

CÓDIGOS DE BLOCO COM FAIXA MÍNIMA

por

Helio Waldman
Hudson J.M. Alcântara
Margarete M. Iramina
Faculdade de Engenharia Elétrica
Depto. de Comunicações
Universidade Estadual de Campinas

RESUMO

O trabalho discute o interesse e a possibilidade de usar códigos de bloco que conjuguem as propriedades de ba lanceamento e faixa mínima (zero espectral na frequência de Nyquist, e abertura finita do diagrama de olho mesmo com excesso de faixa nulo sobre a frequência de Nyquist).

Verifica-se que, para níveis razoáveis de eficiência, esses códigos exigem o uso de pelo menos quatro alfab etos, sendo portanto mais complexos que os utilizados atualmente, para o mesmo tamanho de blocos. É mostrado que é possível implementar essas propriedades em códigos mBnB com $m = (n-2)$ para qualquer $n \geq 3$, e com $m = (n-1)$ apenas pa ra $n = 4$. Em consequência, a discussão se concentra na construção de um código 3B4B apropriado.

Uma discussão semelhante é feita sobre códigos de blocos ternários, revelando a possibilidade de construir cô digos 5B4T com características de faixa mínima semelhantes às dos códigos de resposta parcial, e mais a vantagem adicional da redução de taxa de símbolos.

I. INTRODUÇÃO

Normalmente, a transmissão de sinais digitais por meios físicos exige o uso de códigos especiais, chama dos códigos de linha, nos quais as sequências são do tadas de redundância com o fim de produzir proprieda des desejáveis. Uma dessas propriedades de maior impor tância é o balanceamento, necessário para evitar que o bloqueio das baixas frequências por transformadores e circuitos eletrônicos cause flutuações no nível de base do sinal. O balanceamento é implementado através do controle da soma digital corrida [1], dada por:

$$SDC = \sum_{i=I}^J a_i, \quad (1)$$

onde I e J são números inteiros arbitrários, e a_i é a diferença entre o i-ésimo dígito codificado e o valor médio desses dígitos. No caso binário, convencionamos que $a_i = \pm 1$. Para um balanceamento perfeito (zero es pectral com $f = 0$), a SDC deve permanecer confinada en tre dois valores fixos.

Outras propriedades importantes a serem implemen tadas com o uso da redundância incluem:

a) a proibição de longas sequências sem transi ção de nível, para evitar a perda na aquisição da in formação sobre a temporização dos dígitos pelos cir cuitos de recuperação de relógio;

b) a mínima ocupação de faixa espectral, para ma ximizar a relação sinal-ruído nos instantes de amos tragem;

c) máxima abertura do diagrama de olho, para mi nimizar a degradação de desempenho causada por tremor (jitter) do relógio recuperado ou por erros estáticos de temporização;

d) a monitorabilidade da taxa de erros na linha a partir da taxa de violações do código;

e) a decodificabilidade independente do estado do codificador;

f) mínima razão de erros de decodificação por er ro na linha;

g) mínima complexidade do codificador;

h) máxima sincronizabilidade de blocos, no caso de códigos com estrutura de blocos.

Alguns desses requisitos são conflitivos entre si, de maneira que a busca de um código apropriado está geralmente associada a algum tipo de compromisso óti mo entre eles. Por outro lado, esse compromisso varia conforme o meio de transmissão utilizado (cabos de pa res trançados, cabos coaxiais, fibras ópticas, rádio, etc.), a capacidade dos sistemas, o estado de conges tionamento do meio transmissor, e a evolução das tec nologias utilizadas na realização dos sistemas. Por

isso, tem sido incessante o surgimento de novos códigos de transmissão à medida em que se sucedem as novas gerações de sistemas, multiplicam-se as aplicações da transmissão digital, aparecem novos meios de transmissão, e evolui a tecnologia dos circuitos integrados.

Uma abordagem clássica para minimizar a ocupação de faixa espectral é o uso de códigos de resposta parcial [2]. Nestes, o codificador é equivalente à passagem do sinal binário, sem redundância, por um filtro linear com um zero na frequência de Nyquist. A característica de transmissão é tal que introduza, nos instantes de amostragem, uma interferência controlada, que torna o sinal pseudoternário. Em muitos casos, especialmente em transmissão por cabo, o sinal já é transmitido na forma pseudoternária. Em sistemas rádio otimizados, adota-se na transmissão a característica dada pela raiz quadrada da resposta parcial até a frequência de Nyquist. A economia de ocupação de faixa espectral resulta da possibilidade de operar com excesso de faixa (roll-off) nulo, mantendo mesmo assim o diagrama de olho aberto. Dos códigos que apresentam esta propriedade, diremos que são de faixa mínima.

Nos códigos que resultam de operação lineares sobre uma sequência de dígitos independentes entre si, a propriedade da faixa mínima está claramente associada ao zero na frequência de Nyquist na característica do filtro linear equivalente. Pois, existindo este zero, o truncamento da característica do filtro na frequência de Nyquist resulta num espectro contínuo, correspondendo a pulsos básicos de transmissão com decaimento pelo menos tão rápido quanto t^{-2} . Nessas condições, qualquer combinação de amostras espaçadas entre si por intervalos de símbolos convergirá, garantindo um diagrama de olho finito e aberto. Esse é o fundamento dos sistemas de resposta parcial.

Entretanto, para os códigos de bloco não-lineares comumente utilizados em transmissão digital [3,4], esse critério de faixa mínima não é sequer aplicável. Por outro lado, o fundamento teórico dos sistemas de resposta parcial não apresenta nenhum argumento de necessidade desses sistemas para a propriedade de faixa mínima. Cabe portanto indagar se ela não pode também aparecer em códigos não-lineares. Para isso, vamos discutir em seguida um critério mais geral para a propriedade de de faixa mínima.

II. UMA CONDIÇÃO GENERALIZADA PARA FAIXA MÍNIMA

Consideremos uma sequência de dígitos a_n modulando pulsos ideais de Nyquist:

$$y(t) = \sum_n a_n \operatorname{sinc} \frac{t - nT}{T} \quad (2)$$

onde:

$$\operatorname{sinc} \frac{t}{T} = \frac{T}{\pi} \frac{\operatorname{sinc} \frac{\pi t}{T}}{t} \quad (2a)$$

Desenvolvendo esta expressão, temos:

$$y(t) = \frac{T}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{T} \sum_n \frac{(-1)^n a_n}{t - nT} \quad (3)$$

Nos instantes ideais de amostragem $t = mT$, temos da Eq. (2) que:

$$y(mT) = a_m \quad (4)$$

Nos demais instantes, $y(t)$ dependerá de todos os símbolos a_n , conforme indicado pela Eq. (3). A contribuição do termo da somatória que corresponde ao menor denominador $|t - nT|$ corresponde ao "sinal"; a dos demais termos em conjunto constitui a interferência entre símbolos. Se nenhuma restrição for feita sobre a sequência a_n , não há como garantir a convergência da somatória na Eq. (3). Nessas condições, o diagrama de olho se fecha totalmente, reduzindo-se a uma fenda de largura infinitesimal.

Por outro lado, é possível demonstrar que a somatória converge se a sequência a_n for tal que $\sum (-1)^n a_n$ permaneça sempre confinada entre dois valores fixos. Essa mesma condição também garante a presença de um zero espectral na frequência de Nyquist, constituindo-se portanto num critério mais geral para a propriedade de faixa mínima [5].

Por analogia com a Eq. (1), é oportuno então definir a soma digital de interferência entre símbolos como:

$$\text{SDI} = \sum_{i=I}^J (-1)^i a_i \quad (5)$$

onde I e J são inteiros arbitrários.

Para fazer com que a sequência codificada seja ao mesmo tempo balanceada e de faixa mínima, é preciso garantir o confinamento da SDC e da SDI em todos os pontos. Para verificar como fazer isso, vamos supor uma sequência com as seguintes propriedades:

$$\left| \sum_{i \text{ par}} a_i \right| \leq M \quad (6a)$$

$$\left| \sum_{i \text{ ímpar}} a_i \right| \leq M \quad (6b)$$

onde as duas somatórias são tomadas sobre o mesmo

intervalo arbitrário. Então, somando e subtraindo essas duas desigualdades, teremos:

$$|\sum a_i| \leq 2M \quad (7a)$$

$$|\sum (-1)^i a_i| \leq 2M \quad (7b)$$

Portanto, para gerar uma sequência balanceada e de faixa mínima, basta garantir que ela satisfaça as Eqs. (6), ou seja, basta garantir que as sequências de dígitos pares e de dígitos ímpares sejam separadamente balanceadas.

Esta conclusão sugere de imediato um procedimento relativamente simples para obter sequências balanceadas de faixa mínima: tomar duas sequências balanceadas, e entrelaçar seus dígitos um a um. Entretanto, a fim de maximizar o confinamento da SDC e da SDI para um dado nível de redundância, é mais conveniente adotar uma estrutura de blocos, e construir códigos alfabéticos que garantam as propriedades aqui descritas na sequência codificada.

Para isso, é conveniente definir uma soma digital corrida vetorial como:

$$\overrightarrow{SDV} = (SDCI, SDCP) \quad (8)$$

onde:

$$SDCI = \sum_{\substack{i=I \\ \text{Ímpar}}}^J a_i \quad (9a)$$

$$SDCP = \sum_{\substack{i=I \\ \text{par}}}^J a_i \quad (9b)$$

Os estados da soma digital corrida podem então ser representadas por pontos de coordenadas inteiras num plano, como na Fig. 1.

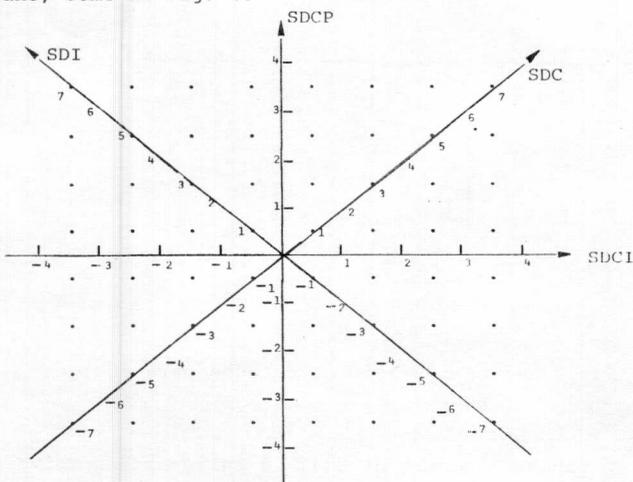


Fig. 1 - Somas Digitais Corridas no plano SDV. Os pontos representam os estados da soma digital vetorial, conforme convenção aqui adotada sem perda de generalidade.

Neste plano, é fácil identificar SDC e SDI, pois:

$$SDC = SDCI + SDCP \quad (10a)$$

$$SDI = -SDCI + SDCP \quad (10b)$$

Podemos então usar esse plano para projetar os estados da soma digital de maneira a otimizar o balanceamento (minimizando a variação na direção de SDC) e a abertura do diagrama de olho (minimizando a variação na direção SDI). Naturalmente, quanto maior o confinamento numa ou noutra direção, menor será a capacidade de canal, resultando em códigos menos eficientes.

III. CÓDIGOS mBnB PARA FIBRAS ÓPTICAS

Códigos de linha binários do tipo mBnB são utilizados em sistemas de transmissão fibras ópticas para fornecer balanceamento e redundância [6]. Neles, cada bloco sucessivo não-superposto de m bits na sequência-fonte é codificado num bloco de n dígitos binários, com $n > m$. O balanceamento é conseguido através do controle da SDC no sentido de mantê-la confinada a um intervalo fixo.

A maneira mais simples de efetuar esse controle consiste no uso de um único alfabeto constituído apenas com palavras de n dígitos cuja contribuição para a SDC, sendo a_i anterior e a_j posterior à palavra na Eq. (1), seja zero. Essa contribuição é conhecida como disparidade d da palavra. No caso binário com os dois níveis equiprováveis, só é possível fazer $d = 0$ se n for par, com $n/2$ zeros e $n/2$ marcas. Nessas condições, o número de palavras disponíveis para formar o alfabeto único será:

$$R(n | d=0) = \binom{n}{n/2} = 2^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{(n-1)}{n} \quad (11)$$

Essa expressão pode ser demonstrada por indução finita se observarmos que ela é válida por $n = 2$ e que:

$$\binom{n+2}{n/2+1} = 4 \cdot \binom{n}{n/2} \cdot \frac{n+1}{n+2} \quad (11a)$$

Como $R(n) \geq 2^m$ necessariamente, está claro que, com exceção do caso $n = 2$ (que resulta nos códigos 1B2B com eficiência de apenas 50%), não é possível fazer $m = n - 1$ em códigos mBnB de apenas um alfabeto. A fim de atingir maior eficiência, os códigos mBnB balanceados devem usar dois alfabetos. Conforme a SDC esteja abaixo ou acima de um dado limiar, apenas palavras de n dígitos

com disparidade não-negativa ou não-positiva são usadas. Nessas condições, o número de palavras disponíveis para integrar qualquer um dos dois alfabetos será:

$$R(n) = 2^{n-1}, \quad n \text{ ímpar} \quad (12a)$$

$$R(n) = 2^{n-1} + \frac{1}{2} \binom{n}{n/2}, \quad n \text{ par} \quad (12b)$$

Assim sendo, é sempre possível construir códigos mBnB balanceados com dois alfabetos e $m = (n-1)$. Entretanto, se n for ímpar, haverá menos redundância para implementar outras funções necessárias, como a monitoração de erros e a sincronização de blocos. Por isso, geralmente se usa n par ($n=2$ em sistemas de baixa capacidade, e $n=4, 6,$ e 8 em sistemas de alta capacidade em que a faixa espectral deva ser poupada).

Fazendo $m = (n-1)$ e aumentando n , é possível aproximar a eficiência de 100%. Entretanto, isso só pode ser feito mediante o aumento ilimitado do intervalo dinâmico da SDC, que é proporcional ao valor pico-a-pico das flutuações resultantes dos cortes das baixas frequências nos circuitos eletrônicos. Mantida fixa a variação da SDC, é possível derivar limites superiores para a eficiência de códigos balanceados em geral [7], e mostrar que esses mesmos limites se aplicam aos códigos mBnB [8].

Para que tanto a SDC como a SDI fiquem confinadas, resultando numa sequência balanceada com faixa mínima, será necessário controlar a soma digital vetorial no plano da Fig. 1. A maneira mais simples de fazer isso seria pelo uso de um alfabeto único em cujas palavras os dígitos pares e ímpares apresentassem disparidades separadamente nulas. Isso exigiria o uso de n múltiplo de 4, e resultaria em eficiência muito baixa, conforme já discutido acima.

Para maior eficiência, é necessário usar pelo menos quatro alfabetos, sendo um para cada quadrante do plano SDV em que estiver a soma digital terminal. No primeiro quadrante, por exemplo, só se admitem palavras cujas disparidades dos dígitos pares e ímpares sejam ambas não-positivas. No segundo quadrante, os dígitos ímpares devem apresentar disparidade não-negativa, e os dígitos pares não-positiva; e assim por diante. Usando-se as Eqs. (12), teremos então as seguintes expressões para o número $S(n)$ de palavras disponíveis para integrar cada um dos quatro alfabetos:

$$S(n) = \left[2^{n/2} - 1 + \frac{1}{2} \binom{n/2}{n/4} \right]^2, \quad n = 4k \quad (13a)$$

$$S(n) = 2^{n-2} + 2^{(n-3)/2} \binom{(n-1)/2}{(n-1)/4}, \quad n = 4k + 1 \quad (13b)$$

$$S(n) = 2^{n-2}, \quad n = 4k + 2 \quad (13c)$$

$$S(n) = 2^{n-2} + 2^{(n-5)/2} \binom{(n+1)/2}{(n+1)/4}, \quad n = 4k + 3 \quad (13d)$$

Levando em conta que $2^m \leq S(n)$, e usando as Eqs. (13), mostra-se facilmente que:

- é possível fazer $m = (n-2)$ para todo $n \geq 3$;
- só é possível fazer $m = (n-1)$ para $n = 4$.

Essa conclusão leva naturalmente à concentração dos estudos sobre os códigos 3B4B balanceados e de faixa mínima, uma vez que a sua eficiência, mantidas essas propriedades, só pode ser superada com códigos de muito alta complexidade ($n \geq 9$); e os únicos códigos de menor complexidade são da classe 1B3B, que é muito ineficiente.

A Fig. 2 mostra uma configuração mínima de estados para um codificador 3B4B desse tipo. Há um estado terminal por quadrante, representado por um círculo cheio. Os estados representados por círculos vazios só podem ser ocupados após dígitos não-terminais.

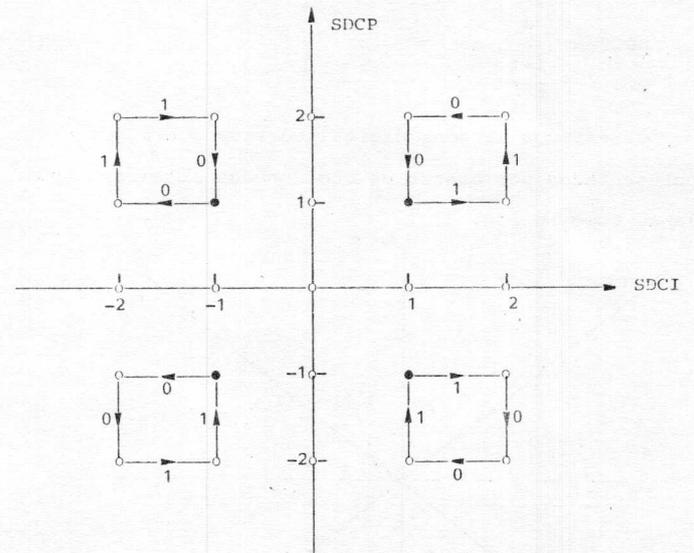


Fig. 2 - Configuração de estados para códigos 3B4B

A Tabela 1 mostra as $S(4) = 9$ palavras disponíveis para formar cada alfabeto, designado este pelos sinais permitidos para as disparidades dos dígitos ímpares e pares, nesta ordem. Como só oito palavras são necessárias

em cada alfabeto, é possível excluir uma delas.

Alfabetos			
++	+-	-+	--
0011	0011	1100	1100
0110	0110	1001	1001
0111	0010	1101	1000
1001	1001	0110	0110
1100	1100	0011	0011
1101	1000	0111	0010
1011	1011	0100	0100
1110	1110	0001	0001
1111	1010	0101	0000

Tabela 1 - Palavras disponíveis para a formação de alfabetos de um código 3B4B

Na Fig. 2, observamos que apenas uma trajetória de estados em cada alfabeto passa por um dos estados correspondentes aos extremos de SDC (primeiro e terceiro quadrantes) ou de SDI (segundo e quarto quadrantes). As palavras correspondentes a essas trajetórias, que aparecem riscadas na Tabela 1, são portanto candidatas naturais à exclusão. A exclusão das palavras 0110 no alfabeto +- e 1001 no alfabeto -+ melhora o confinamento da SDI, devendo portanto gerar um diagrama de olho mais aberto. Já as palavras 0011 no alfabeto ++ e 1100 no alfabeto -- devem ser excluídas para melhorar as condições de balanceamento.

Feitas as exclusões, a atribuição de palavras-código a palavras-fonte deve permitir que a decodificação seja feita sem o conhecimento do estado do codificador. A Tabela 2 é uma solução para este problema. Sobre ela, ainda devem ser feitas permutações na coluna das palavras-fonte, com o fim de minimizar a taxa de multiplicação de erros de linha.

Palavras Fonte	Alfabetos			
	++	+-	-+	--
000	1111	0011	0011	0011
001	1100	1100	1100	0000
010	0110	1010	0110	0110
011	1001	1001	0101	1001
100	0111	1000	0111	1000
101	1101	0010	1101	0010
110	1011	1011	0100	0100
111	1110	1110	0001	0001

Tabela 2 - Código 3B4B sugerido

IV. CÓDIGOS mBnT PARA MEIOS METÁLICOS

Nos códigos mBnT, cada bloco de m bits é codificado num bloco com n dígitos ternários. Os códigos normalmente utilizados em cabos de pares metálicos (AMI, HDB3, duobinário, duobinário modificado, etc.) podem ser considerados códigos 1B1T. Em sistemas que exigem mínima ocupação de faixa espectral, têm sido utilizados também códigos 4B3T balanceados [9].

Quando se exige balanceamento e faixa mínima, torna-se impossível construir um código 4B3T, pois não é possível formar um alfabeto com 16 palavras ternárias de três dígitos que obedeçam as restrições necessárias sobre as disparidades vetoriais das palavras.

Com blocos de quatro dígitos ternários, cada paridade terá dois dígitos. Se, por exemplo, a disparidade desses dígitos tiver que ser não negativa, haverá seis combinações de dígitos possíveis: 00, 0+, +0, +-, -+, e ++. O mesmo número de combinações é válido para disparidade não-positiva. Portanto, existem $6^2 = 36$ palavras de quatro dígitos ternários disponíveis para formar cada um dos alfabetos definidos como na seção anterior (isto é, cada alfabeto válido para todos os estados terminais de cada quadrante). A Fig. 3 mostra a configuração mais geral de estados, terminais e intermediários, que resulta desses quatro alfabetos. Excluindo-se uma palavra de cada alfabeto na forma indicada na seção anterior, é possível suprimir os estados intermediários dos vértices da configuração. Além disso, é conveniente excluir a palavra 0000 em todos os alfabetos. Sobram ainda 34 palavras em cada alfabeto, viabilizando assim a construção de códigos 5B4T balanceados e de faixa mínima, com SDC e SDI variando entre -4 e 4.

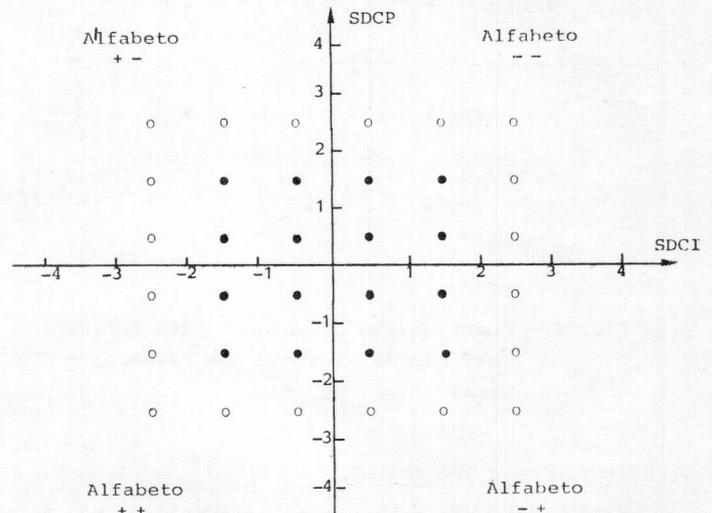


Fig. 3 - Configuração de estados para código 5B4T com um alfabeto por quadrante.

O confinamento da SDC e da SDI ainda pode ser melhorado se, ao invés de um alfabeto por quadrante, adotarmos um alfabeto diferente para cada estado terminal. Isso é ilustrado, por exemplo, na configuração da Fig. 4, com 12 estados terminais e quatro intermediários. Num alfabeto feito para o estado A, por exemplo, é possível admitir palavras de disparidade (1,-1), que devem ser proibidas no estado B. Tomando-se, portanto, um alfabeto por estado, pode-se conseguir maior eficiência e/ou confinamento nos códigos obtidos. No caso particular da Fig. 4, podemos verificar que, para cada um dos oito estados terminais externos, existem 34 palavras que respeitam a configuração dada. Para os quatro estados internos, são 55 as palavras admissíveis em cada alfabeto. Portanto, mesmo excluindo a palavra 0000 em cada alfabeto, ainda sobram mais que 32 palavras, viabilizando a construção de códigos 5B4T balanceados e de faixa mínima, com SDC e SDI variando apenas entre -3 e 3. Esses códigos, porém, são bem mais complexos que os sugeridos pela Fig. 3, por exigirem o uso de 12 alfabetos diferentes. Para comparação, lembramos que o código duobinário modificado, que é o mais simples dos códigos lineares balanceados de faixa mínima, varia a SDI entre -1 e 1, mas não apresenta nenhuma redução de taxa de símbolos.

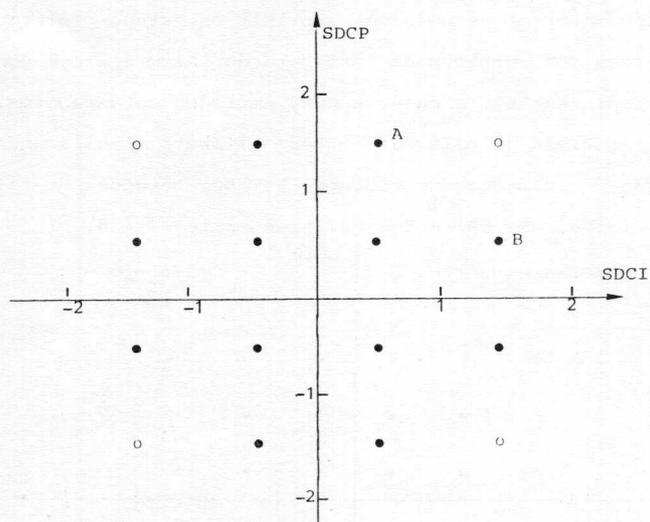


Fig. 4 - Configuração de estados para código 5B4T com um alfabeto por estado terminal

V. COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Foi conceituada e brevemente discutida uma nova classe de códigos de bloco para linhas de transmissão

digital. Esses códigos apresentam a propriedade do balanceamento conjugada com a característica de faixa mínima conceituada por Kim [5], garantindo abertura finita do diagrama de olho para qualquer faixa de passagem a partir da faixa de Nyquist, e mesmo um pouco abaixo desta.

Algumas classes desses códigos com características favoráveis de desempenho e/ou eficiência foram identificadas: os códigos 3B4B, que na versão de dois alfabetos (só com balanceamento, sem faixa mínima) já são utilizados hoje em sistemas de transmissão por fibra óptica; e os códigos 5B4T para meios metálicos (por exemplo, linhas digitais de assinante), que são menos eficientes que 4B3T, mas permitem a implementação da faixa mínima.

De um modo geral, observa-se que a melhoria de desempenho sugerida pela propriedade da faixa mínima está associada a um acréscimo na complexidade do codificador, por causa do maior número de alfabetos necessários (pelo menos quatro). Faz-se portanto necessário dimensionar os ganhos de desempenho em cada caso particular, para concluir sobre a eventual indicação de uso desses códigos.

Nesse contexto, estamos desenvolvendo programas para a simulação dos diagramas de olho gerados por esses códigos, tanto no caso do pulso ideal de Nyquist usado na Eq. (2) como em casos de pulsos não-ideais, representativos de condições reais de operação dos sistemas. Tendo em vista a natureza markoviana das transições entre estados terminais nesses códigos, esses cálculos podem se beneficiar do algoritmo de Viterbi, conforme sugerido em [10].

Outro tópico interessante para pesquisa futura é a determinação dos limites superiores de eficiência dos códigos balanceados de faixa mínima, em função do grau de confinamento da SDC e da SDI.

REFERÊNCIAS

- [1] Aaron, M.R., PCM Transmission in the Exchange Plant, Bell System Technical Journal, vol.41, pp. 99-141, 1962.
- [2] Kabal, P., e S.Pasupathy, Partial-Response Signaling, IEEE Transactions on Communications, vol. COM-23, pp. 921-934, 1975.
- [3] Rousseau, M., Block Codes for Optical Fibre Comm.,

- Electronics Letters, vol. 12, pp. 476-479, 1976.
- [4] Franaszek, P.A., Sequence-State Coding for Digital Transmission, Bell System Technical Journal, vol. 47, pp. 143-157, 1968.
- [5] Kim, D.Y., A Study on the Line Codes of Minimum Bandwidth, Ph.D. Thesis Korea Advanced Institute of Science and Technology, Nov. 1982.
- [6] Brooks, R.M., e A. Jessop, Line Coding for Optical Fibre Systems, Int. J. Electronics, vol. 55, pp. 81-120, 1983.
- [7] Chien, Ta-Mu, Upper Bound on the Efficiency of dc-Constrained Codes, Bell System Technical Journal, vol. 49, pp. 2267-2287, 1970.
- [8] Waldman, H., e J.M.T. Romano, Limites Fundamentais de Eficiência em Códigos mBnB, Anais do 2º Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Campinas, Set. 84.
- [9] Bellato, L., A. Tavella, e G. Vannucchi, Considerazioni sui Metodi di Ottimizzazione nei Sistemi di Transmissão per Informazioni Numeriche, Alta Frequenza, vol. XL, pp. 705-724, 1971.
- [10] Monti, C.M., e S.G. Pupolin, Fast Computer Calculation of the Eye Diagram, Alta Frequenza, vol. XLVIII, pp. 666-674, 1979.