Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Matheus da Silva Nascimento †

Sobre Existência de Soluções para Sistemas Elípticos Envolvendo Operadores Divergente com Peso via Teoria de Pontos Fixos em Cones

Campina Grande - PB
2024

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Matheus da Silva Nascimento

Sobre Existência de Soluções para Sistemas Elípticos Envolvendo Operadores Divergente com Peso via Teoria de Pontos Fixos em Cones

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, pertencente à linha de pesquisa Análise e área de concentração Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto

Campina Grande - PB
2024

N244s Nascimento, Matheus da Silva.
Sobre existência de soluções para sistemas elípticos envolvendo operadores divergente com peso via teoria de pontos fixos em cones / Matheus da Silva Nascimento. – Campina Grande, 2024.
116 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.
"Orientação: Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto".
Referências.

1. Análise Matemática. 2. Sistemas Elípticos. 3. Divergente com Peso. 4. Teoria de Pontos Fixos em Cones. 5. Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii. I. Souto, Marco Aurélio Soares. II. Título.

CDU 517(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

Sobre Existência de Soluções para Sistemas Elípticos Envolvendo Operadores Divergente com Peso via Teoria de Pontos Fixos em Cones

por

Matheus da Silva Nascimento

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em: 30 de julho de 2024

Denilson da S. Pereira

Prof. Dr. Denilson da Silva Pereira - UFCG

Prof. Dr. Patricio Humberto Cerda Loyola - Universidad de Santiago de Chile

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Julho - 2024

Agradecimentos

Existem presentes com os quais sonhamos e que, com esforço e dedicação, pela bondade de Deus, podemos realizar e vive-lós. Por outro lado, existem presentes que chegam de surpresa, na ordem e na medida certa, ainda melhores do que se pudéssemos imaginar. Meu mestrado em Matemática é um presente que, para mim, foi uma surpresa. Por isso, meus primeiros agradecimentos são para Ele, que pelo seu infinito amor e misericórdia, permitiu que hoje pudesse estar concluindo esse trabalho, por, apesar de todas a dúvidas e medos, ter tornado todo o caminho agradável, ter aliviado meus fardos e tornado o resultado final satisfatório.

Os próximos agradecimentos são para minha família, Geraldo (pai), Rose (mãe), Marcos e Jefferson (irmãos). Obrigado por todo amor e auxílio, pois antes que eu pudesse me dedicar aos estudos e projetos pessoais, estou recebendo ajuda e suporte de vocês. Que eu ainda possa enchê-los de orgulho. Apesar de nem sempre conversarmos muito, o exemplo diário de esforço e dedicação me arrasta para agir de maneira congruente a isso, me arraste de maneira que nenhum conselho o poderia fazer. Aproveito para agradecer a minha Bella, companheira e principal confidente, muito obrigado por ser tão amorosa e gentil, por torna a vida mais agradável, que o Espírito Santo possa continuar fazendo de nós pessoas melhores, um para o outro, para os outros e, principalmente, melhores para Ele.

Confesso que para mim as vezes não é fácil assimilar o tanto que aprendi e tive vivências nesses últimos dois anos. Sou eternamente grato por todos os amigos, professores e demais funcionários com os quais compartilhei momentos aqui, na Unidade Acadêmica de Matemática. Mais do que professores e colegas de trabalho, alguns deles se tornaram amigos, cujos conselhos e conversas tem importância afetiva e racional.

Deixo registrado meus agradecimentos para os professores da banca examinadora, pelo tempo e esforço empreendido na leitura desse trabalho, desejo de coração que meu empenho e minha energia dedica a este trabalho possa ter-lhes rendido uma leitura agradável e com o nível técnico satisfatório, tanto quanto a Matemática nos exige que seja. Particularmente, sou grato por ter sido orientado por um professor que admiro e respeito, sobre o qual não é difícil ver alguém que o conhece falando com alegria sobre ele, algo que já diz muito ao seu respeito. Tive muito auxílio do orientador para que pudesse concluir a dissertação, em determinado período de tempo tivemos reuniões quase que diárias para apresentações e discussões. Que eu, além de dizer que foi meu orientador, possa continuar me referir a ele como amigo.

Por fim, meus agradecimentos a CAPES pelo apoio financeiro que me permitiu conforto e dedicação aos estudos.

Dedicatória

Dedico a Deus, a toda a minha família e a todos os matemáticos que conheci.

Resumo

Neste trabalho vamos provar a existência de soluções para alguns sistemas elípticos envolvendo operadores divergentes com peso, do tipo

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(w_1(x)\nabla u) = w_3(x) f(|x|,u,v), & x \in B, \\ -\operatorname{div}(w_2(x)\nabla v) = w_4(x) g(|x|,u,v), & x \in B, \\ \quad u(x) = 0 = v(x), \quad x \in \partial B, \end{cases}$$

onde B é a bola unitária do $\mathbb{R}^N$ e w_1, w_2, w_3, w_4 são as funções pesos. Estudamos um caso em que o operador associado ao sistema é linear e outro caso em que o operador é não linear. Notamos que cada um desses casos apresentaram desafios particulares ainda que a ideia geral em ambas as situações sejam semelhantes. A existência de soluções é obtida via Teoria de Pontos Fixos em Cones, mais especificamente pela aplicação direta do Teorema de Ponto Fixo de Krasnoselskii.

Palavras-chave: Sistemas Elípticos, Divergente com Peso, Teoria de Pontos Fixos em Cones, Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii

Abstract

In this work, we will prove the existence of solutions for some elliptic systems involving divergent operators with weight, of the type:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(w_1(x)\nabla u) = w_3(x)f(|x|,u,v), & x \in B, \\ -\operatorname{div}(w_2(x)\nabla v) = w_4(x)g(|x|,u,v), & x \in B, \\ \quad u(x) = 0 = v(x), \quad x \in \partial B, \end{cases}$$

where B is the unitary ball from $\mathbb{R}^N$ and w_1, w_2, w_3, w_4 are the weight functions. We studied one case where the operator associated with the system is linear and another case where the operator is nonlinear. We noted that each one of these cases has particular challenges despite both situations having similar general ideas. The existence of solutions is obtained by Fixed Points Theory in Cones, more specifically by a direct application of Krasnoselskii's fixed point theorem.

Key Words: Elliptic Systems, Divergent with weight, Fixed Points Theory in Cones, Krasnoselskii's Fixed Point Theorem.

Lista de Símbolos

$\#(A)$ denota a cardinalidade do conjunto A

$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ designa o $p-$Laplaciano de u

$\operatorname{diam}\Omega$ Diâmetro de Ω

$\operatorname{conv}(\Omega)$ Fecho convexo de Ω

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ Produto interno

$|\cdot|$ A menos de menção contrária denotara a norma usual do $\mathbb{R}^N$

$\overline{\Omega}$ Fecho de Ω

$\partial\Omega$ Fronteira de Ω

$B_r(y) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x-y| < r\}$

$u^+ = \max\{u, 0\}$

$u^- = \max\{-u, 0\}$

$V \hookrightarrow W$ denota que V está imerso em W

Sumário

Introdução

Neste trabalho vamos estudar a existência de soluções radialmente simétricas para sistemas elípticos sob condições superlineares em torno da origem. Os sistemas são da forma

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(w_1(x)\nabla u) = w_3(x)f(|x|,u,v), \quad x \in B, \\ -\operatorname{div}(w_2(x)\nabla v) = w_4(x)g(|x|,u,v), \quad x \in B, \\ \quad u(x) = 0 = v(x), \quad x \in \partial B, \end{cases}$$

onde $B = B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1\}$, as não linearidades f e g são contínuas e não-negativas, as funções pesos w_1, w_2, w_3 e w_4 vão ser particularizadas, juntamente com as hipóteses técnicas em cada uma das situações.

A ideia principal é usar métodos de ponto fixo aliados as mudanças de variáveis adequadas, associando os sistemas a operadores compactos definidos em cones, para então obter a existência de soluções através da Teoria de Pontos Fixos em Cones, mais especificamente com a aplicação direta do Teorema do Ponto Fixo de Krasnoseskii [10].

Naturalmente, tornou-se crucial o conhecimento da Teoria de Pontos Fixos em Cones, cujo peso é insubstituível para que o entendimento das ideias envolvidas no uso dos Teoremas de Pontos Fixos sobre Cones possam ir além da superficialidade. Dessa forma, demos uma atenção especial para esse tema, bem como para o estudo do grau de Leray-Schauder, que precede a Teoria dos Pontos fixos em Cones. Esses estudos podem ser vistos no Capítulo 1, além de alguns outros resultados de Pontos Fixos em Cones. Modesta parte, acreditamos que este capítulo foi bem construído e acaba por enriquecer este trabalho. O leitor que já tiver conhecimento sobre o Índice de Ponto Fixos em Cones ou já tiver estudado Teoremas de Pontos Fixos em Cones, caso deseje, pode seguir para a leitura do Capítulo 2 em diante, onde tratamos dos Sistemas Elípticos.

No Capítulo 2, vamos considerar o caso em que

$$w_1(x) = |x|^{\alpha_1}, \quad w_2(x) = |x|^{\alpha_2} \quad \text{e}$$

$$w_3(x) = |x|^{\beta_1}, \quad w_4(x) = |x|^{\beta_2}.$$

Neste caso trabalhamos com as ideias de P. Cerda, M. Souto e P. Ubilla usadas em [3], para garantir a existência de soluções radialmente simétricas para o sistema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u) = |x|^{\beta_1} f(|x|, u, v), & x \in B, \\ -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_2}\nabla v) = |x|^{\beta_2} g(|x|, u, v), & x \in B, \\ \quad u(x) = 0 = v(x), \quad x \in \partial B. \end{cases} \tag{1}$$

Destacamos que são consideradas condições adequadas para os expoentes dos pesos, a saber $\beta_i - \alpha_1 > -1$ para $i = 1, 2$, aliados com as seguintes hipóteses técnicas: sejam

$$a_i(r) = \frac{r^{2-N-\alpha_i}}{N + \alpha_1 - 2}, \quad i = 1, 2,$$

e suas funções inversas r_{α_i}, juntamente com funções não-decrescentes

$$\overline{f}, \overline{g} : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$$

e λ_1 e $\hat{\lambda}_1$ os primeiros autovalores associados aos problemas

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla\phi) = \lambda|x|^{\beta_1}\phi, \text{ em } B \\ \phi = 0, \text{ sobre } \partial B \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_2}\nabla\psi) = \hat{\lambda}|x|^{\beta_2}\psi, \text{ em } B \\ \psi = 0, \text{ sobre } \partial B \end{cases},$$

dos quais as respectivas autofunções ϕ_1 e ψ_1 são positivas, ademais exite $\sigma \geq 1$ de sorte que $\sigma^{-1}\phi_1 \leq \psi_1 \leq \sigma\phi_1$.

Com estas considerações podemos ir para as hipóteses técnicas:

(H_1) Temos
$$\lim_{u+v\to+\infty} \frac{\overline{f}(u,v) + \overline{g}(u,v)}{u+v} = +\infty.$$

(H_ϕ) Existe $\overline{s}$ tal que
$$\frac{\overline{f}(As, Ba_2 r_{\alpha_1}(s)) + \overline{g}(Aa_1 r_{\alpha_2}(s), Bs)}{\overline{f}(A,B) + \overline{g}(A,B)} \leq \phi(s)$$

para todo $s \geq \overline{s}$ e todos $A, B > 0$, onde $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é uma função que satisfaz

$$\int_1^{+\infty} \phi(s) s^{\frac{N+\beta_i}{2-(N+\alpha_i)}} \, ds < +\infty, \quad i = 1, 2.$$

(H_2) Para $\lambda = \min\{\lambda_1, \hat{\lambda}_1\}$, supomos que existem σ_0 e s_0 satisfazendo

$$0 < \sigma_0 \sigma < \frac{\lambda}{1+\sigma} \quad \text{e} \quad s_0 > 0,$$

e tais que se $0 \leq u, v \leq s_0$, então

$$f(|x|, u, v) + g(|x|, u, v) \leq \sigma_0(u+v).$$

(LH) Existem constantes $c_f, c_g > 0$ e $0 < \delta < 1$ tal que se $r \in [0, \delta]$, então

$$\overline{f}(u,v) \leq f(r,u,v) \leq c_f \overline{f}(u,v), \forall u, v \geq 0$$

e

$$\overline{g}(u,v) \leq g(r,u,v) \leq c_g \overline{g}(u,v), \forall u, v \geq 0.$$

(H_4) A função $\overline{f}$ satisfaz

$$\lim_{u+v \to +\infty} \frac{\overline{f}(u,v)}{u+v} = +\infty.$$

Como exemplos de funções que satisfazem essas hipóteses, mencionamos somas de potências, digamos

$$f(|x|, u, v) = u^{p_1} + v^{q_1} \quad \text{e} \quad g(|x|, u, v) = u^{p_2} + v^{q_2}.$$

Podemos pensar em situações onde

$$f(|x|, u, v) = a_1(|x|)u^{p_1} + b_1(|x|)v^{q_1} \quad \text{e} \quad g(|x|, u, v) = a_2(|x|)u^{p_2} + b_2(|x|)v^{q_2}.$$

No final do capítulo tratamos disso com detalhes.

O principal resultado do Capítulo 2 é o seguinte teorema:

Teorema 2.4. Suponha as hipóteses (H_1), (H_2), (H_ϕ) com $\alpha_1 = \alpha_2$ e (LH). Então o sistema (1) possui solução radialmente simétrica positiva.

O teorema acima garante solução quando $\alpha_1 = \alpha_2$, no entanto também são obtidas soluções quando $\alpha_2 > \alpha_1$ com uma pequena mudança nas hipóteses técnicas necessárias, a saber:

Teorema 2.5. Suponha as hipóteses (H_2), (H_ϕ) e $\alpha_2 > \alpha_1$ com (LH) e (H_4). Então o sistema (1) possui uma solução radialmente simétrica positiva.

Trabalhando com hipóteses técnicas similares as consideradas para o Sistema (1) também é estudada a existência de soluções para o sistema do tipo Hamiltoniano. Neste caso, temos o sistema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u) = |x|^{\beta_1} f(|x|,v), & x \in B, \\ -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_2}\nabla v) = |x|^{\beta_2} g(|x|,u), & x \in B, \\ u(x) = 0 = v(x), \quad x \in \partial B, \end{cases} \tag{2}$$

com as hipóteses:

(H_5) Existem funções $\overline{f}, \overline{g} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ não decrescentes que satisfazem

$$\lim_{u+v\to+\infty} \frac{\overline{f}(v)+\overline{g}(u)}{u+v} = +\infty.$$

(H_6) Suponha σ_0 e s_0, com $0 < \sigma_0\sigma < \frac{\lambda}{1+\sigma}$ e $s_0 > 0$ tais que se $0 \leq u,v \leq s_0$ então

$$f(v)+g(u) \leq \sigma_0(u+v).$$

(H_7) Existe $\overline{s}$ tal que

$$\frac{\overline{f}(Ba_2 r_{\alpha_1}(s)) + \overline{g}(Aa_1 r_{\alpha_2}(s))}{\overline{f}(B)+\overline{g}(A)} \leq \phi(s)$$

para todo $s > \overline{s}$ e todos $A, B > 0$, onde $\phi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é uma função que satisfaz

$$\int_1^{+\infty} \phi(s) s^{\frac{N+\beta_i}{2-(N+\alpha_i)}}\, ds < +\infty, \quad i = 1,2.$$

$(LH)'$ Existem constantes $c_g, c_f > 0$ e $0 < \delta < 1$ tais que se $s \geq 0$ e $r \in [0,\delta]$, então temos

$$\overline{f}(s) \leq f(r,s) \leq c_f \overline{f}(s)$$

e

$$\overline{g} \leq g(r,v) \leq c_g \overline{g}(s).$$

O teorema que garante solução para o Sistema (2) é o seguinte:

Teorema 2.6. Suponha as hipóteses (H_5), (H_6), (H_7) e $(LH)'$. Então o Sistema (2) possui solução radialmente simétrica positiva.

Na abertura do Capítulo 2 mencionamos novamente as hipóteses técnicas tratando-as com mais detalhes. Uma atenção especial também é dada para o Problema de Autovalor

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla\phi) = \lambda|x|^{\beta}\phi, \text{ em } B \\ \phi = 0, \text{ sobre } \partial B, \end{cases}$$

cuja discussão pode ser vista no Apêndice A.

No Capitulo 3 consideramos que $w_3(x) = 1 = w_4(x)$ e

$$w_1(x) = |\nabla u(x)|^{p-2} \quad \text{e} \quad w_2(x) = |\nabla v(x)|^{q-2},$$

com $1 < p, q \leq 2$. Perceba que para essas escolhas de funções obtemos

$$\begin{cases} -\Delta_p u = -\operatorname{div}(|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u) = f(|x|, u, v), & x \in B, \\ -\Delta_q v = -\operatorname{div}(|\nabla v(x)|^{q-2}\nabla v) = g(|x|, u, v), & x \in B, \\ \qquad u(x) = 0 = v(x), & x \in \partial B, \end{cases} \tag{3}$$

com $\Delta_p u$ sendo conhecido como $p-$Laplaciano de u e $\Delta_q v$ conhecido por $q-$Laplaciano de v. Baseando-se nas ideias de P. Cerda, M. Souto e P. Ubilla usadas em [4]. Destacamos que o operador associado a este sistema é não linear, característica que difere completamente do operador associado ao sistema estudado no Capítulo 2.

Neste capítulo temos apenas duas hipóteses técnicas, a saber:

(H_8) Existe $0 < \delta < 1$ tal que se $|x| \leq \delta$ e $u, v \geq 0$, temos

$$v^{p_2} \leq f(|x|, u, v) \leq Cv^{p_2} \quad \text{e} \quad u^{p_1} \leq g(|x|, u, v) \leq Cu^{p_1},$$

onde C é uma constante positiva e valem as seguintes desigualdades entre os expoentes

$$q - 1 < p_1 < \frac{(p-1)}{(q-1)} \cdot \frac{((q-2)N + q)}{(N-p)},$$

$$p - 1 < p_2 < \frac{(q-1)}{(p-1)} \cdot \frac{((p-2)N + p)}{(N-q)}.$$

(H_9) Existem $\sigma_0, s_0 > 0$ tais que se $0 \leq u, v \leq s_0$ e $x \in B$, temos

$$f(|x|, u, v) \leq \sigma_0 (u + v)^{p-1} \quad \text{e} \quad g(|x|, u, v) \leq \sigma_0 (u + v)^{q-1}.$$

Sob as condições que impomos, as integrais

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_s^{+\infty} \left(1 + \frac{N-m}{m-1}\tau \right)^{\frac{m(1-N)}{N-m}} d\tau \right]^{\frac{1}{m-1}} ds, \quad \text{para } m = p, q,$$

são finitas, assim fica bem definido Λ o máximo desses valores.

No fim do capítulo veremos que algumas funções com potências adequadas satisfazem as hipóteses técnicas acima. Veremos em detalhes que algo do tipo

$$f(|x|, u, v) = v^{m(|x|)} \quad \text{e} \quad g(|x|, u, v) = u^{n(|x|)},$$

sob certas condições, tem esses comportamentos desejados.

Antes de mencionar os principais resultados, destacamos que neste caso as funções peso w_1, w_2 dependem, respectivamente, de u, v. Além disso, o operador diferencial principal (que está associado ao sistema) deixa de ser linear, fato que difere do estudo dos sistemas do Capítulo 2. Agora sim, com tais hipóteses, os principais resultados são:

Teorema 3.2. Suponha as hipóteses (H_8) e (H_9), com

$$\Lambda\left(\sigma_0^{\frac{1}{p-1}} + \sigma_0^{\frac{1}{q-1}}\right) < 1.$$

Então o sistemas (3) possui solução radialmente simétrica positiva.

No final de cada capítulo são apresentadas algumas aplicações para os principais teoremas.

Como fica fácil de perceber, para encontrar as soluções dos sistemas supracitados usamos primordialmente as referências [3] e [4], que não por acaso também são as principais referências deste trabalho. No entanto, muitas outras referências que estão citadas ao longo do texto também tiveram extrema importância fornecendo resultados fundamentais para as demonstrações dos teoremas que precedem o estabelecimento do objetivo final. Alguns desses resultados fundamentais foram colocados no Apêndice A juntamente com referências que foram úteis para consulta e revisão de alguns conteúdos, essas referências também podem ser encardas como sugestões de leituras.

CAPÍTULO 1

Teoremas de Ponto Fixo em Cones

Neste capítulo vamos apenas estabelecer alguns teoremas de ponto fixo sobre cones, dessa forma o leitor pode se sentir a vontade, caso deseje, para ir direto para o Capítulo 2, onde começamos as discussões sobre os Sistemas Elípticos. A título de contextualização, apresentamos uma visão geral sobre o índice de pontos fixos em cones justificando alguns resultados. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar [6] ou [9].

1.1 Retrações em Cones

Primeiro vamos recordar o grau de Leray-Schauder: seja Ω aberto e limitado de um espaço E de Banach real, F um operador compacto em Ω e $y \notin (I-F)(\partial\Omega)$, com $I : E \to E$ sendo a identidade. Para esses ternos admissíveis $(I-F, \Omega, y)$ o grua de Leray-Schauder, denotado por d, associa um valor inteiro que satisfaz as propriedades:

(d1) Normalização: $\mathrm{d}(I, \Omega, y) = 1$ para $y \in \Omega$;

(d2) Excisão: se Ω_1 e Ω_2 subconjuntos de Ω, abertos e disjuntos tais que $y \notin (I-F)(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, então

$$\mathrm{d}(I-F, \Omega, y) = \mathrm{d}(I-F, \Omega_1, y) + \mathrm{d}(I-F, \Omega_2, y);$$

(d3) Invariância por homotopia: se $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to E$ é compacto e $y : [0,1] \to E$ é contínua com $y(t) \notin (I-h(t,\cdot))(\partial\Omega)$ para todo $t \in [0,1]$, então

$$\mathrm{d}(I-h(t,\cdot),\Omega,y(t)) \text{ é constante para } t \in [0,1].$$

(d4) Temos que $\mathrm{d}(I-F,\Omega,y) \neq 0$ implica $(I-F)^{-1}(y) \neq \emptyset$.

Dizemos que o conjunto não-vazio C é um **cone** em um espaço de Banach $E = (E, \|\cdot\|)$ quando valem as seguintes propriedades

(i) $x, y \in C \Rightarrow x+y \in C$;

(ii) $\lambda > 0, x \in C \Rightarrow \lambda x \in C$;

(iii) $x \in C \setminus \{0\} \Rightarrow -x \notin C$.

Das propriedades (i) e (ii) segue automaticamente que

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in C,$$

para todos $x, y \in C$ e $\lambda \in [0,1]$, ou seja, todo cone C é convexo. Perceba também que 0 é aderente a C, de fato fixado $x_0 \in C$ temos que a sequência $\left(\frac{1}{n}x_0\right)$ está em C por (ii) e $\lim\limits_{n} \left(\frac{1}{n}x_0\right) = 0$. Quando um cone C contém a origem podemos considerar a seguinte ordem parcial

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in C,$$

da qual vamos denotar $x \lneq y$ quando $x \leq y$ e $x \neq y$. Diremos também que C faz de E um espaço de Banach monotônico se para todos $u, v \in C$, então $\|u\| \leq \|u+v\|$.

Doravante, diremos que uma aplicação $R : E \to E$ é uma **retração** de E sobre o conjunto $C \subset E$ não-vazio, quando R é contínua e satisfaz

(R1) $R(E) = C$;

(R2) $R(x) = x$, para todo $x \in C$,

e neste caso dizemos que C é um retrato de E. Quando C é um convexo fechado temos o seguinte resultado, cuja ideia é estender a identidade definida em um subconjunto do espaço, a seguir:

Lema 1.1. *Todo convexo fechado C é um retrato de E.*

Demonstração. Para cada $x \in E \setminus C$ seja B_x a bola de centro em x com $\mathrm{diam} B_x \leq \mathrm{dist}(B_x, C)$, isso é possível quando $B_x = B_r(x)$ com $r = \mathrm{dist}(x, C)/6$, por exemplo. Dessa forma

$$E \setminus C = \bigcup_{x \in E \setminus C} B_x,$$

essa cobertura admite um refinamento localmente finito $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, ou seja, uma cobertura aberta localmente finita de $E\setminus C$ tal que cada U_λ está contido em algum em algum B_x (sabe-se que todo espaço métrico é paracompacto, saiba mais sobre paracompacidade em [13] ou [9]). A cobertura ser localmente finita significa que para cada $x\in E\setminus C$ existe uma vizinhança $V(x)$ que intersecta apenas uma quantidade finita de abertos U_λ. Agora vamos definir

$$\varphi_\lambda(x)=\begin{cases} 0, & \text{se } x\notin U_\lambda \\ \operatorname{dist}(x,\partial U_\lambda), & \text{se } x\in U_\lambda \end{cases} \quad \text{e} \quad \psi_\lambda(x)=\frac{\varphi_\lambda(x)}{\sum\limits_{\mu\in\Lambda}\varphi_\mu(x)}.$$

Notamos que $\sum_\mu \varphi_\mu(x)>0$ em $E\setminus C$ e ψ_λ é contínua em $E\setminus C$, de fato para cada $x\in E\setminus C$, escolhendo a vizinhança $V(x)$ temos que $\sum_\mu \varphi_\mu(x)$ tem uma quantidade finita de parcelas não nulas. Ademais $0\le \psi_\lambda(x)\le 1$ e $\sum_\lambda \psi_\lambda(x)=1$.

Agora vamos definir $R:E\to E$ dada por

$$R(x)=\begin{cases} x, & \text{se } x\in C, \\ \sum_\lambda \psi_\lambda(x)a_\lambda, & \text{se } x\notin C, \end{cases}$$

onde cada a_λ foi escolhido adequadamente, a saber: uma vez que cada $U_\lambda\subset B_z$ para algum $z\in E\setminus C$, então $\operatorname{dist}(U_\lambda,C)\ge \operatorname{dist}(B_z,C)>0$, e pela definição de ínfimo podemos escolher $a_\lambda\in C$ tal que $\operatorname{dist}(a_\lambda,U_\lambda)<2\operatorname{dist}(U_\lambda,C)$ para cada $\lambda\in\Lambda$.

Para este escolha feita, vamos garantir que R é a extensão contínua de I, que por sua vez deve ser a retração desejada. Naturalmente, notamos que R é uma extensão de I com

$$R(E)\subset \operatorname{conv}(C)=C,$$

desde que C é convexo. Vale também que R é contínua no interior de C e no interior $E\setminus C$. Dessa forma, resta provar que R também é contínua em $\partial C\subset C$. Seja $x_0\in\partial C$, notemos que se $x\in C$ então

$$\|R(x)-R(x_0)\|=\|x-x_0\|.$$

Por outro lado, quando $x\in E\setminus C$ segue-se

$$\|R(x)-R(x_0)\|=\|R(x)-x_0\|=\left\|\sum_\lambda \psi_\lambda(x)a_\lambda-x_0\right\|\le \sum_\lambda \psi_\lambda(x)\|a_\lambda-x_0\|.$$

No caso em que $x\notin U_\lambda$ então temos $\psi_\lambda(x)=0$, dessa forma vamos trabalhar com o caso em que $x\in U_\lambda$. Consideramos $z\in E\setminus C$ tal que $U_\lambda\subset B_z$ e assim $\operatorname{diam} U_\lambda\le \operatorname{diam} B_z$, além disso afirmamos que vale a seguinte desigualdade

$$\|x-a_\lambda\|\le \operatorname{dist}(a_\lambda,U_\lambda)+\operatorname{diam} U_\lambda.$$

De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in U_\lambda$ tal que

$$\mathrm{dist}(a_\lambda, U_\lambda) + 1/n > \|y_n - a_\lambda\|.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \|x - a_\lambda\| &\leq \|x - y_n\| + \|y_n - a_\lambda\| \\ &\leq \mathrm{diam}\, U_\lambda + \mathrm{dist}(a_\lambda, U_\lambda) + 1/n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Passando ao limite quando $n \to +\infty$, obtemos a desigualdade afirmada, ainda mais, com ela e recordando que $\mathrm{diam}\, B_z \leq \mathrm{dist}(B_z, C)$ podemos obter que

$$\begin{aligned} \|x - a_\lambda\| &\leq \mathrm{dist}(a_\lambda, U_\lambda) + \mathrm{diam}\, U_\lambda \\ &\leq 2\mathrm{dist}(U_\lambda, C) + \mathrm{diam}\, B_z \\ &\leq 2\mathrm{dist}(U_\lambda, C) + \mathrm{dist}(B_z, C) \\ &\leq 2\mathrm{dist}(U_\lambda, C) + \mathrm{dist}(U_\lambda, C) \\ &= 3\mathrm{dist}(U_\lambda, C) \\ &\leq 3\|x - x_0\|. \end{aligned}$$

De onde segue-se que se $x \in U_\lambda$, então

$$\|a_\lambda - x_0\| \leq \|a_\lambda - x\| + \|x - x_0\| \leq 4\|x - x_0\|.$$

Portanto, quando $x \in U_\lambda$ temos

$$\|R(x) - R(x_0)\| \leq \|a_\lambda - x_0\| \leq 4\|x - x_0\|.$$

Conclusão: dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\delta = \varepsilon/4$, para conquistar que se $\|x - x_0\| < \delta$ então

$$\|R(x) - R(x_0)\| = \|x - x_0\| < \varepsilon \text{ quando } x \in C \quad \text{e}$$

$$\|R(x) - R(x_0)\| \leq 4\|x - x_0\| < \varepsilon \text{ quando } x \in E \setminus C.$$

Isto prova que R também é contínua em ∂C. ■

Esse demonstração foi retirada de [6] (Teorema 7.2) que é enunciado de maneira mais geral, considerando uma aplicação contínua definida em espaços lineares normados que podem ser distintos, no entanto nosso objetivo aqui é de apenas estender continuamente a identidade definida em um cone fechado.

A partir de agora C denotara um cone fechado ao qual, pelo último lema, podemos sempre considerar uma retração $R : E \to E$ de E sobre C. Agora vamos melhorar essa retração de modo que

Lema 1.2. *Existe uma retração R sobre C tal que $R(x) \neq 0$ para todo $x \in E \setminus \{0\}$.*

Demonstração. Inicialmente, pelo lema anterior, vamos considerar $R_0 : E \to E$ uma retração de E sobre C, desse modo R_0 é contínua, $R(E) = C$ e $R(x) = x$ para cada $x \in C$. Agora vamos definir $R : E \to E$ dada por

$$R(x) = R_0(x) + \|R_0(x) - x\|v, \text{ com } v \in C \setminus \{0\}.$$

De imediato já notamos que R é contínua, pois R_0 é contínua. Ainda mais, desde que $v \in C$ então $\|R_0(x) - x\|v \in C$ e por $R_0(x) \in C$ devemos ter $R(x) = R_0(x) + \|R_0(x) - x\|v \in C$, para cada $x \in E$. Logo, $R(E) \subset C$. Ademais, se $x \in C$ então $R_0(x) = x$ e daí

$$R(x) = R_0(x) + \|R_0(x) - x\|v = x + \|x - x\|v = x.$$

Dessa forma, R é uma retração de E sobre C.

Finalmente suponhamos que $R(x) = 0$ para algum $x \in E$, dessa forma temos

$$R_0(x) = -\|R_0(x) - x\|v \in -C.$$

Assim $R_0(x) \in C \cap (-C)$, acarretando que $R_0(x) = 0$ e daí $0 = -\|x\|v$. Uma vez $v \neq 0$, podemos concluir que $x = 0$. Por outro lado, como C é um cone fechado, então $0 \in C$ e vale que $R_0(0) = 0$, logo

$$R(0) = R_0(0) + \|R_0(0) - 0\|v = 0.$$

Portanto, provamos que $R(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$, ou seja $R(x) \neq 0$ para cada $x \neq 0$. ■

Com o lema que acabamos de provar, podemos conquistar uma retração R ainda melhor, no sentido de que além das propriedades (R1) e (R2) também vale

(R3) $\|R(x)\| = \|x\|$, para todo $x \in E$.

A construção dessa retração é feita na demonstração do seguinte resultado:

Lema 1.3. *Para C um cone fechado em um espaço de Banach E, existe uma retração de R de E sobre C tal que $\|R(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$.*

Demonstração. Pelo lema anterior, consideramos R_0 uma retração de E sobre C tal que $R_0(x) \neq 0$ para cada $x \neq 0$. Agora vamos definir $R : E \to E$ dada por

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{\|x\|}{\|R_0(x)\|} R_0(x), & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

É imediato que R é contínua em $E\setminus\{0\}$. Além disso, desde que $R_0(x)\in C$ segue-se que

$$R(x)=\frac{\|x\|}{\|R_0(x)\|}R_0(x)\in C,$$

de onde temos $R(E)\subset C$. Bem como, sendo $R(0)=0$ e para $x\in C\setminus\{0\}$ termos

$$R(x)=\frac{\|x\|}{\|R_0(x)\|}R_0(x)=\frac{\|x\|}{\|x\|}x=x.$$

Até agora já garantimos que R satisfaz as propriedades (R1) e (R2), ainda mais quando $x\in E\setminus\{0\}$ então

$$\|R(x)\|=\left\|\frac{\|x\|}{\|R_0(x)\|}R_0(x)\right\|=\|x\|,$$

logo R também satisfaz a propriedade (R3).

Por fim, resta garantir que R é contínua na origem. Com efeito, seja (x_n) uma sequência em E tal que $\lim\limits_n x_n=0$, isto é, dado $\varepsilon>0$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ de sorte que $\|x_n\|<\varepsilon$ para todo $n>n_0$, com isto

$$n>n_0\Rightarrow\|R(x_n)-0\|=\|R_n(x)\|=\|x_n\|<\varepsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_n R(x_n)=0=R(0)$. Da arbitrariedade da sequência (x_n) podemos concluir a continuidade de R em 0. ■

Doravante, pelos lemas estabelecidos até aqui, R denotará uma retração de E sobre o cone fechado C com as propriedades

(R1) $R(E)=C$,

(R2) $R(x)=x$, para todo $x\in C$,

(R3) $\|R(x)\|=\|x\|$, para todo $x\in E$.

Sejam Ω um subconjunto aberto no cone C, R uma retração de E em C e $f:\overline{\Omega}\to C$ um operador compacto tal que $x\neq f(x)$ para todo $x\in\partial\Omega$. Desejamos mostrar que o terno

$$(I-(f\circ R),R^{-1}(\Omega),0)$$

é admissível, isto é, podemos calcular o grau de Leray-Schauder. Fato que é garantido por

Lema 1.4. *Temos para Ω, R e f que:*

(a) $\Omega\subset R^{-1}(\Omega)$;

(b) $z\neq(f\circ R)(z)$, *para todo* $z\in\partial R^{-1}(\Omega)$;

(c) se $z=(f\circ R)(z)$, *então* $z\in\Omega$.

Demonstração. Sendo Ω aberto relativo em C, podemos escrever $\Omega = C \cap A$ para algum aberto A de E. Veja que como R é contínua, então $R^{-1}(\Omega)$ é um aberto em E e limitado uma vez que R satisfaz (R3). Ademais valem as igualdades

$$\Omega = C \cap R^{-1}(\Omega) \quad \text{e} \quad \partial\Omega = \partial R^{-1}(\Omega) \cap C \text{ (Fronteira Relativa).}$$

De fato, quando $x \in C$ e $x \in R^{-1}(\Omega)$ então

$$x = R(x) \in \Omega,$$

e por outro lado quando $x \in \Omega \subset C$ temos $x \in C$ e $R(x) = x \in \Omega$. Logo, valem $C \cap R^{-1}(\Omega) \subset \Omega$ e $\Omega \subset C \cap R^{-1}(\Omega)$. Assim, $\Omega \subset R^{-1}(\Omega)$, garantindo a validade de *(a)*. Ademais, para fronteira relativa $\partial\Omega = \partial R^{-1}(\Omega) \cap C$, temos: se $x \in \partial\Omega$ fronteira relativa, então existem sequências

$$(x_n) \subset \Omega \quad \text{e} \quad (y_n) \subset C \setminus \Omega$$

tais que $\lim x_n = x = \lim y_n$. Daí, $R(x_n) = x_n \in \Omega$ e assim $x_n \in R^{-1}(\Omega)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, $y_n \in C \cap \Omega^c$, donde $y_n \in R^{-1}(\Omega^c)$ e assim $y_n \in \left(R^{-1}(\Omega)\right)^c$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Concluindo que $x \in \partial R^{-1}(\Omega) \cap C$ e assim vale $\partial\Omega \subset \partial R^{-1}(\Omega) \cap C$. De maneira similar segue a inclusão contrária.

Observe que esta bem definida a aplicação $f \circ R : \overline{R^{-1}(\Omega)} \to C$, uma vez que vale a inclusão $\overline{R^{-1}(\Omega)} \subset R^{-1}(\overline{\Omega})$. Com efeito

$$\begin{aligned} x \in \overline{R^{-1}(\Omega)} &\Rightarrow \exists (w_n) \subset R^{-1}(\Omega)\,,\, w_n \to x \\ &\Rightarrow R(w_n) \in \Omega \subset C, \forall n \in \mathbb{N}, w_n \to x \\ &\Rightarrow R(w_n) \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}, R(w_n) \to R(x) \\ &\Rightarrow R(x) \in \overline{\Omega} \\ &\Rightarrow x \in R^{-1}(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

Mais ainda, se $z = (f \circ R)(z) \in C$, então $z \in C$ e consequentemente $z = R(z)$, donde $z = f(z)$ e portanto $z \in \Omega$. Com isso provamos *(c)*.

Por fim, para garantir *(b)* basta usar que $z \neq f(z)$ para todo $z \in \partial\Omega$ juntamente com a igualdade $\partial\Omega = \partial R^{-1}(\Omega) \cap C$. De fato, vale a implicação

$$z \neq f(R(z)), \forall R(z) \in \partial\Omega = \partial R^{-1}(\Omega) \cap C \Rightarrow$$

$$z \neq f(R(z)), \forall z = R(z) \in \partial R^{-1}(\Omega).$$

■

Com este resultado podemos calcular o grau de Leray-Schauder de $(I - (f \circ R), R^{-1}(\Omega), 0)$.

Com efeito, já sabemos que $R^{-1}(\Omega)$ é aberto e limitado e pelo lema acima garantimos que $I \neq (f \circ R)$ em $\partial R^{-1}(\Omega)$. Resta apenas notar que $f \circ R : \overline{R^{-1}(\Omega)} \to C$ é compacto. De fato, seja $(x_n) \subset \overline{R^{-1}(\Omega)}$ limitada, digamos $\|x_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, com $M > 0$. Já vimos que $\overline{R^{-1}(\Omega)} \subset R^{-1}(\overline{\Omega})$, dessa forma $(x_n) \subset R^{-1}(\overline{\Omega})$ e assim

$$R(x_n) \in \overline{\Omega}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainda mais, pela propriedade (R3) temos

$$\|R(x_n)\| = \|x_n\| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, pela compacidade de f, existe $(R(x_{n_j}))$ subsequência de $(R(x_n))$ de tal sorte que a sequência

$$f(R(x_{n_j})) = (f \circ R)(x_{n_j})$$

é convergente. Portanto $f \circ R$ é compacto.

Além de tudo isso, a boa notícia é que o cálculo do grau de Leray-Schauder independe da retração R considerada, isto é,

Lema 1.5. *Sejam R e R_1 duas retrações satisfazendo (R1), (R2) e (R3), f um operador compacto tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in \partial\Omega$. Então*

$$\mathrm{d}(I - (f \circ R), R^{-1}(\Omega), 0) = \mathrm{d}(I - (f \circ R_1), R_1^{-1}(\Omega), 0).$$

Demonstração. Sendo $A = R^{-1}(\Omega) \cap R_1^{-1}(\Omega)$ um aberto contendo Ω, por (a) e (b) do Lema 1.4 temos

$$z \neq (f \circ R)(z), \forall z \in \partial R^{-1}(\Omega) \quad \text{e} \quad z = (f \circ R)(z) \Rightarrow z \in \Omega \subset A.$$

Daí,

$$z \neq (f \circ R)(z), \forall z \in \overline{R^{-1}(\Omega)} \setminus A.$$

Consequentemente $0 \notin (I - (f \circ R))^{-1} \left(\overline{R^{-1}(\Omega)} \setminus A\right)$ e pela propriedade da excisão do grau de Leray-Schauder temos

$$\mathrm{d}(I - (f \circ R), R^{-1}(\Omega), 0) = \mathrm{d}(I - (f \circ R), A, 0).$$

De maneira análoga obtemos

$$\mathrm{d}(I - (f \circ R_1), R_1^{-1}(\Omega), 0) = \mathrm{d}(I - (f \circ R_1), A, 0).$$

Desse modo, nosso trabalho se resume a provar que

$$\mathrm{d}(I - (f \circ R), A, 0) = \mathrm{d}(I - (f \circ R_1), A, 0).$$

Para tanto, considere a homotopia $h : [0,1] \times \overline{A} \to E$ dada por

$$h(t,z) = tf(R(z)) + (1-t)f(R_1(z)).$$

Notamos que h é compacta e se $z - h(t,z) = 0$, então

$$z = tf(R(z)) + (1-t)f(R_1(z)) \in C,$$

uma vez que $f(R(z)) \in C$ e $f(R_1(z)) \in C$. Dessa forma, $R(z) = z = R_1(z)$ e assim

$$z = tf(z) + (1-t)f(z) = tf(z) + f(z) - tf(z) = f(z).$$

Desde que $z \neq f(z)$ para todo $z \in \partial\Omega$, deve seguir que $z \in \Omega$ e assim $z \notin \partial A$. Concluímos que $0 \notin (I - h(t,\cdot), \partial A)$ para cada $t \in [0,1]$. Finalmente, observando que

$$I - h(0,\cdot) = I - (f \circ R_1) \quad \text{e} \quad h(1,\cdot) = I - (f \circ R),$$

segue da propriedade (d3) que

$$\mathrm{d}(I - (f \circ R), A, 0) = \mathrm{d}(I - (f \circ R_1), A, 0).$$

Pelo que vimos anteriormente isso encerra a demonstração. ■

1.2 Índice e Teoremas de Ponto Fixo

Finalmente após toda essa formalização podemos definir bem o **Índice de Ponto Fixo em Cones**: considerando C um cone fechado no espaço de Banach E, definimos o conjunto admissível

$$\Sigma_C = \left\{(f,\Omega) \,:\, \Omega \text{ aberto limitado, } f : \overline{\Omega} \to C \text{ compacto tal que } x \neq f(x) \text{ em } \partial\Omega\right\}.$$

Agora definimos o índice de ponto fixo no cone C como sendo $\mathrm{i} : \Sigma_C \to \mathbb{Z}$ e dado por

$$\mathrm{i}(f,\Omega) = \mathrm{d}(I - (f \circ R), R^{-1}(\Omega), 0),$$

onde R é uma retração de E sobre C com as propriedades (R1), (R2) e (R3). Note que este grau independe da retração R tomada, fato que é garantido pelo Lema 1.5.

Fixe a notação

$$C_r = B_r(0) \cap C = \{x \in C;\, \|x\| < r\}.$$

Um fato admirável é que o índice de ponto fixo em cones herda propriedades análogas a (d1), (d2), (d3) e (d4), a saber (i1) $\mathrm{i}(0, C_r) = 1$;

(i2) Quando Ω_1 e Ω_2 são subconjuntos disjuntos de Ω e $\Omega_1 \cap \Omega_2 \subset \Omega$, $\overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2} \subset \Omega$ e $f(x) \neq x$ em $\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)$, então
$$\mathrm{i}(f, \Omega) = \mathrm{i}(f, \Omega_1) + \mathrm{i}(f, \Omega_2);$$

(i3) Se $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to C$ é uma homotopia compacta e $x \neq h(t,x)$ em $x \in \partial\Omega$, então
$$\mathrm{i}(h(t,\cdot), \Omega) \text{ é constante para } t \in [0,1].$$

(i4) Temos que $\mathrm{i}(f, \Omega) \neq 0$ implica que f tem ponto fixo.

A justificativa da propriedade (i1) é automática. Para mostrar (i2) usamos as propriedades da imagem inversa para notar que $R^{-1}(\Omega_1)$ e $R^{-1}(\Omega_2)$ satisfazem as condições mencionadas em (d2), observando que se $x \in \overline{R^{-1}(\Omega)} \setminus \left(R^{-1}(\Omega_1) \cup R^{-1}(\Omega_2)\right)$, então, por *(c)* do Lema 1.4, deve valer $x \neq (f \circ R)(x)$ e assim

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}(f, \Omega) &= \mathrm{d}(I - (f \circ R), R^{-1}(\Omega), 0) \\
&= \mathrm{d}(I - (f \circ R), R^{-1}(\Omega_1), 0) + \mathrm{d}(I - (f \circ R), R^{-1}(\Omega_2), 0) \\
&= \mathrm{i}(f, \Omega_1) + \mathrm{i}(f, \Omega_2).
\end{aligned}$$

Provamos (i3) notando que $h(t.\cdot) \circ R$ é compacto para cada $t \in [0,1]$ e, pelo item *(b)* do Lema 1.4, $I \neq h(t,\cdot) \circ R$ em $\partial R^{-1}(\Omega)$ para cada $t \in [0,1]$, segue então de (d3) que

$$\mathrm{d}(I - (h(t,\cdot) \circ R), R^{-1}(\Omega), 0) = i(h(t,\cdot), \Omega)$$

é constante com $t \in [0,1]$. Por fim, para provar (i4), notamos que

$$0 \neq \mathrm{i}(f, \Omega) = \mathrm{d}(I - (f \circ R), R^{-1}, 0).$$

Logo, por (d4), segue que $(I - (f \circ R))^{-1}(0) \neq \emptyset$, assim existe $x \in R^{-1}(\Omega)$ de tal sorte que $(I - (f \circ R))(x) = 0$, consequentemente

$$x = I(x) = (f \circ R)(x) = f(R(x)) \in C.$$

Portanto vale $x = f(x)$.

Agora sem mais delongas, veremos alguns teoremas usando essa teoria:

Teorema 1.1. *Sejam E um espaço de Banach monotônico, um cone $C \subset E$, $F : \overline{C_r} \to C$ uma aplicação contínua e compacta tal que existam $0 < \rho < r$ satisfazendo*

(a) $\|F(x)\| < \|x\|$ para todo $x \in C$ com $\|x\| = r$;

(b) $\|F(x)\| > \|x\|$ *para todo* $x \in C$ *com* $\|x\| = \rho$.

Então F *possui um ponto fixo* x *tal que* $\rho < \|x\| < r$.

Demonstração. Da condição (a) se $\|x\| = r$ então

$$\|x - F(x)\| \geq |\|x\| - \|F(x)\|| > 0,$$

assim $x - F(x) \in C \setminus \{0\}$. Ainda mais para cada $t \in [0,1]$ temos

$$\|tF(x)\| = t\|F(x)\| \leq \|F(x)\| < \|x\|,$$

de onde $x \neq tF(x)$. Consequentemente,

$$\mathrm{i}(F, C_r) = \mathrm{i}(tF, C_r) = i(0, C_r) = 1.$$

Agora vamos calcular $\mathrm{i}(F, C_\rho)$. Para isto, seja $\sigma = \sup\{F(x)\,;\, x \in C_\rho\}$ e fixemos $\phi \in C$ tal que $\|\phi\| > \sigma + p$. Ademais, considere a homotopia $H : [0,1] \times C \to C$ dada por $H(t,x) = F(x) + t\phi$. Vejamos que H é uma homotopia admissível. De fato, como o cone C faz de E monotônico e usando (b), para $\|x\| = \rho$ temos

$$\|x\| < \|F(x)\| \leq \|F(x) + t\phi\|, \forall t \in [0,1].$$

Portanto $\mathrm{i}(H(t,\cdot), C_\rho)$ é constante em $[0,1]$. Ainda mais, como

$$\|x - F(x)\| \leq \|x\| + \|F(x)\| \leq \rho + \sigma < \|\phi\|,$$

ou seja, $x \neq F(x) + \phi$, para todo $\|x\| \leq \rho$. Isto mostra que $\mathrm{i}(H(1,\cdot), C_\rho) = 0$. Assim, podemos finalmente notar que

$$0 = \mathrm{i}(H(1,\cdot), C_\rho) = \mathrm{i}(H(0,\cdot), C_\rho) = \mathrm{i}(F, C_\rho).$$

Portanto, usando a propriedade (i2) temos

$$\mathrm{i}(F, C_r \setminus C_\rho) = \mathrm{i}(F, C_r) - \mathrm{i}(F, C_\rho) = 1 - 0 = 1.$$

Logo, por (i4), existe $\rho < \|x\| < r$ um ponto fixo de F. ■

Com argumentos similares demonstramos que

Teorema 1.2. *Seja* E *um espaço de Banach,* $0 < \rho < r$, *um cone fechado* $C \subset E$ *e* $F : \overline{C_r} \to C$ *uma aplicação compacta e contínua tal que*

(a) $tF(x) \neq x$ *para todo* $\|x\| = r$ *e* $t \in [0,1]$*;*

(b) existe $v \in C \setminus \{0\}$ tal que $x - F(x) \neq \lambda v$ para todo $\|x\| = \rho$ e $\lambda > 0$.

Então F tem um ponto fixo x tal que $\rho \leq \|x\| \leq r$.

Demonstração. Da hipótese (a) temos que $h(t,x) = tF(x)$ é uma homotopia admissível, logo

$$\mathrm{i}(F,C_r) = \mathrm{i}(h(1,\cdot),C_r) = \mathrm{i}(h(0,\cdot),C_r) = \mathrm{i}(0,C_r) = 1.$$

Por outro lado, da hipótese (b) temos $H(\lambda,x) = F(x) + \lambda v$ também é uma homotopia admissível. Daí,

$$\mathrm{i}(F,C_\rho) = \mathrm{i}(H(0,\cdot),C_\rho) = \mathrm{i}(H(\lambda,\cdot),C_\rho), \forall \lambda > 0.$$

Como $F(\overline{C_\rho})$ é limitado, existe $\sigma > 0$ tal que $\|F(x)\| \leq \sigma$ para todo $\|x\| \leq \rho$. Observe que para $\|x\| \leq \rho$ temos

$$\|x - F(x)\| \leq \|x\| + \|F(x)\| \leq \rho + \sigma < \lambda_0 \|v\| = \|\lambda_0 v\|$$

para λ_0 suficientemente grande, ou seja, $x = H(\lambda,x)$ não possuí solução em $\overline{C_\rho}$ e portanto $\mathrm{i}(H(\lambda_0,\cdot),C_\rho) = 0$. Agora,

$$\mathrm{i}(F,C_r \setminus \overline{C_\rho}) = \mathrm{i}(F,C_r) - i(F,C_\rho) = 1.$$

Implicando que

$$\mathrm{d}(I - (F \circ R), R^{-1}(C_r \setminus C_\rho), 0) = 1.$$

Daí, por (i4), existe $\rho < |x| < r$ de tal sorte que $x = F(x)$. ■

Trocando r por ρ o resultado é o mesmo e a demonstração é feita de maneira análoga. Deste último teorema também podemos provar o próximo resultado.

Teorema 1.3. *Sejam E um espaço de Banach, $C \subset E$ um cone fechado e $F : \overline{C_r} \to C$ uma aplicação compacta e contínua tal que existe $0 < \rho < r$ satisfazendo*

(a) $F(x) \nleq x$ para todo $\|x\| = r$;

(b) $F(x) \ngeq x$ para todo $\|x\| = \rho$.

Então F possui um ponto fixo tal que $\rho < \|x\| < r$.

Demonstração. A condição (a) implica que se $\|x\| = r$, então $x - F(x) \in C$ com $x \neq F(x)$. Assim,

$$x - tF(x) = x - F(x) + (1-t)F(x) \in C \setminus \{0\}, \forall t \in [0,1],$$

mostrando que vale a condição (a) do Teorema 1.2.

Já a condição (b) implica que se $\|x\| = \rho$, então $F(x) - x \in C \setminus \{0\}$. Neste caso, fixado qualquer $v \in C$ não nulo, temos

$$F(x) + \lambda v - x = F(x) - x + \lambda v \in C \setminus \{0\}, \forall \lambda > 0.$$

Logo, também vale a condição (b) do Teorema 1.2. Portanto o resultado segue. ■

Para finalizar, também apresentaremos a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii, o leitor também pode encontrar o sketch dessa demonstração em [14]:

Teorema 1.4 (Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii)**.** *Sejam C um cone em um espaço de Banach $E = (E, \|\cdot\|)$, $F : C \to C$ um operador compacto tal que $F(0) = 0$, e*

(a) existe algum $r > 0$ tal que $x \neq \sigma F(x)$, para todo $\|x\| = r$ e $\sigma \in [0,1]$;

(b) existe uma homotopia compacta $H : [0,1] \times C \to C$ tal que $H(0,x) = F(x)$, para todo $x \in C$;

(c) existe $R > r$ tal que $H(\zeta, x) \neq x$, para cada $\|x\| = R$ e $\zeta \in [0,1]$;

(d) $H(1,x) \neq x$, para todo $\|x\| \leq R$.

Então, F tem um ponto fixo tal que $x \in C$ e $r < \|x\| < R$.

Demonstração. Considere as notações já usadas nos resultados anteriores. Pela hipótese (d) já podemos obter que

$$\mathrm{i}(H(1,\cdot), C_R) = 0.$$

Ademais, temos que H é uma homotopia compacta com $H(0,\cdot) = F$ pela hipótese (b). Além disso, segue de (c) que

$$x \neq H(\zeta, x), \forall x \in \partial C_R, t \in [0,1].$$

Logo, pela propriedade (i3) do índice de pontos fixos em cones temos que $\mathrm{i}(H(\zeta,\cdot), C_R)$ é constante para todo $\zeta \in [0,1]$. Implicando que

$$\mathrm{i}(F, C_R) = \mathrm{i}(H(0,\cdot), C_R) = \mathrm{i}(H(1,\cdot), C_R) = 0.$$

Por outro lado, considerando a homotopia compacta $h(t,x) = tF(x)$, segue-se que tal homotopia é admissível e que vale

$$\mathrm{i}(F, C_r) = \mathrm{i}(h(1,\cdot), C_r) = \mathrm{i}(h(0,\cdot), C_r) = \mathrm{i}(0, C_r) = 1.$$

Por fim, juntando todas as informações obtidas e usando a propriedade (i2), deve valer que

$$\mathrm{i}(F, C_R \setminus C_r) = \mathrm{i}(F, C_R) - \mathrm{i}(F, C_r) = 0 - 1 = -1.$$

Consequentemente, por (i4), F tem um ponto fixo em $C_R \setminus C_r$, ou seja, existe $x \in C$ tal que $F(x) = x$ com $r < \|x\| < R$. ■

Observação 1.1. Destacamos que neste último teorema, não necessariamente a homotopia H precisa estar definida em $[0,1] \times C$, também é possível considerar H definida em $[0,\zeta_0] \times C$, desde que H ainda seja compacta, $H(0,u) = F(u)$ e que $H(\zeta_0, u) \neq u$ para qualquer $\|u\| \leq R$.

CAPÍTULO 2

Sistemas Elípticos Envolvendo Divergente com Peso

2.1 Hipóteses Técnicas

De acordo com as ideias de [3] vamos resolver o sistema elíptico

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u) = |x|^{\beta_1} f(|x|,u,v), & x \in B, \\ -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_2}\nabla v) = |x|^{\beta_2} g(|x|,u,v), & x \in B, \\ \quad u(x) = 0 = v(x), \quad x \in \partial B, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $B = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1\}$, os expoentes satisfazem $\beta_1 - \alpha_1 > -2$ e $\beta_2 - \alpha_2 > -2$, e as não-linearidades

$$f, g : [0,1] \times [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$$

são funções contínuas.

Estamos interessados em estabelecer a existências de soluções radialmente simétricas e positivas para o Sistema (2.1). Para tanto, vamos estabelecer algumas hipóteses fundamentais.

Para listar as hipóteses precisamos conhecer as funções $a_i : (0,1] \to [0,+\infty)$ dadas por

$$a_i(r) = \frac{r^{2-N-\alpha_i} - 1}{N + \alpha_i - 2}, \quad i = 1,2.$$

Podemos notar que a_i são funções contínuas, injetoras e definidas em um intervalo da Reta. Dessa forma, existem as funções inversas $r_{\alpha_i} : [0,+\infty) \to (0,1]$, cujas leis de formação são dadas por

$$r_{\alpha_i}(t) = (1+(N+\alpha_i-2)t)^{\frac{1}{2-(N+\alpha_i)}}, \quad i=1,2.$$

Observação 2.1. Consideramos que os expoentes $2-N-\alpha_i$, para $i=1,2$, são negativos.

Também é importante notar que a_i e r_{α_i} são funções decrescentes. Ademais, será útil conhecer a derivada de r_{α_i}, assim calculamos

$$\begin{aligned} r'_{\alpha_i}(t) = \frac{d}{dt} r_{\alpha_i}(t) &= \frac{1}{2-(N+\alpha_i)} (1+(N+\alpha_i-2)t)^{\frac{1}{2-(N+\alpha-i)}-1} (N+\alpha_i-2) \\ &= -(1+(N+\alpha_i-2)t)^{\frac{N+\alpha_i-1}{2-(N+\alpha_i)}} \\ &= -r_{\alpha_i}^{N+\alpha_i-1}(t), \quad i=1,2. \end{aligned}$$

Em alguns momentos no decorrer do texto será usado que, para $\alpha_2 > \alpha_1$, temos que as composições de funções $a_2 r_{\alpha_1}$ e $a_1 r_{\alpha_2}$ valem

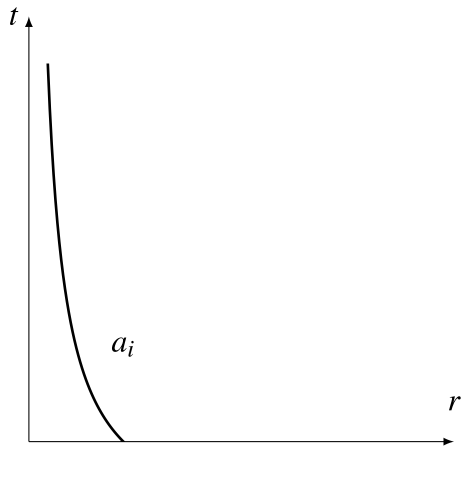
$$a_2 r_{\alpha_1}(s) \geq s \quad \text{e} \quad s \geq a_1 r_{\alpha_2}(s),$$

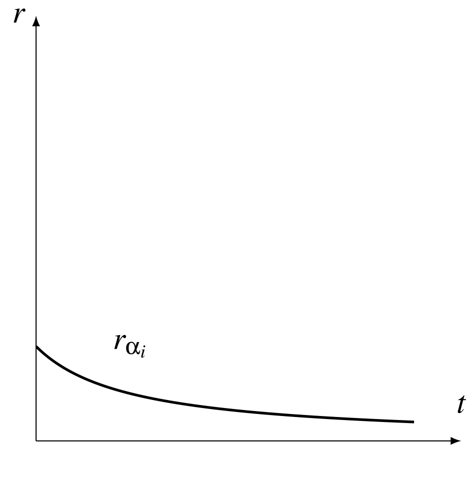
para todo s suficientemente grande. De fato, perceba que para s suficientemente grande as funções a_i e r_{α_i} se comportam como potências, por exemplo:

$$a_2 r_{\alpha_1}(s) \approx \left(s^{\frac{1}{2-(N+\alpha_1)}}\right)^{2-N-\alpha_2} = s^{\frac{2-N-\alpha_2}{2-(N+\alpha_1)}} \geq s,$$

para o caso em que $\alpha_2 > \alpha_1$. De maneira similar obtemos a segunda desigualdade.

A título de curiosidade, apesar dos gráficos não serem usados nas demonstrações, conhecer os gráficos de a_i e de r_{α_i} pode auxiliar no melhor entendimento do leitor, assim como foi para os autores deste trabalho, a saber:





Tendo em mente os esboços dos gráficos de a_i e r_{α_i}, não é difícil se convencer de que

$$\lim_{s\to+\infty} a_2 r_{\alpha_1}(s) = +\infty = \lim_{s\to+\infty} a_1 r_{\alpha_2}(s). \tag{2.2}$$

Continuando, vamos considerar que existem $\overline{f}, \overline{g} : [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ funções crescentes no sentido de que fixado $v \geq 0$ a função $u \mapsto \overline{f}(u,v)$ é monótona não-decrescente e fixado $u \geq 0$ também tenhamos que $v \mapsto \overline{f}(u,v)$ é monótona não-decrescente. Isto equivale a termos $\overline{f}(u,v) \leq \overline{f}(u_1,v_1)$ quando $(u,v) \leq (u_1,v_1)$, ou seja,

$$\overline{f}(u,v) \leq \overline{f}(u_1,v) \leq \overline{f}(u_1,v_1)$$

onde $u \leq u_1$ e $v \leq v_1$.

Sabendo que $\beta_1 - \alpha_1 > -2$ e $\beta_2 - \alpha_2 > -2$, considere λ_1 e $\hat{\lambda}_1$ os primeiros autovalores, respectivamente, associados aos problemas de autovalor

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla\phi) = \lambda|x|_1^{\beta}\phi, & \text{em } B \\ \phi = 0, & \text{sobre } \partial B \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_2}\nabla\psi) = \hat{\lambda}|x|^{\beta_2}\psi, & \text{em } B \\ \psi = 0, & \text{sobre } \partial B \end{cases},$$

dos quais consideramos $\phi_1 > 0$ e $\psi_1 > 0$ autofunções associadas a λ_1 e $\hat{\lambda}_1$, respectivamente. Ainda mais, existe $\sigma \geq 1$ de tal sorte que $\sigma^{-1}\phi_1 \leq \psi_1 \leq \sigma\phi_1$ (veja o Apêndice A).

Finalmente, vamos admitir as seguintes hipóteses:

(H_1) Temos

$$\lim_{u+v\to+\infty} \frac{\overline{f}(u,v) + \overline{g}(u,v)}{u+v} = +\infty,$$

que é equivalente a: para qualquer $M > 0$ existe $c > 0$ tal que

$$\overline{f}(u,v) + \overline{g}(u,v) \geq M(u+v) - c, \forall u,v \geq 0.$$

(H_ϕ) Existe $\overline{s}$ tal que

$$\frac{\overline{f}(As, Ba_2r_{\alpha_1}(s)) + \overline{g}(Aa_1r_{\alpha_2}(s), Bs)}{\overline{f}(A,B) + \overline{g}(A,B)} \leq \phi(s)$$

para todo $s \geq \overline{s}$ e todos $A,B > 0$, onde $\phi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é uma função que satisfaz

$$\int_1^{+\infty} \phi(s) s^{\frac{N+\beta_i}{2-(N+\alpha_i)}} \, ds < +\infty, \quad i = 1,2.$$

(H_2) Para $\lambda = \min\{\lambda_1, \hat{\lambda}_1\}$, supomos que existem σ_0 e s_0 satisfazendo

$$0 < \sigma_0\sigma < \frac{\lambda}{1+\sigma} \quad \text{e} \quad s_0 > 0,$$

onde $\sigma \geq 1$ verifica $\sigma^{-1}\phi_1 \leq \psi_1 \leq \sigma\phi_1$, e tais que se $0 \leq u,v \leq s_0$, então

$$f(|x|,u,v) + g(|x|,u,v) \leq \sigma_0(u+v).$$

(LH) Existem constantes $c_f, c_g > 0$ e $0 < \delta < 1$ tal que se $r \in [0, \delta]$, então

$$\overline{f}(u,v) \leq f(r,u,v) \leq c_f \overline{f}(u,v), \forall u,v \geq 0$$

e

$$\overline{g}(u,v) \leq g(r,u,v) \leq c_g \overline{g}(u,v), \forall u,v \geq 0.$$

Observação 2.2. A hipótese (H_2) vale caso tenhamos

$$\lim_{u+v \to 0^+} \frac{f(r,u,v)+g(r,u,v)}{u+v} = 0 \text{ uniformemente, onde } r \in [0,1].$$

Observação 2.3. Ao longo da próxima seção, em decorrência das mudanças de variáveis usadas, aparecem as funções

$$G_i(s) = (1+(N+\alpha_i-2)s)^{\frac{2N+\alpha_i+\beta_i-2}{2-(N+\alpha_i)}}, \quad i = 1,2.$$

Essas funções possuem propriedades muito importantes para os resultados da próxima seção, que diz respeito a estimativa a priori. Além de que destacamos uma importante relação das funções G_i com a hipótese (H_ϕ), que em verdade será a maneira com a qual a hipótese (H_ϕ) será usado nesse trabalho: para todo $\bar{s}$ suficientemente grande (G_i se comporta como potência de s) temos

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{s}}^{+\infty} s\phi(s)G_i(s)ds &\approx \int_{\bar{s}}^{+\infty} s\phi(s)s^{\frac{2N+\alpha_i+\beta_i-2}{2-(N+\alpha_i)}} ds \\
&= \int_{\bar{s}} \phi(s)s^{\frac{2N+\alpha_i+\beta_i-2}{2-(N+\alpha_i)}+1} ds \\
&\leq \int_1^{+\infty} \phi(s)s^{\frac{N+\beta_i}{2-(N+\alpha_i)}} ds < +\infty.
\end{aligned}$$

2.2 Estimativa a Priori

Após considerarmos as hipóteses técnicas vamos localizar as soluções desejadas no seguinte sentido, supondo a existência de soluções vamos provar que o conjunto formado por tais soluções é limitado.

Primeiro vamos supor que existe uma solução clássica (u,v) de (2.1) com u e v radialmente simétricas, isto é, podemos escrever $u(x) = u(r)$ e $v(x) = v(r)$ onde $r = |x|$. Para fixar ideias vamos realizar os cálculos com $u(x) = u(r)$:

$$\nabla u(x) = \left(u'(r)\frac{x_1}{r}, ..., u'(r)\frac{x_N}{r}\right), \quad r > 0,$$

e daí temos

$$|x|^{\alpha_1} \nabla u(x) = \left(r^{\alpha_1 - 1}u'(r)x_1, ..., r^{\alpha_1 - 1}u'(r)x_N\right).$$

Agora, notando que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(r^{\alpha_1-1}u'(r)x_j) = r^{\alpha_1-1}u'(r) + x_j\left[r^{\alpha_1-1}u''(r)\frac{x_j}{r} + u'(r)(\alpha_1-1)r^{\alpha_1-2}\frac{x_j}{r}\right]$$
$$= r^{\alpha_1-1}u'(r) + r^{\alpha_1-1}u''(r)\frac{x_j^2}{r} + u'(r)(\alpha_1-1)r^{\alpha_1-2}\frac{x_j^2}{r},$$

podemos obter

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u(x)) &= -\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}(r^{\alpha_1-1}u'(r)x_j)\\
&= -\left[Nr^{\alpha_1-1}u'(r) + r^{\alpha_1-1}u''(r)\frac{r^2}{r} + u'(r)(\alpha_1-1)r^{\alpha_1-2}\frac{r^2}{r}\right]\\
&= -\left[Nr^{\alpha_1-1}u'(r) + r^{\alpha_1}u''(r) + u'(r)(\alpha_1-1)r^{\alpha_1-1}\right]\\
&= -\left[(N+\alpha_1-1)u'(r)r^{\alpha_1-1} + r^{\alpha_1}u''(r)\right].
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a primeira igualdade em (2.1), notamos que

$$-\left[(N+\alpha_1-1)u'(r)r^{\alpha_1-1} + r^{\alpha_1}u''(r)\right] = r^{\beta_1}f(r,u,v).$$

Daí, multiplicando toda a igualdade por r^{N-1}, conquistamos

$$r^{N+\beta_1-1}f(r,u,v) = -\left[(N+\alpha_1-1)u'(r)r^{N+\alpha_1-2} + r^{N+\alpha_1-1}u''(r)\right] = -(r^{N+\alpha_1-1}u'(r))',$$

onde a derivação diz respeito a variável r.

Realizando um procedimento análogo ao que foi feito, trocando u por v e f por g, também obtemos

$$\begin{aligned}
r^{N+\beta_2-1}g(r,u,v) &= -\left[(N+\alpha_2-1)v'(r)r^{N+\alpha_2-2} + r^{N+\alpha_2-1}v''(r)\right]\\
&= -\frac{d}{dr}\left(r^{N+\alpha_2-1}v'(r)\right)\\
&= -\left(r^{N+\alpha_2-1}v'(r)\right)'.
\end{aligned}$$

Com isto podemos reescrever o Sistema (2.1) na forma

$$\begin{cases}
-\left(r^{N+\alpha_1-1}u'(r)\right)' = r^{N+\beta_1-1}f(r,u,v), & r\in(0,1),\\
-\left(r^{N+\alpha_2-1}v'(r)\right)' = r^{N+\beta_2-1}g(r,u,v), & r\in(0,1),\\
u(1)=u'(0)=0,\ v(1)=v'(0)=0.
\end{cases} \tag{2.3}$$

Observação 2.4. Vamos justificar que $u'(0)=0$. Com efeito, tomando arbitrariamente $y\in\mathbb{R}^N$ e definindo a função $h(t)=u(ty)$ podemos notar que h é par, pois estamos considerando que u

é radialmente simétrica. Ademais, h é de classe C^1 e valem

$$0 = \frac{h(t)-h(-t)}{t} = \frac{h(t)-h(0)+h(0)-h(-t)}{t} = \frac{h(t)-h(0)}{t} + \frac{h(-t)-h(0)}{-t}.$$

De onde devemos ter

$$0 = \lim_{t\to 0}\left(\frac{h(t)-h(0)}{t} + \frac{h(-t)-h(0)}{-t}\right) = h'(0)+h'(0) = 2h'(0).$$

Consequentemente $h'(0) = 0$, e portanto

$$0 = h'(0) = \langle \nabla u(0), y\rangle.$$

Desde que $y \in \mathbb{R}^N$ é arbitrário, podemos concluir que $\nabla u(0) = 0$.

Agora vamos prosseguir com as mudanças de variáveis

$$t = a_i(r) \quad \text{e} \quad z(t) = u(r_{\alpha_1}(t)),\, w(t) = v(r_{\alpha_2}(t)).$$

Recordando que

$$r'_{\alpha_i}(t) = -r_{\alpha_1}^{N+\alpha_1-1}(t),$$

segue-se

$$\begin{aligned}
-z''(t) &= -\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}u(r_{\alpha_1}(t))\right]\\
&= -\frac{d}{dt}\left[-u'(r_{\alpha_1}(t))r_{\alpha_1}^{N+\alpha_1-1}(t)\right]\\
&= -r_{\alpha_1}^{N+\alpha_1-1}(t)u''(r_{\alpha_1}(t))r_{\alpha_1}^{N+\alpha_1-1}(t) - u'(r_{\alpha_1}(t))(N+\alpha_1-1)r_{\alpha_1}^{N+\alpha_1-2}(t)r_{\alpha_1}^{N+\alpha_1-1}(t)\\
&= -r_{\alpha_1}^{N+\alpha_1-1}(t)\frac{d}{dr_{\alpha_1}}\left[-r_{\alpha_1}^{N+\alpha_1-1}(t)u'(r_{\alpha_1}(t))\right].
\end{aligned}$$

Daí podemos substituir a primeira igualdade (2.3) nesta última igualdade para obter que

$$\begin{aligned}
-z''(t) &= r_{\alpha_1}^{N+\alpha_1-1}(t)r_{\alpha_1}^{N+\beta_1-1}(t)f(r_{\alpha_1}(t),u(r_{\alpha_1}(t)),v(r_{\alpha_1}(t))\\
&= r_{\alpha_1}^{2(N-1)+\alpha_1+\beta_1}(t)f(r_{\alpha_1}(t),u(r_{\alpha_1}(t)),v(r_{\alpha_1}(t))).
\end{aligned}$$

De maneira exatamente análoga podemos obter

$$\begin{aligned}
-w''(t) &= r_{\alpha_2}^{N+\alpha_2-1}(t)r_{\alpha_2}^{N+\beta_2-1}(t)g(r_{\alpha_2}(t),u(r_{\alpha_2}(t)),v(r_{\alpha_2}(t)))\\
&= r_{\alpha_2}^{2(N-1)+\alpha_2+\beta_2}(t)g(r_{\alpha_2}(t),u(r_{\alpha_2}(t)),v(r_{\alpha_2}(t))).
\end{aligned}$$

Com estas igualdades podemos reescrever o Sistema (2.3) na forma

$$\begin{cases} -z''(t) = r_{\alpha_1}^{2(N-1)+\alpha_1+\beta_1}(t) f(r_{\alpha_1}(t), u(r_{\alpha_1}(t)), v(r_{\alpha_1}(t))), & t \in (0,+\infty), \\ -w''(t) = r_{\alpha_2}^{2(N-1)+\alpha_2+\beta_2}(t) g(r_{\alpha_2}(t), u(r_{\alpha_2}(t)), v(r_{\alpha_2}(t))), & t \in (0,+\infty), \\ \quad z(0) = z'(+\infty) = 0,\, w(0) = w'(+\infty) = 0. \end{cases}$$

Note que as condições iniciais foram obtidas de

$$z(0) = u(r_{\alpha_1}(0)) = u(1) = 0 \quad \text{e} \quad w(0) = v(r_{\alpha_2}(0)) = v(1) = 0,$$

bem como de

$$z'(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} z'(t) = \lim_{t\to+\infty} -u'(r_{\alpha_1}(t)) r_{\alpha_1}^{N+\alpha_1-1}(t) = 0 \quad \text{e}$$

$$w'(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} w'(t) = \lim_{t\to+\infty} -w'(r_{\alpha_2}(t)) r_{\alpha_2}^{N+\alpha_2-1}(t) = 0.$$

Observando que

$$w(a_2 r_{\alpha_1}(t)) = v(r_{\alpha_2} a_2(r_{\alpha_1}(t))) = v(r_{\alpha_1}(t))$$

e

$$z(a_1 r_{\alpha_2}(t)) = u(r_{\alpha_1} a_1(r_{\alpha_2}(t))) = u(r_{\alpha_2}(t)),$$

e usando a expressão de r_{α_i} vista anteriormente podemos novamente reescrever o sistema anterior na forma

$$\begin{cases} -z''(t) = G_1(t) f(r_{\alpha_1}(t), z(t), w(a_2 r_{\alpha_1}(t))), & t \in (0,+\infty), \\ -w''(t) = G_2(t) g(r_{\alpha_2}(t), z(a_1 r_{\alpha_2}(t)), w(t)), & t \in (0,+\infty), \\ z(0) = z'(+\infty) = 0,\, w(0) = w'(+\infty) = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

onde

$$G_1(t) = (1 + (N+\alpha_1-2)t)^{\frac{2N+\alpha_1+\beta_1-2}{2-(N+\alpha_1)}} \quad \text{e} \quad G_2(t) = (1 + (N+\alpha_2-2)t)^{\frac{2N+\alpha_2+\beta_2-2}{2-(N+\alpha_2)}}.$$

Finalmente, integrando as igualdades do Sistema (2.4) e usando os dados iniciais, conquistamos o seguinte sistema de integrais

$$\begin{cases} z(t) = \displaystyle\int_0^t \int_s^{+\infty} G_1(\tau) f(r_{\alpha_1}(\tau), z(\tau), w(a_2 r_{\alpha_1}(\tau)))\, d\tau ds \\ w(t) = \displaystyle\int_0^t \int_s^{+\infty} G_2(\tau) g(r_{\alpha_2}(\tau), z(a_1 r_{\alpha_2}(\tau)), w(\tau))\, d\tau ds. \end{cases} \tag{2.5}$$

Vamos prosseguir considerando o espaço

$$X = \left\{(z,w) \in C([0,+\infty),\mathbb{R})^2 \text{ tal que z e w são funções limitadas}\right\}$$

com a norma da soma $\|(z,w)\| = |z|_\infty + |w|_\infty$. onde $|h|_\infty = \sup_{t\geq 0} h(t)$. Definimos o operador

$F : X \to X$ dado por

$$F(z,w)(t) = (A(z,w)(t), B(z,w)(t)) \tag{2.6}$$

onde

$$A(z,w)(t) = \int_0^t \int_s^{+\infty} G_1(\tau) f(r_{\alpha_1}(\tau), z(\tau), w(a_2 r_{\alpha_1}(\tau)))\, d\tau ds,$$
$$B(z,w)(t) = \int_0^t \int_s^{+\infty} G_2(\tau) g(r_{\alpha_2}(\tau), z(a_1 r_{\alpha_2}(\tau)), w(\tau))\, d\tau ds.$$

Observação 2.5. É muito importante notar que os pontos fixos do operador F são soluções radialmente simétricas não negativas do Sistema (2.1).

De fato, sendo (z,w) um ponto fixo de F devemos ter

$$(z(t), w(t)) = F(z,w)(t) = (A(z,w)(t), B(z,w)(t)),$$

e consequentemente deve valer

$$z(t) = A(z,w)(t) \quad \text{e} \quad w(t) = B(z,w)(t).$$

Para fixar ideias vamos trabalhar com esta primeira igualdade: considere a notação

$$\Gamma(t) = \int_t^{+\infty} G_1(\tau) f(r_{\alpha_1}(\tau), z(\tau), w(a_2 r_{\alpha_1}(\tau))) d\tau$$

e note que

$$\frac{\Gamma(t+h) - \Gamma(t)}{h} = -\frac{1}{h} \int_t^{t+h} G_1(\tau) f(r_{\alpha_1}(\tau), z(\tau), w(a_2 r_{\alpha_1}(\tau)))\, d\tau,$$

passando ao limite quando $h \to 0$, sendo G_1 e f contínuas, obtemos

$$\Gamma'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\Gamma(t+h) - \Gamma(t)}{h} = -G_1(t) f(r_{\alpha_1}(t), z(t), w(a_2 r_{\alpha_1}(t))).$$

Assim, podemos aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo para obter

$$z'(t) = \int_t^{+\infty} G_1(\tau) f(r_{\alpha_1}(\tau), z(\tau), w(a_2 r_{\alpha_1}(\tau)))\, d\tau = \Gamma(t).$$

Além disso, pelo que foi visto

$$z''(t) = \Gamma'(t) = -G_1(t) f(r_{\alpha_1}(t), z(t), w(a_2 r_{\alpha_1}(t))).$$

De maneira análoga, obtemos que

$$w''(t) = \lim_{h \to 0} \frac{w'(t+h) - w'(t)}{h} = -G_2(t) g(r_{\alpha_2}(t), z(a_1 r_{\alpha_2}(t)), w(t)).$$

Dessa forma z e w são soluções do Sistema (2.4) e, consequentemente, são soluções de (2.1).

Observação 2.6. Outra fato importante também justifica a escolha das desigualdades $\beta_i - \alpha_i > -2$. De fato, dela valem

$$\frac{N+\beta_i}{N+\alpha_i-2} > 1 \Rightarrow \frac{N+\beta_i}{2-(N+\alpha_i)} < -1 < 0.$$

Ainda mais, vale

$$\frac{N+\beta_i}{2-(N+\alpha_i)} + 1 < 0 \Rightarrow \frac{2+\beta_i-\alpha_i}{2-(N+\alpha_i)} < 0.$$

Esta estimativas vão nos ajudar a provar que o operador F está bem definido e é compacto.

Lema 2.1. *O operador F é bem definido e é completamente contínuo.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_s^{+\infty} G_i(\tau)\,d\tau\right) ds < +\infty, \quad i = 1,2.$$

Com efeito, vale que

$$\begin{aligned}
\int_s^{+\infty} G_i(\tau)\,d\tau &= \lim_{b\to\infty}\int_s^b G_i(\tau)\,d\tau \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_s^b (1+(N+\alpha_i-2)\tau)^{\frac{2N+\alpha_i+\beta_i-2}{2-(N+\alpha_i)}}\,d\tau \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{N+\alpha_i-2}\,\frac{(1+(N+\alpha_i-2)\tau)^{\frac{2N+\alpha_i+\beta_i-2}{2-(N+\alpha_i)}+1}}{\frac{2N+\alpha_i+\beta_i-2}{2-(N+\alpha_i)}+1}\right]\Bigg|_s^b \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{N+\alpha_i-2}\,\frac{2-(N+\alpha_i)}{N+\beta_i}(1+(N+\alpha_i-2)\tau)^{\frac{N+\beta_i}{2-(N+\alpha_i)}}\right]\Bigg|_s^b.
\end{aligned}$$

De onde, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_s^{+\infty} G_i(\tau)\,d\tau &= -\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{N+\beta_i}(1+(N+\alpha_i-2)b)^{\frac{N+\beta_i}{2-(N+\alpha_i)}}\right] + \frac{1}{N+\beta_i}(1+(N+\alpha_i-2)s)^{\frac{N+\beta_i}{2-(N+\alpha_i)}} \\
&= \frac{1}{N+\beta_i}(1+(N+\alpha_i-2)s)^{\frac{N+\beta_i}{2-(N+\alpha_i)}}.
\end{aligned}$$

Aqui usamos a relação entre α_i e β_i vista na Observação 2.6. Agora com esta igualdade prosseguimos

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\left(\int_s^{+\infty} G_i(\tau)\,d\tau\right) ds &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{N+\beta_i}(1+(N+\alpha_i-2)s)^{\frac{N+\beta_i}{2-(N+\alpha_i)}}\,ds \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} \frac{1}{N+\beta_i}(1+(N+\alpha_i-2)s)^{\frac{N+\beta_i}{2-(N+\alpha_i)}}\,ds \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{N+\beta_i}\frac{1}{N+\alpha_i-2}\frac{(1+(N+\alpha_i-2)s)^{\frac{N+\beta_i}{2-(N+\alpha_i)}+1}}{\frac{N+\beta_i}{2-(N+\alpha_i)}+1}\right]\Bigg|_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{N+\beta_i}\frac{1}{N+\alpha_i-2}\frac{2-(N+\alpha_i)}{2+\beta_i-\alpha_i}(1+(N+\alpha_i-2)s)^{\frac{2+\beta_i-\alpha_i}{2-(N+\alpha_i)}}\right]\Bigg|_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{(N+\beta_i)(2+\beta_i-\alpha_i)}(1+(N+\alpha_i-2)s)^{\frac{2+\beta_i-\alpha_i}{2-(N+\alpha_i)}}\right]\Bigg|_0^b \\
&= \frac{1}{(N+\beta_i)(2+\beta_i-\alpha_i)} < +\infty,\ i=1,2.
\end{aligned}
$$

Aqui usamos novamente as estimativas vistas na Observação 2.6. Dessa forma, o operador F está bem definido.

Prosseguimos provando que F é contínuo: seja (z_n,w_n) uma sequência em X tal que $\|(z_n,w_n)-(z_0,w_0)\|\to 0$ quando $n\to\infty$, para algum $(z_0,w_0)\in X$. Agora observe que

$$
\begin{aligned}
|F(z_n,w_n)(t)-F(z_0,w_0)(t)| &= |(A(z_n,w_n)(t),B(z_n,w_n)(t))-(A(z_0,w_0)(t),B(z_0,w_0)(t))| \\
&= |(A(z_n,w_n)(t)-A(z_0,w_0)(t),B(z_n,w_n)(t)-B(z_0,w_0)(t))| \\
&\le |A(z_n,w_n)(t)-A(z_0,w_0)(t)|+|B(z_n,w_n)(t)-B(z_0,w_0)(t)|.
\end{aligned}
$$

Ademais, temos

$$
\begin{aligned}
|(A(z_n,w_n)(t)-A(z_0,w_0)(t)| &= \bigg|\int_0^t\int_s^{+\infty} G_1(\tau)f(r_{\alpha_1}(\tau),z_n(\tau),w_n(a_2r_{\alpha_1}(\tau)))\,d\tau ds \\
&\qquad - \int_0^t\int_s^{+\infty} G_1(\tau)f(r_{\alpha_1}(\tau),z_0(\tau),w_0(a_2r_{\alpha_1}(\tau)))\,d\tau ds\bigg| \\
&\le \int_0^{+\infty}\bigg|\int_s^{+\infty} G_1(\tau)f(r_{\alpha_1}(\tau),z_n(\tau),w_n(a_2r_{\alpha_1}(\tau)))\,d\tau \\
&\qquad - \int_s^{+\infty} G_1(\tau)f(r_{\alpha_1}(\tau),z_0(\tau),w_0(a_2r_{\alpha_1}(\tau)))\,d\tau\bigg|\,ds \\
&= \int_0^{+\infty}|\Gamma_n(s)-\Gamma_0(s)|\,ds,
\end{aligned}
$$

onde

$$
\Gamma_n(s)=\int_s^{+\infty} G_1(\tau)f(r_{\alpha_1}(\tau),z_n(\tau),w_n(a_2r_{\alpha_1}(\tau)))\,d\tau \quad \text{e}
$$

$$
\Gamma_0(s)=\int_s^{+\infty} G_1(\tau)f(r_{\alpha_1}(\tau),z_0(\tau),w_0(a_2r_{\alpha_1}(\tau)))\,d\tau.
$$

De maneira inteiramente análoga podemos escrever

$$|B(z_n,w_n)(t)-B(z_0,w_0)(t)| \leq \int_0^{+\infty} |\Lambda_n(s)-\Lambda_0(s)|\,ds,$$

com

$$\Lambda_n(s)=\int_s^{+\infty} G_2(\tau)g(r_{\alpha_2}(\tau),z_n(a_1r_{\alpha_2}(\tau)),w_n(\tau))\,d\tau \quad \text{e}$$

$$\Lambda_0(s)=\int_s^{+\infty} G_2(\tau)g(r_{\alpha_2}(\tau),z_0(a_1r_{\alpha_2}(\tau)),w_0(\tau))\,d\tau.$$

Note que da convergência $\|(z_n,w_n)-(z_0,w_0)\| \to 0$ podemos obter que $|z_n-z_0|_\infty \to 0$ e que $|w_n-w_0|_\infty \to 0$ quando $n\to\infty$. Consequentemente, sendo f e g funções contínuas, podemos concluir que $\Gamma_n(s)\to\Gamma_0(s)$ e $\Lambda_n(s)\to\Lambda_0(s)$ são convergências pontuais. Além disso, para $\|(z_n,w_n)\|\leq c_0$, considerando

$$M_1=\max\{f(r,t,s)\,:\,0\leq r\leq 1,\,0\leq t,s\leq c_0\} \quad \text{e}$$

$$M_2=\max\{g(r,t,s)\,:\,0\leq r\leq 1,\,0\leq t,s\leq c_0\},$$

podemos obter que

$$\begin{aligned}|\Gamma_n(s)| &\leq \int_s^{+\infty} |G_1(\tau)f(r_{\alpha_1}(\tau),z_n(\tau),w_n(a_2r_{\alpha_1}(\tau)))|\,d\tau\\ &\leq M_1\int_s^{+\infty} G_1(\tau)\,d\tau,\ \forall s\in[0,+\infty),\end{aligned}$$

com

$$M_1\int_0^{+\infty}\left(\int_s^{+\infty} G_1(\tau)d\tau\right)ds<+\infty.$$

Outrossim,

$$|\Lambda_n(s)|\leq M_2\int_s^{+\infty} G_2(\tau)d\tau,\ \forall s\in[0,+\infty),$$

com

$$M_2\int_0^{+\infty}\left(\int_s^{+\infty} G_2(\tau)d\tau\right)ds<+\infty.$$

Desse modo, aplicamos duas vezes o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obter que

$$\int_0^{+\infty}|\Gamma_n(s)-\Gamma_0(s)|\,ds\to 0 \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty}|\Phi_n(s)-\Phi_0(s)|\,ds\to 0$$

quando $n\to+\infty$. Com isto, provamos que $\|F(z_n,w_n)-F(z_0,w_0)\|\to 0$, garantindo que F é contínuo.

Por fim, resta provar que F é completamente contínuo. Considerando (z_n,w_n) uma sequência em X com $\|(z_n,w_n)\|\leq c_0$, novamente com as constante M_1 e M_2 definidas anteriormente, obtemos as estimativas

$$
\begin{aligned}
|A(z_n,w_n)(t)| &= \left| \int_0^t \int_s^{+\infty} G_1(\tau) f(r_{\alpha_1}(\tau), z_n(\tau), w_n(a_2 r_{\alpha_1}(\tau)))\, d\tau ds \right| \\
&\leq \int_0^t \int_s^{+\infty} G_1(\tau) |f(r_{\alpha_1}(\tau), z_n(\tau), w_n(a_2 r_{\alpha_1}(\tau)))|\, d\tau ds \\
&\leq M_1 \int_0^t \int_s^{+\infty} G_1(\tau)\, d\tau ds
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{d}{dt} A(z_n,w_n)(t) \right| &= \left| \int_t^{+\infty} G_1(\tau) f(r_{\alpha_1}(\tau), z_n(\tau), w_n(a_2 r_{\alpha_1}(\tau)))\, d\tau \right| \\
&\leq \int_t^{+\infty} G_1(\tau) |f(r_{\alpha_1}(\tau), z_n(\tau), w_n(a_2 r_{\alpha_1}(\tau)))|\, d\tau \\
&\leq M_1 \int_0^{+\infty} G_1(\tau)\, d\tau.
\end{aligned}
$$

Dessa forma,

$$
(A(z_n,w_n)) \quad \text{e} \quad \left(\frac{d}{dt} A(z_n,w_n) \right)
$$

são limitadas. Logo, a sequência de funções $(A(z_n,w_n))$ é equicontínua e equilimitada.

Até este momento podemos usar o Teorema de Arzelá-Ascoli para obter uma subsequência de $(A(z_n,w_n))$ que converge uniformemente em partes compactas de $[0,+\infty)$. No entanto, desejamos uma subsequência que convirja uniformemente em toda a semirreta $[0,+\infty)$. A boa notícia é que podemos alcançar o objetivo desejado usando uma propriedade adicional de que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $T > 0$ de sorte que

$$
\int_T^{+\infty} \left(\int_s^{+\infty} G_i(\tau) d\tau \right) ds < \varepsilon, \quad \text{para } i = 1,2.
$$

Dessa forma, para cada $k \in \mathbb{N}$ exites $T_k > k$ de tal sorte que

$$
\int_{T_k}^{+\infty} \int_s^{+\infty} G_1(\tau) d\tau ds < \frac{1}{2M_1 k}.
$$

Por outro lado, afirmamos que para cada $k \in \mathbb{N}$ a sequência $(A(z_n,w_n))$ possui uma subsequência que converge uniformemente em $[0,T_k]$: de fato, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli existe $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $(A(z_n,w_n))_{n\in\mathbb{N}_1}$ converge uniformemente em $[0,T_1]$. Novamente pelo Teorema de Arzelá-Ascoli existe $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ infinito, com $n_1 = \min \mathbb{N}_1 < n_2 = \min \mathbb{N}_2$, tal que $(A(z_n,w_n))_{n\in\mathbb{N}_2}$ converge uniformemente em $[0,T_2]$. Prosseguindo com esta construção podemos obter

$$
\mathbb{N}_k \subset \mathbb{N}_{k-1} \subset \cdots \subset \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N},
$$

infinitos e com $n_{k-1} = \min \mathbb{N}_{k-1} < n_k = \min \mathbb{N}_{\Bbbk}$, tal que $(A(z_n,w_n))_{n\in\mathbb{N}_k}$ converge uniformemente em $[0, T_k]$. Daí, para o conjunto de índices

$$N_A = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$$

afirmamos que $(A(z_n, w_n))_{n \in N_A}$ converge uniformemente em $[0, +\infty)$. Com efeito, para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/k < \varepsilon/2$, já vimos que $(A(z_n, w_n))_{n \in \mathbb{N}_K}$ deve ser uniformemente de Cauchy em $[0, T_k]$, isto é, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ de sorte que

$$|A(z_n, w_n)(t) - A(z_m, w_m)(t)| < \varepsilon/2, \forall t \in [0, +\infty), \text{ para } n, m \in \mathbb{N}_k \text{ com } n, m \geq n_0.$$

Logo, se $t \leq T_k$ então já temos

$$|A(z_n, w_n)(t) - A(z_m, w_m)(t)| < \varepsilon/2 < \varepsilon, \text{ para } n, m \in \mathbb{N}_A \text{ com } n, m \geq n_0.$$

Por outro lado, quando $t \geq T_k$ notamos que

$$\begin{aligned}
|A(z_n, w_n)(t) - A(z_m, w_m)(t)| &\leq |A(z_n, w_n)(T_k) - A(z_m, w_m)(T_k)| + 2M_1 \int_{T_k}^{+\infty} \int_s^{+\infty} G_1(\tau) d\tau ds \\
&< \varepsilon/2 + 2M_1 \frac{1}{2M_1 k} \\
&\leq \varepsilon, \text{ para } n, m \in N_A \text{ com } n, m \geq n_0.
\end{aligned}$$

De maneira análoga, para a sequência $(B(z_n, w_n))$ podemos construir um conjunto $\mathbb{N}_B$ adequado de índices de tal sorte que $(B(z_n, w_n))_{n \in \mathbb{N}_B}$ converge uniformemente em $[0, +\infty)$.

Com as subsequências de $(A(z_n, w_n))$ e $(B(z_n, w_n))$ obtemos uma subsequência de $(F(z_n, w_n))$ uniformemente converge em $[0, +\infty)$. Assim fica provado que F é completamente contínuo. ■

A próxima observação é bastante importante para os resultados que vem logo a seguir, por meio dele vamos calcular algumas integrais e realizar estimativas fundamentais nas demonstrações que seguem:

Observação 2.7. Será conveniente saber que

$$\int_0^{+\infty} \tau G_i(\tau) d\tau < +\infty, \quad \text{para } i = 1, 2.$$

De fato, fazendo a mudança de variáveis $y = 1 + (N + \alpha_i - 2)\tau$ podemos obter

$$\frac{dy}{N + \alpha_i - 2} = d\tau \quad \text{e} \quad \tau = (y-1)\frac{1}{N + \alpha_i - 2},$$

ademais $\tau = 0$ implica que $y = 1$ e quando $\tau \to +\infty$ então $y \to +\infty$. Com isto conquistamos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \tau G_i(\tau)d\tau &= \int_0^{+\infty} \tau(1+(N+\alpha_i-2)\tau)^{\frac{2N+\beta_i+\alpha_i-2}{2-(N+\alpha_i)}}\, d\tau \\
&= \int_1^{+\infty} (y-1)\frac{1}{N+\alpha_i-2} y^{\frac{2N+\beta_i+\alpha_i-2}{2-(N+\alpha_i)}} \frac{dy}{N+\alpha_i-2} \\
&= \frac{1}{(N+\alpha_i-2)^2}\int_1^{+\infty} \left(y^{\frac{2N+\beta_i+\alpha_i-2}{2-(N+\alpha_i)}+1} - y^{\frac{2N+\beta_i+\alpha_i-2}{2-(N+\alpha_i)}} \right) dy \\
&= \frac{1}{(N+\alpha_i-2)^2}\int_1^{+\infty} \left(y^{\frac{N+\beta_i}{2-(N+\alpha_i)}} - y^{\frac{2N+\beta_i+\alpha_i-2}{2-(N+\alpha_i)}} \right) dy \\
&= \frac{1}{(N+\alpha_i-2)^2} \left(y^{\frac{N+\beta_i}{2-(N+\alpha_i)}+1} - y^{\frac{2N+\beta_i+\alpha_i-2}{2-(N+\alpha_i)}+1} \right)\Bigg|_1^{+\infty} \\
&= \frac{1}{(N+\alpha_i-2)^2} \left(y^{\frac{2+\beta_i-\alpha_i}{2-(N+\alpha_i)}} - y^{\frac{N+\beta_i}{2-(N+\alpha_i)}} \right)\Bigg|_1^{+\infty}.
\end{aligned}$$

Logo, pela Observação 2.6 os expoentes do lado direito desta última desigualdade são negativos, concluímos que as integrais são finitas.

Com esta observação segue imediatamente, se (z_n, w_n) é uma sequência em X, então para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, podemos considerar

$$M_n = \max\{f(r,z,t) : (r,z,w) \in [0,1] \times [0,|z_n|_\infty] \times [0,|w_n|_\infty]\},$$

e assim,

$$s\int_s^{+\infty} G_1(\tau) f(r_{\alpha_1}(\tau), z_n(\tau), w_n(a_2 r_{\alpha_1}(\tau)))d\tau \le M_n \int_s^{+\infty} \tau G_1(\tau)d\tau.$$

Consequentemente, sabendo pela Observação 2.7 que a integral do lado direito da desigualdade é finita, devemos ter

$$\lim_{s\to+\infty} s\int_s^{+\infty} G_1(\tau) f(r_{\alpha_1}(\tau), z_n(\tau), w_n(a_2 r_{\alpha_1}(\tau)))d\tau = 0.$$

Por razões análogas temos

$$\lim_{s\to+\infty} s\int_s^{+\infty} G_2(\tau) g(r_{\alpha_2}(\tau), z_n(a_1 r_{\alpha_2}(\tau)), w_n(\tau))d\tau = 0,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado.

Teorema 2.1. *Supondo as hipóteses (H_1), (H_ϕ) e (LH) com $\alpha_1 = \alpha_2$. Então o conjunto dos pontos fixos do operador F é limitado, ou seja, existe $K > 0$ tal que*

$$\|(z,w)\| \le K, \textit{ para cada } (z,w) \in X \textit{ satisfazendo } F(z,w) = (z,w).$$

Demonstração. Vamos supor por contradição que exista uma sequência (z_n, w_n) de pontos fixos do operador F tal que $\|(z_n, w_n)\| \to +\infty$. Como (z_n, w_n) são pontos fixos de F então podemos escrever

$$\begin{cases} z_n(t) = \displaystyle\int_0^t \int_s^{+\infty} G_1(\tau) f(r_{\alpha_1}(\tau), z_n(\tau), w_n(a_2 r_{\alpha_1}(\tau)))\, d\tau ds \\ w_n(t) = \displaystyle\int_0^t \int_s^{+\infty} G_2(\tau) g(r_{\alpha_2}(\tau), z_n(a_1 r_{\alpha_2}(\tau)), w_n(\tau))\, d\tau ds, \end{cases} \tag{2.7}$$

e daí podemos notar que z_n e w_n são funções não-decrescentes, contínuas e côncavas.

Definido a função

$$\theta_n(\tau) = 2[z_n(\tau) + w_n(\tau)], \text{ para } \tau \geq 0,$$

podemos notar que $\theta_n(0) = 0$ e

$$\lim_{\tau\to\infty} \theta_n(\tau) = 2\left[\lim_{\tau\to\infty} z_n(\tau) + \lim_{\tau\to\infty} w_n(\tau)\right] = 2(|z_n|_\infty + |w_n|_\infty) > \|(z_n, w_n)\|.$$

Logo, sendo θ_n contínua pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $\tau_n \in [0, +\infty)$ de tal sorte que

$$2[z_n(\tau_n) + w_n(\tau_n)] = \theta_n(\tau_n) = \|(z_n, w_n)\|.$$

Afirmação 2.1.1. Existe uma subsequência de (τ_n) que converge para $+\infty$.

Para provar a afirmação vamos supor

$$0 < \sup_{n\in\mathbb{N}} \{\tau_n\} = S < +\infty$$

e notar que

$$2\,[z_n(S) + w_n(S)] \geq 2\,[z_n(\tau_n) + w_n(\tau_n)] = \|(z_n, w_n)\|.$$

Pela igualdades vistas em (2.7) devemos ter

$$\begin{aligned} z_n(S) + w_n(S) = &\int_0^S \int_s^{+\infty} G_1(\tau) f(r_{\alpha_1}(\tau), z_n(\tau), w_n(a_2 r_{\alpha_1}(\tau)))\, d\tau ds \\ &+ \int_0^S \int_s^{+\infty} G_2(\tau) g(r_{\alpha_2}(\tau), z_n(a_1 r_{\alpha_2}(\tau)), w_n(\tau))\, d\tau ds. \end{aligned}$$

Agora, escolhendo $T > 0$ suficientemente grande tal que

$$r_{\alpha_1}(\tau) < \delta \quad \text{e} \quad r_{\alpha_2}(\tau) < \delta, \quad \forall \tau \geq T,$$

podemos usar a hipótese (LH) para obter que

$$\overline{f}(z_n(S), w_n(a_2 r_{\alpha_a}(S))) \leq f(r_{\alpha_1}(S), z_n(S), w_n(a_2 r_{\alpha_a}(S))) \quad \text{e}$$

$$\overline{g}(z_n(a_1 r_{\alpha_2}(S)), w_n(S)) \leq g(r_{\alpha_2}(S), z_n(a_1 r_{\alpha_2}(S)), w_n(S)).$$

Com isto temos

$$z_n(S)+w_n(S) \geq S\left[\overline{f}(z_n(S),w_n(a_2 r_{\alpha_a}(S)))+\overline{g}(z_n(a_1 r_{\alpha_2}(S)),w_n(S))\right]\int_T^{+\infty}\min\{G_1(\tau),G_2(\tau)\}\,d\tau.$$

Logo, usando que $\alpha_1=\alpha_2$ devemos ter

$$1 \geq \frac{\overline{f}(z_n(S),w_n(S))+\overline{g}(z_n(S),w_n(S))}{z_n(S)+w_n(S)} S\int_T^{+\infty}\min\{G_1(\tau),G_2(\tau)\}d\tau.$$

Esta desigualdade é uma contradição com a hipótese (H_1). Portanto, a afirmação está provada. Doravante vamos considerar $\tau_n \to +\infty$.

Da expressão

$$2[z_n(\tau_n)+w_n(\tau_n)] = \|(z_n,w_n)\| = |z_n|_\infty + |w_n|_\infty$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}2[z_n(\tau_n)+w_n(\tau_n)] = &\int_0^{+\infty}\int_s^{+\infty} G_1(\tau)f(r_{\alpha_1}(\tau),z_n(\tau),w_n(a_2 r_{\alpha_1}(\tau)))\,d\tau ds\\ &+\int_0^{+\infty}\int_s^{+\infty} G_2(\tau)g(r_{\alpha_2}(\tau),z_n(a_1 r_{\alpha_2}(\tau)),w_n(\tau))\,d\tau ds.\end{aligned}$$

Para simplificar os cálculos vamos adotar a notação

$$h_n(s)=\int_s^{+\infty} G_1(\tau)f(r_{\alpha_1}(\tau),z_n(\tau),w_n(a_2 r_{\alpha_1}(\tau)))\,d\tau \quad \text{e}$$

$$g_n(s)=\int_s^{+\infty} G_2(\tau)g(r_{\alpha_2}(\tau),z_n(a_1 r_{\alpha_2}(\tau)),w_n(\tau))\,d\tau.$$

Desse modo, temos as implicações

$$2\left[\int_0^{\tau_n} h_n(s)\,ds+\int_0^{\tau_n} g_n(s)\,ds\right] = \int_0^{+\infty} h_n(s)\,ds+\int_0^{+\infty} g_n(s)\,ds \Rightarrow$$

$$2\int_0^{\tau_n} h_n(s)\,ds+2\int_0^{\tau_n} g_n(s)\,ds = \int_0^{+\infty} h_n(s)\,ds+\int_0^{+\infty} g_n(s)\,ds \Rightarrow$$

$$\int_0^{\tau_n} h_n(s)\,ds+\int_0^{\tau_n} h_n(s)\,ds+\int_0^{\tau_n} g_n(s)\,ds+\int_0^{\tau_n} g_n(s)\,ds = \int_0^{+\infty} h_n(s)\,ds+\int_0^{+\infty} g_n(s)\,ds \Rightarrow$$

$$\int_0^{\tau_n} h_n(s)\,ds+\int_0^{\tau_n} g_n(s)\,ds = \left(\int_0^{+\infty} h_n(s)\,ds-\int_0^{\tau_n} h_n(s)\,ds\right)+\left(\int_0^{+\infty} g_n(s)\,ds-\int_0^{\tau_n} g_n(s)\,ds\right) \Rightarrow$$

$$\int_0^{\tau_n} h_n(s)\,ds+\int_0^{\tau_n} g_n(s)\,ds = \int_{\tau_n}^{+\infty} h_n(s)\,ds+\int_{\tau_n}^{+\infty} g_n(s)\,ds. \tag{2.8}$$

Prosseguimos performando integração por partes para computar cada uma das integrais desta última igualdade: fazendo

$$\begin{cases} \eta = h_n(s) \\ d\theta = ds \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\eta = -G_1(s)f(r_{\alpha_1}(s), z_n(s), w_n(a_2 r_{\alpha_1}(s)))\,ds \\ \theta = s \end{cases}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_n} h_n(s)\,ds &= [sh_n(s)]|_0^{\tau_n} - \int_0^{\tau_n} s[-G_1(s)f(r_{\alpha_1}(s), z_n(s), w_n(a_2 r_{\alpha_1}(s)))]\,ds \\ &= \tau_n h_n(\tau_n) + \int_0^{\tau_n} sG_1(s)f(r_{\alpha_1}(s), z_n(s), w_n(a_2 r_{\alpha_1}(s)))\,ds \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\tau_n}^{+\infty} h_n(s)\,ds &= [sh_n(s)]|_{\tau_n}^{+\infty} - \int_{\tau_n}^{+\infty} s[-G_1(s)f(r_{\alpha_1}(s), z_n(s), w_n(a_2 r_{\alpha_1}(s)))]\,ds \\ &= \lim_{s\to+\infty}[sh_n(s)] - \tau_n h_n(\tau_n) + \int_{\tau_n}^{+\infty} sG_1(s)f(r_{\alpha_1}(s), z_n(s), w_n(a_2 r_{\alpha_1}(s)))\,ds \\ &= -\tau_n h_n(\tau_n) + \int_{\tau_n}^{+\infty} sG_1(s)f(r_{\alpha_1}(s), z_n(s), w_n(a_2 r_{\alpha_1}(s)))\,ds. \end{aligned}$$

Note que nesta última igualdade usamos os limites calculados na Observação 2.7.

De maneira análoga, fazendo:

$$\begin{cases} \eta = g_n(s) \\ d\theta = ds \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\eta = -G_2(\tau)g(r_{\alpha_2}(\tau), z_n(a_1 r_{\alpha_2}(\tau)), w_n(\tau))\,ds \\ \theta = s \end{cases}$$

conquistamos

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_n} g_n(s)\,ds &= [sg_n(s)]|_0^{\tau_n} - \int_0^{\tau_n} s[-G_2(\tau)g(r_{\alpha_2}(\tau), z_n(a_1 r_{\alpha_2}(\tau)), w_n(\tau))\,ds \\ &= \tau_n g_n(\tau_n) + \int_0^{\tau_n} sG_2(\tau)g(r_{\alpha_2}(\tau), z_n(a_1 r_{\alpha_2}(\tau)), w_n(\tau))\,ds \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\tau_n}^{+\infty} g_n(s)\,ds &= [sg_n(s)]|_{\tau_n}^{+\infty} - \int_{\tau_n}^{+\infty} s[-G_2(\tau)g(r_{\alpha_2}(\tau), z_n(a_1 r_{\alpha_2}(\tau)), w_n(\tau))\,ds]\,ds \\ &= \lim_{s\to+\infty}[sg_n(s)] - \tau_n g_n(\tau_n) + \int_{\tau_n}^{+\infty} sG_2(\tau)g(r_{\alpha_2}(\tau), z_n(a_1 r_{\alpha_2}(\tau)), w_n(\tau))\,ds \\ &= -\tau_n g_n(\tau_n) + \int_{\tau_n}^{+\infty} sG_2(\tau)g(r_{\alpha_2}(\tau), z_n(a_1 r_{\alpha_2}(\tau)), w_n(\tau))\,ds. \end{aligned}$$

Novamente usamos a Observação 2.7.

Substituindo as expressões obtidas por meio das integrações por partes na igualdade (2.8), segue-se

$$\begin{aligned}
2\tau_n[h_n(\tau_n)+g_n(\tau_n)] + \int_0^{\tau_n} sG_1(s)f(r_{\alpha_1}(s),z_n(s),w_n(a_2r_{\alpha_1}(s)))\,ds \\
+\int_0^{\tau_n} sG_2(\tau)g(r_{\alpha_2}(\tau),z_n(a_1r_{\alpha_2}(\tau)),w_n(\tau))\,ds \\
= \int_{\tau_n}^{+\infty} sG_1(s)f(r_{\alpha_1}(s),z_n(s),w_n(a_2r_{\alpha_1}(s)))\,ds \\
+\int_{\tau_n}^{+\infty} sG_2(\tau)g(r_{\alpha_2}(\tau),z_n(a_1r_{\alpha_2}(\tau)),w_n(\tau))\,ds.
\end{aligned}$$

E então

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\tau_n} sG_1(s)f(r_{\alpha_1}(s),z_n(s),w_n(a_2r_{\alpha_1}(s)))\,ds + \int_0^{\tau_n} sG_2(\tau)g(r_{\alpha_2}(\tau),z_n(a_1r_{\alpha_2}(\tau)),w_n(\tau))\,ds \\
&\le \int_{\tau_n}^{+\infty} sG_1(s)f(r_{\alpha_1}(s),z_n(s),w_n(a_2r_{\alpha_1}(s)))\,ds + \int_{\tau_n}^{+\infty} sG_2(\tau)g(r_{\alpha_2}(\tau),z_n(a_1r_{\alpha_2}(\tau)),w_n(\tau))\,ds.
\end{aligned}$$

Agora vamos usar que $\alpha_1=\alpha_2$ e o fato de $\tau_n\to\infty$ para tomar n suficientemente grande tal que $\tau_n > T > 0$ e usar a hipótese (LH) como feito anteriormente para obter

$$\begin{aligned}
&\int_T^{\tau_n} sG_1(s)\overline{f}(z_n(s),w_n(s))\,ds + \int_T^{\tau_n} sG_2(s)\overline{g}(z_n(s),w_n(s))\,ds \\
&\le \int_{\tau_n}^{+\infty} s\left[c_fG_1(s)\right]\overline{f}(z_n(s),w_n(s))\,ds + \int_{\tau_n}^{+\infty} s\left[c_gG_2(s)\right]\overline{g}(z_n(s),w_n(s))\,ds. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Por outro lado, recordando que z_n e w_n são funções côncavas, vale

$$\begin{aligned}
0<s<\tau_n &\Rightarrow \frac{z_n(\tau_n)-z_n(0)}{\tau_n-0} \le \frac{z_n(s)-z_n(0)}{s-0} \\
&\Rightarrow A_ns = \frac{z_n(\tau_n)}{\tau_n}s \le z_n(s)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
0<s<\tau_n &\Rightarrow \frac{w_n(\tau_n)-w_n(0)}{\tau_n-0} \le \frac{w_n(s)-w_n(0)}{s-0} \\
&\Rightarrow B_ns = \frac{w_n(\tau_n)}{\tau_n}s \le w_n(s).
\end{aligned}$$

Outrossim, ainda pelo fato de que z_n e w_n são côncavas, temos

$$\begin{aligned}
0<\tau_n<s &\Rightarrow \frac{z_n(s)-z_n(0)}{s-0} \le \frac{z_n(\tau_n)-z_n(0)}{\tau_n-0} \\
&\Rightarrow z_n(s) \le \frac{z_n(\tau_n)}{\tau_n}s = A_ns
\end{aligned}$$

e

$$0 < \tau_n < s \Rightarrow \frac{w_n(s) - w_n(0)}{s - 0} \leq \frac{w_n(\tau_n) - w_n(0)}{\tau_n - 0}$$
$$\Rightarrow w_n(s) \leq \frac{w_n(\tau_n)}{\tau_n} s = B_n s.$$

Logo, agora usando a hipótese de que as funções $\overline{f}$ e $\overline{g}$ são crescentes, obtemos da Desigualdade (2.9) que

$$\begin{aligned}
&\overline{f}(A_n, B_n) \int_T^{\tau_n} sG_1(s)\,ds + \overline{g}(A_n, B_n) \int_T^{\tau_n} sG_2(s)\,ds \\
&\leq \int_{\tau_n}^{+\infty} s\left[c_f G_1(s)\right] \overline{f}(A_n s, B_n s)\,ds + \int_{\tau_n}^{+\infty} s\left[c_g G_2(s)\right] \overline{g}(A_n s, B_n s)\,ds.
\end{aligned}$$

De onde podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\frac{\overline{f}(A_n, B_n)}{\overline{f}(A_n, B_n) + \overline{g}(A_n, B_n)} \int_T^{\tau_n} sG_1(s)\,ds + \frac{\overline{g}(A_n, B_n)}{\overline{f}(A_n, B_n) + \overline{g}(A_n, B_n)} \int_T^{\tau_n} sG_2(s)\,ds \\
&\leq \int_{\tau_n}^{+\infty} s \max\left\{c_f G_1(s), c_g G_2(s)\right\} \frac{\overline{f}(A_n s, B_n s) + \overline{g}(A_n s, B_n s)}{\overline{f}(A_n, B_n) + \overline{g}(A_n, B_n)}\,ds. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Considere as sequências de números reais

$$0 \leq \theta_n = \frac{\overline{f}(A_n, B_n)}{\overline{f}(A_n, B_n) + \overline{g}(A_n, B_n)} \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \overline{\theta}_n = \frac{\overline{g}(A_n, B_n)}{\overline{f}(A_n, B_n) + \overline{g}(A_n, B_n)} \leq 1.$$

Passando a subsequências de θ_n e $\overline{\theta}_n$, caso necessário, podemos admiti-las convergentes. Ademais ambas não podem convergir para zero, do contrário teríamos

$$0 = \lim_{n\to\infty} \theta_n + \lim_{n\to\infty} \overline{\theta}_n = \lim_{n\to\infty} (\theta_n + \overline{\theta}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{f}(A_n, B_n) + \overline{g}(A_n, B_n)}{\overline{f}(A_n, B_n) + \overline{g}(A_n, B_n)} = 1.$$

Assim, para fixar ideias podemos supor que $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta \neq 0$. Além disso, usando a (H_ϕ) em (2.10) segue

$$0 \leq \theta_n \int_T^{\tau_n} sG_1(s)\,ds + \overline{\theta}_n \int_T^{\tau_n} sG_2(s)\,ds \leq \int_{\tau_n}^{+\infty} s \max\left\{c_f G_1(s), c_g G_2(s)\right\} \phi(s)\,ds,$$

com a integral do lado direito da segunda desigualdade sendo finita. Consequentemente, tal integral deve convergir para zero uma vez que $\tau_n \to +\infty$.

Donde deve valer

$$\theta_n \int_T^{\tau_n} sG_1(s)\,ds \to 0, \quad \text{quando } n \to +\infty,$$

que é um absurdo pois

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta \neq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \int_T^{\tau_n} sG_1(s)\,ds = \overline{T} \neq 0.$$

Essa contradição encerra a demonstração do Teorema 2.1. ■

Teorema 2.2. *Suponha as hipóteses* (H_ϕ), (LH), $\alpha_2 > \alpha_1$ *e* (H_4), *onde:*

(H_4) *a função* $\overline{f}$ *verifica*

$$\lim_{u+v\to+\infty} \frac{\overline{f}(u,v)}{u+v} = +\infty.$$

Então, o conjunto dos pontos fixos do operador F *é limitado.*

Demonstração. Com a mesma notação do Teorema 2.1, vamos supor a mesma sequência (z_n, w_n) de pontos fixos do operador F tal que $\|(z_n, w_n)\| \to \infty$. Considere também a sequência τ_n de sorte que

$$2[z_n(\tau_n) + w_n(\tau_n)] = \|(z_n, w_n)\|.$$

Novamente vamos provar que $\tau_n \to \infty$, supondo por contradição que $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{\tau_n\} < +\infty$ e considerando $0 < S < +\infty$ uma cota superior de (τ_n) que seja suficientemente grande verificando $a_2 r_{\alpha_1}(S) \geq S$, isto é possível pois temos como hipótese que $\alpha_2 > \alpha_1$. Desse modo vale

$$2\,[z_n(S) + w_n(S)] \geq 2\,[z_n(\tau_n) + w_n(\tau_n)] = \|(z_n, w_n)\|.$$

Como visto anteriormente, sendo (z_n, w_n) pontos fixos do operador F podemos escrever

$$\begin{aligned} z_n(S) + w_n(S) &= \int_0^S \int_s^{+\infty} G_1(\tau) f(r_{\alpha_1}(\tau), z_n(\tau), w_n(a_2 r_{\alpha_1}(\tau)))\,d\tau ds \\ &\quad + \int_0^S \int_s^{+\infty} G_2(\tau) g(r_{\alpha_2}(\tau), z_n(a_1 r_{\alpha_2}(\tau)), w_n(\tau))\,d\tau ds \\ &\geq \overline{f}(z_n(S), w_n(a_2 r_{\alpha_1}(S)))S \int_T^{+\infty} \min\{G_1(\tau), G_2(\tau)\}\,d\tau, \end{aligned}$$

onde $T > 0$ foi tomado suficientemente grande de modo que podemos usar a hipótese (LH), justo como foi feito no teorema anterior. Daí conquistamos

$$z_n(S) + w_n(S) \geq \overline{f}(z_n(S), w_n(a_2 r_{\alpha_1}(S)))S \int_T^{+\infty} \min\{G_1(\tau), G_2(\tau)\}\,d\tau,$$

e assim

$$1 \geq S \frac{\overline{f}(z_n(S), w_n(a_2 r_{\alpha_1}(S)))}{z_n(S) + w_n(S)} \int_T^{+\infty} \min\{G_1(\tau), G_2(\tau)\}\,d\tau.$$

Daí, usando que

$$a_2 r_{\alpha_1}(S) \geq S,$$

juntamento com o fato de que $\overline{f}$ é crescente, deve valer que

$$1 \geq \frac{\overline{f}(z_n(S), w_n(S))}{z_n(S) + w_n(S)} S \int_T^{+\infty} \min\{G_1(\tau), G_2(\tau)\}\, d\tau.$$

Porém isto contraria a hipótese (H_4). Esta contradição garante que $\tau_n \to +\infty$.

Com isto e repetindo os cálculos realizados na demonstração do Teorema 2.1, usando a expressão de τ_n, obtemos novamente que

$$\begin{aligned}
&\int_T^{\tau_n} sG_1(s)\overline{f}(z_n(s), w_n(a_2 r_{\alpha_1}(s)))\, ds + \int_T^{\tau_n} sG_2(\tau)\overline{g}(z_n(a_1 r_{\alpha_2}(s)), w_n(s))\, ds \qquad (2.11)\\
&\leq \int_{\tau_n}^{+\infty} s \max\{c_f G_1(s), c_g G_2(s)\} \left[\overline{f}(z_n(s), w_n(a_2 r_{\alpha_1}(s))) + \overline{g}(z_n(a_1 r_{\alpha_2}(s)), w_n(s))\right] ds,
\end{aligned}$$

com $T > 0$ suficientemente grande de modo que valha a hipótese (LH) e n é suficientemente grande de sorte que $\tau_n > T$.

Aqui não podemos usar que $\alpha_1 = \alpha_2$, no entanto podemos usar que z_n e w_n côncavas: para fixar ideias vamos trabalhar com w_n:

$$\begin{aligned}
0 < s < \tau_n &\Rightarrow 0 \leq a_2 r_{\alpha_1}(s) \leq a_2 r_{\alpha_1}(\tau_n)\\
&\Rightarrow \overline{B}_n := \frac{w_n(a_2 r_{\alpha_1}(\tau_n))}{a_2 r_{\alpha_1}(\tau_n)} \leq \frac{w_n(a_2 r_{\alpha_1}(s))}{a_2 r_{\alpha_1}(s)}\\
&\Rightarrow \overline{B}_n \leq w_n(a_2 r_{\alpha_1}(s)).
\end{aligned}$$

De maneira exatamente análoga obtemos

$$\overline{A}_n := \frac{z_n(a_1 r_{\alpha_1}(\tau_n))}{a_1 r_{\alpha_2}(\tau_n)} \leq z_n(a_1 r_{\alpha_2}(s)).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
0 < \tau_n < s &\Rightarrow 0 \leq a_2 r_{\alpha_1}(\tau_n) \leq a_2 r_{\alpha_1}(s)\\
&\Rightarrow \frac{w_n(a_2 r_{\alpha_1}(s))}{a_2 r_{\alpha_1}(s)} \leq \frac{w_n(a_2 r_{\alpha_1}(\tau_n))}{a_2 r_{\alpha_1}(\tau_n)} = \overline{B}_n\\
&\Rightarrow w_n(a_2 r_{\alpha_1}(s)) \leq \overline{B}_n a_2 r_{\alpha_1}(s).
\end{aligned}$$

Com um procedimento análogo vem

$$z_n(a_1 r_{\alpha_2}(s)) \leq \overline{A}_n a_1 r_{\alpha_2}(s).$$

Por outro lado, recordando as estimativas feitas na demonstração do teorema anterior sabemos que

$$0 < s < \tau_n \quad \Rightarrow \quad z_n(s) \geq A_n \quad \text{e} \quad w_n(s) \geq B_n$$

e

$$0 < \tau_n < s \quad \Rightarrow \quad z_n(s) \leq A_n s \quad \text{e} \quad w_n(s) \leq B_n s.$$

Ainda mais, com $\alpha_2 > \alpha_1$ e novamente usando que z_n e w_n são côncavas segue-se de

$$a_2 r_{\alpha_1}(\tau_n) \geq \tau_n \quad \text{e} \quad \tau_n \geq a_1 r_{\alpha_2}(\tau_n)$$

obtemos que $A_n \leq \overline{A}_n$ e $\overline{B}_n \leq B_n$.

Portanto, substituindo em (2.11) todas as desigualdades supracitadas juntamente com $\overline{f}$ e $\overline{g}$ serem crescentes, devemos ter

$$\begin{aligned} &\overline{f}(\overline{A}_n, B_n)\int_T^{\tau_n} sG_1(s)\,ds + \overline{g}(\overline{A}_n, B_n)\int_T^{\tau_n} sG_2(s)\,ds \\ &\quad\leq \int_{\tau_n}^{+\infty} s\max\left\{c_f G_1(s), c_g G_2(s)\right\}\left[\overline{f}(\overline{A}_n s, B_n a_2 r_{\alpha_1}(s)) + \overline{g}(\overline{A}_n a_1 r_{\alpha_2}(s), B_n s)\right] ds. \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} &\theta_n \int_T^{\tau_n} sG_1(s)\,ds + \overline{\theta}_n \int_T^{\tau_n} sG_2(s)\,ds \\ &\quad\leq \int_{\tau_n}^{+\infty} s\max\left\{c_f G_1(s), c_g G_2(s)\right\}\frac{\overline{f}(\overline{A}_n s, B_n a_2 r_{\alpha_1}(s)) + \overline{g}(\overline{A}_n a_1 r_{\alpha_2}(s), B_n s)}{\overline{f}(\overline{A}_n, B_n) + \overline{g}(\overline{A}_n, B_n)}\,ds, \end{aligned}$$

com

$$\theta_n = \frac{\overline{f}(\overline{A}_n, B_n)}{\overline{f}(\overline{A}_n, B_n) + \overline{g}(\overline{A}_n, B_n)} \quad \text{e} \quad \overline{\theta}_n = \frac{\overline{g}(\overline{A}_n, B_n)}{\overline{f}(\overline{A}_n, B_n) + \overline{g}(\overline{A}_n, B_n)}.$$

Novamente, faça $n \to +\infty$ e use que $\tau_n \to +\infty$ com a hipótese (H_ϕ) para chegar a uma contradição. Com esta contradição o Teorema 2.2 está provado. ■

2.2.1 Sistemas do tipo Hamiltoniano

Observe que para os sistemas da forma

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u) = |x|^{\beta_1} f(|x|, v), & x \in B, \\ -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_2}\nabla v) = |x|^{\beta_2} g(|x|, u), & x \in B, \\ \quad u(x) = 0 = v(x), & x \in \partial B, \end{cases} \tag{2.12}$$

as hipóteses (H_1), (H_2), (H_ϕ) e (LH) são dadas, respectivamente, por: primeiro destacamos que aqui também admitimos a existências das funções crescente $\overline{f}, \overline{g} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, agora seguem as hipóteses técnicas:

(H_5) As funções $\overline{f}$ e $\overline{g}$ satisfazem

$$\lim_{u+v\to+\infty} \frac{\overline{f}(v) + \overline{g}(u)}{u+v} = +\infty.$$

(H_6) Existe $0 < \sigma_0\sigma < \frac{\lambda}{1+\sigma}$ e $s_0 > 0$ tais que se $0 \geq u, v \leq s_0$ então

$$f(v) + g(u) \leq \sigma_0(u+v),$$

onde recordamos que $\sigma \geq 1$ e satisfaz $\sigma^{-1}\phi_1 \leq \psi_1 \leq \sigma\phi_1$.

(H_7) Existe $\bar{s}$ tal que

$$\frac{\overline{f}(Ba_2r_{\alpha_1}(s)) + \overline{g}(Aa_1r_{\alpha_2}(s))}{\overline{f}(B) + \overline{g}(A)} \leq \phi(s)$$

para todo $s > \bar{s}$ e $A, B > 0$ onde $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é uma função que satisfaz

$$\int_1^{+\infty} \phi(s) s^{\frac{N+\beta_i}{2-(N+\alpha_i)}}\, ds < +\infty, \quad i = 1, 2.$$

$(LH)'$ Existem constantes $c_g, c_f > 0$ e $0 < \delta < 1$ tais que se $s \geq 0$ e $r \in [0, \delta]$, então temos

$$\overline{f}(s) \leq f(r, s) \leq c_f \overline{f}(s)$$

e

$$\overline{g}(s) \leq g(r, s) \leq c_g \overline{g}(s).$$

Relembramos o que foi feito no começo da Seção 2.2: admitimos a existência de soluções radias positivas e com cálculos análogos obtemos

$$\begin{cases} -\left(r^{N+\alpha_1-1}u'(r)\right)' = r^{N+\beta_1-1}f(r,v), & r \in (0,1), \\ -\left(r^{N+\alpha_2-1}v'(r)\right)' = r^{N+\beta_2-1}g(r,u), & r \in (0,1), \\ \ u(1) = u'(0) = 0 = v(1) = v'(0). \end{cases}$$

Daí, realizando a mudança de variáveis

$$t = a_i(r) \quad \text{e} \quad z(t) = u(r_{\alpha_1}(t)), w(t) = v(r_{\alpha_2}(t))$$

conquistamos

$$\begin{cases} -z''(t) = G_1(t) f(r_{\alpha_1}(t), w(a_2 r_{\alpha_1}(t))), & t \in (0, +\infty), \\ -w''(t) = G_2(t) f(r_{\alpha_2}(t), z(a_1 r_{\alpha_2}(t))), & t \in (0, +\infty), \\ z(0) = z'(+\infty) = 0 = w(0) = w'(+\infty), \end{cases} \tag{2.13}$$

com

$$G_1(t) = (1 + (N + \alpha_1 - 1)t)^{\frac{2N+\alpha_1+\beta_1-2}{2-(N+\alpha_1)}} \quad \text{e} \quad G_2(t) = (1 + (N + \alpha_2 - 1)t)^{\frac{2N+\alpha_2+\beta_2-2}{2-(N+\alpha_2)}}.$$

Para o mesmo espaço X visto anteriormente vamos definir outro operador $\hat{F} : X \to X$ dado por

$$\hat{F}(z, w)(t) = (\hat{A}(z, w)(t), \hat{B}(z, w)(t)),$$

onde

$$\hat{A}(z,w)(t) = \int_0^t \int_s^{+\infty} G_1(\tau) f(r_{\alpha_1}(\tau), w(a_2 r_{\alpha_1}(\tau)))\, d\tau ds$$

e

$$\hat{B}(z,w)(t) = \int_0^t \int_s^{+\infty} G_2(\tau) g(r_{\alpha_2}(t), z(a_1 r_{\alpha_2}(\tau)))\, d\tau ds.$$

Como havíamos provado anteriormente também temos o seguinte resultado

Lema 2.2. *O operador $\hat{F}$ é bem definido, contínuo e compacto. Além disso, os pontos fixos deste operador são soluções radialmente simétricas positivas do Sistema (2.12).*

Demonstração. O procedimento é o mesmo ao que foi feito na demonstração do Lema 2.1. Novamente o fato de

$$\int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} G_i(\tau) d\tau ds < +\infty, \quad i = 1, 2,$$

é crucial para garantir que $\hat{F}$ está bem definido, é contínuo e é completamente contínuo. ■

Finalmente podemos estabelecer também o seguinte resultado:

Teorema 2.3. *Suponha as hipóteses (H_5), (H_7) e $(LH)'$. Então, o conjunto dos pontos fixos do operador $\hat{F}$ é limitado.*

Observação 2.8. Uma pergunta natural e importante é se podemos usar os Teoremas 2.1 e 2.2 para obter o teorema enunciado acima. A resposta é sim. Para aplicar o Teorema 2.1, basta considerar que a função f depende apenas de $|x|$ e v, bem como a função g dependa apenas de $|x|$ e u, ademais com considerações análogas as que foram feitas para as função $\overline{f}$ e $\overline{g}$, podemos usar o Teorema 2.1 para concluir que o conjunto dos pontos fixos $\hat{F}$ é limitado apenas para o caso em que $\alpha_1 = \alpha_2$.

Por outro lado, recorde que no Teorema 2.2 temos (H_4) como hipótese, que significa

$$\lim_{u+v \to +\infty} \frac{\overline{f}(u,v)}{u+v} \to +\infty,$$

neste caso ainda que valha (H_5), isto é,

$$\lim_{u+v \to +\infty} \frac{\overline{f}(v) + \overline{g}(u)}{u+v} \to +\infty,$$

não temos garantia que $(H_5) \Rightarrow (H_4)$, neste caso não podemos usar o Teorema 2.2 com $\alpha_2 > \alpha_1$. De qualquer modo, a demonstração feita a seguir é valida independentemente da relação entre α_1 e α_2, bem como independente de uma hipótese similar a (H_4).

Demonstração do Teorema 2.3. Supomos por contradição que existe uma sequência (z_n, w_n) de pontos fixos do operador $\hat{F}$ tal que $\|(z_n, w_n)\| \to +\infty$. Pela justificativa que já vimos anteriormente podemos considerar τ_n de tal sorte que

$$2[z_n(\tau_n) + w_n(\tau_n)] = \|(z_n, w_n)\|.$$

Ademais vamos provar que $\tau_n \to +\infty$. Admitiremos por contradição que $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{\tau_n\} = S$ é tal que $0 < S < +\infty$. Pelo fato de (z_n, w_n) serem pontos fixos do operador $\hat{F}$, podemos escrever

$$z_n(a_1 r_{\alpha_2}(S)) = \int_0^{a_1 r_{\alpha_2}(S)} \int_s^{+\infty} G_1(\tau) f(r_{\alpha_1}(\tau), w_n(a_2 r_{\alpha_1}(\tau)))\, d\tau ds \quad \text{e}$$

$$w_n(a_2 r_{\alpha_1}(S)) = \int_0^{a_2 r_{\alpha_1}(S)} \int_s^{+\infty} G_2(\tau) g(r_{\alpha_2}(\tau), z_n(a_1 r_{\alpha_2}(\tau)))\, d\tau ds.$$

Agora escolhemos $T > \max\{a_2 r_{\alpha_1}(S), a_1 r_{\alpha_2}(S)\}$ e suficientemente grande tal que $r_{\alpha_1}(\tau) < \delta$ e $r_{\alpha_2}(\tau) < \delta$ para todo $\tau \geq T$, para usarmos a hipótese $(LH)'$ e obter

$$\begin{aligned}
z_n(a_1 r_{\alpha_2}(S)) + w_n(a_2 r_{\alpha_1}(S)) &\geq \int_0^{a_1 r_{\alpha_2}(S)} \int_T^{+\infty} G_1(\tau) \overline{f}(w_n(a_2 r_{\alpha_1}(\tau)))\, d\tau ds \\
&\quad + \int_0^{a_2 r_{\alpha_1}(S)} \int_T^{+\infty} G_2(\tau) \overline{g}(z_n(a_1 r_{\alpha_2}(\tau)))\, d\tau ds \\
&= a_1 r_{\alpha_2}(S) \int_T^{+\infty} G_1(\tau) \overline{f}(w_n(a_2 r_{\alpha_1}(\tau)))\, d\tau \\
&\quad + a_2 r_{\alpha_1}(S) \int_T^{+\infty} G_2(\tau) \overline{g}(z_n(a_1 r_{\alpha_2}(\tau)))\, d\tau \\
&\geq a_1 r_{\alpha_2}(S) \int_T^{+\infty} G_1(\tau) d\tau \overline{f}(w_n(\tau_n)) \\
&\quad + a_2 r_{\alpha_1}(S) \int_T^{+\infty} G_2(\tau) d\tau \overline{g}(z_n(\tau_n)),
\end{aligned}$$

desde que $S \geq \tau_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e, por (2.2), por exemplo, podemos fazer $a_2 r_{\alpha_1}(\tau) > S$ e $a_1 r_{\alpha_2}(\tau) > S$ para todo $\tau \geq T$. Daí, temos

$$\|(z_n, w_n)\| \geq a_1 r_{\alpha_2}(S) \int_T^{+\infty} G_1(\tau) d\tau \overline{f}(w_n(\tau_n)) + a_2 r_{\alpha_1}(S) \int_T^{+\infty} G_2(\tau) d\tau \overline{g}(z_n(\tau_n)).$$

Então

$$1 \geq \frac{\eta}{2} \cdot \frac{\overline{f}(w_n(\tau_n)) + \overline{g}(z_n(\tau_n))}{z_n(\tau_n) + w_n(\tau_n)},$$

onde η é a constante dada por

$$\eta = \min\left\{ a_1 r_{\alpha_2}(S) \int_T^{+\infty} G_1(\tau)\, d\tau,\, a_2 r_{\alpha_1}(S) \int_T^{+\infty} G_2(\tau)\, d\tau \right\}.$$

Como esta última desigualdade contradiz a hipótese (H_5), então provamos que $\tau_n \to +\infty$.

Agora, realizamos um procedimento análogo ao que foi feito nos dois últimos teoremas, usando a expressão de τ_n e método de integração por partes para obter

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\tau_n} sG_1(s)f(r_{\alpha_1}(s), w_n(a_2 r_{\alpha_1}(s)))\,ds + \int_0^{\tau_n} sG_2(s)g(r_{\alpha_2}(s), z_n(a_1 r_{\alpha_2}(s)))\,ds \\
&\qquad \leq \int_{\tau_n}^{+\infty} sG_1(s)f(r_{\alpha_1}(s), w_n(a_2 r_{\alpha_1}(s)))\,ds + \int_{\tau_n}^{+\infty} sG_2(s)g(r_{\alpha_2}(s), z_n(a_1 r_{\alpha_2}(s)))\,ds.
\end{aligned}$$

Desde que $\tau_n \to +\infty$, para n suficientemente grande temos $\tau_n > T > 0$ pela hipótese $(LH)'$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_T^{\tau_n} sG_2(s)\overline{f}(w_n(a_2 r_{\alpha_1}(s)))\,ds + \int_T^{\tau_n} sG_2(s)\overline{g}(z_n(a_1 r_{\alpha_2}(s)))\,ds \\
&\qquad \leq \int_{\tau_n}^{+\infty} s\left[c_f G_2(s)\right]\overline{f}(w_n(a_2 r_{\alpha_1}(s)))\,ds + \int_{\tau_n}^{+\infty} s\left[c_g G_2(s)\right]\overline{g}(z_n(a_1 r_{\alpha_2}(s)))\,ds \\
&\qquad \leq \int_{\tau_n}^{+\infty} s\max\left\{c_f G_1(s),\, c_g G_2(s)\right\}\left[\overline{f}(w_n(a_2 r_{\alpha_1}(s))) + \overline{g}(z_n(a_1 r_{\alpha_2}(s)))\right]\,ds.
\end{aligned}$$

Prosseguimos usando que z_n e w_n são concavas e adotando as notações de $\overline{B}_n$ e $\overline{A}_n$ vistas na demonstração do Teorema 2.2, bem como as estimativas

$$\overline{B}_n \leq w_n(a_2 r_{\alpha_1}(s)) \quad \text{e} \quad \overline{A}_n \leq z_n(a_1 r_{\alpha_2}(s)), \text{ para } 0 < s < \tau_n$$

e

$$w_n(a_2 r_{\alpha_1}(s)) \leq \overline{B}_n a_2 r_{\alpha_1}(s) \quad \text{e} \quad z_n(a_1 r_{\alpha_2}(s)) \leq \overline{A}_n a_1 r_{\alpha_2}(s), \text{ para } 0 < \tau_n < s.$$

Com estas desigualdades e recordando que as funções $\overline{f}$ e $\overline{g}$ são crescentes podemos obter

$$\begin{aligned}
&\overline{f}(\overline{B}_n)\int_T^{\tau_n} sG_1(s)\,ds + \overline{g}(\overline{A}_n)\int_T^{\tau_n} sG_2(s)\,ds \\
&\qquad \leq \int_{\tau_n}^{+\infty} s\max\left\{c_f G_1(s),\, c_g G_2(s)\right\}\left[\overline{f}(\overline{B}_n a_2 r_{\alpha_1}(s)) + \overline{g}(\overline{A}_n a_1 r_{\alpha_2}(s))\right]\,ds.
\end{aligned}$$

De onde

$$\begin{aligned}
&\theta_n \int_T^{\tau_n} sG_1(s)\,ds + \overline{\theta}_n \int_T^{\tau_n} sG_2(s)\,ds \\
&\qquad \leq \int_{\tau_n}^{+\infty} s\max\left\{c_f G_1(s),\, c_g G_2(s)\right\}\frac{\overline{f}(\overline{B}_n a_2 r_{\alpha_1}(s)) + \overline{g}(\overline{A}_n a_1 r_{\alpha_2}(s))}{\overline{f}(\overline{B}_n) + \overline{g}(\overline{A}_n)}\,ds,
\end{aligned}$$

onde

$$\theta_n = \frac{\overline{f}(\overline{B}_n)}{\overline{f}(\overline{B}_n) + \overline{g}(\overline{A}_n)} \quad \text{e} \quad \overline{\theta}_n = \frac{\overline{g}(\overline{A}_n)}{\overline{f}(\overline{B}_n) + \overline{g}(\overline{A}_n)}.$$

Por fim pela hipótese (H_7) temos

$$\theta_n \int_T^{\tau_n} sG_1(s)\,ds + \overline{\theta}_n \int_T^{\tau_n} sG_2(s)\,ds \leq \int_{\tau_n}^{+\infty} s\max\left\{c_f G_1(s),\, c_g G_2(s)\right\}\phi(s)\,ds.$$

Daí usamos que $\tau_n \to +\infty$ e ainda da hipótese (H_7) chegamos a um absurdo exatamente como foi feito nas demonstrações dos Teoremas 2.1 e 2.2. Com está contradição o Teorema 2.3 está provado. ■

2.3 Existência de Soluções

Nesta seção vamos usar o Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii para demonstrar o principal resultado deste Capitulo que garante a existência de soluções radialmente simétricas positivas para o Sistema (2.1). Dessa forma, o Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii será nossa principal ferramenta. Para saber mais sobre este teorema o leitor pode consultar o Capítulo 1, ou até as referencias [10] e [5]. Nas aplicações também usaremos uma outra versão do Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii que também pode ser consultado no Capítulo 1.

Assim sendo, nossa trabalho nesta seção se resumirá a provar resultados que vão verificar as hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii para só então podermos estabelecer o objetivo desejado.

Lema 2.3. *Supondo a hipótese (H_2), o sistema (2.1) não possui solução para $\|(u,v)\| \leq s_0$ e $0 < \sigma_0\sigma < \frac{\lambda}{1+\sigma}$.*

Demonstração. Vamos supor por contradição que o sistema (2.1) possui soluções positivas u e v com $|u|_\infty, |v|_\infty \leq s_0$ e $0 < \sigma_0\sigma < \frac{\lambda}{1+\sigma}$.

Agora vamos tomar $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2\}$ e considerar ϕ_1 e ψ_1 autofunções associadas aos problemas de autovalores

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla\phi_1) = \lambda_1|x|^{\beta}\phi_1, & \text{em } B \\ \phi_1 = 0, & \text{sobre } \partial B \end{cases} \tag{2.14}$$

e

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_2}\nabla\psi_1) = \hat{\lambda}_1|x|^{\beta}\psi_1, & \text{em } B \\ \psi_1 = 0, & \text{sobre } \partial B \end{cases} \tag{2.15}$$

Para saber mais sobre esses problemas de autovalor o leitor deve consultar o Apêndice A. Vamos calcular algumas integrais: primeiro multiplicamos a primeira equação do Sistema (2.1) por ϕ_1 para obter

$$-\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u)\phi_1 = |x|^{\beta_1} f(|x|,u,v)\phi_1, x \in B.$$

Agora, usando a fórmula do divergente do produto de um campo vetorial por uma função real temos

$$\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u\phi_1) = |x|^{\alpha_1}\nabla u\nabla\phi_1 + \operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u)\phi_1 \Rightarrow$$

$$-\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u)\phi_1 = -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u\phi_1) + |x|^{\alpha_1}\nabla u\nabla\phi_1.$$

Daí, pelo Teorema do Divergente aliado ao fato de que $\phi_1 = 0$ sobre ∂B, obtemos

$$-\int_B \operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u)\phi_1\, dx = \int_B |x|^{\alpha_1}\nabla u\nabla\phi_1\, dx.$$

Por outro lado, multiplicando (2.14) por u segue-se

$$-\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla\phi_1)u = \lambda_1|x|^{\beta}\phi_1 u.$$

Donde, novamente pela fórmula do divergente menciona a pouco,

$$\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla\phi_1 u) = \operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla\phi_1)u + |x|^{\alpha_1}\nabla\phi_1\nabla u,$$

que novamente pelo teorema do Divergente juntamente com $u = 0$ sobre ∂B segue-se

$$-\int_B \operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla\phi_1)u\,dx = \int_B |x|^{\alpha_1}\nabla\phi_1\nabla u\,dx.$$

Finalmente com todas essas igualdades estabelecidas e recordando que $\beta \le \beta_1$, conquistamos

$$\begin{aligned}
\lambda_1\int_B |x|^{\beta}\phi_1 u\,dx &= -\int_B \operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla\phi_1)u\,dx\\
&= \int_B |x|^{\alpha_1}\nabla\phi_1\nabla u\,dx\\
&= \int_B \operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u)\phi_1\,dx\\
&= \int_B |x|^{\beta_1} f(|x|,u,v)\phi_1\,dx\\
&\le \int_B |x|^{\beta} f(|x|,u,v)\phi_1\,dx.
\end{aligned}$$

Agora, recordando a hipótese (H_2) que nos diz que para $0 < \sigma_0\sigma < \frac{\lambda}{1+\sigma}$, quando $u, v \le s_0$ então

$$f(|x|,u,v) \le f(|x|,u,v) + g(|x|,u,v) \le \sigma_0(u+v),$$

podemos concluir que

$$\lambda_1\int_B |x|^{\beta}\phi_1 u\,dx \le \sigma_0\int_B |x|^{\beta}(u+v)\phi_1\,dx. \tag{2.16}$$

De maneira exatamente análoga repetindo os mesmos argumentos para a segunda equação do Sistema (2.1), usando (2.15) podemos obter que

$$\hat{\lambda}_1\int_B |x|^{\beta}\psi_1 v\,dx \le \sigma_0\int_B |x|^{\beta}(u+v)\psi_1\,dx. \tag{2.17}$$

Somando as Desigualdades (2.16) e (2.17) devemos ter

$$\lambda_1\int_B |x|^{\beta}\phi_1 u\,dx + \hat{\lambda}_1\int_B |x|^{\beta}\psi_1 v\,dx \le \sigma_0\int_B |x|^{\beta}(u+v)(\phi_1+\psi_1)\,dx,$$

e considerando $\lambda = \min\{\lambda_1, \hat{\lambda}_1\}$ vem que

$$\lambda\int_B |x|^{\beta}(u\phi_1 + v\psi_1)\,dx \le \sigma_0\int_B |x|^{\beta}(u+v)(\phi_1+\psi_1)\,dx.$$

Ademais, como $\sigma^{-1}\phi_1 \leq \psi_1 \leq \sigma\phi_1$ com $\sigma \geq 1$, temos $\sigma\phi_1 \geq \psi_1$ e $\sigma\psi_1 \geq \psi_1$, daí $u(\sigma\phi_1) \geq u\psi_1$ e $v(\sigma\psi_1) \geq v\psi_1$, donde

$$(u+v)\psi_1 \leq \sigma(u\phi_1 + v\psi_1).$$

Consequentemente valem as desigualdades

$$\begin{aligned} \lambda \int_B |x|^\beta (u+v)\psi_1\, dx &\leq \sigma\lambda \int_B |x|^\beta (u\phi_1 + v\psi_1)\, dx \\ &\leq \sigma\sigma_0 \int_B |x|^\beta (u+v)(\phi_1+\psi_1)\, dx \\ &\leq \sigma_0(1+\sigma)\sigma \int_B |x|^\beta (u+v)\psi_1\, dx. \end{aligned}$$

Como, por (H_2) esta última desigualdade não pode ocorrer pois $\sigma_0(1+\sigma)\sigma < \lambda$, chegamos a uma contradição. Esta contradição encerra a demonstração do Lema 2.3. ■

Como consequência do lema logo acima, temos que o operador F não tem pontos fixos para $\|(z,w)\| \leq s_0$ e $0 < \sigma\sigma_0 < \lambda/(1+\sigma)$. Ainda mais que isso, para cada $\theta \in [0,1]$ o operador θF também não tem pontos fixos com $\|(z,w)\| \leq s_0$ e $0 < \sigma\sigma_0 < \lambda/(1+\sigma)$. De fato, caso tivéssemos

$$-\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u) = \theta|x|^{\beta_1} f(|x|,u,v) \quad \text{ou} \quad -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_2}\nabla v) = \theta|x|^{\beta_2} g(|x|,u,v),$$

então ainda valeriam as estimativas

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int_B |x|^\beta \phi_1 u dx &= \theta \int_B |x|^{\beta_1} f(|x|,u,v)\phi_1 dx \\ &\leq \int_B |x|^\beta f(|x|,u,v)\phi_1 dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 \int_B |x|^\beta \psi_1 v dx &= \theta \int_B |x|^{\beta_2} g(|x|,u,v)\psi_1 dx \\ &\leq \int_B |x|^\beta g(|x|,u,v)\psi_1 dx, \end{aligned}$$

uma vez que estamos considerando $\theta \in [0,1]$. Portanto, mesmo com a presença do $\theta \in [0,1]$, o último lema é válido e, consequentemente, o operador θF também não tem pontos fixos com $\|(z,w)\| \leq s_0$ e $0 < \sigma\sigma_0 < \lambda/(1+\sigma)$.

Prosseguimos considerando o sistema auxiliar

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u) = |x|^{\beta_1}(f(|x|,u,v)+\gamma), & x \in B, \\ -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_2}\nabla v) = |x|^{\beta_2}(g(|x|,u,v)+\gamma), & x \in B, \\ \quad u(x) = 0 = v(x), & x \in \partial B. \end{cases} \tag{2.18}$$

Supondo que u e v são radialmente simétricas, juntamente com as mudanças de variáveis

$$t = a_i(r) \quad \text{e} \quad z(t) = u(r_{\alpha_1}(t)), w(t) = v(r_{\alpha_2}(t)),$$

realizamos cálculos análogos aos que foram feitos no começo da seção anterior, para reescrever o sistema auxiliar e naturalmente associar o operador $F_\gamma : X \to X$ dado por

$$F_\gamma(z,w) = (A_\gamma(z,w), B_\gamma(z,w)),$$

onde

$$A_\gamma(z,w)(t) = \int_0^t \int_s^{+\infty} G_1(\tau)\left(f(r_{\alpha_1}(\tau), z(\tau), w(a_2 r_{\alpha_1}(\tau))) + \gamma\right) d\tau ds \quad \text{e}$$

$$B_\gamma(z,w)(t) = \int_0^t \int_s^{+\infty} G_2(\tau)\left(g(r_{\alpha_2}(\tau), z(a_1 r_{\alpha_2}(\tau)), w(\tau)) + \gamma\right) d\tau ds.$$

Além disso, ainda inspirados pela seção anterior, podemos notar que os pontos fixos do operador F_γ são soluções radialmente simétricas do Sistema (2.18).

Argumentos análogos aos que foram vistos na demonstração do Lema 2.1 são usados para garantir que F_γ é bem definido, contínuo e compacto.

Por outro lado, provamos que:

Lema 2.4. *Admitindo as hipóteses $(H_1)'$ e (LH), existe $\gamma_0 > 0$ tal que o Sistema (2.18) não tem solução positiva para $\gamma \geq \gamma_0$.*

Demonstração. Considere $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2\}$ e ϕ_1 e ψ_1 as primeiras autofunções associadas, respectivamente, aos problemas de autovalor

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla\phi_1) = \lambda_1 |x|^{\beta}\phi_1, \ \text{em } B \\ \phi_1 = 0, \ \text{sobre } \partial B \end{cases} \tag{2.19}$$

e

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_2}\nabla\psi_1) = \hat{\lambda}_1 |x|^{\beta}\psi_1, \ \text{em } B \\ \psi_1 = 0, \ \text{sobre } \partial B. \end{cases} \tag{2.20}$$

Vamos supor por contradição que o Sistema (2.18) possui solução para todo $\gamma \geq 0$. Agora vamos realizar alguns cálculos: multiplicando a primeira equação do Sistema (2.18) por ϕ_1 vem

$$-\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u)\phi_1 = |x|^{\beta_1}(f(|x|, u, v) + \gamma)\phi_1, \text{em } B.$$

Agora note que

$$\operatorname{div}(\phi_1 |x|^{\alpha_1}\nabla u) = \phi_1 \operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u) + |x|^{\alpha_1}\nabla u \nabla\phi_1 \Rightarrow$$

$$-\phi_1 \operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u) = -\operatorname{div}(\phi_1 |x|^{\alpha_1}\nabla u) + |x|^{\alpha_1}\nabla u \nabla\phi_1.$$

Aplicando o Teorema do Divergente juntamente com o fato de $\phi_1 = 0$ sobre ∂B, concluímos

$$-\int_B (|x|^{\alpha_1}\nabla u)\phi_1\,dx = \int_B |x|^{\alpha_1}\nabla u \nabla\phi_1\,dx.$$

Por outro lado, multiplicando (2.19) por u segue-se

$$-\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla\phi_1)u = \lambda_1|x|^{\beta}\phi_1 u, \text{ em } B.$$

Ademais,

$$\operatorname{div}(u|x|^{\alpha_1}\nabla\phi_1) = u\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla\phi_1) + |x|^{\alpha_1}\nabla u\nabla\phi_1.$$

Aplicando novamente o Teorema do Divergente aliado a $u = 0$ em ∂B, devemos ter

$$-\int_B \operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla\phi_1)u\,dx = \int_B |x|^{\alpha_1}\nabla u\nabla\phi_1\,dx.$$

Portanto, com todas as igualdades estabelecidas temos

$$\begin{aligned}
\lambda_1\int_B |x|^{\beta}u\phi_1\,dx &= -\int_B \operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla\phi_1)u\,dx \\
&= \int_B |x|^{\alpha_1}\nabla u\nabla\phi_1\,dx \\
&= -\int_B \operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u)\phi_1\,dx \\
&= \int_B |x|^{\beta_1}(f(|x|,u,v)+\gamma)\phi_1\,dx \\
&= \int_B |x|^{\beta_1}f(|x|,u,v)\phi_1\,dx + \gamma\int_B |x|^{\beta_1}\phi_1\,dx. \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

De maneira exatamente análoga, para a segunda equação do Sistema (2.18) e (2.20) podemos obter que

$$\hat{\lambda}_1\int_B |x|^{\beta}v\psi_1 = \int_B |x|^{\beta_2}g(|x|,u,v)\psi_1\,dx + \gamma\int_B |x|^{\beta_2}\psi_1\,dx. \qquad (2.22)$$

Da hipótese (LH) temos

$$\overline{f}(u,v) \le f(r,u,v) \quad \text{e} \quad \overline{g}(u,v) \le g(r,u,v)$$

para $r = |x| \in [0,\delta]$ com $0 < \delta < 1$. Consequentemente, de (2.21) e (2.22) podemos escrever

$$\lambda_1\int_B |x|^{\beta}u\phi_1\,dx \ge \int_B |x|^{\beta}\overline{f}(u,v)\phi_1\,dx + \gamma\int_B |x|^{\beta}\phi_1\,dx \quad \text{e}$$

$$\hat{\lambda}_1\int_B |x|^{\beta}v\psi_1\,dx \ge \int_B |x|^{\beta}\overline{g}(u,v)\psi_1\,dx + \gamma\int_B |x|^{\beta}\psi_1\,dx,$$

usando também que $|x|^{\beta} \le |x|^{\beta_1}$ e $|x|^{\beta} \le |x|^{\beta_2}$ desde que $|x| < 1$ e $\beta \ge \beta_1, \beta_2$. Considerando

$\Lambda = \max\{\lambda_1, \hat{\lambda}_1\}$ e somando estas duas últimas desigualdades obtemos

$$\Lambda \int_B |x|^\beta (u\phi_1 + v\psi_1)\, dx \geq \int_B |x|^\beta \left(\overline{f}(u,v)\phi_1 + \overline{g}(u,v)\psi_1\right)\, dx + \gamma \int_B |x|^\beta (\phi_1 + \psi_1)\, dx.$$

Agora, sabendo que $\sigma^{-1}\phi_1 \leq \phi_1$ e $\sigma^{-1}\phi_1 \leq \psi_1$, podemos obter

$$\overline{f}(u,v)\phi_1 \geq \overline{f}(u,v)\sigma^{-1}\phi_1 \quad \text{e} \quad \overline{g}(u,v)\psi_1 \geq \overline{g}(u,v)\sigma^{-1}\phi_1,$$

donde vale que

$$\overline{f}(u,v)\phi_1 + \overline{g}(u,v)\psi_1 \geq \sigma^{-1}\left(\overline{f}(u,v) + \overline{g}(u,v)\right)\phi_1.$$

Consequentemente,

$$\Lambda \int_B |x|^\beta (u\phi_1 + v\psi_1)\, dx \geq \sigma^{-1} \int_B |x|^\beta \left(\overline{f}(u,v) + \overline{g}(u,v)\right)\phi_1\, dx + \gamma \int_B |x|^\beta (\phi_1 + \psi_1)\, dx.$$

Da hipótese $(H_1)'$, para qualquer $M > 0$ dado, em particular quando M verifica $\sigma^{-1}M \geq \sigma\Lambda$, deve existe $c > 0$ tal que

$$\overline{f}(u,v) + \overline{g}(u,v) \geq M(u+v) - c, \forall u, v \geq 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Lambda \int_B |x|^\beta (u\phi_1 + v\psi_1)\, dx &\geq \sigma^{-1} \int_B |x|^\beta \left(M(u+v) - c\right)\phi_1\, dx + \gamma \int_B |x|^\beta (\phi_1 + \psi_1)\, dx \\
&= \sigma^{-1} \int_B |x|^\beta M(u+v)\phi_1\, dx - \sigma^{-1} c \int_B |x|^\beta \phi_1\, dx + \gamma \int_B |x|^\beta (\phi_1 + \psi_1)\, dx \\
&= \sigma^{-1} M \int_B |x|^\beta (u+v)\phi_1\, dx - \sigma^{-1} c \int_B |x|^\beta \phi_1\, dx + \gamma \int_B |x|^\beta (\phi_1 + \psi_1)\, dx.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $\phi_1 \leq \sigma\phi_1$ e $\psi_1 \leq \sigma\phi_1$, temos

$$u\phi_1 + v\psi_1 \leq \sigma(u+v)\phi_1,$$

donde vale

$$\int_B |x|^\beta (u\phi_1 + v\psi_1)\, dx \leq \sigma \int_B |x|^\beta (u+v)\phi_1\, dx.$$

E portanto,

$$\sigma\Lambda \int_B |x|^\beta (u+v)\phi_1\, dx \geq \sigma^{-1} M \int_B |x|^\beta (u+v)\phi_1\, dx - c\sigma^{-1} \int_B |x|^\beta \phi_1\, dx + \gamma \int_B |x|^\beta (\phi_1 + \psi_1)\, dx.$$

Daí, desde que nossa hipótese de absurdo é a existência de solução do sistema auxiliar para todo $\gamma \geq 0$, podemos considerar que γ é suficientemente grande, a fim de que valha

$$c\sigma^{-1} \int_B |x|^\beta \phi_1\, dx < \gamma \int_B |x|^\beta (\phi_1 + \psi_1)\, dx.$$

Consequentemente

$$\sigma\Lambda\int_B |x|^\beta(u+v)\phi_1\,dx > \sigma^{-1}M\int_B |x|^\beta(u+v)\phi_1\,dx.$$

Implicando que $\sigma\Lambda > \sigma^{-1}M$. Absurdo, pois $M>0$ foi considerado satisfazendo $\sigma^{-1}M \geq \sigma\Lambda$. Esta contradição concluí a demonstração do Lema 2.4. ■

Deste último resultado, uma vez que as soluções do sistema auxiliar são pontos fixos do operador F_γ, podemos concluir que F_{γ_0} não tem pontos fixos, isto é,

$$F_{\gamma_0}(z,w) \neq (z,w), \text{ para cada } (z,w)\in X.$$

Por outro lado, quando $\gamma \leq \gamma_0$ então podemos garantir que o conjunto dos pontos fixos do operador F_γ é limitado. Este fato é provado em dois resultados diferentes, um quando $\alpha_1 = \alpha_2$ e outro quando $\alpha_2 > \alpha_1$.

Lema 2.5. *Suponha as hipóteses (H_1), (H_ϕ) e (LH) com $\alpha_1 = \alpha_2$. Então existe $C>0$ tal que $\|(z,w)\| \leq C$, para todo $(z,w)\in X$ tal que $F_\gamma(z,w) = (z,w)$ para todo $\gamma\in[0,\gamma_0]$.*

Demonstração. Podemos repetir exatamente os mesmos passos feitos na demonstração do Teorema 2.1 e chegar ao mesmo resultado final. Porém optamos por usar a Teorema 2.1 que já foi provado: para isto vamos definir as funções

$$\mathbf{f}(|x|,u,v) = f(|x|,u,v)+\gamma \quad \text{e} \quad \mathbf{g}(|x|,u,v) = g(|x|,u,v)+\gamma, \quad \gamma\in[0,\gamma_0]$$

e provar que elas satisfazem hipóteses do tipo (H_1), (H_ϕ) e (LH). De fato, considerando as funções $\overline{f},\overline{g} : [0,+\infty)\times[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ crescentes dadas pelas hipóteses técnicas (H_1), (H_ϕ) e (LH). Agora, notamos que as funções

$$\bar{\mathbf{f}}(u,v) = \overline{f}(u,v)+\gamma \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{g}}(u,v) = \overline{g}(u,v)+\gamma$$

são crescentes e verificam:

$$\lim_{u+v\to+\infty}\frac{\bar{\mathbf{f}}(u,v)+\bar{\mathbf{g}}(u,v)}{u+v} = \lim_{u+v\to+\infty}\frac{(\overline{f}(u,v)+\gamma)+(\overline{g}(u,v)+\gamma)}{u+v} = +\infty.$$

Bem como, partindo da hipótese técnica (LH), para $|x|\in[0,\delta]$ temos

$$\bar{\mathbf{f}}(u,v) = \overline{f}(u,v)+\gamma \leq \tilde{f}(|x|,u,v) \leq c_f(\overline{f}(u,v)+\gamma) = c_f\bar{\mathbf{f}}(u,v), \forall u,v\geq 0$$

e

$$\bar{\mathbf{f}}(u,v) = \overline{g}(u,v)+\gamma \leq \tilde{g}(|x|,u,v) \leq c_g(\overline{g}(u,v)+\gamma) = c_g\bar{\mathbf{g}}(u,v), \forall u,v\geq 0,$$

desde que $c_f, c_g \geq 1$. Dessa forma já verificamos que para $\bar{\mathbf{f}}$ e $\overline{\mathbf{g}}$ valem hipóteses do tipo (H_1) e (LH). Ainda mais, usando $\alpha_1 = \alpha_2$ segue-se que $a_2 r_{\alpha_1}(s) = s$ e $a_1 r_{\alpha_2}(s) = s$, donde

$$\frac{\bar{\mathbf{f}}(As,Bs)+\overline{\mathbf{g}}(As,Bs)}{\bar{\mathbf{f}}(A,B)+\overline{\mathbf{g}}(A,B)} = \frac{\overline{f}(As,Bs)+\overline{g}(As,Bs)+2\gamma}{\overline{f}(A,B)+\overline{g}(A,B)+2\gamma} \leq \frac{\overline{f}(As,Bs)+\overline{g}(As,Bs)}{\overline{f}(A,B)+\overline{g}(A,B)}$$

para todo $s \geq 1$ e $A, B \geq 0$. Logo também deve valer uma hipótese do tipo (H_ϕ). Finalmente pelo Teorema 2.1 concluímos a demonstração. ■

Lema 2.6. *Suponha as hipóteses (H_ϕ), (LH) e $\alpha_2 > \alpha_1$ com (H_4). Então existe uma constante $C > 0$ tal que $\|(z,w)\| \leq C$ para todos $(z,w) \in X$ satisfazendo $F_\gamma(z,w) = (z,w)$ com $\gamma \in [0,\gamma_0]$.*

Demonstração. Similar a demonstração do Teorema 2.2, mas com alguns pequenos ajustes. Novamente supomos por contradição que existe uma sequência de pontos fixos de F_γ tal que $\|(z_n,w_n)\| \to +\infty$. Com ela obtemos uma sequência (τ_n) verificando

$$2[z_n(\tau_n)+w_n(\tau_n)] = \|(z_n,w_n)\|.$$

Repetindo o argumento visto anteriormente, e fazendo ajustes mínimos, podemos considerar que $\tau_n \to +\infty$ a menos de subsequência.

Em seguida realizamos os mesmos passos com a igualdade anterior até obter que

$$\begin{aligned}
&\int_T^{\tau_n} sG_1(s)\left(\overline{f}(\overline{A}_n,B_n)+\gamma\right)ds + \int_T^{\tau_n} sG_2(s)\left(\overline{g}(\overline{A}_n,B_n)+\gamma\right)ds \\
&\quad \leq c_f \int_{\tau_n}^{+\infty} sG_1(s)\left(\overline{f}(\overline{A}_n s, B_n a_2 r_{\alpha_1}(s))+\gamma\right)ds + c_g \int_{\tau_n}^{+\infty} sG_2(s)\left(\overline{g}(\overline{A}_n a_1 r_{\alpha_2}(s), B_n s)+\gamma\right)ds.
\end{aligned}$$

De onde podemos escrever

$$\begin{aligned}
\gamma \int_T^{\tau_n} s(G_1(s)+G_2(s))ds &+ \int_T^{\tau_n} s\left(\overline{f}(\overline{A}_n,B_n)G_1(s)+\overline{g}(\overline{A}_n,B_n)G_2(s)\right)ds \\
&\leq \int_{\tau_n}^{+\infty} s\left(c_f G_1(s)\overline{f}(\overline{A}_n s, B_n a_2 r_{\alpha_1}(s)) + c_g G_2(s)\overline{g}(\overline{A}_n a_1 r_{\alpha_2}(s), B_n s)\right)ds \\
&\quad + \gamma \int_{\tau_n}^{+\infty} s\left(c_f G_1(s)+c_g G_2(s)\right)ds.
\end{aligned}$$

Note que se fosse

$$\gamma \int_T^{\tau_n} s(G_1(s)+G_2(s))ds \leq \gamma \int_{\tau_n}^{+\infty} s\left(c_f G_1(s)+c_g G_2(s)\right)ds,$$

então, pela Observação 2.7 juntamente com o fato de $\tau_n \to +\infty$, teríamos um absurdo. Consequentemente, deve valer que

$$\int_T^{\tau_n} s\left(\overline{f}(\overline{A}_n,B_n)G_1(s)+\overline{g}(\overline{A}_n,B_n)G_2(s)\right)ds$$
$$\leq \int_{\tau_n}^{+\infty} s\left(c_f G_1(s)\overline{f}(\overline{A}_n s,B_n a_2 r_{\alpha_1}(s))+c_g G_2(s)\overline{g}(\overline{A}_n a_1 r_{\alpha_2}(s),B_n s)\right)ds.$$

E portanto

$$\overline{f}(\overline{A}_n,B_n)\int_T^{\tau_n} sG_1(s)ds+\overline{g}(\overline{A}_n,B_n)\int_T^{\tau_n} sG_2(s)ds$$
$$\leq \int_{\tau_n}^{+\infty} s\max\{c_f G_1(s),c_g G_2(s)\}\left[\overline{f}(\overline{A}_n s,B_n a_2 r_{\alpha_1}(s))+\overline{g}(\overline{A}_n a_1 r_{\alpha_2}(s),B_n s)\right]ds.$$

Daqui em diante prosseguimos como feito no final da demostração do Teorema 2.2 para chegar a uma contradição. Isto encerra a demonstração. ■

De modo similar ao sistema auxiliar considerado anteriormente, também podemos considerar um sistema Hamiltoniano auxiliar da forma

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u)=|x|^{\beta_1}\left(f(|x|,v)+\gamma\right), & x\in B,\\ -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_2}\nabla v)=|x|^{\beta_2}\left(g(|x|,u)+\gamma\right), & x\in B,\\ \quad u(x)=0=v(x), \quad x\in\partial B. \end{cases} \tag{2.23}$$

Também deve existir $\hat{\gamma}_0$ de sorte que o sistema supracitado não tem solução quando $\gamma\geq\hat{\gamma}_0$. Ainda mais, sob as condições $\|(u,v)\|\leq s_0$ e $0<\sigma\sigma_0<\lambda/(1+\sigma)$ da hipótese (H_6), também devemos ter que o sistema hamiltoniano auxiliar não tem solução.

Podemos também associar ao Sistema (2.23) o operador $\hat{F}_\gamma : X\to X$ dado por

$$\hat{F}_\gamma(z,w)=(\hat{A}_\gamma(z,w),\hat{B}_\gamma(z,w)),$$

onde

$$\hat{A}_\gamma(z,w)(t)=\int_0^t\int_s^{+\infty} G_1(\tau)\left(f(r_{\alpha_1}(\tau),w(a_2 r_{\alpha_1}(\tau)))+\gamma\right)d\tau ds \quad \text{e}$$
$$\hat{B}_\gamma(z,w)(t)=\int_0^t\int_s^{+\infty} G_2(\tau)\left(g(r_{\alpha_2}(s),z(a_1 r_{\alpha_2}(s)))+\gamma\right)d\tau ds.$$

Para o operado $\hat{F}_\gamma$ também temos o seguinte resultado:

Lema 2.7. *Suponha as hipóteses (H_5), (H_7) e $(LH)'$. Então existe $C>0$ tal que $\|(z,w)\|\leq C$, para todo $(z,w)\in X$ tal que $\hat{F}_\gamma(z,w)=(z,w)$ para $\gamma\in[0,\hat{\gamma}_0]$.*

Demonstração. A ideia é replicar a demonstração feita para Teorema 2.3 fazendo apenas alguns ajustes. Supondo que existe uma sequência de pontos fixos do operador $\hat{F}_\gamma$ tal que $\|(z_n,w_n)\|\to+\infty$, novamente tomamos uma sequência (τ_n) de sorte que

$$2\left[z_n(\tau_n)+w_n(\tau_n)\right]=\|(z_n,w_n)\|.$$

Passando a uma subsequência, caso necessário, podemos assumir que $\tau_n \to +\infty$. A partir da expressão de τ_n repetimos os cálculos feitos até obter

$$\begin{aligned}\int_T^{\tau_n} sG_1(s)\left(\overline{f}(\overline{B}_n)+\gamma\right)ds + \int_T^{\tau_n} sG_2(s)\left(\overline{g}(\overline{A}_n)+\gamma\right)ds \\ \leq c_f\int_{\tau_n}^{+\infty} sG_1(s)\left(\overline{f}(\overline{B}_n a_2 r_{\alpha_1}(s))+\gamma\right)ds + c_g\int_{\tau_n}^{+\infty} sG_2(s)\left(\overline{g}(\overline{A}_n a_1 r_{\alpha_2}(s))+\gamma\right)ds.\end{aligned}$$

Aqui repetimos o argumento visto a pouco na demonstração do Lema 2.6, notando que não pode valer

$$\gamma\int_T^{\tau_n} s(G_1(s)+G_2(s))ds \leq \gamma\int_{\tau_n}^{+\infty} s(c_fG_1(s)+c_gG_2(s))ds,$$

para conquistar que

$$\begin{aligned}\overline{f}(\overline{B}_n)\int_T^{\tau_n} sG_1(s)ds + \overline{g}(\overline{A}_n)\int_T^{\tau_n} sG_2(s)ds \\ \leq \int_{\tau_n}^{+\infty} s\max\{c_fG_1(s),c_gG_2(s)\}\left[\overline{f}(\overline{B}_n a_2 r_{\alpha_1}(s))+\overline{g}(\overline{A}_n a_1 r_{\alpha_2}(s))\right]ds.\end{aligned}$$

Daqui obtemos uma contradição. Portanto o lema está provado. ■

Finalmente, com os resultados estabelecidos até aqui podemos provar que

Teorema 2.4. *Suponha as hipóteses (H_1), (H_2), (H_ϕ) com $\alpha_1 = \alpha_2$ e (LH). Então o sistema (2.1) possui solução radialmente simétrica positiva.*

Demonstração. Vamos garantir que as hipóteses do Teorema de Krasnoselskii são satisfeitas, ou seja, que valem (a), (b), (c) e (d). Primeiro note que estamos trabalhando com o cone (veja o Capítulo 1)

$$C = \{(u,v) \in X\,;\, u,v \geq 0\}.$$

Sabemos que $F(0,0) = (0,0)$, a compacidade de F foi garantida pelo Lema 2.1 e sua invariância sobre o cone C vem do fato das funções serem não negativas. Agora vamos considerar a homotopia $H : [0,\gamma_0]\times C \to C$ dada por $H(\gamma,(u,v)) = F_\gamma(u,v)$, tal homotopia é compacta, satisfaz $H(0,(u,v)) = F(u,v)$. Com isto já verificamos a validade de (b).

Pelo Lema 2.3 temos que $(u,v) \neq \zeta F(u,v)$ para todo $\|(u,v)\| = s_0$ e para cada $\zeta \in [0,1]$, donde vale (a). Ainda mais, pelo Lema 2.5 o conjunto dos pontos fixos do operador F_γ é limitado, assim podemos considerar $R > s_0$ suficientemente grande de sorte que

$$H(\gamma,(u,v)) = F_\gamma(u,v) \neq (u,v),$$

para todo $\|(u,v)\| = R$ e $\gamma \in [0,\gamma_0]$, provando que vale (c). Por fim, pelo γ_0 tomado pelo Lema 2.4, vale que

$$H(\gamma_0,(z,w)) \neq (u,v),$$

para todo $\|(u,v)\| \leq R$, isto é, vale (d). Portanto o operador F tem um ponto fixo $(u,v) \in C$ tal que $s_0 < \|(u,v)\| < R$, que é uma solução radialmente simétrica do Sistema (2.1). ∎

Argumentando de maneira semelhante também provamos que vale o mesmo resultado quando $\alpha_2 > \alpha_1$ e trocando a hipótese (H_1) pela hipótese (H_4), isto é,

Teorema 2.5. *Suponha as hipóteses (H_2), (H_ϕ) e $\alpha_2 > \alpha_1$ com (LH) e (H_4). Então o sistema (2.1) possui uma solução radialmente simétrica positiva.*

Demonstração. A validade de (a), (b) e (d) é feita de maneira exatamente análoga ao que foi feito no teorema anterior, assim basta mostrar que vale (c). Para tanto, pelo Lema 2.6 também obtemos que o conjunto dos pontos fixos do operador F_γ é limitado só que dessa vez fazendo o uso das hipóteses (H_2), (H_4) e $\alpha_2 > \alpha_1$, logo podemos tomar $R > s_0$ suficientemente grande tal que

$$H(\zeta,(u,v)) = F_\gamma(u,v) \neq (u,v),$$

para cada $\|(u,v)\| = R$ e $\gamma \in [0,\gamma_0]$. Assim também garantimos a validade de (c).

Portanto, existe um ponto fixo $(u,v) \in C$, com $s_0 < \|(u,v)\| < R$, que é solução radialmente simétrica positiva do Sistema (2.1). ∎

Estabelecemos também a existência de solução radial positiva para o Sistema (2.12) do tipo Hamiltoniano:

Teorema 2.6. *Suponha as hipóteses (H_5), (H_6), (H_7) e $(LH)'$. Então o Sistema (2.12) possui solução radialmente simétrica positiva.*

Demonstração. Similar ao que foi feito nos dois últimos teoremas. Aqui recordamos que o operador $\hat{F}$ está bem definido, é invariante sobre o cone C e verifica $\hat{F}(0,0) = (0,0)$. Semelhante ao que foi feito anteriormente, consideramos a homotopia $H : [0,\hat{\gamma}_0] \times C \to C$ dada por $H(\gamma,(u,v)) = \hat{F}_\gamma(u,v)$, que já sabemos ser compacta e satisfaz $H(0,(u,v)) = \hat{F}(u,v)$. Desse modo vale (b).

Como mencionamos $(u,v) \neq \zeta\hat{F}(u,v)$ para cada $\|(u,v)\| = s_0$ e $\zeta \in [0,1]$, assim também vale (a). Ademais, pelo Lema 2.7 o conjuntos dos pontos fixos do operador $\hat{F}_\gamma$ é limitado, daí podemos considerar $R > s_0$ suficientemente grande tal que

$$H(\gamma,(u,v)) = \hat{F}_\gamma(u,v) \neq (u,v),$$

para $\|(u,v)\| = R$ e $\gamma \in [0,\hat{\gamma}_0]$, isso garante a validade de (c).

Por fim, recordamos que $\hat{\gamma}_0$ foi tomado de modo que o Sistema (2.23) não tivesse solução, dessa forma vale

$$H(\gamma_0,(u,v)) = \hat{F}_{\gamma_0}(u,v) \neq (u,v)$$

para todo $\|(u,v)\| \leq R$, provando que vale (d).

Portanto, existe um ponto fixo de $\hat{F}$ de tal sorte que $s_0 < \|(u,v)\| < R$, do qual obtemos uma solução radialmente simétrica positiva do Sistema (2.12). ∎

2.4 Aplicações

Nesta seção apresentamos algumas aplicações dos principais resultados demonstrados ao longo do capítulo, obtendo soluções radiais positivas para alguns problemas.

2.4.1 Sistema Elíptico envolvendo o gradiente

Primeiro considere o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla u) = |x|^{\alpha}|\nabla u|^2 + f(u,v), & x \in B, \\ -\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla v) = |x|^{\alpha}|\nabla v|^2 + g(u,v), & x \in B, \\ u(x) = 0 = v(x), & x \in \partial B, \end{cases} \tag{2.24}$$

onde B é a bola unitária do $\mathbb{R}^n$ e $f,g : [0,+\infty)\times[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ são funções contínuas. Note que existe uma dependência do gradiente, dessa forma não podemos usar nos resultados vistos. Porém, vamos prosseguir realizando a mudança de variáveis

$$\begin{cases} z = e^u - 1 \\ w = e^v - 1 \end{cases}, \tag{2.25}$$

para transformar o Sistema (2.24) no sistema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla z) = (z+1)f(\ln(z+1),\ln(w+1)), & x \in B, \\ -\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla w) = (w+1)g(\ln(z+1),\ln(w+1)), & x \in B, \\ z(x) = 0 = w(x), & x \in \partial B. \end{cases} \tag{2.26}$$

Com efeito, para fixar ideias vamos trabalhar com a primeira equação do Sistema (2.24) substituindo a mudança de variáveis $z = e^u - 1$ e usando que $u = \ln(z+1)$: primeiro obtemos que $\nabla u = \nabla(\ln(z+1)) = 1/(z+1)\nabla z$. Com isto, segue-se

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla u) &= -\operatorname{div}\left(|x|^{\alpha}\frac{1}{z+1}\nabla z\right) \\ &= -\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(|x|^{\alpha}\frac{1}{z+1}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right) \\ &= -\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-|x|^{\alpha}\frac{1}{(z+1)^2}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_j} + \frac{1}{z+1}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(|x|^{\alpha}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right)\right) \\ &= -\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-|x|^{\alpha}\frac{1}{(z+1)^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{1}{z+1}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(|x|^{\alpha}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right)\right) \\ &= |x|^{\alpha}\frac{1}{(z+1)^2}|\nabla z|^2 - \frac{1}{z+1}\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla z). \end{aligned}$$

Por outro lado, ainda com $u = \ln(z+1)$, temos

$$|x|^{\alpha}|\nabla u|^2 + f(u,v) = |x|^{\alpha}\frac{1}{(z+1)^2}|\nabla z|^2 + f(\ln(z+1),\ln(w+1)).$$

Com as igualdades obtidas devemos ter

$$|x|^{\alpha}\frac{1}{(z+1)^2}|\nabla z|^2 + f(\ln(z+1),\ln(w+1)) = |x|^{\alpha}\frac{1}{(z+1)^2}|\nabla z|^2 - \frac{1}{z+1}\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla z) \Rightarrow$$

$$-\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla z) = (z+1)f(\ln(z+1),\ln(w+1)).$$

Esta é a primeira equação de (2.26). De maneira exatamente análoga procedemos com a segunda equação de (2.24) para obter a segunda equação de (2.26). Por fim, desde que $u(x) = 0 = v(x)$ quando $x \in \partial B$, segue-se que

$$\begin{cases} z = e^{u(x)} - 1 = e^0 - 1 = 0, & x \in \partial B \\ w = e^{v(x)} - 1 = e^0 - 1 = 0, & x \in \partial B. \end{cases}$$

Isto concluí a afirmação feita sobre a obtenção de (2.26) usando a Mudança de Variáveis (2.25). Agora sim, o Sistema (2.26) está na forma em que podemos usar os nossos resultados provados, eles garantirão soluções radialmente simétricas positivas, desde que as hipóteses técnicas sejam verificadas. Por exemplo, neste caso em que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, é possível verificar se as hipóteses (H_1), (H_2), (H_ϕ) e (LH) valem para o Sistema (2.26), para obtermos solução aplicando o Teorema 2.4.

2.4.2 Sistema Elíptico Não-Homogêneo

Agora vamos considerar o sistema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u) = |x|^{\beta_1}\left(f(u,v) + \eta a(|x|)\right), & x \in B, \\ -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_2}\nabla v) = |x|^{\beta_2}\left(g(u,v) + \eta b(|x|)\right), & x \in B, \\ \qquad u(x) = 0 = v(x), \quad x \in \partial B, \end{cases} \tag{2.27}$$

onde η é um parâmetro positivo, $B = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| < 1\}$, $\beta_1 - \alpha_1 > -2$ e $\beta_2 - \alpha_2 > -2$. Ademais, suponha que $a, b : [0,1) \to [0,+\infty)$ são funções contínuas e limitadas, e as não-linearidades $f, g : [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ são funções contínuas (que podemos considerar sendo crescentes, desde que elas podem ser as próprias funções $\overline{f}$ e $\overline{g}$, respectivamente) verificando as hipóteses (H_1), (H_ϕ) e

$$\lim_{u+v\to 0^+} \frac{f(u,v)+g(u,v)}{u+v} = 0. \tag{2.28}$$

Vamos justificar que o Sistema (2.27) tem uma solução radialmente simétrica positiva para

η suficientemente pequeno. De fato, a primeira solução é obtida por meio de um ponto fixo do operador $F_\eta : X \to X$ dado por

$$F_\eta(z,w)(t) = (A_\eta(z,w)(t), B_\eta(z,w)(t)),$$

onde

$$A_\eta(z,w)(t) = \int_0^t \int_s^{+\infty} G_1(\tau)\left[f(z(\tau), w(a_2 r_{\alpha_1}(\tau))) + \eta\overline{a}(\tau)\right] d\tau ds,$$

$$B_\eta(z,w)(t) = \int_0^t \int_s^{+\infty} G_2(\tau)(g(z(a_1 r_{\alpha_2}(\tau)), w(\tau)) + \eta\overline{b}(\tau))\, d\tau ds,$$

onde $\overline{a}(\tau) = a(r_{\alpha_1}(\tau))$ e $\overline{b}(\tau) = b(r_{\alpha_2}(\tau))$. É importante notar que aqui também é realizado o mesmo procedimento feito na seção de Estimativa a Priori, supondo a existência de soluções radialmente simétricas positivas, realizando as mudanças de variáveis vista para obter o operador F_η que, pelas mesma justificativas vistas anteriormente, é compacto.

Podemos fazer as estimativas

$$\begin{aligned}
\|F_\eta(z,w)\| &= |A_\eta(z,w)|_\infty + |B_\eta(z,w)|_\infty \\
&= \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} G_1(\tau)\left(f(z(\tau), w(a_2 r_{\alpha_1}(\tau))) + \eta\overline{a}(\tau)\right) d\tau ds \\
&\quad + \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} G_2(\tau)\left(g(z(a_1 r_{\alpha_2}(\tau)), w(\tau)) + \eta\overline{b}(\tau)\right) d\tau ds \\
&\leq \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} G_1(\tau) f(z(\tau), w(a_2 r_{\alpha_1}(\tau))) d\tau ds + \eta|\overline{a}|_\infty \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} G_1(\tau) d\tau ds \\
&\quad + \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} G_2(\tau) g(z(a_1 r_{\alpha_2}(\tau)), w(\tau)) d\tau ds + \eta|\overline{b}|_\infty \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} G_2(\tau) d\tau ds \\
&\leq \left[f(|z|_\infty, |w|_\infty) + g(|z|_\infty, |w|_\infty)\right] \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} \max\{G_1(\tau), G_2(\tau)\} d\tau ds \\
&\quad + \eta\left(|\overline{a}|_\infty + |\overline{b}|_\infty\right) \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} \max\{G_1(\tau), G_2(\tau)\} d\tau ds,
\end{aligned}$$

donde podemos escrever

$$\|F_\eta(z,w)\| \leq c_1(f(|z|_\infty, |w|_\infty) + g(|z|_\infty, |w|_\infty)) + c_2\eta,$$

onde

$$c_1 = \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} \max\{G_1(\tau), G_2(\tau)\} d\tau ds \quad \text{e} \quad c_2 = \left(|\overline{a}|_\infty + |\overline{b}|_\infty\right) c_1.$$

Ademais de (2.28) para $1/(2c_1) > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que se $\|(z,w)\| = \delta_1$ então

$$f(|z|_\infty, |w|_\infty) + g(|z|_\infty, |w|_\infty) \leq \frac{1}{2c_1}(|z|_\infty + |w|_\infty) = \frac{1}{2c_1}\|(z,w)\| = \frac{\delta_1}{2c_1}$$

e daí

$$c_1(f(|z|_\infty, |w|_\infty) + g(|z|_\infty, |w|_\infty)) \leq \frac{\delta_1}{2}.$$

Agora, considerando $0<\overline{\eta}<\frac{\delta_1}{2c_2}$ tal que para cada η suficientemente pequeno $0<\eta<\overline{\eta}$, devemos ter

$$
\begin{aligned}
\|F_\eta(z,w)\| &\le c_1(f(|z|_\infty,|w|_\infty)+g(|z|_\infty,|w|_\infty))+c_2\eta\\
&<\frac{\delta_1}{2}+c_2\frac{\delta_1}{2c_2}\\
&=\delta_1\\
&=\|(z,w)\|.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\|F_\eta(z,w)\| &= |A_\eta(z,w)|_\infty+|B_\eta(z,w)|_\infty\\
&=\int_0^{+\infty}\int_s^{+\infty}G_1(\tau)(f(z(\tau),w(a_2r_{\alpha_1}(\tau)))+\eta\overline{a}(\tau))d\tau ds\\
&\quad+\int_0^{+\infty}\int_s^{+\infty}G_2(\tau)(g(z(a_1r_{\alpha_2}(\tau)),w(\tau))+\eta\overline{b}(\tau))d\tau ds\\
&\ge\eta\int_0^{+\infty}\int_s^{+\infty}G_1(\tau)\overline{a}(\tau)d\tau ds+\eta\int_0^{+\infty}\int_s^{+\infty}G_2(\tau)\overline{b}(\tau)d\tau ds\\
&\ge\eta\int_0^{+\infty}\int_s^{+\infty}\min\{G_1(\tau),G_2(\tau)\}(\overline{a}(\tau)+\overline{b}(\tau))d\tau ds\\
&\ge\eta\left(\min_{\tau\ge0}\{\overline{a}(\tau)\}+\min_{\tau\ge0}\{\overline{b}(\tau)\}\right)\int_0^{+\infty}\int_s^{+\infty}\min\{G_1(\tau),G_2(\tau)\}d\tau ds,
\end{aligned}
$$

e assim podemos escrever

$$\|F_\eta(z,w)\|>c_3\eta,$$

onde

$$c_3<\left(\min_{\tau\ge0}\{\overline{a}(\tau)\}+\min_{\tau\ge0}\{\overline{b}(\tau)\}\right)\int_0^{+\infty}\int_s^{+\infty}\min\{G_1(\tau),G_2(\tau)\}d\tau ds.$$

Agora desejamos $0<\overline{\delta}_1<\delta_1$ de sorte que $c_3\eta>\overline{\delta}_1$, assim basta considerar $\overline{\delta}_1>0$ tal que

$$\overline{\delta}_1<\min\{\delta_1,c_3\eta\}.$$

Logo, se $\|(z,w)\|=\overline{\delta}_1$, então

$$\|F_\eta(z,w)\|>\|(z,w)\|.$$

Recapitulando, obtemos até aqui $0<\overline{\delta}_1<\delta_1$ tais que

(a) $\|F_\eta(z,w)\|<\|(z,w)\|$ para todo $\|(z,w)\|=\delta_1$;

(b) $\|F_\eta(z,w)\|>\|(z,w)\|$ para todo $\|(z,w)\|=\overline{\delta}_1$.

Portanto podemos aplicar um dos teoremas de ponto fixo em cones, para obter um ponto fixo (z_1,w_1) de F_η, que por sua vez nos fornece uma solução (u_1,v_1) para o Sistema (2.27). O leitor pode consulta detalhes deste último teorema no Capítulo 1. A solução (z_1, w_1) depende de η que pode ser escolhido suficientemente pequeno.

Não precisamos parar por aqui: considerando a solução (u_1, v_1) associada ao ponto fixo (z_1, w_1), note que se $(u+u_1, v+v_1)$ também é solução de (2.27) então temos

$$\begin{aligned}
|x|^{\beta_1}\left(f(u+u_1,v+v_1)+\eta a(|x|)\right) &= -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla(u+u_1)) \\
&= -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u) - \operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u_1) \\
&= -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u) + |x|^{\beta_1}\left(f(u_1,v_1)+\eta a(|x|)\right),
\end{aligned}$$

de onde podemos escrever

$$|x|^{\beta_1}\left(f(u+u_1,v+v_1)-f(u_1,v_1)\right) = -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u).$$

De maneira análoga, podemos escrever

$$|x|^{\beta_2}\left(g(u+u_1,v+v_1)-g(u_1,v_1)\right) = -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_2}\nabla v).$$

Então, se para as funções

$$\mathbf{f}(|x|,u,v) = f(u+u_1,v+v_1)-f(u_1,v_1)$$

e

$$\mathbf{g}(|x|,u,v) = g(u+u_1,v+v_1)-g(u_1,v_1)$$

valem as hipóteses (H_ϕ) e (LH), então obtemos uma segunda solução resolvendo o sistema

$$\begin{cases}
-\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u) = |x|^{\beta_1}\mathbf{f}(|x|,u,v), & x \in B, \\
-\operatorname{div}(|x|^{\alpha_2}\nabla v) = |x|^{\beta_2}\mathbf{g}(|x|,u,v), & x \in B, \\
\quad u(x) = 0 = v(x), & x \in \partial B.
\end{cases} \tag{2.29}$$

De fato as funções $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ satisfazem as hipóteses do Teorema 2.4 com $\alpha_1 = \alpha_2$, uma vez que, notamos sem dificuldade, as hipóteses (H_1) e (H_2) são herdadas das funções f e g. Com construções similares é possível obter situações em que aplicamos os Teoremas 2.5 e 2.6 para obter segundas soluções.

Observação 2.9. No Sistema (2.27) também é possível trabalhar com situações em que as funções f e g dependam de $|x|$, que neste caso temos o sistema na forma

$$\begin{cases}
-\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1}\nabla u) = |x|^{\beta_1}\left(f(|x|,u,v)+\eta a(|x|)\right), & x \in B, \\
-\operatorname{div}(|x|^{\alpha_2}\nabla v) = |x|^{\beta_2}\left(g(|x|,u,v)+\eta b(|x|)\right), & x \in B, \\
\quad u(x) = 0 = v(x), & x \in \partial B.
\end{cases}$$

No entanto, para encontrar solução para η suficientemente pequeno precisamos de hipóteses adicionais. Por exemplo, $f,g:[0,1]\times[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ serem crescentes em todas as entradas. Outro maneira é supondo que vale a hipótese (LH). Em ambos os casos, realizando manipulações similares as feitas, para η suficientemente pequeno podemos obter $0<\overline{\delta}_1<\delta_1$ tais que

$$\|F_\eta(z,w)\|<\|(z,w)\| \quad \text{e} \quad \|F_\eta(z,w)\|>\|(z,w)\|,$$

para $\|(z,w)\|=\delta_1$ e para $\|(z,w)\|=\overline{\delta}_1$, respectivamente.

Vejamos um exemplo particular:

(a) Sistemas envolvendo somas de potências

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla u)=|x|^{\beta_1}(u^{p_1}+v^{q_1}+\eta c_1(|x|)), & x\in B,\\ -\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla v)=|x|^{\beta_2}(u^{p_2}+v^{q_2}+\eta c_2(|x|)), & x\in B\\ \qquad u(x)=0=v(x), \quad x\in\partial B, \end{cases}$$

com $\beta_i-\alpha>-2$, $1<q_2,p_1,p_2,q_1<\frac{2+\beta_i-\alpha}{N+\alpha-2}$, para $i=1,2$. Admitindo que $c_1,c_2:B\to[0,+\infty)$ são funções contínuas e limitadas. Neste caso temos

(i) Garantimos uma solução positiva quando $\eta=0$;

(ii) Temos solução positiva quando $\eta>0$ é uma suficientemente pequena.

Neste caso temos

$$f(u,v)=u^{p_1}+v^{q_1} \quad \text{e} \quad g(u,v)=u^{p_2}+v^{q_2},$$

e vamos considerar

$$\overline{f}(u,v)=f(u,v) \quad \text{e} \quad \overline{g}(u,v)=g(u,v).$$

Note que o item (ii) é resolvido como caso particular do que vimos no começo dessa seção. De fato, temos

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(u,v)+g(u,v)}{u+v}\right| &\le \frac{|u|^{p_1}+|v|^{q_1}+|u|^{p_2}+|v|^{q_2}}{u+v}\\ &\le \frac{|u+v|^{p_1}}{u+v}+\frac{|u+v|^{q_1}}{u+v}+\frac{|u+v|^{p_2}}{u+v}+\frac{|u+v|^{q_2}}{u+v}.\end{aligned}$$

Desde que $p_1,p_2,q_1,q_2>1$ podemos concluir que esta última expressão converge para zero quando $u+v\to0^+$, e consequentemente

$$\lim_{u+v\to0^+}\frac{f(u,v)+g(u,v)}{u+v}=0$$

provando que vale (H_2) e a existência de solução para $\eta>0$ suficientemente pequeno.

Seguimos provando que vale (i). Para tanto vamos aplicar o Teorema 2.4, desse modo devemos verificar que valem as hipóteses (H_1), (LH) e (H_ϕ), sendo que já vimos que vale

(H_2). Naturalmente

$$\overline{f}(u,v) \leq f(u,v) \leq \overline{f}(u,v), \forall u,v \geq 0.$$

De maneira análoga

$$\overline{g}(u,v) \leq g(u,v) \leq \overline{g}(u,v), \forall u,v \geq 0.$$

Com isto já temos que vale (LH).

Agora veja que

$$\frac{\overline{f}(u,v)+\overline{g}(u,v)}{u+v} = \frac{u^{p_1}+v^{q_1}+u^{p_2}+v^{q_2}}{u+v}$$

como $p_1,p_2,q_1,q_2 > 1$ temos que esta última expressão converge para $+\infty$ quando $u+v \to +\infty$. Então vale (H_1). Por fim, para

$$\frac{\overline{f}(As,Bs)+\overline{g}(As,Bs)}{\overline{f}(A,B)+\overline{g}(A,B)} = \frac{(As)^{p_1}+(Bs)^{q_1}+(As)^{p_2}+(Bs)^{q_2}}{A^{p_1}+B^{q_1}+A^{p_2}+B^{q_2}} \leq s^{p_1}+s^{q_1}+s^{p_2}+s^{q_2},$$

para todo $s \geq 0$ e $A,B > 0$. Defina

$$\phi(s) := s^{p_1}+s^{q_1}+s^{p_2}+s^{q_2}, \, s \geq 0$$

Note que de $p_1,q_1,p_2,q_2 < \frac{2+\beta_i-\alpha}{N+\alpha-2}$ temos

$$p_i + \frac{N+\beta_i}{2-(N+\alpha)} < \frac{2+\beta_i-\alpha}{N+\alpha-2} + \frac{N+\beta_i}{2-(N+\alpha)} = \frac{2-\alpha-N}{N+\alpha-2} = -1$$

e de maneira exatamente análoga

$$q_i + \frac{N+\beta_i}{2-(N+\alpha)} < -1,$$

para $i = 1,2$. Com isto podemos garantir que

$$\int_1^{+\infty} \phi(s) s^{\frac{N+\beta_i}{2-(N+\alpha)}} < +\infty, \, i = 1,2.$$

Portanto também vale a hipótese (H_ϕ). Com isto aplicamos o Teorema 2.4 e obter uma solução positiva para o sistema visto em (a).

(b) Notamos também que é possível realizar o mesmo trabalho caso o sistema fosse da forma

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^\alpha \nabla u) = |x|^{\beta_1}(a_1(|x|)u^{p_1} + b_1(|x|)v^{q_1} + \eta c_1(|x|)), & x \in B, \\ -\operatorname{div}(|x|^\alpha \nabla v) = |x|^{\beta_2}(a_2(|x|)u^{p_2} + b_2(|x|)v^{q_2} + \eta c_2(|x|)), & x \in B, \\ u(x) = 0 = v(x), \quad x \in \partial B, \end{cases}$$

realizando apenas algumas mudanças nas considerações, a saber: com $\beta_i - \alpha > -2$, $1 < q_2, p_1 < \frac{2+\beta_i-\alpha}{N+\alpha-2}$, para $i = 1,2$, e apenas $p_2, q_1 > 1$. Admitindo também que $a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 :$

$B \to [0, +\infty)$ são funções contínuas e limitadas, satisfazendo $b_1(0), a_2(0) > 0$ e existe $0 < \rho < 1$ tal que $a_1(r) = b_2(r) = 0$ para $r \in [0, \rho]$.

Aqui temos

$$f(|x|, u, v) = a_1(|x|)u^{p_1} + b_1(|x|)v^{q_1} \quad \text{e} \quad g(|x|, u, v) = a_2(|x|)u^{p_2} + b_2(|x|)v^{q_2},$$

as quais podemos considerar

$$\overline{f}(u, v) = u^{p_1} \quad \text{e} \quad \overline{g}(u, v) = v^{q_2}.$$

Com tais considerações argumentamos de maneira semelhante a que foi feita logo acima para obter existência de solução quando $\eta = 0$ e também para $\eta > 0$ suficientemente pequeno.

(c) Sistema envolvendo produto de potências,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla u) = |x|^{\beta_1}(a_1(|x|)u^{p_1} + b_1(|x|)v^{q_1}), & x \in B, \\ -\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla v) = |x|^{\beta_2}(d(|x|)u^{p_2}v^{q_2}), & x \in B \\ u(x) = 0 = v(x), \quad x \in \partial B, \end{cases}$$

com $\beta_i - \alpha_i > -2$ para $i = 1, 2$, $1 < p_1, q_1 < \frac{2+\beta_i-\alpha_i}{N+\alpha_i-2}$ para $i = 1, 2$ e $p_2 + q_2 > 1$. Supondo também que $a_1, b_1, d : B \to [0, +\infty)$ são funções contínuas e limitadas com $a_1(0), b_1(0) > 0$ e que existe $0 < \rho < 1$ tal que $d(r) = 0$ para $r \in [0, \rho]$.

Neste caso temos

$$f(|x|, u, v) = a_1(|x|)u^{p_1} + b_1(|x|)v^{q_1} \quad \text{e} \quad g(|x|, u, v) = d(|x|)u^{p_2}v^{q_2}.$$

Para este caso, podemos também por exemplo garantir existência de solução aplicando o Teorema 2.4 considerando $\alpha_1 = \alpha_2$ juntamente com as funções

$$\overline{f}(u, v) = u^{p_1} + v^{q_1} \quad \overline{g}(u, v) = 0.$$

Aqui as justificativas das hipóteses (H_1), (LH), (H_ϕ) e (H_2) são feitas de maneira semelhante ao que já vimos anteriormente.

CAPÍTULO 3

Alguns Sistemas p,q-Laplacianos

3.1 Hipóteses Técnicas

Com base nas ideias de [4] usaremos argumentos envolvendo estimativas a priori e mudanças de variáveis para provar a existência de soluções radialmente simétricas positivas para o sistema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(|x|,u,v), & x \in B, \\ -\Delta_q v = g(|x|,u,v), & x \in B \\ \ u(x) = 0 = v(x), & x \in \partial B, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $1 < p,q \leq 2$, temos o p-Laplaciano que é dado por

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u),$$

B é a bola unitária do $\mathbb{R}^N$ e as não-linearidades

$$f,g : B \times [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$$

são funções contínuas. Vamos considerar as hipóteses:

(H_8) Existe $0 < \delta < 1$ tal que se $|x| \leq \delta$ e $u,v \geq 0$, temos

$$v^{p_2} \leq f(|x|,u,v) \leq Cv^{p_2} \quad \text{e} \quad u^{p_1} \leq g(|x|,u,v) \leq Cu^{p_1},$$

onde C é uma constante positiva e valem as seguintes desigualdades entre os expoentes

$$q-1 < p_1 < \frac{(p-1)}{(q-1)} \cdot \frac{((q-2)N+q)}{(N-p)}, \tag{3.2}$$

$$p-1 < p_2 < \frac{(q-1)}{(p-1)} \cdot \frac{((p-2)N+p)}{(N-q)}. \tag{3.3}$$

(H_9) Existem $\sigma_0, s_0 > 0$ tais que se $0 \leq u, v \leq s_0$ e $x \in B$, temos

$$f(|x|,u,v) \leq \sigma_0(u+v)^{p-1} \quad \text{e} \quad g(|x|,u,v) \leq \sigma_0(u+v)^{q-1}.$$

Observação 3.1. Note que a hipótese (H_8) implica na propriedade local de superlinearidade em $+\infty$, isto é, existe $0 < \delta < 1$ tal que para todo $|x| \leq \delta$ temos

$$\lim_{u+v\to+\infty} \left(\frac{f(|x|,u,v)}{(u+v)^{p-1}} + \frac{g(|x|,u,v)}{(u+v)^{q-1}} \right) = +\infty.$$

De fato, da hipótese (H_8) para $0 < \delta < 1$, com $|x| \leq \delta$ e $u, v \geq 0$ temos

$$v^{p_2} \leq f(|x|,u,v) \quad \text{e} \quad u^{p_1} \leq g(|x|,u,v),$$

donde segue-se que

$$\frac{v^{p_2}}{(u+v)^{p-1}} \leq \frac{f(|x|,u,v)}{(u+v)^{p-1}} \quad \text{e} \quad \frac{u^{p_1}}{(u+v)^{q-1}} \leq \frac{g(|x|,u,v)}{(u+v)^{q-1}}.$$

Assim, sabendo que $p-1 < p_2$ e $q-1 < p_1$, quando $u+v \to +\infty$ devemos ter que $u \to +\infty$ ou $v \to +\infty$, em qualquer dos casos as desigualdades acima estabelecem o limite desejado.

Note também que se $p = q$ em (3.2) e (3.3), então

$$p-1 < p_1, p_2 < \frac{(p-2)N+p}{N-p}.$$

Ademais, a hipótese (H_9) é verificada, por consequência, se a seguinte hipótese for válida

$(H_9)'$ As funções f, g satisfazem

$$\lim_{u+v\to 0} \left(\frac{f(|x|,u,v)}{(u+v)^{p-1}} + \frac{g(|x|,u,v)}{(u+v)^{q-1}} \right) = 0$$

uniformemente em B. Esta última hipótese pode ser mais fácil de ser obtida.

Além das hipóteses supracitadas será importante fixar a função $a_m : (0,1] \to [0,+\infty)$ dada por

$$a_m(r) = \frac{m-1}{N-m} \left[r^{(m-N)/(m-1)} - 1 \right].$$

Ademais, sendo a_m uma função contínua, injetora e definida em um intervalo da Reta, podemos considerar a função inversa $r_m : [0,+\infty) \to (0,1]$ cuja lei de formação é obtida por meio da expressão de a_m, a saber:

$$
\begin{aligned}
t = \frac{p-1}{N-p}\left[r_m^{\frac{m-N}{m-1}} - 1\right] &\Rightarrow \frac{N-m}{m-1}t = r_m^{\frac{m-N}{m-1}} - 1 \\
&\Rightarrow \frac{N-m}{m-1}t + 1 = r_m^{\frac{m-N}{m-1}} \\
&\Rightarrow r_m(t) = \left[1 + \frac{N-m}{m-1}t\right]^{\frac{m-1}{m-N}}.
\end{aligned}
$$

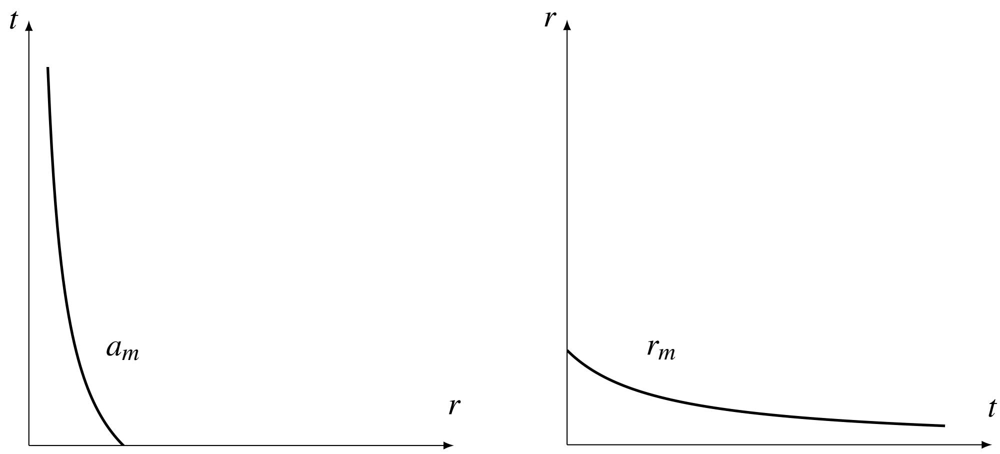
Note que as funções a_m e r_m são decrescentes. É interessante também conhecer a derivada de r_m,

$$
\begin{aligned}
r_m'(t) = \frac{d}{dt}r_m(t) &= \frac{d}{dt}\left[1 + \frac{N-m}{m-1}t\right]^{\frac{m-1}{m-N}} \\
&= \frac{m-1}{m-N}\left[1 + \frac{N-m}{m-1}t\right]^{\frac{m-1}{m-N}-1}\frac{N-m}{m-1} \\
&= -\left[1 + \frac{N-m}{m-1}t\right]^{\frac{N-1}{m-N}}.
\end{aligned}
$$

De onde podemos escrever

$$r_m'(t) = -r_m^{\frac{N-1}{m-1}}(t).$$

Apresentamos também um esboço do gráfico das funções a_m e r_m, para auxiliar no entendimento do comportamento dessas funções:



3.2 Estimativa a Priori

Vamos supor que u e v são soluções radialmente simétricas do Sistema (3.1). Assim podemos considerando $u(x) = u(r)$ com $r = |x|$:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} u(r) = u'(r)\frac{x_j}{r}, \text{ para cada } j = 1,2,...,N.$$

Dessa forma

$$\nabla u(r) = u'(r)\frac{x}{r} = \left(u'(r)\frac{x_1}{r}, \cdots, u'(r)\frac{x_n}{r}\right).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
|\nabla u|^{p-2} &= \left[\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^2}\right]^{p-2} \\
&= \left[\sqrt{[u'(r)]^2\frac{x_1^2}{r^2} + \cdots + [u'(r)]^2\frac{x_N^2}{r^2}}\right]^{p-2} \\
&= \left[\sqrt{[u'(r)]^2\frac{r^2}{r^2}}\right]^{p-2} \\
&= |u'(r)|^{p-2}.
\end{aligned}$$

E assim, obtemos que

$$\begin{aligned}
|\nabla u|^{p-2}\nabla u &= |u'(r)|^{p-2}\left(u'(r)\frac{x_1}{r}, \cdots, u'(r)\frac{x_N}{r}\right) \\
&= \left(|u'(r)|^{p-2}u'(r)\frac{x_1}{r}, \cdots, |u'(r)|^{p-2}u'(r)\frac{x_N}{r}\right).
\end{aligned}$$

Agora observe que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j}\left[|u'(r)|^{p-2}u'(r)\frac{x_j}{r}\right] &= |u'(r)|^{p-2}u'(r)r^{-1} - \frac{x_j}{r^2}|u'(r)|^{p-2}u'(r)\frac{x_j}{r} \\
&\quad + x_j\frac{\left[(p-2)|u'(r)|^{p-3}\frac{u'(r)}{|u'(r)|}u''(r)u'(r)\frac{x_j}{r} - |u'(r)|^{p-2}u''(r)\frac{x_j}{r}\right]r}{r^2} \\
&= |u'(r)|^{p-2}u'(r)r^{-1} - \frac{x_j^2}{r^3}|u'(r)|^{p-2}u'(r) \\
&\quad + \frac{1}{r^2}\left[(p-2)|u'(r)|^{p-3}\frac{u'(r)}{|u'(r)|}u''(r)u'(r)x_j^2 + |u'(r)|^{p-2}u''(r)x_j^2\right].
\end{aligned}$$

Daí, podemos obter que o $p-$Laplaciano de u será dado por

$$\begin{aligned}
\Delta_p u &= \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\\
&= \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[|u'(r)|^{p-2}u'(r)\frac{x_j}{r}\right]\\
&= N|u'(r)|^{p-2}u'(r)r^{-1} - |u'(r)|^{p-2}u'(r)r^{-1}\\
&\qquad + (p-2)|u'(r)|^{p-3}\frac{u'(r)}{|u'(r)|}u''(r)u'(r) + |u'(r)|^{p-2}u''(r)\\
&= (N-1)|u'(r)|^{p-2}u'(r)r^{-1}\\
&\qquad + (p-2)|u'(r)|^{p-3}\frac{u'(r)}{|u'(r)|}u''(r)u'(r) + |u'(r)|^{p-2}u''(r).
\end{aligned}$$

Recordando que u é solução do Sistema (3.1), podemos obter que

$$\begin{aligned}
-f(|x|,u,v) &= (N-1)|u'(r)|^{p-2}u'(r)r^{-1}\\
&\qquad + (p-2)|u'(r)|^{p-3}\frac{u'(r)}{|u'(r)|}u''(r)u'(r) + |u'(r)|^{p-2}u''(r).
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por r^{N-1}, conquistamos que

$$\begin{aligned}
r^{N-1}f(|x|,u,v) &= -(N-1)r^{N-2}|u'(r)|^{p-2}u'(r)\\
&\qquad - r^{N-1}\left[(p-2)|u'(r)|^{p-3}\frac{u'(r)}{|u'(r)|}u''(r)u'(r) + |u'(r)|^{p-2}u''(r)\right]\\
&= -\left(r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r)\right)',
\end{aligned}$$

onde o simbolo de derivação representa a derivação com relação a variável r. Daí, definindo $\phi_p(t) = |t|^{p-2}t$, a igualdade acima se resume a

$$-\left(r^{N-1}\phi_p(u'(r))\right)' = r^{N-1}f(r,u,v).$$

Procedendo de maneira exatamente análoga ao que foi feito para $v(x) = v(r)$ com $r = |x|$ também obtemos

$$-\left(r^{N-1}\phi_q(v'(r))\right)' = r^{N-1}g(r,u,v).$$

Assim finalmente, pelas igualdades estabelecidas, podemos escrever o Sistema (3.1) na forma

$$\begin{cases}
-\left(r^{N-1}\phi_p(u'(r))\right)' = r^{N-1}f(r,u,v), & r\in(0,1),\\
-\left(r^{N-1}\phi_q(v'(r))\right)' = r^{N-1}g(r,u,v), & r\in(0,1),\\
u'(0) = u(1) = 0 = v(1) = v'(0).
\end{cases} \tag{3.4}$$

Observação 3.2. Justificativa de $u'(0) = 0$: tomando arbitrariamente $y \in \mathbb{R}^N$ e definindo a função $h(t) = u(ty)$ podemos notar que h é par pois estamos considerando que u é radialmente simétrica. Além disso h é de classe C^1, logo existe h' e tal derivada é impar. Consequentemente,

$$h'(0) = h'(-0) = -h'(0),$$

implicando em $h'(0) = 0$, e portanto

$$0 = h'(0) = \langle \nabla u(0), y \rangle.$$

Desde que $y \in \mathbb{R}^N$ é arbitrário, podemos concluir que $\nabla u(0) = 0$.

Agora vamos aplicar a mudança de variáveis $t = a_m(r)$, com $m = p$ e $m = q$, daí podemos definir

$$z(t) = u(r_p(t)) \quad \text{e} \quad w(t) = v(r_q(t)).$$

Dessa forma

$$z'(t) = \frac{d}{dt} z(t) = \frac{d}{dt} u(r_p(t)) = u'(r_p(t)) \frac{d}{dt} r_p(t) = u'(r_p(t)) \left(-r_p^{\frac{N-1}{p-1}}(t) \right) = -u'(r_p(t)) r_p^{\frac{N-1}{p-1}}(t).$$

E assim

$$\begin{aligned}
\phi_p(z'(t)) &= \phi_p \left(-u'(r_p(t)) r_p^{\frac{N-1}{p-1}}(t) \right) \\
&= \left| -u'(r_p(t)) r_p^{\frac{N-1}{p-1}}(t) \right|^{p-2} \left(-u'(r_p(t)) r_p^{\frac{N-1}{p-1}}(t) \right) \\
&= -|u'(r_p(t))|^{p-2} u'(r_p(t)) r_p^{\frac{N-1}{p-1}}(t) r_p^{\frac{N-1}{p-1}}(t) \\
&= -\phi_p \left(u'(r_p(t)) \right) r_p^{N-1}(t).
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
-\left(\phi_p(z'(t)) \right)' &= \frac{d}{dt} \left[\phi_p(u'(r_p(t))) r_p^{N-1} \right] \\
&= -\phi_p'(u'(r_p(t))) u''(r_p(t)) r_p^{\frac{N-1}{p-1}}(t) r_p^{N-1}(t) - \phi_p(u'(r_p(t)))(N-1) r_p^{\frac{N-1}{p-1}}(t) r_p^{N-2}(t) \\
&= -r_p^{\frac{N-1}{p-1}}(t) \left[\phi_p'(u'(r_p(t))) u''(r_p(t)) r_p^{N-1}(t) + \phi_p(u'(r_p(t)))(N-1) r_p^{N-2}(t) \right] \\
&= -r_p^{\frac{N-1}{p-1}}(t) \frac{d}{dr_p} \left[r_p^{N-1}(t) \phi_p(u'(r_p(t))) \right] \\
&= -r_p^{\frac{N-1}{p-1}}(t) r_p^{N-1}(t) f(r_p(t), u(r_p(t)), v(r_p(t))) \\
&= r_p^{(N-1)p/(p-1)}(t) f(r_p(t), z(t), w(a_q r_p(t))).
\end{aligned}$$

Procedendo de maneira exatamente análoga podemos obter que

$$-\left(\phi_q(w'(t))\right)' = r_q^{(N-1)q/(q-1)}(t)g(r_q(t), z(a_p r_q(t)), w(t)).$$

Com as igualdades que acabamos de estabelecer, o Sistema (3.4) pode ser reescrito na forma

$$\begin{cases} -\left(\phi_p(z'(t))\right)' = r_p^{(N-1)p/(p-1)}(t)f(r_p(t), z(t), w(a_q r_p(t))), & t \in (0,+\infty), \\ -\left(\phi_q(z'(t))\right)' = r_q^{(N-1)q/(q-1)}(t)g(r_q(t), z(a_p r_q(t)), w(t)), & t \in (0,+\infty), \\ \qquad z(0) = w(0) = z'(+\infty) = w'(+\infty) = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Observação 3.3. As condições de fronteiras

$$z(0) = w(0) = z'(+\infty) = w'(+\infty) = 0,$$

são obtidas quando observamos que

$$z(0) = u(r_p(0)) = u(1) = 0 \quad \text{e} \quad w(0) = v(r_q(0)) = v(1) = 0,$$

bem como, quando notamos

$$z'(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} z'(t) = -\lim_{t\to+\infty} u'(r_p(t))r_p^{\frac{N-1}{p-1}}(t) = 0 \quad \text{e}$$

$$w'(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} w'(t) = -\lim_{t\to+\infty} v'(r_q(t))r_q^{\frac{N-1}{q-1}}(t) = 0.$$

Agora vamos integrar as equações do Sistema (3.5) e utilizar as condições de contorno para obter um novo sistema de equações integrais, a saber:

$$\begin{cases} z(t) = \displaystyle\int_0^t \left[\int_s^{+\infty} G_p(\tau)f(r_p(\tau), z(\tau), w(a_q r_p(\tau)))\,d\tau\right]^{\frac{1}{p-1}} ds, \\ w(t) = \displaystyle\int_0^t \left[\int_s^{+\infty} G_q(\tau)g(r_q(\tau), z(a_p r_q(\tau)), w(\tau))\,d\tau\right]^{\frac{1}{q-1}} ds, \end{cases} \tag{3.6}$$

onde

$$G_p(\tau) = \left(1 + \frac{N-p}{p-1}\tau\right)^{p(1-N)/(N-p)} \quad \text{e} \quad G_q(\tau) = \left(1 + \frac{N-q}{q-1}\tau\right)^{q(1-N)/(N-q)}.$$

De fato, para fixar ideias considere a primeira equação de (3.5),

$$-\left(\phi_p(z'(t))\right)' = r_p^{(N-1)p/(p-1)}(t)f(r_p(t), z(t), w(a_q r_p(t))),$$

integrando ambos os lados da igualdade, segue-se

$$
\begin{aligned}
-\int_s^{+\infty} (\phi_p(z'(\tau)))' d\tau &= \int_s^{+\infty} r_p^{(N-1)p/(p-1)}(\tau) f(r_p(\tau), z(\tau), w(a_q r_p(\tau)))\, d\tau \\
&= \int_s^{+\infty} \left(1 + \frac{N-p}{p-1}\tau\right)^{\frac{(p-1)}{(p-N)} \cdot \frac{(N-1)p}{(p-1)}} f(r_p(\tau), z(\tau), w(a_q r_p(\tau)))\, d\tau \\
&= \int_s^{+\infty} \left(1 + \frac{N-p}{p-1}\tau\right)^{(1-N)p/(N-p)} f(r_p(\tau), z(\tau), w(a_q r_p(\tau)))\, d\tau \\
&= \int_s^{+\infty} G_p(\tau) f(r_p(\tau), z(\tau), w(a_q r_p(\tau)))\, d\tau,
\end{aligned}
$$

e assim pelas condições de fronteiras

$$
\begin{aligned}
\int_s^{+\infty} G_p(\tau) f(r_p(\tau), z(\tau), w(a_q r_p(\tau)))\, d\tau &= -\left(\phi_p(z'(+\infty)) - \phi_p(z'(s))\right) \\
&= -\phi_p(0) + \phi_p(z'(s)) \\
&= \left|z'(s)\right|^{p-2} z'(s).
\end{aligned}
$$

Da igualdade acima devemos ter que $|z'(s)|^{p-2} z'(s) \geq 0$ pois f e G_p são não-negativas, e como $|z'(s)|^{p-2} \geq 0$ então deve valer $z'(s) \geq 0$, donde

$$
\left|z'(s)\right|^{p-2} z'(s) = \left[z'(s)\right]^{p-1}.
$$

Daí, podemos escrever

$$
z'(s) = \left[\int_s^{+\infty} G_p(\tau) f(r_p(\tau), z(\tau), w(a_q r_p(\tau)))\, d\tau\right]^{\frac{1}{p-1}}
$$

e consequentemente

$$
\int_0^t \left[\int_s^{+\infty} G_p(\tau) f(r_p(\tau), z(\tau), w(a_q r_p(\tau)))\, d\tau\right]^{\frac{1}{p-1}} ds = \int_0^t z'(s) ds = z(t).
$$

De maneira exatamente análoga, obtemos a expressão para w vista anteriormente. Assim fica justificada a obtenção do Sistema (3.6).

Por outro lado, vamos considerar o espaço

$$
X = \{(z, w) : z, w \in C([0, +\infty), \mathbb{R}) \text{ são funções limitadas}\},
$$

munido da norma da soma das normas do máximo, ou seja,

$$
\|(z, w)\| = |z|_\infty + |w|_\infty
$$

com

$$|z|_\infty = \sup_{t\in[0,+\infty)} |z(t)| \quad \text{e} \quad |w|_\infty = \sup_{t\in[0,+\infty)} |w(t)|.$$

Considere $F : C_1 \to X$ o operador definido por

$$F(z,w)(t) = (A(z,w)(t), B(z,w)(t))$$

onde

$$A(z,w)(t) = \int_0^t \left[\int_s^{+\infty} G_p(\tau) f(r_p(\tau), z(\tau), w(a_q r_p(\tau)))\, d\tau \right]^{\frac{1}{p-1}} ds \quad \text{e}$$

$$B(z,w)(t) = \int_0^t \left[\int_s^{+\infty} G_q(\tau g(r_q(\tau), z(a_p r_q(\tau)), w(\tau))\, d\tau \right]^{\frac{1}{q-1}} ds,$$

e o cone C_1 (veja Capítulo 1) é definido por

$$C_1 = \{(z,w) \in X \,:\, z,w \text{ são não negativas, côncavas e } z(0) = 0 = w(0)\}.$$

Podemos notar que as soluções do Sistema (3.6) são não negativas e crescentes, e ainda mais são côncavas. De fato, vale que

$$z'(t) = \left[\int_t^{+\infty} G_p(\tau) f(r_p(\tau), z(\tau), w(a_q r_p(\tau)))\, d\tau \right]^{\frac{1}{p-1}} \geq 0.$$

Para derivar novamente precisamos garantir que a expressão dentro dos colchetes é derivável, sabemos que de fato acontece mas por preciosismo fazemos a justificativa. Com efeito, podemos notar que

$$\begin{aligned} \frac{z'(t+h) - z'(t)}{h} &= \frac{1}{h} \left\{ \int_{t+h}^{+\infty} G_p(\tau) f(r_p(\tau), z(\tau), w(a_q r_p(\tau)))\, d\tau \right. \\ &\qquad \left. - \int_t^{+\infty} G_p(\tau) f(r_p(\tau), z(\tau), w(a_q r_p(\tau)))\, d\tau \right\} \\ &= -\frac{1}{h} \int_t^{t+h} G_p(\tau) f(r_p(\tau), z(\tau), w(a_q r_p(\tau)))\, d\tau. \end{aligned}$$

Daí, pela continuidade das funções envolvidas, podemos concluir que

$$z''(t) = \lim_{h\to 0} \frac{z'(t+h) - z'(t)}{h} = -G_p(t) f(r_p(t), z(t), w(a_q r_p(t))).$$

Com isto e pela Regra da Cadeia, segue-se

$$
\begin{aligned}
z''(t) &= \frac{1}{p-1}\left[\int_t^{+\infty} G_p(\tau)f(r_p(\tau),z(\tau),w(a_q r_p(\tau)))d\tau\right]^{\frac{2-p}{p-1}} \frac{d}{dt}\left[\int_t^{+\infty} G_p(\tau)f(r_p(\tau),z(\tau),w(a_q r_p(\tau)))d\tau\right] \\
&= \frac{-1}{p-1}\left[\int_t^{+\infty} G_p(\tau)f(r_p(\tau),z(\tau),w(a_q r_p(\tau)))d\tau\right]^{\frac{2-p}{p-1}} G_p(t)f(r_p(t),z(t),w(a_q r_p(t))) \leq 0.
\end{aligned}
$$

Isto mostra que z é concava. O procedimento para mostra que w também é concava é feito de maneira exatamente análoga. Com estes mesmo cálculos podemos notar que os pontos fixos do operador F são soluções do Sistema 3.5.

Com estas observações vamos começar a estabelecer alguns resultados.

Lema 3.1. *O operador F é bem definido, e o cone C_1 é invariante sob F. Ademais, F é um operador compacto.*

Demonstração. Primeiro, para todo $s \geq 0$ mostraremos que

$$
\int_s^{+\infty} G_m(\tau)\,d\tau = \frac{1}{N} G_m(s)^{\frac{N(m-1)}{m(N-1)}}.
$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
\int_s^{+\infty} G_m(\tau)\,d\tau &= \int_s^{+\infty}\left(1+\frac{N-m}{m-1}\tau\right)^{\frac{m(1-N)}{N-m}} d\tau \\
&= \frac{m-1}{N-m}\cdot \left.\frac{\left(1+\frac{N-m}{m-1}\tau\right)^{\frac{m(1-N)}{N-m}+1}}{\frac{m(1-N)}{N-m}+1}\right|_s^{+\infty} \\
&= \frac{m-1}{N-m}\cdot\frac{N-m}{N(1-m)}\left.\left(1+\frac{N-m}{m-1}\tau\right)^{\frac{N(1-m)}{N-m}}\right|_s^{+\infty} \\
&= -\frac{1}{N}\left.\left(1+\frac{N-m}{m-1}\tau\right)^{\frac{N(1-m)}{N-m}}\right|_s^{+\infty} \\
&= -\frac{1}{N}\lim_{b\to+\infty}\left(1+\frac{N-m}{m-1}b\right)^{\frac{N(1-m)}{N-m}} + \frac{1}{N}\left(1+\frac{N-m}{m-1}s\right)^{\frac{N(1-m)}{N-m}} \\
&= \frac{1}{N}\left(1+\frac{N-m}{m-1}s\right)^{\frac{N(1-m)}{N-m}\cdot\frac{m(1-N)}{m(1-N)}} \\
&= \frac{1}{N}\left(1+\frac{N-m}{m-1}s\right)^{\frac{m(1-N)}{N-m}\cdot\frac{N(1-m)}{m(1-N)}} \\
&= \frac{1}{N}G_m(s)^{\frac{N(m-1)}{m(N-1)}}.
\end{aligned}
$$

Ainda mais, desta última igualdade, segue-se que

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\left(\int_s^{+\infty} G_m(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{m-1}} ds &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{N^{1/(m-1)}}G_m(s)^{\frac{N(m-1)}{m(N-1)}\cdot\frac{1}{m-1}}\right) ds\\
&= \frac{1}{N^{1/(m-1)}}\int_0^{+\infty} G_m(s)^{\frac{N}{m(N-1)}}\,ds\\
&= \frac{1}{N^{1/(m-1)}}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{N-m}{m-1}s\right)^{\frac{m(1-N)}{N-m}\cdot\frac{N}{m(N-1)}} ds\\
&= \frac{1}{N^{1/(m-1)}}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{N-m}{m-1}s\right)^{-\frac{N}{N-m}} ds\\
&= \frac{1}{N^{1/(m-1)}}\cdot\frac{m-1}{N-m}\left.\frac{\left(1+\frac{N-m}{m-1}s\right)^{-\frac{N}{N-m}+1}}{-\frac{N}{N-m}+1}\right|_0^{+\infty}\\
&= \frac{1}{N^{1/(m-1)}}\cdot\frac{m-1}{N-m}\cdot\frac{N-m}{-m}\left.\left(1+\frac{N-m}{m-1}s\right)^{-\frac{m}{N-m}}\right|_0^{+\infty}\\
&= -\frac{m-1}{mN^{1/(m-1)}}\left.\left(1+\frac{N-m}{m-1}s\right)^{-\frac{m}{N-m}}\right|_0^{+\infty}\\
&= -\frac{m-1}{mN^{1/(m-1)}}\lim_{b\to+\infty}\left(1+\frac{N-m}{m-1}b\right)^{-\frac{m}{N-m}}+\frac{m-1}{mN^{1/(m-1)}}\\
&= \frac{m-1}{mN^{1/(m-1)}}.
\end{aligned}$$

Com isto provamos que

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_s^{+\infty} G_m(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{m-1}} ds < +\infty.$$

Desde que a conclusão é a mesma para $m = p$ e $m = q$, podemos concluir que o operador F está bem definido. A finitude dessas integrais não só prova a boa definição do operador F mas também, veremos logo adiante, é fundamental para garantir as demais propriedades do operador mencionado.

Observando que $A(z,w)(t)$ e $B(z,w)(t)$ são funções de classe C^2, vamos calcular suas derivadas de primeira e segunda ordem. Para fixar ideias vamos calcular as derivadas de $A(z,w)(t)$: a primeira decorre imediatamente do Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\frac{d}{dt}A(z,w)(t) = \left[\int_t^{+\infty} G_p(\tau)f(r_p(\tau),z(\tau),w(a_q r_p(\tau)))\,d\tau\right]^{\frac{1}{p-1}}.$$

Agora vamos para derivada de segunda ordem, de maneira semelhante ao que foi feito anteriormente aplicamos a Regra da Cadeia para obter que

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}A(z,w)(t) &= -\frac{1}{p-1}G_p(t)\left[\int_s^{+\infty} G_p(\tau)f(r_p(\tau),z(\tau),w(a_q r_p(\tau)))d\tau\right]^{\frac{2-p}{p-1}} f(r_p(t),z(t),w(a_q r_p(t)))\\ &= -\frac{1}{p-1}G_p(t)\left[\frac{d}{dt}A(z,w)(t)\right]^{2-p} f(r_p(t),z(t),w(a_q r_p(t))).\end{aligned}$$

Com um cálculo similar obtemos

$$\frac{d}{dt}B(z,w)(t) = \left[\int_t^{+\infty} G_q(\tau)g(r_q(\tau),z(a_p r_q(\tau)),w(\tau))d\tau\right]^{\frac{1}{q-1}}$$

e que

$$\frac{d^2}{dt^2}B(z,w)(t) = -\frac{1}{q-1}G_q(t)\left[\frac{d}{dt}B(z,w)(t)\right]^{2-q} g(r_q(t),z(a_p r_q(t)),w(t)).$$

De onde, sendo o sinal de $\frac{d}{dt}A(z,w)$ e $\frac{d}{dt}B(z,w)$ positivos, podemos concluir que $A(z,w)$ e $B(z,w)$ são crescentes, ademais como o sinal de $\frac{d^2}{dt^2}A(z,w)$ e $\frac{d^2}{dt^2}B(z,w)$ são negativos, deve valer que $A(z,w)$ e $B(z,w)$ são côncavas. Por fim, observando que

$$A(z,w)(0) = 0 = B(z,w)(0),$$

fica provado que C_1 é invariante sob F, ou seja, $F(C_1) \subset C_1$. Isto prova a segunda afirmação do enunciado.

Para finalizar resta provar que F é um operador completamente contínuo. Considere (z_n,w_n) uma sequência em C_1 tal que $\|(z_n,w_n)\| \leq C_0$ para $C_0 > 0$ e

$$M_1 = \max\{f(r,z,w) : (r,z,w) \in [0,1]\times[0,C_0]\times[0,C_0]\},$$

que está bem definido uma vez que f é contínua. Daí segue

$$\begin{aligned}|A(z_n,w_n)(t)| &\leq \int_0^{+\infty}\left[\int_s^{+\infty} G_p(\tau)|f(r_p(\tau),z_n(\tau),w_n(a_q r_p(\tau)))|d\tau\right]^{\frac{1}{p-1}} ds\\ &\leq M_1^{\frac{1}{p-1}}\int_0^{+\infty}\left[\int_s^{+\infty} G_p(\tau)\,d\tau\right]^{\frac{1}{p-1}} ds\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{dt}A(z_n,w_n)(t)\right| &\leq \left[\int_0^{+\infty} G_p(\tau)|f(r_p(\tau),z_n(\tau),w_n(a_q r_p(\tau)))|d\tau\right]^{\frac{1}{p-1}}\\ &\leq M_1^{\frac{1}{p-1}}\left[\int_0^{+\infty} G_p(\tau)\,d\tau\right]^{\frac{1}{p-1}}.\end{aligned}$$

Desse modo, como

$$(A(z_n,w_n)) \quad \text{e} \quad \left(\frac{d}{dt}A(z_n,w_n)\right)$$

são limitadas, devemos ter que $(A(z_n,w_n))$ é equicontínuo e equilimitado. Até aqui é possível usar o Teorema de Arzelá-Ascoli para obter uma subsequência de $(A(z_n,w_n))$ que é uniformemente converge em partes compactas de $[0,+\infty)$, no entanto, nosso objetivo é obter uma subsequência que seja uniformemente convergente em toda semirreta $[0,+\infty)$, aqui somos capazes de atingir esse objetivo devido a uma propriedade adicional, saber, dado $\varepsilon > 0$ existe $T = T(\varepsilon)$ de tal sorte que

$$\int_T^{+\infty}\left[\int_s^{+\infty} G_p(\tau)\,d\tau\right]^{\frac{1}{p-1}} ds < \varepsilon.$$

Para tanto, primeiro notamos que pela propriedade acima, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $T_k > k$ tal que

$$\int_{T_k}^{+\infty}\left[\int_s^{+\infty} G_p(\tau)d\tau\right]^{1/(p-1)} ds < \frac{1}{2kM_1^{1/(p-1)}}.$$

Por outro lado, afirmamos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe uma subsequência de $(A(z_n,w_n))$ que converge uniformemente em $[0,T_k]$. Com efeito, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli exite $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ infinito, tal que $(A(z_n,w_n))_{n\in\mathbb{N}_1}$ converge uniformemente em $[0,T_1]$. Novamente pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, deve existir $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ infinito e com $\min\mathbb{N}_1 = n_1 < n_2 = \min\mathbb{N}_2$, de sorte que $(A(z_n,w_n))_{n\in\mathbb{N}_2}$ converge uniformemente em $[0,T_2]$.

Prosseguindo com esta construção, obtemos

$$\mathbb{N}_k \subset \mathbb{N}_{k-1} \subset \cdots \subset \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$$

infinitos e com $\min\mathbb{N}_{k-1} = n_{k-1} < n_k = \min\mathbb{N}_k$, de tal sorte que $(A(z_n,w_n))_{n\in\mathbb{N}_k}$ converge uniformemente em $[0,T_k]$. Agora consideramos

$$\mathbb{N}_A = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\},$$

para o qual deve valer que $(A(z_n,w_n))_{n\in\mathbb{N}_A}$ converge uniformemente em $[0,+\infty)$. De fato, para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/k < \varepsilon/2$, sabemos que $(A(z_n,w_n))_{n\in\mathbb{N}_k}$ é uniformemente de Cauchy em $[0,T_k]$, isto é, existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que

$$|A(z_n,w_n)(t) - A(z_m,w_n)(t)| < \varepsilon/2, \forall t \in [0,T_k], \text{ para } n,m \in \mathbb{N}_k \text{ com } n,m > n_0.$$

Dessa forma, caso $t \leq T_k$ então já vale que

$$|A(z_n,w_n)(t) - A(z_m,w_n)(t)| < \varepsilon/2, \text{ para } n,m \in \mathbb{N}_A, \text{ com } n,m > n_0.$$

Por outro lado, quando $t > T_k$ temos, para $m,n \in \mathbb{N}_A$ e $n,m > n_0$ que

$$
\begin{aligned}
|A(z_n,w_n)(t) - A(z_m,w_m)(t)| &\leq |A(z_n,w_n)(T_k) - A(z_m,w_m)(T_k)| \\
&\quad + \left| \int_{T_k}^{t} \left[\int_{s}^{+\infty} G_p(\tau) f(r_p(\tau), z_n(\tau), w_n(a_q r_p(\tau))) d\tau \right]^{\frac{1}{p-1}} ds \right| \\
&\quad + \left| \int_{T_k}^{t} \left[\int_{s}^{+\infty} G_p(\tau) f(r_p(\tau), z_m(\tau), w_m(a_q r_p(\tau))) d\tau \right]^{\frac{1}{p-1}} ds \right| \\
&< \varepsilon/2 + 2M_1^{1/(p-1)} \int_{T_k}^{+\infty} \left[\int_{s}^{+\infty} G_p(\tau) d\tau \right]^{p/(p-1)} ds \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 2M_1^{1/(p-1)} \frac{1}{2kM_1^{1/(p-1)}} \\
&< \varepsilon, \text{ para } n,m \in N_A \text{ com } n,m \geq n_0
\end{aligned}
$$

Assim, $(A(z_n,w_n))_{n \in N_A}$ é de Cauchy em $[0,+\infty)$ e, consequentemente, deve ser uniformemente convergente em $[0,+\infty)$.

De maneira exatamente análoga, ainda com (z_n,w_n) tal que $\|(z_n,w_n)\| \leq C_0$, mas agora tomando

$$M_2 = \max\{g(r,z,w) : (r,z,w) \in [0,1] \times [0,C_0] \times [0,C_0]\},$$

vamos garantir a existência de uma subsequência de $(B(z_n,w_n))$ que converge uniformemente em $[0,+\infty)$. Novamente primeiro notamos que

$$
\begin{aligned}
|B(z_n,w_n)(t)| &\leq \int_0^{+\infty} \left[\int_s^{+\infty} G_q(\tau) |g(r_q(\tau), z(a_p r_q(\tau), w(\tau))| d\tau \right]^{\frac{1}{q-1}} ds \\
&\leq M_2^{\frac{1}{q-1}} \int_0^{+\infty} \left[\int_s^{+\infty} G_q(\tau)\, d\tau \right]^{\frac{1}{q-1}} ds
\end{aligned}
$$

e que

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{d}{dt} B(z_n,w_n)(t) \right| &\leq \left[\int_0^{+\infty} G_q(\tau) |g(r_q(\tau), z(a_p r_q(\tau), w(\tau))|\, d\tau \right]^{\frac{1}{q-1}} \\
&\leq M_2^{\frac{1}{q-1}} \left[\int_0^{+\infty} G_q(\tau)\, d\tau \right]^{\frac{1}{q-1}}.
\end{aligned}
$$

Daí também vale que

$$(B(z_n,w_n)) \quad \text{e} \quad \left(\frac{d}{dt} B(z_n,w_n) \right)$$

são limitadas, acarretando que $(B(z_n,w_n))$ é equicontínuo e equilimitado. Enfatizamos que novamente podemos obter a existência de uma subsequência de $(B(z_n,w_n))$ uniformemente convergente em $[0,+\infty)$ devido a propriedade: para cada $\varepsilon > 0$ dado, $T = T(\varepsilon)$ de sorte que

$$\int_T^{+\infty} \left[\int_s^{+\infty} G_q(\tau)\, d\tau \right]^{\frac{1}{q-1}} ds < \varepsilon.$$

De fato, seguindo os mesmos passos vistos anteriormente obtemos um conjuntos de índices $N_B \subset \mathbb{N}$ de tal sorte que $(B(z_n, w_n))_{n \in N_B}$ é uniformemente convergente em $[0,+\infty)$.

Portanto, das subsequência de $(A(z_n, w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ e $(B(z_n, w_n))_{n\in\mathbb{N}}$, obtemos uma subsequência de $(F(z_n, w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente em $[0,+\infty)$. Provando que F é um operador compacto.

Prosseguimos provando que F é contínuo: seja (z_n, w_n) uma sequência em C_1 tal que

$$\|(z_n, w_n) - (z_0, w_0)\| \to 0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

Desse forma também vale que (z_n, w_n) é limitada, digamos $\|(z_n, w_n)\| \leq C_0$ e consideramos novamente M_1 e M_2 que foram dados anteriormente. Observamos também que da convergência uniforme $(z_n, w_n) \to (z_0, w_0)$ aliada a hipótese de f ser uma função contínua, temos

$$\lim_{n\to+\infty} \int_s^{+\infty} G_p(\tau) f(r_p(\tau), z_n(\tau), w_n(a_q r_p(\tau)))d\tau = \int_s^{+\infty} G_p(\tau) f(r_p(\tau), z_0(\tau), w_0(a_q r_p(\tau)))d\tau.$$

Logo, adotando a notação

$$\Gamma_n(s) = \left[\int_s^{+\infty} G_p(\tau) f(r_p(\tau), z_n(\tau), w_n(a_q r_p(\tau))) \right]^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{e}$$

$$\Gamma_0(s) = \left[\int_s^{+\infty} G_p(\tau) f(r_p(\tau), z_0(\tau), w_0(a_q r_p(\tau)))d\tau \right]^{\frac{1}{p-1}},$$

podemos concluir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \Gamma_n = \Gamma_0$ pontualmente. Além disso, vale que

$$|\Gamma_n(s)| \leq M_1^{\frac{1}{p-1}} \left[\int_s^{+\infty} G_p(\tau)d\tau \right]^{\frac{1}{p-1}}, \forall s \in [0,+\infty),$$

com

$$\int_0^{+\infty} M_1^{\frac{1}{p-1}} \left[\int_s^{+\infty} G_q(\tau)d\tau \right]^{\frac{1}{q-1}} ds < +\infty.$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue-se

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} |\Gamma_n(s) - \Gamma_0(s)|\, ds = 0.$$

Com o limite acima e notando que

$$
\begin{aligned}
|A(z_n,w_n)(t)-A(z_0,w_0)(t)| &\leq \left|\int_0^t |\Gamma_n(s)-\Gamma_0(s)|\,ds\right| \\
&\leq \int_0^{+\infty} |\Gamma_n(s)-\Gamma_0(s)|\,ds,\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,+\infty),
\end{aligned}
$$

podemos finalmente obter que $|A(z_n,w_n)-A(z_0,w_0)|_\infty \to 0$.

De maneira similar, considerando

$$
\Psi_n(s) = \left[\int_s^{+\infty} G_q(\tau) g(r_q(\tau), z_n(a_p r_q(\tau)), w_n(\tau))\,d\tau\right]^{\frac{1}{q-1}} \qquad \text{e}
$$

$$
\Psi_0(s) = \left[\int_s^{+\infty} G_q(\tau) g(r_q(\tau), z_0(a_p r_q(\tau)), w_0(\tau))\,d\tau\right]^{\frac{1}{q-1}}.
$$

Também vale que $\lim\limits_{n\to+\infty} \Psi_n = \Psi_0$ pontualmente, com

$$
|\Psi_n(s)| \leq M_2^{\frac{1}{q-1}} \left[\int_s^{+\infty} G_q(\tau)\,d\tau\right]^{\frac{1}{q-1}},\ \forall s \in [0,+\infty)
$$

e

$$
\int_0^{+\infty} M_2^{\frac{1}{q-1}} \left[\int_s^{+\infty} G_q(\tau)\,d\tau\right]^{\frac{1}{q-1}} ds < +\infty.
$$

Assim, aplicamos também o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue-se

$$
\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} |\Psi_n(s)-\Psi_0(s)|\,ds = 0.
$$

De onde conquistamos que $|B(z_n,w_n)-B(z_0,w_0)|_\infty \to 0$.

Finalmente, provado que A e B são contínuas, podemos então concluir que F também é contínuo.

■

Estabelecidas as propriedades desejadas para o operador F, antes de irmos para o próximo resultado, faremos a seguinte observação que será importante para as próximas demonstrações:

Observação 3.4. Usando da hipótese (H_8) as desigualdades vista em (3.2) e (3.3), a saber

$$
p-1 < p_2 < \frac{(q-1)}{(p-1)} \cdot \frac{((p-2)N+p)}{(N-q)} \quad \text{e} \quad q-1 < p_1 < \frac{(p-1)}{(q-1)} \cdot \frac{((q-2)N+q)}{(N-p)},
$$

podemos obter que

$$
\int_0^{+\infty} sG_p(s)\left(a_q r_p(s)\right)^{p_2} ds < +\infty \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} sG_q(s)\left(a_p r_q(s)\right)^{p_1} ds < +\infty.
$$

Vamos justificar a finitude da primeira integral. Das expressões de a_q e r_p obtemos

$$\begin{aligned} a_q r_p(s) &= \frac{q-1}{N-q}\left\{\left[\left(1+\frac{N-p}{p-1}s\right)^{\frac{p-1}{p-N}}\right]^{\frac{q-N}{q-1}}-1\right\} \\ &< \frac{q-1}{N-q}\left(1+\frac{N-p}{p-1}s\right)^{\frac{p-1}{p-N}\cdot\frac{q-N}{q-1}}, \end{aligned}$$

agora usamos que $p_2 \geq 0$ e a expressão de G_p para escrever

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} sG_p(s)\left(a_q r_p(s)\right)^{p_2} &< \int_0^{+\infty} s\left(1+\frac{N-p}{p-1}s\right)^{\frac{p(1-N)}{N-p}}\left(\frac{q-1}{N-q}\right)^{p_2}\left(1+\frac{N-p}{p-1}s\right)^{\frac{p-1}{p-N}\cdot\frac{q-N}{q-1}p_2} ds \\ &= \left(\frac{q-1}{N-q}\right)^{p_2}\int_0^{+\infty} s\left(1+\frac{N-p}{p-1}s\right)^{\frac{p(1-N)}{N-p}+\frac{p-1}{p-N}\cdot\frac{q-N}{q-1}p_2} ds. \end{aligned}$$

Agora usamos (3.3) para conquistar que

$$\beta = \frac{p(1-N)}{N-p}+\frac{p-1}{p-N}\cdot\frac{q-N}{q-1}p_2 < -2.$$

Para concluir usamos a mudança de variáveis $y = 1+\frac{N-p}{p-1}s$ com

$$s = \frac{p-1}{N-p}(y-1) \quad \text{e} \quad ds = \frac{p-1}{N-p}dy,$$

para establecer que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} sG_p(s)\left(a_q r_p(s)\right)^{p_2} ds &< \left(\frac{q-1}{N-q}\right)^{p_2}\int_1^{+\infty}\frac{p-1}{N-p}(y-1)y^{\beta}\frac{p-1}{N-p}dy \\ &< \left(\frac{q-1}{N-q}\right)^{p_2}\left(\frac{p-1}{N-p}\right)^2\int_1^{+\infty} y^{\beta+1}dy. \end{aligned}$$

Desde que $\beta < -2$ devemos ter $\beta+1 < -1$ e portanto

$$\int_1^{+\infty} y^{\beta+1}dy < +\infty.$$

Isto prova a finitude da primeira integral, e com um procedimento análogo também justifica que a segunda integral é finita.

Ainda mais, nesta última observação podemos usar que $a_q r_p(s) \geq 1$ e $a_p r_q(s) \geq 1$ para todo s suficientemente grande, juntamente com $p_2, p_1 > 0$ para concluir que

$$\int_0^{+\infty} sG_p(s)ds < +\infty \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} sG_q(s)ds < +\infty.$$

Teorema 3.1 (Estimativa A Priori)**.** *Supondo a hipótese* (H_8)*, temos que o conjunto dos pontos fixos do operador* F *é limitado, ou seja, existe* $K > 0$ *de tal sorte que*

$$\|(z,w)\| \le K, \text{ para todo } (z,w) \in C_1 \text{ que satisfaz } F(z,w) = (z,w).$$

Demonstração. Suponha o contrário. Então deve existir uma sequência (z_n, w_n) de pontos fixos do operador F tal que

$$\|(z_n, w_n)\| \to +\infty.$$

Observe que como (z_n, w_n) é ponto fixo do operador F então podemos escrever

$$\begin{cases} z_n(t) = A(z_n, w_n)(t) = \displaystyle\int_0^t \left[\int_s^{+\infty} G_p(\tau) f(r_p(\tau), z_n(\tau), w_n(a_q r_p(\tau)))d\tau\right]^{\frac{1}{p-1}} ds \\ w_n(t) = B(z_n, w_n)(t) = \displaystyle\int_0^t \left[\int_s^{+\infty} G_q(\tau) g(r_q(\tau), z_n(a_p r_q(\tau)), w_n(\tau))d\tau\right]^{\frac{1}{q-1}} ds. \end{cases}$$

Vamos garantir que existe τ_n de sorte que

$$2(z_n(\tau_n) + w_n(\tau_n)) = \|(z_n, w_n)\|.$$

De fato, considere a função $\varphi(\tau) = 2(z_n(\tau) + w_n(\tau))$, e note que $\varphi(0) = 0$, ademais

$$\lim_{\tau \to +\infty} \varphi(\tau) = 2(|z_n|_\infty + |w_n|_\infty) = 2\|(z_n, w_n)\| > \|(z_n, w_n)\|.$$

Logo, sendo φ contínua, pelo Teorema do Valor Intermediário existe τ_n tal que

$$\|(z_n, w_n)\| = \varphi(\tau_n) = 2(z_n(\tau_n) + w_n(\tau_n)).$$

Dessa forma, realizando este procedimento para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos uma sequência (τ_n) sobre a qual afirmamos que

Afirmação 3.1.1. Passando a uma subsequência de (τ_n), caso necessário, podemos admitir que

$$\tau_n \to +\infty.$$

De fato, vamos admitir o contrário, daí podemos definir

$$0 < \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\tau_n\} = S < +\infty.$$

Agora vamos escolher o $0 < \delta < 1$ da hipótese (H_8) e $\overline{S} > 0$ de tal sorte que

$$r_p(\tau) < \delta \quad \text{e} \quad r_q(\tau) < \delta, \, \forall \tau > \overline{S},$$

com $\overline{S} > \max\{a_p r_q(S), a_q r_p(S)\}$. Observamos que desta última desigualdade, usando que a_p,

a_q, r_p e r_q são decrescentes, também deve valer que

$$a_p r_q(\overline{S}) \geq S \quad \text{e} \quad a_q r_p(\overline{S}) \geq S.$$

Pelas expressões de z_n e w_n vistas no começo da demonstração temos

$$\begin{cases} z_n(\overline{S}) = A(z_n, w_n)(\overline{S}) = \displaystyle\int_0^{\overline{S}} \left[\int_s^{+\infty} G_p(\tau) f(r_p(\tau), z_n(\tau), w_n(a_q r_p(\tau))) d\tau \right]^{\frac{1}{p-1}} ds \\ w_n(\overline{S}) = B(z_n, w_n)(\overline{S}) = \displaystyle\int_0^{\overline{S}} \left[\int_s^{+\infty} G_q(\tau) g(r_q(\tau), z_n(a_p r_q(\tau)), w_n(\tau)) d\tau \right]^{\frac{1}{q-1}} ds. \end{cases}$$

Daí, somando essas igualdades segue-se que

$$z_n(\overline{S}) + w_n(\overline{S}) = \int_0^{\overline{S}} \left[\int_s^{+\infty} S_p^n(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{p-1}} ds + \int_0^{\overline{S}} \left[\int_s^{+\infty} S_q^n(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{q-1}} ds,$$

onde, para simplificar a notação, escolhemos

$$\begin{cases} S_p^n(\tau) = G_p(\tau) f(r_p(\tau), z_n(\tau), w_n(a_q r_p(\tau))) \\ S_q^n(\tau) = G_q(\tau) g(r_q(\tau), z_n(a_p r_q(\tau)), w_n(\tau)). \end{cases}$$

É importante notar que ainda da hipótese (H_8) como fizemos $r_p(\tau) < \delta$ e $r_q(\tau) < \delta$ para todo $\tau \geq \overline{S}$, então obtemos as estimativas

$$S_p^n(\tau) \geq G_p(\tau) \left(w_n(a_q r_p(\tau)) \right)^{p_2} \quad \text{e} \quad S_q^n \geq G_q(\tau) \left(z_n(a_p r_q(\tau)) \right)^{p_1}.$$

Consequentemente, temos

$$\begin{aligned} z_n(\overline{S}) + w_n(\overline{S}) &= \int_0^{\overline{S}} \left[\int_s^{+\infty} S_p^n(\tau)\, d\tau \right]^{\frac{1}{p-1}} ds + \int_0^{\overline{S}} \left[\int_s^{+\infty} S_q^n(\tau)\, d\tau \right]^{\frac{1}{q-1}} ds \\ &\geq \int_0^{\overline{S}} \left[\int_{\overline{S}}^{+\infty} S_p^n(\tau)\, d\tau \right]^{\frac{1}{p-1}} ds + \int_0^{\overline{S}} \left[\int_{\overline{S}}^{+\infty} S_q^n(\tau)\, d\tau \right]^{\frac{1}{q-1}} ds \\ &= \overline{S} \left[\int_{\overline{S}}^{+\infty} S_p^n(\tau)\, d\tau \right]^{\frac{1}{p-1}} + \overline{S} \left[\int_{\overline{S}}^{+\infty} S_q^n(\tau)\, d\tau \right]^{\frac{1}{q-1}} \\ &\geq \overline{S} \left[\int_{\overline{S}}^{+\infty} G_p(\tau) \left(w_n(a_q r_p(\tau)) \right)^{p_2} d\tau \right]^{\frac{1}{p-1}} + \overline{S} \left[\int_{\overline{S}}^{+\infty} G_q(\tau) \left(z_n(a_p r_q(\tau)) \right)^{p_1} \right]^{\frac{1}{q-1}} \\ &\geq \overline{S} \left[\int_{\overline{S}}^{+\infty} G_p(\tau)\, d\tau \right]^{\frac{1}{p-1}} \left(w_n(a_q r_p(\overline{S})) \right)^{\frac{p_2}{p-1}} + \overline{S} \left[\int_{\overline{S}}^{+\infty} G_q(\tau)\, d\tau \right]^{\frac{1}{q-1}} \left(z_n(a_p r_q\left(\overline{S}\right)) \right)^{\frac{p_1}{q-1}} \\ &\geq \overline{S} \left[\int_{\overline{S}}^{+\infty} G_p(\tau)\, d\tau \right]^{\frac{1}{p-1}} \left(w_n(S) \right)^{\frac{p_2}{p-1}} + \overline{S} \left[\int_{\overline{S}}^{+\infty} G_q(\tau)\, d\tau \right]^{\frac{1}{q-1}} \left(z_n(S) \right)^{\frac{p_1}{q-1}} \\ &> \overline{S} \left[\int_{\overline{S}}^{+\infty} G_p(\tau)\, d\tau \right]^{\frac{1}{p-1}} \left(w_n(\tau_n) \right)^{\frac{p_2}{p-1}} + \overline{S} \left[\int_{\overline{S}}^{+\infty} G_q(\tau)\, d\tau \right]^{\frac{1}{q-1}} \left(z_n(\tau_n) \right)^{\frac{p_1}{q-1}}. \end{aligned}$$

De onde, obtemos

$$2\left[z_n(\tau_n)+w_n(\tau_n)\right]=\|(z_n,w_n)\|\geq k_1\left(w_n(\tau_n)\right)^{\frac{p_2}{p-1}}+k_2\left(z_n(\tau_n)\right)^{\frac{p_1}{q-1}},$$

onde

$$k_1=\overline{S}\left[\int_{\overline{S}}^{+\infty}G_p(\tau)d\tau\right]^{\frac{1}{p-1}}\quad \text{e}\quad k_2=\overline{S}\left[\int_{\overline{S}}^{+\infty}G_q(\tau)d\tau\right]^{\frac{1}{q-1}}$$

são constantes positivas. Ademais

$$2\geq\frac{k_1\left(w_n(\tau_n)\right)^{\frac{p_2}{p-1}}+k_2\left(z_n(\tau_n)\right)^{\frac{p_1}{q-1}}}{z_n(\tau_n)+w_n(\tau_n)},$$

que é uma contradição, desde que $\|(z_n,w_n)\|\to+\infty$ com $p_2>p-1$ e $p_1>q-1$, de acordo com o que foi visto em (3.2) e (3.3). Assim, fica provada a Afirmação 3.1.1.

Por outro lado, pela definição de τ_n e desde que (z_n,w_n) é ponto fixo do operador F, temos

$$2(z_n(\tau_n)+w_n(\tau_n))=\int_0^{+\infty}\left[\int_s^{+\infty}S_p^n(\tau)\,d\tau\right]^{\frac{1}{p-1}}ds+\int_0^{+\infty}\left[\int_s^{+\infty}S_q^n(\tau)\,d\tau\right]^{\frac{1}{q-1}}ds.$$

Para simplificar as notações, considere também

$$Y_n(s)=\int_s^{+\infty}S_p^n(\tau)\,d\tau\quad \text{e}\quad \Lambda_n(s)=\int_s^{+\infty}S_q^n(\tau)\,d\tau.$$

Com isto, podemos escrever

$$2\int_0^{\tau_n}Y_n(s)^{\frac{1}{p-1}}ds+2\int_0^{\tau_n}\Lambda_n(s)^{\frac{1}{q-1}}ds=\int_0^{+\infty}Y_n(s)^{\frac{1}{p-1}}ds+\int_0^{+\infty}\Lambda_n(s)^{\frac{1}{q-1}}ds,$$

e portanto

$$\begin{aligned}\int_0^{\tau_n}Y_n(s)^{\frac{1}{p-1}}ds+\int_0^{\tau_n}\Lambda_n(s)^{\frac{1}{q-1}}ds&=\int_0^{+\infty}Y_n(s)^{\frac{1}{p-1}}ds-\int_0^{\tau_n}Y_n(s)^{\frac{1}{p-1}}ds\\&\quad+\int_0^{+\infty}\Lambda_n(s)^{\frac{1}{q-1}}ds-\int_0^{\tau_n}\Lambda_n(s)^{\frac{1}{q-1}}ds\\&=\int_{\tau_n}^{+\infty}Y_n(s)^{\frac{1}{p-1}}ds+\int_{\tau_n}^{+\infty}\Lambda_n(s)^{\frac{1}{q-1}}ds.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Agora vamos usar o método da Integração por Partes para calcular as integrais acima: primeiro, para calcular

$$\int_0^{\tau_n}Y_n(s)^{\frac{1}{p-1}}ds\quad \text{e}\quad \int_{\tau_n}^{+\infty}Y_n(s)^{\frac{1}{p-1}}ds,$$

façamos

$$\begin{cases}\eta=Y_n(s)^{\frac{1}{p-1}}\\ d\kappa=ds\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d\eta=\frac{1}{p-1}Y_n(s)^{\frac{2-p}{p-1}}\left(-S_n^p(s)\right)ds\\ \kappa=s.\end{cases}$$

Substituindo nas integrais, temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\tau_n} Y_n(s)^{\frac{1}{p-1}} ds &= \left(sY_n(s)^{\frac{1}{p-1}} \right)\Big|_0^{\tau_n} + \frac{1}{p-1} \int_0^{\tau_n} sS_p^n(s) Y_n(s)^{\frac{2-p}{p-1}} ds \\
&= \tau_n Y_n(\tau_n)^{\frac{1}{p-1}} + \frac{1}{p-1} \int_0^{\tau_n} sS_p^n(s) Y_n(s)^{\frac{2-p}{p-1}} ds,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\int_{\tau_n}^{+\infty} Y_n(s)^{\frac{1}{p-1}} ds &= \left(sY_n(s)^{\frac{1}{p-1}} \right)\Big|_{\tau_n}^{+\infty} + \frac{1}{p-1} \int_{\tau_n}^{+\infty} sS_p^n(s) Y_n(s)^{\frac{2-p}{p-1}} ds \\
&= -\tau_n Y_n(\tau_n)^{\frac{1}{p-1}} + \frac{1}{p-1} \int_{\tau_n}^{+\infty} sS_p^n(s) Y_n(s)^{\frac{2-p}{p-1}} ds.
\end{aligned}
$$

Antes de continuar, destacamos que nesta última igualdade usamos que para, cada $n \in \mathbb{N}$,

$$
\lim_{s \to +\infty} sY_n(s)^{1/(p-1)} = 0.
$$

Isto vale pois, para $M_n = \sup\{ f(r,z,w)\,;\, (r,z,w) \in [0,1] \times [0, |z_n|_\infty] \times [0, |w_n|_\infty] \}$, temos

$$
\begin{aligned}
sY_n(s)^{1/(p-1)} &= s \left[\int_s^{+\infty} S_p^n(\tau)\, d\tau \right]^{1/(p-1)} \\
&= s \left[\int_s^{+\infty} G_p(\tau) f(r_p(\tau), z_n(\tau), w_n(a_q r_p(\tau)))\, d\tau \right]^{1/(p-1)} \\
&\leq s \left[M_n \int_s^{+\infty} G_p(\tau)\, d\tau \right]^{1/(p-1)} \\
&= M_n^{1/(p-1)} s \left[\int_s^{+\infty} G_p(\tau) d\tau \right]^{1/(p-1)}.
\end{aligned}
$$

E assim, usando a integral já calculada anteriormente, segue-se

$$
\begin{aligned}
sY_n(s)^{1/(p-1)} &\leq M_n^{1/(p-1)} s \left[\frac{1}{N} G_p(s)^{\frac{N(p-1)}{p(N-1)}} \right]^{1/(p-1)} \\
&= \frac{M_n^{1/(p-1)}}{N^{1/(p-1)}} sG_p(s)^{\frac{N(p-1)}{p(N-1)} \frac{1}{p-1}} \\
&= \left(\frac{M_n}{N} \right)^{1/(p-1)} sG_p(s)^{\frac{N}{p(N-1)}} \\
&= \left(\frac{M_n}{N} \right)^{1/(p-1)} s \left(1 + \frac{N-p}{p-1} s \right)^{\frac{p(1-N)}{N-p} \frac{N}{p(N-1)}} \\
&= \left(\frac{M_n}{N} \right)^{1/(p-1)} s \left(1 + \frac{N-p}{p-1} s \right)^{-\frac{N}{N-p}}.
\end{aligned}
$$

Onde basta notar que
$$1-\frac{N}{N-p}=-\frac{p}{N-p}<0$$
para concluir que o limite desejado é zero. Os mesmos argumento usados de maneira semelhante justificam que
$$\lim_{s\to+\infty} s\Lambda_n(s)^{1/(q-1)}=0.$$

Prosseguindo, de maneira exatamente análoga, para calcularmos as integrais
$$\int_0^{+\tau_n}\Lambda_n(s)^{\frac{1}{q-1}}ds \quad \text{e} \quad \int_{\tau_n}^{+\infty}\Lambda_n(s)^{\frac{1}{q-1}}ds,$$
façamos
$$\begin{cases}\eta=\Lambda_n(s)^{\frac{1}{q-1}}\\ d\kappa=ds\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d\eta=\frac{1}{q-1}\Lambda_n(s)^{\frac{2-q}{q-1}}\left(-S_n^q(s)\right)ds\\ \kappa=s.\end{cases}$$
Substituindo nas integrais, obtemos
$$\begin{aligned}\int_0^{\tau_n}\Lambda_n(s)^{\frac{1}{q-1}}ds&=\left(s\Lambda_n(s)^{\frac{1}{q-1}}\right)\Big|_0^{\tau_n}+\frac{1}{q-1}\int_0^{\tau_n}sS_q^n(s)\Lambda_n(s)^{\frac{2-q}{q-1}}ds\\&=\tau_n\Lambda_n(\tau_n)^{\frac{1}{q-1}}+\frac{1}{q-1}\int_0^{+\tau_n}sS_q^n(s)\Lambda_n(s)^{\frac{2-q}{q-1}}ds,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\tau_n}^{+\infty}\Lambda_n(s)^{\frac{1}{q-1}}ds&=\left(s\Lambda_n(s)^{\frac{1}{q-1}}\right)\Big|_{\tau_n}^{+\infty}+\frac{1}{q-1}\int_{\tau_n}^{+\infty}sS_q^n(s)\Lambda_n(s)^{\frac{2-q}{q-1}}ds\\&=-\tau_n\Lambda_n(\tau_n)^{\frac{1}{q-1}}+\frac{1}{q-1}\int_{\tau_n}^{+\infty}sS_q^n(s)\Lambda_n(s)^{\frac{2-q}{q-1}}ds.\end{aligned}$$

Substituindo em (3.7) as igualdades obtidas usando o método da Integração por Partes, conquistamos

$$\begin{aligned}2\tau_n\left[Y_n(\tau_n)^{\frac{1}{q-1}}+\Lambda_n(s)^{\frac{1}{p-1}}\right]&+\frac{1}{p-1}\int_0^{\tau_n}sS_p^n(s)Y_n(s)^{\frac{2-p}{p-1}}ds\\&+\frac{1}{q-1}\int_0^{\tau_n}sS_q^n(s)\Lambda_n(s)^{\frac{2-q}{q-1}}ds\\=\frac{1}{p-1}\int_{\tau_n}^{+\infty}&sS_p^n(s)Y_n(s)^{\frac{2-p}{p-1}}ds+\frac{1}{q-1}\int_{\tau_n}^{+\infty}sS_q^n(s)\Lambda_n(s)^{\frac{2-q}{q-1}}ds.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\frac{1}{p-1}\int_0^{\tau_n}&sS_p^n(s)Y_n(s)^{\frac{2-p}{p-1}}ds+\frac{1}{q-1}\int_0^{\tau_n}sS_q^n(s)\Lambda_n(s)^{\frac{2-q}{q-1}}ds\\&\le\frac{1}{p-1}\int_{\tau_n}^{+\infty}sS_p^n(s)Y_n(s)^{\frac{2-p}{p-1}}ds+\frac{1}{q-1}\int_{\tau_n}^{+\infty}sS_q^n(s)\Lambda_n(s)^{\frac{2-q}{q-1}}ds.\end{aligned}$$

Então deve existir uma subsequência de (τ_n) tal que

$$\frac{1}{p-1}\int_0^{\tau_n} sS_p^n(s)Y_n(s)^{\frac{2-p}{p-1}}ds \le \frac{1}{p-1}\int_{\tau_n}^{+\infty} sS_p^n(s)Y_n(s)^{\frac{2-p}{p-1}}ds$$

ou

$$\frac{1}{q-1}\int_0^{\tau_n} sS_q^n(s)\Lambda_n(s)^{\frac{2-q}{q-1}}ds \le \frac{1}{q-1}\int_{\tau_n}^{+\infty} sS_q^n(s)\Lambda_n(s)^{\frac{2-q}{q-1}}ds,$$

de fato o contrário de cada uma das desigualdades acima não pode ocorrer simultaneamente. Sem perda de generalidade, vamos supor que ocorre a primeira possibilidade. Desde que valem $1 < p,q \le 2$ e cada Y_n é não-crescente, então temos para todo $n \in \mathbb{N}$ que

$$\frac{1}{p-1}Y_n(\tau_n)^{\frac{2-p}{p-1}}\int_0^{\tau_n} sS_p^n(s)\,ds \le \frac{1}{p-1}Y_n(\tau_n)^{\frac{2-p}{p-1}}\int_{\tau_n}^{+\infty} sS_p^n(s)\,ds.$$

De onde,

$$\int_0^{\tau_n} sS_p^n(s)\,ds \le \int_{\tau_n}^{+\infty} sS_p^n(s)\,ds.$$

Escolha $T > 0$ suficientemente grande, e tomando $n \in \mathbb{N}$ de tal sorte que $T < \tau_n$ e temos

$$\int_T^{\tau_n} sS_p^n(s)\,ds \le \int_{\tau_n}^{+\infty} sS_p^n(s)\,ds,$$

onde a escolha de $T > 0$ foi feita de modo que $r_p(\tau) < \delta$ sempre que $\tau > T$. Então, de acordo com a hipótese (H_8) temos

$$\left(w_n(a_q r_p(\tau))\right)^{p_2} \le f(r_p(\tau), z_n(\tau), w_n(a_q r_p(\tau))) \le C\left(w_n(a_q r_p(\tau))\right)^{p_2},$$

onde $C > 0$. Com isto, vale que

$$\int_T^{\tau_n} sG_p(s)\left(w_n(a_q r_p(\tau))\right)^{p_2}ds \le C\int_{\tau_n} sG_p(s)\left(w_n(a_q r_p(\tau))\right)^{p_2}ds.$$

Desde que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ a função w_n, é concava, segue-se que em $T < s < \tau_n$, temos $0 < s < \tau_n$ e assim $0 \le a_q r_p(s) \le a_q r_p(\tau_n)$, donde

$$\frac{w_n(a_q r_p(\tau_n))}{a_q r_p(\tau_n)} \le \frac{w_n(a_q r_p(s))}{a_q r_p(s)} \Rightarrow a_q r_p(s)\frac{w_n(a_q r_p(\tau_n))}{a_q r_p(\tau_n)} \le w_n(a_q r_p(s)).$$

Implicando que

$$a_q r_p(s)B_n \le w_n(a_q r_p(s)),\ \text{se}\ T < s < \tau_n,\ \text{onde}\ B_n = \frac{w_n(a_q r_p(\tau_n))}{a_q r_p(\tau_n)}.$$

Por outro lado em $0 < \tau_n < s$, temos $0 \leq a_q r_p(\tau_n) \leq a_q r_p(s)$, donde

$$\frac{w_n(a_q r_p(s))}{a_q r_p(s)} \leq \frac{w_n(a_q r_p(\tau_n))}{a_q r_p(\tau_n)} \Rightarrow w_n(a_q r_p(s)) \leq B_n a_q r_p(s).$$

Portanto,

$$B_n^{p_2} \left(a_q r_p(T)\right)^{p_2} \int_T^{\tau_n} sG_p(s)\,ds \leq C \int_{\tau_n}^{+\infty} sG_p(s) B_n^{p_2} \left(a_q r_p(s)\right)^{p_2} ds$$

e assim

$$(a_r r_p(T))^{p_2} \int_T^{\tau_n} sG_p(s)\,ds \leq C \int_{\tau_n}^{+\infty} sG_p(s) \left(a_q r_p(s)\right)^{p_2} ds.$$

Daí, pelo que vimos na Observação 3.4, a integral do lado direito desta última desigualdade converge para zero quando $n \to +\infty$, uma vez que $\tau_n \to +\infty$. Dessa forma o produto do lado direito da desigualdade também deve convergir para zero quando $n \to +\infty$, consequentemente devemos ter

$$(a_r r_p(T))^{p_2} = 0 \quad \text{ou} \quad \int_T^{\tau_n} sG_p(s)\,ds = 0.$$

Porem, isto é um absurdo pois, como $T > 0$ então temos $(a_r r_p(T))^{p_2} \neq 0$ e

$$\lim_{n \to +\infty} \int_T^{\tau_n} sG_p(s)\,ds \neq 0,$$

desde que $\tau_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$. ■

3.3 Existência de Soluções

Nesta seção vamos provar a existência de soluções radialmente simétricas positivas para o Sistema (3.1), usando novamente a Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii (pode ser consultado no Capítulo 1).

Dessa forma ao longo dessa seção estabeleceremos resultados que vão satisfazer as hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii.

Vamos fixar as constantes

$$\Lambda = \max\left\{ \int_0^{+\infty} \left(\int_s^{+\infty} G_p(\tau)\,d\tau \right)^{\frac{1}{p-1}} ds, \int_0^{+\infty} \left(\int_s^{+\infty} G_q(\tau)\,d\tau \right)^{\frac{1}{q-1}} ds \right\}$$

e

$$\lambda = \min\left\{ \int_0^{+\infty} \left(\int_s^{+\infty} G_p(\tau)\,d\tau \right)^{\frac{1}{p-1}} ds, \int_0^{+\infty} \left(\int_s^{+\infty} G_q(\tau)\,d\tau \right)^{\frac{1}{q-1}} ds \right\}.$$

Consideramos também para $\sigma \in [0,1]$ o sistema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \sigma f(x,u,v), \text{ em } B. \\ -\Delta_q v = \sigma g(x,u,v), \text{ em } B, \\ \quad u = 0 = v, \text{ em } \partial B. \end{cases} \tag{3.8}$$

Tomando (u,v) solução radialmente simétrica positiva do Sistema (3.8) e realizando a mudança de variáveis

$$z(t) = u(r_p(t)) \quad \text{e} \quad w(t) = v(r_q(t)),$$

com $t = a_m(r)$ para $m = p,q$, é possível reescrever este sistema na forma

$$\begin{cases} z(t) = \sigma \displaystyle\int_0^t \left[\int_s^{+\infty} G_p(\tau) f(r_p(\tau), z(\tau), w(a_q r_p(\tau))) d\tau \right]^{1/(p-1)} ds \\ w(t) = \sigma \displaystyle\int_0^t \left[\int_s^{+\infty} G_q(\tau) g(r_q(\tau), z(a_p r_q(\tau)), w(\tau)) d\tau \right]^{1/(q-1)} ds \end{cases}.$$

Ao qual associamos o operador $F_\sigma : C_1 \to X$ dado por

$$F_\sigma(z,w)(t) = (\sigma A(z,w)(t), \sigma B(z,w)(t))$$

onde

$$\sigma A(z,w)(t) = \sigma \int_0^t \left[\int_s^{+\infty} G_p(\tau) f(r_p(\tau), z(\tau), w(a_q r_p(\tau))) d\tau \right]^{1/(p-1)} ds \quad \text{e}$$

$$\sigma B(z,w)(t) = \sigma \int_0^t \left[\int_s^{+\infty} G_q(\tau) g(r_p(\tau), z(a_p r_q(\tau)), w(\tau)) d\tau \right]^{1/(q-1)} ds.$$

Dessa forma os pontos fixos do operador F_σ são soluções radialmente simétricas positivas do Sistema (3.8). Os precedimentos para realizar cada uma das passagens feitas são inteiramente análogos ao que foi visto no começo da Seção 3.2. Além disso, provamos

Lema 3.2. *Sob a condição (H_9), o Sistema (3.8) não possui solução radialmente simétrica para $0 < |u|_\infty, |v|_\infty \leq s_0$ com*

$$\Lambda \left(\sigma_0^{\frac{1}{p-1}} + \sigma_0^{\frac{1}{q-1}} \right) < 1.$$

Demonstração. Suponha que o Lema não é válido. Então existe (u,v) soluções radialmente simétricas do Sistema (3.1) com $0 < |u|_\infty, |v|_\infty \leq s_0$ e

$$\Lambda \left(\sigma_0^{\frac{1}{p-1}} + \sigma_0^{\frac{1}{q-1}} \right) < 1.$$

Sabemos que, após performar uma mudança de variáveis, obtemos

$$\begin{cases} z(t) = \displaystyle\int_0^t \left(\int_s^{+\infty} G_p(\tau) f(r_p(\tau), z(\tau), w(a_q r_p(\tau)))\, d\tau \right)^{\frac{1}{p-1}} ds \\ w(t) = \displaystyle\int_0^t \left(\int_s^{+\infty} G_q(\tau) g(r_q(\tau), z(a_p r_q(\tau)), w(\tau))\, d\tau \right)^{\frac{1}{q-1}} ds \end{cases}$$

com $0 < |z|_\infty, |w|_\infty \le s_0$.

Em virtude da hipótese (H_9), valem as estimativas

$$f(r_p(\tau), z(\tau), w(a_q r_p(\tau))) \le \sigma_0 \left(z(\tau) + w(a_q r_p(\tau)) \right)^{p-1} \le \sigma_0 \left(|z|_\infty + |w|_\infty \right)^{p-1}$$

e

$$g(r_q(\tau), z(a_p r_q(\tau)), w(\tau)) \le \sigma_0 \left(z(a_p r_q(\tau)) + w(\tau) \right)^{q-1} \le \sigma_0 \left(|z|_\infty + |w|_\infty \right)^{q-1}.$$

Ainda mais, temos

$$\begin{aligned} |z|_\infty &= \sigma \int_0^{+\infty} \left(\int_s^{+\infty} G_p(\tau) f(r_p(\tau), w(\tau), w(a_q r_p(\tau)))\, d\tau \right)^{\frac{1}{p-1}} ds \\ &\le \sigma \int_0^{+\infty} \left(\sigma_0 (|z|_\infty + |w|_\infty)^{p-1} \int_s^{+\infty} G_p(\tau)\, d\tau \right)^{\frac{1}{p-1}} ds \\ &= \sigma \sigma_0^{\frac{1}{p-1}} \left[\int_0^{+\infty} \left(\int_s^{+\infty} G_p(\tau)\, d\tau \right)^{\frac{1}{p-1}} ds \right] (|z|_\infty + |w|_\infty) \\ &\le \sigma \sigma_0^{\frac{1}{p-1}} \Lambda \left(|z|_\infty + |w|_\infty \right) \end{aligned}$$

e de maneira análoga

$$\begin{aligned} |w|_\infty &= \sigma \int_0^{+\infty} \left(\int_s^{+\infty} G_q(\tau) g(r_q(\tau), z(a_p r_q(\tau)), w(\tau))\, d\tau \right)^{\frac{1}{q-1}} ds \\ &\le \sigma \int_0^{+\infty} \left(\sigma_0 (|z|_\infty + |w|_\infty)^{q-1} \int_s^{+\infty} G_q(\tau)\, d\tau \right)^{\frac{1}{q-1}} ds \\ &= \sigma \sigma_0^{\frac{1}{q-1}} \left[\int_0^{+\infty} \left(\int_s^{+\infty} G_q(\tau)\, d\tau \right)^{\frac{1}{q-1}} ds \right] (|z|_\infty + |w|_\infty) \\ &\le \sigma \sigma_0^{\frac{1}{q-1}} \Lambda (|z|_\infty + |w|_\infty). \end{aligned}$$

Somando essas duas últimas desigualdades, obtemos

$$|z|_\infty + |w|_\infty \le \sigma \Lambda (|z|_\infty + |w|_\infty) \left(\sigma_0^{\frac{1}{p-1}} + \sigma_0^{\frac{1}{q-1}} \right).$$

E daí

$$1 \leq \sigma\Lambda\left(\sigma_0^{\frac{1}{p-1}} + \sigma_0^{\frac{1}{q-1}}\right) \leq \Lambda\left(\sigma_0^{\frac{1}{p-1}} + \sigma_0^{\frac{1}{q-1}}\right).$$

Isto é uma contradição. Logo, o resultado está provado. ■

Essencialmente, o Lema acima nos garante que para cada $\sigma \in [0,1]$ temos

$$(z,w) \neq F_\sigma(z,w) = \sigma F(z,w),$$

quando $0 < |z|_\infty, |w|_\infty \leq s_0$ e

$$\Lambda\left(\sigma_0^{\frac{1}{p-1}} + \sigma_0^{\frac{1}{q-1}}\right) < 1.$$

Prosseguimos considerando outro sistema auxiliar, a saber

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u,v) + \gamma, \text{ em } B, \\ -\Delta_q v = g(x,u,v) + \gamma, \text{ em } B, \\ \quad u = 0 = v, \text{ em } \partial B. \end{cases} \tag{3.9}$$

Aqui também enfatizamos que se u, v são soluções radialmente simétricas do Sistema supracitado, então com as mesmas mudanças de variáveis citadas no começo desta seção, podemos reescrever tal sistema como sendo o seguinte sistema de equações integrais

$$\begin{cases} z(t) = \displaystyle\int_0^t \left[\int_s^{+\infty} G_p(\tau)\left[f(r_p(\tau), z(\tau), w(a_q r_p(\tau))) + \gamma\right] d\tau\right]^{1/(p-1)} ds \\ w(t) = \displaystyle\int_0^t \left[\int_s^{+\infty} G_q(\tau)\left[g(r_q(\tau), z(a_p r_q(\tau)), w(\tau)) + \gamma\right] d\tau\right]^{1/(q-1)} ds. \end{cases}$$

Que agora, com mais naturalidade, associamos o operador $F_\gamma : C_1 \to X$ dado por

$$F_\gamma(z,w)(t) = \big(A_\gamma(z,w)(t), B_\gamma(z,w)(t)\big)$$

onde

$$A_\gamma(z,w)(t) = \int_0^t \left[\int_s^{+\infty} G_p(\tau)\left[f(r_p(\tau), z(\tau), w(a_q r_p(\tau))) + \gamma\right] d\tau\right]^{1/(p-1)} ds \quad \text{e}$$

$$B_\gamma(z,w)(t) = \int_0^t \left[\int_s^{+\infty} G_q(\tau)\left[f(r_q(\tau), z(a_p r_q(\tau)), w(\tau)) + \gamma\right] d\tau\right]^{1/(q-1)} ds.$$

Note que a notação as notações de F_σ é semelhante a notação escolhida para F_γ apesar de serem operadores distintos, a justificativa desse escolha é epenas por comodidade.

É importante notar que o operador F_γ é compacto e esse fato é provado de maneira análoga ao que foi feito na demonstração do Lema 3.1. De fato, quando $\|(z_n, w_n)\| \leq C_0$ com $C_0 > 0$, então para

$$M_1 = \max\{f(r,z,w) : (r,z,w) \in [0,1]\times[0,C_0]\times[0,C_0]\} \quad \text{e}$$

$$M_2 = \max\{g(r,z,w) : (r,z,w) \in [0,1]\times[0,C_0]\times[0,C_0]\},$$

também vale que $(A_\gamma(z_n,w_n))$ e $(B_\gamma(z_n,w_n))$ são equicontínuos e equilimitados. Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existe $T = T(\varepsilon) > 0$ de tal sorte que

$$\int_T^{+\infty}\left[\int_s^{+\infty} G_p(\tau)d\tau\right]^{\frac{1}{p-1}} ds < \varepsilon \quad \text{e} \quad \int_T^{+\infty}\left[\int_s^{+\infty} G_q(\tau)d\tau\right]^{\frac{1}{q-1}} ds < \varepsilon.$$

Esse fatos, como feito no Lema 3.1, são suficiente para encontrarmos subsequências de $(A_\gamma(z_n,w_n))$ e $(B_\gamma(z_n,w_n))$ que convergem uniformemente em $[0,+\infty)$. Isso assegura que F_γ é completamente contínuo.

Feitas estas observações, podemos seguir com o próximo resultado.

Lema 3.3. *Sob a condição (H_8), existe $\gamma_0 > 0$ tal que o Sistema (3.9) não tem nenhuma solução radialmente simétrica positiva para $\gamma \geq \gamma_0$.*

Demonstração. Suponha o contrário. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $\gamma_n \geq n$ e (z_n,w_n) soluções do Sistema (3.9). Dessa forma $\gamma_n \to +\infty$ e

$$\begin{cases} z_n(t) = \displaystyle\int_0^t \left(\int_s^{+\infty} G_p(\tau)\left[f(r_p(\tau),z_n(\tau),w_n(a_q r_p(\tau))) + \gamma_n\right] d\tau\right)^{\frac{1}{p-1}} ds, \\ w_n(t) = \displaystyle\int_0^t \left(\int_s^{+\infty} G_q(\tau)\left[g(r_q(\tau),z_n(a_p r_q(\tau)),w_n(\tau)) + \gamma_n\right] d\tau\right)^{\frac{1}{q-1}} ds. \end{cases}$$

Então temos

$$\begin{cases} z_n(t) \geq \gamma_n^{\frac{1}{p-1}} \displaystyle\int_0^t \left(\int_s^{+\infty} G_p(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{p-1}} ds, \\ w_n(t) \geq \gamma_n^{\frac{1}{q-1}} \displaystyle\int_0^t \left(\int_s^{+\infty} G_q(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{q-1}} ds, \end{cases}$$

para todo $t > 0$, portanto

$$\begin{cases} |z_n|_\infty \geq \gamma_n^{\frac{1}{p-1}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_s^{+\infty} G_p(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{p-1}} ds \geq \lambda\gamma_n^{\frac{1}{p-1}}, \\ |w_n|_\infty \geq \gamma_n^{\frac{1}{q-1}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_s^{+\infty} G_q(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{q-1}} ds \geq \lambda\gamma_n^{\frac{1}{q-1}}, \end{cases}$$

onde λ é a constante positiva mencionada anteriormente.

Então $|z_n|_\infty$ e $|w_n|_\infty$ convergem para $+\infty$, e consequentemente

$$\|(z_n,w_n)\| = |z_n|_\infty + |w_n|_\infty \to +\infty.$$

Com isto, pela mesma justificativa vista no Teorema 3.1, exite uma sequência τ_n de tal sorte que

$$2(z_n(\tau_n) + w_n(\tau_n)) = \|(z_n, w_n)\|.$$

Agora provaremos que aqui também temos $\tau_n \to +\infty$ a menos de subsequência:

Afirmação 3.1.2. Existe uma subsequência de (τ_n) que converge para $+\infty$.

De fato, supondo o contrário podemos considerar

$$0 < \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\tau_n\} = S < +\infty.$$

De acordo com a hipótese (H_8), podemos escolher $\overline{S} > 0$ tal que

$$\overline{S} > \max\{a_p r_q(S), a_q r_p(S)\} \quad \text{e} \quad r_p(\tau), r_q(\tau) < \delta \text{ para todo } \tau > \overline{S},$$

valendo as estimativas

$$C\left(w_n(a_q r_p(\tau))\right)^{p_2} \geq f(r_p(\tau), z_n(\tau), w_n(a_q r_p(\tau))) \geq \left(w_n(a_q r_p(\tau))\right)^{p_2}$$

e

$$C\left(z_n(a_p r_q(\tau))\right)^{p_1} \geq g(r_q(\tau), z_n(a_p r_q(\tau)), w_n(\tau)) \geq \left(z_n(a_p r_q(\tau))\right)^{p_1}.$$

Valendo também que

$$z_n(\overline{S}) + w_n(\overline{S}) = \int_0^{\overline{S}} \left(\int_s^{+\infty} S_p^n(\tau)\, d\tau \right)^{\frac{1}{p-1}} ds + \int_0^{\overline{S}} \left(\int_s^{+\infty} S_q^n(\tau)\, d\tau \right)^{\frac{1}{q-1}} ds,$$

onde

$$\begin{cases} S_p^n(\tau) = G_p(\tau)\left[f(r_p(\tau), z_n(\tau), w_n(a_q r_p(\tau))) + \gamma_n\right], \\ S_q^n(\tau) = G_q(\tau)\left[g(r_q(\tau), z_n(a_p r_q(\tau)), w_n(\tau)) + \gamma_n\right]. \end{cases}$$

Prosseguindo, temos

$$\begin{aligned} z_n(\overline{S}) + w_n(\overline{S}) &\geq \overline{S}\left[\int_{\overline{S}}^{+\infty} S_p^n(\tau)\, d\tau\right]^{\frac{1}{p-1}} + \overline{S}\left[\int_{\overline{S}}^{+\infty} S_q^n(\tau)\, d\tau\right]^{\frac{1}{q-1}} \\ &\geq \overline{S}\left\{\int_{\overline{S}}^{+\infty} G_p(\tau)\left[\left(w_n(a_q r_p(\tau))\right)^{p_2} + \gamma_n\right] d\tau\right\}^{\frac{1}{p-1}} \\ &\quad + \overline{S}\left\{\int_{\overline{S}}^{+\infty} G_q(\tau)\left[\left(z_n(a_p r_q(\tau))\right)^{p_1} + \gamma_n\right] d\tau\right\}^{\frac{1}{q-1}} \\ &\geq \overline{S}\left[\int_{\overline{S}}^{+\infty} G_p(\tau)\, d\tau\right]^{\frac{1}{p-1}} \left(w_n\left(a_q r_p\left(\overline{S}\right)\right)\right)^{\frac{p_2}{p-1}} \\ &\quad + \overline{S}\left[\int_{\overline{S}}^{+\infty} G_q(\tau)\, d\tau\right]^{\frac{1}{q-1}} \left(z_n\left(a_p r_q\left(\overline{S}\right)\right)\right)^{\frac{p_1}{q-1}}. \end{aligned}$$

Com esta última desigualdade e a expressão de τ_n obtemos, de maneira exatamente análoga ao que foi visto no Teorema 3.1, um absurdo. Com esta contradição a Afirmação 3.1.2 está provada.

Destacamos que, como podemos perceber, estes passos são análogos aos que foram feitos no decorrer da demonstração do Teorema 3.1, com uma pequena diferença nas expressões de S_p^n e S_q^n, onde notamos a presença do γ_n.

Por outro lado, também da definição de τ_n temos

$$2(z_n(\tau_n)+w_n(\tau_n)) = \int_0^{+\infty}\left(\int_s^{+\infty} S_p^n(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{p-1}} ds + \int_0^{+\infty}\left(\int_s^{+\infty} S_q^n(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{q-1}} ds.$$

Fixe

$$Y_n(s) = \int_s^{+\infty} S_p^n(\tau)\,d\tau \quad \text{e} \quad \Lambda_n(s) = \int_s^{+\infty} S_q^n(\tau)\,d\tau.$$

Então podemos escrever

$$\int_0^{\tau_n} Y_n(s)^{\frac{1}{p-1}} ds + \int_0^{\tau_n} \Lambda_n(s)^{\frac{1}{q-1}} ds = \int_{\tau_n}^{+\infty} Y_n(s)^{\frac{1}{p-1}} ds + \int_{\tau_n}^{+\infty} \Lambda_n(s)^{\frac{1}{q-1}} ds.$$

Performando integrações por partes, conquistamos

$$\begin{aligned}\frac{1}{p-1}\int_0^{\tau_n} sS_p^n(s)Y_n(s)^{\frac{2-p}{p-1}} ds + \frac{1}{q-1}\int_0^{\tau_n} sS_q^n(s)\Lambda_n(s)^{\frac{2-q}{q-1}} ds \\ = \frac{1}{p-1}\int_{\tau_n}^{+\infty} sS_p^n(s)Y_n(s)^{\frac{2-p}{p-1}} ds + \frac{1}{q-1}\int_{\tau_n}^{+\infty} sS_q^n(s)\Lambda_n(s)^{\frac{2-q}{q-1}} ds.\end{aligned}$$

Passando a uma subsequência de τ_n, caso necessário, e usando que $1 < p,q \leq 2$, temos para todo $n \in \mathbb{N}$ que

$$\int_0^{\tau_n} sS_p^n(s)\,ds \leq \int_{\tau_n}^{+\infty} sS_p^n(s)\,ds \quad \text{ou} \quad \int_0^{\tau_n} sS_q^n(s)\,ds \leq \int_{\tau_n}^{+\infty} sS_q^n(s)\,ds.$$

Admita sem perda de generalidade que

$$\int_0^{\tau_n} sS_p^n(s)\,ds \leq \int_{\tau_n}^{+\infty} sS_p^n(s)\,ds,$$

e recorde que para s suficientemente grande temos

$$r_p(s) < \delta \quad \text{e} \quad r_q(s) < \delta.$$

Desse forma, usamos novamente a hipótese (H_8) para obter

$$(w_n(a_q r_p(s)))^{p_2} \leq f(r_p(s), z_n(s), w_n(a_q r_p(s))) \leq C(w_n(a_q r_p(s)))^{p_2}.$$

Donde

$$(w_n(a_q r_p(s)))^{p_2} + \gamma_n \leq f(r_p(s), z_n(s), w_n(a_q r_p(s))) + \gamma_n \leq C(w_n(a_q r_p(s)))^{p_2} + \gamma_n,$$

acarretando em

$$G_p(s)\left[(w_n(a_q r_p(s)))^{p_2} + \gamma_n\right] \leq S_p^n(s) \leq C G_p(s)\left[(w_n(a_q r_p(s)))^{p_2} + \gamma_n\right].$$

Desse modo, seguem as implicações

$$\int_0^{\tau_n} s S_p^n(s)\, ds \leq \int_{\tau_n}^{+\infty} s S_p^n(s)\, ds \Rightarrow$$

$$\int_T^{\tau_n} s G_p(s)\left[(w_n(a_q r_p(s)))^{p_2} + \gamma_n\right] ds \leq C \int_{\tau_n}^{+\infty} s G_p(s)\left[(w_n(a_q r_p(s)))^{p_2} + \gamma_n\right] ds \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\int_T^{\tau_n} s G_p(s)(w_n(a_q r_p(s)))^{p_2} ds + \gamma_n \int_T^{\tau_n} s G_p(s) ds \\ &\quad \leq C \int_{\tau_n}^{+\infty} s G_p(s)(w_n(a_q r_p(s)))^{p_2} ds + C\gamma_n \int_{\tau_n}^{+\infty} s G_p(s) ds \end{aligned}$$

Podemos passar a uma subsequência de (τ_n) e uma subsequência de (γ_n) tais que ocorra

$$\gamma_n \int_T^{\tau_n} s G_p(s) ds \leq C\gamma_n \int_{\tau_n}^{+\infty} s G_p(s) ds \quad \text{ou}$$

$$\int_T^{\tau_n} s G_p(s)(w_n(a_q r_p(s)))^{p_2} ds \leq C \int_{\tau_n}^{+\infty} s G_p(s)(w_n(a_q r_p(s)))^{p_2} ds.$$

Pela demonstração do Teorema 3.1 já sabemos que a segunda possibilidade nos conduz a um absurdo, dessa forma prosseguimos admitindo que vale a primeira possibilidade. Neste caso segue-se que

$$\int_T^{\tau_n} s G_p(s) ds \leq C \int_{\tau_n}^{+\infty} s G_p(s) ds.$$

Assim, desde $\tau_n \to +\infty$ também caímos em uma contradição. Esta contradição prova o teorema. ■

Ainda sobre a família de operadores F_γ vamos estabelecer o seguinte resultado:

Lema 3.4. *Suponha a hipótese* (H_8). *Então o conjunto formado pelos pontos fixos do operador* F_γ *é limitado. Ou seja, existe* $R > 0$ *de sorte que*

$$\|(z,w)\| \leq R \text{ para cada } (z,w) \in C_1 \text{ que verifica } F_\gamma(z,w) = (z,w).$$

Demonstração. A demonstração desse Lema pode ser feita com argumentos vistos na demonstração do Teorema 3.1 e da demonstração do Lema 3.3. Primeiro supomos por contradição que exista uma sequência de pontos fixos do operador F_γ tal que

$$\|(z_n, w_n)\| \to +\infty.$$

Com isto, deve existir uma sequência (τ_n) tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale

$$2(z_n(\tau_n) + w_n(\tau_n)) = \|(z_n, w_n)\|.$$

Com o auxilio de (H_8), já sabemos que a sequência (τ_n) converge para $+\infty$ a menos de subsequência. Ademais, com a notação

$$\begin{cases} S_p^n(\tau) = f(r_p(\tau), z_n(\tau), w_n(a_q r_p(\tau))) + \gamma \\ S_q^n(\tau) = g(r_q(\tau), z_n(a_p r_q(\tau)), w_n(\tau)) + \gamma, \end{cases}$$

segue-se que pelo menos uma das seguintes desigualdades deve ocorrer

$$\int_0^\tau sS_p^n(s)ds \le \int_{\tau_n}^{+\infty} sS_p^n(s)ds \quad \text{ou} \quad \int_0^{\tau_n} sS_q^n(s)ds \le \int_{\tau_n}^{+\infty} sS_q^n(s)ds.$$

Em qualquer dos casos, novamente usando (H_8), chegamos a um absurdo. ■

Agora com o auxilio do Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii vamos demonstrar o principal resultado deste capítulo, a saber:

Teorema 3.2. *Suponha as hipóteses (H_8) e (H_9), com*

$$\Lambda\left(\sigma_0^{\frac{1}{p-1}} + \sigma_0^{\frac{1}{q-1}}\right) < 1.$$

Então o sistemas (3.1) possui solução radialmente simétrica positiva.

Demonstração. Como consequência do Lema 3.1 temos que o operador F esta bem definido, é compacto e $F(0,0) = (0,0)$, além do cone C_1 ser invariante sob F.

Pelo Lema 3.2, temos $(z,w) \neq \sigma F(z,w)$ para todo $\|(z,w)\| = s_0$ e $\sigma \in [0,1]$, assim a condição (a) está verificada.

Vamos definir a homotopia $H : [0,\gamma_0] \times C_1 \to C_1$ dada por $H(\gamma,(z,w)) = F_\gamma(z,w)$. Neste caso H é uma homotopia compacta e $H(0,(z,w)) = F(z,w)$, com isto já garantimos que vale (b).

Do Lema 3.4 sabemos que o conjunto dos pontos fixos do operador F_γ é limitado, assim concluímos que existe $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$H(\gamma,(z,w)) = F_\gamma(z,w) \neq (z,w), \text{ para qualquer } \|(z,w)\| = R \text{ e } \gamma \in [0,\gamma_0].$$

Logo a condição (c) é satisfeita.

Finalmente, pela construção da homotopia H vemos que pelo Lema 3.3, devemos ter

$$H(\gamma_0,(z,w)) = F_{\gamma_0}(z,w) \neq (z,w), \text{ para qualquer } \|(z,w)\| \leq R.$$

Portanto, também vale a condição (d). ■

Uma versão ligeiramente mais simples do resultado principal, baseada na Observação 2.2, pode ser dado por

Teorema 3.3. *Suponha as hipóteses (H_8) e $(H_9)'$. Então o sistema (3.1) tem solução radialmente simétrica positiva.*

3.4 Aplicações

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos em que aplicamos o resultado principal deste capítulo, dessa forma em cada situação estaremos buscando verificar que valem as hipóteses (H_8) e (H_9), ou até mesmo $(H_9)'$ ao invés de (H_9).

Admitindo que p_1, p_2 verificam as desigualdades vistas em (3.2) e (3.3), o sistema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = a(|x|,u,v)v^{p_2} + f_0(|x|,u,v), & \text{em } B, \\ -\Delta_q v = b(|x|,u,v)u^{p_1} + g_0(|x|,u,v), & \text{em } B, \\ u = 0 = v, & \text{em } \partial B, \end{cases} \tag{3.10}$$

onde $1 < p,q \leq 2$ e $f_0, g_0 : B \times [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ são funções contínuas satisfazendo a hipótese $(H_9)'$ e existe $0 < \delta < 1$ tal que se $|x| < \delta$ e $u,v \geq 0$ então

$$f_0(|x|,u,v) \leq G_1(|x|)v^{p_2} \quad \text{e} \quad g_0(|x|,u,v) \leq G_2(|x|)u^{p_1},$$

onde G_1 e G_2 são funções contínuas e não negativas com $G_1(0) = G_2(0)$. Admita também que a e b são funções positivas tais que

$$c_1 \leq a(|x|,u,v) \leq c_2 \quad \text{e} \quad c_1 \leq b(|x|,u,v) \leq c_2,$$

para todos $|x| < \delta$ e $u,v \geq 0$, para $c_1 \geq 1$ e $c_2 \geq 1$ constantes. Aqui assumimos que valem as desigualdades

$$p-1 < p_2 < \frac{(q-1)}{(p-1)}\frac{((p-2)N+p)}{(N-q)} \quad \text{e} \quad q-1 < p_1 < \frac{(p-1)}{(q-1)}\frac{((q-1)N+q)}{(N-p)}.$$

Para provar a existência de soluções radialmente simétricas positivas para o Sistema (3.10) vamos verificar as hipóteses (H_8) e $(H_9)'$: neste caso as não linearidades são dadas por

$$f(|x|,u,v) = a(|x|,u,v)v^{p_2} + f_0(|x|,u,v)$$

e

$$g(|x|,u,v) = b(|x|,u,v)u^{p_1} + g_0(|x|,u,v).$$

Daí, tomando $0 < \delta < 1$ devemos ter para $|x| < \delta$ e $u, v \geq 0$ que

$$\begin{aligned} v^{p_2} &\leq a(|x|,u,v)v^{p_2} \\ &\leq a(|x|,u,v)v^{p_2} + f_0(|x|,u,v) \\ &\leq c_2 v^{p_2} + G_1(|x|)v^{p_2} \\ &\leq (c_2 + C_{G_1})v^{p_2}, \end{aligned}$$

onde $C_{G_1} = \max\limits_{|x|<\delta} G_1(|x|)$. De maneira análoga, ainda com $|x| < \delta$ e $u, v \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} u^{p_1} &\leq b(|x|,u,v)u^{p_1} \\ &\leq b(|x|,u,v)u^{p_1} + g_0(|x|,u,v) \\ &\leq c_2 u^{p_1} + G_2(|x|)v^{p_1} \\ &\leq (c_2 + C_{G_2})u^{p_1}, \end{aligned}$$

onde $C_{G_2} = \max\limits_{|x|<\delta} G_2(|x|)$. Das duas desigualdades obtidas podemos escrever

$$v^{p_2} \leq f(|x|,u,v) \leq Cv^{p_2} \quad \text{e} \quad u^{p_1} \leq g(|x|,u,v) \leq Cu^{p_1},$$

para todos $|x| < \delta$ e $u, v \geq 0$, feita a escolha $C = \max\{c_2 + C_{G_1}, c_2 + C_{G_2}\}$. Com isto, já provamos que vale a hipótese (H_8).

Agora, recordemos que f_0 e g_0 satisfazem a hipótese $(H_9)'$, ou seja

$$\lim_{u+v\to 0} \frac{f_0(|x|,u,v)}{(u+v)^{p-1}} + \frac{g_0(|x|,u,v)}{(u+v)^{q-1}} = 0.$$

Com isso basta notar que

$$\begin{aligned} \frac{f(|x|,u,v)}{(u+v)^{p-1}} + \frac{g(|x|,u,v)}{(u+v)^{q-1}} &= \frac{a(|x|,u,v)v^{p_2} + f_0(|x|,u,v)}{(u+v)^{p-1}} + \frac{b(|x|,u,v)u^{p_1} + g_0(|x|,u,v)}{(u+v)^{q-1}} \\ &\leq \frac{a(|x|,u,v)(u+v)^{p_2}}{(u+v)^{p-1}} + \frac{b(|x|,u,v)(u+v)^{p_2}}{(u+v)^{q-1}} \\ &\quad + \frac{f_0(|x|,u,v)}{(u+v)^{p-1}} + \frac{g_0(|x|,u,v)}{(u+v)^{q-1}}, \end{aligned}$$

daí quando $u + v \to 0$ então do lado direito dessa última desigualdade as duas primeiras parcelas convergem para zero, graças as condições $p - 1 < p_2$ e $q - 1 < p_1$, e as duas últimas parcelas convergem para zero devido ao fato de f_0 e g_0 satisfazerem a hipótese $(H_9)'$. Consequentemente, vale que

$$\lim_{u+v\to 0} \frac{f(|x|,u,v)}{(u+v)^{p-1}} + \frac{g(|x|,u,v)}{(u+v)^{q-1}} = 0,$$

ou seja, as funções f e g também verificam a hipótese $(H_9)'$. Portanto, pelo Teorema 3.2 (ou pelo Teorema 3.3) o Sistema (3.10) possui soluções radialmente simétricas positivas.

Agora vamos estudar outro sistema: considere $m,n : [0,1] \to [t_0,+\infty)$ duas funções contínuas com $t_0 > \max\{p-1,q-1\}$ e $1 \leq p,q \leq 2$ e o sistema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = v^{m(|x|)} \text{ em } B, \\ -\Delta_q v = u^{n(|x|)} \text{ em } B, \\ \quad u = 0 = v \text{ em } \partial B, \end{cases} \tag{3.11}$$

onde para algum $0 < \delta < 1$ assumimos que $m(r) = p_2$ e $n(r) = p_1$ sempre que $r \leq \delta$. Naturalmente, aqui também admitimos que

$$p-1 < p_2 < \frac{(q-1)}{(p-1)} \frac{((p-2)N+p)}{(N-q)} \quad \text{e} \quad q-1 < p_1 < \frac{(p-1)}{(q-1)} \frac{((q-1)N+q)}{(N-p)}.$$

Como feito na aplicação anterior, vamos garantir que valem as hipóteses (H_8) e $(H_9)'$ para provarmos a existência de soluções radialmente simétricas positivas para o Sistema (3.11): primeiro observamos que neste caso temos

$$f(|x|,u,v) = v^{m(|x|)} \quad \text{e} \quad g(|x|,u,v) = u^{n(|x|)}.$$

Agora tomamos $0 < \delta < 1$ tal que se $|x| \leq \delta$ e $u,v \geq 0$, então $m(|x|) = p_2$ e $n(|x|) = p_1$, para obter

$$v^{p_2} \leq v^{p_2} \, (= f(|x|,u,v)) \leq 1 \cdot v^{p_2}$$

e

$$u^{p_1} \leq u^{p_1} \, (= g(|x|,u,v)) \leq 1 \cdot u^{p_1}.$$

Logo, já vale a hipótese (H_8).

Ademais, note que

$$\begin{aligned} \frac{f(|x|,u,v)}{(u+v)^{p-1}} + \frac{g(|x|,u,v)}{(u+v)^{q-1}} &= \frac{v^{m(|x|)}}{(u+v)^{p-1}} + \frac{u^{n(|x|)}}{(u+v)^{q-1}} \\ &\leq \frac{(u+v)^{m(|x|)}}{(u+v)^{p-1}} + \frac{(u+v)^{n(|x|)}}{(u+v)^{q-1}} \\ &= (u+v)^{m(|x|)-(p-1)} + (u+v)^{n(|x|)-(q-1)}, \end{aligned}$$

com isto e sabendo que $m(|x|) \geq t_0 > p-1$ e que $n(|x|) \geq t_0 > q-1$, devemos ter que $m(|x|) - (p-1) > 0$ e que $n(|x|) - (q-1) > 0$, consequentemente o lado direto da desigualdade acima converge para zero quando $u+v \to 0$, isto é,

$$\lim_{u+v\to 0} \frac{f(|x|,u,v)}{(u+v)^{p-1}} + \frac{g(|x|,u,v)}{(u+v)^{q-1}} = 0.$$

Acarretando que vale a hipótese $(H_9)'$ e portanto pelo Teorema 3.2 (ou pelo Teorema 3.3) o Sistema (3.11) admite soluções radialmente simétricas positivas.

APÊNDICE A

Resultados importantes

A.1 Fatos do Cálculo

A menos de menção em contrário, Ω denota um aberto do $\mathbb{R}^N$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ denota uma função mensurável[1], e $|X|$ representa a medida de Lebesgue do conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$. Apresentamos logo a seguir alguns espaços e resultados que geralmente são estudados em cursos de Teoria da Medida:

Para $1 \leqslant p < \infty$ definimos o espaço

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ mensurável } : \int_\Omega |u|^p < \infty \right\}$$

O qual é um espaço de Banach com a norma,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definimos também o espaço

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : \exists c > 0; |u| \leqslant c, \text{ q.s em } \Omega\}$$

[1] Assim como em [1]

o espaço $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_\infty = \text{supess}_\Omega |u|$$

onde $\text{supess}_\Omega |u| = \inf\{c \in \mathbb{R} : \sup_\Omega |u| < c, \text{ q.s em } \Omega\}$. Com essas definições enunciamos:

Teorema A.1 (Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que converge quase sempre para uma função mensurável f. Se existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n| \leq g$ quase sempre em Ω então, $f \in L^1(\Omega)$ e $f_n \to f$ em $L^1(\Omega)$.*

Quando uma aplicação $F : \Omega :\to \mathbb{R}^N$, que a cada ponto $x \in \Omega$ associa

$$F(x) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_N(x)) \in \mathbb{R}^N$$

é chamada de um campo vetorial sobre Ω . As funções, $F_j : \Omega \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, N$ são chamadas funções coordenadas do campo F. Diremos que F é um campo de classe C^k se cada uma de suas componentes for de classe C^k. Recordando que o divergente de um campo vetorial $F : \Omega \to \mathbb{R}^N$ é dado por

$$\operatorname{div} F = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F_j}{\partial x_j},$$

onde F_j, com $j = 1, 2, \ldots, N$, são as funções coordenadas do campo F e $\frac{\partial F_j}{\partial x_j}$ denota a derivada parcial da função F_j com relação a $j-$ésimas coordenada.

Com essas notações podemos enunciar o Teorema do Divergente, tal resultado tem uma importância fundamental no Cálculo e em particular no presente trabalho:

Teorema A.2 (Teorema do Divergente)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$, suave. Se F é um campo vetorial de classe C^1 sobre $\overline{\Omega}$ então,*

$$\int_\Omega \operatorname{div} F\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle F, \eta \rangle\, dS$$

onde $\eta = \eta(x)$ é o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$ em x.

Como consequência podemos obter os resultados que seguem:

Proposição A.1 (Integração por partes)**.** *Sejam $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. Então*

$$\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\partial\Omega} uv\eta_j\, dS$$

onde η_j é a $j-$ésima coordenado do vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$.

Proposição A.2 (Identidades de Green)**.** *Sejam $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então,*

(i) $\displaystyle\int_\Omega \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} dS$

(ii) $\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = -\int_\Omega u\Delta v dx + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \eta} dS$

(iii) $\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial u}{\partial \eta} dS$

Sobre funções reais contínuas em intervalos temos muitos resultados importantes, aliás alguns deles foram utilizados ao longo desta dissertação, enunciamos eles a seguir.

Teorema A.3 (Teorema do Valor Intermediário)**.** *Sejam $[a,b]$ um intervalo da Reta e uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua. Se $f(a)<d<f(b)$ então existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=d$.*

Teorema A.4. *Seja $f:I\to\mathbb{R}$ uma função contínua e injetiva, definida num intervalo I. Então f é monótona, sua imagem $J=f(I)$ é um intervalo e sua inversa $f^{-1}:J\to\mathbb{R}$ é contínua.*

Estes e outros resultados podem ser encontrados em [12]. Ainda na mesma referencia citada, recordamos definições e resultados sobre sequências de funções que foram necessários neste trabalho. Considere E um conjunto de funções $f:X\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

- Dizemos que E é simplesmente limitado quando para cada $x\in X$ existe $c_x>0$ tal que

$$|f(x)|\leq c_x, \text{ para cada } f\in E;$$

- Diz-se que E é uniformemente limitado quando existe $c>0$ tal que

$$|f(x)|\leq c, \text{ para cada } x\in X \text{ e cada } f\in E;$$

- Diremos que E é equicontínuo quando para cada $x_0\in X$ e para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que

$$x\in X,\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon, \forall f\in E.$$

Recordadas tais definições e a definição de convergência uniforme, a saber, dizemos que uma sequencia $f_n:X\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ converge uniformemente para f quando para todo $\varepsilon>0$ existe, $n_0=\in\mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon, \text{ para todo } n>n_0 \text{ e } x\in X.$$

Com esta última definição, podemos finalmente enunciar o seguinte resultado

Teorema A.5 (Arzelá-Ascoli)**.** *Seja $K\subset\mathbb{R}$ compacto. Toda sequência equicontínua e simplesmente limitada de funções $f_n:K\to\mathbb{R}$ possui uma subsequência uniformemente convergente.*

De maneira mais geral, vale

Teorema A.6. *Seja E um conjunto de funções contínuas definidas em um compacto $K\subset\mathbb{R}$. As seguintes afirmações são equivalentes* *(i) E é equicontínuo e uniformemente limitado;*

(ii) E é equicontínuo e simplesmente limitado;

(iii) Toda sequência de funções $(f_n) \subset E$ possui uma subsequência uniformemente convergente.

Recordamos que uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ é dita de Cauchy quando para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n,m > n_0$ então $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$. Com esta definição podemos enunciar outro importante teorema:

Teorema A.7. *Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente convergente se, e somente se, é de Cauchy.*

Prosseguindo, com as duas próximas definições podemos considerar o espaço das funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto: seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Definimos o suporte de u, denotado por $\operatorname{supt} u$, como sendo o conjunto,

$$\operatorname{supt} u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

Dizemos que uma função é de classe $C^1(\Omega)$ se u é diferenciável em Ω e sua diferencial é contínua. Indutivamente, dizemos que $u \in C^k(\Omega)$, se u possuí diferenciável de ordem k e ela é contínua.

O conjunto das funções infinitamente diferenciáveis é dado por

$$C^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \in C^k(\Omega), \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

O conjunto das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compactamente contido em Ω (que eventualmente também é chamado de funções testes) será denotado por

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supt} u \subset\subset \Omega\}.$$

Recordamos também o conjunto das funções localmente integráveis,

$$L^1_{loc}(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ mensurável } : \int_K |u| < \infty, \forall K \subset\subset \Omega \right\}.$$

Similarmente para $1 < p < \infty$, definimos

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ mensurável } : \int_K |u|^p < \infty, \forall K \subset\subset \Omega \right\}.$$

Considere o par $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ denotando um espaço vetorial com produto interno, onde H é um espaço vetorial real e $\langle\cdot,\cdot\rangle : H\times H\to\mathbb{R}$ é um produto interno. Naturalmente a função

$$\begin{aligned}\|\cdot\| : H &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}\end{aligned}$$

define uma norma, ao qual denominamos de norma proveniente do produto interno. Nestas condições vale

Teorema A.8 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Em $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, se $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ para cada $x\in H$, então*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$$

para todos $x,y\in H$. Ademais, a igualdade ocorre se, e somente se, x e y são linearmente dependentes.

Denotamos por H' o conjunto formado pelos funcionais lineares $f : H\to\mathbb{R}$ limitados (e consequentemente contínuo), isto significa que existe $C>0$ tal que

$$\|f(x)\| \leq C|x|, \text{ para cada } x\in H.$$

A norma do funcional f é dada por

$$\|f\| = \sup_{x\in H\setminus\{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Com estas notações, enunciamos o magnífico resultado

Teorema A.9 (Teorema da Representação de Riesz)**.** *Todo funcional linear limitado f definido em um espaço com produto interno H pode ser representado em termos do produto interno, isto é,*

$$f(x) = \langle x,z\rangle$$

onde z é unicamente determinado por f e tem norma $\|z\| = \|f\|$.

Os dois últimos resultados podem ser encontrados em [11]. Os funcionais lineares são um caso particular dos operadores lineares, que por sua vez são um caso particular dos operadores. A saber, chamamos de operador uma aplicação $T : D(T)\subset X\to Y$, onde $D(T)$ é o domínio de T com X e Y espaços vetoriais. Sobre os operadores, para nós e importante saber que um operador T é completamente contínuo quando para $M\subset D(T)$ limitado, valha que $\overline{T(M)}$ é compacto. Por fim, recordamos a importante equivalência:

Teorema A.10. *O conjunto $M\subset X$ é compacto se, e somente se, todo sequência $(x_n)\subset M$ possui uma subsequência convergente com limite em M.*

A.2 O Problema de Autovalor

Vamos demonstrar o problema de autovalor visto no Capítulo 2, toda a demonstração pode ser encontrada no Apêndice de [3], mas para deixar o trabalho autocontido incluímos a demonstração adicionando algumas observações para auxiliar as justificativas, do seguinte teorema:

Teorema A.11 (Problema de Autovalor)**.** *Suponha* $\alpha > 2-N$ *e* $\beta > \alpha - 2$. *Então, exite uma sequência de autovalores positivos,*

$$\lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_3 \le \cdots,$$

para o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla\phi) = \lambda|x|^{\beta}\phi & \text{em } \Omega \\ \phi = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ademais, a primeira autofunção ϕ_1 *pode ser escolhida positiva em* Ω *e* $\frac{\partial\phi_1}{\partial\nu} < 0$ *em* $\partial\Omega$.

Demonstração. Antes de iniciar a demonstração vamos começar com algumas ferramentas, como a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg [16] (desigualdade de CKN): Para toda função $u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ vale

$$C_{a,b}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2b}|u|^p dx\right)^{\frac{2}{p}} \le \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u|^2 dx,$$

onde

$$\text{para } N \ge 3 \,:\, a < \frac{N-2}{2},\, a \le b \le a+1,\, p = \frac{2N}{N-2+2(b-a)};$$

$$\text{para } N = 2 \,:\, a < 0,\, a < b \le a+1,\, p = \frac{2}{b-a};$$

$$\text{para } N = 1 \,:\, a < -\frac{1}{2},\, a+\frac{1}{2} < b \le a+1,\, p = \frac{2}{-1+2(b-a)}.$$

Vejamos o caso particular em que

$$N \ge 3, \quad p = 2, \quad \alpha = -2a > 2-N.$$

Neste caso temos

$$a+1 = b \Leftrightarrow p = 2,$$

de fato

$$
\begin{aligned}
p = 2 = \frac{2N}{N-2+2(b-a)} &\Leftrightarrow 2N-4+4(b-a) = 2N \\
&\Leftrightarrow 4(b-a) = 4 \\
&\Leftrightarrow (b-a) = 1 \\
&\Leftrightarrow b = a+1.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$2b-2a = 2 \Rightarrow -2b = (-2a)-2 = \alpha - 2,$$

e assim a desigualdade de CKN assume a forma

$$\alpha > 2-N \, : \, C_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha-2} u^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |\nabla u|^2 dx, \, \forall u \in C_0^\infty \left(\mathbb{R}^N\right).$$

Agora vamos considerar Ω um domínio e limitado com fronteira suave tal que $0 \in \Omega$. Denotaremos por $L^2_\beta(\Omega)$ o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ com a norma

$$\|u\|^2_\beta = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\beta |u|^2 dx,$$

que é proveniente do produto interno

$$\langle u, v \rangle_\beta = \int_\Omega |x|^\beta uv \, dx.$$

Considere também $H^1_\alpha(\Omega)$ o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ com a norma

$$\|u\|^2_\alpha = \int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u|^2 dx,$$

que por sua vez é proveniente do produto interno

$$\langle u, v \rangle_\alpha = \int_\Omega |x|^\alpha \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx.$$

Do caso particular da desigualdade de CKN tínhamos obtido que

$$C_\alpha \int_\Omega |x|^{\alpha-2} u^2 dx \leq \int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u|^2 dx, \, \forall u \in C_0^\infty(\Omega),$$

daí devemos ter que $H^1_\alpha(\Omega) \hookrightarrow L^2_{\alpha-2}(\Omega)$ é uma imersão contínua, com $\alpha > 2-N$. Desejamos uma imersão em $L^2_\beta(\Omega)$ com $\beta > 2-\alpha$, neste caso com Ω limitado e para $B = \{x \in \Omega \, : \, |x| < 1\}$, temos

$$|x|^\beta \leq |x|^{\alpha-2}, \text{ para qualquer } x \in B$$

ou

$$|x|^{\beta} = |x|^{\alpha-2+\beta+(2-\alpha)} \leq (\operatorname{diam}\Omega)^{2+\beta-\alpha}|x|^{\alpha-2}, \text{ para } x \in \Omega \setminus B,$$

com isto e para $M = \max\left\{1, (\operatorname{diam}\Omega)^{2+\beta-\alpha}\right\}$ temos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |x|^{\beta} u^2 dx &\leq M \int_{\Omega} |x|^{\alpha-2} u^2 dx \\ &\leq MC_{\alpha} \int_{\Omega} |x|^{\alpha} |\nabla u|^2 dx, \forall u \in C_0^{\infty}(\Omega).\end{aligned}$$

Finalmente obtemos que $H^1_{\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^2_{\beta}$ é uma imersão contínua para todo $\beta \geq 2-\alpha > -N$.

Ainda mais, pela extensão do Teorema de compacidade de Rellich-Kondrachov ([17] - Teorema 2.1), temos $H^1_{\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^2_{\beta}(\Omega)$ é uma imersão compacta, para todo $\beta > \alpha - 2 > -N$ ($H^1_{\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^2_{\beta}(\Omega)$ é uma imersão compacta, para todo $2\beta > p(\alpha+N-2)-2N$, $1 \leq p < 2^*$).

Com isto, podemos finalmente começar a demonstração do Teorema A.11: Dessa forma vamos fixar $\alpha > 2-N$ e $\beta > \alpha - 2$. Para cada $f \in L^2_{\beta}(\Omega)$ considera $A_f : H^1_{\alpha}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$A_f(v) = \int_{\Omega} |x|^{\beta} f(x) v\, dx, \forall v \in H^1_{\alpha}(\Omega).$$

Agora, usando que $H^1_{\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^2_{\beta}(\Omega)$ é uma imersão contínua, que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\beta}$ é um produto interno e a desigualdade de Cauchy-Schwarz conquistamos

$$A_f(v) = \int_{\Omega} |x|^{\beta} f(x) v\, dx = \langle f, v \rangle_{\beta} \leq \|f\|_{\beta} \|v\|_{\beta} \leq C\|f\|_{\beta}\|v\|_{\alpha},$$

onde C é uma constante positiva. Dessa forma A_f é um funcional linear contínuo em $H^1_{\alpha}(\Omega)$. Portanto, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe uma única $u \in H^1_{\alpha}(\Omega)$ tal que

$$A_f(v) = \langle u, v \rangle_{\alpha}, \forall v \in H^1_{\alpha}(\Omega),$$

ou seja

$$\int_{\Omega} |x|^{\beta} f(x) v\, dx = \int_{\Omega} |x|^{\alpha} \langle \nabla u, \nabla v \rangle\, dx, \forall v \in H^1_{\alpha}(\Omega).$$

Assim, está bem definido o operador solução $S : L^2_{\beta}(\Omega) \to H^1_{\alpha}(\Omega)$ que faz a associação $f \mapsto Sf$, onde

$u = Sf$ se, e somente se, u resolve o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla u) = |x|^{\beta} f(x), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{A.1}$$

Observação A.1. Essa definição faz sentido: quando u e v são funções suficientemente boas (digamos pelo menos de classe C^1) tais que

$$\int_{\Omega} |x|^{\beta} f(x) v\, dx = \int_{\Omega} |x|^{\alpha} \langle \nabla u, \nabla v \rangle\, dx.$$

Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(v|x|^{\alpha}\nabla u) &= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(v|x|^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N}\left(|x|^{\alpha}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j} + v\frac{\partial}{\partial x_j}\left(|x|^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N}|x|^{\alpha}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j} + v\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(|x|^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \\
&= |x|^{\alpha}\langle\nabla u,\nabla v\rangle + v\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla u).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\int_{\Omega}\operatorname{div}(v|x|^{\alpha}\nabla u)dx = \int_{\Omega}|x|^{\alpha}\langle\nabla u,\nabla v\rangle dx + \int_{\Omega} v\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla u)dx.$$

Pelo Teorema do divergente, como $v = 0$ em $\partial\Omega$, segue-se que a integral do lado esquerdo da desigualdade é zero, daí

$$0 = \int_{\Omega}|x|^{\alpha}\langle\nabla u,\nabla v\rangle dx + \int_{\Omega} v\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla u)dx \Rightarrow$$

$$0 = \int_{\Omega} v\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla u)dx + \int_{\Omega}|x|^{\beta}f(x)v dx = \int_{\Omega}\Big(\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla u) + |x|^{\beta}f(x)\Big)v dx.$$

Admitindo que esta última igualdade é valida para toda $v \in C_0^1(\Omega)$ e que $\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla u) + |x|^{\beta}f(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$, então podemos concluir que

$$-\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla u) = |x|^{\beta}f(x).$$

Por outro lado, também vale que o operador solução é contínuo. De fato, sabemos $Sf = u$ se, e somente se, vale

$$\int_{\Omega}|x|^{\alpha}\langle\nabla u,\nabla v\rangle\, dx = \int_{\Omega}|x|^{\beta}f(x)v\, dx,\ \forall\, v \in H^1_{\alpha}(\Omega).$$

Em particular, a igualdade acima também é válida para a própria $u = Sf$, assim

$$\|u\|_{\alpha}^2 = \int_{\Omega}|x|^{\alpha}|\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega}|x|^{\beta}f(x)u\, dx = (f,u)_{\beta}.$$

Daí, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a imersão $H^1_{\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^2_{\beta}(\Omega)$, conquistamos

$$\|u\|_{\alpha}^2 = \langle f,u\rangle_{\beta} \le \|f\|_{\beta}\|u\|_{\beta} \le C\|f\|_{\beta}\|u\|_{\alpha}.$$

E daí finalmente temos

$$\|Sf\|_{\alpha} = \|u\|_{\alpha} \le C\|f\|_{\beta},$$

garantindo que o operador solução S é contínuo. Ainda pela imersão compacta, segue-se que

$$S : L^2_\beta(\Omega) \to H^1_\alpha(\Omega) \hookrightarrow L^2_\beta(\Omega)$$

é um operador compacto (composição de contínuo com compacto). Ademais, denotado $u = Sf$ e $v = Sg$, temos

$$\begin{aligned}\langle f, Sg\rangle_\beta = \langle f, v\rangle_\beta = \int_\Omega |x|^\beta f(x) v\, dx &= \int_\Omega |x|^\alpha \langle \nabla u, \nabla v\rangle\, dx \\ &= \int_\Omega |x|^\beta g(x) u\, dx \\ &= \langle g, u\rangle_\beta \\ &= \langle Sf, g\rangle_\beta,\end{aligned}$$

ou seja, S é um operador simétrico. Também podemos obter

$$\begin{aligned}\langle Sf, f\rangle_\beta = \langle u, f\rangle_\beta &= \int_\Omega |x|^\beta f(x) u\, dx \\ &= \int_\Omega |x|^\beta \langle \nabla u, \nabla u\rangle\, dx \\ &= \int_\Omega |x|^\beta |\nabla u|^2 dx > 0.\end{aligned}$$

Logo, S também é um operador positivo. Portanto, pela Teoria Espectral dos Operadores Compactos em Espaços de Hilbert [2] existe uma sequência de autovalores positivos do operador S que converge para 0. Considerando

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots,$$

a sequência formada pelos inversos multiplicativos desses autovalores temos que tal sequência tem termos positivos e converge para $+\infty$ resolvendo o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^\alpha \nabla \phi) = \lambda |x|^\beta \phi, & \text{em } \Omega, \\ \phi = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Mais que isso, ainda segundo a Teoria Espectral, o fato do nosso operador solução ser simétrico implica que para $Sf = v$ o primeiro autovalor é dado por

$$\lambda_1 = \inf_{v \in H^1_\alpha(\Omega),\, \|v\|_\beta = 1} \langle Sv, v\rangle_\alpha = \inf_{v \in H^1_\alpha(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |\nabla v|^2 dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\beta v^2 dx}.$$

Vamos verificar que se v é a primeira autofunção associada ao autovalor λ_1, então v^+ também é uma autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1. De fato, notamos que

$$\lambda_1 = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |\nabla v|^2 dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\beta v^2 dx} = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |\nabla (v^+ - v^-)|^2 dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\beta (v^+ - v^-)^2 dx}$$
$$= \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |\nabla (v^+) - \nabla (v^-)|^2 dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\beta \left((v^+)^2 + (v^-)^2\right) dx}$$
$$= \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha \left|\nabla (v^+)\right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha \left|\nabla (v^-)\right|^2 dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\beta (v^+)^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\beta (v^-)^2 dx},$$

de onde

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha \left|\nabla (v^+)\right|^2 dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\beta (v^+)^2 dx} \leq \lambda_1 \quad \text{e} \quad \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha \left|\nabla (v^-)\right|^2 dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\beta (v^-)^2 dx} \leq \lambda_1.$$

E como também vale que

$$\lambda_1 \leq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha \left|\nabla (v^+)\right|^2 dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\beta (v^+)^2 dx} \quad \text{e} \quad \lambda_1 \leq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha \left|\nabla (v^-)\right|^2 dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\beta (v^-)^2 dx},$$

podemos concluir que

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha \left|\nabla (v^+)\right|^2 dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\beta (v^+)^2 dx} = \lambda_1 = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha \left|\nabla (v^-)\right|^2 dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\beta (v^-)^2 dx}.$$

Isto mostra que v^+ e v^- são autofunções associadas ao autovalor λ_1.

Até o momento, v^+ é uma solução fraca para o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(|x|^\alpha \nabla\left(v^+\right)\right) = \lambda |x|^\beta v^+, & \text{em } \Omega \\ v^+ = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Princípio Forte do Máximo de Vásquez [15], segue-se que v^+ é estritamente positiva em Ω ou v^+ é identicamente nula em Ω, implicando que, $v > 0$ em Ω ou $v < 0$ em Ω. Em qualquer do casos podemos escolher $\phi_1 = v > 0$ para concluirmos a demonstração.

Observe também que de $-\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla u) = \lambda|x|^{\beta}u$ segue-se que

$$\begin{aligned}-\lambda|x|^{\beta}u &= \operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla u)\\ &= \langle\nabla|x|^{\alpha},\nabla u\rangle + |x|^{\alpha}\operatorname{div}(\nabla u)\\ &= \alpha|x|^{\alpha-2}\langle x,\nabla u\rangle + |x|^{\alpha}\Delta u.\end{aligned}$$

Daí, podemos considerando o operador linear uniformemente elíptico

$$Lu = \Delta u + \alpha|x|^{-2}\langle x,\nabla u\rangle + \lambda|x|^{\beta-\alpha}u.$$

Para $u > 0$ solução do Problema de Autovalor que já vimos ser possível obter, temos que se $v = -u$ então vale

$$\begin{cases}\Delta v + \alpha|x|^{-2}\langle x,\nabla v\rangle + \lambda|x|^{\beta-\alpha}v = 0, \text{ em } \Omega\\ v = 0, \text{ em } \partial\Omega.\end{cases}$$

Logo, desde que Ω satisfaz a condição da esfera interior, pelo Lema de Hopf ([8] - Lema 3.4) podemos concluir que

$$\frac{\partial(-u)}{\partial\nu} = \frac{\partial v}{\partial\nu} > 0, \text{ em } \partial\Omega,$$

onde ν é o vetor normal exterior a Ω. Consequentemente

$$\frac{\partial u}{\partial\nu} < 0, \text{ em } \partial\Omega.$$

■

Observação A.2. É importante ressaltar que o Princípio do Máximo Forte de Vásquez [15] funciona de modo mais geral, a saber: considere um operador linear

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b_j(x)u\right) + \sum_{j=1}^{N}c_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},$$

assumindo as condições

(i) $a_{ij} \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$ e $b_j, c_j \in L^{\infty}_{loc}$;

(ii) $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_j\xi_i \geq \lambda(x)|\xi|^2 > 0$, para cada $\xi \in \mathbb{R}^N$, $\xi \neq 0$;

(iii) $\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial b_j}{\partial x_j} \geq 0$;

(iv) Vale a desigualdade

$$-Lu + d(x)\rho(u(x)) \geq 0, \quad \text{q.s. em } \Omega,$$

com $d(x)$ contínua em Ω, $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é não-decrescente, $\rho(0) = 0$ e

$$\int_0^1 (\rho(s)s)^{-1/2}\, ds = +\infty.$$

Sob tais condições o Teorema 1 e Teorema 4 de [15] são análogos, assim podemos concluir que u é positiva ou identicamente nula em Ω.

Em nosso caso, consideramos que $a_{ij}(x) = |x|^{\alpha}\delta_{ij}$ e $b_j = 0 = c_j$ com δ_{ij} sendo o Delta Kronecker, obtemos que

$$\begin{aligned} Lu &= \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(|x|^{\alpha}\delta_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(|x|^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \\ &= \operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla u). \end{aligned}$$

Não é difícil perceber que valem (i), (ii) e (iii) para essas escolhas de coeficientes, ainda mais

$$-\operatorname{div}(|x|^{\alpha}\nabla u) + (-\lambda|x|^{\beta})u = 0$$

onde podemos escolher $d(x) = -\lambda|x|^{\beta}$ e $\rho(r) = r$ satisfazendo a condição (iv).

Observação A.3. Outro detalhe importante é que quando uma função ϕ de classe $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ e tal que $\phi = 0$ em $\partial\Omega$ e $\frac{\partial\phi}{\partial\nu} < 0$ sobre $\partial\Omega$, então existe

$$\Omega_{\varepsilon} = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \varepsilon\}$$

de tal sorte que $\phi > 0$ em Ω_{ε}.

De fato, considere

$$-2\sigma = \max_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial\nu} < 0.$$

Para cada $\zeta \in \partial\Omega$ existe $\delta > 0$ tal que

$$y \in \partial\Omega \cap B_{\delta}(\zeta) \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial\nu_{\zeta}}(y) \leq -2\sigma < -\sigma \Rightarrow \langle\nabla\phi(y), \nu_{\zeta}\rangle < -\sigma.$$

Como $\langle,\rangle$ é contínuo, então para ν_{ζ} fixado podemos admitir que existe $\delta_0 \leq \delta$ de sorte que para todo $x \in \Omega \cap B_{\delta_0}(\zeta)$ temos $\langle\nabla\phi(x), \nu_{\zeta}\rangle < -\sigma$. Por outro lado, considere o segmento $x + t\nu_{\zeta}$ que deve interceptar $\partial\Omega$, isto é, existe $t_0 > 0$ de tal sorte que $x + t_0\nu_{\zeta} \in \partial\Omega$. Nessas condições, por um lado temos

$$\int_0^{t_0} \frac{d}{dt}\phi(x + t\nu_{\zeta})dt = \phi(x + t_0\nu_{\zeta}) - \phi(x) = -\phi(x),$$

e por outro lado

$$-\phi(x) = \int_0^{t_0} \frac{d}{dt}\phi(x+t\nu_\zeta)dt = \int_0^{t_0} \langle \nabla\phi(x+t\nu_\zeta), \nu_\zeta\rangle dt < -\sigma t_0.$$

Logo,

$$\phi(x) > \sigma t_0 \geq \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq 0.$$

Dessa forma, para a cobertura

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{y\in\partial\Omega} B_{\delta_y}(y)$$

extraímos uma subcobertura finita e depois consideramos $\varepsilon = \min\{\delta_{y_i} : i = 1,2,\ldots,k\}$. Finalmente obtendo que vale $\phi > 0$ em Ω_ε.

Com esta ultima observação para ϕ e ψ que se anulam em $\partial\Omega$ e $\frac{\partial\phi}{\partial\nu}, \frac{\partial\psi}{\partial\nu} < 0$ sobre $\partial\Omega$, consideramos

$$\sigma_1 > \max_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi/\partial\nu}{\partial\psi/\partial\nu}.$$

Então, para tal σ_1 temos

$$\frac{\partial}{\partial\nu}(\sigma_1\psi - \phi) = \sigma_1\frac{\partial\psi}{\partial\nu} - \frac{\partial\phi}{\partial\nu} < 0$$

sobre $\partial\Omega$ com $\sigma\psi - \phi = 0$ em $\partial\Omega$. Logo, pela Observação A.3, então existe Ω_ε tal que $\sigma_1\psi > \phi$ em Ω_ε. Em $\Omega\setminus\Omega_\varepsilon$ podemos fazer algo parecido para obter que $\hat{\sigma}_1\psi \geq \phi$. Logo, com σ_0 sendo o máximo entre σ_1 e $\hat{\sigma}_1$ podemos concluir que

$$\sigma_0\psi \geq \phi, \ \text{ em } \Omega.$$

Analogamente, existe $\hat{\sigma}_0 \geq 1$ tal que

$$\hat{\sigma}_0\phi \geq \psi, \ \text{ em } \Omega.$$

Assim finalmente podemos obter $\sigma \geq 1$ de tal sorte que

$$\sigma^{-1}\phi \leq \psi \leq \sigma\phi.$$

Referências Bibliográficas

[1] R. G. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue Measure*. Wiley, New York, 1996.

[2] H. Brezis and H. Brézis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, volume 2. Springer, 2011.

[3] P. Cerda, M. A. Souto, and P. Ubilla. Elliptic systems with some superlinear assumption only around the origin. In *Annales Henri Poincaré*, volume 19, pages 3031–3051. Springer, 2018.

[4] P. Cerda, M. Souto, and P. Ubilla. Existence of solution of some p, q p,q-laplacian system under local superlinear conditions. *Mathematische Nachrichten*, 295(1):44–57, 2022.

[5] D. G. de Figueiredo, D. De Figueiredo, P. Lions, and R. Nussbaum. A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations. *Djairo G. de Figueiredo-Selected Papers*, pages 133–155, 2013.

[6] K. Deimling. *Nonlinear functional analysis*. Courier Corporation, 2010.

[7] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19. American Mathematical Society, 1993.

[8] D. Gilbart and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*, volume 224. Springer, 2001.

[9] A. Granas and J. Dugundji. *Fixed point theory*, volume 14. Springer, 2003.

[10] M. A. Krasnosel'skii. Fixed points of cone-compressing or cone-extending operators. In *Doklady Akademii Nauk*, volume 135, pages 527–530. Russian Academy of Sciences, 1960.

[11] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*, volume 17. John Wiley & Sons, 1991.

[12] E. L. Lima. *Curso de análise: volume 1*. Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 2014.

[13] E. L. Lima. *Espaços Métricos*. Projeto Euclides, 2014.

[14] D. Ruiz. A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems. *Journal of Differential Equations*, 199(1):96–114, 2004.

[15] J. L. Vázquez. A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations. *Applied Mathematics and Optimization*, 12:191–202, 1984.

[16] Z.-Q. Wang and M. Willem. Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities with remainder terms. *Journal of Functional Analysis*, 203(2):550–568, 2003.

[17] B. Xuan. The solvability of Brezis-Nirenberg type problems of singular quasilinear elliptic equation. *arXiv preprint math/0403549*, 2004.