

Paulo Eduardo Martins Vieira

Waldecir João Perrella

Alessandro Anzaloni

ITA-INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

São José dos Campos - SP

12225

RESUMO

A determinação da probabilidade de erro em sistemas de comunicação digital consome excessivos tempos de computação. Neste trabalho mostra-se que o erro em excesso tem uma função distribuição de probabilidade que permite utilizar o método de cálculo aproximado da probabilidade de erro (e portanto muito mais rápido) proposto por Soder (1).

I. INTRODUÇÃO

Os fatores de degradação considerados neste trabalho na detecção dos símbolos recebidos são o ruído gaussiano aditivo e a interferência entre símbolos (IES). Um equalizador DFE (Decision Feedback Equalizer) adaptativo é utilizado para minizar a IES, uma vez que seu desempenho é melhor que equalizadores lineares [1,2]. Supõe-se que o sinal transmitido é uma seqüência de impulsos com amplitudes ± 1 igualmente prováveis.

Na parte II será feita a análise do erro médio quadrático residual (EMQR). Mostra-se através de simulação que o erro após a convergência do filtro é composto de três componentes, onde duas delas apresentam distribuição gaussiana e uma com distribuição discreta.

Na parte III, apresenta-se a metodologia de cálculo da probabilidade de erro proposta por Soder [1], utilizando-se as três componentes do erro (após a convergência do filtro) determinadas na parte II.

II. ANÁLISE DO EMQR

Na figura 1 apresenta-se o modelo do sistema de comunicações considerado :

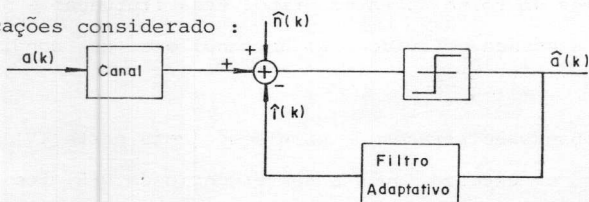


Figura 1 - Modelo do sistema de comunicação

Na análise, as seguintes notações serão usadas :

K : K -ésimo intervalo de transmissão

$(.)^T$: denota transposição de vetor

$E[.]$: denota valor esperado

$\hat{a}(K)$: réplica de $a(K)$

$n(k)$: ruído gaussiano com média zero

h_0 : valor principal da resposta impulsiva do canal

$h = (h_1, h_2, \dots, h_N)^T$: vetor interferência entre símbolos

$a(k)$: K -ésimo sinal transmitido, com valores ± 1 equiprováveis

$a_K = (a(K-1), a(K-2), \dots, a(K-N))^T$: vetor dados transmitidos

$\hat{a}_K = (\hat{a}(K-1), \hat{a}(K-2), \dots, \hat{a}(K-M))^T$: vetor réplica dos dados transmitidos.

$i(K)$: K -ésima interferência entre símbolos

$\hat{i}(K)$: K -ésima réplica da interferência entre símbolos

$s(K)$: K -ésimo sinal recebido

Supõe-se $a(K)$ e $n(K)$ estatisticamente e mutuamente independentes. Nestas condições, a interferência entre símbolos $i(K)$ e o sinal recebido $s(K)$ são dados por :

$$i(K) = h^T \cdot a_K \quad (2.1)$$

$$s(K) = h_0 a(K) + i(K) + n(K) \quad (2.2)$$

O DFE adaptativo é suposto ter estrutura transversal e o algoritmo de adaptação utilizado será o algoritmo de iteração estocástico (SIA), também conhecido como algoritmo LMS (Least Mean Square).

Na figura 2 mostra-se a estrutura do DFE adaptativo :

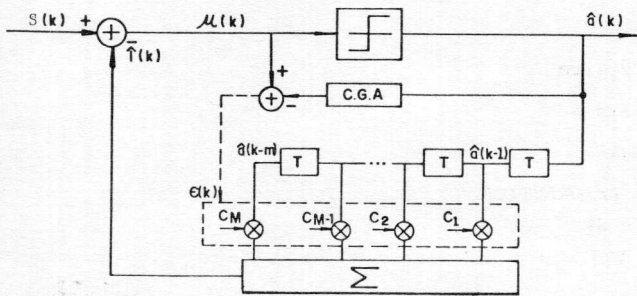


Figura 2 - Estrutura do DFE

O sinal $u(k)$ é utilizado para a decisão do elemento transmitido e é dado por :

$$u(k) = s(k) - \hat{i}(k) \quad (2.3)$$

A réplica da interferência entre símbolos $\hat{i}(k)$ fornecida pelo DFE é dado por :

$$\hat{i}(k) = C_K^T \cdot \hat{a}_K \quad (2.4)$$

onde $c(k)$ é o vetor dos coeficientes do equalizador DFE adaptativo de M taps dado por :

$$C_K = (C_1(k), C_2(k), \dots, C_M(k))^T \quad (2.5)$$

o algoritmo LMS que é aplicado para atualização dos coeficientes, é descrito por [3,4,5], é representado pela equação abaixo :

$$C_{K+1} = C_K + 2\beta \epsilon(k) \hat{a}_K \quad (2.6)$$

onde : β é passo do algoritmo e

$\epsilon(k)$ é o sinal erro usado para ajuste dos coeficientes do DFE.

A partir da figura 2 conclue-se que :

$$\epsilon(k) = s(k) - \hat{i}(k) - \hat{a}(k) \cdot C_{AGC} = h_0 a(k) - C_{AGC} \hat{a}(k) + i(k) - \hat{i}(k) + n(k) \quad (2.7)$$

Definindo-se

$$r(k) = i(k) - \hat{i}(k) + n(k) \quad (2.8)$$

Resulta :

$$\epsilon(k) = h_0 a(k) - G_{AGC} \hat{a}(k) + r(k) \quad (2.9)$$

Em (2.8) e (2.9) G_{AGC} é o valor do controle de ganho adaptativo (ou ajustável), o qual foi feito igual a h_0 . Caso o DFE não apresente controle de ganho adaptativo (ajustável) a convergência do DFE não fica comprometida, porém o erro residual do DFE será maior.

O sinal $u(k)$ pode ser escrito então por :

$$u(k) = h_0 \cdot a(k) + r(k) \quad (2.10)$$

Supondo $\hat{a}(k) = a(k)$, o erro médio quadrático $EMQ(k) = E[r(k)^2]$, tem uma convergência dada (4,5) por :

$$EMQ(k) = E[r(k)^2] = (1 - 4\beta + 4\beta^2 M)^k (EMQ(0) - \frac{\beta M}{1 - \beta M} \cdot EMQ_{\min}) + \frac{\beta M}{1 - \beta M} \cdot EMQ_{\min} + EMQ_{\min} \quad (2.11)$$

onde, EMQ_{\min} é o erro médio quadrático mínimo devido a sinais incanceláveis, que se originam do ruído e da condição $N > M$ (ou seja seja as componentes de IES são em número maior que os coeficientes do DFE).

De fato sendo $N > M$, prova-se que :

$$EMQ_{\min} = \sigma_{\text{ruído}}^2 + h_{M+1}^2 + \dots + h_N^2 \quad (2.12)$$

$$\text{onde } \sigma_{\text{ruído}}^2 = E[n^2(k)] \quad (2.13)$$

O fator $\beta M \cdot EMQ_{\min} / (1 - \beta M)$ é comumente denominado de erro médio quadrático em excesso, aqui denotado por EMQ_{ex} .

Portanto,

$$EMQ_{\text{ex}} = \frac{\beta M \cdot EMQ_{\min}}{1 - \beta M} = \delta \cdot EMQ_{\min} \quad (2.14)$$

onde

$$\delta = \frac{\beta M}{1 - \beta M} \text{ ou } \delta = 10 \log \frac{\beta M}{1 - \beta M} [\text{dB}] \quad (2.15)$$

O erro em excesso é o resultado da flutuação dos coeficientes em torno do valor ótimo. Essa flutuação é devida a presença de ruído $n(k)$ no canal e/ou da condição $N > M$ [5].

Foi observado através de simulação (veja parte IV) que o erro em excesso (após a convergência do DFE) tem uma distribuição gaussiana, com média zero e variância dada

por :

$$\sigma_{ex}^2 = \sigma \cdot EMQ_{min} = EMQ_{ex} \quad (2.16)$$

Este fato será utilizado posteriormente no cálculo da probabilidade de erro.

III. ANÁLISE DA PROBABILIDADE DE ERRO

De (2.11) e (2.12), após a convergência do equalizador e o erro médio quadrático é dado por :

$$EMQR = EMQ(\infty) = E[r(K)^2] = \frac{\beta M}{1-\beta M} (\sigma_{ruído}^2 + h_{M+1}^2 + \dots + h_N^2) + \sigma_{ruído}^2 + h_{M+1}^2 + \dots + h_N^2 \quad (3.1)$$

$$EMQR = (1+\delta) \cdot EMQ_{min} \quad (3.2)$$

A partir da equação 3.1 e como mencionado anteriormente, o sinal $r(K)$ é composto pela soma das três componentes dados a seguir :

- componentes discretas devido aos h_i não cancelados, com potência total igual a $(h_{M+1}^2 + \dots + h_N^2)$. Estas componentes discretas surgem apenas quando $M < N$ e são em número de $2^{(N-M)}$;
- uma componente gaussiana devida ao ruído aditivo com variância $\sigma_{ruído}^2$ e média zero e
- uma componente gaussiana (verificado através de simulação) devido ao erro em excesso, com média zero e variância $\sigma_{ex}^2 = \delta \cdot EMQ_{min}$

Caso δ seja pequeno podemos supor o erro em excesso e o ruído aditivo estatisticamente independente, resultando o efeito conjunto numa variância dada por :

$$\sigma_{total}^2 = \sigma_{ruído}^2 + \sigma_{ex}^2 = \sigma_{ruído}^2 + \delta \cdot EMQ_{min} \quad (3.3)$$

e com média zero.

Para sistemas binários, com v interferências precursoras e n interferências poscursoras incanceláveis, podemos definir a probabilidade de erro média P_M através de :

$$P_M = 2^{-(n+v+1)} \sum_{i=1}^{n+v+1} P_{Si} \quad (3.4)$$

onde P_{Si} é a probabilidade de erro, correspondente a seqüência i .

- Na simulação utilizou-se o canal apresentado na figura 3.

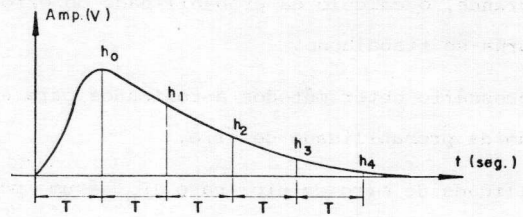


Figura 3 - Resposta impulsiva do canal considerado

Desta forma o vetor interferência entre símbolos é dado por :

$$h = (h_1, h_2, h_3, h_4) \quad (3.5)$$

As figuras 4a,b mostram as distribuições de $u(K)$ para equalizadores com $M = 3$ e 2 respectivamente.

a) $M = 3$

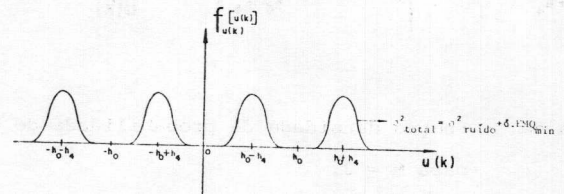


Figura 4a. Função densidade de probabilidade de $u(K)$ para DFE com 3 taps.

Nesse caso, $P_M = 2^{-2} \sum_{i=1}^4 P_{Si}$

b) $M = 2$

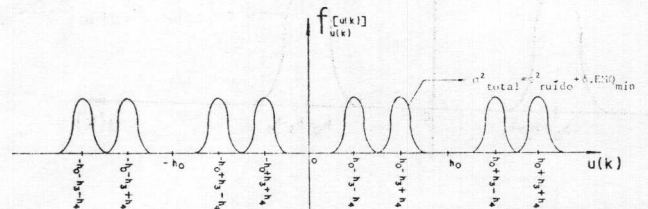


Figura 4b - Função densidade de probabilidade de $u(K)$ para DFE com 2 taps.

Nesse caso, $P_M = 2^{-3} \sum_{i=1}^8 P_{Si}$

A partir das figuras 4a, b observa-se que, se o número de interferências precursoras e poscursoras não canceladas é grande, o cálculo da probabilidade de erro média P_M torna-se trabalhoso.

Faz-se necessário obter métodos aproximados para a determinação da probabilidade de erro.

A probabilidade de erro de pior caso (P_U) é um método eficaz [1], onde se calcula a probabilidade de erro apenas para a seqüência que ocasiona o pior caso (quando a IES é destrutiva).

Nestas condições a distribuição proposta para $u(k)$ é mostrada nas figuras 5a, b.

a) DFE com 3 taps

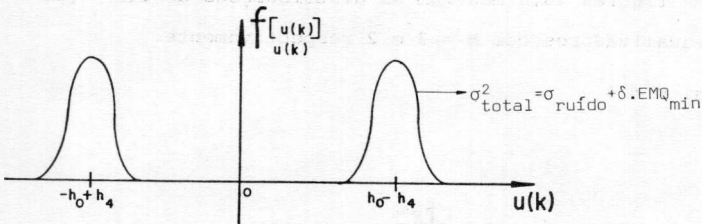


Figura 5a. - Função densidade de probabilidade de $U(K)$ para $M = 3$.

Neste caso,

$$P_U = Q \left(\frac{h_0 - h_4}{\sigma_{total}} \right) \quad (3.6)$$

b) DFE com 2 taps

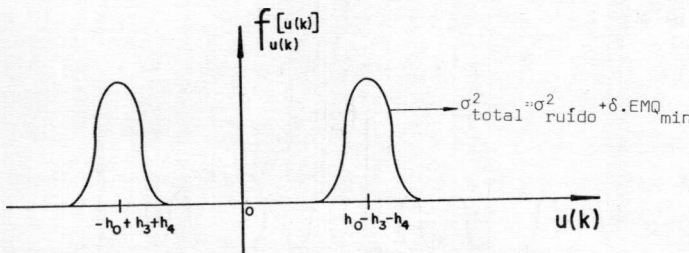


Figura 5b. - Função densidade de probabilidade de $u(K)$ para $M = 2$.

Neste caso,

$$P_U = Q \left(\frac{h_0 - h_3 - h_4}{\sigma_{total}} \right) \quad (3.7)$$

IV. SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Foi utilizado para simulação o canal com a seguinte resposta impulsiva :

$$h_0=1 \quad h_1=0,75 \quad h_2=0,5 \quad h_3=0,2 \quad h_4=0,1$$

Dois casos foram supostos. Em um o equalizador DFE adaptativo possui 3 taps, $\delta=-20$ dB, e não há presença de ruído no canal. No outro o equalizador DFE adaptativo possui 2 taps, $\delta=-15$ dB, e há ruído gaussiano aditivo no canal com média zero e variância

$$\sigma_{ruído}^2 = 1,6 \cdot 10^{-3}$$

$$(IV.1) \quad M=3 \quad \delta=-20 \text{ dB}=0,01 \quad \sigma_{ruído}^2=0$$

De (2.12), (2.15), (2.16), (3.2), (3.3), (3.4) e (3.6), temos :

$$\beta = 0,003303$$

$$EMQ_{min} = (0,1)^2 = 0,01$$

$$EMQR = EMQ(\infty) = (1+\delta)EMQ_{min} = 0,0101$$

$$\sigma_{ex} = \sqrt{\delta(0,1)^2} = 0,01$$

$$\sigma_{total} = 0,01$$

$$P_M = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \Psi_i = \frac{1}{2} \left[Q \left(\frac{h_0 - h_4}{\sigma_{total}} \right) + Q \left(\frac{h_0 + h_4}{\sigma_{total}} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[Q \left(\frac{0,9}{0,01} \right) + Q \left(\frac{1,1}{0,01} \right) \right]$$

$$P_U = Q \left(\frac{h_0 - h_4}{\sigma_{total}} \right) = Q \left(\frac{0,9}{0,01} \right) = Q(90)$$

A seguir para validar o modelamento desenvolvido, são apresentadas as figuras da convergência do EMQ(K) e da distribuição de $u(K)$, obtidas por simulação.

CARACTERÍSTICA DE CONVERGÊNCIA DO EQUALIZADOR DFE TRANSVERSAL STAP#
DET=4,000E+00

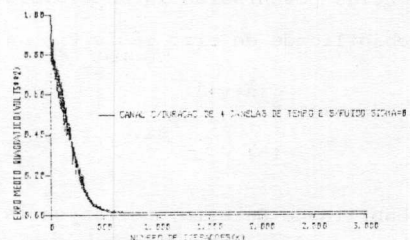


Figura 6a. Convergência do EMQ(K)

Comentários : A partir da figura 6a. se verifica que o EMQR teórico e simulado são iguais.

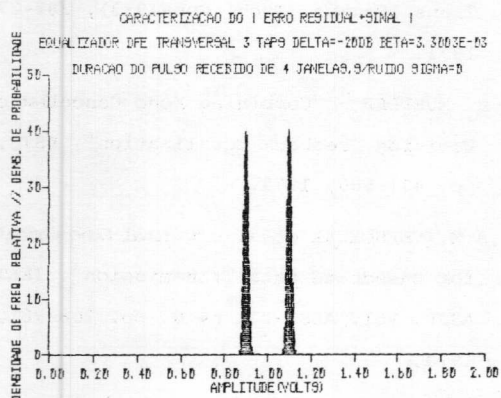


Figura 6b. - Distribuição de u(K) (apenas o lado positivo).

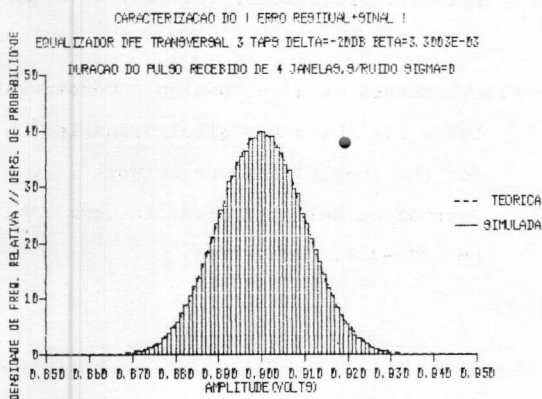


Figura 6c : Uma das gaussianas da figura 6b expandida

Comentários : Para uma distribuição gaussiana com variância σ_{total}^2 , o valor máximo é

$$f_{max} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma_{total}}$$

e

$$f_x(x = \bar{x} + \sigma) = \frac{f_{max}}{1.6487213}$$

Isto se verifica para a curva simulada onde

$$f_{max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0.01} = 39,894228$$

(IV.2) $M = 2 \quad \delta = -15 \text{ dB} = 0,0316228 \quad \sigma_{ruído}^2 = 1,6 \cdot 10^{-3}$

De (2.12), (2.15), (2.16), (3.2), (3.3), (3.4) e (3.7)

temos :

$$EMQ_{min} = (0,1)^2 + (0,2)^2 + 1,610^{-3} = 5,16 \cdot 10^{-2}$$

$$EMQR = (1+\delta) EMQ_{min} = 5,3231736 \cdot 10^{-2}$$

$$\sigma_{ex} = \sqrt{\delta EMQ_{min}} = 4,0394758 \cdot 10^{-2}$$

$$\sigma_{total}^2 = \sigma_{ex}^2 + \sigma_{ruído}^2 = 1,6317365 \cdot 10^{-3} + 1,6 \cdot 10^{-3} = 3,2317365 \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma_{total} = 5,6848364 \cdot 10^{-2}$$

$$P_M = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 P_{si} = \frac{1}{4} \left[Q \left(\frac{h_0 - h_3 - h_4}{\sigma_{total}} \right) + Q \left(\frac{h_0 - h_3 + h_4}{\sigma_{total}} \right) + Q \left(\frac{h_0 + h_3 - h_4}{\sigma_{total}} \right) + Q \left(\frac{h_0 + h_3 + h_4}{\sigma_{total}} \right) \right]$$

$$P_M = \left[\frac{1}{4} Q \left(\frac{0,7}{\sigma_{total}} \right) + Q \left(\frac{0,9}{\sigma_{total}} \right) + Q \left(\frac{1,1}{\sigma_{total}} \right) + Q \left(\frac{1,3}{\sigma_{total}} \right) \right]$$

$$P_U = Q \left(\frac{h_0 - h_3 - h_4}{\sigma_{total}} \right) = Q \left(\frac{0,7}{\sigma_{total}} \right) = Q(12,324)$$

$$f_{max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{total}} = 7,0176562$$

A seguir são mostradas as figuras da convergência do EMQ(K) e da distribuição de u(K) obtidas na simulação.

CARACTERÍSTICA DE CONVERGÊNCIA DO EQUALIZADOR DFE TRANSVERSAL 2TAPS
BETA=1.53267E-02

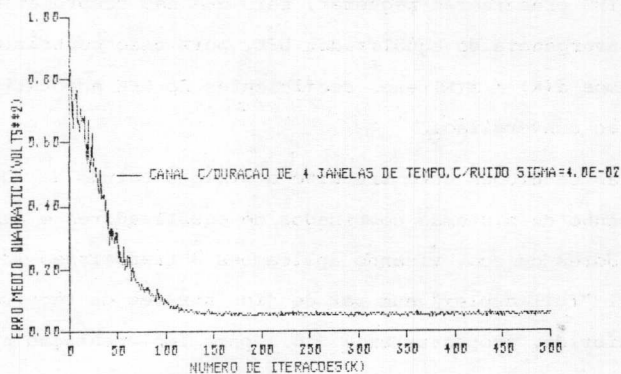


Figura 7a. Convergência do EMQ(K)

Neste item, para se verificar o modelamento feito com os resultados da simulação, procede-se como no item anterior.

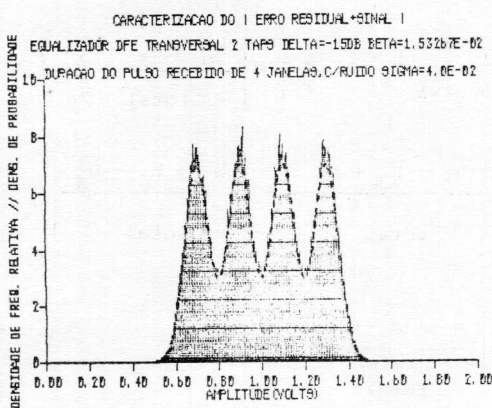


Figura 7b - Distribuição de $u(K)$ (apenas o lado positivo)

Pelo exposto anteriormente, os resultados obtidos por simulação comprovam os resultados esperados.

V. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi desenvolvido um equalizador DFE adaptativo para equalizar IES's precursoras e a partir do fato verificado por simulação que o erro em excesso tinha uma distribuição gaussiana, foi utilizado o método proposto por Soder [1] para o cálculo da probabilidade de erro, não sendo necessário avaliá-la por simulação através do método de Monte Carlo, que é um procedimento computacional muito penoso, principalmente quando se trabalha em sistemas de transmissão de dados onde a probabilidade de erro é baixa (abaixo de 10^{-7}), como é de interesse em Redes Locais e Rede Digital de Serviços Integrados (RDSI). É conveniente observar que esta metodologia pode ser aplicada a canais que apresentam IES precursoras pequenas, tais que não comprometam a convergência do equalizador DFE, pois caso contrário teremos $\hat{a}(K) \neq a(K)$ e os coeficientes do DFE adaptativo não convergirão.

Nestas condições este trabalho auxilia o estudo do desempenho de sistemas combinados de equalizadores e canceladores de eco, visando aplicações a transmissão digital "full-duplex" num par de fios através da técnica da híbrida, propostas em [3,6] para implementação numa rede local ou na linha de assinante no caso de uma RDSI.

VI - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] - K. TRONDLE and G. SODER - "Optimization of Digital Transmission Systems". Artech House, 1987.

[2] - D.A. GEORGE, R.R. BOWEN and J.R. STOREY - "An Adaptive Decision Feedback Equalizer", IEEE Trans. Commun. Tech. Com-19(3), 282-293, June 1971.

[3] - K.H. MUELLER - "Combining Echo Cancellation and Decision Feedback Equalization", BSTJ, vol.58 pp. 491-500, 1979.

[4] - N.A.M. VERHOECKX et al - "Digital Echo Cancellation for Baseband Data Transmission". IEEETrans. ASSP, Vol. ASSP-27, nº 6, pp. 768-781, Dec. 1979.

[5] - B. WIDROW et al - "Stationary and Nonstationary learning characteristics of the LMS adaptive Filter", Proc. IEEE, Vol. 64, nº 8, pp. 1151-1162, 79.

[6] - P.J.V. GERWEN et al - "Design Considerations for a 144 kbits/s Digital Transmission Unit for the Local Telephone Network". IEEE Journal on selected areas in comm., Vol.SAC-2, pp. 323-324, march 1984.