

ALGORITMO PARA ACELERAÇÃO DA CONVERGÊNCIA INICIAL
EM EQUALIZADORES ADAPTATIVOS (*)

Roberto Silva Lucatelli Araujo

Fábio Violaro

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica
Departamento de Comunicações
Caixa Postal 6101
13.081 - Campinas, SP

RESUMO

Em sistemas de comunicação de dados, frequentemente o equalizador adaptativo tem seus coeficientes ajustados pelo algoritmo estocástico do gradiente. Neste trabalho é proposta uma modificação neste algoritmo que acelera substancialmente a convergência inicial, com um aumento da complexidade computacional da ordem de 70% em relação ao algoritmo convencional.

I. Introdução

A comunicação digital em linhas telefônicas está sujeita a vários tipos de distorção que afetam o sinal transmitido. As distorções de amplitude e fase produzem interferência entre símbolos (IIS) que, em última análise, é a maior responsável pela taxa de erros no receptor [1]. Para atenuar a IIS, o receptor necessita de um equalizador adaptativo, normalmente implementado através de um filtro transversal, que deve ser ajustado de acordo com as características do canal. O critério comumente utilizado na otimização dos coeficientes do equalizador consiste na minimização do erro quadrático médio (MSE). Este critério, em geral, não minimiza a probabilidade de erro mas, como se verá a seguir, é matematicamente simples, e pode ser facilmente implementado através de processadores digitais.

II. Algoritmo do Gradiente Convencional

O MSE na saída do equalizador é definido por

$$J(\bar{c}) = E[e(n) e^*(n)] \quad (1)$$

onde \bar{c} = vetor de coeficientes

$$e(n) = y(n) - a(n) \quad (2)$$

$y(n)$ = sinal na saída do equalizador no instante n

$a(n)$ = símbolo decidido (supostamente correto)

$E(\)$ = média estatística

$(\)^*$ = complexo conjugado.

Como é mostrado em [2], o vetor de coeficientes que minimiza $J(\bar{c})$ é dado por

$$\bar{c} = \bar{R}^{-1} \bar{p} \quad (3)$$

onde 1) $\bar{R}(M \times M)$ é a matriz de correlação do canal de finida por

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} r(-N,-N) & \dots & r(-N,N) \\ \vdots & & \vdots \\ r(N,-N) & \dots & r(N,N) \end{bmatrix}$$

com

$$r(i,m) = Sa \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h^*(k-i)h(k-m) + NSR\delta(i-m) \right], \quad i, m = -N \text{ a } N \quad (4)$$

e

$M = 2N + 1$ (número de coeficientes do equalizador)

$$Sa = E[a^*(n) a(n)] \quad (5)$$

Sn = variância do ruído na entrada do equalizador

$$NSR = Sn/Sa \quad (6)$$

$h(n)$ = resposta impulsiva do canal equivalente

$\delta(k-i) = 1$ se $k = i$, e $\delta(k-i) = 0$ se $k \neq i$

2) \bar{p} é um vetor $M \times 1$ representando a correlação cruzada entre o sinal presente na linha de atraso do equalizador e a sequência de símbolos $a(n)$. Cada elemento $p(k)$ de \bar{p} é dado por

$$p(k) = Sa h^*(-k), \quad k = -N \text{ a } N \quad (7)$$

A solução ótima dada pela eq.(3) pode ser encontrada recursivamente através do algoritmo da máxima declividade (Steepest Descent Algorithm - SDA) dado por [2]

$$\bar{c}(n+1) = \bar{c}(n) - \mu [\bar{R}\bar{c}(n) - \bar{p}] \quad (8)$$

onde $\bar{c}'(n) = [c(-N,n), \dots, c(0,n), \dots, c(N,n)]$ (9)

μ = constante de adaptação ($\mu > 0$)

$(\)'$ = operação de transposição.

O termo entre colchetes na eq. (8) representa o vetor gradiente do MSE, e pode ser estimado a partir dos sinais disponíveis no receptor. O algoritmo resultante é denominado algoritmo do gradiente convencional (AGC), e pode ser escrito como

$$\bar{c}(n+1) = \bar{c}(n) - \mu \bar{u}'(n) e(n) \quad (10)$$

onde $\bar{u}'(n) = [u(n+N), \dots, u(n), \dots, u(n-N)]$, e cada elemento $u(n-k)$, $k = -N$ a N , representa o sinal presente na posição k do filtro transversal.

As condições de estabilidade e convergência dos algoritmos em (8) e (10) são estabelecidas em [2], e os resultados são os seguintes:

* Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CPqD-TELEBRÁS, através do Convênio FEE/UNICAMP/TELEBRÁS - Contrato 208/87.

$$\text{estabilidade} \quad \text{m\u00e1xima velocidade de converg\u00eancia}$$

$$\text{SDA} \Rightarrow 0 < \mu < 2/\lambda_{\max} \quad \mu = 2/(\lambda_{\max} + \lambda_{\min}) \quad (11)$$

$$\text{AGC} \Rightarrow 0 < \mu < 2/\text{Tr}(\bar{R}) \quad \mu = 1/\text{Tr}(\bar{R}) \quad (12)$$

onde λ_{\max} e λ_{\min} s\u00e3o respectivamente os autovalores m\u00e1ximo e m\u00ednimo da matriz \bar{R} .

$\text{Tr}(\bar{R})$ = soma dos elementos da diagonal principal de \bar{R} .

III. Algoritmo do Gradiente Modificado

V\u00e1rias tentativas t\u00eam sido feitas no sentido de aumentar a velocidade de converg\u00eancia do algoritmo do gradiente [3]. Neste trabalho \u00e9 proposta uma modifica\u00e7\u00e3o que, como ser\u00e1 mostrado na se\u00e7\u00e3o IV, pode acelerar substancialmente a converg\u00eancia inicial.

Pela eq. (8), o SDA pode ser reescrito como

$$c(k, n+1) = c(k, n) - \mu[\bar{L}(k+N+1)\bar{c}(n) - p(k)] \quad (13)$$

onde $c(k, n)$ = k-\u00e9simo elemento do vetor $\bar{c}(n)$

$\bar{L}(i)$ = i-\u00e9sima linha da matriz R ; $i = 1$ a $2N+1$

Observe que o vetor $\bar{c}(n)$ acima n\u00e3o depende de k , isto \u00e9, todos os taps $c(k, n)$ na eq. (13) s\u00e3o atualizados a partir do mesmo vetor $\bar{c}(n)$. A id\u00e9ia contida no novo algoritmo \u00e9 a substitui\u00e7\u00e3o de $\bar{c}(n)$ por um outro vetor $\bar{c}k(n)$ que seja atualizado ap\u00f3s o c\u00e1lculo de cada coeficiente (tap). Assim, o SDA modificado pode ser escrito como

$$c(k, n+1) = c(k, n) - \mu[\bar{L}(k+N+1)\bar{c}k(n) - p(k)] \quad (14)$$

A ordem em que \u00e9 feita a atualiza\u00e7\u00e3o dos taps influ\u00ed no desempenho do algoritmo. Para facilitar a apresenta\u00e7\u00e3o, suponha que a atualiza\u00e7\u00e3o \u00e9 feita na sequ\u00eancia $k = -N, -N+1, \dots, N$. Assim sendo, o vetor $\bar{c}k(n)$ em (14) \u00e9 dado por

$$\bar{c}k'(n) = [c(-N, n+1), \dots, c(k-1, n+1), c(k, n), \dots, c(N, n)] \quad (15)$$

O algoritmo das equa\u00e7\u00f5es (14) e (15) encontra-se representado no fluxograma da fig. 1.

A an\u00e1lise matem\u00e1tica do algoritmo para o estabelecimento das condi\u00e7\u00f5es de estabilidade e converg\u00eancia n\u00e3o \u00e9 simples, uma vez que os taps est\u00e3o acoplados tanto atrav\u00e9s da matriz \bar{R} , como tamb\u00e9m atrav\u00e9s do vetor $\bar{c}k(n)$. Uma sa\u00edda \u00e9 utiliza\u00e7\u00e3o de simula\u00e7\u00f5es. Isto \u00e9 feito na se\u00e7\u00e3o IV, de onde pode-se concluir que:

1) O algoritmo \u00e9 est\u00e1vel, e converge para a solu\u00e7\u00e3o \u00f3tima dada pela eq. (3) se e somente se

$$\mu < 2/r(i, i) \quad (16)$$

$$\text{onde } r(i, i) = S_a \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|^2 + S_n \quad (\text{ver eq. (4)}) \quad (17)$$

2) O valor \u00f3timo de μ \u00e9 dado por

$$\mu_{\text{ot}} = 1/r(i, i) \quad (18)$$

A extens\u00e3o da eq. (14) para o caso do algoritmo estoc\u00e1stico do gradiente \u00e9 imediata. Levando-se em conta a eq. (10) e as defini\u00e7\u00f5es de $c(k, n)$, $p(k)$ e $\bar{c}k(n)$, o algoritmo do gradiente modificado (AGM) pode ser escrito como

$$c(k, n+1) = c(k, n) - \mu u^*(n-k)e(k, n) \quad (19)$$

$$\text{onde } e(k, n) = \bar{u}'(n)\bar{c}k(n) - a(n) \quad (20)$$

O fluxograma ilustrando as eqs. (17) e (18) \u00e9 mostrado na fig. 2.

Evidentemente a modifica\u00e7\u00e3o introduzida gera um aumento na complexidade computacional em rela\u00e7\u00e3o ao algoritmo convencional. A tabela I mostra o n\u00famero de opera\u00e7\u00f5es executadas a cada itera\u00e7\u00e3o para os dois algoritmos estudados, e tamb\u00e9m, para efeito de compara\u00e7\u00e3o, para o algoritmo r\u00e1pido de Kalman (Fast Kalman Algorithm-FKA) [4], cuja converg\u00eancia \u00e9 a mais r\u00e1pida dentre os algoritmos estoc\u00e1sticos conhecidos. Note que se μ puder ser uma pot\u00eancia de 2, a complexidade do algoritmo modificado \u00e9 significativamente reduzida (aproximadamente 17% para $M = 31$ taps).

As demais caracter\u00edsticas do algoritmo, como a sensibilidade \u00e0s varia\u00e7\u00f5es de μ e o erro residual no estado estacion\u00e1rio, ser\u00e3o discutidas a seguir.

IV. Simula\u00e7\u00f5es

Nesta se\u00e7\u00e3o s\u00e3o apresentados os resultados de v\u00e1rias simula\u00e7\u00f5es que objetivam comprovar a efici\u00eancia do AGM. As simula\u00e7\u00f5es s\u00e3o realizadas com canais telef\u00f4nicos t\u00edpicos que s\u00e3o caracterizados pela rela\u00e7\u00e3o $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$, indicada nas figuras 3 e 4. O sistema opera a 9600 bits/segundo, e obedece \u00e0 recomenda\u00e7\u00e3o v.29 do CCITT [5]. Os canais utilizados apresentam as seguintes caracter\u00edsticas espectrais:

Canal 1 - fortes distor\u00e7\u00f5es de amplitude e atraso de grupo.

Canal 2 - fortes distor\u00e7\u00f5es de amplitude com atraso de grupo constante.

Canal 3 - fortes distor\u00e7\u00f5es de amplitude com atraso de grupo constante nas baixas frequ\u00eancias e exponencial nas altas (acima de 1500 Hz).

Canal 4 - moderadas distor\u00e7\u00f5es de amplitude com fortes distor\u00e7\u00f5es de atraso de grupo.

Canal 5 - amplitude constante com atraso de grupo exponencial nas baixas frequ\u00eancias e constante nas altas.

A rela\u00e7\u00e3o sinal/ru\u00eddo \u00e9 de 24dB, e o equalizador possui 31 taps complexos, sendo que todos s\u00e3o inicialmente nulos, exceto a parte real do tap central, que parte do valor 1.

A figura 3 compara o desempenho dos algoritmos SDA e SDA modificado para dois canais com diferentes dispers\u00f5es dos autovalores, e tamb\u00e9m ilustra as condi\u00e7\u00f5es de estabilidade e converg\u00eancia para o SDA modificado. As duas curvas inferiores (1 e 2) mostram claramente que o SDA modificado converge mais rapidamente que o SDA convencional (em ambos os algoritmos a constante μ assumiu o seu valor \u00f3timo, isto \u00e9, $\mu = 2/(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})$ para o SDA convencional, e $\mu = 1/r(i, i)$ para o SDA modificado). No caso do SDA modificado a atualiza\u00e7\u00e3o dos taps foi feita na seguinte ordem (ver eq. (13)): $k = 0, 1, -1, 2, -2, \dots, N, N$. As simula\u00e7\u00f5es mostraram que com esta sequ\u00eancia de atualiza\u00e7\u00e3o, a converg\u00eancia \u00e9

mais rápida que com a sequência iniciada pelo tap mais à esquerda: $k = -N, -N+1, \dots, N$. Aparentemente isto se deve ao fato de que, para canais telefônicos, o tap central é, em geral, o de maior valor absoluto, e portanto deve sofrer as correções mais fortes. Observe que, à medida em que os taps vão sendo atualizados (dentro de uma mesma iteração), o termo entre colchetes na eq. (13) vai se tornando menor e os taps à direita e à esquerda do tap central vão sofrendo correções cada vez mais fracas. Uma consequência disto é que o valor de μ para o SDA modificado pode ser maior (em geral pode até ser maior que $2/\lambda_{\max}$) que para o SDA convencional.

A curva 3 da figura 3 confirma a validade das equações (16) e (18). Nas primeiras 25 iterações o valor de μ está acima de $1/r(i,i)$, e a convergência é mais lenta. Em seguida μ ultrapassa o valor $2/r(i,i)$ e o algoritmo diverge.

Um fato interessante observado nas simulações foi que para μ exatamente igual ao seu valor máximo, isto é, $\mu = 2/\lambda_{\max}$ para o SDA convencional e $\mu = 2/r(i,i)$ para SDA modificado, o SDA convencional convergiu lentamente para um MSE acima do valor mínimo, permanecendo indefinidamente neste valor, enquanto o SDA modificado permanece estável no MSE inicial, que depende da condição inicial do vetor de coeficientes. Observou-se ainda que, mesmo neste caso, o vetor de coeficientes varia a cada iteração, isto é, parece que o sistema gira em torno de uma mesma latitude na superfície construída num espaço de dimensão M representando o MSE em função do vetor de coeficientes.

As Figuras 4a a 4e mostram o desempenho do algoritmo do gradiente modificado (AGM) e do algoritmo do gradiente convencional (AGC) para diversos canais telefônicos típicos, com a relação $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ variando de 34.2 a 1.79. Para efeito de comparação é também mostrado o desempenho do FKA com fator de esquecimento $\xi = 1$, e constante de inicialização δ conforme indicado nas figuras. No AGC o valor de μ foi mantido constante e igual a $1/\text{Tr}(\bar{R})$. No AGM o valor de μ foi inicialmente 0.07 e, com o decorrer do processo, foi reduzido gradativamente para 0.001. Estes valores foram obtidos experimentalmente. A redução no valor de μ foi feita medindo-se a relação $S = |e(0,n)|^2 / |e(15,n)|^2$ e comparando-a com um certo limiar X , de modo que, para $S > X$, μ é dividido por 1.05, e em caso contrário permanece constante. Cabe observar que, como no caso do SDA modificado, o valor inicial de μ está bem acima do limite máximo permitido para o AGC, que neste caso é $2/\text{Tr}(\bar{R}) = 0.0384$. Outras simulações mostraram ainda que, como no caso do AGC, o valor máximo de μ para o qual o algoritmo não diverge (por volta de 0.1), ficou bem abaixo do valor máximo permitido para o SDA modificado (0.59). Isto se deve aos erros nas estimativas do vetor gradiente.

Uma análise das figuras 4a a 4e mostra que em todos os casos o AGM é superior ao AGC. Em particular, para canais para os quais a relação $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ assume valores elevados, esta vantagem é mais pronunciada. Por exemplo,

para o canal 1, e supondo-se que um MSE de -16 dB seja razoável para uma operação com baixa taxa de erros (isto foi verificado pelas simulações), a fig. 4a mostra que o AGM converge em aproximadamente 150 iterações, enquanto o AGC consome cerca de 450 iterações para atingir o mesmo valor (-16dB). Este comportamento também ocorre na fig. 4b para o canal 2. Para os outros canais, figs. 4c a 4e, a convergência já é relativamente rápida, e o limite de -16dB é sempre atingido antes de 150 iterações. Observe também que o AGM apresenta um desempenho intermediário entre o FKA e o AGC. Por exemplo, para a fig. 4a, após 50 iterações o MSE é de -17 dB, -10 dB, e -5.5 dB para o FKA, AGM e AGC respectivamente. Apesar da maior velocidade do FKA em relação ao AGM, deve-se lembrar que o primeiro apresenta problemas de instabilidade numérica em aritmética de precisão finita [6], e que é computacionalmente mais complexo. Pela tabela I pode-se observar que, para um equalizador com 31 taps complexos, o FKA executa 1266 multiplicações reais a cada iteração, enquanto o AGM executa apenas 430. Portanto o FKA necessita de uma potência computacional 3 vezes maior.

V. Conclusão

O algoritmo proposto se mostrou uma alternativa interessante para a aceleração da convergência inicial. O aumento na complexidade computacional é aceitável (70% para 31 taps), e o ganho conseguido na região inicial da curva de convergência do MSE pode chegar a 6dB para canais onde a relação $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ é mais elevada. Outra vantagem é que, como durante o treinamento o algoritmo opera com a sequência padronizada pelo CCITT, ele pode ser implantado em equipamentos atualmente em funcionamento sem necessidade de alterações no transmissor.

Bibliografia

- [1] - Lucky, R.W., Salz, J., and Weldon, F.J., Jr., "Principles of Data Communication", McGraw-Hill, New York, 1968.
- [2] - Haykin, S., "Adaptive Filter Theory", Prentice-Hall, N.J., 1986.
- [3] - Farhang-Boroujeny, B. and Turner, L.F., "Fast Converging Stochastic Gradient Algorithm", IEE Proc., vol. 128, No. 5, pp. 241-274, October, 1981.
- [4] - Mueller, M.S., "Least-Squares Algorithm for Adaptive Equalizers", B.S.T.J., pp. 1905-1925, October, 1981.
- [5] - CCITT Yellow Book, "Data Communication Over the

Telephone Network", International Telecom. Union, November, 1980.

[6] - Lin, D.W., "On Digital Implementation of Fast Kalman Algorithms", IEEE Trans. on ASSP, pp. 998-1005, October, 1985.

	Algoritmo do gradiente convencional		Algoritmo do gradiente modificado		Algoritmo Rápido de Kalman
	$\mu \neq 2^k$	$\mu = 2^k$	$\mu \neq 2^k$	$\mu = 2^k$	
Multip. Reais	$8M + 2$	$8M$	$14M - 4$	$12M - 4$	$40M + 26$
Somas Reais	$8M - 6$	$8M - 6$	$18M - 10$	$18M - 10$	$48M + 20$

Tabela I - Complexidade Computacional

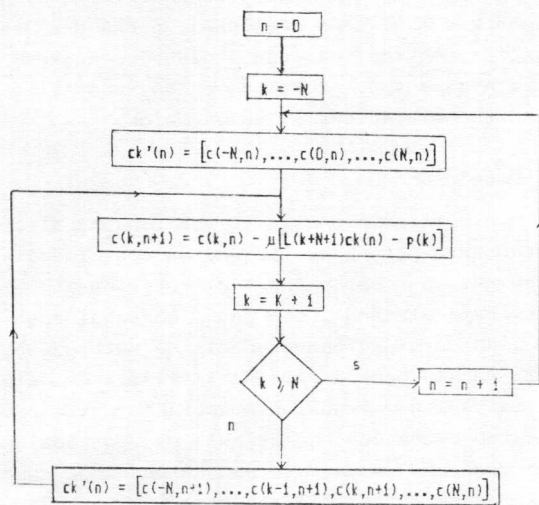


Fig.1 - Fluxograma para o SDA modificado

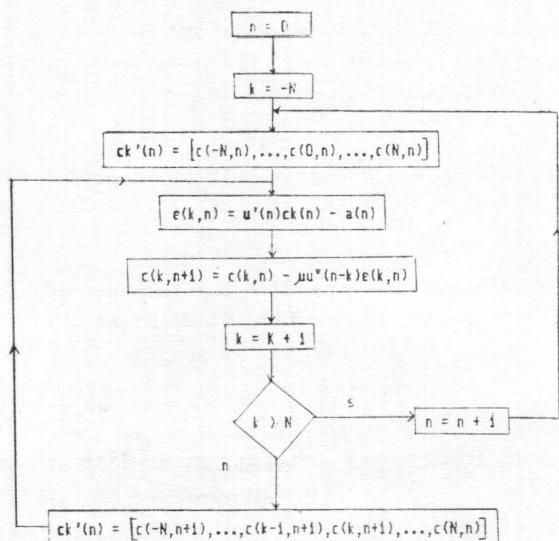


Fig.2 - Fluxograma para o algoritmo do gradiente modificado.

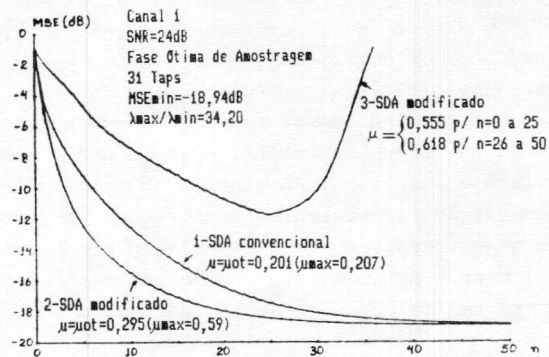


Fig.3 - Curvas de convergência para o SDA e SDA modificado.

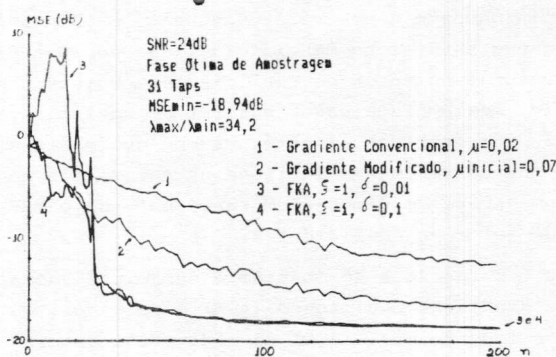


Fig.4a - Canal 1

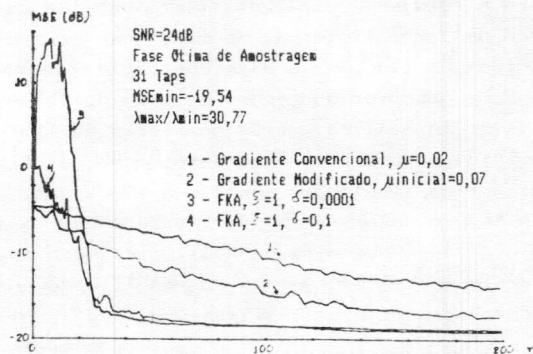


Fig.4b - Canal 2

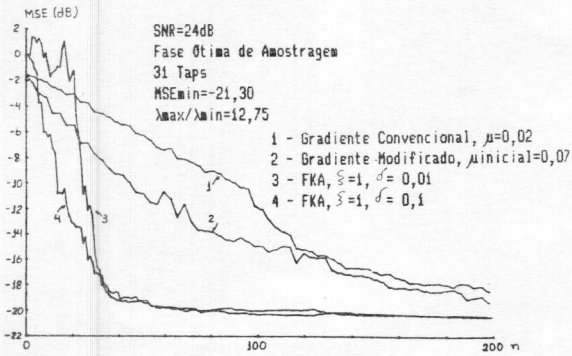


Fig.4c - Canal 3

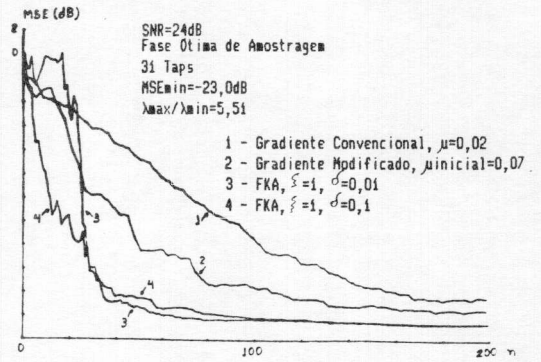


Fig.4d - Canal 4

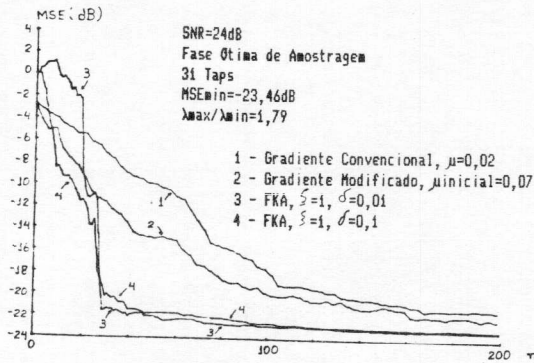


Fig.4e - Canal 5