

CÁLCULO DE ESPECTRO PARA UMA CLASSE DE SISTEMAS DE MODULAÇÃO CODIFICADA DE BLOCO

Antonio Cláudio França Pessoa
CPqD - Telebrás - Cx. P. 1579
13.085 - Campinas - SP

Dalton Soares Arantes
DECOM/FEE/UNICAMP - Cx. P. 6101
13.081 - Campinas - SP

RESUMO

Um método para o cálculo do espectro de sinais digitais M-anos codificados por códigos de bloco lineares binários é desenvolvido. Considera-se a classe de esquemas de modulação codificada de bloco proposta por Sayegh [01]. É adotado um tratamento matricial, desenvolvido por Cariolaro e Tronca [02], apropriado à implementação computacional.

I. INTRODUÇÃO

O principal objetivo dos sistemas de modulação codificada é garantir ganhos de potência em relação a um sistema de referência mantendo, em contra-partida, o confinamento da faixa de transmissão. É importante, portanto, uma análise mais profunda das propriedades espectrais desses sinais codificados.

O desenvolvimento de relações que expres- sam as propriedades espectrais de sistemas de modu- lação codificada controlados por códigos convolucio- nais foi efetuado recentemente em trabalho de Bezerra e Arantes [03]. Estes resultados representaram uma extensão de estudos anteriores de Cariolaro e Tronca [02].

A determinação das características espectrais para a classe de sinais codificados por códigos de bloco binários, apresentada por Sayegh [01], é tratada neste estudo e segue o procedimento matricial desenvolvido por Cariolaro e Tronca [02], apropriado à implementação computacional.

Na análise realizada a seguir, os símbolos binários de entrada do codificador são considerados estatisticamente independentes. Como será visto, em geral o processo de codificação mantém a regulari- dade dos símbolos transmitidos e, com isso, as características espectrais da constelação são mantidas. Porém, em alguns casos, o controle imposto pelo codificador pode causar conformação espectral e consequente compressão de faixa.

II. MODELAGEM DA CONSTELAÇÃO E DO CODIFICADOR

Os M sinais, $C_k(t)$, $k=0,1,\dots,M-1$, em banda base e com duração T, de uma constelação com dimensionalidade Q, podem ser descritos através de um conjunto de Q funções ortonormais em banda base $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_Q(t)$, associados à matriz linha

$$\underline{\lambda} = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_Q(t)] \quad (1)$$

e dos vetores normalizados

$$\underline{c}^{(k)} = (c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, \dots, c_Q^{(k)}), k = 0,1, \dots, M-1 \quad (2)$$

onde

$$\sum_{r=1}^Q [c_r^{(k)}]^2 = 1 \quad (3)$$

de modo que

$$C_k(t) = \underline{c}^{(k)} \underline{\lambda}^T, k = 0,1, \dots, M-1 \quad (4)$$

Cada sinal da constelação está associado, em consequência do mapeamento por partição de conjuntos [04], a um vetor binário m-dimensional, onde m é o logaritmo na base 2 do número de sinais,

$$\underline{b}^{(k)} = (b_0^{(k)}, b_1^{(k)}, \dots, b_{m-1}^{(k)}) \quad (5)$$

O processo de codificação proposto por Sayegh [01] para projeto de esquemas de modulação codificada controlados por códigos de bloco binários e lineares é descrito a seguir.

Seja V uma matriz m x N, onde N é o comprimento das palavras do código,

$$V = \begin{bmatrix} V_{0,0} & V_{0,1} & \dots & V_{0,N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{m-1,0} & V_{m-1,1} & \dots & V_{m-1,N-1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

A cada linha i de V, $i=0,1,\dots,m-1$, é atribuída uma palavra-código de um código de bloco binário B_i (N, K_i , d_i), onde K_i é o número de bits de informação deste código e d_i sua distância mínima de Hamming.

Seja

$$\underline{u} = (u_0, u_1, \dots, u_{L-1}), u_i \in \{0,1\} \quad (7)$$

o vetor binário de informação na entrada do codificador. Como pretende-se projetar sistemas com o dobro do número de sinais do sistema de referência, mantendo a taxa de sinalização deste, a taxa de codificação R_c do sistema codificado, definida como a razão entre o número de bits do vetor de informação e o número de bits da palavra-código correspondente, deve ser

$$R_c = \frac{L}{Nm} = \frac{m-1}{m} \quad (8)$$

Portanto,

$$L = \sum_{i=0}^{m-1} K_i = N(m-1) \quad (9)$$

Finalmente, cada coluna j da matriz-código V , $j=0, 1, \dots, N-1$, é associada a um sinal da constelação com representação binária $(V_{0,j}, V_{1,j}, \dots, V_{m-1,j})$.

Desse modo, a cada vetor binário de entrada u corresponde um sinal em banda base de duração $T_N = NT$, dado por

$$w^{(i)}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n^{(i)}(t-nT); \quad i=1, 2, \dots, 2^L \quad (10)$$

onde $w_n^{(i)}(t)$ pertence ao conjunto de sinais em banda base.

Seja $r^{(j)}(t)$ o sinal associado à j -ésima palavra-código transmitida, pertencente ao conjunto $\{w^{(1)}(t), w^{(2)}(t), \dots, w^{(2^L)}(t)\}$,

$$r^{(j)}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} r_n^{(j)}(t-nT) \quad (11)$$

onde $r_n^{(j)}(t)$ pertence ao conjunto de sinais em banda base.

O sinal equivalente em banda base obtido na saída do modulador é, portanto, dado por

$$r(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} r_n^{(j)}(t-nT-jT_N) \quad (12)$$

e o que se pretende é determinar sua densidade espectral de potência.

III. DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA DO SINAL CODIFICADO

Por se tratar de codificação de bloco, a sequência de palavras-código é um processo estacionário no sentido amplo. Porém o mesmo não ocorre com a sequência de símbolos na saída do codificador. O sinal $r(t)$ representa, na verdade, um processo ciclo estacionário com período T_N .

A primeira etapa no desenvolvimento da densidade espectral de potência deste processo consiste em determinar sua função de autocorrelação

$$R_r(t, t+\gamma) = R_r(\gamma) = E [r(t)r(t+\gamma)] \quad (13)$$

Pode-se demonstrar [05] que

$$R_r(\gamma) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_N} \sum_{u=1}^{2^L} \sum_{v=1}^{2^L} \int_{-\infty}^{\infty} dt w^{(u)}(t) w^{(v)*}(t+\gamma-sT_N) P_{\mathbf{e}}^{uv} \quad (14)$$

onde

$$P_{\mathbf{e}}^{uv} = \begin{cases} q_u \delta_{uv}, & s=0 \\ q_u q_v, & s \neq 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$\delta_{uv} = \begin{cases} 1, & u=v \\ 0, & u \neq v \end{cases} \quad (16)$$

e q_u é a probabilidade de transmissão do sinal codificado $w^{(u)}(t)$.

Portanto, a densidade espectral de potência do processo caracterizado pela função de autocorrelação dada em (14) é

$$R(f) = \frac{1}{T_N} \sum_{u=1}^{2^L} \sum_{v=1}^{2^L} W^{(u)*}(f) \sum_{s=-\infty}^{\infty} P_{\mathbf{e}}^{uv} \exp(-j2\pi f s T_N) W^{(v)}(f) \quad (17)$$

onde * significa conjugado ou, tratando-se de matriz, conjugada transposta, e $W^{(u)}(f)$ é a transformada de Fourier de $w^{(u)}(t)$.

A expressão (17) pode ser dada por [02]

$$R(f) = \frac{1}{T_N} [R_c(f) + R_d(f)] \quad (18)$$

onde $R_c(f)$ e $R_d(f)$ denotam as partes contínua e discreta de $R(f)$, respectivamente, e são dadas por

$$R_c(f) = \Omega^* D_{\mathbf{e}} \Omega - \Omega^* D_{\infty} \Omega \quad (19)$$

$$R_d(f) = \frac{1}{T_N} \Omega^* D_{\infty} \Omega \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta(f-s/T_N) \quad (20)$$

onde

$$D_{\mathbf{e}} = W^* P_{\mathbf{e}} W \quad (21)$$

$$D_{\infty} = W^* P_{\infty} W \quad (22)$$

$$\underline{\Omega}^T = [1, \exp(-j2\pi f T), \dots, \exp(-j2\pi f (N-1)T)] \quad (23)$$

$$W = \begin{bmatrix} W_{\mathbf{e}}^{(1)}(f) & \dots & W_{N-1}^{(1)}(f) \\ \vdots & & \vdots \\ W_{\mathbf{e}}^{(2^L)}(f) & \dots & W_{N-1}^{(2^L)}(f) \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$P_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} P_{\mathbf{e}}^{1,1} & \dots & P_{\mathbf{e}}^{1,2^L} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{\mathbf{e}}^{2^L,1} & \dots & P_{\mathbf{e}}^{2^L,2^L} \end{bmatrix} \quad (25)$$

e $W_n^{(u)}(f)$ é a transformada de Fourier de $w_n^{(u)}(t)$.

Definindo as matrizes

$$\underline{W}_u = [W_{\mathbf{e}}^{(u)}(f), W_1^{(u)}(f), \dots, W_{N-1}^{(u)}(f)], \quad u=1, 2, \dots, 2^L \quad (26)$$

chega-se a

$$D_{\mathbf{e}} = \sum_{u=1}^{2^L} \sum_{v=1}^{2^L} q_u \delta_{uv} \underline{W}_u^* \underline{W}_v = \sum_{u=1}^{2^L} q_u \underline{W}_u^* \underline{W}_u \quad (27)$$

Considerem-se as matrizes de coeficientes normalizados e reais

$$S^{(u)} = \begin{bmatrix} S_{\mathbf{e},1}^{(u)} & \dots & S_{N-1,1}^{(u)} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{\mathbf{e},e}^{(u)} & \dots & S_{N-1,e}^{(u)} \end{bmatrix} \quad (28)$$

onde

$$\underline{s}_n^{(u)T} = [s_{n,1}^{(u)}, s_{n,2}^{(u)}, \dots, s_{n,Q}^{(u)}] \quad (29)$$

é o vetor de coeficientes normalizados do n-ésimo sinal da u-ésima palavra-código, e

$$\underline{\Delta} = [\Delta_1(f), \Delta_2(f), \dots, \Delta_Q(f)] \quad (30)$$

onde $\Delta_q(f)$ é a transformada de Fourier de $\lambda_q(t)$.

Utilizando as matrizes dadas em (28) e (30), a expressão (27) pode ser reescrita como

$$D_{\theta} = \sum_{u=1}^{2L} q_u \underline{s}^{(u)T} \underline{\Delta}^* \underline{\Delta} \underline{s}^{(u)} \quad (31)$$

A matriz quadrada D_{θ} , de ordem N , tem elementos $D_{\theta}(i,j)$, $i, j = 0, 1, \dots, N-1$, dados por

$$D_{\theta}(i,j) = \sum_{u=1}^{2L} q_u \underline{\Delta} \underline{s}_i^{(u)} \underline{s}_j^{(u)T} \underline{\Delta}^* \quad (32)$$

Analogamente, a matriz quadrada D_{∞} , de ordem N , tem elementos $D_{\infty}(i,j)$, $i, j = 0, 1, \dots, N-1$, dados por

$$D_{\infty}(i,j) = \sum_{u=1}^{2L} \sum_{v=1}^{2L} q_u q_v \underline{\Delta} \underline{s}_i^{(u)} \underline{s}_j^{(v)T} \underline{\Delta}^* \quad (33)$$

Portanto,

$$D_{\theta}(i,j) = \underline{\Delta} H_{\theta}^{i-j} \underline{\Delta}^* \quad (34)$$

e

$$D_{\infty}(i,j) = \underline{\Delta} H_{\infty}^{i-j} \underline{\Delta}^* \quad (35)$$

onde H_{θ}^{i-j} e H_{∞}^{i-j} , $i, j = 0, 1, \dots, N-1$, são matrizes quadradas de ordem Q com elementos $H_{\theta}^{i-j}(r,s)$ e $H_{\infty}^{i-j}(r,s)$, respectivamente, $r, s = 1, 2, \dots, Q$, dados por

$$H_{\theta}^{i-j}(r,s) = \sum_{u=1}^{2L} q_u s_{i,r}^{(u)} s_{j,s}^{(u)} \quad (36)$$

e

$$H_{\infty}^{i-j}(r,s) = F_{j,r} F_{i,s} \quad (37)$$

onde

$$F_{j,c} = \sum_{u=1}^{2L} q_u s^{(u)} f_{j,c} \quad (38)$$

Seja $j, 0 \leq j \leq N-1$, uma posição qualquer da palavra-código. Esta posição está associada à j-ésima coluna da matriz \underline{V} definida em (6).

Cada elemento $V_{i,j}$ desta matriz depende de um determinado número $N(i,j)$, $1 \leq N(i,j) \leq K_1$, de distintos dígitos binários de entrada $z_1(i,j)$, $z_2(i,j)$, ..., $z_{N(i,j)}(i,j)$ pertencentes ao conjunto de bits de informação $(u_0, u_1, \dots, u_{L-1})$, ou seja,

$$V_{i,j} = z_1(i,j) \oplus z_2(i,j) \oplus \dots \oplus z_{N(i,j)}(i,j) \quad (39)$$

onde \oplus significa soma módulo 2.

Seja $C_k(t)$, $0 \leq k \leq M-1$, um determinado sinal da constelação com representação binária $\underline{b}^{(k)}$. Define-se

$$G_{\infty}(j,k) = \Pr [V_{0,j} = b_0^{(k)}, \dots, V_{M-1,j} = b_{M-1}^{(k)}] \\ = \prod_{i=0}^{M-1} \Pr [V_{i,j} = b_i^{(k)}] \quad (40)$$

pois os símbolos binários de entrada do codificador foram considerados estatisticamente independentes.

Se p é a probabilidade de ocorrência de dígito binário 1 na entrada do codificador e, por consequência, $(1-p)$ a de bit 0, pode-se demonstrar que

$$G_{\infty}(j,k) = \prod_{i=0}^{M-1} \frac{1}{2} [1 + (1-2b_i^{(k)})(1-2p)^{N(i,j)}] \quad (41)$$

Portanto, a equação (38) pode ser reescrita como

$$F_{j,c} = \sum_{k=0}^{M-1} G_{\infty}(j,k) c_e^{(k)} \quad (42)$$

Considerem-se duas posições j e j' não necessariamente distintas da palavra-código. No que diz respeito a cada linha i , $0 \leq i \leq M-1$, $M(i,j,j')$ bits de entrada influenciam tanto $V_{i,j}$ como $V_{i,j'}$.

Seja $C_k(t)$ e $C_{k'}(t)$ dois sinais da constelação não necessariamente distintos, com representação binárias $\underline{b}^{(k)}$ e $\underline{b}^{(k')}$ respectivamente, define-se

$$G_{\theta}(j,j',k,k') = \Pr [V_{0,j} = b_0^{(k)}, \dots, V_{M-1,j} = b_{M-1}^{(k)}, \\ V_{0,j'} = b_0^{(k')}, \dots, V_{M-1,j'} = b_{M-1}^{(k')}] \quad (43)$$

Pode-se demonstrar que, para $j \neq j'$

$$G_{\theta}(j,j',k,k') = \prod_{i=0}^{M-1} \frac{1}{4} [1 + (1-2b_i^{(k)})(1-2b_i^{(k')}) \times \\ \times (1-2p)^{N(i,j)+N(i,j')-M(i,j,j')} + (1-2b_i^{(k)})(1-2p)^{N(i,j)} + \\ + (1-2b_i^{(k')})(1-2p)^{N(i,j')}] \quad (44)$$

Para $j = j'$, obtém-se

$$G_{\theta}(j,j',k,k') = \begin{cases} 0, & k \neq k' \\ G_{\infty}(j,k), & k = k' \end{cases} \quad (45)$$

Desse modo,

$$H_{\theta}^{i-j}(r,s) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{k'=0}^{M-1} G_{\theta}(i,j,k,k') c_r^{(k)} c_s^{(k')} \quad (46)$$

para $i \neq j$, e

$$H_{\theta}^{i-i}(r,s) = \sum_{k=0}^{M-1} G_{\infty}(i,k) c_r^{(k)} c_s^{(k)} \quad (47)$$

O procedimento para determinação da densidade espectral de potência $R(f)$ é sumarizado a seguir.

1. Definidos a constelação e o mapeamento, obter as matrizes $\underline{\Delta}$, $\underline{c}^{(k)}$ e $\underline{b}^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, M-1$, dadas pela expressão (30), (2) e (5), respectivamente.

2. Escolhidos os códigos B_0, B_1, \dots, B_{M-1} , determinar os parâmetros $G_{\theta}(j,j',k,k')$, dado pelas expressões (44) e (45), para $j, j' = 0, 1, \dots, N-1$, $k, k' = 0, 1, \dots, M-1$ e $G_{\infty}(j,k)$, dado por (41), para $j = 0, 1, \dots, N-1$, $k = 0, 1, \dots, M-1$.

3. Calcular as matrizes H_{θ}^{i-j} , com elementos dados pelas expressões (46) e (47), e H_{∞}^{i-j} , com elementos expressos por (37) e (42), para $i, j = 0, 1, \dots, N-1$.

4. Determinar as matrizes D_{θ} e D_{∞} , com elementos dados pelas expressões (34) e (35), respectivamente.

5. Obter $R(f)$ através das expressões (18), (19), (20) e (23).

IV. ESPECTRO DE SINAIS PARA FONTE DE MÁXIMA ENTROPIA

Quando a fonte é de máxima entropia, ou seja, quando os símbolos de entrada do codificador são equiprováveis, simplificações significativas no procedimento de cálculo do espectro do sistema de modulação codificada são obtidas.

Inicialmente, serão apresentadas algumas relações que os esquemas de modulação codificada expostos e otimizados por Sayegh [01] satisfazem

$$R.1. \sum_{k=0}^{M-1} C_r^{(k)} = 0, \quad r = 1, 2, \dots, Q \quad (48)$$

$$R.2. A_r(f) A_s^*(f) + A_r^*(f) A_s(f) = 0, \quad r \neq s \quad (49)$$

R.3. Se o código B_i é tal que determina $V_{i,j} = V_{i,j'}$, $j \neq j'$, na matriz-código V dada em (6), para qualquer bloco de entrada $\underline{u} = (u_0, u_1, \dots, u_{L-1})$, então os códigos B_0, B_1, \dots, B_{i-1} definem $v_{\ell,j} = v_{\ell,j'}$, $\ell = 0, 1, \dots, i-1$ para qualquer vetor-mensagem \underline{u} . Além disto, o código B_{m-1} não impõe dependência total entre qualquer par de posições da linha $m-1$ da matriz V .

As relações acima permitem enunciar o teorema e o corolário abaixo, cujas demonstrações são omitidas por economia de espaço.

TEOREMA: Se um esquema de modulação codificada projetado segundo o procedimento indicado na seção II atende as relações R.1 a R.3 acima e a fonte é de máxima entropia, então a densidade espectral de potência do sistema em banda base é dada por

$$R(f) = \frac{1}{T} \sum_{r=1}^Q Z_r |A_r(f)|^2 + \frac{2}{TN} \sum_{n=1}^{N-1} \cos(2\pi f n T) \times \sum_{r=1}^Q |A_r(f)|^2 \sum_{i=0}^{N-n-1} Z_{rr}^{(i, i+n)} \quad (50)$$

onde

$$Z_r = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} |C_r^{(k)}|^2 \quad (51)$$

$$Z_{rr}^{(i, i+n)} = \frac{2^i}{M^2} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{k'=0}^{M-1} \Delta^{(i)}(k, k') C_r^{(k)} C_r^{(k')} \quad (52)$$

$$\Delta^{(i)}(k, k') = \begin{cases} 1 & \text{se } b_{j, k}^{(i)} = b_{j, k'}^{(i)}, \quad j = 0, 1, \dots, i-1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (53)$$

e $Y(j, j')$ é o número de pares de elementos da matriz código V , pertencentes às colunas j e j' distintas, sujeitos a dependência total.

COROLÁRIO: Se nenhum par de elementos da matriz código V está sujeito a dependência total, ou seja, se $Y(i, j) = 0$, $\forall i, j, \quad i \neq j$, então

$$R(f) = \frac{1}{T} \sum_{r=1}^Q Z_r |A_r(f)|^2 \quad (54)$$

Os sistemas que utilizam constelações M-PSK apresentam $Z_{rr}^{(i, i+n)} = 0$ para $i=1, 2, \dots, m-1$. Portanto, para estes sistemas, o processo de codificação não introduz qualquer tipo de alteração nas características espectrais impostas pela constelação e $R(f)$ é dado pela expressão (54).

Por outro lado, os sistemas que usam constelações M-PAM ou M-QAM, cujos parâmetros $Z_{rr}^{(i, i+n)}$, $i = 1, 2, \dots, m-1$, não são necessariamente nulos, estão sujeitos a conformação espectral. Porém, como a maior parte dos códigos ótimos obtidos por Sayegh [01] não determina dependência total entre elementos da matriz-código V , estes sistemas, em geral, apresentam densidade espectral de potência descrita pela expressão (54).

V. EXEMPLOS

Nesta seção são expostos 2 exemplos de sistemas que utilizam a constelação 4-PAM, cujos sinais, da forma $C_i(t) = A_i$, $0 \leq t \leq T$, $i=0, 1, 2, 3$, apresentam os vetores de coeficientes normalizados e as representações binárias

$$\begin{aligned} C^{(0)} &= 3/\sqrt{5} & b^{(0)} &= (00) \\ C^{(1)} &= 1/\sqrt{5} & b^{(1)} &= (10) \\ C^{(2)} &= -1/\sqrt{5} & b^{(2)} &= (01) \\ C^{(3)} &= -3/\sqrt{5} & b^{(3)} &= (11) \end{aligned}$$

que determinam $Z_1 = 1$ e $Z_{11}^{(1,1)} = 1/5$.

O primeiro sistema utiliza os códigos $B_0(8, 1, 8)$ e $B_1(8, 7, 2)$ e sua densidade espectral de potência é dada por

$$R(f) = S_m^2(\pi f T) \left[1 + \frac{1}{20} \sum_{n=1}^7 (8-n) \cos 2\pi f n T \right]$$

onde $S_m(x) = \sin(x)/x$.

O segundo sistema adota os códigos $B_0(21, 5, 9)$ e $B_1(21, 16, 3)$, que não determinam dependência total entre pares de elementos da matriz V , e sua densidade espectral de potência é dada por

$$R(f) = S_m^2(\pi f T)$$

A figura 1 apresenta os dois espectros obtidos.

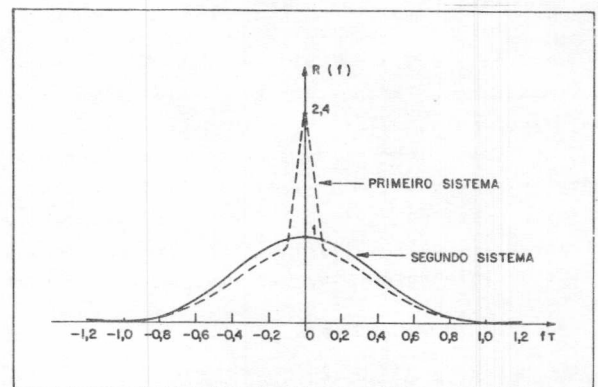


Figura 1: Espectro de dois Sistemas que Utilizam a Constelação 4-PAM

V. CONCLUSÃO

Foi apresentado um método simples para determinação da densidade espectral de potência dos sinais de modulação codificada de bloco propostos por Sayegh [01]. A estrutura matricial do método permite fácil implementação computacional.

Simplificações importantes são verificadas quando a fonte é de máxima entropia. Neste caso, para a maioria dos códigos ótimos obtidos por Sayegh [01], o processo de codificação não introduz alteração nas características espectrais impostas pela constelação.

VI. REFERÊNCIAS

- [01] S.I. Sayegh, "A Class of Optimum Block Codes in Signal Space", IEEE Trans. Commun., vol. COM-34, pp. 1043-1045, Outubro, 1986.
- [02] G.L. Cariolaro e G.P. Tronca, "Spectra of Block Coded Digital Signals", IEEE Trans. Commun., vol COM-32, pp. 1555-1563, Outubro, 1974.
- [03] J.B. Bezerra e D.S. Arantes, "Spectral Analysis of Q-ary Digital Signals Encoded by P-ary Convolutional Codes", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-32, pp. 313-319, Março, 1986.
- [04] G. Ungerboeck, "Channel Coding with Multilevel/Phase Signals", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-28, pp. 55-67, Janeiro, 1982.
- [05] G.L. Cariolaro e G.P. Tronca, "Correlation and Spectral Properties of Multilevel (M,N) Coded Digital Signals with Applications to Pseudoternary (4,3) Codes" Alta Freq. (English Issue), vol. XLIII, pp. 2-55, Janeiro, 1974.