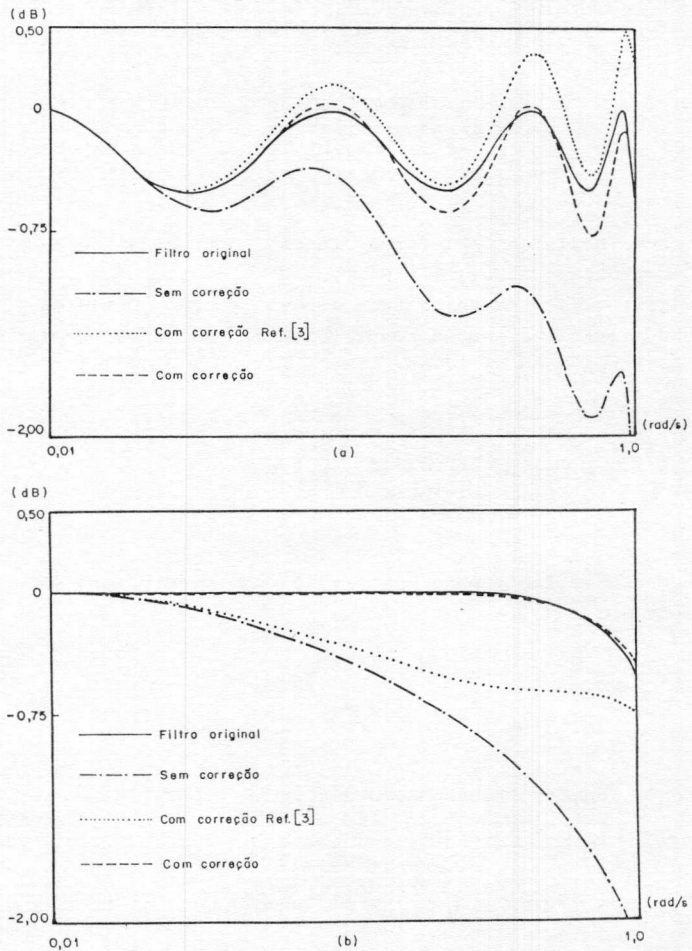


Fig. 3 - Resultados obtidos e comparação com a ref. [3] para $f_s/f_p = 3$, ordem 7 e 1/2 dB de ripple. (a) Elíptico. (b) Butterworth.

Tabela I - Erro médio quadrático e valores dos coeficientes para os exemplos apresentados.

	ERRO MÉDIO QUADRÁTICO			COEFICIENTES DOS TERMOS EM "S"		
	S/ CORREÇÃO	CORRIGIDO C/ MÉTODO REF. [3]	CORRIGIDO C/ MÉTODO PROPOSTO	FUNÇÃO ORIGINAL	CORRIGIDO C/ MÉTODO REF. [3]	CORRIGIDO C/ MÉTODO PROPOSTO
ELÍPTICO ORDEM 5 $f_s/f_p=3$	8,66E-4	-	3,26E-6	1578,2 4400,59	- -	15130,9 4221,34
ELÍPTICO ORDEM 5 $f_s/f_p=8/3$	9,96E-3	-	4,14E-5	15782,4 4400,59	- -	13530,2 3776,83
ELÍPTICO ORDEM 7 $f_s/f_p=3$	6,35E-3	4,24E-4	9,17E-5	0,48846 0,27493 0,08359	0,46022 0,23886 0,06895	0,46594 0,24624 0,07393
BUTTERW ORDEM 7 $f_s/f_p=3$	6,20E-3	1,52E-3	2,71E-6	2,09408 1,44915 0,51719	- - 0,39866	2,01627 1,34706 0,45181

aplicabilidade da técnica proposta. A avaliação dos exemplos foi feita para frequências na banda passante, já que nas bandas de transição e de rejeição o efeito $\sin x/x$ vem a favor da segurança no desempenho do filtro.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- [1] - A. Antoniou, M. Degano e C. Charalambous, "Compensation for the effects of the D/A convertor in recursive digital filters", IEE Proceedings, Pt.G, pags. 273-279, Dezembro de 1982.
- [2] - J. T. Taylor e D. G. Haigh, "Stray-free first order circuit for correction of sample-and-hold amplitude distortion in switched-capacitor circuits", Electronics Letters, vol.23, No. 5, pags. 177-178, Fevereiro de 1987.
- [3] - R. Seara, S. Noceti Filho e J. C. Bermudez, "Correção da distorção $\sin x/x$ introduzida por conversores D/A", 7º Congresso Brasileiro de Automática, São José dos Campos, SP, 15 a 19 de agosto de 1988.
- [4] - N. R. Cox, "A comparison of $\sin x/x$ correction techniques for digital video systems", Proc. 29th Midwest Symposium on Circuits and Systems, Lincoln, Nebraska, EUA, pags. 835-840, 1987.