



Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Unidade Acadêmica de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Renata Gleicy Reis de Oliveira <sup>†</sup>

# Revisitando a Geometria das Horoesferas do Espaço Hiperbólico

Campina Grande - PB

2025

---

<sup>†</sup>Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Renata Gleicy Reis de Oliveira

# Revisitando a Geometria das Horoesferas do Espaço Hiperbólico

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, pertencente à linha de pesquisa Geometria Diferencial e área de concentração Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez

Campina Grande - PB

2025

O48r Oliveira, Renata Gleicy Reis de.  
Revisitando a geometria das horoesferas do espaço hiperbólico /  
Renata Gleicy Reis de Oliveira. – Campina Grande, 2025.  
49 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de  
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.

"Orientação: Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez".  
Referências.

1. Espaço Hiperbólico. 2. Hipersuperfícies Orientadas Completas.  
3. Horoesferas. 4. Curvaturas Médias de Ordem Superior.  
5. Hipersuperfícies r-mínimas. 6. Índice de Nulidade Relativa Mínima.  
I. Velásquez, Marco Antonio Lázaro. II. Título.

CDU 514(043)

# Revisitando a Geometria das Horoesferas do Espaço Hiperbólico

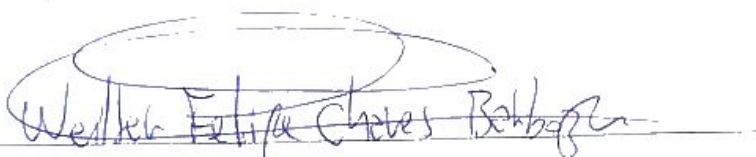
por

Renata Gleicy Reis de Oliveira

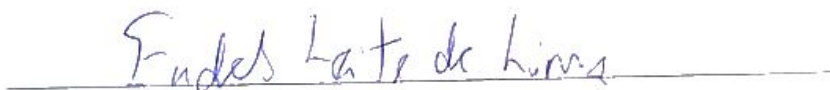
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Aprovada em:



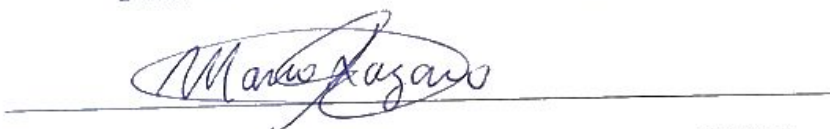
Prof. Dr. Weiller Felipe Chaves Barboza - UFCG



Prof. Dr. Eudes Leite de Lima - UFCG (Cajazeiras)



Prof. Dr. Wallace Ferreira Gomes - UFPE



Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez - UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Fevereiro - 2025

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, ao nosso grandioso Deus, por ter me concedido a dádiva da vida e por me permitir ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo desse mestrado.

Aos meus pais, Edvanildo e Luciana, por tudo que sempre fizeram por mim e por me guiarem sempre em bons caminhos. Em especial à minha mãe, mulher guerreira, que mesmo diante da adversidade mais cruel, nunca perdeu a força, a fé e o amor. Sua jornada contra o câncer tem sido um testemunho de coragem e resiliência que me inspira a cada dia. Nestes momentos de luta, quero agradecer-lhe por tudo o que fez por mim. Por cada sorriso, por cada momento de alegria e por cada instante de superação. Esta dissertação é um fruto do seu amor, do seu apoio e da sua crença em mim. É um tributo à sua força e à sua determinação. Mãe, você é minha inspiração. Obrigada por tudo, te amo mais do que palavras podem expressar.

Ao meu esposo Mateus, companheiro de todas as horas, que mesmo diante das adversidades mais desafiadoras, sempre esteve ao meu lado, me apoiando e me incentivando. Além de ser meu parceiro na vida, você também foi meu companheiro de estudo, compartilhando comigo as alegrias e os desafios da jornada acadêmica. Sua presença foi fundamental para que eu pudesse chegar até aqui. Eu te amo, Mateus. Obrigada por tudo.

A minha pequena joia rara, Marina, que ilumina meu mundo com seu sorriso e sua alegria. Mesmo sem entender o que estava acontecendo, você foi uma fonte de motivação e inspiração para mim durante essa jornada acadêmica. Seu sorriso e sua presença ao meu lado foram um lembrete constante do que é realmente importante na vida. Obrigada por ser minha motivação e minha inspiração, minha filha. Amo você, minha bebê.

Ao meu irmão, Tiago, que mesmo sendo mais novo, sempre me surpreende com sua sabedoria e seu carinho. Sua presença na minha vida é um presente precioso. Mesmo durante os momentos mais difíceis da minha jornada acadêmica, você sempre esteve ao meu lado, me apoiando e me incentivando. Você é meu melhor amigo, Tiago. Eu te amo muito!

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marco Antonio, pela orientação competente, paciência e dedicação em guiarme nesta jornada acadêmica. Obrigada por ser um orientador excepcional. Sua influência positiva em minha vida acadêmica e pessoal será sempre lembrada com gratidão.

Aos membros da banca desta dissertação, pelas correções e valiosas contribuições que me permitiram aprimorar significativamente meu trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro concedido durante o meu mestrado.

# Dedicatória

À Deus.

# Resumo

Neste trabalho, revisitamos o problema do estudo da geometria das horoesferas do espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$ , com o objetivo de caracterizá-las via algumas restrições apropriadas de suas curvaturas médias de ordem superior. Em particular, obtemos um resultado do tipo gap relativo a curvatura escalar de uma hipersuperfície orientada completa imersa em  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Além disso, estabelecemos uma estimativa para o índice de nulidade relativa mínima de uma hipersuperfície  $r$ -mínima ( $2 \leq r \leq n - 1$ ) de  $\mathbb{H}^{n+1}$  e também obtemos um resultado de não-existência para hipersuperfícies 1-mínimas contidas em uma horobola fechada determinada por uma horoesfera de  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Nossa abordagem é baseada em uma versão do princípio de máximo generalizado de Omori-Yau para operadores diferenciais do tipo traço em variedades Riemannianas com curvatura seccional limitada inferiormente.

**Palavras-chave:** Espaço hiperbólico. Hipersuperfícies orientadas completas. Horoesferas. Curvaturas médias de ordem superior. Hipersuperfícies  $r$ -mínimas. Índice de nulidade relativa mínima.



# Abstract

In this work, we revisit the problem of studying the geometry of horospheres of the hyperbolic space  $\mathbb{H}^{n+1}$ , with the purpose of characterizing them under certain appropriate constraints of their higher order mean curvatures. In particular, we obtain a gap type result concerning the scalar curvature of complete two-sided hypersurfaces immersed in  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Furthermore, we establish a estimate for the index of minimum relative nullity of  $r$ -minimal ( $2 \leq r \leq n - 1$ ) hypersurfaces of  $\mathbb{H}^{n+1}$  and we also get a nonexistence result for 1-minimal hypersurfaces in the closed horoball determined by a horosphere of  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Our approach is based on a suitable version of the generalized maximum principle of Omori–Yau for trace-type operators defined on a complete Riemannian manifold with sectional curvature bounded from below.

**Key Words:** Hyperbolic space. Complete two-sided hypersurfaces. Horospheres. Higher order mean curvatures.  $r$ -minimal hypersurfaces. Index of minimum relative nullity

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 O Espaço Hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ . . . . .	4
1.2 Hipersuperfícies Imersas em $\mathbb{H}^{n+1}$ . . . . .	10
1.2.1 As Curvaturas Médias de Ordem Superior $H_r$ . . . . .	11
1.2.2 A $r$ -ésima Transformação de Newton $P_r$ . . . . .	17
1.2.3 O $r$ -ésimo Operador Diferencial $L_r$ . . . . .	19
<b>2 Sobre a Geometria das Hipersuperfícies Imersas em <math>\mathbb{H}^{n+1}</math></b>	<b>22</b>
2.1 Hipersuperfícies Totalmente Umbílicas de $\mathbb{H}^{n+1}$ . . . . .	22
2.2 As Funções Altura e Ângulo Associadas a Hipersuperfícies de $\mathbb{H}^{n+1}$ . . . . .	28
<b>3 Resultados Principais</b>	<b>33</b>
<b>4 Estimando o Índice de Nulidade Relativa de uma Hipersuperfície em <math>\mathbb{H}^{n+1}</math></b>	<b>45</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>48</b>

# Introdução

O estudo da geometria das horoesferas do espaço hiperbólico  $(n + 1)$ -dimensional  $\mathbb{H}^{n+1}$  constitui uma importante temática no âmbito da geometria diferencial. Vale lembrar que as horoesferas são hipersuperfícies totalmente umbílicas de  $\mathbb{H}^{n+1}$  isométricas ao espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$  e, considerando uma família de todas as horoesferas compartilhando um mesmo ponto fixo na fronteira assintótica  $\partial_\infty \mathbb{H}^{n+1}$  de  $\mathbb{H}^{n+1}$ , podemos obter uma foliação completa para  $\mathbb{H}^{n+1}$  por horoesferas. Neste cenário, do Carmo e Lawson [13] usaram o método de reflexão de Alexandrov para provar que uma hipersuperfície completa mergulhada com curvatura média constante e com um único ponto em  $\partial_\infty \mathbb{H}^{n+1}$  deve ser uma horoesfera. Além disso, também observaram que a afirmação não é mais verdadeira se substituirmos mergulhada por imersa.

Mais adiante, Alías e Dajczer [2] provaram que as horoesferas são as únicas superfícies imersas em  $\mathbb{H}^3$  com curvatura média constante  $-1 \leq H \leq 1$  e que estão contido em um slab, ou seja, a região entre duas horoesferas que compartilham o mesmo ponto em  $\partial_\infty \mathbb{H}^{n+1}$ . Em [11], de Lima estudou a rigidez de hipersuperfícies completas imersas com curvatura média limitada em  $\mathbb{H}^{n+1}$ , obtendo resultados de caracterização para as horoesferas através do princípio do máximo generalizado de Omori–Yau. Em seguida, Aquino e de Lima utilizaram em [4] alguns princípios de máximos generalizados a fim de obter outros resultados de caracterização para horoesferas de  $\mathbb{H}^{n+1}$  sob restrições adequadas na função de curvatura média.

Mais recentemente, Aquino, Baltazar e de Lima em [5], utilizaram um princípio do máximo com convergência no infinito para variedades Riemannianas completas não-compactas, a fim de obter resultados de caracterização para as horoesferas de  $\mathbb{H}^{n+1}$ , através de alguns controles nas curvaturas médias de ordem superior  $H_r$ ,  $0 \leq r \leq n$ ,

associadas a uma hipersuperfície orientada de  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Posteriormente, Nelli e Zhu [14] estudaram a unicidade das horoesferas e generalizaram um teorema do tipo Bernstein obtido por do Carmo e Lawson [13] relativo as hipersuperfícies mergulhadas com curvatura média constante de ordem superior. Além disso, eles também mostraram a rigidez das horoesferas em termos de  $H_r$ .

Prosseguindo com este estudo, Colares, de Lima e Velásquez [9] estabeleceram novos resultados de caracterização para as horoesferas de  $\mathbb{H}^{n+1}$ , assumindo os mesmos controles de [5] para as curvaturas médias de ordem superior, mas agora usando como principal método analítico uma versão do princípio do máximo generalizado de Omori–Yau para operadores do tipo traço definido em uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional limitada inferiormente. Em particular, os autores obtiveram um resultado do tipo gap relativo à curvatura escalar de hipersuperfícies orientadas imersas em  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Além disso, com base nas ideias da Seção 5 de [6], eles também obtiveram uma estimativa para o índice de nulidade relativa de uma hipersuperfície orientada completa de  $\mathbb{H}^{n+1}$  com  $H_{r+1} = 0$  ( $2 \leq r \leq n - 1$ ) e, conseqüentemente, um resultado de não-existência correspondente para o caso  $r = 1$ .

Tendo em vista o cenário acima descrito, nesta dissertação temos como objetivo principal o estudo dos resultados obtidos em [9] por Colares, de Lima e Velásquez. A seguir, para um melhor entendimento da nossa abordagem, passamos a descrever os conteúdos da cada um dos capítulos deste trabalho.

No Capítulo 1 começamos apresentando o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$  como uma hiperquádrica do espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^{n+2}$ , e verificamos que  $\mathbb{H}^{n+1}$  é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante igual a  $-1$ . Em seguida, apresentamos as fórmulas de Gauss e Weingarten de uma hipersuperfície orientada  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  imersa em  $\mathbb{H}^{n+1}$ , onde orientada quer dizer que existe um campo de vetores normal e unitário  $N$  globalmente definido em  $\Sigma^n$ , e, logo depois, estabelecemos o conceito da  $r$ -ésima curvatura média  $H_r$ , da  $r$ -ésima transformação de Newton  $P_r$  e do  $r$ -ésimo operador diferencial  $L_r$ , todos eles associados a  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ .

No Capítulo 2 realizamos um estudo detalhado de todas as hipersuperfícies totalmente umbílicas do espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$ , isto é, da geometria das esferas geodésicas, das horoesferas e das hiperesferas  $\mathbb{H}^{n+1}$ .

No Capítulo 3, apresentamos funções auxiliares de muita importância para o estudo

do comportamento da hipersuperfície isométrica  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ , a saber, a função altura  $l_a = \langle \psi(p), a \rangle$  e a função ângulo  $f_a = \langle N(p), a \rangle$ , onde  $a$  é um vetor tipo-luz de  $\mathbb{L}^{n+2}$ . Além disso, destacamos algumas expressões relacionadas a tais funções que nos auxiliarão nas demonstrações dos teoremas principais desta dissertação.

No Capítulo 4, estabelecemos e provamos os resultados principais desta dissertação, a maioria deles com respeito à caracterização das horoesferas de  $\mathbb{H}^{n+1}$  via as  $r$ -ésimas curvaturas médias e usando uma versão do princípio generalizado de Omori-Yau devido a Alías, Impera e Rigoli [3].

Por fim, no Capítulo 5, estimamos o índice de nulidade relativa de uma hipersuperfície  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  em  $\mathbb{H}^{n+1}$  e, como uma consequência, estabelecemos um resultado de não-existência para hipersuperfícies 1-mínimas contidas em uma horobola fechada determinada por uma horoesfera de  $\mathbb{H}^{n+1}$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, temos como objetivo apresentar de forma introdutória alguns conceitos que serão utilizados nos demais capítulos deste trabalho. Iniciamos apresentando o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$ , ambiente no qual os teoremas principais desta dissertação estarão embasados, onde mostramos que  $\mathbb{H}^{n+1}$  é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante igual a  $-1$ . Em seguida, apresentamos os conceitos das curvaturas médias de ordem superior  $H_r$ ,  $0 \leq r \leq n$ , bem como a  $r$ -ésima transformação de Newton,  $P_r$ , e o seu  $r$ -ésimo operador diferencial,  $L_r$ , associado.

### 1.1 O Espaço Hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$

Antes de definirmos o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$ , precisamos de alguns conceitos básicos dos quais faremos uso.

No que segue,  $\mathcal{V}$  sempre denotará um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma forma bilinear simétrica  $b$  sobre  $\mathcal{V}$  é uma função bilinear  $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$b(v, w) = b(w, v)$$

para quaisquer  $v, w \in \mathcal{V}$ . Uma forma bilinear simétrica  $b$  sobre  $\mathcal{V}$  é dita:

- (i) positiva definida, se  $b(v, v) > 0$  para todo  $v \in \mathcal{V} - \{0\}$ .
- (ii) negativa definida, se  $b(v, v) < 0$  para todo  $v \in \mathcal{V} - \{0\}$ .
- (iii) não-degenerada, se  $b(v, w) = 0$  para todo  $w \in \mathcal{V}$  implica em  $v = 0$ .

Se  $b$  é uma forma bilinear simétrica sobre  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{W}$  é um subespaço de  $\mathcal{V}$ , então a restrição  $b|_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma forma bilinear simétrica sobre  $\mathcal{W}$ .

**Definição 1.1** *Um produto escalar sobre um espaço vetorial real de dimensão finita  $\mathcal{V}$  é uma forma bilinear simétrica  $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  que é não-degenerada. Diremos que  $\mathcal{V}$  é um espaço com produto escalar se ele é munido com um produto escalar, e definimos o índice de  $\mathcal{V}$  como sendo o índice de seu produto escalar.*

Se  $\mathcal{V}$  é um espaço com produto escalar  $b$  e  $\mathcal{W}$  é um subespaço de  $\mathcal{V}$ , dizemos que  $\mathcal{W}$  é não-degenerado se a restrição  $b|_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$  for não-degenerada. Definimos o complemento ortogonal  $\mathcal{W}^\perp$  de  $\mathcal{W}$  em  $\mathcal{V}$  por

$$\mathcal{W}^\perp = \{v \in \mathcal{V}; b(v, w) = 0 \text{ para todo } w \in \mathcal{W}\}.$$

No que segue, supomos que  $\mathcal{V}$  é um espaço com produto escalar  $b = \langle \cdot, \cdot \rangle$ . Em relação a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , dizemos que  $v \in \mathcal{V} - \{0\}$  é:

- (i) tipo-espaço, se  $\langle v, v \rangle > 0$  ou  $v = 0$ ;
- (ii) tipo-tempo, se  $\langle v, v \rangle < 0$ ;
- (iii) tipo-luz, se  $\langle v, v \rangle = 0$  e  $v \neq 0$ .

Um subespaço não-degenerado  $\mathcal{W}$  de  $\mathcal{V}$  será dito tipo-tempo, tipo-luz ou tipo-espaço se todos os seus elementos forem tipo-tempo, tipo-luz ou tipo-espaço, respectivamente. Se  $v \in \mathcal{V} - \{0\}$  não for tipo-luz, define-se o sinal  $\epsilon_v \in \{-1, 1\}$  de  $v$  por

$$\epsilon_v = \frac{\langle v, v \rangle}{|\langle v, v \rangle|}$$

A norma de  $v \in \mathcal{V}$  é  $|v| = \sqrt{\epsilon_v \langle v, v \rangle}$ , e  $v$  é unitário se  $|v| = 1$ . É bem conhecido em álgebra linear que todo espaço vetorial real  $\mathcal{V}$  munido com um produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  admite uma base ortonormal. Assim, se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base, teremos que  $\langle e_i, e_j \rangle = \epsilon_i \delta_{ij}$ , onde  $\epsilon_i$  denota o sinal de  $e_i$  e

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Nesse contexto, é possível estabelecer o seguinte resultado:

**Lema 1.1** (*[15, Lemas 2.25 e 2.26]*) *Sejam  $\mathcal{V}$  um espaço com produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base ortornormal de  $\mathcal{V}$ . Então*

- (i) todo  $v \in \mathcal{V}$  admite uma única representação da forma  $v = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \langle v, e_i \rangle e_i$ ;
- (ii) o número de elementos com sinais negativos em  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  é igual a índice de  $\mathcal{V}$ .

**Observação 1.1** *Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade diferenciável munida com o produto escalar  $\langle, \rangle$ . Quando o índice  $v$  de  $\langle, \rangle$  é zero,  $\overline{M}^{n+1}$  é simplesmente uma variedade Riemanniana. Por outro lado, quando  $v = 1$ ,  $\overline{M}^{n+1}$  é denominada uma variedade Lorentziana.*

Agora voltando nossa atenção, definimos o espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^{n+2}$ , com  $n \geq 0$ , a saber, o espaço  $\mathbb{R}^{n+2}$  munido com o produto escalar

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} v_i w_i - v_{n+2} w_{n+2},$$

onde  $v = (v_1, \dots, v_{n+2})$  e  $w = (w_1, \dots, w_{n+2})$ .

Definimos o espaço hiperbólico como a hiperquádrica de  $\mathbb{L}^{n+2}$  dada por

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{p \in \mathbb{L}^{n+2} \mid \langle p, p \rangle = -1, p_{n+2} \geq 1\},$$

equipada com a métrica induzida de  $\mathbb{L}^{n+2}$ .

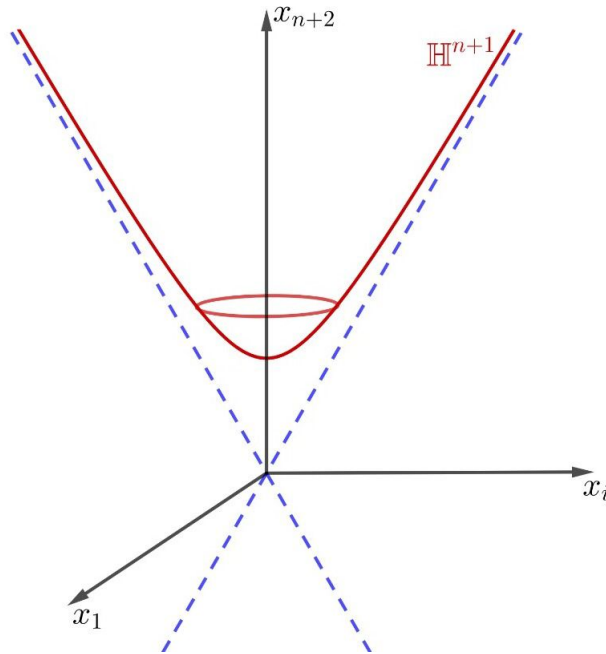


Figura 1.1: Modelo quádrico do espaço hiperbólico

O próximo resultado nos garante que o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$  é uma variedade Riemanniana imersa no espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^{n+2}$ .

**Proposição 1.1** (*[15, Seção 4.6]*) *São válidas as afirmações:*



- (i)  $\mathbb{H}^{n+1}$  é uma subvariedade de  $\mathbb{L}^{n+2}$  de dimensão  $(n+1)$ .
- (ii) O espaço tangente em cada ponto  $p \in \mathbb{H}^{n+1}$  é o conjunto de todos os vetores de  $\mathbb{L}^{n+2}$  que são ortogonais a  $p$ .
- (iii)  $\mathbb{H}^{n+1}$  tem índice zero, ou seja,  $\mathbb{H}^{n+1}$  é uma variedade Riemanniana.

**Demonstração:**

(i) Consideremos

$$\begin{aligned} G : \mathbb{L}^{n+2} &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto G(p) = \langle p, p \rangle. \end{aligned}$$

Veja que  $\mathbb{H}^{n+1} = G^{-1}(\{-1\})$ . Assim, basta mostrar que  $-1$  é um valor regular da função. Para isso, sejam  $p \in \mathbb{L}^{n+2}$ ,  $v \in T_p(\mathbb{L}^{n+2})$  e considere uma curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = v$ . Logo,

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } G(p), v \rangle &= dG_p(v) = \frac{d}{dt}(G \circ \alpha)(t)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle|_{t=0} = 2 \langle \alpha'(0), \alpha(0) \rangle = \langle 2p, v \rangle. \end{aligned}$$

Como  $\langle, \rangle$  é não-degenerado e  $v \in T_p(\mathbb{L}^{n+2})$  é arbitrário,

$$\text{grad } G(p) = 2p, \forall p \in \mathbb{L}^{n+2}. \quad (1.1)$$

Observemos que  $\text{grad } G(p) = 0$  se, e somente se,  $p = 0$ . Porém, isso não acontece para os pontos que pertencem a  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Assim,  $-1$  é valor regular de  $G$  e, portanto,  $\mathbb{H}^{n+1}$  é subvariedade de  $\mathbb{L}^{n+2}$ , cuja dimensão é

$$\dim(\mathbb{H}^{n+1}) = \dim(\mathbb{L}^{n+2}) - \dim(\mathbb{R}) = n+1.$$

(ii) Veja que

$$T_p(\mathbb{H}^{n+1}) = \ker\{dG_p : T_p(\mathbb{L}^{n+2}) \rightarrow \mathbb{R}\}, \forall p \in \mathbb{H}^{n+1}. \quad (1.2)$$

Agora, observando de (1.1) que

$$v \in \ker\{dG_p\} \Leftrightarrow 0 = dG_p(v) \Leftrightarrow 0 = \langle \text{grad } G(p), v \rangle = \langle 2p, v \rangle,$$

então obtemos de (1.2) que

$$T_p(\mathbb{H}^{n+1}) = \{v \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle p, v \rangle = 0\}, \forall p \in \mathbb{H}^{n+1}, \quad (1.3)$$

como desejado.

(iii) Se  $w \in T_p(\mathbb{H}^{n+1}) \cap \text{Span}\{\text{grad } G(p)\}$  então de (1.1) e (1.3) obtemos respectivamente que  $\langle w, p \rangle = 0$  e  $w = \beta \text{grad } G(p)$ , para algum  $\beta \in \mathbb{R}$ . Daí,

$$0 = \langle w, p \rangle = \beta \langle \text{grad } G(p), p \rangle = 2\beta \langle p, p \rangle = -2\beta.$$

Isso implica que  $\beta = 0$ . Logo,  $w = 0$  e

$$T_p(\mathbb{H}^{n+1}) \cap \text{Span}\{\text{grad } G(p)\} = 0.$$

Assim,

$$T_p(\mathbb{L}^{n+2}) = T_p(\mathbb{H}^{n+1}) \oplus \text{Span}\{\text{grad } G(p)\}, \forall p \in \mathbb{H}^{n+1}. \quad (1.4)$$

Como  $\langle p, p \rangle = -1$  e  $\text{grad } G(p) = 2p$  então  $\text{Span}\{\text{grad } G(p)\}$  tem índice 1. Em particular,  $\text{Span}\{\text{grad } G(p)\}$  é não-degenerado. Segue que,

$$\text{Span}\{\text{grad } G(p)\}^\perp = T_p(\mathbb{H}^{n+1}),$$

também é não-degenerado. Logo, de (1.4), segue que

$$1 = \text{ind}(T_p(\mathbb{L}^{n+2})) = \text{ind}(T_p(\mathbb{H}^{n+1})) + \text{ind}(\text{Span}\{\text{grad } G(p)\}),$$

para todo  $p \in \mathbb{H}^{n+1}$ . Portanto  $\text{ind}(\mathbb{H}^{n+1}) = 0$ , donde segue que  $\mathbb{H}^{n+1}$  é uma variedade Riemanniana. ■

Consideremos agora a aplicação inclusão  $\iota : \mathbb{H}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ . De (1.1) e (1.4) obtemos que a correspondência

$$\bar{N}_p = \frac{\text{grad } G(p)}{|\text{grad } G(p)|} = \frac{2p}{\sqrt{|\langle 2p, 2p \rangle|}} = p, \quad (1.5)$$

define um campo normal unitário globalmente definido em  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Assim, a aplicação  $\bar{N} : \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  definida por (1.5) é chamada *aplicação de Gauss* de  $\iota : \mathbb{H}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ .

Denotaremos por  $A_{\bar{N}} : \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$  o operador de Weingarten de  $\iota : \mathbb{H}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$  na direção do campo  $\bar{N}$ . Também iremos denotar por  $\nabla^0$  e  $\bar{\nabla}$ , respectivamente, as conexões de Levi-Civita de  $\mathbb{L}^{n+2}$  e  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Assim, as fórmulas de Gauss e Weingarten de  $\iota : \mathbb{H}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$  assumem, respectivamente, a seguinte forma:

$$\nabla_X^0 Y = \bar{\nabla}_X Y - \langle A_{\bar{N}}(X), Y \rangle \bar{N}, \quad (1.6)$$

$$A_{\bar{N}}(X) = -(\nabla_X^0 \bar{N})^\top = -\nabla_X^0 \bar{N}, \quad (1.7)$$

para todo campo de vetores tangentes  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$ . Observe que temos a igualdade  $-(\nabla_X^0 \bar{N})^\top = -\nabla_X^0 \bar{N}$  pois  $\langle \bar{N}, \bar{N} \rangle = -1$ , assim

$$0 = X \langle \bar{N}, \bar{N} \rangle = 2 \langle \nabla_X^0 \bar{N}, \bar{N} \rangle,$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$ . Para obter uma expressão mais explícita de  $A_{\bar{N}}$ , substituímos (1.5) em (1.7), obtendo

$$A_{\bar{N}}(v) = -\nabla_v^0 \bar{N} = -\nabla_v^0 p = -v, \quad \forall v \in T_p(\mathbb{H}^{n+1}),$$

ou ainda,

$$A_{\bar{N}}(X) = -X, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1}). \quad (1.8)$$

O vetor curvatura média  $\bar{\mathbf{H}} \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})^\perp$  de  $\iota : \mathbb{H}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ , na direção do campo normal unitário  $\bar{N}$ , é definido por

$$\bar{\mathbf{H}} = \bar{H} \bar{N}, \quad (1.9)$$

onde

$$\bar{H} = \frac{-1}{n+1} \text{tr}(A_{\bar{N}}) \in C^\infty(\mathbb{H}^{n+1}),$$

é a curvatura média de  $\iota : \mathbb{H}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ . Se  $R^0$  e  $\bar{R}$  denotam os tensores de curvatura de  $\mathbb{L}^{n+2}$  e  $\mathbb{H}^{n+1}$ , respectivamente, então a equação de Gauss de  $\iota : \mathbb{H}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$  é dada por

$$\bar{R}(X, Y)Z = (R^0(X, Y)Z)^\top - \langle A_{\bar{N}}(X), Z \rangle A_{\bar{N}}(Y) + \langle A_{\bar{N}}(Y), Z \rangle A_{\bar{N}}(X),$$

para todos  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$ . Sendo os coeficientes da métrica do espaço  $\mathbb{L}^{n+2}$  constantes, o tensor curvatura  $R^0$  é identicamente nulo. Logo,

$$\bar{R}(X, Y)Z = -\langle A_{\bar{N}}(X), Z \rangle A_{\bar{N}}(Y) + \langle A_{\bar{N}}(Y), Z \rangle A_{\bar{N}}(X), \quad (1.10)$$

para todos  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$ . Com toda essa discussão, estamos em condições de estabelecer e mostrar o seguinte resultado.

**Proposição 1.2** ([15, Seção 4.6]) *Com a métrica induzida de  $\mathbb{L}^{n+2}$ ,  $\mathbb{H}^{n+1}$  tem curvatura seccional constante igual a  $-1$  e curvatura média, na direção do campo normal unitário  $\bar{N}$  definido em (1.5), igual a 1.*

**Demonstração:** De (1.10) e (1.8) segue que

$$\bar{R}(X, Y)Z = -\{\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X\},$$

para todos  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$ . Assim, de [12, Corolário 3.5] obtemos imediatamente que  $\mathbb{H}^{n+1}$  tem curvatura seccional constante igual a  $-1$ . Por outro lado, observando (1.8) que  $A_{\bar{N}} = -Id_{\mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})}$ , obtemos

$$\text{tr}(A_{\bar{N}}) = -(n+1),$$

logo, de (1.9),  $\bar{H} = -(-1)\bar{N} = \bar{N}$ . Assim, a curvatura média  $\bar{H}$  de  $\mathbb{H}^{n+1}$  na direção de  $\bar{N}$  é constante igual a 1. ■

## 1.2 Hipersuperfícies Imersas em $\mathbb{H}^{n+1}$

Considere a imersão isométrica  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$  da hipersuperfície orientada conexa  $\Sigma^n$ , onde por orientada queremos dizer que existe um campo de vetores normal e unitário  $N$  globalmente definido em  $\Sigma^n$ .

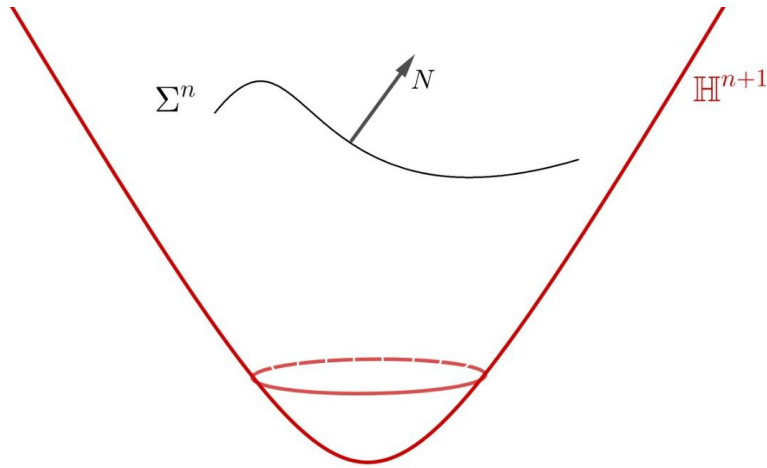


Figura 1.2:  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ .

O campo de vetores normal e unitário definido em  $\mathbb{H}^{n+1}$  continuará sendo denotado por  $\bar{N}$ . O operador de Weingarten de  $\Sigma^n$  com relação ao campo de vetores  $N$  será denotado por  $A : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ , enquanto o operador de Weingarten de  $\mathbb{H}^{n+1}$  será denotado por  $A_{\bar{N}} : \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$ . Também iremos denotar por  $\nabla$ ,  $\bar{\nabla}$  e  $\nabla^0$  as conexões de Levi-Civita em  $\Sigma^n$ ,  $\mathbb{H}^{n+1}$  e  $\mathbb{L}^{n+2}$ , respectivamente. Assim, as fórmulas de Gauss e Weingarten de  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  assumem, respectivamente, a seguinte forma:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle A(X), Y \rangle N,$$

$$A(X) = -\bar{\nabla}_X N = -\nabla_X^0 N,$$

para todo campo de vetores tangentes  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ . Observe que temos a igualdade  $-\bar{\nabla}_X N = -\nabla_X^0 N$ , pois

$$\nabla_X^0 N = \bar{\nabla}_X N + \langle A_{\bar{N}}(X), N \rangle \bar{N} = \bar{\nabla}_X N + \langle -X, N \rangle \bar{N} = \bar{\nabla}_X N,$$

onde  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$  e  $N \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)^\perp$ . Como  $\mathbb{H}^{n+1}$  tem curvatura seccional constante igual a  $-1$ , a equação de Gauss de  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  é dada por

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle = & - \{ \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle \} \\ & + \{ \langle A(X), Z \rangle \langle A(Y), W \rangle - \langle A(Y), Z \rangle \langle A(X), W \rangle \}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

para quaisquer  $X, Y, Z$  e  $W \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ . Aqui,  $R$  denota o tensor curvatura de  $\Sigma^n$ .

### 1.2.1 As Curvaturas Médias de Ordem Superior $H_r$

Em cada  $p \in \Sigma^n$ , o operador de Weingarten  $A_p : T_p \Sigma^n \rightarrow T_p \Sigma^n$  restringe-se a uma aplicação linear autoadjunta e, portanto, simétrica. Assim, existe uma base ortonormal de autovetores  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $T_p \Sigma^n$  com autovalores reais  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , isto é,  $A_p(e_i) = \lambda_i e_i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Sendo o determinante e o traço invariantes por mudanças de base, podemos escrever  $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$  que é chamada de *curvatura de Gauss-Kronecker* e

$$H = \frac{1}{n} \text{tr}(A) = \frac{1}{n} (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n),$$

que é chamada *curvatura média* de  $\psi$ .

A  $r$ -ésima função simétrica,  $S_r : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ , de  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , denotada por  $S_r$ , é definida como

$$S_r = \begin{cases} 1, & \text{se } r = 0; \\ \sum_{i_1 < \dots < i_r} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_r}, & \text{se } 1 \leq r \leq n; \\ 0, & \text{se } r > n. \end{cases}$$

Ou seja, com as notações acima, temos que

$$\begin{aligned} S_1 &= \lambda_1 + \cdots + \lambda_n; \\ S_2 &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \cdots + \lambda_1 \lambda_n + \lambda_2 \lambda_3 + \cdots + \lambda_{n-1} \lambda_n; \\ &\vdots \\ S_n &= \lambda_1 \cdots \lambda_n. \end{aligned}$$

Denotando por  $\text{diag}(t - \lambda_1, \dots, t - \lambda_n)$  a matriz diagonal com entradas  $t - \lambda_1, \dots, t - \lambda_n$ , então o polinômio característico do operador de Weingarten restrito ao ponto  $p \in \Sigma^n$ ,  $A_p : T_p \Sigma^n \rightarrow T_p \Sigma^n$ , é dado por

$$\begin{aligned} \det(tI - A_p) &= \det(\text{diag}(t - \lambda_1(p), \dots, t - \lambda_n(p))) \\ &= (t - \lambda_1(p)) \cdots (t - \lambda_n(p)) \\ &= \sum_{r=0}^n (-1)^r S_r(p) t^{n-r}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

A última igualdade se justifica, pois escolhendo  $r$  curvaturas principais  $\lambda_i$ , e realizando o produto, obtemos  $(-1)^r \cdot \lambda_{i_1}(p) \cdots \lambda_{i_r}(p) \cdot t^{n-r}$ ,  $i_1 < \cdots < i_r$ . Assim, somando os termos que tem o fator  $t^{n-r}$  em comum, obtemos  $(-1)^r S_r(p) t^{n-r}$  e, por fim, basta variarmos  $r$  de 0 até  $n$  para obtermos a igualdade desejada.

**Definição 1.2** A  $r$ -ésima curvatura média  $H_r$  da hipersuperfície  $\Sigma^n$  é definida por

$$\binom{n}{r} H_r = S_r, \quad 0 \leq r \leq n. \quad (1.13)$$

Observemos que  $H_1 = \frac{1}{n} \text{tr}(A)$  é a *curvatura média* de  $\Sigma^n$ , que é a principal quantidade extrínseca de  $\Sigma^n$ . Já se  $r = n$ , temos que  $H_n = \lambda_1 \cdots \lambda_n = \det(A)$  é a *curvatura de Gauss-Kronecker* de  $\Sigma^n$ . As primeiras duas curvaturas médias  $H$  e  $H_2$  de  $\Sigma^n$  verificam a seguinte relação:

$$|A|^2 = n^2 H^2 - n(n-1) H_2, \quad (1.14)$$

onde  $|A|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$ . De fato, desde que  $nH = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ , temos,

$$\begin{aligned} n^2 H^2 &= (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)^2 \\ &= \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 + 2(\lambda_1 \lambda_2 + \cdots + \lambda_1 \lambda_n + \lambda_2 \lambda_3 + \cdots + \lambda_2 \lambda_n + \cdots + \lambda_{n-1} \lambda_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + 2 \left( \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + 2S_2 = |A|^2 + n(n-1)H_2, \end{aligned}$$

e o resultado segue.

Observemos também que  $H_2$  é uma quantidade intrínseca que está relacionada com

a curvatura escalar  $R$  de  $\Sigma^n$ . De fato, da equação de Gauss (1.11), temos,

$$\begin{aligned}
\text{Ric}(X, X) &= \sum_{i=1}^n \langle R(X, e_i)X, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \{ -\langle X, X \rangle \langle e_i, e_i \rangle + \langle e_i, X \rangle \langle X, e_i \rangle + \langle AX, X \rangle \langle Ae_i, e_i \rangle - \langle Ae_i, X \rangle \langle AX, e_i \rangle \} \\
&= \sum_{i=1}^n \{ -|X|^2 + \langle e_i, X \rangle \langle X, e_i \rangle + \langle AX, X \rangle \langle Ae_i, e_i \rangle - \langle e_i, AX \rangle \langle AX, e_i \rangle \} \\
&= -n|X|^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^n \langle X, e_i \rangle \langle X, e_i \rangle}_{\langle X, X \rangle} + \langle AX, X \rangle \underbrace{\sum_{i=1}^n \langle Ae_i, e_i \rangle}_{\text{tr}A=nH} - \underbrace{\sum_{i=1}^n \langle AX, e_i \rangle \langle AX, e_i \rangle}_{\langle AX, AX \rangle} \\
&= -n|X|^2 + |X|^2 + nH \langle AX, X \rangle - \langle AX, AX \rangle \\
&= (1-n)|X|^2 + nH \langle AX, X \rangle - \langle AX, AX \rangle.
\end{aligned}$$

Calculando o  $\text{tr}(\text{Ric})$  obtemos

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\text{Ric}) &= \sum_{i=1}^n \text{Ric}(e_i, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \{ (1-n)|e_i|^2 + nH \langle Ae_i, e_i \rangle - \langle Ae_i, Ae_i \rangle \} \\
&= (1-n)n + nH \sum_{i=1}^n \langle Ae_i, e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle Ae_i, Ae_i \rangle \\
&= -(n-1)n + n^2 H^2 - |A|^2 \\
&= -(n-1)n + n^2 H^2 - n^2 H^2 + n(n-1)H_2 \\
&= -(n-1)n + n(n-1)H_2,
\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos (1.14). Agora, podemos calcular a curvatura escalar normalizada de  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ ,

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{n(n-1)} \text{tr}(\text{Ric}) \\
&= \frac{1}{n(n-1)} (n(n-1)H_2 - (n-1)n) \\
&= H_2 - 1,
\end{aligned}$$

de onde obtemos a relação

$$H_2 = R + 1. \quad (1.15)$$

A próxima Proposição foi obtida por A. Caminha [7]. Apresentaremos aqui um esboço da demonstração, mas para isso precisamos do lema a seguir:

**Lema 1.2** ([7, Lema 3.1]) *Se  $f \in \mathbb{R}[x]$  é um polinômio com  $k \geq 1$  raízes reais, contadas as multiplicidades, então  $f'$  tem pelo menos  $k-1$  raízes reais, contadas as multiplicidades. Em particular, se todas as raízes de  $f$  são reais, o mesmo ocorre com  $f'$ .*

**Demonstração:** Seja  $r \in \mathbb{R}$  uma raiz de multiplicidade  $k \geq 1$  de  $f$ , isto é,  $f(x) = (x-r)^k g(x)$ , com  $g(r) \neq 0$ . Derivando  $f$ , obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= k(x-r)^{k-1}g(x) + (x-r)^k g'(x) \\ &= (x-r)^{k-1}(kg(x) + (x-r)g'(x)), \end{aligned}$$

e como  $kg(r) + (r-r)g'(r) \neq 0$ , segue que  $r$  é raiz de multiplicidade  $k-1$  de  $f'$ .

Agora sejam  $r_1, \dots, r_l \in \mathbb{R}$  as raízes distintas de  $f$ , isto é,

$$f(x) = (x-r_1)^{k_1} \cdots (x-r_l)^{k_l} g(x),$$

onde  $k_1, \dots, k_l$  são inteiros positivos e  $g(r_i) \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Como vimos acima,  $r_i$  é raiz de multiplicidade  $k_i - 1$  de  $f'$ , então contadas as multiplicidades, podemos afirmar que  $f$  possui  $k = k_1 + \dots + k_l$  raízes reais.

Supondo, sem perda de generalidade, que  $r_1 < \dots < r_l$ , obtemos mais  $l-1$  raízes distintas dos  $r_i$  para  $f'$ , aplicando o Teorema do Valor Médio aos intervalos  $[r_i, r_{i+1}]$ . Portanto, concluímos que  $f'$  tem pelo menos

$$(k_1 - 1) + \dots + (k_l - 1) + (l - 1) = k - l + l - 1 = k - 1,$$

raízes reais. ■

**Proposição 1.3** ([7, Proposição 3.2]) *Sejam  $n > 1$  inteiro e  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  números reais. Para  $0 \leq r \leq n$ , defina  $S_r = S_r(\lambda_i)$  como polinômio simétrico associado aos números reais  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  e  $H_r = H_r(\lambda_i) = \binom{n}{r}^{-1} S_r(\lambda_i)$ .*

- (i) *Para  $1 \leq r < n$ , tem-se  $H_r^2 \geq H_{r-1}H_{r+1}$ . Além disso, se a igualdade ocorre para  $r = 1$  ou para algum  $1 < r < n$ , com  $H_{r+1} \neq 0$  neste caso, então  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$ .*
- (ii) *Se  $H_1, H_2, \dots, H_r > 0$  para algum  $1 < r < n$ , então  $H_1 \geq \sqrt{H_2} \geq \sqrt[3]{H_3} \geq \dots \geq \sqrt[r]{H_r}$ . Mais ainda, se a igualdade ocorre para algum  $1 \leq j < r$ , então  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$ .*
- (iii) *Se, para algum  $1 \leq r < n$ , tivermos  $H_r = H_{r+1} = 0$ , então  $H_j = 0$  para todo  $r \leq j \leq n$ .*



### Demonstração:

(i) Usaremos indução sobre a quantidade  $n > 1$  de números reais. Para  $n = 2$ , temos apenas  $r = 1$  e a desigualdade segue de

$$\begin{aligned} H_1^2 - H_0 H_2 &= \left(\frac{1}{2} S_1\right)^2 - S_2 \\ &= \left(\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)\right)^2 - \lambda_1 \lambda_2 \\ &= \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

valendo a igualdade, se e somente se,  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

Suponha agora que as desigualdades sejam verdadeiras para  $n - 1$  números reais, com igualdade para  $r = 1$  ou  $1 < r < n$  e  $H_{r+1} \neq 0$ , se e somente se, todos os  $\lambda_i$ 's são iguais. Nessas condições, dados  $n \geq 3$  números reais  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , seja

$$f(x) = (x + \lambda_1) \cdots (x + \lambda_n) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} H_r(\lambda_i) x^{n-r},$$

então

$$f'(x) = \sum_{r=0}^{n-1} (n-r) \binom{n}{r} H_r(\lambda_i) x^{n-r-1}.$$

Como as raízes de  $f$  são todas reais, então pelo Lema 1.2, o mesmo ocorre com  $f'$ , logo existem números reais  $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  tais que

$$f'(x) = n(x + \gamma_1) \cdots (x + \gamma_{n-1}),$$

mas por outro lado

$$f'(x) = n \sum_{r=0}^{n-1} S_r(\gamma_i) x^{n-r-1} = \sum_{r=0}^{n-1} n \binom{n-1}{r} H_r(\gamma_i) x^{n-r-1}.$$

Sabendo que  $n \binom{n-1}{r} = (n-r) \binom{n}{r}$  e comparando os coeficientes, temos que  $H_r(\lambda_i) = H_r(\gamma_i)$  para  $0 \leq r \leq n-1$ . Portanto segue por hipótese de indução que

$$H_r^2(\lambda_i) = H_r^2(\gamma_i) \geq H_{r-1}(\gamma_i) H_{r+1}(\gamma_i) = H_{r-1}(\lambda_i) H_{r+1}(\lambda_i),$$

para  $1 \leq r \leq n-2$ .

Além disso, se a igualdade ocorre para os  $\lambda_i$ 's com  $r = 1$ , respectivamente  $1 < r < n-1$  e  $H_{r+1}(\lambda_i) \neq 0$ , o mesmo ocorre para os  $\gamma_i$ 's com  $r = 1$ , respectivamente  $1 < r < n-1$  e  $H_{r+1}(\gamma_i) \neq 0$ . Dessa forma, segue da hipótese de indução que  $\gamma_1 = \cdots = \gamma_{n-1}$ , portanto  $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ .

Falta mostrar que  $H_{n-1}^2(\lambda_i) \geq H_{n-2}(\lambda_i)H_n(\lambda_i)$ , com igualdade para  $H_n \neq 0$ , se e somente se, todos os  $\lambda_i$ 's são iguais. Se  $\lambda_i = 0$  para algum  $1 \leq i \leq n$ , então  $H_n(\lambda_i) = 0$  e a desigualdade é óbvia. Caso contrário, teremos  $H_n \neq 0$  e além disso

$$H_{n-1}^2 \geq H_{n-2}H_n,$$

se e somente se,

$$\left[ \binom{n}{n-1}^{-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} H_n \right]^2 \geq \left[ \binom{n}{n-2}^{-1} \sum_{i<j} \lambda_i^{-1} \lambda_j^{-1} H_n \right] H_n,$$

ou equivalentemente

$$(n-1) \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} \right)^2 \geq 2n \sum_{i<j} \lambda_i^{-1} \lambda_j^{-1}.$$

Fazendo  $F(\lambda_i^{-1}) = (n-1) \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} \right)^2 - 2n \sum_{i<j} \lambda_i^{-1} \lambda_j^{-1}$ , temos que

$$\begin{aligned} F(\lambda_i^{-1}) &= n \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} \right)^2 - 2n \sum_{i<j} \lambda_i^{-1} \lambda_j^{-1} \\ &= n \left[ \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} \right)^2 - 2 \sum_{i<j} \lambda_i^{-1} \lambda_j^{-1} \right] - \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} \right)^2 \\ &= n \sum_{i=1}^n (\lambda_i^{-1})^2 - \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} \right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para  $u = (\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$  e  $v = (1, \dots, 1)$ . Então vale a igualdade, se e somente se, existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $u = tv$ , isto é, se e somente se, todos os  $\lambda_i$ 's são iguais.

(ii) Como  $H_1, H_2 > 0$ , então pelo item (i), temos  $H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}}$ . Agora suponha que

$$H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq \dots \geq H_k^{\frac{1}{k}},$$

para algum  $2 \leq k < r$ , então

$$H_k^2 \geq H_{k-1}H_{k+1} \geq H_k^{\frac{k-1}{k}} H_{k+1}.$$

Agora dividindo por  $H_k^{\frac{k-1}{k}}$ , obtemos  $H_k^{\frac{1}{k}} \geq H_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}$ . Segue diretamente das desigualdades acima que se  $H_k^{\frac{1}{k}} = H_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}$  para algum  $1 \leq k < r$ , então  $H_k^2 = H_{k-1}H_{k+1}$  e pelo item (i), concluímos que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$ .

(iii) Suponha, sem perda de generalidade,  $r < n-1$ . Como  $H_r = H_{r+1} = 0$ , temos igualdade na desigualdade de Newton

$$H_{r+1}^2 \geq H_r H_{r+2}.$$

Se  $H_{r+2} \neq 0$ , segue de (i) que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda$ . Daí,  $H_r = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ , donde  $H_{r+2} = 0$ , uma contradição. Portanto,  $H_{r+2} = 0$  e, analogamente,  $H_j = 0$  para todo  $r \leq j \leq n$ . ■

### 1.2.2 A $r$ -ésima Transformação de Newton $P_r$

Definimos as  $r$ -ésimas transformações de Newton  $P_r : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma^n)$  a partir do operador de Weingarten  $A : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ , pela recorrência

$$P_r = \begin{cases} I, & \text{se } r = 0 \\ S_r I - A \circ P_{r-1}, & \text{se } r = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

onde  $I$  denota a aplicação identidade em  $\mathfrak{X}(\Sigma^n)$ . Desenvolvendo a expressão de  $P_r$ , obtemos

$$\begin{aligned} P_r &= S_r I - A(S_{r-1} I - A P_{r-2}) \\ &= S_r I - S_{r-1} A + A^2(S_{r-2} - A P_{r-3}) \\ &\quad \vdots \\ &= S_r I - S_{r-1} A + \dots + (-1)^{r-1} S_1 A^{r-1} + (-1)^r A^r. \end{aligned}$$

Agora observamos que, pelo Teorema de Cayley-Hamilton ([8, Seção 5.3]) e pela equação (1.12), temos

$$A^n - S_1 A^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} S_{n-1} A + (-1)^n S_n I = 0,$$

e multiplicando a equação acima por  $(-1)^n$ , concluímos que

$$P_n = (-1)^n A^n + (-1)^{n-1} S_1 A^{n-1} + \dots - S_{n-1} A + S_n I = 0.$$

Um outro fato importante sobre a  $r$ -ésima transformação de Newton é que, sendo o operador de Weingarten uma aplicação linear autoadjunta, não é difícil ver que  $P_r$  também é um operador linear autoadjunto, para todo  $r \in \{1, \dots, n\}$ . O próximo resultado esclarece essa afirmação.

**Proposição 1.4** ([7, Proposição 3.2]) *Para cada  $p \in \Sigma^n$ , consideremos um referencial ortonormal local  $\{e_1, \dots, e_n\}$  tal que  $Ae_i = \lambda_i e_i$ . Então, são válidas as seguintes igualdades:*

$$(i) \quad P_r(e_i) = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_r, \\ i_j \neq i}} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_r} e_i;$$

$$(ii) \operatorname{tr}(P_r) = (n-r)S_r = c_r H_r, \text{ onde } c_r = (n-r) \binom{n}{r};$$

$$(iii) \operatorname{tr}(A \circ P_r) = (r+1)S_{r+1}.$$

**Demonstração:**

(i) A prova é feita por indução sobre  $r$ . Para  $r = 1$ , temos que

$$\begin{aligned} P_1(e_i) &= (S_1 I - A \circ P_0)(e_i) = (S_1 I - A)(e_i) \\ &= S_1 I(e_i) - A(e_i) = S_1 e_i - \lambda_i e_i \\ &= (S_1 - \lambda_i) e_i \\ &= \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k - \lambda_i \right) e_i \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}} \lambda_k e_i. \end{aligned}$$

Supondo válido para  $r - 1$ , obtemos

$$\begin{aligned} P_r(e_i) &= (S_r I - A \circ P_{r-1})(e_i) = S_r(e_i) - A(P_{r-1}(e_i)) \\ &= S_r(e_i) - \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_{r-1}, \\ i_j \neq i}} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{r-1}} A e_i \\ &= \left( S_r - \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_{r-1}, \\ i_j \neq i}} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{r-1}} \lambda_i \right) e_i \\ &= \left( \sum_{i_1 < \dots < i_r} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_r} - \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_{r-1}, \\ i_j \neq i}} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{r-1}} \lambda_i \right) e_i \\ &= \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_r, \\ i_j \neq i}} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_r} e_i. \end{aligned}$$

(ii) Calculando o traço de  $P_r$ , obtemos

$$\operatorname{tr}(P_r) = \sum_{i=1}^n \langle P_r(e_i), e_i \rangle,$$

pelo item (i), segue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(P_r) &= \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_r, \\ i_j \neq i}} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_r} e_i, e_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_r, \\ i_j \neq i}} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_r} \langle e_i, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_r, \\ i_1, \dots, i_r \neq i}} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_r} \\
&= (n-r) \sum_{i_1 < \dots < i_r} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_r} \\
&= (n-r) S_r.
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(P_{r+1}) &= \operatorname{tr}(S_{r+1}I - A \circ P_r) \\
&= \operatorname{tr}(S_{r+1}I) - \operatorname{tr}(A \circ P_r) \\
&= nS_{r+1} - \operatorname{tr}(A \circ P_r),
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\operatorname{tr}(A \circ P_r) = nS_{r+1} - \operatorname{tr}(P_{r+1}),$$

então usando o item (ii), obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A \circ P_r) &= nS_{r+1} - [n - (r+1)]S_{r+1} \\
&= (r+1)S_{r+1}.
\end{aligned}$$

■

### 1.2.3 O $r$ -ésimo Operador Diferencial $L_r$

Nesta seção apresentaremos o  $r$ -ésimo operador diferencial  $L_r$  associado a uma hipersuperfície orientada  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ . Para isso, precisamos lembrar das definições de *gradiente* e *hessiano* de uma função suave definida em uma variedade Riemanniana  $\Sigma^n$ .

**Definição 1.3** *O gradiente de uma função  $f \in C^\infty(\Sigma^n)$  é o campo de vetores  $\nabla f : \Sigma^n \rightarrow T_p\Sigma^n$  dado por*

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f),$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ .

**Definição 1.4** O hessiano da função  $f \in C^\infty(\Sigma^n)$ ,  $\text{Hess}f : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \times \mathfrak{X}(\Sigma^n) \rightarrow C^\infty(\Sigma^n)$ , é definido da seguinte forma:

$$\text{Hess}f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle.$$

O respectivo operador autoadjunto que é metricamente equivalente a ele é:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f : \mathfrak{X}(\Sigma^n) &\rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma^n) \\ X &\mapsto (\nabla^2 f)(X) = \nabla_X \nabla f. \end{aligned}$$

Temos que  $\text{Hess}f$  e  $\nabla^2 f$  estão relacionados por:

$$(\text{Hess}f)(X, Y) = \langle \nabla^2 f(X), Y \rangle.$$

Agora, podemos definir o operador diferencial  $L_r$  associado a  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ .

**Definição 1.5** Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientada. Dado  $f \in C^\infty(\Sigma^n)$  e  $0 \leq r \leq n$ , o  $r$ -ésimo operador diferencial,  $L_r : C^\infty(\Sigma^n) \rightarrow C^\infty(\Sigma^n)$ , é dado por

$$L_r(f) = \text{tr}(P_r \nabla^2 f),$$

onde  $P_r$  é a  $r$ -ésima transformação de Newton de  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ .

Para  $f \in C^\infty(\Sigma^n)$  e toda função suave  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , temos

$$\begin{aligned} L_r(\varphi \circ f) &= \text{tr}(P_r \circ \nabla^2(\varphi \circ f)) = \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla^2(\varphi \circ f)(e_i)), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla^2(\varphi \circ f)(e_i), P_r(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}(\nabla(\varphi \circ f)(e_i)), P_r(e_i) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}(\varphi'(f)\nabla f), P_r(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \varphi'(f)\nabla_{e_i}\nabla f + e_i(\varphi'(f))\nabla f, P_r(e_i) \rangle \\ &= \varphi'(f) \sum_{i=1}^n \langle \nabla^2 f(e_i), P_r(e_i) \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \varphi''(f)e_i(f)\nabla f, P_r(e_i) \rangle \\ &= \varphi'(f) \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla^2 f(e_i)), e_i \rangle + \varphi''(f) \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla f), e_i(f)e_i \rangle \\ &= \varphi'(f)\text{tr}(P_r \circ \nabla^2 f) + \varphi''(f)\langle P_r(\nabla f), \sum_{i=1}^n e_i(f)e_i \rangle \\ &= \varphi'(f)L_r(f) + \varphi''(f)\langle P_r(\nabla f), \nabla f \rangle. \end{aligned}$$

Dizemos que o operador  $L_r$  é elíptico se  $P_r$  é positivo-definido. Veja que  $L_0 = \Delta$  é sempre elíptico. De forma mais geral,  $L_r$  para  $r \geq 1$  não é um operador elíptico.

No caso  $r = 1$ , o próximo resultado nos dá uma condição geométrica para que  $L_1$  seja elíptico.

**Lema 1.3** ([5, Lema 1]) *Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientada em  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Se  $H_2 > 0$  em  $\Sigma^n$ , então  $L_1$  é elíptico ou, equivalentemente,  $P_1$  é positivo definido.*

Já a elipticidade de  $L_r$  para  $r \geq 2$  é garantida no próximo resultado, desde que  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  admita um ponto elíptico. Aqui, lembremos que  $p \in \Sigma^n$  é um ponto elíptico se todas as curvaturas principais de  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  são positivas.

**Lema 1.4** ([5, Lema 2]) *Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientada em  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Se existe um ponto elíptico em  $\Sigma^n$  e  $H_{r+1} > 0$  em  $\Sigma^n$ , com  $2 \leq r \leq n - 1$ , então  $L_r$  é elíptico.*

Por fim, o último resultado desta seção, estabelece condições suficientes que garantem a existência de um ponto elíptico.

**Lema 1.5** ([5, Lema 3]) *Sejam  $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$  um campo de vetores conforme fechado completo e  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientada completa. Suponha que o divergente de  $V$  em  $\mathbb{H}^{n+1}$  não se anula em  $\Sigma^n$  e que a restrição de  $|V|$  em  $\Sigma^n$  atinge um máximo local em  $p \in \Sigma^n$ . Então  $p$  é um ponto elíptico de  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ .*

No último lema,  $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$  é dito um *campo conforme fechado* quando existe  $\phi \in C^\infty(\mathbb{H}^{n+1})$  tal que

$$\bar{\nabla}_X V = \phi X,$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$ , onde  $\bar{\nabla}$  é a conexão de Levi-Civita de  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Além disso, dizemos que  $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$  é *completo* quando suas curvas integrais associadas  $\alpha(\tau)$  estão definidas para todo valor do parâmetro  $\tau \in \mathbb{R}$ .

Por último, lembremos que uma hipersuperfície completa  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  é aquela que, para cada  $p \in \Sigma^n$ , as geodésicas  $\gamma(t)$  que partem de  $p$  estão definidas para todos os valores do parâmetro  $t \in \mathbb{R}$  ([12, Capítulo 7]). Por exemplo, as hipersuperfícies totalmente umbílicas do espaço hiperbólico, as horoesferas, hiperesferas e esferas geodésicas, que serão classificadas no próximo capítulo, são casos de hipersuperfícies completas.

# Capítulo 2

## Sobre a Geometria das Hipersuperfícies Imersas em $\mathbb{H}^{n+1}$

Neste capítulo, nosso objetivo é classificar todas as hipersuperfícies totalmente umbílicas do espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$  e, além disso, estudar o comportamento geométrico de duas funções suportes  $l_a$  e  $f_a$  associadas a uma hipersuperfície orientada  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ , quando  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$  é um vetor tipo-luz, chamadas respectivamente de função altura e função ângulo.

### 2.1 Hipersuperfícies Totalmente Umbílicas de $\mathbb{H}^{n+1}$

Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientada e  $N$  o seu campo de vetores normal e unitário globalmente definido. Denotemos por  $A : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma^n)$  o operador de Weingarten de  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  com relação a  $N$ . Lembremos que,  $p \in \Sigma^n$  é chamado um *ponto umbílico* se existe  $\lambda(p) \in \mathbb{R}$  tal que  $A_p = \lambda(p)Id_{T_p\Sigma^n}$ . Dizemos que  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  é *totalmente umbílica* se todos os pontos de  $\Sigma^n$  são umbílicos, isto é, se existe  $\lambda \in C^\infty(\Sigma^n)$  tal que  $A = \lambda Id_{\mathfrak{X}(\Sigma^n)}$ .

Fixemos um vetor  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$  e denotemos  $c = \langle a, a \rangle \in \{-1, 0, 1\}$ . Observemos que, usando a relação

$$\mathbb{L}^{n+2} \cong T_p(\mathbb{L}^{n+2}) = T_p(\mathbb{H}^{n+1}) \oplus \text{Span}\{p\}, \quad \forall p \in \mathbb{H}^{n+1},$$

existem  $a^\top(p) \in T_p(\mathbb{H}^{n+1})$  e  $\beta(p) \in \mathbb{R}$  tal que

$$a = a^\top(p) + \beta(p)p.$$



Mas veja que

$$\langle a, p \rangle = \langle a^\top(p) + \beta(p)p, p \rangle = \langle a^\top(p), p \rangle + \beta(p)\langle p, p \rangle = -\beta(p).$$

Logo,

$$a = a^\top(p) - \langle a, p \rangle p.$$

Agora, consideremos a função

$$\begin{aligned} g_a : \mathbb{H}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto g_a(p) = \langle p, a \rangle, \end{aligned}$$

e o conjunto de nível

$$\mathcal{N}_{c,\tau}^n = g_a^{-1}(\{\tau\}) = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a \rangle = \tau\},$$

com  $\tau \in \mathbb{R}$ .

No que segue, vamos determinar para que valores de  $\tau$  o conjunto  $\mathcal{N}_{c,\tau}^n$  é uma hipersuperfície orientada de  $\mathbb{H}^{n+1}$ .

Sejam  $p \in \mathbb{H}^{n+1}$ ,  $v \in T_p\mathbb{H}^{n+1}$  e considere uma curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = v$ . Logo, temos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla} g_a(p), v \rangle &= d(g_a)_p(v) = \frac{d}{dt}(g_a \circ \alpha(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\langle \alpha(t), a \rangle)|_{t=0} \\ &= \langle \alpha'(t), a \rangle + \langle \alpha(t), a' \rangle = \langle v, a^\top(p) - \langle a, p \rangle p \rangle = \langle v, a^\top(p) \rangle. \end{aligned}$$

Como  $v \in T_p\mathbb{H}^{n+1}$  é arbitrário e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é não degenerado, então  $\bar{\nabla} g_a(p) = a^\top(p)$ . Assim, obtemos que

$$\bar{\nabla} g_a(p) = a + \langle a, p \rangle p.$$

Em particular para  $p \in g_a^{-1}(\{\tau\})$ , temos

$$\bar{\nabla} g_a(p) = a + \tau p. \tag{2.1}$$

Logo,  $\mathcal{N}_{c,\tau}^n$  será uma hipersuperfície orientada de  $\mathbb{H}^{n+1}$  quando

$$\begin{aligned} 0 &< \langle \bar{\nabla} g_a(p), \bar{\nabla} g_a(p) \rangle = \langle a + \tau p, a + \tau p \rangle \\ &= \underbrace{\langle a, a \rangle}_c + 2\tau \underbrace{\langle a, p \rangle}_\tau + \tau^2 \underbrace{\langle p, p \rangle}_{-1} \\ &= c + \tau^2, \end{aligned}$$

ou equivalentemente, quando  $\tau^2 > -c$ .

No que segue,  $\tau^2 > -c$  sempre será válida. Seja  $\varphi : \mathcal{N}_{c,\tau}^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  a imersão isométrica de  $\mathcal{N}_{c,\tau}^n$  em  $\mathbb{H}^{n+1}$  e  $\iota : \mathbb{H}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$  a aplicação inclusão de  $\mathbb{H}^{n+1}$  em  $\mathbb{L}^{n+2}$ . Denotemos as conexões de Levi-Civita de  $\mathcal{N}_{c,\tau}^n$ ,  $\mathbb{H}^{n+1}$  e  $\mathbb{L}^{n+2}$  por  $\tilde{\nabla}$ ,  $\bar{\nabla}$  e  $\nabla^0$ , respectivamente. Observemos de (2.1) e (1.5) que as correspondentes aplicações de Gauss de  $\varphi : \mathcal{N}_{c,\tau}^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  e  $\iota : \mathbb{H}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$  são dadas por

$$\begin{aligned} N : \mathcal{N}_{c,\tau}^n &\rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1} \\ p &\mapsto N(p) = \frac{\bar{\nabla}g_a(p)}{|\bar{\nabla}g_a(p)|} = \frac{a + \tau p}{\sqrt{\tau^2 + c}}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{N} : \mathbb{H}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{H}^{n+1} \\ p &\mapsto \bar{N}(p) = p, \end{aligned}$$

respectivamente. Aqui  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  denota o espaço *de Sitter* e é definido por

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \{p \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle p, p \rangle = 1\}.$$

De (2.2) podemos observar que

$$\langle N, N \rangle = 1.$$

Denotemos por  $\mathcal{A} : \mathfrak{X}(\mathcal{N}_{c,\tau}^n) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{N}_{c,\tau}^n)$  e  $A_{\bar{N}} : \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$  os operadores de Weingarten de  $\varphi : \mathcal{N}_{c,\tau}^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  na direção de  $N$  e  $\iota : \mathbb{H}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$  na direção do campo  $\bar{N}$ , respectivamente. De (1.8),

$$A_{\bar{N}} = -\text{Id}_{\mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})}. \quad (2.3)$$

Procuramos agora uma expressão explícita para  $A$ . A fórmula de Gauss para

$$\varphi : \mathcal{N}_{c,\tau}^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$$

é dada por

$$\bar{\nabla}_X Y = \tilde{\nabla}_X Y - \langle \mathcal{A}(X), Y \rangle N, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{N}_{c,\tau}^n). \quad (2.4)$$

Da fórmula de Gauss para  $\iota : \mathbb{H}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ , dada em (1.6) obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_X^0 Y &= \bar{\nabla}_X Y - \langle A_{\bar{N}}(X), Y \rangle \bar{N} \\ &= \tilde{\nabla}_X Y - \langle \mathcal{A}(X), Y \rangle N + \langle X, Y \rangle \bar{N}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{N}_{c,\tau}^n), \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde na última igualdade foi usado (2.4) e (2.3). Além disso, temos que,

$$\mathcal{A}(X) = -\bar{\nabla}_X N, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{N}_{c,\tau}^n), \quad (2.6)$$

mas como  $N$  é um campo vetorial tangente a  $\mathbb{H}^{n+1}$ , então, de (1.7), obtemos

$$\nabla_X^0 N = \bar{\nabla}_X N + \underbrace{\langle \mathcal{A}(X), N \rangle}_{0} \bar{N} = \bar{\nabla}_X N, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{N}_{c,\tau}^n),$$

assim, (2.6) fica da forma

$$\mathcal{A}(X) = -\nabla_X^0 N, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{N}_{c,\tau}^n), \quad (2.7)$$

substituindo (2.2) em (2.7),

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(X) &= -\frac{1}{\sqrt{\tau^2 + c}} \nabla_X^0 (a + \tau p) \\ &= -\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + c}} \nabla_X^0 p = -\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + c}} X, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{N}_{c,\tau}^n). \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que  $\varphi : \mathcal{N}_{c,\tau}^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ , com  $\tau^2 > -c$ , é uma hipersuperfície totalmente umbílica, com a  $r$ -ésima curvatura média  $H_r$  igual a

$$H_r = \frac{1}{\binom{n}{r}} S_r(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = \frac{1}{\binom{n}{r}} \underbrace{\left\{ \dots + (-1)^r \frac{\tau^r}{(\sqrt{\tau^2 + c})^r} + \dots \right\}}_{\binom{n}{r} \text{ somandos}} = (-1)^r \frac{\tau^r}{(\sqrt{\tau^2 + c})^r}.$$

Passamos agora a fazer um estudo dos valores de  $\tau$  e

$$H_r^2 = \frac{\tau^{2r}}{(\tau^2 + c)^r},$$

em função de  $c = \langle a, a \rangle \in \{-1, 0, 1\}$ .

- (i) Se  $c = 0$  (o que corresponde a um corte de  $\mathbb{H}^{n+1}$  por um plano degenerado) então  $\tau^2 > 0$ . Segue que  $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $H_r^2 = 1$ . Tomemos por exemplo  $a = (0, \dots, 0, 1, 1) \in \mathbb{L}^{n+2}$ . Logo, um ponto em  $\mathcal{N}_{c,\tau}^n = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a \rangle = \tau\}$  verifica

$$\begin{cases} p_1^2 + \dots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 = -1, \\ p_{n+1} - p_{n+2} = \tau. \end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned} -1 &= p_1^2 + \dots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 \geq p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 \\ &= (p_{n+1} - p_{n+2})(p_{n+1} + p_{n+2}) \\ &= \tau(p_{n+1} + p_{n+2}), \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} p_1^2 + \cdots + p_n^2 &= -1 - (p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2) \\ &= -1 - \tau(p_{n+1} + p_{n+2}) \geq -1 + 1 = 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $p_1^2 + \cdots + p_n^2 \in [0, +\infty)$ . Logo, podemos identificar  $\mathcal{N}_{c,\tau}^n$  com  $\mathbb{R}^n$  e, neste caso, dentro da nomenclatura que existe na literatura,  $\mathcal{N}_{c,\tau}^n$  correspondem às chamadas *horoesferas* de  $\mathbb{H}^{n+1}$ .

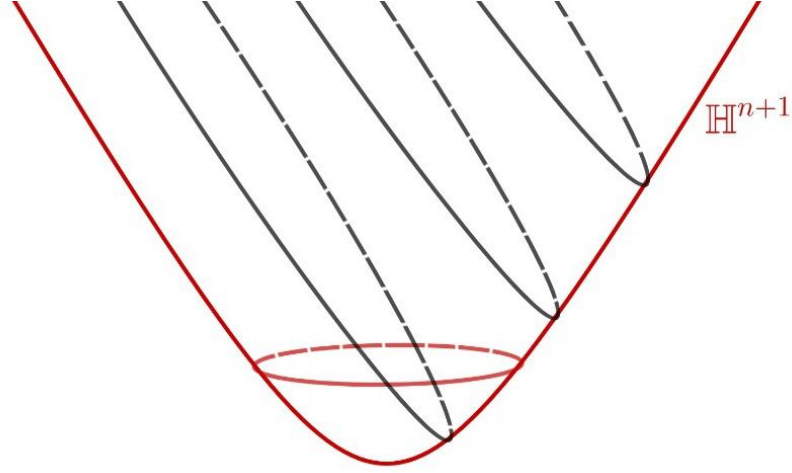


Figura 2.1: Horoesferas de  $\mathbb{H}^{n+1}$ .

(ii) Se  $c = 1$  (o que corresponde a um corte de  $\mathbb{H}^{n+1}$  por um plano tipo-tempo de  $\mathbb{L}^{n+2}$ ) então  $\tau^2 > -1$ . Segue que  $\tau \in \mathbb{R}$  e  $H_r^2 = \frac{\tau^{2r}}{(\tau^2 + 1)^r} \in [0, 1)$ . Por exemplo, se considerarmos  $a = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{L}^{n+2}$  então qualquer ponto em  $\mathcal{N}_{c,\tau}^n = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a \rangle = \tau\}$  satisfaz

$$\begin{cases} p_1^2 + \cdots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 = -1, \\ p_1 = \tau. \end{cases}$$

Logo,

$$p_1^2 + \cdots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 = -1 - \tau^2 < 0,$$

assim, podemos identificar  $\mathcal{N}_{c,\tau}^n$  com  $\mathbb{H}^n(\sqrt{\tau^2 + 1}) \subset \mathbb{L}^{n+1}$ .

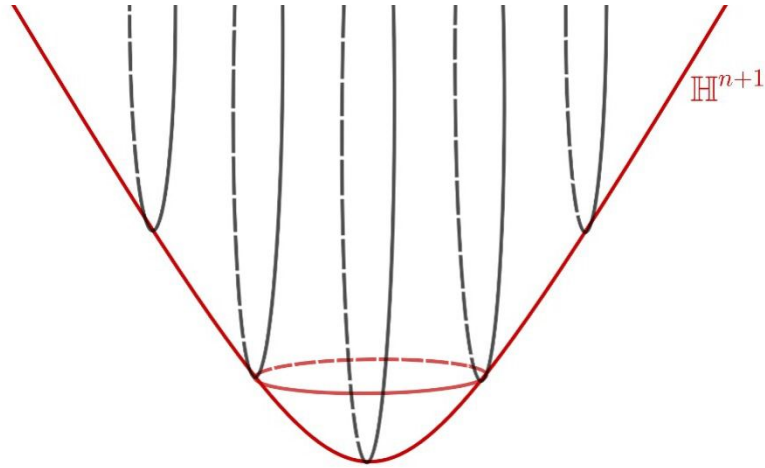


Figura 2.2: Espaços hiperbólicos de  $\mathbb{H}^{n+1}$ .

(iii) Se  $c = -1$  (o que corresponde a um corte de  $\mathbb{H}^{n+1}$  por um plano tipo-espaço de  $\mathbb{L}^{n+2}$ ). Neste caso,  $\tau^2 \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ . Segue que  $\tau \in \mathbb{R}$  e  $H_r^2 = \frac{\tau^{2r}}{(\tau^2 - 1)^r} \in (1, +\infty)$ . Por exemplo, se escolhermos  $a = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{L}^{n+2}$  então um ponto em  $\mathcal{N}_{c,\tau}^n = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a \rangle = \tau\}$  verifica

$$\begin{cases} p_1^2 + \dots + p_{n+1}^2 - p_{n+2}^2 = -1, \\ p_{n+2} = -\tau. \end{cases}$$

Logo,

$$p_1^2 + \dots + p_{n+1}^2 = -1 + \tau^2 > 0,$$

assim, podemos identificar  $\mathcal{N}_{c,\tau}^n$  com  $\mathbb{S}^n(\sqrt{\tau^2 - 1}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , as chamadas *esféricas geodésicas*.

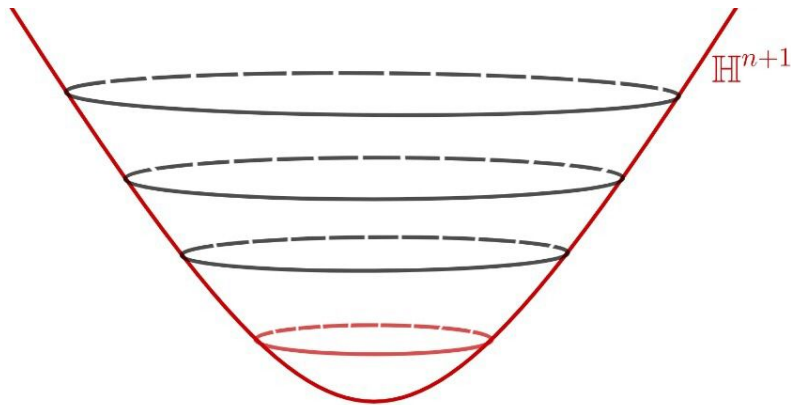


Figura 2.3: Esferas geodésicas de  $\mathbb{H}^{n+1}$ .

A partir de [1, Teorema 5.1] é possível mostrar que tais hipersuperfícies são as únicas totalmente umbílicas de  $\mathbb{H}^{n+1}$ , como estabelece o seguinte resultado.

**Proposição 2.1** ([1, Teorema 5.1]) *Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ ,  $n \geq 2$ , uma hipersuperfície orientada, conexa e totalmente umbílica. Então*

(a) *sua  $r$ -ésima curvatura média  $H_r$  é constante.*

(b<sub>1</sub>) *Se  $H_r^2 = 1$  então existem  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$  e  $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tais que  $\langle a, a \rangle = 0$  e*

$$x(M^n) \subseteq \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a \rangle = \tau\} = \mathbb{R}^n.$$

(b<sub>2</sub>) *Se  $H_r^2 \in [0, 1)$  então existem  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$  e  $\tau \in \mathbb{R}$  tais que  $\langle a, a \rangle = 1$  e*

$$x(M^n) \subseteq \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a \rangle = \tau\} = \mathbb{H}^n(\sqrt{\tau^2 + 1}).$$

(b<sub>3</sub>) *Se  $H_r^2 \in (1, +\infty)$  então existem  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$  e  $\tau \in \mathbb{R}$  tais que  $\langle a, a \rangle = -1$  e*

$$x(M^n) \subseteq \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a \rangle = \tau\} = \mathbb{S}^n(\sqrt{\tau^2 - 1}).$$

## 2.2 As Funções Altura e Ângulo Associadas a Hipersuperfícies de $\mathbb{H}^{n+1}$

De agora em diante denotaremos por  $L_\tau^n$  qualquer horoesfera de  $\mathbb{H}^{n+1}$ , na qual, como foi visto na sessão anterior, é dada por

$$L_\tau^n = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a \rangle = \tau\}, \quad (2.8)$$

em que  $a$  é um vetor tipo-luz diferente de zero e  $\tau$  é um número real positivo. Com a notação da Seção 2.1  $L_\tau^n = \mathcal{N}_{0,\tau}^n$ . Neste contexto, a partir da equação (2.2), não é difícil ver que o campo de vetores

$$\xi = -p - \frac{1}{\tau}a \quad (2.9)$$

define um campo de vetores normais e unitários em  $L_\tau^n$  com relação ao qual a horoesfera tem curvaturas médias de ordem superior constante igual a 1.

Fixado o vetor  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$  a seguir consideremos duas funções particulares que estão naturalmente relacionadas com uma hipersuperfície orientada  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ . A primeira delas é a função altura com relação ao vetor  $a$ , definida por

$$\begin{aligned} l_a : \Sigma^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \langle \psi(p), a \rangle. \end{aligned}$$

Enquanto a segunda delas é a função ângulo com relação ao vetor  $a$ , definida por

$$\begin{aligned} f_a : \Sigma^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \langle N(p), a \rangle. \end{aligned}$$

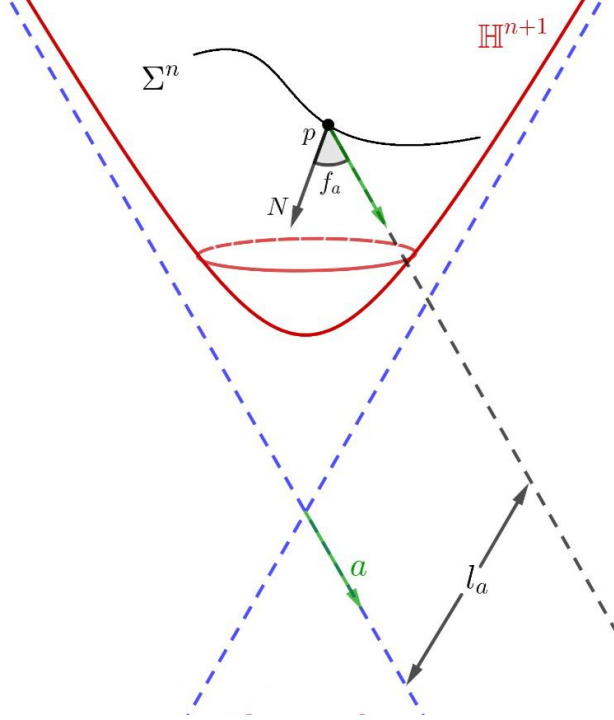


Figura 2.4: As funções  $l_a$  e  $f_a$  de  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ .

Em particular, temos de (2.8) que  $l_a$  é sempre uma função positiva em  $L_\tau^n$ . Além disso, observamos que de (2.9), obtemos a identidade

$$f_a = \left\langle -p - \frac{1}{\tau}a, a \right\rangle = -\tau = -l_a. \quad (2.10)$$

Veja que, para cada  $p \in \Sigma^n \subset \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ , podemos decompor o espaço de Lorentz-Minkowski da seguinte forma,  $\mathbb{L}^{n+2} = T_p\Sigma^n \oplus \text{Span}\{N_p, \psi(p)\}$ . Com efeito, para  $v \in T_p\Sigma^n \cap \text{Span}\{N_p, \psi(p)\}$ , podemos escrever  $v = aN_p + b\psi(p)$  para alguns  $a, b \in \mathbb{R}$ . Como  $v \in T_p\Sigma^n$ , temos que  $v$  é ortogonal a  $N_p$ , ou seja,

$$0 = \langle v, N_p \rangle = \langle aN_p + b\psi(p), N_p \rangle = a \underbrace{\langle N_p, N_p \rangle}_1 + b \underbrace{\langle \psi(p), N_p \rangle}_0 = a$$

Assim, obtemos que  $v = b\psi(p)$ . Além disso, como  $v \in T_p\Sigma^n$  e  $\psi(p)$  é ortogonal a  $\mathbb{H}^{n+1}$ , temos que

$$0 = \langle v, \psi(p) \rangle = \langle b\psi(p), \psi(p) \rangle = b \underbrace{\langle \psi(p), \psi(p) \rangle}_{-1} = -b.$$

Portanto, concluímos que  $v = 0$ , o que mostra que  $T_p\Sigma^n \cap \text{Span}\{N_p, \psi(p)\} = \{0\}$  e, consequentemente  $\mathbb{L}^{n+2} = T_p\Sigma^n \oplus \text{Span}\{N_p, \psi(p)\}$ .

O vetor  $a^\top$  é a projeção ortogonal de  $a$  sobre o fibrado tangente  $T\Sigma^n$ , assim vamos adotar a seguinte definição para  $a^\top$ :

$$a^\top = a - \langle N, a \rangle N + \langle \psi, a \rangle \psi = a - f_a N + l_a \psi.$$

Ademais, como  $a$  é um vetor tipo-luz, concluímos que:

$$\begin{aligned} 0 = \langle a, a \rangle &= \langle a^\top + f_a N - l_a \psi, a^\top + f_a N - l_a \psi \rangle \\ &= \langle a^\top, a^\top \rangle + f_a^2 \langle N, N \rangle - l_a^2 \langle \psi, \psi \rangle \\ &= |a^\top|^2 + f_a^2 - l_a^2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

A seguir, escrevemos algumas fórmulas envolvendo as funções  $l_a$  e  $f_a$ , as quais nos será úteis nas demonstrações dos teoremas principais desta dissertação.

**Proposição 2.2** (*[9, Seção 3]*) *Sejam  $a \in \mathbb{L}^{n+1}$  um vetor tipo-luz diferente de zero e  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientada por um campo de vetores normais unitários  $N$ . Se  $l_a$  e  $f_a$  são as funções altura e ângulo, respectivamente, de  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ , então:*

(i)  $\nabla l_a = a^\top$ .

(ii)  $\nabla f_a = -A(a^\top)$ , onde  $A$  é o operador de Weingarten de  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ .

(iii)  $\nabla^2 l_a = l_a I + f_a A$ , onde  $I$  é o operador identidade em  $\mathfrak{X}(\Sigma^n)$ .

(iv)  $L_r(l_a) = c_r(f_a H_{r+1} + l_a H_r)$ , com  $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  e  $c_r = (n-r) \binom{n}{r}$ , onde  $H_j$  é a  $j$ -ésima curvatura média de  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ , para  $j \in \{1, r+1\}$ .

(v) Se  $H_r > 0$  então

$$L_r(l_a^2) = c_r \left( \sqrt{H_r} f_a + \frac{H_{r+1}}{\sqrt{H_r}} l_a \right)^2 + c_r H_r |\nabla l_a|^2 + c_r \left( H_r - \frac{H_{r+1}^2}{H_r} \right) l_a^2 + 2 \langle P_r(\nabla l_a), \nabla l_a \rangle.$$

**Demonstração:**

(i) Dado  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ , como a conexão  $\nabla^0$  é compatível com a métrica, obtemos que:

$$\langle \nabla l_a, X \rangle = X(l_a) = X \langle \psi, a \rangle = \langle \nabla_X^0 \psi, a \rangle + \langle \psi, \nabla_X^0 a \rangle = \langle X(\psi), a \rangle = \langle X, a \rangle = \langle X, a^\top \rangle,$$

de onde concluímos que  $\nabla l_a = a^\top$ .

(ii) De forma análoga ao item anterior, temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla f_a, X \rangle &= X(f_a) = X \langle N, a \rangle = \langle \nabla_X^0 N, a \rangle + \langle N, \nabla_X^0 a \rangle = \langle \bar{\nabla}_X N, a \rangle = \langle -A(X), a \rangle \\ &= \langle -A(X), a^\top \rangle = \langle X, -A(a^\top) \rangle, \end{aligned}$$



e portanto,  $\nabla f_a = -A(a^\top)$ .

(iii) A partir da fórmula de Gauss, o Hessiano de  $l_a$  (como forma bilinear) é dado por:

$$\begin{aligned}
\text{Hess } l_a(X, Y) &= \langle \nabla_X \nabla l_a, Y \rangle = \langle \nabla_X^0 \nabla l_a, Y \rangle = \langle \nabla_X^0 a^\top, Y \rangle = \langle \nabla_X^0 (a - f_a N + l_a \psi), Y \rangle \\
&= \langle \nabla_X^0 (l_a \psi), Y \rangle - \langle \nabla_X^0 (f_a N), Y \rangle \\
&= X(l_a) \langle \psi, Y \rangle + l_a \langle \nabla_X^0 \psi, Y \rangle - X(f_a) \langle N, Y \rangle - f_a \langle \nabla_X^0 N, Y \rangle \\
&= l_a \langle X, Y \rangle + f_a \langle A(X), Y \rangle \\
&= \langle l_a X + f_a A(X), Y \rangle,
\end{aligned}$$

para todos  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ . Assim, o Hessiano de  $l_a$  como operador é

$$(\nabla^2 l_a)(X) = l_a X + f_a A(X),$$

para qualquer  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ .

(iv) De fato,

$$\begin{aligned}
L_r(l_a) &= \text{tr}(P_r \circ \nabla^2 l_a) = \text{tr}(f_a(P_r \circ A) + l_a \text{tr}(P_r)) \\
&= f_a \text{tr}(P_r \circ A) + l_a \text{tr}(P_r) \\
&= f_a c_r H_{r+1} + l_a c_r H_r \\
&= c_r (f_a H_{r+1} + l_a H_r),
\end{aligned}$$

válida para todo  $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , onde  $c_r = (n-r) \binom{n}{r}$ .

(v)

$$\begin{aligned}
L_r(l_a^2) &= \text{tr}(P_r \circ \nabla^2 l_a^2) = \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla^2 l_a^2(E_i)), E_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla^2 l_a^2(E_i), P_r(E_i) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla l_a^2(E_i), P_r(E_i) \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} (2l_a \nabla l_a), P_r(E_i) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle 2l_a \nabla_{E_i} \nabla l_a + 2E_i(l_a) \nabla l_a, P_r(E_i) \rangle \\
&= 2l_a \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla l_a, P_r(E_i) \rangle + 2 \sum_{i=1}^n \langle E_i(l_a) \nabla l_a, P_r(E_i) \rangle \\
&= 2l_a \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla^2 l_a(E_i)), E_i \rangle + 2 \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla l_a), E_i(l_a) E_i \rangle \\
&= 2l_a L_r(l_a) + 2 \langle P_r(\nabla l_a), \sum_{i=1}^n E_i(l_a) E_i \rangle \\
&= 2l_a L_r(l_a) + 2 \langle P_r(\nabla l_a), \nabla l_a \rangle.
\end{aligned}$$

Agora, usando o item (iv), obtemos a seguinte expressão para  $L_r(l_a^2)$ :

$$L_r(l_a^2) = 2c_r H_{r+1} f_a l_a + 2c_r H_r l_a^2 + 2\langle P_r(\nabla l_a), \nabla l_a \rangle,$$

observe também que

$$c_r \left( \sqrt{H_r} f_a + \frac{H_{r+1}}{\sqrt{H_r}} l_a \right)^2 = c_r H_r F_a^2 + 2c_r H_{r+1} f_a l_a + c_r \frac{H_{r+1}^2}{H_r} l_a^2,$$

de onde concluímos que,

$$\begin{aligned} L_r(l_a^2) &= c_r \left( \sqrt{H_r} f_a + \frac{H_{r+1}}{\sqrt{H_r}} l_a \right)^2 - c_r H_r f_a^2 - c_r \frac{H_{r+1}^2}{H_r} l_a^2 + 2c_r H_r l_a^2 + 2\langle P_r(\nabla l_a), \nabla l_a \rangle \\ &= c_r \left( \sqrt{H_r} f_a + \frac{H_{r+1}}{\sqrt{H_r}} l_a \right)^2 + c_r H_r (l_a^2 - f_a^2) + c_r \left( H_r - \frac{H_{r+1}^2}{H_r} \right) l_a^2 + 2\langle P_r(\nabla l_a), \nabla l_a \rangle \\ &= c_r \left( \sqrt{H_r} f_a + \frac{H_{r+1}}{\sqrt{H_r}} l_a \right)^2 + c_r H_r |\nabla l_a|^2 + c_r \left( H_r - \frac{H_{r+1}^2}{H_r} \right) l_a^2 + 2\langle P_r(\nabla l_a), \nabla l_a \rangle. \end{aligned}$$

■

Assim, do item (i) da Proposição 2.2 obtemos que a expressão (2.11) pode ser escrita como

$$l_a^2 - f_a^2 = |\nabla l_a|^2. \quad (2.12)$$

# Capítulo 3

## Resultados Principais

Seja  $\Sigma^n$  uma variedade Riemanniana completa e seja  $\mathcal{P} : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma^n)$  um operador autoadjunto. Estendendo a ideia do operador linearizado  $L_r$  definido na Subseção 1.2.3 do Capítulo 1, consideramos um operador diferencial linear de segunda ordem  $\mathcal{L} : C^\infty(\Sigma^n) \rightarrow C^\infty(\Sigma^n)$  naturalmente associado ao  $\mathcal{P}$ , dado por

$$\mathcal{L}f = \text{tr}(\mathcal{P}\nabla^2 f). \quad (3.1)$$

A partir do Lema 4.2 de Alías, Impera e Rigoli [3], temos o seguinte princípio do máximo generalizado relacionado a tal operador  $\mathcal{L}$ , que é uma extensão do princípio do máximo generalizado de Omori-Yau [16, 17].

**Lema 3.1** (*[3, Lema 4.2]*) *Seja  $\Sigma^n$  uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional limitada inferiormente, e  $f \in C^\infty(\Sigma^n)$  uma função que é limitada superiormente em  $\Sigma^n$ . Se  $\mathcal{P}$  é positivo semi definido e  $\text{tr}(\mathcal{P})$  é limitado superiormente em  $\Sigma^n$ , então existe uma sequência  $(p_k)_{k \geq 1}$  em  $\Sigma^n$  tal que*

$$\lim_k f(p_k) = \sup_\Sigma f, \quad \lim_k |\nabla f(p_k)| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_k \sup \mathcal{L}f(p_k) \leq 0,$$

onde o operador  $\mathcal{L}$  é dado por (3.1).

Lembremos que uma horobola fechada determinada por uma horoesfera  $L_\tau^n$  é apenas o fechamento do domínio interior delimitado por  $L_\tau^n$ .

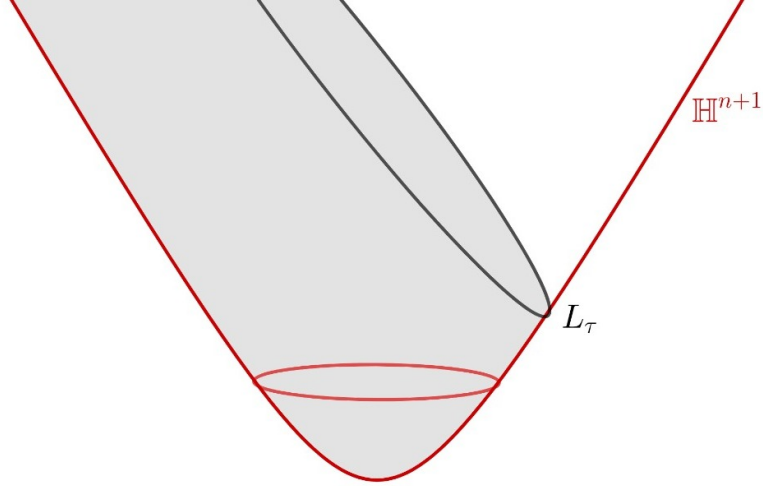


Figura 3.1: Horobola determinada por  $L_\tau^n$ .

Agora estamos em condições de afirmar e provar o nosso primeiro resultado de caracterização para horoesferas de  $\mathbb{H}^{n+1}$ :

**Teorema 3.1** (*[9, Seção 3]*) *Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientada completa contida em uma horobola fechada determinada por uma horoesfera  $L_\tau^n$  ortogonal a um vetor tipo-luz diferente de zero  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ . Suponha que a curvatura média  $H$  seja limitada e tal que*

$$0 < H_2 \leq H. \quad (3.2)$$

Se

$$|a^\top| \leq C \inf_\Sigma (H - H_2), \quad (3.3)$$

para constante positiva  $C$ , então  $\Sigma^n$  é uma horoesfera  $L_{\tilde{\tau}}$ , para algum  $\tilde{\tau} \leq \tau$ .

**Demonstração:** Como estamos assumindo que  $H$  é limitada, a hipótese (3.2) garante que  $H_2$  também é limitada. Assim, levando em consideração a relação algébrica (1.14),

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = |A|^2 = n^2 H^2 - n(n-1)H_2,$$

temos que todas as curvaturas principais  $\lambda_i$  de  $\Sigma^n$  são limitadas. Consequentemente, se  $\{e_i\}_{i=1}^n$  é um referencial ortonormal em  $\Sigma^n$ , da equação de Gauss (1.11) temos que

$$\begin{aligned} K_\Sigma(e_i, e_j) &= -\{\langle e_i, e_i \rangle \langle e_j, e_j \rangle - \langle e_j, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle\} \\ &\quad + \{\langle A(e_i), e_i \rangle \langle A(e_j), e_j \rangle - \langle A(e_j), e_i \rangle \langle A(e_i), e_j \rangle\}, \\ &= -1 + \{\lambda_i \langle e_i, e_i \rangle \lambda_j \langle e_j, e_j \rangle - \lambda_j \langle e_j, e_i \rangle \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle\} \\ &= -1 + \lambda_i \lambda_j, \end{aligned} \quad (3.4)$$

o que nos permite concluir que por argumento de bilinearidade, segue que a curvatura seccional  $K_\Sigma$  de  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  é limitada, visto que  $\lambda_i$  e  $\lambda_j$  são limitadas. Por outro lado, usando novamente a hipótese (3.2), pelo Lema 1.3, como  $H_2 > 0$ , segue que  $L_1 f = \text{tr}(P_1 \nabla^2 f)$  é elíptico. Logo,  $\mathcal{P}_1 = H P_1 > 0$ , ou seja,  $\mathcal{P}_1$  é positivo-definido. Ademais, usando o item (ii) da Proposição 1.4, temos

$$\text{tr}(\mathcal{P}_1) = H \text{tr}(P_1) = H(n-1)S_1 = n(n-1)H^2,$$

donde segue que  $\text{tr}(\mathcal{P}_1)$  é limitado. Consideremos o operador  $\mathcal{L}_1 : C^\infty(\Sigma^n) \rightarrow C^\infty(\Sigma^n)$  dado por

$$\mathcal{L}_1 f = \text{tr}(\mathcal{P}_1 \nabla^2 f). \quad (3.5)$$

Do item (v) da Proposição 2.2, temos

$$\begin{aligned} L_1(l_a^2) &= c_1 \underbrace{\left( \sqrt{H} f_a + \frac{H_2}{\sqrt{H}} l_a \right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{c_1 H (l_a^2 - f_a^2)}_{\geq 0} + c_1 \left( H - \frac{H_2^2}{H} \right) l_a^2 + 2 \langle P_1(\nabla l_a), \nabla l_a \rangle \\ &\geq c_1 \left( H - \frac{H_2^2}{H} \right) l_a^2 + 2 \langle P_1(\nabla l_a), \nabla l_a \rangle, \end{aligned}$$

donde  $c_1 = n(n-1)$ . Como  $\mathcal{P}_1$  é positivo semi definido, de (3.2) e (3.5) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(l_a^2) &= H L_1(l_a^2) \geq c_1 H \left( H - \frac{H_2^2}{H} \right) l_a^2 + 2 \langle H P_1(\nabla l_a), \nabla l_a \rangle \\ &= c_1 (H^2 - H_2^2) l_a^2 + 2 \underbrace{\langle \mathcal{P}(\nabla l_a), \nabla l_a \rangle}_{\geq 0} \\ &\geq c_1 (H^2 - H_2^2) l_a^2 \\ &= n(n-1)(H^2 - H_2^2) l_a^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Então, como a nossa suposição de que  $\Sigma^n$  está contida em uma horobola fechada determinada por uma horoesfera de  $\mathbb{H}^{n+1}$  garante que  $l_a$  é limitada, podemos aplicar o Lema 3.1 para obter uma sequência  $(p_k)_{k \geq 1}$  em  $\Sigma^n$  tal que,

$$\lim_k l_a^2(p_k) = \sup_\Sigma l_a^2, \quad \lim_k |\nabla l_a^2(p_k)| = 0 \quad e \quad \lim_k \sup \mathcal{L}_1(l_a^2)(p_k) \leq 0. \quad (3.7)$$

Consequentemente, de (3.6) e (3.7) temos que

$$0 \geq \lim_k \sup \mathcal{L}_1(l_a^2)(p_k) \geq n(n-1) \left( \sup_\Sigma l_a^2 \right) \lim_k \sup (H^2 - H_2^2)(p_k) \geq 0.$$

Ou seja,

$$n(n-1) \left( \sup_\Sigma l_a^2 \right) \lim_k \sup (H^2 - H_2^2)(p_k) = 0.$$

Logo, desde que  $\sup_{\Sigma} l_a^2 > 0$ , obtemos que

$$0 = \limsup_k (H^2 - H_2^2)(p_k) = \limsup_k (H - H_2)(H + H_2),$$

em particular,

$$\inf_{\Sigma} (H - H_2) = 0. \quad (3.8)$$

Portanto, a hipótese (3.3) em conjunto com (3.8), garantem que  $a^\top$  é identicamente nulo em  $\Sigma^n$ , o que significa que  $\Sigma^n$  é uma horoesfera ortogonal a  $a$ . ■

Levando em consideração que  $H_2 \leq H^2$ , do Teorema 3.1, obtemos,

**Corolário 3.1** (*[9, Seção 3]*) *Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientada completa contida em uma horobola fechada determinada por uma horoesfera  $L_\tau^n$  ortogonal a um vetor tipo-luz diferente de zero  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ . Suponha que  $0 < H \leq 1$  e  $H_2 > 0$ . Se  $\Sigma^n$  satisfaz*

$$|a^\top| \leq C \inf_{\Sigma} (H - H_2),$$

*para alguma constante positiva  $C$ , então  $\Sigma^n$  é uma horoesfera  $L_{\tilde{\tau}}$ , para algum  $\tilde{\tau} \leq \tau$ .*

**Demonstração:** Basta observar que usando nossa hipótese que  $0 < H \leq 1$  e  $H_2 > 0$  e usando o fato que  $H_2 \leq H^2$ , obtemos

$$0 < H_2 \leq H^2 \leq H,$$

e estando nas hipótese do Teorema 3.1, basta aplicá-lo. ■

Além disso, obtemos também o seguinte:

**Teorema 3.2** (*[9, Seção 3]*) *Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientada completa contida em uma horobola fechada determinada por uma horoesfera  $L_\tau^n$  ortogonal a um vetor tipo-luz diferente de zero  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ . Se  $H$  e  $H_2$  são constantes tais que  $0 < H \leq 1$  e  $H_2 > 0$ , então  $\Sigma^n$  é uma horoesfera  $L_{\tilde{\tau}}$ , para algum  $\tilde{\tau} \leq \tau$ .*

**Demonstração:** Como  $H$  e  $H_2$  são consideradas constantes, usando parte da demonstração do primeiro teorema,  $\inf_{\Sigma} (H - H_2) = 0$ , segue que  $H = H_2$ . Além disso, levando em consideração que  $0 < H \leq 1$  e  $H_2 \leq H^2$ , obtemos

$$H = H_2 \leq H^2 \leq H.$$

Consequentemente, pelo item (ii) da Proposição 1.3, temos que  $\Sigma^n$  é uma hipersuperfície totalmente umbílica completa de  $\mathbb{H}^{n+1}$ , e mais, como  $H^2 - H = 0$  e  $H > 0$ , segue que  $\Sigma^n$  tem curvatura média constante 1. Portanto, a partir da classificação das hipersuperfícies totalmente umbílicas de  $\mathbb{H}^{n+1}$  e considerando que  $\Sigma^n$  está contida em uma horobola fechada determinada por uma horoesfera  $L_\tau^n$  ortogonal a um vetor tipo-luz diferente de zero  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ , concluímos que deve ser uma horoesfera  $L_{\tilde{\tau}}$ , para algum  $\tilde{\tau} \leq \tau$ . ■

Prosseguindo, em nosso próximo resultado estendemos o Teorema 3.1 para o contexto de curvaturas médias de ordem superior.

**Teorema 3.3** (*[9, Seção 3]*) *Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientada completa contida em uma horobola fechada determinada por uma horoesfera  $L_\tau$  ortogonal a um vetor tipo-luz diferente de zero  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ , com curvatura seccional  $K \geq -1$ . Suponha que, para algum  $1 \leq r \leq n - 1$ ,  $H_r$  é positivo, limitada e tal que*

$$0 \leq H_{r+1} \leq H_r. \quad (3.9)$$

Se

$$|a^\top| \leq C \inf_{\Sigma} (H_r - H_{r+1}), \quad (3.10)$$

para alguma constante positiva  $C$ , então  $\Sigma^n$  é uma horoesfera  $L_{\tilde{\tau}}$ , para algum  $\tilde{\tau} \leq \tau$ .

**Demonstração:** Definimos um operador autoadjunto  $\mathcal{P}_r : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma^n)$  por

$$\mathcal{P}_r = H_r P_r.$$

Para cada  $p \in \Sigma^n$ , tomamos um referencial ortonormal local  $\{e_1, \dots, e_n\}$  tal que  $Ae_i = \lambda_i e_i$ . Usando o item (i) da Proposição 1.4, para qualquer  $i \in \{1, \dots, n\}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_r e_i, e_i \rangle &= \langle H_r P_r e_i, e_i \rangle \\ &= H_r \left\langle \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_r \\ i_j \neq i}} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_r} e_i, e_i \right\rangle \\ &= \binom{n}{r}^{-1} S_r \sum_{i_1 < \dots < i_r} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_r} \langle e_i, e_i \rangle \\ &= \binom{n}{r}^{-1} \sum_{j_1 < \dots < j_r} \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_r} \sum_{i_1 < \dots < i_r} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_r} \\ &= \binom{n}{r}^{-1} \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_r \\ j_1 < \dots < j_r \\ i_j \neq i}} (\lambda_{i_1} \lambda_{j_1}) \dots (\lambda_{i_r} \lambda_{j_r}). \end{aligned}$$

Além disso, a partir da equação (3.4) e tendo em conta a nossa restrição na curvatura seccional  $K_\Sigma$  de  $\Sigma^n$ , temos que

$$\lambda_i \lambda_j = 1 + K_\Sigma(e_i, e_j) \geq 0,$$

para todo  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , com  $i \neq j$ . Portanto,

$$\langle \mathcal{P}_r e_i, e_i \rangle \geq 0,$$

e  $\mathcal{P}_r$  é positivo semi-definido. Agora, calculemos o  $\text{tr}(\mathcal{P}_r)$ ,

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathcal{P}_r) &= \text{tr}(H_r P_r) = H_r \text{tr}(P_r) = H_r(n-r)S_r \\ &= H_r(n-r) \binom{n}{r} H_r = c_r H_r^2, \end{aligned}$$

como estamos assumindo que  $H_r$  é limitada em  $\Sigma^n$ , temos que o mesmo é verdadeiro para  $\text{tr}(\mathcal{P}_r) = c_r H_r^2$ . Estendendo a ideia da prova do Teorema 3.1, consideramos o operador  $\mathcal{L}_r : C^\infty(\Sigma^n) \rightarrow C^\infty(\Sigma^n)$  dado por

$$\mathcal{L}_r f = \text{tr}(\mathcal{P}_r \nabla^2 f). \quad (3.11)$$

Inicialmente, calculemos

$$\begin{aligned} L_r(l_a^2) &= c_r \underbrace{\left( \sqrt{H_r} f_a + \frac{H_{r+1}}{\sqrt{H_r}} l_a \right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{c_r H_r (l_a^2 - f_a^2)}_{\geq 0} + c_r \left( H_r - \frac{H_{r+1}^2}{H_r} \right) l_a^2 + 2 \langle P_r(\nabla l_a), \nabla l_a \rangle \\ &\geq c_r \left( H_r - \frac{H_{r+1}^2}{H_r} \right) l_a^2 + 2 \langle P_r(\nabla l_a), \nabla l_a \rangle. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Como  $\mathcal{P}_r$  é positivo semi-definido, de (3.9), (3.11) e (3.12) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r(l_a^2) &= H_r L_r(l_a^2) \geq c_r (H_r^2 - H_{r+1}^2) l_a^2 + 2 \langle P_r H_r(\nabla l_a), \nabla l_a \rangle \\ &= c_r (H_r^2 - H_{r+1}^2) l_a^2 + 2 \langle P_r(\nabla l_a), \nabla l_a \rangle \\ &\geq c_r (H_r^2 - H_{r+1}^2) l_a^2 \\ &\geq (H_r^2 - H_{r+1}^2) l_a^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Então, como a nossa suposição de que  $\Sigma^n$  está contida em uma horobola fechada determinada por uma horoesfera de  $\mathbb{H}^{n+1}$  implica que  $l_a$  é limitada, podemos aplicar o Lema 3.1 para obter uma sequência  $(p_k)_{k \geq 1}$  em  $\Sigma^n$  tal que

$$\lim_k l_a^2(p_k) = \sup_\Sigma l_a^2, \quad \lim_k |\nabla l_a^2(p_k)| = 0 \quad \text{e} \quad \limsup_k \mathcal{L}_r(l_a^2)(p_k) \leq 0. \quad (3.14)$$



Consequentemente, de (3.13) e (3.14) temos que

$$0 \geq \limsup_k \mathcal{L}_r(l_a^2)(p_k) \geq c_r(\sup_{\Sigma} l_a^2) \limsup_k (H_r^2 - H_{r+1}^2)(p_k) \geq 0,$$

ou seja,

$$c_r(\sup_{\Sigma} l_a^2) \limsup_k (H_r^2 - H_{r+1}^2)(p_k) = 0,$$

desde  $\sup_{\Sigma} l_a^2 > 0$ , obtemos que

$$0 = \limsup_k (H_r^2 - H_{r+1}^2)(p_k) = \limsup_k (H_r - H_{r+1})(H_r + H_{r+1})(p_k),$$

em particular,

$$\inf_{\Sigma} (H_r - H_{r+1}) = 0. \quad (3.15)$$

Portanto, a hipótese (3.10) garante que  $a^\top$  é identicamente nulo em  $\Sigma^n$ , ou seja,  $\Sigma^n$  é uma horoesfera ortogonal a  $a$ . ■

Antes do próximo teorema precisamos esclarecer que uma hipersuperfície  $\Sigma^n$  imersa em  $\mathbb{H}^{n+1}$  ser localmente tangente por baixo de uma horoesfera  $L_\tau^n$  de  $\mathbb{H}^{n+1}$  significa que existe um ponto  $p \in \Sigma^n$  e uma vizinhança  $\mathcal{U} \subset \Sigma^n$  de  $p$  tal que  $l_a(p) = \tau$  e  $l_a(q) \leq \tau$ , para todo  $q \in \mathcal{U}$ .

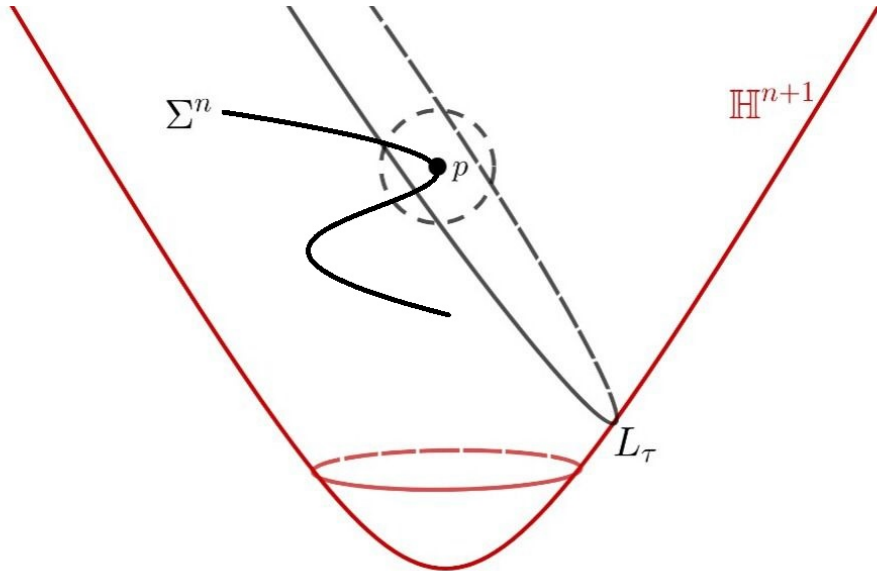


Figura 3.2:  $\Sigma^n$  localmente tangente por baixo de  $L_\tau^n$ .

**Teorema 3.4** ([9, Seção 3]) *Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientada completa contida em uma horobola fechada determinada por uma horoesfera  $L_\tau^n$  ortogonal a*

um vetor tipo-luz diferente de zero  $a \in L^{n+2}$  e localmente tangente por baixo de uma horoesfera  $L_{\tilde{\tau}}$ , para algum  $\tilde{\tau} \leq \tau$ . Suponha que  $H$  seja limitada e, para algum  $1 \leq r \leq n-1$ ,  $H_r$  é tal que

$$0 < H_{r+1} \leq H_r.$$

Se

$$|a^\top| \leq C \inf_{\Sigma} (H_r - H_{r+1}),$$

para alguma constante positiva  $C$ , então  $\Sigma^n$  é a horoesfera  $L_{\tilde{\tau}}$ .

**Demonstração:** Considere o campo vetorial  $V$  definido em  $\mathbb{H}^{n+1}$  por

$$V(p) = a + \langle p, a \rangle p,$$

observe que  $V$  é um campo de vetores conforme fechado completo, pois dado  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$ , temos, pela fórmula de Weingarten, que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X V &= \nabla_X^0 V + \langle A(X), V \rangle p \\ &= \nabla_X^0 (a + \langle p, a \rangle p) + \langle A(X), (a + \langle p, a \rangle p) \rangle p \\ &= \langle X, a \rangle p + \langle p, a \rangle X - \langle X, a \rangle p = \langle p, a \rangle X. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\operatorname{div} V(p) = (n+1) \langle p, a \rangle,$$

e

$$|V|_{\Sigma} = \langle \psi(p), a \rangle = l_a(p).$$

Assim, como estamos supondo que  $\Sigma^n$  é localmente tangente por baixo de uma horoesfera  $L_{\tilde{\tau}}$ , temos que  $|V|_{\Sigma}$  atinge um máximo local em  $\Sigma^n$ , pois existe um ponto  $p \in \Sigma^n$  e uma vizinhança  $\mathcal{U} \subset \Sigma^n$  de  $p$  tal que

$$l_a(q) = |V_q|_{\Sigma} \leq |V_p|_{\Sigma} = l_a(p),$$

para todo  $q \in \mathcal{U}$ . Consequentemente, podemos aplicar o Lema 1.5 para garantir a existência de um ponto elíptico em  $\Sigma^n$ . Portanto, como também estamos supondo que  $H_{r+1} > 0$ , segue do Lema 1.4 que  $P_j$  é positivo definido. Consequentemente, sendo  $\operatorname{tr}(P_j) = c_j H_j$  (item (ii) da Proposição 1.4), temos que

$$0 < \sum_{i=1}^{n+1} \langle P_j(E_i), E_i \rangle = c_j H_j,$$

e portanto,  $H_j$  é positiva para todo  $1 \leq j \leq r$ . Além disso, levando em conta mais uma vez a relação algébrica (1.14),

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = |A|^2 = n^2 H^2 - n(n-1)H_2,$$

e que  $H_2 > 0$ , obtemos que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq n^2 H^2, \quad (3.16)$$

neste caso, a limitação de  $H$  implica na limitação de todas as curvaturas principais de  $\Sigma^n$ . Em particular, temos que  $H_r$  é limitada e, pela equação de Gauss,

$$K_\Sigma(e_i, e_j) = -1 + \lambda_i \lambda_j,$$

logo, segue que  $K_\Sigma$  é limitado por baixo. Neste ponto, considerando novamente o operador (3.11) atuando na função  $l_a^2$  e usando mais uma vez o Lema 3.1, podemos raciocinar como na prova do Teorema 3.3 para concluir que  $\Sigma^n$  deve ser a horoesfera  $L_{\tilde{\tau}}$ . ■

Quando a hipersuperfície tem duas curvaturas médias consecutivas de ordem superior constantes, obtemos

**Teorema 3.5** (*[9, Seção 3]*) *Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientada completa contida em uma horobola fechada determinada por uma horoesfera  $L_\tau^n$  ortogonal a um vetor tipo-luz diferente de zero  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ , e localmente tangente por baixo de uma horoesfera  $L_{\tilde{\tau}}$ , para algum  $\tilde{\tau} \leq \tau$ . Se  $H$  é limitada e, para algum  $1 \leq r \leq n-1$ ,  $H_r$  e  $H_{r+1}$  são constantes tais que*

$$0 < H_{r+1} \leq H_r \leq 1, \quad (3.17)$$

*então  $\Sigma^n$  é a horoesfera  $L_{\tilde{\tau}}$ .*

**Demonstração:** Como estamos supondo que  $\Sigma^n$  é localmente tangente por baixo de uma horoesfera  $L_{\tilde{\tau}}$ , de forma análoga ao teorema anterior, usando o Lema 1.5, garantimos a existência de um ponto elíptico em  $\Sigma^n$ . Ademais, com a positividade de  $H_{r+1}$  nos é permitido usar o item (ii) da Proposição 1.3. Assim, temos,

$$H_r \geq H_{r+1}^{r/(r+1)},$$

donde segue que

$$H_r^{(r+1)/r} \geq H_{r+1}.$$

Usando o fato de que  $H_r$  e  $H_{r+1}$  são constantes, da equação (3.15),  $\inf_{\Sigma}(H_r - H_{r+1}) = 0$ , obtemos que  $H_r = H_{r+1}$ . E como  $H_r^{(r+1)/r} \leq H_r$ , conseqüentemente, devemos ter  $H_{r+1} = H_r^{(r+1)/r}$  e, portanto, o item (ii) da Proposição 1.3 também garante que  $\Sigma^n$  é uma hipersuperfície totalmente umbílica completa de  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Ademais, usando a hipótese (3.17), obtemos que  $H_r = 1$ , portanto, a partir da classificação das hipersuperfícies totalmente umbílicas de  $\mathbb{H}^{n+1}$  e considerando que  $\Sigma^n$  está contida em uma horobola fechada determinada por uma horoesfera  $L_\tau$  ortogonal a um vetor tipo-luz diferente de zero  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ , concluímos que deve ser uma horoesfera  $L_{\tilde{\tau}}$ , para algum  $\tilde{\tau} \leq \tau$ . ■

**Observação 3.1** *As funções suporte de uma horoesfera  $L_\tau$  de  $\mathbb{H}^{n+1}$  satisfazem a identidade  $l_a = -f_a$ , onde  $a$  é um vetor tipo-luz diferente de zero que define tais horoesferas.*

Motivados pela Observação 3.1, estabelecemos nosso próximo resultado de caracterização para as horoesferas.

**Teorema 3.6** (*[9, Seção 3]*) *Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientada completa contida em uma horobola fechada determinada por uma horoesfera  $L_\tau^n$  ortogonal a um vetor tipo-luz diferente de zero  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ , e localmente tangente por baixo de uma horoesfera  $L_{\tilde{\tau}}$ , para algum  $\tilde{\tau} \leq \tau$ . Suponha que  $l_a = \lambda f_a$ , para alguma constante negativa  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Se  $H$  é limitada e, para algum  $1 \leq r \leq n-1$ ,  $H_r$  é limitada longe do zero e tal que*

$$0 < H_{r+2} \leq H_r, \tag{3.18}$$

*então  $\Sigma^n$  é a horoesfera  $L_{\tilde{\tau}}$ .*

**Demonstração:** Como  $l_a = \lambda f_a$ , de (2.12) obtemos

$$|\nabla l_a|^2 = l_a^2 - f_a^2 = l_a^2 - \lambda^{-2} l_a^2 = (1 - \lambda^{-2}) l_a^2.$$

Em particular, veja que

$$1 - \lambda^{-2} \geq 0.$$

Agora, definimos o seguinte operador  $\mathcal{L} : C^\infty(\Sigma^n) \rightarrow C^\infty(\Sigma^n)$  dado por

$$\mathcal{L}f = -\frac{\lambda^{-1}}{c_{r+1}} L_{r+1}f + \frac{1}{c_r} L_r f.$$

Levando em conta nossas hipóteses (3.18) e  $l_a = \lambda f_a$  obtemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(l_a) &= -\frac{\lambda^{-1}}{c_{r+1}}L_{r+1}(l_a) + \frac{1}{c_r}L_r(l_a) \\
&= -\frac{\lambda^{-1}}{c_{r+1}}(c_{r+1}H_{r+2}f_a + c_{r+1}H_{r+1}l_a) + \frac{1}{c_r}(c_rH_{r+1}f_a + c_rH_rl_a) \\
&= -\lambda^{-1}H_{r+2}f_a - \lambda^{-1}H_{r+1}l_a + H_{r+1}f_a + H_rl_a \\
&= -\lambda^{-1}H_{r+2}\lambda^{-1}l_a - \lambda^{-1}H_{r+1}l_a + H_{r+1}\lambda^{-1}l_a + H_rl_a \\
&= -\lambda^{-2}H_{r+2}l_a + H_rl_a \\
&\geq -\lambda^{-2}H_rl_a + H_rl_a \\
&= (1 - \lambda^{-2})H_rl_a \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

De forma semelhante a prova do Teorema 3.4, obtemos que a curvatura seccional é limitada por baixo. Definimos agora um operador autoadjunto  $\mathcal{P} : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma^n)$  por

$$\mathcal{P} = -\frac{\lambda^{-1}}{c_{r+1}}P_{r+1} + \frac{1}{c_r}P_r,$$

donde segue, novamente pela prova do Teorema 3.4, que  $\mathcal{P}_r$  é positivo definido, pois  $P_j$  é positivo, para todo  $1 \leq j \leq r$ , e  $\lambda$  é suposto ser negativo. Além disso, veja que

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\mathcal{P}) &= -\frac{\lambda^{-1}}{c_{r+1}}\text{tr}(P_{r+1}) + \frac{1}{c_r}\text{tr}(P_r) \\
&= -\frac{\lambda^{-1}}{c_{r+1}}c_{r+1}H_{r+1} + \frac{1}{c_r}c_rH_r \\
&= -\lambda^{-1}H_{r+1} + H_r.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Levando em consideração a nossa hipótese sobre a limitação de  $H$ , pela desigualdade (3.16) obtemos a limitação de todas as curvaturas principais de  $\Sigma^n$  e, em particular, temos que  $H_j$  é limitada, para todo  $1 \leq j \leq n$ . Logo, de (3.20) obtemos que  $\text{tr}(\mathcal{P})$  é limitado.

Como  $l_a > 0$  então podemos aplicar o Lema 3.1 para  $\mathcal{L}(l_a)$ . Assim, como também estamos assumindo que  $H_r$  está limitada longe do zero, de (3.19) concluimos que existe uma sequência  $(p_k)_{k \geq 1}$  em  $\Sigma^n$  e uma constante positiva  $\beta$  tal que

$$0 \geq \limsup_k \mathcal{L}(l_a)(p_k) \geq (1 - \lambda^{-2})\beta \sup_{\Sigma} l_a \geq 0.$$

Assim, como  $\sup_{\Sigma} l_a > 0$ , segue que  $(1 - \lambda^{-2}) = 0$  donde obtemos que  $\lambda = -1$ . Portanto, obtemos que a função altura  $l_a$  é constante em  $\Sigma^n$  e, conseqüentemente,  $\Sigma^n$  deve ser a horoesfera  $L_{\tilde{r}}$ .

■

Levando em consideração que  $H_2 = R + 1$ , onde  $R$  representa a curvatura escalar normalizada de uma hipersuperfície imersa do espaço hiperbólico, e observando (como no Teorema 3.1) que neste caso não é necessário garantir a existência de um ponto elíptico na hipersuperfície  $\Sigma^n$ , não é difícil verificar que também obtemos o seguinte resultado do tipo gap:

**Teorema 3.7** (*[9, Seção 3]*) *As únicas hipersuperfícies orientada completas contidas em uma horobola fechada determinada por uma horoesfera  $L_{\tilde{\tau}}^n$  ortogonal a um vetor tipo-luz diferente de zero  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ , com  $l_a = \lambda f_a$ , para alguma constante negativa  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e tendo curvatura média limitada  $H$  e curvatura escalar normalizada  $R$  satisfazendo*

$$-1 < R \leq 0,$$

*são apenas as horoesferas  $L_{\tilde{\tau}}$ , com  $\tilde{\tau} \leq \tau$ .*

**Demonstração:** Basta observar que, sendo  $0 < H_{r+2} \leq H_r$ , para  $r = 0$  obtemos  $0 < R + 1 \leq 1$ , donde segue que  $-1 < R \leq 0$ .

■

## Capítulo 4

# Estimando o Índice de Nulidade Relativa de uma Hipersuperfície em $\mathbb{H}^{n+1}$

Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície imersa no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$ , com segunda forma fundamental  $A$ . Segundo Dajczer em [10], para  $p \in \Sigma^n$ , definimos o espaço de nulidade relativa  $\mathcal{N}(p)$  de  $\Sigma^n$  em  $p$  por

$$\mathcal{N}(p) = \{v \in T_p\Sigma; v \in \ker(A_p)\},$$

onde  $\ker(A_p)$  denota o núcleo de  $A_p$ . O índice de nulidade relativa  $v(p)$  de  $\Sigma^n$  em  $p$  é a dimensão de  $\mathcal{N}(p)$ , ou seja,

$$v(p) = \dim(\mathcal{N}(p)),$$

e o índice de nulidade relativa mínima  $v_0$  de  $\Sigma^n$  é definido por

$$v_0 = \min_{p \in \Sigma} v(p).$$

**Exemplo 4.1** *Afirmamos que o índice de nulidade relativa mínima de uma hipersuperfície  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  totalmente geodésica em  $\mathbb{H}^{n+1}$  é  $n$ .*

*De fato, seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  totalmente geodésica e fixe  $p \in \Sigma^n$ . Então, como o operador de Weingarten  $A$  é identicamente nulo, temos que*

$$\mathcal{N}(p) = \{v \in T_p\Sigma; v \in \ker(A_p)\} = T_p\Sigma$$

e

$$v(p) = \dim(\mathcal{N}(p)) = n.$$

*Consequentemente,  $v_0 = \min_{p \in \Sigma} v(p) = n$ .*

Citamos aqui uma proposição que nos será útil na demonstração dos nossos últimos resultados:

**Proposição 4.1** (*[10, Teorema 5.3]*) *Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície imersa no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$ , e  $U \subset \Sigma^n$  um conjunto aberto no qual o índice de nulidade relativa mínima  $v_0$  da imersão é constante e igual a  $m$ . Então, temos sobre  $U$  que:*

- (i) *A distribuição de nulidade relativa é suave e integrável, e suas folhas são totalmente geodésicas em  $\Sigma^n$  e em  $\mathbb{H}^{n+1}$ .*
- (ii) *Se  $\gamma : [0, b] \rightarrow \Sigma^n$  é uma geodésica tal que  $\gamma([0, b])$  está contido em uma folha  $\mathcal{N}$ , então  $v(\gamma(b)) = m$ .*
- (iii) *As folhas da distribuição de nulidade relativa mínima são completas sempre que  $\Sigma^n$  for completa.*

Com a Proposição acima, e observando que uma hipersuperfície  $\Sigma^n$  imersa em  $\mathbb{H}^{n+1}$  é dita  $r$ -mínima se  $H_{r+1}$  é identicamente nula em  $\Sigma^n$ , estamos em condições de afirmar e provar o próximo resultado:

**Teorema 4.1** (*[9, Seção 4]*) *Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície  $r$ -mínima ( $2 \leq r \leq n-1$ ) orientada completa contida numa horobola fechada determinada por uma horoesfera  $L_r^n$  ortogonal a um vetor nulo diferente de zero  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ , com curvatura seccional  $K_\Sigma \geq -1$ . Se  $H_r$  é uma constante não negativa, então o índice de nulidade relativa mínima  $v_0$  de  $\Sigma^n$  é pelo menos  $n - r + 1$ . Além disso, se  $H_{r-1}$  não se anula em  $\Sigma^n$ , então através de cada ponto de  $\Sigma^n$  passa um  $(n - r + 1)$ -dimensional espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n-r+1} \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  totalmente contido em  $\Sigma^n$ .*

**Demonstração:** Usando a demonstração do Teorema 3.3, temos que

$$\inf_{\Sigma} (H_r - H_{r+1}) = 0,$$

Mas, como  $H_{r+1} = 0$ , segue que  $\inf_{\Sigma} H_r = 0$ . Logo, considerando que  $H_r$  é uma constante não negativa concluímos que  $H_r = 0$  em  $\Sigma^n$ . Assim, do item (iii) da Proposição 1.3, vemos que  $H_j = 0$  para todo  $j \geq r$  e, portanto,  $v_0 \geq n - r + 1$ . Agora, suponhamos que  $H_{r-1} \neq 0$ . Do Teorema 4.1, a distribuição  $p \mapsto \mathcal{N}(p)$  de nulidade relativa mínima de  $\Sigma^n$  é suave e integrável com folhas completas, totalmente geodésica em  $\Sigma^n$  e em  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Portanto, o resultado decorre da caracterização de subvariedades completas totalmente geodésicas de  $\mathbb{H}^{n+1}$  como espaços hiperbólicos de dimensão  $(n - r + 1)$ . ■



Raciocínio análogo como na prova do Teorema 4.1, para o caso  $r = 1$  e levando em consideração que não existe um espaço hiperbólico totalmente geodésico  $\mathbb{H}^n$  contido numa horobola fechado determinado por uma horoesfera de  $\mathbb{H}^{n+1}$ , não é difícil verificar que obtemos o seguinte resultado de não-existência:

**Teorema 4.2** (*[9, Seção 4]*) *Não existem hipersuperfícies orientadas completas 1-mínimas  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  contidas numa horobola fechada determinada por uma horoesfera de  $\mathbb{H}^{n+1}$ , tendo curvatura seccional  $K_\Sigma \geq -1$  e curvatura média constante  $H$  não negativa.*

**Demonstração:** Suponha que exista uma tal hipersuperfície  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ . Como  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  é 1-mínima (isto é  $H_2 = 0$ ), então da demonstração do Teorema 4.1 obtemos que  $H = 0$  em  $\Sigma^n$ . Logo, de

$$|A|^2 = n^2 H^2 - n(n-1)H_2,$$

obtemos que o operador de Weingarten  $A$  de  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  é identicamente nulo. Portanto, da classificação das hipersuperfícies totalmente umbílicas de  $\mathbb{H}^{n+1}$  (veja Proposição 2.1) obtemos que  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  deve ser isométrico a um espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ , o que é um absurdo, pois não existe espaço hiperbólico contido em uma horobola de  $\mathbb{H}^{n+1}$ . ■

# Referências Bibliográficas

- [1] N. Abe, N. Koike, S. Yamaguchi. *Congruence theorems for proper semi-Riemannian hypersurfaces in a real space form*. Yokohama Mathematical. **35** (1987), 123-136. [28](#)
- [2] L.J. Alías, M. Dajczer. *Uniqueness of constant mean curvature surfaces properly immersed in a slab*. Comment. Math. Helv. **81** (2006), 653–663. [1](#)
- [3] L.J. Alías, D. Impera, M. Rigoli. *Spacelike hypersurfaces of constant higher order mean curvature in generalized Robertson–Walker spacetimes*. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **152** (2012), 365–383. [3](#), [33](#)
- [4] C.P. Aquino, H.F. de Lima. *On the geometry of horospheres*. Comment. Math. Helv. **89** (2014), 617-629. [1](#)
- [5] C.P. Aquino, H.I. Baltazar, H.F. de Lima. *Characterizing horospheres of the hyperbolic space via higher order mean curvatures*. Differ. Geom. Appl. **62** (2019), 109-119. [1](#), [2](#), [21](#)
- [6] C.P. Aquino, A. Barros, H.F. de Lima. *On the rigidity of hypersurfaces into space forms*. Ann. Matem. Pura Appl. **193** (2014), 689-698. [2](#)
- [7] A. Caminha. *Sobre hipersuperfícies em espaços de curvatura seccional constante*. Tese (Doutorado em Matemática) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará. Fortaleza (2004), 67 f. [13](#), [14](#), [17](#)
- [8] F. U. Coelho, M. L. Lourenço. *Um curso de Álgebra Linear*. 2<sup>a</sup> edição, São Paulo, Edusp. (2007). [17](#)

- [9] A. G. Colares, H.F. de Lima, M. A. L. Velásquez. *Revisiting the geometry of horospheres of the hyperbolic space*. *Monatsh Math.* **199** (2022), 771–784. [2](#), [30](#), [34](#), [36](#), [37](#), [39](#), [41](#), [42](#), [44](#), [46](#), [47](#)
- [10] M. Dajczer. *Submanifolds and Isometric Immersions*. Publish or Perish. Houston, (1990). [45](#), [46](#)
- [11] H.F. de Lima. *Rigidity theorems in the hyperbolic space*. *Bull. Korean Math. Soc.* **50** (2013), 97–103. [1](#)
- [12] M. P. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. 5<sup>a</sup> edição, Rio de Janeiro: IMPA, (2015). [10](#), [21](#)
- [13] M. do Carmo, B. Lawson. *The Alexandrov-Bernstein theorems in hyperbolic space*. *Duke Math. J.* **50** (1983), 995-1003. [1](#), [2](#)
- [14] B. Nelli, J. Zhu. *Uniqueness of hypersurfaces of constant higher order mean curvature in hyperbolic space*. (2020). [2](#)
- [15] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press. New York (1983). [5](#), [6](#), [9](#)
- [16] H. Omori. *Isometric immersions of Riemannian manifolds*. *J. Math. Soc. Jpn.* **19** (1967), 205–214. [33](#)
- [17] S. T. Yau. *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*. *Commun. Pure Appl. Math.* **28** (1975), 201–228. [33](#)