Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Doutorado em Matemática

Graduações e Identidades com Involução em Álgebras Matriciais

por

José Lucas Galdino da Silva †

CAMPINA GRANDE - PB

2024

†O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

JOSÉ LUCAS GALDINO DA SILVA

TÍTULO: Graduações e Identidades com Involução em Álgebras Matriciais

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Diogo Diniz da Silva e Silva

CAMPINA GRANDE - PB

2024

S586g Silva, José Lucas Galdino da.
Graduações e identidades com involução em álgebras matriciais / José Lucas Galdino da Silva. – Campina Grande, 2025.
114 f.

Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.
"Orientação: Prof. Dr. Diogo Diniz da Silva e Silva".
Referências.

1. Álgebras Graduadas. 2. Álgebra de Matrizes Triangulares em Blocos. 3. Identidades Polinomiais Graduadas com Involução. 4. Radical de Jacobson. I. Silva, Diogo Diniz da Silva e. II. Título.

CDU 512(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

Graduações e Identidades com Involução em Álgebras Matriciais

por

José Lucas Galdino da Silva

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada em: 19 de abril de 2024

Diogo Diniz P.S. Silva

Prof. Dr. Diogo Diniz da Silva e Silva

Orientador

Ana Cristina Vieira

Profª Dra. Ana Cristina Vieira

Felipe Y. Yasumura

Prof. Dr. Felipe Yukihide Yasumura

Lucio Centrone

Prof. Dr. Lucio Centrone

P Kochloukov

Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Doutorado em Matemática

Abril/2024

Agradecimentos

Inicio louvando a Deus, pois sei que sem Ele nada poderia fazer. Desde o meu início na UFCG (mais precisamente em 2014), sempre vi seus cuidados e zelo por mim. Muitos desafios e obstáculos enfrentei, mas a sua graça sempre me alcançou. Obrigado, Senhor!

Agradeço aos meus pais, Antônio Antero e Lúcia de Fátima, os quais embora sem ter muitos estudos, sempre estiveram ao meu lado, mesmo sem entender praticamente nada do que estudo. Impossível não lembrar de cada dia em que estavam a me acordar de manhã, ao me levar no ônibus etc. Sei que sem vocês jamais teria chegado aqui. Aproveito o ensejo, para agradecer a minha irmã, Ana Lívia. Quantas vezes liguei para ela em meio aos medos e questionamentos e sempre encontrei acolhimento.

Agradeço aos meus professores, desde os primeiros (infantil, fundamental e médio), até mesmo os da graduação e pós-graduação. Cito, de modo particular, os professores Brandão (o qual me fez ter um novo gás no mestrado no Curso de Verão), Luiz Antônio (meu pai acadêmico, o qual me acolheu no PET Matemática e Estatística), Lindomberg (meu segundo tutor no PET), Claudemir (meu orientador de mestrado) e tantos outros que me ajudaram a entender a beleza da matemática através de suas aulas. Aqui aproveito para agradecer aos demais colaboradores da Unidade Acadêmica de Matemática da UFCG.

Agradeço ao professor Dr. Diogo Diniz, o qual me acolheu como seu orientando durante os 4 anos de doutorado. Sei, tenho plena certeza, o quanto o procurei nesse tempo, até mesmo o incomodando. Mas agradeço por cada conselho, ensinamento e por me mostrar como se faz Matemática.

Agradeço aos membros da Banca Examinadora Profª Dra. Ana Cristina Vieira, Prof. Dr. Felipe Yukihide Yasumura, Prof. Dr. Lucio Centrone e Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov, sei que suas contribuições serão de grande valia para minha formação.

Agradeço a vários colegas que tive nesse tempo: integrantes do Grupo de Oração Rosa Mística (Pocinhos-PB); alunos que tive nas três escolas as quais já trabalhei; professores, colegas, os quais tive a honra de ensinar durante esses 7 anos de experiência profissional; colegas de Graduação, Mestrado e Doutorado, os quais hoje não os vejo tanto (efeito da Pandemia), mas sei que toda a troca que tivemos foi e é importante para minha vida como matemático; irmãos e irmãs que minha caminhada religiosa me deu (seguidores do meu canal no Youtube, padres amigos, etc.).

Agradeço à CAPES pela bolsa de incentivo a pesquisa. Sei que não apenas eu, mas diversas pessoas necessitam desse auxílio para terem seus sonhos realizados.

Por fim, mas não menos importante, agradeço a mim. Esses 10 anos de trajetória acadêmica me fizeram ser uma nova pessoa. Como se não bastasse, esse tempo ainda teve a Pandemia para trazer uma nova ótica sobre o mundo a minha volta. Não me arrependo da escolha do curso, mas sei que muitos momentos difíceis foram enfrentados. Por isso, agradeço a mim por não ter desistido em meio a dúvidas, medos, ansiedades, tensões... Sei que algumas vezes não fui quem pensei ser, pois as dificuldades são muitas, mas se cheguei até aqui é porque não desisti.

“Nada te perturbe, Nada te espante,

Tudo passa, Deus não muda,

A paciência tudo alcança;

Quem a Deus tem, Nada lhe falta:

Só Deus basta.

Eleva o pensamento, Ao céu sobe,

Por nada te angusties, Nada te perturbe.

A Jesus Cristo segue, Com grande entrega,

E, venha o que vier, Nada te espante.

Vês a glória do mundo? É glória vã;

Nada tem de estável, Tudo passa.

Deseje às coisas celestes, Que sempre duram;

Fiel e rico em promessas, Deus não muda.

Ama-o como merece, Bondade Imensa;

Quem a Deus tem,

Mesmo que passe por momentos difíceis;

Sendo Deus o seu tesouro, Nada lhe falta.

Só Deus basta!”

(Santa Teresa D´Ávila)

Dedicatória

Aos meus pais, Antônio Antero e Lúcia de Fátima, e minha irmã, Ana Lívia.

Resumo

Neste trabalho, resolvemos dois problemas: o primeiro é provar que para qualquer graduação por um grupo em uma álgebra de matrizes triangulares em blocos, sobre um corpo arbitrário, o radical de Jacobson é um ideal graduado. Como observado por F. Yukihide, isso nos fornece a classificação das graduações por um grupo nessas álgebras e confirma uma conjectura feita por A. Valenti e M. Zaicev em 2007. O segundo é, assumindo o corpo F sendo de característica zero, provar que existe uma graduação em $UT_m(F)$, chamada de mais fina, tal que toda graduação que admite involução graduada é um coarsening dela, e essa involução graduada é equivalente a involução reflexão ou simplética em $UT_m(F)$. Para esta graduação mais fina, exibiremos uma base para as suas identidades graduadas com involução e determinamos o crescimento assintótico da sua sequência de codimensões. Além disso, estudaremos a álgebra $UT_3(F)$. Para esta álgebra, existem, a menos de equivalência, duas graduações não-triviais que admitem uma involução graduada: a mais fina e uma $\mathbb{Z}_2$-graduação. Determinaremos uma base para as suas $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades graduadas além de calcular a sequência de codimensões.

Palavras-chave: Álgebras Graduadas; Álgebra de Matrizes Triangulares em Blocos; Identidades Polinomiais Graduadas com Involução; Radical de Jacobson

Abstract

In this work we solve two problems: the first one is to prove that for any group grading on a block-triangular matrix algebra, over an arbitrary field, the Jacobson radical is a graded ideal. As observed by F. Yukihide this yields the classification of the group gradings on these algebras and confirms a conjecture made by A. Valenti and M. Zaicev in 2007. The second is, assuming that F is a field of characteristic zero, to prove that there is a group grading on $UT_m(F)$, called the finest, such that every grading that admits graded involutions is one of its coarsening, and this graded involution is equivalent to the reflection or symplectic involution on $UT_m(F)$. For this grading, we will exhibit a basis for their graded identities with involution and we will determine the asymptotic growth of their sequence of codimensions. Furthermore, we will study the algebra $UT_3(F)$. For this algebra, there are, up to equivalence, two non-trivial gradings that admit a graded involution: the finest and a $\mathbb{Z}_2$-grading. We determine a basis for the graded $(\mathbb{Z}_2, *)$-identities, in addition we compute the codimension sequence.

Keywords: Graded Algebras; Graded Polinomial Identities with Involution; Algebra of Upper Block-Triangular Matrices; Jacobson Radical.

Sumário

Introdução

Nesta tese, consideramos F um corpo, A uma F-álgebra associativa com unidade e G um grupo. Uma graduação por G na álgebra A é uma decomposição $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$, com $A_g A_h \subseteq A_{gh}$ para todos $g, h \in G$, onde A_g são subespaços de A. Salientamos que a classificação das graduações na álgebra das matrizes tem uma grande importância na teoria das álgebras com identidades polinomiais, como mostrado em [1].

Um dos principais problemas na área de Álgebras Graduadas é descrever todas as graduações de álgebras importantes. Para álgebras de matrizes as graduações foram classificadas por Bahturin, Sehgal e Zaicev, que em [5] classificaram as graduações na álgebra de matrizes sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, com o grupo sendo abeliano. Posteriormente, Bahturin e Zaicev classificaram as graduações para um grupo arbitrário e corpo algebricamente fechado de característica arbitrária nas álgebras de matrizes, ver [6]. Por sua vez, Valenti e Zaicev provaram que a álgebra das matrizes triangulares superiores $UT_m(F)$ com qualquer graduação é isomorfa a $UT_m(F)$ com uma graduação elementar, isto é, uma graduação onde todas as matrizes elementares são homogêneas. Em [17], as identidades graduadas para as graduações elementares nas álgebras de matrizes triangulares superiores são estudadas e é provado que álgebras graduadas não-isomorfas satisfazem identidades polinomiais graduadas diferentes.

As álgebras das matrizes e as de matrizes triangulares superiores são casos particulares das álgebras de matrizes triangulares em blocos. Essas últimas e suas graduações pelo grupo $\mathbb{Z}_2$ são importantes na classificação das variedades minimais de um dado expoente, obtida por Giambruno e Zaicev em [27] e [29]. Dito isto, é um problema interessante classificar as graduações por grupos nessas álgebras. As graduações por um grupo abeliano finito nas álgebras das matrizes triangulares em blocos sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, foram descritas em [45]. Em [48], Yukihide provou que toda graduação é obtida de uma graduação elementar numa álgebra de matrizes triangulares em blocos e uma graduação com divisão em uma álgebra de matrizes, sob a hipótese do radical de Jacobson ser um ideal graduado na graduação. As graduações nestas álgebras como álgebra de Lie e álgebra de Jordan foram descritas por Kochetov e Yukihide em [38]; eles também classificaram as graduações nas álgebras das matrizes triangulares em blocos por grupos abelianos sobre corpos algebricamente fechados.

Nesta tese, provaremos que em toda graduação por um grupo em uma álgebra das matrizes triangulares em blocos, sobre qualquer corpo, o radical de Jacobson é um ideal graduado. Como uma consequência dos resultados em [48], isso nos dá a classificação das graduações das álgebras das matrizes triangulares em blocos por um grupo arbitrário e sobre um corpo arbitrário, confirmando a conjectura feita por Valenti e Zaicev em [46]. As álgebras das matrizes triangulares em blocos são parte de uma grande classe de álgebras, as álgebras das matrizes estruturais, e as graduações de tais álgebras foram estudadas recentemente, por exemplo, em [9] as classes de isomorfismos de certos tipos de graduações em álgebras de matrizes estruturais são descritas.

Como dito acima, as $\mathbb{Z}_2$-graduações nas álgebras das matrizes triangulares em blocos estão ligadas à classificação das variedades minimais. A classificação das álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas simples foi um passo importante no estudo das variedades verbalmente primas. As variedades minimais e as verbalmente primas aparecem no contexto das PI-álgebras (álgebras que satisfazem identidades polinomiais). Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$, com variáveis não comutativas e com os coeficientes sobre um corpo F, é dito uma identidade polinomial para uma álgebra A, quando $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$. Quando existe uma identidade polinomial não-nula para uma álgebra A dizemos que esta álgebra é uma PI-álgebra. Para uma discussão mais detalhada sobre o desenvolvimento da PI-teoria, sugerimos [23], [24], [28] e [42].

Os estudos iniciais sobre PI-álgebras começaram entre 1920 e 1930, embora de forma implícita, nos trabalhos de Dehn e Wagner, veja [16] e [47]. No ano de 1948, com o trabalho de Kaplansky em [34] o interesse pelo estudo de identidades polinomiais cresceu e, obteve força ainda maior, quando em 1950 veio o artigo [3] de Amitsur e Levitzki. Nele, os autores utilizaram métodos combinatórios para provar que o polinômio standard de grau $2n$ é uma identidade de grau mínimo para a álgebra das matrizes de ordem n sobre um corpo F.

O conceito de identidades polinomiais pode ser estendido para álgebras graduadas. Tal conceito (para graduações pelo grupo $\mathbb{Z}_2$), aparece nos trabalhos de Kemer, veja [36] e [37]. O estudo das identidades graduadas foi motivado pela sua importância na estrutura dos T-ideais e ao longo das últimas décadas importantes resultados foram obtidos. Por exemplo, em [8] foi provado que sendo G um grupo finito, então uma álgebra G-graduada A é uma PI-álgebra se, e somente se, A_e é uma PI-álgebra, onde e é o elemento neutro de G.

Além das álgebras graduadas, podemos estudar identidades polinomiais para uma álgebra munida de uma involução. As identidades polinomiais com involução passaram a ser um objeto de estudo por volta dos anos 60, nos trabalhos de Herstein e Martindale (separadamente) sobre anéis simples com involuções satisfazendo identidades polinomiais. Mais de 60 anos depois, ainda conhecemos pouco sobre a estrutura de $T_*(A)$ para uma dada álgebra A. O conjunto de geradores para o $T_*(M_2(F))$ foi determinado por Levchenko em 1982, veja [39], no caso em que F tem característica zero e, dois anos depois, quando F é um corpo finito pela mesma autora em [40]. Em 2005, Colombo e Koshlukov, estudaram as $*$-identidades polinomiais de $M_2(F)$ quando F é corpo infinito de característica maior que 2, veja [12]. Um ano depois, Di Vincenzo, Koshlukov e La Scala, em [18] iniciaram o estudo das identidades com involução para a álgebra de matrizes triangulares superiores. Os autores descreveram $T_*(UT_2(F))$ quando F é um corpo infinito de característica $p \neq 2$. Os autores também descreveram $T_*(UT_3(F))$ quando F é um corpo de característica zero, tanto para a involução reflexão quanto para a involução simplética. Continuando este estudo, Gonçalves e Urure em ([44]), descreveram $T_*(UT_2(F))$ quando F é corpo finito de característica diferente de 2. As identidades polinomiais graduadas para $M_m(F)$ com a involução transposta foram estudadas em [31] para uma graduação produto cruzado e $char F = 0$. Em [30], os autores estenderam estes resultados para uma graduação elementar com componente neutra comutativa e um corpo infinito F. Enfatizamos o fato de que a abordagem combinatória para o estudo de identidades polinomiais ordinárias, bem como a dos invariantes associados aos T-ideais da álgebra livre, foi generalizado e é amplamente utilizado nos casos de álgebras graduadas, álgebras com involução e também álgebras graduadas com involução, veja [28].

Esta tese está organizada em três capítulos. O primeiro capítulo é composto por resultados e conceitos preliminares, os quais constituem a base para o nosso trabalho. Ademais, nele serão fixadas notações.

No segundo capítulo estudaremos as graduações em álgebras de matrizes triangulares em blocos. Nele provaremos que em qualquer graduação por um grupo em uma álgebra de matrizes triangulares em blocos, sobre qualquer corpo, o radical de Jacobson é um ideal graduado. Utilizando os resultados obtidos no trabalho [48], obtemos, então, a classificação das álgebras das matrizes triangulares em blocos por um grupo arbitrário, sobre um corpo arbitrário, provando a conjectura feita por Valenti e Zaicev em 2007, veja [46].

No terceiro capítulo, considerando F um corpo de característica zero, provaremos que se uma graduação em $UT_m(F)$ admite uma involução graduada, então esta graduação é um "coarsening" de uma $\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$-graduação em $UT_m(F)$, a qual será chamada de graduação mais fina. Além disso, exibiremos uma base finita para as $(\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, *)$-identidades para as involuções reflexão e simplética, e, por fim, determinaremos o crescimento assintótico da sua $(\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, *)$-codimensão. Além disso, estudaremos a álgebra $UT_3(F)$. Para esta álgebra, existem, a menos de equivalência, duas graduações não-triviais que admitem uma involução graduada: a $\mathbb{Z}$-graduação mais fina e a $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida por $(0, 1, 0)$. Determinaremos uma base para as $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades graduadas e calcularemos a sequência de codimensão para as $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades graduadas para $UT_3(F)$.

Os resultados contidos no Capítulo 2 foram publicados em forma de artigo, em [21]), na revista *Proceedings of the American Mathematical Society*, em colaboração com os professores Diogo Diniz e Plamen Koslukov. Os resultados contidos no Capítulo 3 foram publicados em forma de artigo, em [20], na revista *Linear Algebra and its Applications* em colaboração com os professores Alex Borges e Diogo Diniz.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo desejamos estabelecer a linguagem que será adotada ao longo de toda a tese. Diante disso, serão apresentados resultados, definições e notações que serão frenquentemente utilizados nos capítulos posteriores. A menos que dito o contrário, F denotará um corpo. Ao longo do capítulo, assumiremos que o leitor tenha familiaridade com conceitos básicos de Álgebra Linear.

Iniciaremos o capítulo apresentando a definição de álgebra e outros conceitos e resultados básicos relativos a esta estrutura algébrica. Após isso, estudaremos as álgebras graduadas e os módulos graduados. Ao final, veremos a definição de PI-álgebras e suas propriedades, bem como estudaremos as álgebras de grupo torcida e o Teorema de Maschke para a álgebras de grupo torcida.

1.1 Álgebras

Definição 1.1.1. Dizemos que um par $(A, *)$ é uma F-álgebra, sempre que A for um F-espaço vetorial e $* : A \times A \to A$ for uma aplicação bilinear (chamada de produto), ou seja, se tivermos as seguintes propriedades:

- $a * (b + c) = a * b + a * c$
- $(a + b) * c = a * c + b * c$
- $(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b)$

para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in F$.

Representamos uma F-álgebra $(A, *)$, sempre que o produto for claro, simplesmente por A, omitindo o produto. Além disso, também podemos omitir sobre que corpo tal álgebra está definida, chamando-a apenas de álgebra. O produto $a * b$ será representado simplesmente por ab. Também dizemos que um subconjunto β é uma base da álgebra A, quando β é uma base de A como espaço vetorial. Ademais, a dimensão de A será a sua dimensão como espaço vetorial.

Definição 1.1.2. Dizemos que uma álgebra A é:

(i) associativa quando seu produto for associativo;

(ii) comutativa, quando seu produto for comutativo;

(iii) unitária, ou com unidade, se o produto de A tiver unidade (tal unidade é denotada por 1_A).

Observação 1.1.3. De agora em diante, a menos que dito o contrário, estaremos nos referindo com o termo álgebra a uma álgebra associativa e unitária.

Definição 1.1.4. Sejam A uma álgebra e B um subespaço vetorial de A. Dizemos que B é uma subálgebra de A, se $xy \in B$ para quaisquer $x, y \in B$. Se A for unitária, acrescentamos o fato de $1_A \in B$.

Exemplo 1.1.5. Seja $m \in \mathbb{N}$. O espaço vetorial $M_m(F)$ munido de seu produto usual é uma álgebra associativa com unidade (a matriz identidade I_m). Destacamos nesta álgebra as matrizes elementares E_{ij}, que possuem 1 na entrada da i-ésima linha e j-ésima coluna e 0 nas demais. É fácil verificar que o conjunto destas matrizes é uma base para $M_m(F)$, a qual é chamada base canônica desta álgebra. De modo geral, se A é uma álgebra, consideramos o espaço vetorial $M_m(A)$ de todas as matrizes de ordem n com entradas em A. O produto de matrizes em $M_m(A)$ é análogo ao produto de matrizes com entradas em $M_m(F)$. Temos então uma estrutura de álgebra em $M_m(A)$.

Exemplo 1.1.6. Seja $UT_m(F)$ o conjunto das matrizes triangulares superiores. Tem-se que $UT_m(F)$ é uma subálgebra de $M_m(F)$. Como $UT_m(F) = \langle E_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq m \rangle$ (subespaço gerado) segue que

$$\dim UT_m(F) = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Exemplo 1.1.7. Considere o conjunto $UT(d_1, \ldots, d_m)$ das matrizes

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ 0 & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{mm} \end{pmatrix},$$

de ordem $n = d_1 + \cdots + d_m$, onde B_{ij} são matrizes sobre F com d_i linhas e d_j colunas. Tal conjunto munido com as operações usuais de matrizes é uma F-álgebra, chamada de álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos.

Consideremos os conjuntos $I_1 = \{1, \ldots, d_1\}, I_2 = \{d_1 + 1, \ldots, d_1 + d_2\}, \ldots, I_m = \{d_1 + d_2 + \cdots + d_{m-1} + 1, \ldots, d_1 + d_2 + \cdots + d_m\}$. Observe que dada uma matriz elementar E_{ij} existem únicos p, q tais que $i \in I_p$ e $j \in I_q$, a matriz elementar E_{ij} pertence a $UT(d_1, \ldots, d_m)$ se, e somente se, $p \leq q$. Ademais, temos que o conjunto formado por estas matrizes elementares é uma base para $UT(d_1, \ldots, d_m)$.

Podemos definir uma estrutura de álgebra em um espaço vetorial com uma base fixada definindo os produtos dos elementos da base, isto é garantido pelo próximo resultado e sua demonstração pode ser encontrada em [13, página 13].

Proposição 1.1.8. Dados A um espaço vetorial, β uma base de A e $f : \beta \times \beta \to A$, existe uma única aplicação bilinear $* : A \times A \to A$ tal que $u_1 * u_2 = f(u_1, u_2)$ para quaisquer $u_1, u_2 \in \beta$.

Um exemplo clássico de uma álgebra obtida através da proposição acima é a álgebra de grupo. Vejamos no exemplo a seguir.

Exemplo 1.1.9. Seja S um conjunto não-vazio. Consideremos o conjunto FS de todas as somas formais

$$\sum_{s \in S} \lambda_s s \text{ , onde } \lambda_s \in F \text{ e } \{s \in S, \lambda_s \neq 0\} \text{ é finito.}$$

Dados dois elementos $\sum_{s \in S} \lambda_s s$ e $\sum_{s \in S} \gamma_s s$ em FS, dizemos que são iguais, se para cada $s \in S$ tem-se $\lambda_s = \gamma_s$. Definimos as operações soma e produto escalar da seguinte forma:

$$\sum_{s \in S} \lambda_s s + \sum_{s \in S} \gamma_s s = \sum_{s \in S} (\lambda_s + \gamma_s) s$$

e

$$\gamma \sum_{s \in S} \lambda_s s = \sum_{s \in S} (\gamma \lambda_s) s$$

respectivamente. Munidos destas operações, vemos facilmente que FS é um F-espaço vetorial, chamado de F-espaço vetorial de base S.

Se "$*$" é uma operação em S, pela Proposição 1.1.8, podemos estender $*$ a uma única aplicação bilinear em FS, a qual denotaremos também por $*$. Assim, $(FS, *)$ tem uma estrutura de álgebra (não necessariamente associativa e com unidade). Em particular, tomando um grupo G, em vez de um conjunto S qualquer e $*$ a operação de G, obtemos a álgebra FG, chamada de **Álgebra de Grupo**. Como a operação de

G é associativa e possui elemento neutro, facilmente se mostra que FG é associativa e possui unidade. E, caso G seja abeliano, a álgebra de grupo FG será comutativa.

Definição 1.1.10. Sejam V e W espaços vetoriais. Consideremos o espaço vetorial $F(V \times W)$ com base $V \times W$ e o subespaço $\mathcal{U}$ gerado pelos elementos dos tipos

$$\begin{aligned} (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w) \\ (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) \\ (\lambda v, w) - \lambda(v, w) \\ (v, \lambda w) - \lambda(v, w), \end{aligned}$$

onde $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ e $\lambda \in F$. Dado isso, obtemos um espaço vetorial quociente $\dfrac{F(V \times W)}{\mathcal{U}}$, o qual é chamado de **produto tensorial** entre os espaços V e W e o denotamos por $V \otimes W$. Os elemento $\overline{(v, w)}$ são chamados de tensores e são denotados por $v \otimes w$. Disso, temos que os elementos de $V \otimes W$ são da forma $\sum(v_i \otimes w_i)$, com $v_i \in V$ e $w_i \in W$.

Considerando os elementos que geram $\mathcal{U}$, obtemos que dados $\lambda \in F$, $v, v_1, v_2 \in V$ e $w, w_1, w_2 \in W$, valem:

(i) $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$;

(ii) $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$;

(iii) $\lambda(v \otimes w) = (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w)$.

Um fato importante a considerar é que se S_1 e S_2 são conjuntos geradores de V e W, respectivamente, então $\{u_1 \otimes u_2 \mid u_1 \in S_1, u_2 \in S_2\}$ é um conjunto gerador de $V \otimes W$.

O teorema abaixo refere-se a chamada Propriedade Universal do Produto Tensorial e nos dá uma ferramenta para construção de produtos tensoriais entre álgebras.

Teorema 1.1.11. Sejam V, W e U F-espaços vetoriais. Para toda aplicação bilinear $\varphi : V \times W \to U$, existe uma única aplicação linear $\overline{\varphi} : V \otimes W \to U$, tal que

$$\overline{\varphi}(v \otimes w) = \varphi(v, w),$$

para quaisquer $v \in V$ e $w \in W$.

Demonstração: Ver [15], Teorema 12.3, página 61.

■

Considerando A e B como álgebras, o espaço $A \otimes B$ admite uma estrutura de álgebra, com a multiplicação dada por $(a_i \otimes b_j)(a_l \otimes b_m) = a_i a_l \otimes b_j b_m$ para quaisquer $a_i, a_l \in A$ e $b_j, b_m \in B$. Esta álgebra é conhecida como produto tensorial de A e B.

Definição 1.1.12. Sejam A uma álgebra e I um subespaço vetorial de A. Dizemos que:

(i) I é um ideal à esquerda de A (respectivamente à direita), se $ax \in I$ (respectivamente, $xa \in I$) para quaisquer $a \in A$ e $x \in I$.

(ii) Seja I um ideal à esquerda próprio de A. Dizemos que I é um ideal à esquerda maximal de A, se não existe ideal à esquerda próprio J de A, com $I \neq J$, tal que $I \subset J$. Formula-se conceito análogo para o caso em que I é um ideal à direita de A.

(iii) I é um ideal bilateral de A (ou simplesmente ideal de A), se I é um ideal à esquerda e à direita simultaneamente. Além disso, $\{0\}$ e A são ideais e são chamados de ideais triviais.

(iv) Definimos o centro de A como sendo o conjunto $Z(A) = \{x \in A \mid xa = ax, \forall a \in A\}$.

Exemplo 1.1.13. É claro que $Z(A)$ é uma subálgebra de A que não é, em geral, um ideal. No caso da álgebra das matrizes $M_m(F)$, temos que $Z(M_m(F))$ é formado pelas matrizes múltiplas escalares da identidade. Além disso, para uma álgebra qualquer A é possível provar de forma similar ao caso da álgebra $M_m(F)$ que

$$Z(M_m(A)) = \{aI_m \mid a \in Z(A)\}.$$

Definição 1.1.14. Uma álgebra A (com unidade) é dita simples, quando os seus únicos ideais são os triviais.

Exemplo 1.1.15. A álgebra das matrizes $M_m(F)$ é uma álgebra simples. De fato, seja $I \neq 0$ um ideal de $M_m(F)$ e a uma matriz não nula em I. Sejam i_0, j_0 tais que a entrada $a_{i_0 j_0}$ de a é não nula. Temos que $E_{ii} = a_{i_0 j_0}^{-1}(E_{ii_0} a E_{j_0 i}) \in I$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Deste modo, segue que a matriz identidade $I_m = E_{11} + \cdots + E_{mm}$ pertence a I, portanto $I = M_m(F)$.

Definição 1.1.16. Dada uma álgebra A, um elemento x é dito nilpotente quando existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $x^n = 0$. Um ideal I de uma álgebra A é dito nil quando todos os seus elementos são nilpotentes.

Definição 1.1.17. Dado I um ideal de uma álgebra A, ele é dito nilpotente quando existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $I^n = 0$ e o menor inteiro que satisfaz esta condição é chamado de índice de nilpotência de I.

Exemplo 1.1.18. Na álgebra $UT(d_1, \ldots, d_m)$ das matrizes triangulares superiores em blocos, o conjunto I das matrizes cujos blocos diagonais são nulos é um ideal nilpotente.

Definição 1.1.19. Definimos o Radical de Jacobson de uma álgebra A (com unidade), denotado por $J(A)$, como a interseção de todos os ideais maximais à esquerda de A.

O teorema a seguir nos traz caracterizações importantes para o Radical de Jacobson.

Teorema 1.1.20. As seguintes caracterizações do Radical de Jacobson de uma álgebra A são equivalentes:

(i) a interseção entre todos os ideais maximais à esquerda de A;

(ii) a interseção entre todos os ideais maximais à direita;

(iii) o conjunto de todos os elementos $x \in A$ tais que $1 - xy$ é invertível em A, para todo $y \in A$.

Demonstração: Em [33], Teorema 4.1, página 196. ■

Com o teorema acima, facilmente vemos que o Radical de Jacobson de qualquer álgebra é um ideal bilateral.

Exemplo 1.1.21. Já vimos que $UT_m(F)$ é uma subálgebra de $M_m(F)$. Utilizando o Teorema 1.1.20, podemos ver que o conjunto das matrizes triangulares estritamente superiores é o Radical de Jacobson de $UT_m(F)$.

Proposição 1.1.22. Se I é um ideal nil de uma álgebra A, então $I \subseteq J(A)$.

Demonstração: Sendo $x \in I$, então como I é um ideal temos que $xy \in I$, para qualquer $y \in A$. Assim, $1-xy$ é invertível e seu inverso é $1+(xy)^2+(xy)^3+\cdots+(xy)^{k-1}$, onde $k \in \mathbb{N}$ é tal que $(xy)^k = 0$. Logo, pelo terceiro item do Teorema 1.1.20, concluímos que $x \in J(A)$ e pela arbitrariedade do x, podemos concluir que $I \subseteq J(A)$. ■

Definição 1.1.23. Uma álgebra A é chamada de J-semissimples se $J(A) = 0$.

Exemplo 1.1.24. A álgebra $A = M_m(F)$ é J-semissimples. De fato, como ela é simples e o Radical de Jacobson é um ideal não contendo a unidade, concluímos que $J(A) = 0$.

Observação 1.1.25. A soma direta de álgebras J-semissimples é J-semissimples. Com efeito, considere $R =: A \times B \simeq A \oplus B$. A unidade de R é $(1_A, 1_B)$ (ou $1_A + 1_B$).

Afirmação: $U(R) = U(A) \times U(B)$, onde $U(R)$ denota os elementos invertíveis de R.

De fato, se $(a, b) \in U(R)$, então existe $(c, d) \in R$, tal que

$$(c, d)(a, b) = (a, b)(c, d) = (1_A, 1_B).$$

Assim, $ca = ac = 1_A$ e $db = bd = 1_B$. Logo, $a \in U(A)$ e $b \in U(B)$. Ou seja, $U(R) \subset U(A) \times U(B)$. Reciprocamente, se $(a, b) \in U(A) \times U(B)$. Sendo $(a^{-1}, b^{-1}) \in R$, temos $(a^{-1}, b^{-1})(a, b) = (a, b)(a^{-1}, b^{-1}) = (1_A, 1_B)$. Assim, $(a, b) \in U(R)$ e, portanto, $U(A) \times U(B) \subset U(R)$.

Sendo A e B J-semissimples, tomando $x \in J(R)$, então sendo $x = (x_1, x_2)$, para qualquer $y = (y_1, y_2) \in R$, temos

$$(1_A, 1_B) - (x_1, x_2)(y_1, y_2) = (1_A - x_1y_1, 1_B - x_2y_2)$$

invertível em R. Então, $1_A - x_1y_1$ é invertível em A e $1_B - x_2y_2$ é invertível em B. Pela associatividade de y_1 e y_2, temos que $1_A - x_1y_1 \in U(A)$, para todo $y_1 \in A$ e $1_B - x_2y_2 \in U(B)$, para todo $y_2 \in B$. Portanto, $x_1 \in J(A)$ e $x_2 \in J(B)$. Como $J(A) = 0 = J(B)$, temos

$$0_A = x_1 \text{ e } 0_B = x_2.$$

Então, $x = (0_A, 0_B) = 0_R$. Portanto, $J(R) = 0$.

Os próximos teoremas dão uma importante caracterização dos anéis artinianos J-semissimples.

Definição 1.1.26. Um anel é chamado artiniano se qualquer conjunto não-vazio de ideais a direita tem um elemento minimal.

Teorema 1.1.27. Um anel artiniano J-semissimples é a soma de um número finito de anéis artinianos simples.

Demonstração: Veja [32], Teorema 1.4.4., página 34. ∎

Teorema 1.1.28. (Teorema de Wedderburn-Artin) Seja A um anel artiniano simples. Então, A é isomorfo a $M_m(D)$, onde D é um anel com divisão. Ademais, m e D são únicos, a menos de isomorfismo. Por outro lado, para qualquer anel com divisão D, $M_m(D)$ é um anel artiniano simples.

Demonstração: Veja [32], Teorema 2.1.6, página 48. ∎

Proposição 1.1.29. Se I é um ideal de uma álgebra A, tal que $I \subseteq J(A)$ e A/I é J-semissimples, então $J(A) = I$.

Demonstração: Inicialmente, provaremos que $J(A/I) = J(A)/I$. Faremos por dupla inclusão.

Afirmação 1: $J(A)/I \subseteq J(A/I)$

Se $I \subseteq J(A)$, temos que a inclusão desejada, pois se $\bar{x} \in J(A)/I$, então $1 - xy$ é invertível em A, para todo $y \in A$ e, consequentemente, $\bar{1} - \overline{xy}$ é invertível em A/I, donde $\bar{x} \in J(A/I)$.

Afirmação 2: $J(A/I) \subseteq J(A)/I$

Seja $x + I \in J(A/I)$ e M um ideal maximal de A qualquer. Como $I \subset J(A)$ e o Radical de Jacobson de A é a interseção dos ideais maximais de A, segue que $I \subset M$. Deste modo, da correspondência de ideais, M/I é um ideal maximal de A/I. Assim, $x + I \in J(A/I)$ implica, em particular, que $x + I \in M/I$ e, portanto, existe $y \in M$, tal que $x + I = y + I$. Então, $z := x - y \in I$ e, como $I \subset M$, temos $x = y + z \in M$. Da arbitrariedade do ideal M tomado, segue que $x \in J(A)$. Logo, $x + I \in J(A)/I$.

Agora, supondo que A/I é J-semissimples, segue por definição que $J(A/I) = 0$ e assim, da igualdade acima já provada, $J(A)/I = J(A/I) = 0$. Logo, podemos concluir que $J(A) = I$. ■

Exemplo 1.1.30. Sejam $A = UT(d_1, \ldots, d_m)$ e I o conjunto das matrizes em A cujos blocos diagonais são todos nulos. Já comentamos que I é um ideal nilpotente de A, particularmente será um ideal nil, logo $I \subseteq J(A)$. Além disso, temos que $A = B \oplus I$, como soma direta de subespaços, onde $B \simeq M_{d_1}(F) \oplus \cdots \oplus M_{d_m}(F)$. Assim,

$$A/I \simeq B$$

e assim A/I é J-semissimples, pois B é J-semissimples pela Observação 1.1.25. Pela Proposição 1.1.29, temos que $I = J(A)$.

1.2 Álgebras e Módulos Graduados

1.2.1 Álgebras Graduadas

Nesta seção, a menos que se diga o contrário, G será um grupo arbitrário.

Definição 1.2.1. Sejam A uma álgebra e G um grupo. Uma G-graduação em A é uma decomposição de $A = \oplus_{g \in G} A_g$ como soma de subespaços vetoriais, tal que

$A_g A_h \subseteq A_{gh}$, para quaisquer $g, h \in G$. Dizemos, então, que a álgebra A é G-graduada (ou, simplesmente, graduada).

Na definição acima, os subespaços A_g são chamados de componentes homogêneas da graduação e seus elementos são chamados de elementos homogêneos de grau g. Dado $a \in A$, elemento homogêneo não-nulo, seu grau será representado por $\deg_G A$ (ou apenas por $\deg A$ quando não houver confusão quanto ao grupo)

Definição 1.2.2. Dada A uma álgebra, definimos o suporte de A, denotado por $SuppA$, como sendo o conjunto

$$Supp\, A := \{g \in G \mid A_g \neq 0\}.$$

A componente homogênea A_e, onde e é o elemento neutro do grupo, é denominada componente neutra da graduação.

Proposição 1.2.3. Sendo A uma álgebra G-graduada com unidade 1, temos que $1 \in A_e$.

Demonstração: De fato, existem $g_1, \ldots, g_n \in G - \{e\}$, tais que

$$1 = a_e + a_{g_1} + \cdots + a_{g_n}$$

com $a_e \in A_e, a_{g_j} \in A_{g_j}$. Tomando $h \in G$ e $a_h \in A_h$ arbitrários, temos

$$a_h = a_h a_e + a_h a_{g_1} + \cdots + a_h a_{g_n}.$$

Deste modo, segue que $a_h a_{g_j} = 0$ e $a_h a_e = a_h$. Como h e a_h foram tomados arbitrariamente e qualquer elemento de A é escrito como soma de elementos homogêneos, concluímos que $aa_e = a$, para qualquer $a \in A$. De modo análogo, temos $a_e a = a$, para qualquer $a \in A$. Assim, $1 = a_e \in A_e$. ■

Definição 1.2.4. Seja $A = \oplus_{g \in G} A_g$ uma álgebra graduada. Dizemos que um subespaço B de A é homogêneo (ou graduado) quando $B = \oplus_{g \in G} B \cap A_g$. Uma subálgebra ou um ideal de A é dito homogêneo (ou graduado), se ele for homogêneo como subespaço.

De maneira inteiramente análoga, podemos definir ideal graduado à esquerda e à direita.

Proposição 1.2.5. Sejam $A = \oplus_{g \in G} A_g$ uma álgebra graduada e B um subespaço de A. Então, B é homogêneo se, e somente se, $b = (\sum b_g) \in B$, com $b_g \in A_g$, implicar que $b_g \in B$, para todo $g \in G$.

Demonstração: Suponha que B seja homogênea, então $B = \oplus_{g\in G}(B \cap A_g)$. Logo, para qualquer $b \in B$, podemos escrever $b = \oplus_{g\in G} b'_g$, onde cada $b'_g \in B \cap A_g$. Pela unicidade da expressão de b como soma de elementos homogêneos, devemos ter $b'_g = b_g$ e, assim, $b_g \in B$, para todo $g \in G$. Por outro lado, se para $b \in B$ tivermos que $b_g \in B$ para todo $g \in G$, então $b_g \in B \cap A_g$, então temos que $B \subseteq \oplus_{g\in G}(B \cap A_g)$. Logo, B é homogêneo. ■

Exemplo 1.2.6. Toda álgebra A admite uma graduação, a qual é chamada de graduação trivial. Para isso, basta considerar $A_e = A$ e $A_g = \{0\}$, para qualquer $g \neq e$.

Exemplo 1.2.7. Se $A = \oplus_{g\in G} A_g$ é uma álgebra graduada, então é fácil observar que a componente homogênea de grau neutro é uma subálgebra graduada de A. De fato, observe que pela definição de graduação, A_e é um subespaço de A e $A_e A_e \subseteq A_e$, e claramente vemos que é graduada.

Exemplo 1.2.8. Sejam $A = \oplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra graduada e I um ideal de A. Iremos considerar uma graduação em A/I e para isso se faz necessário que I seja homogêneo. Para tanto, consideramos $\{\bar{A}_g \mid g \in G\}$ de subespaços de A/I, onde $\bar{A}_g = (A_g + I)/I$. Claramente, temos $A/I = \sum_{g\in G} \bar{A}_g$. Observe que cada elemento de $\bar{A}_g$ tem a forma $\bar{a}$, onde $a \in A_g$, logo, dados $a \in A_g$ e $b \in A_h$, com $g, h \in G$, temos que $\bar{a}\bar{b} = \overline{ab} \subseteq \bar{A}_{gh}$ e assim $\bar{A}_g \bar{A}_h \subseteq \bar{A}_{gh}$. Supondo agora que I é homogêneo, tomemos $a_g \in A_g$, para todo $g \in G$, elementos tais que $\sum_{g\in G} \bar{a}_g = 0$. Temos então que $a_g \in I$, para todo $g \in G$, pela homogeneidade de I. Logo, $\bar{a}_g = 0$, para todo $g \in G$ e, assim, temos $A/I = \oplus_{g\in G} \bar{A}_g$. Como já mostramos que $\bar{A}_g \bar{A}_h \subseteq \bar{A}_{gh}$, para quaisquer $g, h \in G$, segue que esta decomposição é uma G-graduação em A/I.

Exemplo 1.2.9. Considere a F-álgebra $M_2(F)$ e os subespaços

$$M_2(F)_{\bar{0}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in F \right\} \text{ e } M_2(F)_{\bar{1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in F \right\}.$$

É fácil ver que $M_2(F) = M_2(F)_{\bar{0}} \oplus M_2(F)_{\bar{1}}$ define uma $\mathbb{Z}_2$-graduação em $M_2(F)$. Mais geralmente, sendo $m \in \mathbb{N}, m > 1$, considere a álgebra $M_m(F)$. Para cada $\gamma \in \mathbb{Z}_n$, tomemos $M_\gamma = \langle E_{ij} \mid \overline{i-j} = \gamma \rangle$. É possível mostrar que $\bigoplus (M_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{Z}}$ é uma $\mathbb{Z}_n$-graduação em $M_m(F)$.

Como vemos na definição a seguir, a graduação do exemplo acima é um tipo de graduação específica.

Definição 1.2.10. Dado G um grupo e $M_m(F) = \oplus_{g\in G} R_g$ uma G-graduação na álgebra das matrizes sobre F. Dizemos que essa G-graduação é elementar se existe uma n-upla $g = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ tal que cada matriz elementar $E_{ij}, 1 \leq i, j \leq m$ é homogênea e $\deg(E_{ij}) = g_i g_j^{-1}$

Analogamente, podemos definir a graduação elementar em $UT(d_1, \ldots, d_m)$. Sendo $A = UT(d_1, \ldots, d_m)$ e $g = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, onde $n = d_1 + \cdots + d_m$. Então, A é uma subálgebra graduada da álgebra $M = M_m(F)$, com a graduação elementar determinada por g. Assim, $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$, com $A_g = A \cap M_g$, é uma G-graduação em A.

Observe que uma n-upla $(g_1, \ldots, g_n)$ que determina uma graduação elementar não é definida de maneira única, por exemplo, $(g_1 g, \ldots, g_n g)$ define a mesma graduação elementar, para qualquer $g \in G$. Em particular, podemos sempre assumir que $g_1 = e$.

Definição 1.2.11. Uma álgebra graduada é dita álgebra graduada com divisão, se qualquer elemento homogêneo não nulo é invertível. Além disso, uma álgebra é graduada simples quando os seus únicos ideais graduados são os triviais.

Seja A uma álgebra graduada com divisão, note que $Supp\, A$ é um subgrupo de G: Basta observar que se $g, h \in Supp A$, então $gh \in Supp A$, uma vez que $0 \neq A_g A_h \subseteq A_{gh}$. Além disso, se $g \in Supp\, A$, então existe um elemento homogêneo não nulo, digamos r, em A_g e consequentemente, $r^{-1} \in A_{g^{-1}}$, logo $A_{g^{-1}}$ é não nulo e portanto $g^{-1} \in Supp\, A$.

Exemplo 1.2.12. Qualquer álgebra com divisão com qualquer graduação é uma álgebra graduada com divisão, sobre $\mathbb{R}$. Um exemplo disso é considerarmos a álgebra dos quatérnios $\mathbb{H}$, a qual tem base canônica $\{1, i, j, k\}$, com multiplicação determinada pelas relações $i^2 = j^2 = -1, ij = -ji = k$. Em $\mathbb{H}$, temos a graduação pelo grupo $\mathbb{Z}_2$, onde

$$\mathbb{H} = \langle 1, i \rangle_{\bar{0}} \oplus \langle j, k \rangle_{\bar{1}}.$$

Definição 1.2.13. Sejam $A = \oplus_{g \in G} A_g$ e $B = \oplus_{g \in G} B_g$ álgebras graduadas. Dizemos que um homomorfismo de álgebras $\phi : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras graduadas quanto $\phi(A_g) \subseteq B_g$, para todo $g \in G$.

Exemplo 1.2.14. A aplicação identidade é um exemplo de endomorfismo de álgebras graduadas.

As graduações por grupos em $UT_m(F)$ foram classificadas por A. Valenti e M. Zaicev, como enunciado no resultado seguinte.

Teorema 1.2.15. [46, Teorema 7] Seja G um grupo arbitrário e F um corpo. Suponha que a álgebra $UT_m(F) = A = \oplus_{g \in G} A_g$ das matrizes triangulares superiores $m \times m$ sobre o corpo F é G-graduada. Então, A, como uma álgebra G-graduada, é isomorfa a $UT_m(F)$ com uma G-graduação elementar.

Definição 1.2.16. Uma H-graduação $A' = \oplus_{h\in H} A'_h$ na álgebra A é um "coarsening" da G-graduação

$$A = \oplus_{g\in G} A_g \tag{1.1}$$

se para todo $g \in G$, existe $h \in H$ tal que $A_g \subseteq A'_h$.

Seja $A = \oplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada. Podemos construir uma graduação por um grupo H a partir de um homomorfismo $\varphi : G \to H$, onde

$$A_h = \oplus_{g\in\varphi^{-1}(h)} A_g,$$

onde $\varphi^{-1}(h)$ é o conjunto $g \in G|\varphi(g) = h$, quando h está na imagem de φ e, $A_h = 0$, caso contrário. Nós nos referimos a essa H-graduação como o "coarsening" da G-graduação (1.1) induzida por α.

1.2.2 Módulos Graduados

Definição 1.2.17. Seja A uma álgebra. Definimos um A-módulo (ou módulo sobre A) à esquerda como sendo um espaço vetorial V, munido de uma aplicação $A \times V \to V$, que a cada par $(a, v) \in A \times V$ associa $av \in V$ e satisfaz:

(i) $(a_1 + a_2)v = a_1v + a_2v$;

(ii) $a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2$;

(iii) $a_1(a_2v) = (a_1a_2)v$;

(iv) $1_a v = v$;

(v) $(\lambda a)v = a(\lambda v) = \lambda(av)$,

para quaisquer $a, a_1, a_2 \in A, v, v_1, v_2 \in V$ e $\lambda \in F$.

Veja que os dois primeiros itens e o último da definição acima, dizem que o produto $(a, v) \mapsto av$ é uma aplicação bilinear. Ademais, de modo análogo podemos definir um A-módulo à direita.

Definição 1.2.18. Sejam A uma álgebra e V_1 e V_2 A-módulos. Dizemos que uma transformação linear $\phi : V_1 \to V_2$ é um homomorfismo de A-módulos se $\phi(av) = a\phi(v)$ para quaisquer $a \in A$ e $v \in V$.

Definição 1.2.19. Sejam A uma álgebra e V um A-módulo. Dizemos que:

(i) Um subespaço vetorial V_1 de V é um submódulo (ou A-submódulo) de V se $av \in V_1$ para quaisquer $a \in A$ e $v \in V_1$.

(ii) V é um A-módulo irredutível (ou simples) se $AV \neq 0$ e os seus únicos submódulos são $\{0\}$ e V.

(iii) V é fiel quando o conjunto $Ann(V) = \{a \in A \mid a(V) = 0\}$, chamado de anulador de V, é trivial.

Definição 1.2.20. Uma G-graduação no A-módulo V é uma decomposição $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$, onde $A_g V_h \subseteq V_{gh}$, para quaisquer $g, h \in G$. Quando um A-módulo V está munido de uma G-graduação, diremos que V é um módulo graduado.

Elementos homogêneos e os graus de tais elementos, são definidos de modo análogo que o caso de álgebras graduadas. O mesmo ocorre para a definição de submódulos graduados. A menos que se diga o contrário, módulo graduado significará módulo a esquerda graduado.

Definição 1.2.21. O Radical de Jacobson graduado $J^{gr}(A)$ de uma álgebra graduada A é a intersecção dos anuladores dos A-módulos graduados irredutíveis.

Como no caso não-graduado, a definição do Radical de Jacobson graduado é simétrica à direita e à esquerda, isto é, $J^{gr}(A)$ é um ideal graduado de uma álgebra A.

1.3 Álgebras Livres

Definição 1.3.1. Seja $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ um conjunto cujos elementos chamaremos de indeterminadas. A álgebra $F\langle X\rangle$ com base consistindo de todas as palavras (isto é, sequências finitas de indeterminadas de X, onde a unidade é a palavra vazia) sobre X

$$x_{i_1} \cdots x_{i_n}, x_{i_j} \in X, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

e multiplicação definida por

$$(x_{i_1} \cdots x_{i_m})(x_{j_1} \cdots x_{j_n}) = x_{i_1} \cdots x_{i_m} x_{j_1} \cdots x_{j_n}, x_{j_l} \in X,$$

é chamada de álgebra associativa livre unitária, livremente gerada pelo conjunto X. Chamamos os elementos de $F\langle X\rangle$ de polinômios nas variáveis associativas e não-comutativas de X.

Um elemento de $F\langle X\rangle$ (ou seja, um polinômio) tem a forma

$$f = \sum \alpha_m m$$

onde $\alpha_m \in F$, cada m é uma palavra sobre X, o somatório corre sobre as palavras e o conjunto $\{m \mid \alpha_m \neq 0\}$ é finito. Cada termo da forma αm é chamado de monômio.

As álgebras associativas livres possuem a seguinte propriedade universal:

Proposição 1.3.2. Sejam A uma álgebra associativa e unitária e $\varphi_0 : X \to A$ uma aplicação qualquer. Existe um único homomorfismo $\varphi : F\langle X\rangle \to A$ que estende φ_0, isto é, $\varphi\mid_X = \varphi_0$.

Seja A uma álgebra associativa e unitária. Fixados $a_i \in A$, para cada $i \in \mathbb{N}$, sabemos que existe um único homomorfismo $\varphi : F\langle X\rangle \to A$ de álgebras tal que $\varphi(x_i) = a_i$, para $i \in \mathbb{N}$. Sendo $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$, denotamos por $\varphi(f(x_1, \ldots, x_n))$ por $f(a_1, \ldots, a_n)$. Observe que obtemos $f(a_1, \ldots, a_n)$ substituindo em x_i por a_i em f.

Definição 1.3.3. Dados $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ e A uma álgebra. Dizemos que f é uma identidade polinomial para A se

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0,$$

para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$. Se a álgebra A satisfaz uma identidade polinomial não-trivial f (isto é, f é um elemento não nulo de $F\langle X\rangle$), chamamos A de PI-álgebra.

Exemplo 1.3.4. Uma álgebra A é comutativa se, e somente se, satisfaz a identidade polinomial

$$f(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1.$$

Definição 1.3.5. Seja A uma álgebra. Definimos $T(A) = \{f \in F\langle X\rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}$ como sendo o conjunto das identidades polinomiais de A.

Não é difícil ver que o conjunto $T(A)$ de todas as identidades polinomiais da álgebra A é um ideal de $F\langle X\rangle$. Além disso, se $f(x_1, \ldots, x_n)$ é uma identidade polinomial de A, então para quaisquer $w_1, \ldots, w_n \in F\langle X\rangle$, o polinômio $f(w_1, \ldots, w_n)$ é também uma identidade polinomial de A. Como todo endomorfismo de $F\langle X\rangle$ é definido pela sua ação nos elementos de X, segue que $T(A)$ é invariante por todos os endomorfismos de $F\langle X\rangle$.

Definição 1.3.6. Dizemos que um ideal J da álgebra $F\langle X\rangle$ é um T-ideal se $\varphi(J) \subseteq J$, para todo endomorfismo φ de $F\langle X\rangle$.

Assim, dizer que um ideal J de $F\langle X\rangle$ é um T-ideal significa dizer que

$$f(w_1, \ldots, w_n) \in J,$$

para quaisquer $f(x_1, \ldots, x_n) \in J$ e $w_1, \ldots, w_n \in F\langle X\rangle$. Temos então que o conjunto $T(A)$ de todas as identidades polinomiais da álgebra A é um T-ideal de $F\langle X\rangle$, chamado de T-ideal das identidades de A.

Definição 1.3.7. Dado um conjunto $S \subseteq F\langle X\rangle$, o T-ideal gerado por S é a interseção de todos os T-ideais de $F\langle X\rangle$ que contém S e será denotado por $\langle S\rangle$. Seja A uma álgebra, se $S \subset T(A)$ é tal que $T(A) = \langle S\rangle$, dizemos que S é uma base das identidades polinomiais da álgebra A.

Definição 1.3.8. Dados $m \in F\langle X\rangle$ um monômio não-nulo, $f \in F\langle X\rangle$ um polinômio não-nulo e $x_i \in X$. Definimos o **grau de** m **em** x_i, denotado por $\deg_{x_i} m$, como sendo o número de vezes em que x_i aparece em m e definimos o **grau de** f **em** x_i, e denotamos por $\deg_{x_i} f$, como sendo o maior grau em x_i dos monômios que formam f.

Definição 1.3.9. Um polinômio f é dito multilinear quando for linear em todas as suas indeterminadas, isto é, quando cada indeterminada tiver grau 1 em cada monômio de f.

Denotando por S_n o grupo das permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$, se f é multilinear, então podemos escrevê-lo na forma

$$f = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}, \text{ com } \alpha_\sigma \in F.$$

Exemplo 1.3.10. O polinômio $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$ é multilinear.

Exemplo 1.3.11. O polinômio

$$St_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}$$

onde $(-1)^\sigma$ denota o sinal da permutação $\sigma \in S_n$, é um polinômio multilinear, chamado de **Polinômio Standard de grau** n. Em [28, pág. 18], encontramos a demonstração do Teorema de Amitsur-Levitzki o qual nos garante que para cada $n \in \mathbb{N}$, o polinômio standard St_{2n} é a identidade de menor grau para a álgebra $M_n(F)$.

O próximo resultado nos dará um critério para verificar se um dado polinômio multilinear é identidade ou não para um determinada álgebra.

Proposição 1.3.12. Considere A uma álgebra gerada por β, como espaço vetorial e seja $f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio multilinear. Se $f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$, para quaisquer $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \beta$, então $f \in T(A)$.

Demonstração: Com efeito, dados $a_1, \ldots, a_n \in A$, podemos escrever

$$a_j = \sum \alpha_{ji} u_i, u_i \in \beta \text{ e os } \alpha_{ji} \text{ são escalares.}$$

Assim, como $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é linear em cada variável, segue que

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \sum \alpha_{1i_1} \cdots \alpha_{ni_n} f(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) = 0.$$

■

Concluímos que para verificar que um polinômio multilinear é uma identidade polinomial para uma determinada álgebra, basta que o mesmo se anule para os elementos de um conjunto gerador da mesma, como espaço vetorial. Em particular, podemos considerar uma base.

Teorema 1.3.13. Se $charF = 0$, todo polinômio não nulo $f \in F\langle X \rangle$ é equivalente a um conjunto finito de polinômios multilineares.

Demonstração: Veja [28, pág 7, Teorema 1.3.8]. ■

1.3.1 Identidades Polinomiais Graduadas

Antes de definir o conceito de identidades polinomiais G-graduadas, faremos a construção da álgebra livre $F\langle X \rangle$ G-graduada.

Definição 1.3.14. Seja $\{X_g \mid g \in G\}$ uma família de conjuntos enumeráveis e dois a dois disjuntos e seja a álgebra livre $F\langle X \rangle$, onde $X = \bigcup_{g \in G} X_g$, na qual, $\deg_G(1) = e$ e $\deg_G(x_1 x_2 \ldots x_n) = \deg_G(x_1) \deg_G(x_2) \cdots \deg_G(x_n)$ sendo $\deg_G(x_i) = g$ se $x_i \in X_g$. Agora, dado $g \in G$, se considerarmos

$$F\langle X \rangle_g = \langle m \mid m \text{ é o monômio de } F\langle X \rangle, \deg_G(m) = g \rangle$$

obtemos que

$$F\langle X \rangle = \oplus_{g \in G} F\langle X \rangle_g \text{ e } F\langle X \rangle_g F\langle X \rangle_h \subseteq F\langle X \rangle_{gh}, \forall g, h \in G.$$

Assim, $F\langle X \rangle$ é uma álgebra G-graduada, chamada de álgebra livre G-graduada.

De modo similar ao caso não-graduado, para toda álgebra G-graduada A, toda função $\alpha : \bigcup_{g \in G} X_g \to A$ tal que $\alpha(X_g) \subseteq A_g$, para todo $g \in G$, pode ser estendida a um único homomorfismo de álgebras graduadas.

Definição 1.3.15. Seja A uma álgebra G-graduada, dizemos que um polinômio

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F\langle X\rangle$$

é uma identidade polinomial G-graduada para A, se $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$, para quaisquer $a_i \in A_{\deg_G(x_i)}$, com $i = 1, \dots, n$.

Exemplo 1.3.16. Seja A uma álgebra com a graduação trivial. Se $\deg_G(x_1) \in G-\{e\}$, então x_1 é identidade G-graduada para A.

Como no caso não-graduado, também temos o conjunto das identidades polinomiais G-graduadas, o qual será denotado por $Id^{gr}(A)$. Tal conjunto é um ideal G-graduado. Além disso, obtemos uma definição análoga de T_G-ideal, onde aqui exigimos ser invariante para endomorfismos G-graduados. E também obtemos uma noção de base para identidades polinomiais graduadas.

Definição 1.3.17. Um polinômio G-graduado $f \in F\langle X\rangle$ é linear na variável $x_i \in X$, se x_i aparece uma vez em cada monômio de f. Se f é linear em todas as suas variáveis, diremos que f é multilinear G-graduado.

Como no caso ordinário, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.3.18. Seja A uma álgebra G-graduada sobre um corpo F. Então, se o corpo F tem característica zero, então todas as identidades polinomiais graduadas de A seguem de suas identidades multilineares graduadas.

1.4 Álgebras Graduadas Simples e a Álgebra de Grupo Torcida

A seguir, apresentamos a descrição das álgebras graduadas simples, por meio da versão graduada do Teorema de Wedderburn-Artin, dada em [25, Teorema 2.6].

Seja D uma álgebra graduada com divisão em G, um módulo à direita sobre D é livre. Como vemos em [43, Proposição 2.5], os resultados padrões para espaços vetoriais sobre álgebras de divisão valem. Seja V um D-módulo graduado à direita de dimensão finita sobre D. O anel End_DV de endomorfismos do D-módulo V é graduado da seguinte maneira: para cada $g \in G$, o conjunto

$$(End_DV)_g := \{f \in End_DV \mid f(V_h) \subseteq V_{gh}, \forall h \in G\}$$

é um subespaço de $End_D V$ e a igualdade

$$End_D V = \bigoplus_{g\in G} (End_D V)_g$$

é uma graduação pelo grupo G em $End_D V$, ver [41, Corolário I.2.11, página 10].

Seja $\{v_1, \ldots, v_m\}$ uma base (sobre D) de elementos homogêneos de V. Obtemos um isomorfismo de $End_D(V)$ para $M_m(D) \simeq M_m(F) \otimes D$. Esse isomorfismo e a G-graduação em $End_D(V)$ induz uma G-graduação em $M_m(F) \otimes D$, tal que

$$\deg_G(E_{ij} \otimes d) = g_i(\deg_G d)g_j^{-1},$$

onde g_i é o grau de v_i, $i = 1, \ldots, m$.

O próximo resultado é a versão graduada do Teorema de Wedderburn-Artin e sua demonstração pode ser encontrada em [25] (Teorema 2.6).

Teorema 1.4.1. Seja G um grupo e seja A uma álgebra G-graduada. Se A é graduada simples e satisfaz a condição de cadeia descendente nos ideais a esquerda graduados, então existe uma álgebra G-graduada D, um inteiro positivo m e uma m-upla $(g_1, \ldots, g_m) \in G^m$ tais que D é uma álgebra graduada com divisão e A é isomorfa a $M_m(F) \otimes D$ com a graduação induzida por $(g_1, \ldots, g_m)$.

Definição 1.4.2. Seja T um grupo finito. Uma aplicação $\sigma : T \times T \to F^\times$ é chamada de 2-cociclo se

$$\sigma(u, v)\sigma(uv, w) = \sigma(u, vw)\sigma(v, w) \text{ para todos } u, v, w \in T.$$

Denotemos por $Z^2(T, F^\times)$ o conjunto de todos os 2-cociclos. Observe que $Z^2(T, F^\times)$ possui uma estrutura natural de grupo abeliano através da operação definida por $(\sigma\tau)(u, v) = \sigma(u, v)\tau(u, v)$, para quaisquer aplicações $\sigma, \tau \in Z^2(T, F^\times)$ e todos $u, v \in T$.

O próximo resultado segue do Teorema de Maschke para o Produto Cruzado e sua demonstração pode ser encontrada em [35] (Corolário 2.3.5).

Teorema 1.4.3. Dado um grupo T finito e $charF = 0$ ou $charF = p > 0$ e G não tem elementos de ordem p, então o radical de Jacobson da álgebra de grupo torcida $F^\sigma G$ é um ideal nulo.

Observação 1.4.4. Seja G um grupo. Uma álgebra de dimensão finita G-graduada com divisão sobre um corpo algebricamente fechado é isomorfa a uma álgebra de grupo torcida $F^\sigma T$ com sua G graduação natural, onde T é um subgrupo finito de G e $\sigma \in Z^2(T, F^\times)$, ver [25, Teorema 2.13].

Proposição 1.4.5. Seja T um grupo finito e $\sigma \in Z^2(T, F^\times)$. Se a álgebra de grupo torcida $F^\sigma T$ é central, então $J(F^\sigma T) = 0$.

Demonstração: Para provar este lema, utilizaremos a contrapositiva, isto é, provaremos que se $J(F^\sigma T) \neq 0$, então $F^\sigma T$ não é uma álgebra central. Pelo Teorema de Maschke (1.4.3) obtemos que a característica de F é $p > 0$ e que p divide a ordem de T. Seja $u \in T$ um elemento de ordem p.

Afirmação 1: $(X_v)^{-1} X_u X_v = X_u$, para todo $v \in C_G(u)$.

Com efeito, dado $v \in C_G(u)$, então $uv = vu$. Portanto,

$$X_u X_v = \sigma(u, v) X_{uv} = \sigma(u, v)[\sigma(v, u)]^{-1} X_v X_u.$$

Assim, existe $l := \sigma(u, v)[\sigma(v, u)]^{-1} \in F^\times$, tal que

$$X_u X_v = l X_v X_u.$$

Como X_u^p é um múltiplo escalar de X_{u^p}, como $o(u) = p$, temos que X_u^p é múltiplo escalar da identidade. Assim, X_u^p comuta com X_v, donde

$$X_u^p X_v = X_v X_u^p.$$

Deste modo, obtemos:

$$X_v X_u^p = X_u^p X_v = l^p X_v X_u^p.$$

Como consequência da igualdade acima, $l^p = 1$, donde

$$0 = l^p - 1 = (l - 1)^p \Rightarrow l = 1.$$

Assim, a afirmação está provada.

Seja $Cl(u) = \{u_1, \ldots, u_r\}$ a classe de conjugação de u em T, e $w_1, \ldots, w_r$ elementos de T tais que

$$u_i = w_i^{-1} u w_i, i = 1, \ldots, r.$$

Então,

$$(X_{w_i})^{-1}X_uX_{w_i} = s_iX_{u_i},$$

para algum $s_i \in F^{\times}$. Podemos mudar a base $\{X_u \mid u \in T\}$ de $F^{\sigma}T$ multiplicando seus elementos por um escalar não-nulo se necessário, e assumir que $s_i = 1$ para $i = 1, \ldots, r$.

Afirmação 2: $c = \sum_{i=1}^{r} X_{u_i}$ é um elemento central de $F^{\sigma}T$.

Fixado $v \in T$, note que dado $u_i \in Cl(u)$, então

$$v^{-1}u_iv = v^{-1}(w_i^{-1}ux_i)v = (w_iv)^{-1}u(w_iv) \in Cl(u).$$

Assim, a aplicação

$$u_i \mapsto v^{-1}u_iv$$

é uma permutação em $Cl(u)$. Denotemos por τ a permutação de $\{1, \ldots, r\}$, tal que $v^{-1}u_iv = u_{\tau(i)}$.

Primeiro provemos que

$$(X_v)^{-1}X_{u_i}X_v = X_{u_{\tau(i)}}.$$

Note que $v^{-1}u_iv = u_{\tau(i)}$, então $w_ivw_{\tau(i)}^{-1} \in C_G(u)$, já que

$$\begin{aligned}
v^{-1}u_iv &= u_{\tau(i)} = w_{\tau(i)}^{-1}uw_{\tau(i)} \\
\Rightarrow u_ivw_{\tau(i)}^{-1} &= vw_{\tau(i)}^{-1}u \\
\Rightarrow (w_i^{-1}uw_i)vw_{\tau(i)}^{-1} &= vw_{\tau(i)}^{-1}u \\
\Rightarrow u(w_ivw_{\tau(i)}^{-1}) &= (w_ivw_{\tau(i)}^{-1})u.
\end{aligned}$$

Ademais, como o grau de $(X_{w_{\tau(i)}})^{-1}$ é $w_{\tau(i)}^{-1}$, segue que $X_{w_i}X_v(X_{w_{\tau(i)}})^{-1}$ é um múltiplo escalar de $X_{w_ivw_{\tau(i)}^{-1}}$, portanto a conjugação por qualquer um desses dois elementos produz o mesmo resultado, então da Afirmação 1 e usando que $w_ivw_{\tau(i)}^{-1} \in C_G(u)$, obtemos:

$$X_{w_{\tau(i)}}(X_v)^{-1}(X_{w_i})^{-1}X_uX_{w_i}X_v(X_{w_{\tau(i)}})^{-1} = X_u.$$

Lembrando que $(X_{w_k})^{-1}X_uX_{w_k} = X_{u_k}$, para $k = 1, \ldots, r$, logo, a igualdade acima nos dá:

$$
\begin{aligned}
&X_{w_{\tau(i)}}(X_v)^{-1}(X_{w_i})^{-1}X_uX_{w_i}X_v(X_{w_{\tau(i)}})^{-1} = X_u \\
\Rightarrow &X_{w_{\tau(i)}}(X_v)^{-1}X_{u_i}X_v(X_{w_{\tau(i)}})^{-1} = X_u \\
\Rightarrow &(X_v)^{-1}X_{u_i}X_v = (X_{w_{\tau(i)}})^{-1}X_uX_{w_{\tau(i)}} \\
\therefore &(X_v)^{-1}X_{u_i}X_v = X_{u_{\tau(i)}}
\end{aligned}
$$

Ou seja, nossa segunda afirmação está provada.

Então,

$$(X_v)^{-1}cX_v = \sum_{i=1}^{r}(X_v)^{-1}X_{u_i}X_v = \sum_{i=1}^{r}X_{u_{\tau(i)}} = c,$$

portanto X_v comuta com c, como v é um elemento arbitrário de T, isso implica que c está no centro de $F^\sigma T$. É claro que c não é um múltiplo escalar da identidade, portanto $F^\sigma T$ não é uma álgebra central. ■

Capítulo 2

Graduações em Álgebras de Matrizes Triangulares em Blocos

Neste capítulo, provaremos que dado F um corpo qualquer e G um grupo arbitrário, em toda G-graduação na álgebra das matrizes triangulares em blocos o Radical de Jacobson é um ideal graduado. Para isso, este capítulo está organizado em duas seções: a primeira contendo resultados preliminares que serão usados no decorrer do capítulo e a segunda contendo a demonstração de que o Radical de Jacobson é um ideal graduado.

Durante todo este capítulo, denotaremos por R uma álgebra graduada e F será um corpo qualquer.

Os resultados presentes neste capítulo foram publicados em forma de artigo com o título *Gradings on block-triangular matrix algebras* ([21]) na revista *Proceedings of the American Mathematical Society* em colaboração com os professores Diogo Diniz e Plamen Koshlukov.

2.1 Resultados Preliminares

Em [11], S. Montgomery e M. Cohen provaram que para graduações por grupos finitos o Radical de Jacobson graduado está contido no Radical de Jacobson ordinário, isso responde uma questão proposta por G. Bergman. Além disso, se o suporte da graduação é finito, então também temos a inclusão, ver [41], Corolário 2.9.4.

Observação 2.1.1. Seja R uma álgebra graduada, se a graduação tem suporte finito, então $J^{gr}(R) \subseteq J(R)$.

Lema 2.1.2. Seja R uma álgebra graduada de dimensão finita, com $J^{gr}(R) = 0$. Valem:

(i) Se I é um ideal a esquerda homogêneo de R, então existe um idempotente homogêneo e, tal que $I = Re$;

(ii) Se J é um ideal homogêneo de R, então existe um idempotente central homogêneo e', tal que $J = Re'$.

Demonstração:

Prova de (i)**:**

Como R tem dimensão finita e seus ideais são subespaços, toda cadeia decrescente de ideais é estacionária. Deste modo, podemos tomar I um ideal à esquerda minimal homogêneo. Provemos que o resultado vale neste caso, depois estenderemos para o caso mais geral, por indução.

Afirmação: $I^2 \neq 0$

De fato, caso $I^2 = 0$, então IR seria um ideal homogêneo não-nulo de R tal que

$$(IR)^2 = 0,$$

o que é uma contradição, já que $J^{gr}(R)$ contém todos os ideais nilpotentes de R que são homogêneos na graduação e $J^{gr}(R) = 0$.

Assim, provada a afirmação acima, podemos tomar $x \in I$ homogêneo, tal que $Ix \neq 0$. Como Ix é um ideal à esquerda não-nulo contido em I, segue da minimalidade de I que $Ix = I$. Além disso, como

$$Ann_I(x) := \{a \in I \mid ax = 0\}$$

é um ideal a esquerda contido em I, segue da minimalidade de I que $Ann_I(x) = 0$.

Como $Ix = I$, então existe $e \in I$, tal que $ex = x$. Como x é homogêneo, podemos substituir e por sua componente homogênea de grau neutro e assumimos que e é um elemento homogêneo. Então

$$e^2x = ex,$$

o que implica que

$$(e^2 - e)x = 0.$$

Portanto,

$$(e^2 - e) \in Ann_I(x) = 0,$$

assim e é um idempotente homogêneo. Ademais, $0 \neq Re \subseteq I$, e, da minimalidade de I, segue que $I = Re$.

Agora, provaremos (i) por indução na dimensão de I. Como o resultado é claro para $I = 0$, assumiremos que $I \neq 0$.

Se I é um ideal minimal homogêneo a esquerda, a afirmação já foi provada, caso contrário existe um ideal minimal homogêneo a esquerda $\tilde{I}$ tal que $\tilde{I} \subsetneq I$.

Seja $\tilde{e} \in \tilde{I}$ um idempotente homogêneo tal que $\tilde{I} = R\tilde{e}$. Note que

$$0 \neq \tilde{e} = (\tilde{e})^2 \in I\tilde{e} \subseteq \tilde{I},$$

e, por outro lado, dado $y \in \tilde{I}$, temos $y = x\tilde{e}$, para algum $x \in R$. Desse modo,

$$y\tilde{e} = x\tilde{e}\tilde{e} = x\tilde{e} = y.$$

Ou seja,

$$\tilde{I} = \tilde{I}\tilde{e} \subseteq I\tilde{e}.$$

Portanto $I\tilde{e} = \tilde{I} = R\tilde{e}$.

Logo, pela decomposição de Peirce,

$$I = I\tilde{e} \oplus I(1 - \tilde{e}) = R\tilde{e} \oplus I(1 - \tilde{e}).$$

Como 1 tem grau neutro e $\tilde{e}$ é idempotente homogêneo (tendo também grau neutro), a sua diferença é homogênea. Então, $I(1 - \tilde{e})$ é um ideal homogêneo a esquerda, de dimensão menor que a de I. Assim, por hipótese de indução, existe um idempotente homogêneo $e_1 \in I(1 - \tilde{e})$, tal que $I(1 - \tilde{e}) = Re_1$. Portanto,

$$I = R\tilde{e} \oplus Re_1. \tag{2.1}$$

Como $e_1 \in I(1-\tilde{e})$ e

$$(1-\tilde{e})\tilde{e} = \tilde{e} - \tilde{e}^2 = \tilde{e} - \tilde{e} = 0,$$

segue que

$$e_1\tilde{e} = 0. \tag{2.2}$$

Seja $\overline{e} = (1-\tilde{e})e_1 \in I$, então $R\overline{e} \subseteq Re_1$ e como 2.2 implica que $e_1 = e_1\overline{e}$ está em $R\overline{e}$, concluímos que $Re_1 \subseteq R\overline{e}$, deste modo $R\overline{e} = Re_1$. Além disso, 2.2 implica que

$$\overline{e}^2 = (1-\tilde{e})e_1(1-\tilde{e})e_1 = (1-\tilde{e})e_1^2 = (1-\tilde{e})e_1 = \overline{e}$$

e $\overline{e}\tilde{e} = 0 = \tilde{e}\overline{e}$.

Portanto $e := \tilde{e} + \overline{e}$ é um idempotente homogêneo em I e

$$I = R\tilde{e} \oplus R\overline{e}.$$

Além disso $\tilde{e}e = \tilde{e}$ e $\overline{e}e = \overline{e}$. Junto com a decomposição acima isso implica que $xe = x$ para todo $x \in I$. Logo, $I \subseteq Re$; a inclusão inversa vale pois $e \in I$, portanto $I = Re$.

Prova de (ii):

Seja agora J um ideal homogêneo de R, segue de (i) que existe um idempotente homogêneo e tal que $J = Re$. Seja $x \in R$, como $ex \in J$, concluímos que

$$ex = exe, \tag{2.3}$$

portanto $(1-e)Re = (1-e)J$ é um ideal homogêneo a direita de R. Note que $((1-e)Re)^2 = 0$, porque e é um idempotente. Como $J^{gr}(R) = 0$, isso implica que $(1-e)Re = 0$. Dado $x \in R$, temos $(1-e)xe = 0$, portanto $xe = exe$. Além disso, $e \in J$, portanto $ex \in J$. Como uma consequência, temos

$$ex = exe = xe$$

para todo $x \in R$ e e é um idempotente central. ∎

Teorema 2.1.3. Seja R uma álgebra graduada por um grupo a qual tem dimensão finita. Se $J^{gr}(R) = 0$, então R é uma soma direta de uma quantidade finita de álgebras graduadas simples.

Demonstração: Se R é graduada simples, não temos nada para provar, assim assumiremos que R não é graduada simples. Seja I um ideal homogêneo não-nulo de R, diferente de R. O Lema 2.1.2 implica que existe um idempotente central homogêneo e tal que $I = Re$, portanto $e \notin \{0, 1\}$. Como consequência de e ser idempotente e pela decomposição de Peirce, temos

$$R = Re \oplus R(1 - e).$$

Afirmamos que $Re, R(1 - e)$ são álgebras graduadas semissimples.

De fato, suponha que Re não seja semissimples, então existe um ideal nilpotente homogêneo não-nulo de Re, mas, em particular, tal ideal também seria ideal de R, mas $J^{gr}(R) = 0$ o que nos dá uma contradição. A dimensão destas álgebras é estritamente menor que a dimensão de R, logo podemos argumentar por indução na dimensão de R e assumir que estas álgebras, e portanto R, é soma direta de uma quantidade finita de álgebras graduadas simples.

■

2.2 Resultado Principal

Nesta seção, provaremos nosso principal resultado, o qual diz que em toda graduação por um grupo em $UT(d_1, \ldots, d_m)$, o seu Radical de Jacobson é um ideal homogêneo. Primeiramente, apresentamos alguns lemas.

Lema 2.2.1. Sejam $R = UT(d_1, \ldots, d_m)$, com $m > 1$, e $R_{u,v}$ o subespaço de R formado pelas matrizes com zero nas entradas fora de (u, v)-ésimo bloco, e e_i a identidade de $R_{i,i}, i \leq i \leq m$. Se I é um ideal nilpotente não-nulo de R, então existe $t < m$ tal que $Ann_R(I) := \{x \in R \mid Ix = 0\} = eR$, onde $e = e_1 + \cdots + e_t$, e

$$I \subseteq \oplus_{v \geq t+1, 1 \leq u \leq v} R_{u,v}.$$

Demonstração: Seja I um ideal nilpotente não-nulo de R, então I é gerado como um espaço vetorial pelas matrizes elementares E_{ij} que estão em I. Além disso, se uma matriz em I tem uma entrada não-nula no (u, v)-ésimo bloco, então $R_{u',v'} \subseteq I$, sempre que $u' \leq u$ e $v' \geq v$. Em particular,

$$R_v := R_{1,v} \oplus R_{1,v+1} \oplus \cdots \oplus R_{1,m} \subseteq I.$$

Note que $v > 1$, pois I é um ideal nilpotente. Seja $t \geq 1$, o menor inteiro tal que $R_{t+1} \subset I$, neste caso $I \subseteq \oplus_{v \geq t+1, 1 \leq u \leq v} R_{u,v}$, pois t é minimal.

Afirmação: Os ideais R_{t+1} e $A = \oplus_{v \geq t+1, 1 \leq u \leq v} R_{u,v}$ tem o mesmo anulador a direita $B =: \oplus_{u \leq t, u \leq v \leq m} R_{u,v}$.

Inicialmente, tomemos

$$P_1 = \{1, \ldots, d_1\}, P_2 = \{d_1+1, \ldots, d_1+d_2\}, \ldots, P_m = \{d_1+\cdots+d_{m-1}+1, \ldots, d_1+\cdots+d_m\}.$$

Observe que $R_{u,v}$ tem como base as matrizes elementares $E_{i,j}$ com $i \in P_u$ e $\in P_v$.

Ademais, note dois fatos:

(i) Dado $x \in R_{v,w} - \{0\}$, segue que

$$R_{u,v} x \neq 0.$$

De fato, se $x = \sum x_{ij} E_{ij}$, como $x \neq 0$, existem índices $i_0 \in P_v$ e $j_0 \in P_w$, tais que $x_{i_0 j_0} \neq 0$. Fixado $i \in P_u$, temos:

$$E_{ii_0} x E_{j_0 j_0} = x_{i_0 j_0} E_{ij_0} \neq 0 \Rightarrow E_{ii_0} x \neq 0.$$

Como $E_{i,i_0} \in R_{u,v}$, segue que $R_{u,v} x \neq 0$.

(ii) $R_{u,v} R_{k,l} = 0$, se $v \neq k$. Tome $E_{ij} \in R_{u,v}$ e $E_{rs} \in R_{kl}$. Assim, $j \in P_v$ e $r \in P_k$. Como $v \neq k$, segue que $j \neq r$ e $E_{ij} E_{rs} = 0$. Da arbitrariedade das matrizes elementares tomadas e do fato delas gerarem $R_{u,v}$ e $R_{k,l}$, respectivamente, temos o desejado.

Iniciemos provando que $Ann_R R_{t+1} = B$.

De ii), temos que $B \subseteq Ann_R R_{t+1}$. Provemos agora a inclusão contrária. Seja $x = \sum x_{u,v} \in Ann_R R_{t+1}$, onde $x_{u,v} \in R_{u,v}$. Temos que $x e_{v_0} \in Ann_R R_{t+1}$, com $v_0 \in \{u, \ldots, m\}$ qualquer. Logo

$$\sum x_{u,v_0} \in Ann_R R_{t+1},$$

temos:

$$R_{t+1}\big(\sum x_{u,v_0}\big) = 0.$$

Logo, para qualquer $l \in \{t+1, \ldots, m\}$, vale a igualdade

$$R_{1,l}(\sum x_{u,v_0}) = 0.$$

Assim, $R_{1,l}x_{l,v_0} = 0$. De $i)$, temos $x_{l,v_0} = 0$ e, portanto, $x_{l,v} = 0$ se $l \geq t+1$. Assim, $x \in B$.

Provemos agora que $Ann_R A = B$

Da segunda observação que fizemos em nossa afirmação, temos que

$$B \subseteq Ann_R A.$$

Como $R_{t+1} \subseteq A$, temos $Ann_R A \subseteq Ann_R R_{t+1} = B$. Assim, temos também o desejado.

Da afirmação acima, segue que $Ann_R I = B$, pois

$$R_{t+1} \subseteq I \subseteq A$$

implica que

$$Ann_R A \subseteq Ann_R I \subseteq Ann_R R_{t+1},$$

donde

$$Ann_R I = B.$$

Portanto, é claro que para $e = e_1 + \cdots + e_t$, temos $Ann_R I = eR$. ∎

A seguinte observação dá uma caracterização do Radical de Jacobson graduado que será usada na prova do próximo lema.

Observação 2.2.2. Se $R = \oplus_{g \in G} R_g$ é uma álgebra G-graduada com suporte finito, então $J^{gr}(R)$ é o maior ideal graduado contido em $J(R)$, ver [41], Corolário 2.9.4. Em particular, se R tem dimensão finita, então $J^{gr}(R)$ é o maior ideal nilpotente graduado de R.

Lema 2.2.3. Seja $R = UT(d_1, \ldots, d_m)$ a álgebra de matrizes triangulares em blocos sobre o corpo F com a G-graduação $R = \oplus_{g \in G} R_g$ e seja $\bar{F}$ uma extensão do corpo F. Se o Radical de Jacobson de $\bar{R} = R \otimes \bar{F}$ com a G-graduação com componentes homogêneas $(\bar{R})_g = R_g \otimes \bar{F}$ é um ideal homogêneo, então o Radical de Jacobson de R é um ideal homogêneo.

Demonstração: Um ideal de R (respectivamente, $\bar{R}$) é gerado como um espaço vetorial pelas matrizes elementares nele contidas, logo os ideais de $\bar{R}$ são da forma $I \otimes \bar{F}$, onde I é um ideal de R e $I = J$ se, e somente se, $I \otimes \bar{F} = J \otimes \bar{F}$. Como $(I \otimes \bar{F}) \cap (R_g \otimes \bar{F}) = (I \cap R_g) \otimes \bar{F}$, concluímos que $I \otimes \bar{F}$ é um ideal homogêneo de $\bar{R}$ se, e somente se, I é um ideal homogêneo de R. Como $I \otimes \bar{F}$ é nilpotente se, e somente se, I é um ideal nilpotente, segue da Observação 2.2.2 (pois R tem dimensão finita) que $J^{gr}(\bar{R}) = J^{gr}(R) \otimes \bar{F}$, e então $J(\bar{R}) = J(R) \otimes \bar{F}$. Se $J(\bar{R})$ é um ideal homogêneo, concluímos que $J(\bar{R}) = J^{gr}(\bar{R})$, portanto $J(R) = J^{gr}(R)$ e $J(R)$ é um ideal homogêneo de R. ■

Agora, provamos o principal resultado deste capítulo, que o Radical de Jacobson da álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos é um ideal homogêneo para qualquer graduação.

Teorema 2.2.4. Seja F um corpo e seja G um grupo. Seja $R = \oplus_{g \in G} R_g$ uma G-graduação na álgebra $UT(d_1, \ldots, d_m)$ das matrizes triangulares em blocos com entradas em F. Então, $J(R) = J^{gr}(R)$. Em particular, o Radical de Jacobson de R é um ideal homogêneo.

Demonstração: O Lema 2.2.3 implica que podemos assumir, sem perda de generalidade, o corpo F algebricamente fechado. Provemos que $J(R) = J^{gr}(R)$ por indução em m. Se $m = 1$ o resultado é claro, pois R é uma álgebra simples e $J(R) = 0 = J^{gr}(R)$. Agora, assumimos $m > 1$ e que o resultado vale para as álgebras triangulares em $k < m$ blocos.

Sejam $R = \oplus_{g \in G} R_g$ uma graduação em R pelo grupo G e $I = J^{gr}(R)$ o Radical de Jacobson graduado desta graduação. Usando a notação do Lema 2.2.1, segue que e_i é a unidade de $R_{i,i}, i = 1, \ldots, m$. Se $I = 0$, então $Ann_R(I) = eR$, para $e = 1 = e_1 + \cdots + e_m$. Por outro lado, se I é diferente de zero, o Lema 2.2.1 implica que $Ann_R(I) = eR$, para $e = e_1 + \cdots + e_t$, onde $t < m$. Como I é um ideal homogêneo, segue que seu anulador à direita $Ann_R(I) = eR$ é também um ideal homogêneo e como e é uma unidade à esquerda para eR, concluímos que e é um idempotente homogêneo, a menos de isomorfismo graduado. Portanto, eRe é uma subálgebra homogênea de R. Agora, provemos que a álgebra eRe não tem ideais nilpotentes homogêneos não-nulos. Seja I' um ideal nilpotente homogêneo de eRe.

Afirmação: $(1-e)Re = 0$.

De fato, note que $e_u R e_v = R_{u,v}$. Como $e = e_1 + \cdots + e_t$ e $(1-e) = e_{t+1} + \cdots + e_m$, concluímos que $(1-e)Re$ é a soma dos subespaços $R_{u,v}$, tais que $u \geq t+1$ e $v \leq t$. Essas desigualdades implicam que $v < u$, logo $R_{u,v} = 0$, e a afirmação está provada.

Da afirmação acima, segue que $re = ere$, para todo $r \in R$.

Afirmação: Afirmamos que $I'R$ é um ideal nilpotente homogêneo não-nulo de R.

É claro que $I'R$ é um ideal a direita homogêneo de R. Agora, note que I' é um ideal à esquerda de R: de fato, se $x \in I'$ e $r \in R$, temos $exe = x$ e $ere \in eRe$. Deste modo,

$$rx = rexe = erexe = erex \in I'.$$

Assim, $RI' \subset I'$, e $I'R$ é um ideal de R. Além disso, se $(I')^s = 0$, então $(I'R)^s = (I')^s R = 0$. Portanto, o Lema 2.2.1 e a Observação 2.2.2 implicam que

$$I' \subseteq I'R \subseteq J^{gr}(R) = I \subseteq \oplus_{v \geq t+1, 1 \leq u \leq v} R_{u,v}.$$

A inclusão $I' \subseteq eRe = \oplus_{1 \leq u \leq v \leq t} R_{uv}$ também vale, logo segue que

$$I' \subseteq (\oplus_{v \geq t+1, 1 \leq u \leq v} R_{u,v}) \cap (\oplus_{1 \leq u \leq v \leq t} R_{u,v}) = 0,$$

assim $I' = 0$.

A álgebra $Re = eRe$ não tem ideais nilpotentes homogêneos não-nulos, deste modo eRe é uma álgebra semissimples de dimensão finita. Portanto, o Teorema 2.1.3 implica que ela é uma soma direta de uma quantidade finita de álgebras graduadas simples. Como temos que $eRe \simeq UT(d_1, \ldots, d_t)$ é uma álgebra central, concluímos que eRe é uma álgebra graduada simples. Assim, o Teorema 1.4.1 e a Observação 1.4.4, implicam que eRe é isomorfa a $M_n(F^\sigma T)$, onde T é um subgrupo finito de G e $\sigma \in Z^2(T, F^\times)$. Logo, $eRe \simeq M_n(F^\sigma T)$, e como a álgebra eRe é central, concluímos que $F^\sigma T$ é uma álgebra central. Segue da Proposição 1.4.5 que $J(F^\sigma T) = 0$. Portanto, o Radical de Jacobson de $UT(d_1, \ldots, d_t) \simeq eRe \simeq M_n(F^\sigma T)$ é também zero, logo $t = 1$. Então, $eR(1-e) = R_{1,2} \oplus \cdots \oplus R_{1,m}$ é um ideal homogêneo e

$(1-e)R(1-e) \simeq UT(d_2, \ldots, d_m)$ é uma subálgebra homogênea. A hipótese de indução implica que

$$J((1-e)R(1-e)) = \oplus_{2\leq u<v\leq m} R_{u,v}$$

é um ideal homogêneo, portanto $J(R) = R_{1,2} \oplus \ldots \oplus R_{1,m} \oplus (\oplus_{2\leq u<v\leq m} R_{u,v})$ é um ideal nilpotente homogêneo. Portanto, $J(R) \subseteq J^{gr}(R)$.

A inclusão inversa vale pela Observação 2.1.1, e concluímos que $J(R) = J^{gr}(R)$.

■

Agora, relembremos o resultado provado em [48] que descreve as graduações de grupo nas álgebras das matrizes triangulares em blocos, desde que o Radical de Jacobson seja um ideal homogêneo.

Lema 2.2.5. [48, Lema 2] Se $R = UT(d_1, \ldots, d_m)$ tem uma G-graduação e o Radical de Jacobson $J(U)$ é um ideal homogêneo, então existe uma álgebra com divisão graduada D na álgebra de matrizes, uma álgebra $U' = UT(t_1, \ldots, t_m)$ e $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, onde $n = t_1 + \cdots + t_m$, tal que U é isomorfa, como uma álgebra G-graduada, a $U' \otimes D$ com a graduação induzida por $(g_1, \ldots, g_n)$.

O Teorema 2.2.4 e o Lema 2.2.5 implicam o corolário seguinte que dá uma classificação das graduações das matrizes triangulares em bloco e confirma a conjectura feita por A.Valenti e M. Zaicev em [46].

Corolário 2.2.6. Sejam F um corpo e G um grupo. Seja $R = \oplus_{g\in G} R_g$ uma G-graduação na álgebra $UT(d_1, \ldots, d_m)$ das matrizes triangulares em blocos com entradas em F. Então, existem inteiros positivos $t, t_1, \ldots, t_m$, tais que $d_i = tt_i$, para $i = 1, \ldots, m$, uma G-graduação com divisão em $M_t(F)$ e $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, onde

$$n = t_1 + \cdots + t_m,$$

tais que R é isomorfo, como uma álgebra graduada, a $UT(t_1, \ldots, t_m) \otimes D$ com a graduação induzida por $(g_1, \ldots, g_n)$.

Capítulo 3

Identidades Graduadas com Involução para a Álgebra de Matrizes Triangulares Superiores

Seja F um corpo de característica zero e $UT_m(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem m. Neste capítulo, provaremos que toda graduação em $UT_m(F)$ que admite uma involução é um coarsening de uma $\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$-graduação específica, tal graduação será chamada de graduação mais fina. Além disso, será exibida uma base para as $(\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, *)$-identidades para essa álgebra e determinaremos o comportamento assintótico da sua sequência de codimensões. Por fim, provaremos que $UT_3(F)$ tem, a menos de equivalência, duas graduações não-triviais, que admitem involução graduada: a mais fina e a elementar induzida pela tripla $(0, 1, 0)$. Para essa última, exibiremos uma base para as $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades, além de calcularmos a sequência de $(\mathbb{Z}_2, *)$-codimensões para a identidades graduadas de $UT_3(F)$.

Os resultados presentes neste capítulo foram publicados em forma de artigo *Graded Identities with involution for the algebra of upper triangular matrices* ([20]) na revista Linear Algebra and Its Applications em colaboração com os professores Diogo Diniz e Alex Borges.

3.1 Involuções

Nesta seção, enunciaremos as definições básicas a respeito de álgebras com involução, além de mostrarmos os principais exemplos que são úteis em nosso estudo.

3.1.1 Álgebras com Involução

Definição 3.1.1. Seja A uma F-álgebra. Dizemos que uma aplicação linear $* : A \to A$, dada por $a \mapsto a^*$ é uma involução em A, se satisfaz:

(i) $a^{**} = a$;

(ii) $(ab)^* = b^*a^*$,

para todo $a, b \in A$.

Estas são chamadas de involuções do primeiro tipo, as que agem como a identidade sobre o corpo. Nesta tese, iremos apenas trabalhar com esse tipo de involução.

Denotaremos uma involução em uma F-álgebra A por $*$ e as álgebras com involução serão chamadas de $*$-álgebras. Uma álgebra A com involução será denotada por $(A, *)$.

Como para álgebras sem involução, obtemos os conceitos de ideal e homomorfismo, mas agora compatíveis com a involução $*$.

Definição 3.1.2. Dizemos que I é um ideal de $(A, *)$ se I é um ideal de A e $I^* \subseteq I$. Isto é equivalente a dizer que I é um $*$-ideal de A.

Definição 3.1.3. Dadas $(A_1, *)$ e (A_2, η) álgebras com involução, um homomorfismo com involução $\psi : (A_1, *) \to (A_2, \eta)$ é um homomorfismo $\psi : A_1 \to A_2$ tal que

$$\psi(a^*) = \psi(a)^\eta,$$

para todo $a \in A_1$. Neste caso, dizemos que ψ é um $*$-homomorfismo. Duas álgebras $(A, *)$ e (B, η) são ditas isomorfas, se houver um $*$-isomorfismo bijetor.

Observe que se I é um $*$-ideal, então $*$ induz uma involução em A/I dada por

$$(a + I)^* = a^* + I.$$

Ademais, a aplicação canônica $A \to A/I$ é um $*$-homomorfismo sobrejetor, cujo núcleo é o $*$-ideal I. Facilmente se vê que o núcleo de todo $*$-homomorfismo é um $*$-ideal.

Exemplo 3.1.4. A aplicação

$$\begin{aligned} t : M_m(F) &\to M_m(F) \\ (a_{ij}) &\mapsto (a_{ji}) \end{aligned}$$

é uma involução, chamada de **involução transposta.**

Exemplo 3.1.5. Em $UT_m(F)$, a aplicação $\circledast$, tal que

$$E_{ij} \mapsto E_{m+1-j,m+1-i}$$

é uma involução em $UT_m(F)$ e é chamada de **involução reflexão**. Esse nome é recebido, pois a imagem da involução é a reflexão da matriz inicial em relação à diagonal secundária.

Exemplo 3.1.6. Para $M_{2r}(F)$, a aplicação $s : M_{2r}(F) \to M_{2r}(F)$ dada por

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} E^t & -B^t \\ C & E \end{pmatrix},$$

onde $A, B, C, E \in M_r(F)$ e t é a aplicação transposta. A aplicação s é uma involução, denominada **involução simplética**, a qual está definida apenas para matrizes de ordem par. Outra forma de definir esta involução é, para $M_{2r}(F)$, considerar

$$D = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix}.$$

A involução s é, então, dada por $A^s = DA^{\circledast}D^{-1}$.

Observação 3.1.7. A menos que seja dito o contrário, no decorrer deste capítulo $\circledast$ e s denotarão as involuções reflexão e simplética, respectivamente, nas álgebras de matrizes triangulares superiores, tendo a simplética ocorrendo apenas para ordem par.

Quando F é algebricamente fechado e de característica diferente de 2, foi provado em [42, Corolário 3.1.58] que, a menos de equivalência, as únicas involuções em $M_m(F)$ são as involuções transposta e a simplética, sendo que a última só ocorre quando m é par.

É natural perguntar, se há uma classificação das involuções para $UT_m(F)$. Em [18, Proposição 2.5], O. M. Di Vincenzo, P. Koshlukov e R. La Scala provaram que, sendo F um corpo de característica diferente de 2, toda involução em $UT_m(F)$ é equivalente a uma involução simplética ou involução reflexão. Para a demonstração deste resultado os autores utilizam um lema, o qual está enunciado abaixo, junto com a proposição aqui referida, aqui chamada de teorema;

Lema 3.1.8. Seja B uma matriz em $UT_n(F)$. Assuma que $n = 2m$ é um inteiro par e que $B = B^{\circledast}$ (respectivamente, $B = B^s$), então B pode ser escrito como $B = CC^{\circledast}$ (respectivamente, $B = CC^s$), para algum $C \in UT_n(F)$. Quando $n = 2m + 1$ é ímpar, se $B = B^{\circledast}$ e $b_{m+1,m+1} = 1$, então $B = CC^{\circledast}$.

Teorema 3.1.9. Dado F um corpo de característica diferente de 2, então toda involução em $UT_m(F)$ é equivalente a $\circledast$ ou a s, onde a s apenas ocorre quando m é par.

Iremos a seguir apresentar a definição de elementos simétricos /e antissimétricos em uma álgebra com involução e iremos mostrar que todo elemento da álgebra se decompõe de maneira única como soma de um elemento simétrico e outro antissimétrico.

Definição 3.1.10. Dizemos que um elemento $a \in (A, *)$ é simétrico se $a^* = a$ e é antissimétrico se $a^* = -a$.

Denotaremos por $A^+ = \{a \in A; a^* = a\}$ e $A^- = \{a \in A; a^* = -a\}$, os subespaços de A dos elementos simétricos e dos elementos antissimétricos, respectivamente, e temos $A^+ \cap A^- = \{0\}$.

Observe que

$$(a + a^*)^* = a + a^*$$

e

$$(a - a^*)^* = -(a - a^*).$$

Logo, $a + a^* \in A^+$ e $a - a^* \in A^-$. Como neste capítulo consideramos a característica de F zero, logo diferente de 2, podemos considerar que

$$a = \frac{(a + a^*)}{2} + \frac{(a - a^*)}{2}.$$

Portanto, $A = A^+ \oplus A^-$.

Definição 3.1.1. Sendo A uma álgebra e $a, b \in A$, definimos o comutador $[a, b]$ e o produto de Jordan $a \circ b$ como sendo $[a, b] = ab - ba$ e $a \circ b = ab + ba$, respectivamente. Definimos indutivamente o comutador de comprimento $n \geq 3$ como sendo

$$[a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, \ldots, a_{n-1}], a_n],$$

para $a_i \in A$.

Proposição 3.1.11. Seja $(A, *)$ uma álgebra com involução, $a \in A^+$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n \in A^-$ quaisquer. Segue que:

(i) $[a, b_1, \ldots, b_n] \in A^+$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $[b_1, b_2] \in A^-$.

Demonstração:

(i) Façamos indução sobre n. Note que

$$\begin{aligned} [a, b_1]^* &= (ab_1 - b_1 a)^* \\ &= b_1^* a^* - a^* b_1^* \\ &= -b_1 a + ab_1 \\ &= [a, b_1]. \end{aligned}$$

Logo, $[a, b_1] \in A^+$.

Supondo agora que $[a, b_1, \ldots, b_n] \in A^+$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $b_{n+1} \in A^-$, segue do caso anterior que

$$[a, b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}]^* = [a, b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}].$$

Portanto, $[a, b_1, \ldots, b_n] \in A^+$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Ora,

$$\begin{aligned} [b_1, b_2]^* &= (b_1 b_2 - b_2 b_1)^* \\ &= b_2^* b_1^* - b_1^* b_2^* \\ &= b_2 b_1 - b_1 b_2 \\ &= -[b_1, b_2]. \end{aligned}$$

Logo, $[b_1, b_2] \in A^-$. ■

3.1.2 Álgebras Graduadas com Involução e suas Identidades

Como já dito através do título deste capítulo, trabalharemos com álgebras que estão munidas de involução e também de uma graduação. Por isso, estudaremos o conceito de involução graduada e de $(G, *)$-álgebras.

Definição 3.1.12. Uma álgebra G-graduada $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ munida com uma involução $*$ é uma $(G, *)$-álgebra se $*$ é uma involução graduada em A, isto é, se $(A_g)^* \subseteq A_g$, para todo $g \in G$.

Vejamos alguns exemplos de $(G, *)$ -álgebras:

Exemplo 3.1.13. Toda álgebra comutativa G-graduada é uma $(G, *)$-álgebra, pois a aplicação identidade é uma involução.

Exemplo 3.1.14. Toda $*$-álgebra munida com G-graduação trivial é uma $(G, *)$-álgebra.

Considerando $M_m(F)$ com uma graduação elementar e involução transposta, se o grau de E_{ij} não tiver ordem no máximo 2, a transposta E_{ji} terá grau diferente. Ou seja, nem toda involução numa álgebra G-graduada é uma involução graduada.

Definição 3.1.15. Se A e B são $(G, *)$-álgebras com involução $*$ e $\diamond$, respectivamente, então um homomorfismo de álgebras $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo de $(G, *)$-álgebras se $\varphi(A_g) \subseteq B_g$, para todo $g \in G$ e $\varphi(a^*) = \varphi(a)^\diamond$, para todo $a \in A$. Se φ é um isomorfismo de álgebras, então dizemos que A e B são isomorfas como $(G, *)$-álgebras e que $*$ e $\diamond$ são equivalentes.

Desenvolveremos agora a teoria das identidades polinomiais na classe das $(G, *)$-álgebras. Assumiremos que G é um grupo abeliano.

Seja $X_g = \{x_{i,g}, x_{i,g}^* \mid i \in \mathbb{N}\}$, $g \in G$, uma família de conjuntos dois a dois disjuntos e enumeráveis. A álgebra livre $F\langle X' \rangle$ livremente gerada por $X' = \bigcup_{x \in G} X_g$, admite uma involução, também denotada por $*$, tal que

$$(x_{i,g})^* = x_{i,g}^* \text{ e } (x_{i,g}^*)^* = x_{i,g}.$$

A álgebra $F\langle X' \rangle$ também admite uma G graduação, tal que as indeterminadas X_g são homogêneas de grau g. Como G é abeliano, $*$ é uma involução graduada em $F\langle X' \rangle$.

Note que $F\langle X' \rangle$ é gerada, como uma álgebra com involução, pelo conjunto $X_G = \{x_{i,g} \mid i \in \mathbb{N}, g \in G\}$. Denotaremos a álgebra $F\langle X' \rangle$ por $F_{G,*}\langle X_G \rangle$, algumas vezes iremos omitir o grupo G em X_G e escrever $F_{G,*}\langle X \rangle$.

Se A é uma álgebra com uma G-graduação e involução graduada $*$, então para toda aplicação $X \to A$ compatível com a G-graduação em A, isto é, a aplicação leva $x_{i,g}$ em elemento de A_g, existe um único homomorfismo (de $(G, *)$-álgebras) $\varphi : F_{G,*}\langle X \rangle \to A$ que estende a aplicação $X \to A$.

Os elementos

$$f = f(x_{i_1,g_1}, \ldots, x_{i_n,g_n}) \in F_{G,*}\langle X \rangle$$

são chamados de $(G,*)$-polinômios.

Definição 3.1.2. Dizemos que $f \in F_{G,*}\langle X \rangle$ é uma $(G,*)$-identidade para a $(G,*)$-álgebra A, se

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

para todo $a_1 \in A_{g_1}, \ldots, a_n \in A_{g_n}$.

Uma substituição admissível S para $f(x_{i_1,g_1}, \ldots, x_{i_n,g_n})$ é uma upla $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ tal que $a_i \in A_{g_i}$, $i = 1, \ldots, n$. O conjunto

$$T_{G,*}(A) := \{f \in F_{G,*}\langle X \rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}$$

é um ideal de $F_{G,*}\langle X \rangle$ chamado de ideal das $(G,*)$-identidades de A.

Observamos que $T_{G,*}(A)$ é um $T(G,*)$-ideal de $F_{G,*}\langle X \rangle$, isto é, $T_{G,*}(A)$ é um ideal invariante por todos os endomorfismos de $F_{G,*}\langle X \rangle$ que preservam a G-graduação e comutam com a involução $*$.

Se P é um subconjunto de $F_{G,*}\langle X \rangle$, tal que a interseção dos $T(G,*)$-ideais de $F_{G,*}\langle X \rangle$ que contêm P é $T_{G,*}(A)$, então dizemos que P é uma base para $T_{G,*}(A)$. Se $G = \{0\}$, recuperamos a definição de $*$-identidade polinomial para álgebras com involução.

As involuções graduadas em $UT_m(F)$, para um corpo algebricamente fechado F com char $F \neq 2$ foram classificadas em [26].

A partir de agora, para $\delta \in \{\emptyset, *\}$ o símbolo $x_{i,g}^{\delta}$ representa a indeterminada $x_{i,g}$ se $\delta = \emptyset$ e representa a indeterminada $x_{i,g}^{*}$ se $\delta = *$. Denotemos por $P_n^{G,*}$ o seguinte subespaço de $T_{G,*}\langle X \rangle$

$$\text{span}\{x_{\sigma(1),g_1}^{\delta_1} \cdots x_{\sigma(n),g_n}^{\delta_n} \mid \sigma \in S_n, g_1, \ldots, g_n \in G, \delta_i = \emptyset \text{ or } \delta_i = *, i = 1, \ldots, n\}.$$

A n-ésima $(G,*)$-codimensão da álgebra A com uma G-graduação e involução graduada $*$ é a dimensão $c_n^{G,*}(A)$ do espaço vetorial $P_n^{G,*}(A) := P_n^{G,*}/(P_n^{G,*} \cap T_{G,*}(A))$. Se o limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{(G,*)}(A)},$$

existir, então ele é chamado o $(G,*)$-expoente de A e é denotado por $\exp^{G,*}(A)$.

Uma adaptação da prova do [49, Teorema 10] nos garante o seguinte resultado:

Proposição 3.1.16. Sejam A uma álgebra com uma G-graduação com suporte finito e $*$ uma involução graduada em A. Se a H-graduação A' é um "coarsening" da G-graduação em A induzida por um homomorfismo sobrejetivo de G em H, então

$$c_n^*(A) \leq c_n^{H,*}(A') \leq c_n^{G,*}(A),$$

onde $c_n^*(A)$ é a n-ésima codimensão de A.

Demonstração: Seja $\psi : G \to H$ um homomorfismo sobrejetor. Para cada $h \in H$ escolha $g_h \in \psi^{-1}(h)$. Seja $S = \{g \in G \mid A_g \neq 0\}$ o suporte da G-graduação em A e defina

$$y_{i,h} = \begin{cases} \sum_{l \in S \cap \psi^{-1}(h)} x_{i,l}, \text{ se } S \cap \psi^{-1}(h) \neq \emptyset, \\ x_{i,g_h}, \text{ se } S \cap \psi^{-1}(h) = \emptyset \end{cases}.$$

Seja R a subálgebra (com involução) de $F_{G,*}\langle X_G\rangle$ gerada pelo conjunto

$$\{y_{i,h} \mid i \in \mathbb{N}, h \in H\}.$$

A álgebra R admite uma H-graduação tal que $y_{i,h}$ é homogêneo de grau h e sua involução $*$ é uma involução graduada. O homomorfismo de $F_{H,*}\langle X_H\rangle$ para R tal que $x_{i,h} \mapsto y_{i,h}$ é um isomorfismo de álgebras H-graduadas com involução. Identificamos $F_{H,*}\langle X_H\rangle$ com R, com essa identificação $T_{H,*}(A') = T_{G,*}(A) \cap R$ e $P_n^{H,*} \subseteq P_n^{G,*}$. Assim, o núcleo da aplicação linear

$$P_n^{H,*} \hookrightarrow P_n^{G,*} \to P_n^{G,*}(A), \tag{3.1}$$

é $P_n^{H,*} \cap T_{G,*}(A)$, onde a primeira aplicação é a inclusão e a segunda é a aplicação quociente. Note que $P_n^{H,*} \cap T_{G,*}(A) = P_n^{H,*} \cap T_{H,*}(A')$, deste modo (3.1) induz uma transformação linear injetiva $P_n^{H,*}(A') \to P_n^{G,*}(A)$. Claramente, isso implica que $c_n^{H,*}(A') \leq c_n^{G,*}(A)$. A outra desigualdade é uma consequência dessa aplicação para o grupo trivial e o homomorfismo $H \to \{0\}$. ■

3.2 A Graduação Mais Fina em $UT_m(F)$ e as suas Identidades Graduadas com Involução

Nesta seção, construiremos uma graduação em $UT_m(F)$ que é a mais fina entre as graduações elementares que admitem a involução graduada. Para essa graduação, exibiremos uma base finita para as $(\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, *)$-identidades para as involuções reflexão e simplética, e, por fim, determinaremos o crescimento assintótico da sua $(\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, *)$-codimensão.

Definição 3.2.1. Seja $m \in \mathbb{Z}_+$. A $\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$-graduação elementar em $UT_m(F)$ induzida por

$(e_1, \ldots, e_r, 0, e_r - e_{r-1}, \ldots, e_r - e_1)$ se $m = 2r$,

$(e_1, \ldots, e_r, 0, -e_r, \ldots, -e_1)$ se $m = 2r + 1$,

onde e_i é a $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$-upla em $\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$ com i-ésima entrada igual a 1 e demais entradas iguais a 0, é chamada a graduação mais fina em $UT_m(F)$.

Por exemplo, com a graduação mais fina em $UT_4(F)$, obtemos

$$\deg_G E_{1,2} = e_1 - e_2 \text{ e } \deg_G E_{2,3} = e_2 - 0 = e_2$$

e em $UT_5(F)$, temos

$$\deg_G E_{1,2} = e_1 - e_2 \text{ e } \deg_G E_{2,5} = e_2 - (-e_1) = e_2 + e_1.$$

Observação 3.2.2. Uma graduação elementar por um grupo G em $UT_m(F)$ é unicamente determinada pela $(m-1)$-upla

$$(\deg_G E_{1,2}, \deg_G E_{2,3}, \ldots, \deg_G E_{m-1,m}), \tag{3.2}$$

ver [17, Proposição 1.6]. No nosso caso, com a graduação mais fina dada por $G = \mathbb{Z}^r$, $r = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, os elementos $f := deg_G E_{i,i+1}$ para $i = 1, \ldots, r$ formam uma base de G como um $\mathbb{Z}$-módulo e a $(m-1)$-upla 3.2 é igual a

$$(f_1, f_2, \ldots, f_{r-1}, f_r, f_{r-1}, \ldots, f_2, f_1),$$

se $m = 2r$ e igual a

$$(f_1, f_2, \ldots, f_{r-1}, f_r, f_r, f_{r-1}, \ldots, f_2, f_1),$$

se $m = 2r + 1$.

Proposição 3.2.3. Seja F um corpo com $\operatorname{char} F \neq 2$ e G um grupo. Seja $\mathcal{U}'$ uma G-graduação em $UT_m(F)$. Se $\mathcal{U}'$ admite um antiautomorfismo, então $\operatorname{supp}\mathcal{U}'$ gera um subgrupo abeliano H de G. Seja φ' uma involução graduada na álgebra $\mathcal{U}'$. Então $(\mathcal{U}', \varphi')$ é isomorfa a $(\mathcal{U}, \varphi)$, onde $\mathcal{U}$ é a graduação elementar em $UT_m(F)$ induzida por uma m-upla $(g_1, \ldots, g_m)$ de elementos de H, tais que $g_1 + g_m = g_2 + g_{m-1} = \cdots = g_m + g_1$ e φ é ou $\circledast$ ou s.

Demonstração: Segue do Teorema 7 (ver [46]) que existe uma graduação elementar $\mathcal{U}$ em $UT_m(F)$ e um isomorfismo $\Psi : \mathcal{U}' \to \mathcal{U}$ de G-álgebras graduadas. Note que $\operatorname{supp}\mathcal{U}' = \operatorname{supp}\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$ admite um antiautomorfismo se, e somente se, $\mathcal{U}$ admite um antiautomorfismo. Agora provaremos que o subgrupo H de G gerado por $\operatorname{supp}\mathcal{U}' = \operatorname{supp}\mathcal{U}$ é abeliano.

Seja $(g_1, \ldots, g_m) \in G^m$ uma m-upla que induz a graduação $\mathcal{U}$ e seja $h_i = \deg_G E_{i,i+1}$, $i = 1, \ldots, m$. Note que $(0_G, g_2 - g_1, \ldots, g_m - g_1)$ também induz a graduação $\mathcal{U}$, então podemos assumir que $g_1, \ldots, g_m \in H$. Seja $\diamond$ um antiautomorfismo de $\mathcal{U}$, temos

$$\begin{aligned} h_i + h_{i+1} &= \deg_G (E_{i,i+1}E_{i+1,i+2}) \\ &= \deg_G ((E_{i,i+1}E_{i+1,i+2})^{\diamond}) \\ &= \deg_G \left(E^{\diamond}_{i+1,i+2}E^{\diamond}_{i,i+1}\right) \\ &= h_{i+1} + h_i. \end{aligned}$$

Provaremos que se $1 \leq i < j \leq m-1$, então $h_i + h_j = h_j + h_i$, como uma consequência, concluímos que H é um grupo abeliano. A prova é por indução em $j - i$, o resultado vale para $j - i = 1$. Agora assumimos que $j - i = k > 1$ e que o resultado vale para $1 \leq j - i < k$. Temos

$$\begin{aligned} h_i + h_{i+1} + \cdots + h_j &= \deg_G (E_{i,i+1}E_{i+1,j+1}) = \deg_G ((E_{i,i+1}E_{i+1,j+1})^{\diamond}) \\ &= \deg_G \left(E^{\diamond}_{i+1,j+1}E^{\diamond}_{i,i+1}\right) = h_{i+1} + \cdots + h_j + h_i. \end{aligned}$$

A hipótese de indução implica que h_i comuta com os elementos $h_{i+1}, \ldots, h_{j-1}$, portanto concluímos que

$$h_{i+1} + \cdots + h_{j-1} + h_i + h_j = h_i + h_{i+1} + \cdots + h_{j-1} + h_j = h_{i+1} + \cdots + h_{j-1} + h_j + h_i.$$

Como uma consequência, obtemos a igualidade $h_i + h_j = h_j + h_i$.

Agora provamos que

$$g_1 + g_m = g_2 + g_{m-1} = \cdots = g_m + g_1. \tag{3.3}$$

Temos

$$0 \neq (E_{1,2}E_{2,3} \cdots E_{m-2,m-1}E_{m-1,m})^{\diamond} = E^{\diamond}_{m-1,m}E^{\diamond}_{m-2,m-1} \cdots E^{\diamond}_{2,3}E^{\diamond}_{1,2}.$$

Como todos os elementos $E^{\diamond}_{m-1,m}, E^{\diamond}_{m-2,m-1}, \ldots, E^{\diamond}_{2,3}, E^{\diamond}_{1,2}$ pertencem ao radical de Jacobson de $UT_m(F)$, concluímos que para $1 \leq i \leq m-1$, $E_{i,i+1}$ deve aparecer com um coeficiente não-nulo na expressão de $E^{\diamond}_{m-i,m-i+1}$ como uma combinação linear de matrizes unitárias de $UT_m(F)$. Segue que

$$g_i - g_{i+1} = h_i = \deg_G E_{i,i+1} = \deg_G E^{\diamond}_{m-i,m+1-i} = \deg_G E_{m-i,m+1-i} = g_{m-i} - g_{m-i+1}$$

para todo $i = 1, \ldots, m-1$. Como $g_1, \ldots, g_m \in H$ e H é um grupo abeliano, as igualdades acima implicam que

$$g_i + g_{m+1-i} = g_{i+1} + g_{m-i},$$

para todo $i = 1, \ldots, m-1$. Isso prova (3.3).

Seja $\varphi_1 = \Psi\varphi'\Psi^{-1}$, então φ_1 é uma involução em $\mathcal{U}$ e Ψ é um isomorfismo de $(G,*)$-álgebras de $(\mathcal{U}', \varphi')$ para $(\mathcal{U}, \varphi_1)$. Agora, provamos que existe um isomorfismo de $(G,*)$-álgebras de $(\mathcal{U}, \varphi_1)$ para $(\mathcal{U}, \varphi)$, onde φ é ou $\circledast$ ou s.

Note que como (3.3) vale, a involução reflexão $\circledast$ é uma involução em $\mathcal{U}$, portanto $\circledast\varphi_1$ é um automorfismo de $\mathcal{U}$. Sejam u uma matriz invertível em $UT_m(F)$, tal que $x^{\circledast\varphi_1} = uxu^{-1}$ para todo $x \in \mathcal{U}$. Então, nós temos

$$x^{\varphi_1} = ux^{\circledast}u^{-1}, \tag{3.4}$$

para cada $x \in \mathcal{U}$. Afirmamos que u é homogêneo de grau 0_G. De fato, note que $\deg_G uxu^{-1} = \deg_G x$ para todo homogêneo $x \in \mathcal{U}$. Agora, se $u_{r,s} \neq 0$, onde $u_{r,s}$ é a (r,s)-ésima entrada de u, então $E_{r,r}\left(uE_{s,s}u^{-1}\right)E_{s,s} = u_{r,s}u^{-1}_{s,s}E_{r,s} \neq 0$, além disso essa matriz é homogênea de grau 0_G, assim $\deg_G E_{r,s} = 0_G$. Isso implica que u é homogêneo de grau 0_G. Nós podemos substituir u por um múltiplo escalar não-nulo de u se necessário e assumir que a hipótese do Lema 3.1.8 que $u_{k+1,k+1} = 1$ se $m = 2k+1$ vale. Note que como φ_1 e $\circledast$ são involuções, segue de (3.4) que $u^{\circledast} = \pm u$. As provas do Lema 3.1.8 e do Teorema 3.1.9, implicam que existe uma matriz homogênea c de grau 0_G, tal que $u = cc^{\circledast}$ se $u^{\circledast} = u$ e $u' = cc^s$, onde $u' = uD$, se $u^{\circledast} = -u$, onde D é a matriz em (3.1.6). Se $u^{\circledast} = u$, então (3.4) implica que a aplicação $x \mapsto c^{-1}xc$ é um isomorfismo de $(G,*)$-álgebras de $(\mathcal{U}, \varphi_1)$ para $(\mathcal{U}, \circledast)$. Se $u^{\circledast} = -u$, então como $D = D^{-1}$ segue de (3.4) que

$$x^{\varphi_1} = u'x^s(u')^{-1}.$$

Neste caso, a aplicação $x \mapsto c^{-1}xc$ é um isomorfismo de $(G,*)$-álgebras de $(\mathcal{U}, \varphi_1)$ para $(\mathcal{U}, s)$. ■

A subálgebra $F\langle X\rangle$ de $F_{G,*}\langle X\rangle$ (vista como uma álgebra, sem involução) gerada por X é a álgebra G-graduada livre. Se A é uma álgebra G-graduada com involução graduada, então $T_{G,*}(A) \cap F\langle X\rangle$ é o conjunto das identidades G-graduadas para A.

Corolário 3.2.4. Seja F um corpo com $\operatorname{char} F \neq 2$. Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$ G-graduações na álgebra das matrizes triangulares superiores e $\circ$, $\diamond$ involuções graduadas em $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$, respectivamente. Então, $(\mathcal{U}, \circ)$ é isomorfa a $(\mathcal{U}', \diamond)$ se, e somente se, $T_{G,*}(\mathcal{U}) = T_{G,*}(\mathcal{U}')$.

Demonstração: Assumamos que $T_{G,*}(\mathcal{U}) = T_{G,*}(\mathcal{U}')$ e que $(\mathcal{U}, \circ)$, $(\mathcal{U}', \diamond)$ são como na Proposição 3.2.3, em particular $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$ são graduações elementares. Note que $T_G(\mathcal{U}) = T_G(\mathcal{U}')$. Então, [[7], Proposição 1] implica que $(\mathcal{U}, \circ)$, $(\mathcal{U}', \diamond)$ satisfazem as mesmas identidades ordinárias e, portanto, são graduações na mesma álgebra de matrizes triangulares superiores. A igualdade $T_G(\mathcal{U}) = T_G(\mathcal{U}')$ implica que $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$ são isomorfas (ver, [17], [19]). Como as graduações são elementares, concluímos que $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$.

A igualdade $T_{G,*}(\mathcal{U}) = T_{G,*}(\mathcal{U}')$ implica que $(\mathcal{U}, \circ)$, $(\mathcal{U}', \diamond)$ satisfazem as mesmas $*$-identidades. A prova desse fato é análoga a [[7], Proposição 1] e será omitida. Seja m o inteiro positivo, tal que $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$ são graduações em $UT_m(F)$. Se m é ímpar, então $\circ$ e $\diamond$ coincidem com a involução reflexão, portanto $\circ = \diamond$ e terminamos. Agora, assumamos que m é par. Note que na álgebra relativamente livre determinada por $(UT_m(F), \circ)$ o elemento $[x_1, x_2] \cdots [x_{2m-3}, x_{2m-2}]$ é simétrico se $\circ$ é a involução reflexão e antissimétrico se $\circ$ é a involução simplética. Como $(UT_m(F), \circ)$ e $(UT_m(F), \diamond)$ satisfazem as mesmas identidades com involução, concluímos que $\circ = \diamond$. ■

Agora provaremos que qualquer graduação em $UT_m(F)$ que admite uma involução graduada é isomorfa a um coarsening da graduação mais fina desta álgebra.

Corolário 3.2.5. Seja $\mathcal{U}'$ uma G-graduação em $UT_m(F)$. Se $\mathcal{U}'$ admite uma involução graduada φ', então existe um homomorfismo de grupos $\alpha : \mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \to G$, tal que $(\mathcal{U}', \varphi')$ é isomorfa a $(\mathcal{U}, \varphi)$ onde $\mathcal{U}$ é a graduação induzida por α da graduação mais fina em $UT_m(F)$ e φ é ou a involução reflexão ou a simplética.

Demonstração:

Segue da Proposição 3.2.3 que $(\mathcal{U}', \varphi')$ é isomorfa a $(\mathcal{U}, \varphi)$, onde $\mathcal{U}$ é a graduação elementar em $UT_m(F)$ induzida por uma m-upla $(g_1, \ldots, g_m)$ de elementos do subgrupo abeliano gerado por supp$\mathcal{U}$ tal que $g_1 + g_m = g_2 + g_{m-1} = \cdots = g_m + g_1$ e φ é ou $\circledast$ ou s. Note que para qualquer $g \in G$, $(g_1 + g, \ldots, g_m + g)$ também induz $\mathcal{U}$, assim nós podemos assumir sem perda de generalidade que $g_{r+1} = 0$, onde $r = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. Seja $\alpha : \mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \to G$ o homomorfismo tal que $\alpha(e_i) = g_i$ para $i = 1, \ldots, r$. A graduação induzida por α na graduação mais fina em $UT_m(F)$ é a graduação elementar determinada por $(g_1, \ldots, g_m)$.

■

Lema 3.2.6. Seja $G = \mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$. Se $UT_m(F)$ tem a graduação mais fina, então $\deg_G E_{i,j} = \deg_G E_{k,l} \neq 0$ se, e somente se, $E_{i,j} = E_{k,l}$ or $E_{i,j}^{\circledast} = E_{k,l}$.

Demonstração: Inicialmente, observe que a implicação contrária é imediata. Por isso, assumiremos que

$$\deg_G E_{i,j} = \deg_G E_{k,l} \neq 0. \tag{3.5}$$

Dividiremos a nossa demonstração em dois casos: o caso em que m é par e o caso m é ímpar.

Caso par: $\mathcal{U} = UT_{2r}(F)$

Consideremos os seguintes conjuntos de matrizes elementares:

- $E_I = \{E_{u,v} \mid u, v \leq r\}$
- $E_{II} = \{E_{u,v} \mid u \leq r, v > r\}$
- $E_{III} = \{E_{u,v} \mid u, v > r\}$.

Facilmente, vemos que:

(i) Se $E_{i,j} \in E_I$, então $\deg E_{i,j} = e_i - e_j$;

(ii) Se $E_{i,j} \in E_{II}$, então $\deg E_{i,j} = e_i + e_{2r+1-j} - e_r$;

(iii) Se $E_{i,j} \in E_{III}$, então $\deg E_{i,j} = e_{2r+1-j} - e_{2r+1-i}$.

Para facilitar a leitura, dividiremos a demonstração em três casos.

Caso 1: $E_{i,j} \in E_I$

Se $E_{i,j} \in E_I$, então como $E_{k,l}$ tem o mesmo grau que $E_{i,j}$, segue que $E_{k,l} \in E_I \cup E_{III}$.

Ora, se $E_{k,l} \in E_I$, então

$$e_i - e_j = e_k - e_l,$$

de onde segue que,

$$e_i = e_k(\text{ assim, } i = k) \text{ e } e_j = e_l(\text{ assim, } j = l),$$

portanto $E_{i,j} = E_{k,l}$.

Caso $E_{k,l} \in E_{III}$, então

$$e_i - e_j = e_{2r+1-l} - e_{2r+1-k},$$

desta forma $i = 2r + 1 - l$ e $j = 2r + 1 - k$. Neste caso, $E_{k,l} = E^{\circledast}_{i,j}$.

Caso 2: $E_{i,j} \in E_{III}$

Note que esse caso é análogo ao anterior, logo concluímos que $E_{k,l} = E_{i,j}$ ou $E_{k,l} = E^{\circledast}_{i,j}$.

Caso 3: $E_{i,j} \in E_{II}$

Neste caso, a única possibilidade para $E_{k,l}$ é estar em E_{II}. Portanto, a igualdade (3.5) implica que

$$e_i + e_{2r+1-j} - e_r = e_k + e_{2r+1-l} - e_r.$$

Observe que temos duas possibilidades $i = k$ e $2r+1-j = 2r+1-l$ ou $i = 2r+1-l$ e $2r+1-j = k$. Ora, no primeiro caso $E_{i,j} = E_{k,l}$, já no segundo caso $E_{k,l} = E_{i,j}^{\circledast}$.

Assim, concluímos a prova para o caso par.

Caso ímpar: $\mathcal{U} = UT_{2r+1}(F)$

De modo análogo ao caso de matrizes de tamanho par, consideremos alguns conjuntos de matrizes elementares:

- $E_I = \{E_{u,v} \mid u, v \leq r\}$
- $E_{II} = \{E_{u,v} \mid u \leq r, v > r+1\}$
- $E_{III} = \{E_{u,v} \mid u, v > r+1\}$
- $E_{IV} = \{E_{u,v} \mid u \leq r, v = r+1\}$
- $E_V = \{E_{u,v} \mid u = r+1, v \geq r+1\}$.

Facilmente vemos que:

(i) Se $E_{i,j} \in E_I$, então $\deg E_{i,j} = e_i - e_j$;

(ii) Se $E_{i,j} \in E_{II}$, então $\deg E_{i,j} = e_i + e_{2r+2-j}$;

(iii) Se $E_{i,j} \in E_{III}$, então $\deg E_{i,j} = e_{2r+2-j} - e_{2r+2-i}$;

(iv) Se $E_{i,j} \in E_{IV}$, então $\deg E_{i,j} = e_i$;

(v) Se $E_{i,j} \in E_V$, então $\deg E_{i,j} = e_{2r+2-j}$.

Dividiremos cada uma das possibilidades para $E_{i,j}$ em casos, como no caso par.

Caso 1: $E_{i,j} \in E_I$

Análogo ao Caso 1 par.

Caso 2: $E_{i,j} \in E_{III}$

Análogo ao Caso 2 par.

Caso 3: $E_{i,j} \in E_{II}$

Análogo ao Caso 3 par.

Caso 4: $E_{i,j} \in E_{IV}$

Neste caso, como $E_{k,l}$ tem o mesmo grau que $E_{i,j}$, segue que $E_{k,l} \in E_{IV} \cup E_V$. Então, temos duas possibilidades: $k = i$ ou $k = 2r + 2 - j$ (equivalentemente, $k = i$ ou $j = 2r + 2 - k$). No primeiro caso, $E_{i,j} = E_{k,l}$, e no segundo $E_{k,l} = E_{i,j}^{\circledast}$.

Caso 5: $E_{i,j} \in E_V$

É análogo ao Caso 4.

■

Observação 3.2.7. Seja $G = \mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$ e $UT_m(F)$ com a graduação mais fina. Então, segue do Lema 3.2.6 que $\dim (UT_m(F))_g = 1$ se, e somente se, $g = \deg_G E_{i,j}$ onde $i + j = m + 1$. Assim, considerando $r = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, temos:

- Se $i < r$ e $m = 2r$, então $\dim (UT_m(F))_g = 1$ quando

$$g = \deg E_{i,m+1-i} = e_i - (e_r - e_i) = 2e_i - e_r.$$

- Como $i + j = m + 1$, o valor máximo para i é r. Assim, se $i = r$ e $m = 2r$, então $\dim (UT_m(F))_g = 1$ quando

$$g = \deg E_{i,m+1-i} = e_i$$

- Se $m = 2r + 1$ e $i < r$, então $\dim (UT_m(F))_g = 1$ quando

$$g = \deg E_{i,m+1-i} = e_i - (-e_i) = 2e_i.$$

Assim, o conjunto dos elementos no suporte da graduação para o qual a componente homogênea correspondente tem dimensão 1 é $\{2e_1 - e_r, \ldots, 2e_{r-1} - e_r, e_r\}$ se $m = 2r$, e $\{2e_1, 2e_2, \ldots, 2e_r\}$ se $m = 2r + 1$.

Assumamos que $UT_m(F)$ tem a graduação mais fina. A componente neutra é o subespaço das matrizes diagonais, deste modo

$$[x_{1,0}, x_{2,0}], \tag{3.6}$$

é uma $(\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, *)$-identidade para $UT_m(F)$.

Consideremos os seguintes polinômios

$$x_{1,g}^* - x_{1,g}, \text{ onde } g \text{ é tal que } \dim{(UT_m(F))_g} = 1, \tag{3.7}$$

e para $m = 2r + 1$ os polinômios

$$x_{1,g}x_{2,0}x_{3,h} - x_{1,g}x_{2,0}^*x_{3,h}, \text{ onde } g = e_i, h = e_j, 1 \leq i, j \leq r \tag{3.8}$$

$$x_{1,0}x_{2,g}x_{3,0} - x_{1,0}^*x_{2,g}x_{3,0} - x_{1,0}x_{2,g}x_{3,0}^* + x_{1,0}^*x_{2,g}x_{3,0}^*, \text{ onde } g = e_i, 1 \leq i \leq r. \tag{3.9}$$

e

$$x_{1,0}x_{2,g}x_{3,h} - x_{1,0}^*x_{2,g}x_{3,h}, \text{ onde } g = e_i, 2 \leq i \leq r, h = e_j - e_i, 1 \leq j < i. \tag{3.10}$$

Na proposição a seguir, analisaremos cada polinômio separadamente. No decorrer da demonstração, faremos uso da notação $(p)_S$ para nos referir a uma substituição elementar admissível S para o polinômio p. Embora tenhamos casos de substituições diferentes, usaremos sempre S (sem índices extras) para não sobrecarregar a notação. Além disso, em alguns momentos em nosso texto, falaremos apenas substituição sem citar que ela é admissível.

Proposição 3.2.8. Os polinômios (3.6), (3.7), (3.8), (3.9) e (3.10) são $(\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, *)$-identidades para $UT_m(F)$ com a graduação mais fina e a involução reflexão.

Demonstração: É suficiente considerar a avaliação das indeterminadas nas matrizes elementares de $UT_m(F)$.

Polinômio 1: $p_1 := [x_{1,0}, x_{2,0}]$

Sendo $(x_{1,0})_S = E_{i,i}$ e $(x_{2,0})_S = E_{j,j}$, se $i = j$, temos $[E_{i,i}, E_{j,j}] = E_{i,i}^2 - E_{i,i}^2 = 0$ e, caso $i \neq j$, temos $[E_{i,i}, E_{j,j}] = E_{i,i}E_{j,j} - E_{j,j}E_{i,i} = 0$. Logo, o polinômio p_1 é, de fato, uma $(\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, *)$-identidade para $UT_m(F)$.

Polinômio 2: $p_2 := x_{1,g}^* - x_{1,g},$ *onde* $\dim{(UT_m(F))_g} = 1$

Note que este polinômio é uma $(\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, *)$-identidade para $UT_m(F)$.

Polinômio 3: $p_3 := x_{1,g}x_{2,0}x_{3,h} - x_{1,g}x^*_{2,0}x_{3,h}$,
onde $g = e_i, h = e_j, 1 \leq i, j \leq r,$ *com* $m = 2r + 1$.

Temos aqui quatro possíveis casos para as substituições elementares. Analisemos cada um, sempre considerando $1 \leq i, j \leq r$.

Caso 3.1: $(x_{1,g})_S = E_{i,r+1}; (x_{3,h})_S = E_{j,r+1}$, *onde* $i < r + 1$ *e* $j < r + 1$

Neste caso, temos que p_3 avaliado desta forma, resulta em

$$(p_3)_S = E_{i,r+1}E_{w,w}E_{j,r+1} - E_{i,r+1}(E_{w,w})^{\circledast}E_{j,r+1},$$

onde $E_{w,w}$ é uma matriz elementar diagonal qualquer. Ora, como $j < r + 1$, ambos os produtos sempre resultam em zero, independente da matriz diagonal elementar dada. Logo, neste caso, a substituição resulta em zero.

Caso 3.2: $(x_{1,g})_S = E_{r+1,m+1-i}; (x_{3,h})_S = E_{j,r+1}$

Avaliando em p_3, obtemos

$$(p_3)_S = E_{r+1,m+1-i}E_{w,w}E_{j,r+1} - E_{r+1,m+1-i}(E_{w,w})^{\circledast}E_{j,r+1},$$

onde $E_{w,w}$ é uma matriz elementar diagonal qualquer. Suponhamos que $m + 1 - i = j$. Ora, mas como $g, h \neq 0$, obteríamos que

$$r + 1 < m + 1 - i = j < r + 1,$$

o que seria uma contradição. Assim, ambos os produtos são não nulos, independente da matriz diagonal elementar dada. Neste caso, a substituição resulta em zero.

Caso 3.3: $(x_{1,g})_S = E_{i,r+1}; (x_{3,h})_S = E_{r+1,m+1-j}$

Avaliando em p_3, obtemos:

$$(p_3)_S = E_{i,r+1}E_{w,w}E_{r+1,m+1-j} - E_{i,r+1}(E_{w,w})^{\circledast}E_{r+1,m+1-j},$$

onde $E_{w,w}$ é uma matriz elementar diagonal qualquer. Veja que caso $E_{w,w} \neq E_{r+1,r+1}$, ambos os produtos são não nulos. No entanto, caso contrário, como $E^{\circledast}_{r+1,r+1} = E_{r+1,r+1}$, segue que as duas parcelas são iguais, a menos de sinal. Logo, a substituição resulta em zero.

Caso 3.4: $(x_{1,g})_S = E_{r+1,m+1-i}; (x_{3,h})_S = E_{r+1,m+1-j}$

Avaliando no polinômio p_3, obtemos:

$$(p_3)_S = E_{r+1,m+1-i}E_{w,w}E_{r+1,m+1-j} - E_{r+1,m+1-i}E^{\circledast}_{w,w}E_{r+1,m+1-j},$$

onde $E_{w,w}$ é uma matriz elementar diagonal qualquer. Note que cada produto acima só resulta em um valor não-nulo, caso $m+1-i = r+1$. Ora, mas isso é impossível, já que $g \neq 0$. Portanto, em todo caso, sempre teremos os produtos sendo nulos, assim p_3 é uma $(\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, *)$-identidade para $UT_m(F)$.

Polinômio 4: $p_4 := x_{1,0}x_{2,g}x_{3,0} - x^*_{1,0}x_{2,g}x_{3,0} - x_{1,0}x_{2,g}x^*_{3,0} + x^*_{1,0}x_{2,g}x^*_{3,0}$, *onde* $g = e_i, 1 \leq i \leq r$, *com* $m = 2r+1$.

Como $g = e_i$, temos dois possíveis casos de substituições elementares:
$(x_{2,g})_S = E_{i,r+1}$ (Caso 1) ou $(x_{2,g})_S = E_{r+1,m+1-i}$ (Caso 2).

Antes de analisar cada caso, note que como $i \leq r$, então $m \neq 2i-1$ (ou, equivalentemente, $m+1-i \neq i$). Deste modo, $E_{m+1-i,m+1-i}E_{i,j} = 0$ (ou, $E_{j,i}E_{m+1-i,m+1-i} = 0$), para todo j. Além disso, como $m = 2r+1$, então $m - r = r+1$, donde

$$E_{m-r,m-r}E_{r+1,j} = E_{m-r,j} = E_{r+1,j}(\text{ ou }, E_{j,r+1}E_{m-r,m-r} = E_{j,m-r} = E_{j,r+1}).$$

Caso 4.1: $(x_{2,g})_S = E_{i,r+1}$

Consideremos as seguintes possibilidades:

(i) Se $(x_{1,0})_S = E_{i,i}$ e $(x_{3,0})_S = E_{r+1,r+1}$.

Ora, então $(x^*_{1,0})_S = E_{m+1-i,m+1-i}$ e $(x^*_{3,0})_S = E_{m-r,m-r}$.

Como $E^{\circledast}_{r+1,r+1} = E_{r+1,r+1}$, segue que $(p_4)_S = 0$, uma vez que temos pares de parcelas iguais, com sinais opostos.

(ii) Se $(x_{1,0})_S = E_{s,s} \neq E_{i,i}$ e $(x_{3,0})_S = E_{r+1,r+1}$, temos o mesmo fato do caso anterior.

(iii) Se $(x_{1,0})_S = E_{i,i}$ e $(x_{3,0})_S = E_{t,t} \neq E_{r+1,r+1}$, então como $(x^*_{3,0})_S \neq E_{r+1,r+1}$, os quatro produtos que compõem $(p_4)_S$ são nulos. Desta forma, $(p_4)_S = 0$, neste caso.

(iv) Se $(x_{1,0})_S = E_{s,s} \neq E_{i,i}$ e $(x_{3,0})_S = E_{t,t} \neq E_{r+1,r+1}$, segue de modo análogo ao caso anterior.

Caso 4.2: $(x_{2,g})_S = E_{r+1,m+1-i}$

A análise é feita de modo análogo ao Caso 4.1.

Logo, o polinômio p_4 é, de fato, uma $(\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, *)$-identidade para $UT_m(F)$.

Polinômio 5: $p_5 = x_{1,0}x_{2,g}x_{3,h} - x^*_{1,0}x_{2,g}x_{3,h}$,
onde $g = e_i, 2 \leq i \leq r, h = e_j - e_i, 1 \leq j < i,$ *com* $m = 2r + 1$.

Como $g = e_i$, segue que $(x_{2,g})_S \in \{E_{i,r+1}, E_{r+1,m+1-i}\}$ e

$$(x_{3,h})_S \in \{E_{i,j} \mid i < j \leq r \text{ ou } j > i \geq r + 2\}.$$

Analisemos cada caso:

(i) Se $(x_{2,g})_S = E_{i,r+1}$, com $i > 1$ e $(x_{3,h})_S = E_{i,j}$, com $i < j \leq r$, note que

$$(x_{2,g}x_{3,h})_S = 0.$$

Logo, p_5 é nulo com tal avaliação.

(ii) Se $(x_{2,g})_S = E_{r+1,m+1-i}$, com $i > 1$ e $(x_{3,h})_S = E_{i,j}$, com $i < j \leq r$, note que

$$x_{2,g}x_{3,h} \neq 0 \Leftrightarrow s = m + 1 - i.$$

Tomando $s = m + 1 - i$, temos:

$$(x_{2,g}x_{3,h})_S = E_{r+1,j}.$$

Assim, tomando $(x_{1,0})_S = E_{r+1,r+1}$ (pois as demais parcelas já resultam em zero), segue que:

$$E_{r+1,r+1}E_{r+1,j} - E_{r+1,r+1}E_{r+1,j} = E_{r+1,j} - E_{r+1,j} = 0.$$

(iii) Se $(x_{2,g})_S = E_{i,r+1}$, com $i > 1$ e $(x_{3,h})_S = E_{i,j}$, com $j > i \geq r+2$, veja que:

$$(x_{2,g}x_{3,h})_S = 0,$$

pois $i > r+1$. Logo, p_5 é nulo com tal avaliação.

(iv) Se $(x_{2,g})_S = E_{r+1,m+1-s}$, com $s > 1$, temos que s é obrigatoriamente $m+1-i$. Tomemos $(x_{3,h})_S = E_{i,j}$, com $j > i \geq r+2$, temos

$$x_{2,g}x_{3,h} = E_{r+1,j}.$$

Assim, tomando $(x_{1,0})_S = E_{r+1}$, $(p_5)_S$ é nulo.

Logo, o polinômio p_5 é, de fato, uma $(\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, *)$-identidade para $UT_m(F)$. ■

Lema 3.2.9. Seja $*$ uma involução graduada para $UT_m(F)$ com a G-graduação mais fina, onde $G = \mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$. Seja $M = x^{\delta_1}_{u_1,g_1} \cdots x^{\delta_n}_{u_n,g_n}$ um monômio multilinear tal que $g_i \neq 0$ para $i = 1, \ldots, n$ e $n > 1$. Se $M \notin T_{G,*}(UT_m(F))$, então existe uma única substituição elementar S tal que $M_S \neq 0$.

Demonstração: Seja $S = (E_{i_1,j_1}, \ldots, E_{i_n,j_n})$ uma substituição elementar para

$$x_{u_1,g_1} \cdots x_{u_n,g_n}.$$

Note que sendo $S' = (E^{\delta_1}_{i_1,j_1}, \ldots, E^{\delta_n}_{i_n,j_n})$, temos

$$M_{S'} = (E^{\delta_1}_{i_1,j_1})^{\delta_1} \cdots (E^{\delta_n}_{i_n,j_n})^{\delta_n} = E_{i_1,j_1} \cdots E_{i_n,j_n} = (x_{u_1,g_1} \cdots x_{u_n,g_n})_S.$$

Logo, assumiremos sem perda de generalidade que $M = x_{u_1,g_1} \cdots x_{u_n,g_n}$.

Sejam S_1 e S_2 substituições elementares distintas, tais que $(x_1 \cdots x_n)_{S_i} \neq 0$, com $i = 1, 2$, e t o menor índice tal que

$$E_{i,j} := (x_{u_t,g_t})_{S_1} \neq (x_{u_t,g_t})_{S_2} := E_{r,s}.$$

Ora, como $\deg_G E_{i,j} = \deg_G E_{r,s}$, então pelo Lema 3.2.6, temos $E_{r,s} = E^{\circledast}_{i,j}$.

Temos, então, os seguintes casos:

- Se $t > 1$, então como $M_{S_1} \neq 0$, temos $(x_{u_{t-1},g_{t-1}})_{S_1} = E_{u,i}$ para algum índice u. Além disso, da minimalidade de t concluímos que $(x_{u_{t-1},g_{t-1}})_{S_2} = E_{u,i}$. Logo, o fato de $M_{S_2} \neq 0$ implica que $E_{u,i}E_{i,j}^{\circledast} \neq 0$. Portanto, $m+1-j = i$. Neste caso

$$E_{r,s} = E_{i,j}^{\circledast} = E_{i,j},$$

o que é uma contradição já que $E_{i,j} \neq E_{r,s}$.

- Caso $t = 1$, se $(x_{u_2,g_2})_{S_1} = (x_{u_2,g_2})_{S_2}$, então um argumento análogo ao que foi feito acima, implica que

$$E_{r,s} = E_{i,j}^{\circledast} = E_{i,j},$$

que é uma contradição.

Se $(x_{u_2,g_2})_{S_1} \neq (x_{u_2,g_2})_{S_2}$, seja $E_{j,u} = (x_{u_2,g_2})_{S_1}$, para algum índice u. O Lema 3.2.6 implica que $(x_{u_2,g_2})_{S_2} = E_{j,u}^{\circledast}$. Como $M_{S_2} \neq 0$, concluímos que

$$E_{i,j}^{\circledast}E_{j,u}^{\circledast} \neq 0.$$

Portanto, $m+1-i = m+1-u$, o que implica que $i = u$. Isso é uma contradição,já que temos $i < j < u$.

■

3.3 As Identidades Monomiais para $UT_m(F)$

Um dos principais objetivos neste capítulo é encontrar uma base finita para as $(G,*)$-identidades para $UT_m(F)$ com a graduação mais fina por $G = \mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$ e ou a involução reflexão ou a involução simplética. Para esse fim, estudaremos as identidades monomiais para $UT_m(F)$. As identidades monomiais aparecem nos estudos de identidades graduadas em várias situações e na maioria das vezes a descrição das identidades graduadas é feita módulo as monomiais, ver por exemplo [4] e [10] .

Definição 3.3.1. Seja A uma álgebra graduada por um grupo abeliano com uma involução graduada $*$. Um monômio em $T_{G,*}(A)$ é chamado uma identidade monomial trivial para A se é consequência das identidades $x_{1.g}$, onde g não está no suporte de A.

Observação 3.3.2. Para $m > 4$, o monômio $M = x_{1,g_1}x_{2,g_2}x_{3,g_3}$, onde $g_1 = \deg E_{3,m-1}$, $g_2 = \deg E_{m-1,m}$ e $g_3 = \deg E_{m-2,m-1}$ é uma identidade graduada para $UT_m(F)$ com a graduação mais fina. Notemos que $g_1, g_2, g_3, g_1+g_2, g_2+g_3, g_1+g_2+g_3$ estão no suporte da graduação mais fina em $UT_m(F)$, portanto M não é uma identidade monomial trivial para $UT_m(F)$.

Nos próximos resultados, provaremos que toda identidade monomial para $UT_m(F)$ segue das identidades monomiais de grau no máximo 3, para $m = 2, 3, 4$ a álgebra $UT_m(F)$ não tem identidades monomiais não-triviais.

Ao longo desta seção, U_g denotará a soma das matrizes elementares de grau g e assumiremos que $U_g = 0$ se g não está no suporte da graduação mais fina em $UT_m(F)$.

Lema 3.3.3. Seja $M = x_{1,g_1} \cdots x_{n,g_n}$ e seja U_g a soma das matrizes elementares de grau g. Seja S a substituição tal que x_{t,g_t} é substituída por U_{g_t}, para $t = 1, \ldots, n$. Então, $M \in T_{G,*}(UT_m(F))$ se, e somente se, $M_S = 0$.

Demonstração: Note que S é uma substituição admissível para M, logo $M_S = 0$, se $M \in T_{G,*}(UT_m(F))$. Provaremos a recíproca. Sejam $S_1, \ldots, S_k$ todas as substituições elementares admissíveis para M. Temos

$$0 = M_S = U_{g_1} \cdots U_{g_t} = \sum_{l=1}^{k} M_{S_l} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq m} n_{i,j} E_{i,j},$$

onde $n_{i,j}$ é o número de índices l tal que $M_{S_l} = E_{i,j}$. Como o corpo F tem característica zero, concluímos que $n_{i,j} = 0$ para todo i, j, portanto $M_{S_l} = 0$ para $l = 1, \ldots, k$. Como M é um monômio multilinear, isso implica que $M \in T_{G,*}(UT_m(F))$. ■

Corolário 3.3.4. Considere $UT_m(F)$ com a graduação mais fina e ou a involução reflexão ou a involução simplética. Seja $M = x_{i_1,g_1}^{\delta_1} \cdots x_{i_n,g_n}^{\delta_n}$ e seja $\tilde{M} = x_{1,h_1} \cdots x_{n',h_{n'}}$, onde $(h_1, \ldots, h_{n'})$ é a upla obtida de $(g_1, \ldots, g_n)$ deletando as entradas iguais a $0 \in G$. Então, $M \in T_{G,*}(UT_m(F))$ se, e somente se, $\tilde{M} = T_{G,*}(UT_m(F))$.

Demonstração: Se $g_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$, então $\tilde{M} = 1$. Assim, o resultado é válido. Portanto, podemos assumir sem perda de generalidade que existe $g_i \neq 0$, para $i = 1, \ldots, n$.

Note que M é uma consequência de $\tilde{M}$, portanto $M \in T_{G,*}(UT_m(F))$ se $\tilde{M} \in T_{G,*}(UT_m(F))$. Assumimos agora que $M \in T_{G,*}(UT_m(F))$. Seja S a substituição tal que qualquer indeterminada de grau g é substituída por U_g para todo $g \in G$.

Note que $U_g^{\circledast} = U_g$ e $U_g^s = \pm U_g$, para todo $g \in G$. Como U_0 é a matriz identidade, temos $0 = M_S = \pm U_{g_1} \cdots U_{g_n} = \pm U_{h_1} \cdots U_{h_{n'}} = \pm \tilde{M}_S$, logo o Lema 3.3.3 implica que $\tilde{M} \in T_{G,*}(UT_m(F))$. ■

Lema 3.3.5. Seja $M = x_{1,g_1} \cdots x_{n,g_n}$, com $g_i \neq 0$, para todo i. Se $M \in T_{G,*}(UT_m(F))$ e $n \geq 4$, então um dos monômios $x_{2,g_2} \cdots x_{n,g_n}$, $x_{1,g_1} \cdots x_{n-1,g_{n-1}}$ está em $T_{G,*}(UT_m(F))$.

Demonstração: Assuma que os monômios $N = x_{2,g_2} \cdots x_{n,g_n}$, $N' = x_{1,g_1} \cdots x_{n-1,g_{n-1}}$ não são $(G,*)$-identidades para $UT_m(F)$. Então, existem substituições elementares $S = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ e $S' = (a'_2, \ldots, a'_t)$ para N e N', respectivamente, tais que

$$N_S = a_1 \cdots a_{t-1} \neq 0 \text{ e } (N')_{S'} = a'_2 \cdots a'_t \neq 0.$$

Então, $(a_2, \ldots, a_{t-1})$ e $(a'_2, \ldots, a'_{t-1})$ são substituições para $x_{2,g_2} \cdots x_{t-1,g_{t-1}}$ que não resultam em 0. Como esses monômios tem grau ≥ 2, o Lema 3.2.9 implica que $(a_2, \ldots, a_{t-1}) = (a'_2, \ldots, a'_{t-1})$. Então, $(a_1, \ldots, a_{t-1}, a'_t)$ é uma substituição para $x_{1,g_1} \cdots x_{n,g_n}$ que não resulta em zero, uma contradição, pois esse monômio está em $T_{G,*}(UT_m(F))$. ■

Proposição 3.3.6. As identidades monomiais para $UT_m(F)$ com a graduação mais fina são consequência das identidades monomiais da forma $x_{1,g_1} \cdots x_{n,g_n}$ onde $g_i \neq 0$ para todo i e $n \leq 3$.

Demonstração: Seja M uma identidade monomial para $UT_m(F)$. O Corolário 3.3.4 implica que existe um monômio $\tilde{M} = x_{1,h_1} \cdots x_{n',h_{n'}}$ em $T_{G,*}(UT_m(F))$ tal que M é uma consequência de $\tilde{M}$, e $h_i \neq 0$, para todo i. Nesta situação, o Lema 3.3.5 implica que existe
$N = x_{1,g_1} \cdots x_{n,g_n} \in T_{G,*}(UT_m(F))$ tal que $n \leq 3$ e $\tilde{M}$ é uma consequência de N. Portanto, M é uma consequência de N. ■

Corolário 3.3.7. A álgebra $UT_m(F)$ com a graduação mais fina não satisfaz identidades monomiais não-triviais se $m \leq 4$.

Demonstração: O resultado segue da Proposição 3.3.6 se provarmos que toda identidade para $UT_m(F)$ da forma $x_{1,g_1} \cdots x_{n,g_n}$, onde $g_i \neq 0$ para todo i e $n \leq 3$, é trivial. Para $m = 2, 3$ isso é observado diretamente. Assumiremos agora que $m = 4$, então o suporte da graduação mais fina em $UT_4(F)$ é $S = \{0, e_1, e_2, e_1 - e_2, 2e_1 - e_2\}$. Podemos verificar a seguinte afirmação diretamente:

Afirmação: Se $g_1, g_2, g_1 + g_2 \in S$, então $g_1 \neq g_2$ e $\{g_1, g_2\} = \{e_1, e_1 - e_2\}$ ou $\{g_1, g_2\} = \{e_2, e_1 - e_2\}$.

Em ambos os casos $x_{g_1}x_{g_2} \notin T_{G,*}(UT_m(F))$, portanto toda identidade para $UT_m(F)$ da forma $x_{g_1}x_{g_2}$ é trivial.

Agora, assuma que $g_1, g_2, g_3 \in S$ são tais que $g_1 + g_2, g_2 + g_3, g_1 + g_2 + g_3 \in S$. A afirmação acima implica que $g_1 + g_2 \in \{2e_1 - e_2, e_1\}$, como $(g_1 + g_2) + g_3 \in S$, nós concluímos que $g_1 + g_2 = e_1$, e portanto $\{g_1, g_2\} = \{e_2, e_1 - e_2\}$ e $g_3 = e_1 - e_2$. Analogamente, $g_2 + g_3 = e_1$, e, portanto, $\{g_2, g_3\} = \{e_2, e_1 - e_2\}$ e $g_1 = e_1 - e_2$. Portanto, $g_1 = g_3 = e_1 - e_2$ e $g_2 = e_2$. Então, segue que $x_{1,g_1}x_{2,g_2}x_{3,g_3} \notin T_{G,*}(UT_m(F))$. Assim, toda identidade para $UT_m(F)$ da forma $x_{g_1}x_{g_2}x_{g_3}$ é trivial. ■

3.4 Uma Base Finita para as Identidades Graduadas com Involução para $UT_m(F)$ com a Graduação mais Fina

Definição 3.4.1. Sejam $G = \mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$, $\mathcal{U}$ a álgebra $UT_m(F)$ com a graduação mais fina e

$$M = M_1 x_{u_1,g_1}^{\delta_1} M_2 x_{u_2,g_2}^{\delta_2} \cdots M_k x_{u_k,g_k}^{\delta_k} M_{k+1}, \tag{3.11}$$

um monômio em $P_n^{G,*}$, onde $g_1, \ldots, g_k \neq 0$ e

$$M_i = x_{k_{i,1},0}^{\delta_{i,1}} \cdots x_{k_{i,s_i},0}^{\delta_{i,s_i}}.$$

Dizemos que M é bom se não é uma $(G,*)$-identidade para $\mathcal{U}$ e além disso,

I $k_{i,1} < \cdots < k_{i,s_i}$, para todo i;

II Se $\dim \mathcal{U}_{g_i} = 1$, então $\delta_i = \emptyset$ e $M_i = 1$;

III Se $\dim \mathcal{U}_g = 1$ para $g = g_i + g_{i+1} + \cdots + g_j$, com $i < j$, então $M_i = 1$ e $u_i < u_j$;

IV Se $m = 2r + 1$, $g_i, g_{i+1} \in \{e_1, \ldots, e_r\}$, então $\delta_{i+1,1} = \cdots = \delta_{i+1,s_{i+1}} = \emptyset$;

V Se $m = 2r + 1$, $k \geq 2$, $g_1 = e_p, g_2 \notin \{e_1, \ldots, e_r\}$, então $\delta_{1,1} = \cdots = \delta_{1,s_1} = \emptyset$;

VI Se $m = 2r + 1$, $k \geq 2$, $g_{k-1} \notin \{e_1, \ldots, e_r\}, g_k = e_p$, então $\delta_{k+1,1} = \cdots = \delta_{k+1,s_{k+1}} = \emptyset$;

VII Se $m = 2r+1$, $k = 1$ e $g_1 = e_i$, para algum $i \in \{1, \ldots, r\}$, então $\delta_{1,1} = \cdots = \delta_{1,s_1} = \emptyset$ ou $\delta_{2,1} = \cdots = \delta_{2,s_2} = \emptyset$.

Observamos que um monômio bom em indeterminadas apenas de grau 0 ($k = 0$ na definição acima) é da forma

$$x_{1,0}^{\delta_1} \cdots x_{n,0}^{\delta_n},$$

portanto existem 2^n tais monômios.

Lema 3.4.2. Os monômios bons em $P_n^{G,*}$ em indeterminadas apenas de grau 0 são linearmente independentes módulo $T_{G,*}(UT_m(F))$, onde $UT_m(F)$ tem a graduação mais fina e ou a involução reflexão ou a involução simplética.

Demonstração: Seja $M = x_{1,0}^{\delta_1} \cdots x_{n,0}^{\delta_n}$ um monômio bom em $P_n^{G,*}$ em indeterminadas apenas de grau 0. Seja S_M a substituição tal que $(x_{i,0}^{\delta_i})_{S_M} = E_{1,1}$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Se $M' = x_{1,0}^{\epsilon_1} \cdots x_{n,0}^{\epsilon_n}$ é um monômio bom em $P_n^{G,*}$, então $M'_{S_M} \neq 0$ se, e somente se, $M = M'$ ou $\epsilon_i \neq \delta_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. No segundo caso $M'_{S_M} = E_{m,m} \neq E_{1,1}$. Assim, concluímos que $M_{S_M} = M'_{S_M} \neq 0$ se, e somente se, $M = M'$. Agora, seja $f = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k M_k \in T_{G,*}(UT_m(F))$ onde $M_1, \ldots, M_t$ são monômios bons em $P_n^{G,*}$ em indeterminadas apenas de grau 0. Fixamos j e seja S_j a substituição elementar S_{M_j}. Temos

$$0 = \sum_{i=k}^{t} \lambda_k (M_k)_{S_j}.$$

Note que $(M_k)_{S_j}$ é ou zero ou uma matriz elementar e $(M_k)_{S_j} \neq (M_j)_{S_j}$ sempre que $k \neq j$. Assim, como $(M_j)_{S_j} \neq 0$, concluímos que $\lambda_j = 0$. Isso implica que os monômios bons em $P_n^{G,*}$ em indeterminadas apenas de grau 0 são linearmente independentes módulo $T_{G,*}(UT_m(F))$.

■

Lema 3.4.3. Sejam $G = \mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$, $\mathcal{U}$ a álgebra $UT_m(F)$ com a graduação mais fina, M um monômio bom escrito como em (3.11) com $k \geq 1$ indeterminadas de grau diferente de 0 e M' um monômio bom nas mesmas indeterminadas que M. Se existe uma substituição elementar S por elementos de $\mathcal{U}$ tal que $(M)_S = (M')_S \neq 0$, então ou

$$M = M' \quad \text{ou} \quad m = 2r+1, k = 1, g_1 \in \{e_1, \ldots, e_r\}.$$

No último caso,

$$M' = M_1' x_{u_1,g_1}^{\delta_1} M_2' \quad \text{e} \quad M_i' = x_{k_i,1,0}^{\epsilon_{i,1}} \cdots x_{k_i,s_i,0}^{\epsilon_{i,s_i}} \quad \text{para todo } i = 1, 2.$$

Demonstração: Como M' é um monômio bom nas mesmas indeterminadas que M, existe uma permutação $\sigma \in S_k$ tal que

$$M' = M_1' x_{u_{\sigma(1)},g_{\sigma(1)}}^{\epsilon_{\sigma(1)}} M_2' x_{u_{\sigma(2)},g_{\sigma(2)}}^{\epsilon_{\sigma(2)}} \cdots M_k' x_{u_{\sigma(k)},g_{\sigma(k)}}^{\epsilon_{\sigma(k)}} M_{k+1}',$$

onde

$$M_i' = x_{l_{i,1},0}^{\epsilon_{i,1}} \cdots x_{l_{i,t_i},0}^{\epsilon_{i,t_i}}.$$

A prova será divida em várias afirmações, as quais juntas nos garantem o resultado.

Afirmação A: $\sigma(k) = k$.

Provaremos a Afirmação A por contradição (ou seja, assumiremos que $\sigma(k) \neq k$). Sejam $a = \sigma(k)$, $b = \sigma^{-1}(k)$. Assumindo que $a < k$, então $b < k$, pois se $a = k$ ou $b = k$, temos $\sigma(k) = k$, o que seria uma contradição.

Sejam t, u, v e w índices, tais que

$$(x_{u_a,g_a}^{\delta_a})_S = E_{t,u} \text{ e } (x_{u_k,g_k}^{\delta_k})_S = E_{v,w}.$$

Como $(M)_S \neq 0$ e $a < k$, concluímos que $t < u \leq v < w$ e que $(M)_S = E_{r,w}$, para algum índice r.

Afirmação A.1: $\epsilon_a \neq \delta_a$

De fato, se $\epsilon_a = \delta_a$, então, como $(x_{u_a,g_a}^{\epsilon_a})_S = E_{t,u}$, $(M')_S \neq 0$ e $\sigma(k) = a$, temos $(M')_S = E_{r',u}$, para algum índice r'. Assim,

$$E_{r,w} = (M')_S = (M)_S = E_{r',u}.$$

Então $u = w$. Porém isto é uma contradição, já que $u < w$. Então, $\epsilon_a \neq \delta_a$.

Como uma consequência da Afirmação A.1,

$$(x^{\epsilon_a}_{u_a,g_a})_S = (x^{\delta_a}_{u_a,g_a})^{\circledast}_S = E^{\circledast}_{t,u} = E_{m+1-u,m+1-t}.$$

Novamente, $(M')_S \neq 0$ e $\sigma(k) = a$ implicam que $(M')_S = E_{r',m+1-t}$, para um índice apropriado r'. Então, temos

$$E_{r,w} = (M)_S = (M')_S = E_{r',m+1-t}$$

e, consequentemente, $w = m+1-t$ (ou, $t+w = m+1$). Essa última igualdade implica na próxima afirmação:

Afirmação A.2: $\dim \mathcal{U}_g = 1$ *para* $g = g_a + g_{a+1} + \cdots + g_k$.

De fato, como $(x^{\delta_a}_{u_a,g_a})_S = E_{t,u}$ e $(x^{\delta_k}_{u_k,g_k})_S = E_{v,w}$, segue de $(M)_S \neq 0$:

$$0 \neq \left(x^{\delta_a}_{u_a,g_a} M_{a+1} x^{\delta_{a+1}}_{u_{a+1},g_{a+1}} \cdots x^{\delta_k}_{u_k,g_k}\right)_S = E_{t,u}(M_{a+1})_S (x^{\delta_{a+1}}_{u_{a+1},g_{a+1}})_S \cdots E_{v,w} = E_{t,w}$$

Isso implica que $E_{t,w}$ é homogêneo de grau $g = g_a + g_{a+1} + \cdots + g_k$. Como $t+w = m+1$, temos $E^{\circledast}_{t,w} = E_{t,w}$. Assim, o Lema 3.2.6 implica que $\dim \mathcal{U}_g = 1$.

Afirmação A.3: $\delta_k \neq \epsilon_k$

A demonstração é análoga à da Afirmação A.1. Lembrando que $b = \sigma^{-1}(k) < k$, note que como $(M')_S \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} 0 \neq \left(x^{\epsilon_k}_{u_k,g_k} M'_{b+1} \cdots M'_k x^{\epsilon_a}_{u_a,g_a}\right)_S &= \left(x^{\epsilon_k}_{u_k,g_k}\right)_S (M'_{b+1})_S \cdots \left(x^{\epsilon_a}_{u_a,g_a}\right)_S \\ &= \left(x^{\epsilon_k}_{u_k,g_k}\right)_S \cdots E_{m+1-u,m+1-t}. \end{aligned}$$

Se $\delta_k = \epsilon_k$, então $\left(x^{\epsilon_k}_{u_k,g_k}\right)_S = E_{v,w}$ e o raciocínio acima implica que

$$v < w \leq m+1-u < m+1-t$$

o que é uma contradição, pois $w = m+1-t$. Deste modo, $\delta_k \neq \epsilon_k$ e a substituição S no monômio $x^{\epsilon_k}_{u_k,g_k} M'_{b+1} \cdots M'_k x^{\epsilon_a}_{u_a,g_a}$ resulta em $E_{m+1-w,m+1-t}$.

Afirmação A.4: $\dim \mathcal{U}_h = 1$, *para* $h = g_{\sigma(b)} + g_{\sigma(b+1)} + \cdots + g_{\sigma(k)}$.

De fato, a matriz $E_{m+1-w,m+1-t}$ é homogênea de grau

$$h = g_k + g_{\sigma(b+1)} + \cdots + g_a = g_{\sigma(b)} + g_{\sigma(b+1)} + \cdots + g_{\sigma(k)},$$

e como $t + w = m + 1$, concluímos, como na Afirmação A.2, que $\dim \mathcal{U}_h = 1$.

A Afirmação A.2 e a Condição (III) na Definição 3.4.1 implicam que $u_a < u_k$. Analogamente, a Afirmação A.4. e a Condição (III) na Definição 3.4.1 implicam que $u_k < u_a$, desta forma encontramos uma contradição. Como a contradição foi obtida da suposição que $a = \sigma(k) < k$, concluímos que $\sigma(k) = k$.

Afirmação B: *σ é a permutação identidade.*

Provaremos a Afirmação B por indução em k. Para $k = 2$ ela segue diretamente da Afirmação A. Para $k > 2$, veja que a igualdade $(M)_S = (M')_S \neq 0$ e o fato de $\sigma(k) = k$ implicam que

$$\begin{aligned} 0 &\neq \left(M_1 x_{u_1,g_1}^{\delta_1} M_2 x_{u_2,g_2}^{\delta_2} \cdots x_{u_{k-1},g_{k-1}}^{\delta_{k-1}} M_k\right)_S \\ &= \left(M_1' x_{u_{\sigma(1)},g_{\sigma(1)}}^{\epsilon_{\sigma(1)}} M_2' x_{u_{\sigma(2)},g_{\sigma(2)}}^{\epsilon_{\sigma(2)}} \cdots x_{u_{\sigma(k-1)},g_{\sigma(k-1)}}^{\delta_{\sigma(k-1)}} M_k'\right)_S, \end{aligned}$$

agora a hipótese de indução, junto com $\sigma(k) = k$, implicam que σ é a permutação identidade.

Afirmação C: *Existem índices $i_1 < i_2 < \cdots < i_k < i_{k+1}$ tais que*

$$\left(x_{u_l,g_l}^{\delta_l}\right)_S = E_{i_l,i_{l+1}} = \left(x_{u_l,g_l}^{\epsilon_l}\right)_S$$

para $l = 1, \ldots, k$.

Como $(M)_S \neq 0$, existem índices $i_1 < i_2 < \cdots < i_k < i_{k+1}$ tais que

$$\left(x_{u_l,g_l}^{\delta_l}\right)_S = E_{i_l,i_{l+1}},$$

para $l = 1, \ldots, k$.

Analogamente, $(M')_S \neq 0$ implica que existem $j_1 < j_2 < \cdots < j_k < j_{k+1}$, tais que $\left(x_{u_l,g_l}^{\epsilon_l}\right)_S = E_{j_l,j_{l+1}}$. Note que a graduação mais fina $\mathcal{U}$ é induzida por uma upla de elementos dois a dois distintos do grupo, portanto dado um índice i e um elemento

$g \in G$, existe no máximo um índice j tal que $E_{i,j}$ é homogêneo de grau g. Como $E_{i_l,i_{l+1}}$ é homogêneo de grau g_l, concluímos que a sequência $i_1 < i_2 < \cdots < i_{k+1}$ é determinada por i_1 e a k-upla $(g_1, \ldots, g_k)$. Analogamente, a sequência $j_1 < \cdots < j_{k+1}$ é determinada por j_1 e $(g_1, \ldots, g_k)$.

Como $E_{i_1,i_{k+1}} = (M)_S = (M')_S = E_{j_1,j_{k+1}}$, concluímos que $i_1 = j_1$, portanto temos $i_l = j_l$ para $l = 1, \ldots, k+1$. Como uma consequência, concluímos que

$$\left(x_{u_l,g_l}^{\delta_l}\right)_S = E_{i_l,i_{l+1}} = \left(x_{u_l,g_l}^{\epsilon_l}\right)_S$$

para $l = 1, \ldots, k$.

Afirmação D: $\delta_i = \epsilon_i$ *para* $i = 1, \ldots, k$.

Provaremos a Afirmação D por contradição. Assuma que $\delta_l \neq \epsilon_l$ para algum l, então $x_{u_l,g_l}^{\epsilon_l} = (x_{u_l,g_l}^{\delta_l})^*$, donde

$$E_{i_l,i_{l+1}} = \left(x_{u_l,g_l}^{\delta_l}\right)_S = (x_{u_l,g_l}^{\delta_l})_S^{\circledast} = E_{i_l,i_{l+1}}^{\circledast}.$$

Como $E_{i_l,i_{l+1}}$ é homogêneo de grau $g_l \neq 0$ e $E_{i_l,i_{l+1}}^{\circledast} = E_{i_l,i_{l+1}}$, concluímos do Lema 3.2.6 que $\dim \mathcal{U}_{g_l} = 1$. Então, como M e M' são monômios bons, a Condição II na Definição 3.4.1 implica que $\delta_l = \emptyset = \epsilon_l$, isto é uma contradição, pois assumimos que $\delta_l \neq \epsilon_l$. Portanto, $\epsilon_l = \delta_l$ para $l = 1, \ldots, k$.

As Afirmações B e D implicam que podemos escrever M' como

$$M' = M'_1 x_{u_1,g_1}^{\delta_1} M'_2 x_{u_2,g_2}^{\delta_2} \cdots M'_k x_{u_k,g_k}^{\delta_k} M'_{k+1}.$$

Afirmação E: Temos:

$$\left(x_{k_a,j,0}^{\delta_{a,j}}\right)_S = E_{i_a i_a} \quad \text{e} \quad \left(x_{l_a,h,0}^{\epsilon_{a,h}}\right)_S = E_{i_a i_a}.$$

Como $(M')_S \neq 0$ e $(x_{u_a,g_a}^{\delta_a})_S = E_{i_a,i_{a+1}}$ concluímos que o resultado da substituição de S no fator $x_{l_{a,j},0}^{\epsilon_{a,j}}$ de M'_a é E_{i_a,i_a} para $j = 1, \ldots, t_a$, isto é, $(x_{l_{a,j},0}^{\epsilon_{a,j}})_S = E_{i_a,i_a}$. Lembrando que M é escrito como em (3.11), assim também temos que $(x_{k_{a,j},0}^{\delta_{a,j}})_S = E_{i_a,i_a}$ para $j = 1, \ldots, s_a$.

Afirmação F: *Se $M_a \neq 1$ e $x_{k_{a,j},0}$ é uma indeterminada em M_a, então $x_{k_{a,j},0}$ é uma indeterminada em M'_a.*

Sejam a um índice tal que $M_a \neq 1$ e $x_{k_{a,j},0}$ uma indeterminada em M_a. Como M e M' são monômios nas mesmas indeterminadas, existe um índice b tal que $x_{k_{a,j},0}$ é uma indeterminada em M'_b, neste caso $k_{a,j} = l_{b,j'}$ para algum $j' \leq t_b$. Assuma que $b \neq a$, então $\delta_{a,j} \neq \epsilon_{b,j'}$. De fato, se $\delta_{a,j} = \epsilon_{b,j'}$, então $x_{k_{a,j},0}^{\delta_{a,j}} = x_{l_{b,j'},0}^{\epsilon_{b,j'}}$. Então, temos

$$E_{i_a,i_a} = (x_{k_{a,j},0}^{\delta_{a,j}})_S = (x_{l_{b,j'},0}^{\epsilon_{b,j'}})_S = E_{i_b,i_b}.$$

Como uma consequência, temos $i_a = i_b$, isto é uma contradição já que $a \neq b$. Então, $\delta_{a,j} \neq \epsilon_{b,j'}$, portanto $x_{k_{a,j},0}^{\delta_{a,j}} = (x_{l_{b,j'},0}^{\epsilon_{b,j'}})^*$. Esta última igualdade implica que

$$E_{i_a,i_a} = (x_{k_{a,j},0}^{\delta_{a,j}})_S = (x_{l_{b,j'},0}^{\epsilon_{b,j'}})_S^{\circledast} = E_{i_b,i_b}^{\circledast} = E_{m+1-i_b,m+1-i_b},$$

assim $i_a = m+1-i_b$. Se $a < b$, então $i_a < i_b$ e $E_{i_a,i_b} = E_{i_a,i_{a+1}} \cdots E_{i_{b-1},i_b}$ é homogênea de grau $g = g_a + \cdots + g_{b-1}$. A igualdade $i_a = m+1-i_b$ implica que $E_{i_a,i_b}^{\circledast} = E_{i_a,i_b}$, então $\dim \mathcal{U}_g = 1$. Logo, segue da Condição II (se $b = a+1$) ou a Condição III (se $b > a+1$) na Definição 3.4.1 que $M_a = 1$, e isto contradiz o fato que $M_a \neq 1$. Se $b < a$, concluímos analogamente que $M'_b = 1$ o que também é uma contradição. Logo, devemos ter $b = a$.

Afirmação G: *A igualdade*

$$M'_i = x_{k_{i,1},0}^{\epsilon_{i,1}} \cdots x_{k_{i,s_i},0}^{\epsilon_{i,s_i}},$$

vale para $i = 1, \ldots, k+1$.

Repetimos a prova da Afirmação F com a modificação óbvia para provar que se $M'_a \neq 1$ para algum índice a, então toda indeterminada em M'_a é uma indeterminada em M_a. Logo, concluímos que M_a e M'_a são monômios nas mesmas indeterminadas para $a = 1, \ldots, k$, isto, junto com a Condição I na Definição 3.4.1 implica na Afirmação G.

Afirmação H: $\delta_{a,j} = \epsilon_{a,j}$ *para* $1 \leq a \leq k+1$, $1 \leq j \leq s_a$.

Note que $(x_{k_{a,j},0}^{\delta_{a,j}})_S = E_{i_a,i_a} = (x_{k_{a,j},0}^{\epsilon_{a,j}})_S$. Assuma que $\delta_{a,j} \neq \epsilon_{a,j}$ para algum a e algum j. Então, temos $x_{k_{a,j},0}^{\delta_{a,j}} = (x_{k_{a,j},0}^{\epsilon_{a,j}})^*$, deste modo

$$E_{i_a,i_a} = (x_{k_{a,j},0}^{\delta_{a,j}})_S = (x_{k_{a,j},0}^{\epsilon_{a,j}})_S^{\circledast} = E_{i_a,i_a}^{\circledast} = E_{m+1-i_a,m+1-i_a}.$$

Portanto, concluímos que $2i_a = m+1$. Se $m = 2r$ esta última igualdade nos leva a uma contradição, a afirmação H vale neste caso.

Agora, assuma que $m = 2r+1$, então $i_a = r+1$. Seja $e_i \in G$ a upla com i-ésima entrada igual a 1 e demais entradas iguais a 0. Note que o G-grau de $E_{i,j}$ está em $\{e_1, \ldots, e_r\}$ se, e somente se, $i = r+1$ ou $j = r+1$. Se $k = 1$, então $g_1 \in \{e_1, \ldots, e_r\}$ e a afirmação vale neste caso. Assumindo $k > 1$, provamos que neste caso nossa hipótese de $\delta_{a,j} \neq \epsilon_{a,j}$ para algum a a algum j nos dá uma contradição. Assim, $\delta_{a,j} = \epsilon_{a,j}$ para $1 \leq a \leq k+1, 1 \leq j \leq s_a$ e a afirmação H vale.

Agora, consideremos os três possíveis casos para a: $a = 1$, $a = k+1$ e $1 < a < k+1$. Lembremos que $k > 1$, então se $a = 1$, então g_2 é o grau de E_{i_2,i_3}, como $r+1 = i_1 < i_2 < i_3$, nós concluímos que $g_2 \notin \{e_1, \ldots, e_r\}$.

A Condição V na Definição 3.4.1 implica que $\delta_{1,j} = \epsilon_{1,j} = \emptyset$, isso contradiz nossa hipótese que $\delta_{a,j} \neq \epsilon_{a,j}$. Analogamente, se $a = k+1$, então g_{k-1} é o grau de E_{i_{k-1},i_k}, como $i_{k-1} < i_k < i_{k+1} = r+1$, nós concluímos que $g_{k-1} \notin \{e_1, \ldots, e_r\}$.

Agora, a Condição VI na Definição 3.4.1 implica que $\delta_{k+1,j} = \epsilon_{k+1,j} = \emptyset$, isto é uma contradição. Assumimos que $1 < a < k+1$. Então, g_{a-1} é o grau de E_{i_{a-1},i_a} e g_a é o grau de $E_{i_a,i_{a+1}}$. Como $i_a = r+1$, temos $g_{a-1}, g_a \in \{e_1, \ldots, e_r\}$, então a Condição IV na Definição 3.4.1 implica que $\delta_{a,j} = \epsilon_{a,j} = \emptyset$ e isto é uma contradição.

Claramente, as afirmações todas acima implicam juntas que $M = M'$.

■

Lema 3.4.4. Seja $M = M_1 x_{u_1,e_t}^{\delta_1} M_2$ um monômio bom, onde $M_i = x_{k_i,1,0}^{\delta_{i,1}} \cdots x_{k_i,s_i,0}^{\delta_{i,s_i}}$ para todo $i = 1, 2$. Se $\delta_{i,j} = *$ para algum i, j, então existe uma substituição elementar S_M tal que se M' é um monômio bom nas mesmas indeterminadas de M e $M_{S_M} = M'_{S_M}$, então $M = M'$.

Demonstração: Consideremos o caso onde $i = 1$, a prova para $i = 2$ é análoga. Seja a substituição S_M, tal que

$$\begin{aligned}
(x^{\delta_1}_{u_1,e_t})_{S_M} &= E_{t,r+1},\\
(x^{\delta_{1,j}}_{k_{1,j},0})_{S_M} &= E_{t,t} \text{ para } j = 1, \ldots, s_1,\\
(x^{\delta_{2,j'}}_{k_{2,j'},0})_{S_M} &= E_{r+1,r+1} \text{ para } j' = 1, \ldots, s_2.
\end{aligned}$$

Então $M_{S_M} \neq 0$. Agora seja M' um monômio bom nas mesmas indeterminadas de M, tal que $M_{S_M} = M'_{S_M}$. O Lema 3.4.3 implica que

$$M' = M'_1 x^{\delta_1}_{u_1,e_t} M'_2 \quad \text{e} \quad M'_i = x^{\epsilon_{i,1}}_{k_i,1,0} \cdots x^{\epsilon_{i,s_i}}_{k_i,s_i,0} \quad \text{para todo } i = 1, 2.$$

Se $\epsilon_{1,j} \neq \delta_{1,j}$, para algum j, então

$$(x^{\epsilon_{1,j}}_{k_1,j,0})_{S_M} = E^{\circledast}_{t,t} = E_{m+1-t,m+1,t}.$$

Como $t < r + 1$, concluímos que $E_{m+1-t,m+1,t} \neq E_{t,t}$ e, portanto, $M'_{S_M} = 0$, uma contradição. Assim, $\epsilon_{1,j} = \delta_{1,j}$ para todo $j = 1, \ldots, s_1$. Como $\delta_{1,j} = *$ para algum j, a Condição VII na Definição 3.4.1 implica que $\delta_{2,j} = \emptyset = \epsilon_{2,j}$ para todo $j = 1, \ldots, s_2$. Portanto, concluímos que $M = M'$.

■

Lema 3.4.5. Seja $G = \mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$. O conjunto dos monômios bons de grau n gera o espaço vetorial $P^{G,*}_n$, módulo o $T_{G,*}$-ideal gerado pelas identidades (3.6), (3.7), (3.8), (3.9) e (3.10) e os monômios em $T_{G,*}(UT_m(F))$.

Demonstração: Seja J o $T_{G,*}$-ideal gerado pelas identidades (3.6)-(3.10) juntas com os monômios em $T_{G,*}(UT_m(F))$ e seja M um monômio em $P^{G,*}_n/T_{G,*}(UT_m)$. O monômio M em $P^{G,*}_n$ deve ser escrito como em (3.11). Agora, provaremos que M é congruente módulo J a uma combinação linear de monômios que satisfazem as Condições (I)-(VII) na Definição 3.4.1.

Para auxiliar o leitor, iremos adicionar uma condição por vez.

Condição (I)

Para a Condição (I), apenas usamos a identidade (3.6) para escrever M módulo J como um monômio que satisfaz essa condição.

Condição (II)

Se $\dim \mathcal{U}_{g_i} = 1$, então $x^*_{u_i,g_i} - x_{u_i,g_i}$ está em J, então substituímos $x^*_{u_i,g_i}$ por x_{u_i,g_i}, se necessário, e assumimos, sem perda de generalidade que, $\delta_i = \emptyset$. Note que

$$M_i x_{u_i,g_i} \equiv_J x^*_{u_i,g_i} M_i^* \equiv_J x_{u_i,g_i} M_i^*,$$

deste modo podemos obter um monômio que é congruente módulo J a M, e que satisfaz (I) e (II).

Condição (III)

Agora assuma que $\dim \mathcal{U}_g = 1$ para $g = g_i + g_{i+1} + \cdots + g_j$, onde $i < j$, neste caso $x^*_{1,g} - x_{1,g} \in T_{G,*}(UT_m(F))$. Então,

$$M_i x^{\delta_i}_{u_i,g_i} \cdots M_j x^{\delta_j}_{u_j,g_j} \equiv_J (x^{\delta_j}_{u_j,g_j})^* M_j^* \cdots (x^{\delta_i}_{u_i,g_i})^* M_i^* \equiv_J x^{\delta_i}_{u_i,g_i} \cdots M_j x^{\delta_j}_{u_j,g_j} M_i^*,$$

portanto M é congruente módulo J a um monômio que satisfaz $(I) - (III)$.

Condição (IV)

Se $g_i, g_{i+1} \in \{e_1, \ldots, e_r\}$, então o polinômio

$$x_{1,g_i} x_{2,0} x_{3,g_{i+1}} - x_{1,g_i} x^*_{2,0} x_{3,g_{i+1}}$$

é uma $(G,*)$-identidade para $UT_m(F)$ em (3.8), portanto está em J. Assim, se $\delta_{i,l} = *$, temos:

$$x^{\delta_i}_{u_i,g_i} x^{\delta_{i,1}}_{k_{i,1},0} \cdots x^*_{k_{i,l},0} \cdots x^{\delta_{i,s_i}}_{k_{i,s_i},0} x^{\delta_{i+1}}_{u_{i+1},g_{i+1}} \equiv_J x^{\delta_i}_{u_i,g_i} x^{\delta_{i,1}}_{k_{i,1},0} \cdots x_{k_{i,l},0} \cdots x^{\delta_{i,s_i}}_{k_{i,s_i},0} x^{\delta_{i+1}}_{u_{i+1},g_{i+1}},$$

portanto $x^{\delta_i}_{u_i,g_i} M_i x^{\delta_{i+1}}_{u_{i+1},g_{i+1}} \equiv_J x^{\delta_i}_{u_i,g_i} x_{k_{i,1},0} \cdots x_{k_{i,s_i},0} x^{\delta_{i+1}}_{u_{i+1},g_{i+1}}$. Diante disso, concluímos que M é congruente a módulo J a um monômio que satisfaz $(I) - (IV)$.

Condição (V)

Assumamos que as hipóteses em (V) valem, isto é, $k \geq 2$, $g_1 \in \{e_1, \ldots, e_r\}$, $g_2 \notin \{e_1, \ldots, e_r\}$. Como $M \notin T_{G,*}(UT_m(F))$ existe uma substituição elementar S, tal que $(M)_S \neq 0$. Sejam $a < b < c$ os índices tais que $(x^{\delta_1}_{u_1,g_1})_S = E_{a,b}$ e $(x^{\delta_2}_{u_2,g_2})_S = E_{b,c}$.

Então g_1 é o G-grau de $E_{a,b}$ e portanto $a = r+1$ ou $b = r+1$. Como $E_{b,c}$ é homogêneo de grau $g_2 \notin \{e_1, \ldots, e_r\}$, concluímos que $b \neq r+1$, assim $a = r+1$. A upla que induz a graduação elementar em $UT_m(F)$ é $(e_1, \ldots, e_r, 0, -e_r, \ldots, -e_1)$, portanto $E_{r+1,b}$ é homogêneo de grau e_{2r+2-b}. Então, $g_1 = e_{2r+2-b}$, note que $r+1 < b < c \leq 2r+1$, portanto $r+1 < b < 2r+1$ e $2 \leq 2r+2-b \leq r$. Também temos $g_2 = e_{2r+2-c} - e_{2r+2-b}$. Então, segue de (3.10) que o polinômio $x_{1,0}x_{2,g_1}x_{3,g_2} - x_{1,0}^{*}x_{2,g_1}x_{3,g_2}$ está em J. Podemos usar essa identidade para obter um monômio que é congruente a M módulo J e satisfaz $(I) - (V)$.

Condição (VI)

Assuma que as hipóteses em (VI) valem, isto é,

$$k \geq 2, g_{k-1} \notin \{e_1, \ldots, e_r\} \text{ e } g_k \in \{e_1, \ldots, e_r\}.$$

Sejam $a' < b' < c'$ os índices tais que $(x_{u_{k-1},g_{k-1}}^{\delta_{k-1}})_S = E_{a',b'}$ e $(x_{u_k,g_k}^{\delta_k})_S = E_{b',c'}$. Note que $E_{a',b'}$ e $E_{b',c'}$ são homogêneos de grau g_{k-1} e g_k, respectivamente. Como $g_{k-1} \notin \{e_1, \ldots, e_r\}$ e $g_k \in \{e_1, \ldots, e_r\}$ concluímos que $c' = r+1$. Então,

$$g_k = e_{b'} \text{ e } g_{k-1} = e_{a'} - e_{b'},$$

além disso $1 \leq a' < b' \leq r$. Logo, segue que (3.10) que

$$x_{3,0}x_{2,g_k}x_{1,g_{k-1}} - x_{3,0}^{*}x_{2,g_k}x_{1,g_{k-1}} \in J.$$

Portanto, concluímos que o polinômio

$$\left(x_{3,0}x_{2,g_k}^{*}x_{1,g_{k-1}}^{*} - x_{3,0}^{*}x_{2,g_k}^{*}x_{1,g_{k-1}}^{*}\right)^{*} = x_{1,g_{k-1}}x_{2,g_k}x_{3,0}^{*} - x_{1,g_{k-1}}x_{2,g_k}x_{3,0}$$

está em J. Usamos essa identidade para obter um monômio que é congruente a M módulo J e que satisfaz $(I) - (VI)$.

Condição (VII)

Esse monômio é bom a menos que $m = 2r+1$, $k = 1$ e $g_1 \in \{e_1, \ldots, e_r\}$. Assumamos que esse é o caso, segue das identidades (3.6) e (3.9) que M é congruente módulo J uma combinação linear de monômios que satisfaz, $(I)-(VII)$, isto é, M é congruente módulo J a uma combinação de monômios bons. ■

Teorema 3.4.6. Seja $G=\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$. Os polinômios (3.6), (3.7), (3.8), (3.9) e (3.10), junto com as identidades monomiais da forma $x_{1,g_1}\cdots x_{n,g_n}$, onde $n\leq 3$ e $g_i\neq 0$ para todo i, formam uma base das $(G,*)$-identidades para $UT_m(F)$ com a graduação mais fina e a involução reflexão. Além isso, as imagens dos monômios bons de grau n, sobre a aplicação quociente canônica, formam uma base para $P_n^{G,*}/P_n^{G,*}\cap T_{G,*}(UT_m(F))$.

Demonstração: Seja J o $T_{G,*}$-ideal gerado pelas identidades (3.6), (3.7), (3.8), (3.9) e (3.10) e os monômios

$$x_{1,g_1}\cdots x_{n,g_n}, \tag{3.12}$$

em $T_{G,*}(UT_m)$ com $g_i\neq 0$ para $i=1,\ldots,n$ e $n\leq 3$. A Proposição 3.2.8 implica que $J\subseteq T_{G,*}(UT_m(F))$. Resta-nos provar a involução inversa. Provaremos primeiro a seguinte afirmação:

Afirmação: *Os monômios bons são linearmente independentes módulo* $T_{G,*}(UT_m(F))$.

Seja $T=\{x_{1,h_1},\ldots,x_{n,h_n}\mid h_1,\ldots,h_n\in G\}$ um conjunto de indeterminadas. Seja $\mathcal{M}(T)$ o conjunto de monômios bons de grau n nas indeterminadas em T. Provaremos que $\mathcal{M}(T)$ é linearmente independente módulo $T_{G,*}(UT_m(F))$, isso implica que os monômios bons são linearmente independentes módulo $T_{G,*}(UT_m(F))$. Seja k o número de índices l, tais que $h_l\neq 0$. Se $k=0$, então o Lema 3.4.2 implica a afirmação, então assumamos que $k\geq 1$. Seja $f=\sum_{k=1}^{t}\lambda_k M_k\in T_{G,*}(UT_m(F))$ uma combinação linear de monômios bons dois a dois distintos $M_1,\ldots,M_t\in\mathcal{M}(T)$. Considere os seguintes casos:

Caso I: $m=2r+1, k=1, g_1\in\{e_1,\ldots,e_r\}$.

Assumiremos primeiramente que para algum j, temos $M_j=N_1x_{u_1,e_l}^{\delta_1}N_2$, onde $N_i=x_{k_i,1,0}^{\delta_{i,1}}\cdots x_{k_i,s_i,0}^{\delta_{i,s_i}}$ para todo $i=1,2$ e $\delta_{i,j}=*$ para algum i,j. Agora, seja S_j a substituição elementar no Lema 3.4.4. Temos

$$0=\sum_{k=1}^{t}\lambda_k(M_k)_{S_j}.$$

Note que $(M_k)_{S_j}$ é ou zero ou uma matriz elementar e, além disso, $(M_k)_{S_j} \neq (M_j)_{S_j}$ para todo $k \neq j$. Isso implica que $\lambda_j = 0$. Logo, podemos assumir que $M_1, \ldots, M_t$ são monômios bons da forma

$$(x_{k_1,1,0} \cdots x_{k_1,s_1,0}) x_{u_1,e_l}^{\delta_1} (x_{k_2,1,0} \cdots x_{k_2,s_2,0}).$$

Seja S_j uma substituição elementar tal que $(M_j)_{S_j} \neq 0$. Então, o Lema 3.4.3 implica que $(M_k)_{S_j} \neq (M_j)_{S_j}$ para todo $k \neq j$, logo nós concluímos que $\lambda_j = 0$. Como uma consequência, temos que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_j = 0$.

Caso II: *As condições no Caso I não valem.*

Fixemos j e seja S_j uma substituição elementar, tal que $(M_j)_{S_j} \neq 0$. Temos

$$0 = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k (M_k)_{S_j}.$$

Note que $(M_k)_{S_j}$ é ou zero ou uma matriz elementar, além disso o Lema 3.4.3 implica que $(M_k)_{S_j} \neq (M_j)_{S_j}$ para todo $k \neq j$. Portanto, concluímos que $\lambda_j = 0$.

A afirmação segue dos dois casos acima.

Agora, provemos que $T_{G,*}(UT_m(F)) \subseteq J$. Seja $f \in P_n^{G,*} \cap T_{G,*}(UT_m(F))$. A Proposição 3.3.6 implica que todo monômio em $T_G(UT_m(F))$ está em J, logo o Lema 3.4.5 implica que nós podemos escrever f módulo J como uma combinação linear

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_i M_i,$$

de monômios bons $M_1, \ldots, M_t$ em $\mathcal{M}(T)$ para algum conjunto de indeterminadas T. Já que $\mathcal{M}(T)$ é linearmente independente módulo $T_{G,*}(UT_m(F))$, concluímos que

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_l = 0.$$

Portanto, $f \in J$. Como o corpo é de característica zero, isso implica que $T_{G,*}(UT_m(F)) \subseteq J$. ■

Observação 3.4.7. Seja $G = \mathbb{Z}^r$ e seja $\mathcal{U}$ a G-graduação mais fina em $UT_{2r}(F)$. Se $\dim \mathcal{U}_g = 1$, então existem $1 \leq i < j \leq 2r$ com $i + j = 2r + 1$, tal que

$\mathcal{U}_g = \operatorname{span}\{E_{i,j}\}$. Note que neste caso $i \leq r < j$, logo $E^s_{i,j} = -E_{i,j}$. Portanto, $x^*_{1,g} + x_{1,g}$ é uma $(G,*)$-identidade para $\mathcal{U}$ com a involução simplética.

Agora, provaremos o análogo ao resultado do Teorema 3.4.6 para $UT_{2r}(F)$ com a graduação mais fina e a involução simplética.

Lema 3.4.8. Seja $G = \mathbb{Z}^r$ e seja $\mathcal{U}$ a álgebra $UT_{2r}(F)$ com a graduação mais fina e involução simplética. Seja M um monômio bom escrito como em (3.11) com $k \geq 1$ indeterminadas de grau diferente de 0. Seja M' um monômio bom nas mesmas indeterminadas de M. Se existe uma substituição elementar S por elementos de $\mathcal{U}$, tal que $(M)_S = \pm(M')_S \neq 0$, então $M = M'$.

Demonstração: Como M' é um monômio nas mesmas indeterminadas de M, existe uma permutação $\sigma \in S_k$, tal que

$$M' = M'_1 x^{\epsilon_{\sigma(1)}}_{u_{\sigma(1)},g_{\sigma(1)}} M'_2 x^{\epsilon_{\sigma(2)}}_{u_{\sigma(2)},g_{\sigma(2)}} \cdots M'_k x^{\epsilon_{\sigma(k)}}_{u_{\sigma(k)},g_{\sigma(k)}} M'_{k+1},$$

onde

$$M'_i = x^{\epsilon_{i,1}}_{l_{i,1},0} \cdots x^{\epsilon_{i,t_i}}_{l_{i,t_i},0}.$$

A prova será divida em várias afirmações.

Afirmação A: $\sigma(k) = k$.

A afirmação A será provada por contradição. Seja $a = \sigma(k)$, $b = \sigma^{-1}(k)$ e assuma que $a < k$, então $b < k$. Agora, sejam t, u, v, w índices tais que

$$(x^{\delta_a}_{u_a,g_a})_S = \pm E_{t,u} \text{ e } (x^{\delta_k}_{u_k,g_k})_S = \pm E_{v,w}.$$

Como $(M)_S \neq 0$ e $a < k$, concluímos que $t < u \leq v < w$ e que $(M)_S = \pm E_{z,w}$ para algum índice z.

Afirmação A.1: $\epsilon_a \neq \delta_a$

De fato, se $\epsilon_a = \delta_a$ então $(x^{\epsilon_a}_{u_a,g_a})_S = \pm E_{t,u}$, como $(M')_S \neq 0$ e $\sigma(k) = a$, temos $(M')_S = \pm E_{z',u}$ para algum índice z', então temos

$$\pm E_{z,w} = (M)_S = \pm(M')_S = \pm E_{z',u}.$$

Então $u = w$, isso é uma contradição pois $u < w$. Então $\epsilon_a \neq \delta_a$.

Como uma consequência da Afirmação A.1,

$$(x^{\epsilon_a}_{u_a,g_a})_S = (x^{\delta_a}_{u_a,g_a})^s_S = (\pm E_{t,u})^s = \pm E_{2r+1-u,2r+1-t}.$$

Outra vez $(M')_S \neq 0$ e $\sigma(k) = a$ implicam que $(M')_S = \pm E_{z',2r+1-t}$ para um índice apropriado z'. Então, temos

$$\pm E_{z,w} = (M)_S = \pm(M')_S = \pm E_{z',2r+1-t}$$

e consequentemente $w = 2r+1-t$. Essa última igualdade implica na próxima afirmação.

Afirmação A.2: $\dim \mathcal{U}_g = 1$ *para* $g = g_a + g_{a+1} + \cdots + g_k$.

De fato, lembremos que $(x^{\delta_a}_{u_a,g_a})_S = \pm E_{t,u}$ e $(x^{\delta_k}_{u_k,g_k})_S = \pm E_{v,w}$, logo como $(M)_S \neq 0$, temos:

$$0 \neq \left(x^{\delta_a}_{u_a,g_a} M_{a+1} x^{\delta_{a+1}}_{u_{a+1},g_{a+1}} \cdots x^{\delta_k}_{u_k,g_k}\right)_S = \pm E_{t,u}(M_{a+1})_S (x^{\delta_{a+1}}_{u_{a+1},g_{a+1}})_S \cdots E_{v,w} = \pm E_{t,w}.$$

Isso implica que $E_{t,w}$ é homogêneo de grau $g = g_a + g_{a+1} + \cdots + g_k$. Lembrando que $t + w = 2r + 1$, o Lema 3.2.6 implica que $\dim \mathcal{U}_g = 1$.

Afirmação A.3: $\delta_k \neq \epsilon_k$

A prova e análoga a prova da Afirmação A.1. Lembrando que $b = \sigma^{-1}(k) < k$ e notando que $(M')_S \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned} 0 \neq \left(x^{\epsilon_k}_{u_k,g_k} M'_{b+1} \cdots M'_k x^{\epsilon_a}_{u_a,g_a}\right)_S &= \left(x^{\epsilon_k}_{u_k,g_k}\right)_S (M'_{b+1})_S \cdots \left(x^{\epsilon_a}_{u_a,g_a}\right)_S \\ &= \pm \left(x^{\epsilon_k}_{u_k,g_k}\right)_S \cdots E_{2r+1-u,2r+1-t}. \end{aligned}$$

Se $\delta_k = \epsilon_k$, então $\left(x^{\epsilon_k}_{u_k,g_k}\right)_S = \pm E_{v,w}$ e o raciocínio acima implica que

$$v < w \leq 2r + 1 - u < 2r + 1 - t$$

o que é uma contradição, pois $w = 2r + 1 - t$. Assim $\delta_k \neq \epsilon_k$ e a substituição S no monômio $x^{\epsilon_k}_{u_k,g_k} M'_{b+1} \cdots M'_k x^{\epsilon_a}_{u_a,g_a}$ vale $\pm E_{2r+1-w,2r+1-t}$.

Afirmação A.4: $\dim\mathcal{U}_h = 1$ *para* $h = g_{\sigma(b)} + g_{\sigma(b+1)} + \cdots + g_{\sigma(k)}$.

De fato, como a matriz $E_{2r+1-w,2r+1-t}$ é homogênea de grau

$$h = g_k + g_{\sigma(b+1)} + \cdots + g_a = g_{\sigma(b)} + g_{\sigma(b+1)} + \cdots + g_{\sigma(k)},$$

e como $t + w = 2r + 1$ concluímos que $\dim\mathcal{U}_h = 1$.

A Afirmação A.2 junto com a Condição (III) na Definição 3.4.1 implicam que $u_a < u_k$. Analogamente, a Afirmação A.4 implica que $u_k < u_a$, assim chegamos a uma contradição. A contradição surge da nossa suposição de que $a = \sigma(k) < k$. Logo, concluímos que $\sigma(k) = k$.

Afirmação B: σ *é a permutação identidade.*

Provaremos a Afirmação B por indução em k, para $k = 1$ o resultado é trivial e para $k = 2$ isso segue diretamente da Afirmação A. Para $k > 2$ notemos que as igualdades $\sigma(k) = k$ e $(M)_S = \pm(M')_S \neq 0$ implicam que

$$\begin{aligned} 0 &\neq \left(M_1 x^{\delta_1}_{u_1,g_1} M_2 x^{\delta_2}_{u_2,g_2} \cdots x^{\delta_{k-1}}_{u_{k-1},g_{k-1}} M_k\right)_S \\ &= \pm\left(M'_1 x^{\epsilon_{\sigma(1)}}_{u_{\sigma(1)},g_{\sigma(1)}} M'_2 x^{\epsilon_{\sigma(2)}}_{u_{\sigma(2)},g_{\sigma(2)}} \cdots x^{\delta_{\sigma(k-1)}}_{u_{\sigma(k-1)},g_{\sigma(k-1)}} M'_k\right)_S, \end{aligned}$$

agora a hipótese de indução implica que σ é a permutação identidade.

Afirmação C: *Existem índices* $i_1 < i_2 < \cdots < i_k < i_{k+1}$ *tais que*

$$\left(x^{\delta_l}_{u_l,g_l}\right)_S = \pm E_{i_l,i_{l+1}} = \left(x^{\epsilon_l}_{u_l,g_l}\right)_S$$

para $l = 1, \ldots, k$.

Como $(M)_S \neq 0$ existem índices $i_1 < i_2 < \cdots < i_k < i_{k+1}$ tais que

$$\left(x^{\delta_l}_{u_l,g_l}\right)_S = \pm E_{i_l,i_{l+1}}$$

para $l = 1, \ldots, k$. Analogamente, $(M')_S \neq 0$ implica que existe $j_1 < j_2 < \cdots < j_k < j_{k+1}$ tais que $\left(x^{\epsilon_l}_{u_l,g_l}\right)_S = \pm E_{j_l,j_{l+1}}$. Note que a graduação mais fina $\mathcal{U}$ é induzida pela $2r$-upla de elementos dois a dois distintos do grupo, portanto dado um índice i e um elemento g do grupo G, existe pelo menos um índice j, tal que $E_{i,j}$ é homogêneo de grau g. Como $E_{i_l,i_{l+1}}$ é homogêneo de grau g_l, concluímos que a sequência $i_1 < i_2 < \cdots < i_{k+1}$ é determinada por i_1 e a k-upla $(g_1, \ldots, g_k)$. Analogamente, a sequência $j_1 < \cdots < j_{k+1}$ é determinada por j_1 e $(g_1, \ldots, g_k)$. Como

$$\pm E_{i_1,i_{k+1}} = (M)_S = (M')_S = \pm E_{j_1,j_{k+1}},$$

concluímos que $i_1 = j_1$, portanto temos $i_l = j_l$ para $l = 1, \ldots, k+1$. Como consequência, temos: $\left(x^{\delta_l}_{u_l,g_l}\right)_S = \pm E_{i_l,i_{l+1}} = \left(x^{\epsilon_l}_{u_l,g_l}\right)_S$ para $l = 1, \ldots, k$.

Afirmação D: $\delta_i = \epsilon_i$ *para* $i = 1, \ldots, k$.

Provaremos a Afirmação D por contradição. Assuma que $\delta_l \neq \epsilon_l$ para algum l, então $x^{\epsilon_l}_{u_l,g_l} = (x^{\delta_l}_{u_l,g_l})^*$ portanto

$$\pm E_{i_l,i_{l+1}} = \left(x^{\delta_l}_{u_l,g_l}\right)_S = \pm\left(x^{\epsilon_l}_{u_l,g_l}\right)_S = \pm(x^{\delta_l}_{u_l,g_l})^s_S = \pm E^s_{i_l,i_{l+1}}.$$

Como $E_{i_l,i_{l+1}}$ é homogêneo de grau $g_l \neq 0$ e as igualdades acima implicam que $i_l + i_{l+1} = 2r+1$, concluímos do Lema 3.2.6 que $\dim \mathcal{U}_{g_l} = 1$. Então, como M e M' são monômios bons, a Condição II na Definição 3.4.1 implica que $\delta_l = \emptyset = \epsilon_l$, isso é uma contradição, já que assumimos que $\delta_l \neq \epsilon_l$. Logo, $\epsilon_l = \delta_l$ para $l = 1, \ldots, k$.

As Afirmações B e D implicam que nós podemos escrever M' como

$$M' = M'_1 x^{\delta_1}_{u_1,g_1} M'_2 x^{\delta_2}_{u_2,g_2} \cdots M'_k x^{\delta_k}_{u_k,g_k} M'_{k+1}.$$

Afirmação E: Temos:

$$\left(x^{\delta_{a,j}}_{k_a,j,0}\right)_S = \pm E_{i_a i_a} \quad \text{e} \quad \left(x^{\epsilon_{a,h}}_{l_a,h,0}\right)_S = \pm E_{i_a i_a}$$

para todo $1 \leq a \leq k+1, 1 \leq j \leq s_a, 1 \leq h \leq t_a$.

Como $(M')_S \neq 0$ e $(x^{\delta_a}_{u_a,g_a})_S = \pm E_{i_a,i_{a+1}}$, concluímos que o resultado da substituição S no fator $x^{\epsilon_{a,h}}_{l_{a,h},0}$ de M'_a é $\pm E_{i_a,i_a}$ para $h = 1, \ldots, t_a$, isto é, $(x^{\epsilon_{a,h}}_{l_{a,h},0})_S = \pm E_{i_a,i_a}$. Lembrando que M é escrito como em (3.11), assim também temos $(x^{\delta_{a,j}}_{k_{a,j},0})_S = \pm E_{i_a,i_a}$ para $j = 1, \ldots, s_a$.

Afirmação F: *Se $M_a \neq 1$ e $x_{k_{a,j},0}$ é uma indeterminada em M_a, então $x_{k_{a,j},0}$ é uma indeterminada em M'_a.*

Seja a um índice tal que $M_a \neq 1$ e seja $x_{k_{a,j},0}$ uma indeterminada em M_a. Lembrando que M e M' são monômios nas mesmas indeterminadas, existe um índice b tal que $x_{k_{a,j},0}$ é uma indeterminada em M'_b, neste caso $k_{a,j} = l_{b,j'}$ para algum $j' \leq t_b$. Assuma que $b \neq a$, então $\delta_{a,j} \neq \epsilon_{b,j'}$. De fato, se $\delta_{a,j} = \epsilon_{b,j'}$ então $x_{k_{a,j},0}^{\delta_{a,j}} = x_{l_{b,j'},0}^{\epsilon_{b,j'}}$. Assim, temos

$$\pm E_{i_a,i_a} = (x_{k_{a,j},0}^{\delta_{a,j}})_S = (x_{l_{b,j'},0}^{\epsilon_{b,j'}})_S = \pm E_{i_b,i_b}.$$

Como uma consequência, temos $i_a = i_b$, isso é uma contradição, já que $a \neq b$. Então, $\delta_{a,j} \neq \epsilon_{b,j'}$, portanto $x_{k_{a,j},0}^{\delta_{a,j}} = (x_{l_{b,j'},0}^{\epsilon_{b,j'}})^*$. Essa última igualdade implica que

$$\pm E_{i_a,i_a} = (x_{k_{a,j},0}^{\delta_{a,j}})_S = (x_{l_{b,j'},0}^{\epsilon_{b,j'}})_S^s = \pm E_{i_b,i_b}^s = \pm E_{2r+1-i_b,2r+1-i_b},$$

assim $i_a = 2r+1-i_b$. Se $a < b$, então $i_a < i_b$ e $E_{i_a,i_b} = E_{i_a,i_{a+1}} \cdots E_{i_{b-1},i_b}$ é homogêneo de grau $g = g_a + \cdots + g_{b-1}$. A igualdade $i_a = 2r+1-i_b$ implica que $\dim \mathcal{U}_g = 1$. Logo, segue da Condição II (se $b = a+1$) ou da Condição III (se $b > a+1$) na Definição 3.4.1 que $M_a = 1$, essa contradição vem do fato que $M_a \neq 1$. Se $b < a$, concluímos analogamente que $M'_b = 1$ o que é uma contradição. Logo, devemos ter $b = a$.

Afirmação G: *As igualdades*

$$M'_i = x_{k_{i,1},0}^{\epsilon_{i,1}} \cdots x_{k_{i,s_i},0}^{\epsilon_{i,s_i}},$$

valem para $i = 1, \ldots, k+1$.

Repetimos a prova da Afirmação F com as modificações necessárias, para provar que se $M'_a \neq 1$ para algum índice a, então toda indeterminada em M'_a é uma indeterminada em M_a. Logo, concluímos que M_a e M'_a são monômios nas mesmas indeterminadas para $a = 1, \ldots, k$. Isso junto com a Condição I na Definição 3.4.1 implica a Afirmação G.

Afirmação H: *$\delta_{a,j} = \epsilon_{a,j}$ para $1 \leq a \leq k+1$, $1 \leq j \leq s_a$.*

Note que $(x_{k_{a,j},0}^{\delta_{a,j}})_S = \pm E_{i_a,i_a} = (x_{k_{a,j},0}^{\epsilon_{a,j}})_S$. Assuma que $\delta_{a,j} \neq \epsilon_{a,j}$ para algum a e algum j. Então, temos $x_{k_{a,j},0}^{\delta_{a,j}} = (x_{k_{a,j},0}^{\epsilon_{a,j}})^*$, assim

$$\pm E_{i_a,i_a} = (x_{k_{a,j},0}^{\delta_{a,j}})_S = (x_{k_{a,j},0}^{\epsilon_{a,j}})_S^s = \pm E_{i_a,i_a}^s = E_{2r+1-i_a,2r+1-i_a}.$$

Portanto, concluímos que $2i_a = 2r+1$, isso é uma contradição. Então, $\delta_{a,j} = \epsilon_{a,j}$ para todo $1 \leq a \leq k+1$, $1 \leq j \leq s_a$ e a Afirmação H vale.

Claramente as afirmações acima implicam o resultado.

■

Lema 3.4.9. Sejam $G = \mathbb{Z}^r$ e $UT_{2r}(F)$ tendo a G-graduação mais fina e a involução simplética. O conjunto dos monômios bons de grau n geram o espaço vetorial $P_n^{G,*}$ módulo o $T_{G,*}$-ideal gerado pelas identidades

$$\begin{aligned}&[x_{1,0}, x_{2,0}],\\ &x_{1,g}^* + x_{1,g},\ \dim \mathcal{U}_g = 1,\end{aligned}$$

e os monômios em $T_{G,*}(UT_{2r}(F))$.

Demonstração: Seja J o $T_{G,*}$-ideal gerado pelas identidades acima junto com os monômios em $T_{G,*}(UT_{2r}(F))$ e seja M um monômio em $P_n^{G,*} \setminus T_{G,*}(UT_{2r})$. O monômio M em $P_n^{G,*}$ deve ser escrito como em (3.11). Agora, provaremos que M é congruente módulo J a um monômio que satisfaz as Condições (I)-(III) na Definição 3.4.1.

Para ajudar o leitor, adicionaremos uma condição por vez.

Condição (I)

Para a Condição (I), apenas usamos (3.6) para escrever M módulo J como um monômio que satisfaz essa condição.

Condição (II)

Se $\dim \mathcal{U}_{g_i} = 1$, então $x_{u_i,g_i}^* + x_{u_i,g_i}$ está em J, então substituímos x_{u_i,g_i}^* por x_{u_i,g_i}, se necessário, e assuma sem perda de generalidade que $\delta_i = \emptyset$. Note que

$$M_i x_{u_i,g_i} \equiv_J -x_{u_i,g_i}^* M_i^* \equiv_J x_{u_i,g_i} M_i^*,$$

portanto podemos obter um monômio que é congruente módulo J a M, e que satisfaz (I) e (II).

Condição (III)

Agora, assumimos que $\dim \mathcal{U}_g = 1$ para $g = g_i + g_{i+1} + \cdots + g_j$, onde $i < j$, neste caso $x_{1,g}^* + x_{1,g} \in J$. Então,

$$M_i x_{u_i,g_i}^{\delta_i} \cdots M_j x_{u_j,g_j}^{\delta_j} \equiv_J -(x_{u_j,g_j}^{\delta_j})^* M_j^* \cdots (x_{u_i,g_i}^{\delta_i})^* M_i^* \equiv_J x_{u_i,g_i}^{\delta_i} \cdots M_j x_{u_j,g_j}^{\delta_j} M_i^*,$$

portanto M é congruente módulo J a um monômio que satisfaz $(I) - (III)$.

■

Teorema 3.4.10. Seja $G = \mathbb{Z}^r$ e seja $\mathcal{U}$ a G-graduação mais fina em $UT_{2r}(F)$. As $(G,*)$-identidades da álgebra $UT_{2r}(F)$ com a graduação mais fina e involução simplética seguem das identidades

$$[x_{1,0}, x_{2,0}], \tag{3.13}$$
$$x_{1,g}^* + x_{1,g}, \ \dim \mathcal{U}_g = 1, \tag{3.14}$$

juntas com as identidades monomiais da forma $x_{1,g_1} \cdots x_{n,g_n}$, onde $n \leq 3$ e $g_i \neq 0$ para todo i. Além disso, as imagens dos monômios bons de grau n, sob a aplicação quociente canônica, formam uma base para $P_n^{G,*}/P_n^{G,*} \cap T_{G,*}(UT_{2r})$.

Demonstração: Seja J o $T_{G,*}$-ideal gerado pelas identidades (3.13), (3.14) e os monômios

$$x_{1,g_1} \cdots x_{n,g_n}, \tag{3.15}$$

em $T_{G,*}(UT_{2r}(F))$ com $g_i \neq 0$ para $i = 1, \ldots, n$ e $n \leq 3$. É simples verificar que os polinômios (3.13) e (3.14) se anulam sobre todas as substituições elementares e, portanto, obtermos $J \subseteq T_{G,*}(UT_{2r}(F))$. Resta provar a inclusão inversa. Provamos primeiro a seguinte afirmação.

Afirmação: *Os monômios bons são linearmente independentes módulo* $T_{G,*}(UT_{2r}(F))$.

Como na prova do Teorema 3.4.6 é suficiente provar que o conjunto $\mathcal{M}(T)$ dos monômios bons de grau n nas indeterminadas em

$$T = \{x_{1,h_1}, \ldots, x_{n,h_n} \mid h_1, \ldots, h_n \in G\}$$

é linearmente independente módulo $T_{G,*}(UT_{2r}(F))$. Seja k o número de índices l tal que $h_l \neq 0$. Se $k = 0$, então uma adaptação da prova do Lema 3.4.2 implica a afirmação, então assumimos que $k \geq 1$. Seja $f = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k M_k \in T_{G,*}(UT_{2r}(F))$ uma combinação linear de monômios bons dois a dois distintos $M_1, \ldots, M_t \in \mathcal{M}(T)$. Fixamos j e seja S_j uma substituição elementar tal que $(M_j)_{S_j} \neq 0$. Temos

$$0 = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k (M_k)_{S_j}.$$

Note que $(M_k)_{S_j}$ é zero ou, a menos de sinal, uma matriz elementar, além disso o Lema 3.4.8 implica que $(M_k)_{S_j} \neq \pm (M_j)_{S_j}$ para todo $k \neq j$. Portanto, concluímos que $\lambda_j = 0$. Isso prova a afirmação.

Agora, provaremos que $T_{G,*}(UT_{2r}(F)) \subseteq J$. Seja $f \in P_n^{G,*} \cap T_{G,*}(UT_{2r}(F))$. A Proposição 3.3.6 implica que todo monômio em $T_G(UT_{2r}(F))$ está em J, portanto o Lema 3.4.9 implica que podemos escrever f módulo J como uma combinação linear

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_i M_i,$$

de monômios bons $M_1, \ldots, M_t$ em $\mathcal{M}(T)$ para algum conjunto de indeterminadas T. Já que $\mathcal{M}(T)$ é linearmente independente módulo $T_{G,*}(UT_{2r}(F))$, concluímos que

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_l = 0.$$

Portanto, $f \in J$. Como o corpo é de característica zero, isso implica que $T_{G,*}(UT_{2r}(F)) \subseteq J$. ■

3.5 O Comportamento Assintótico para a $(G,*)$-Codimensão de $UT_m(F)$

Agora, determinaremos o comportamento assintótico para as $(G,*)$-codimensões de $UT_m(F)$ com a graduação mais fina e involução reflexão. Começamos determinando a fórmula exata para a $n-$ésima $(G,*)$-codimensão de $UT_2(F)$ e $UT_3(F)$. As seguinte observação é direta e será usada na prova do próximo resultado.

Observação 3.5.1. Uma matriz elementar de grau diferente de 0 em $UT_m(F)$ com a graduação mais fina está no radical de Jacobson de $UT_m(F)$, portanto o produto de m tais matrizes é zero. Como uma consequência no monômio bom em 3.4.1 o número k de indeterminadas de grau diferente de 0 é no máximo $m-1$.

Observação 3.5.2. No decorrer desta seção, iremos utilizar o símbolo δ para indicar a presença ou não de uma involução numa indeterminada. Assim, $\delta \in \{\emptyset, *\}$.

Proposição 3.5.3. Temos

$$c_n^{G,*}(UT_2(F)) = (n+2)2^{n-1},$$

pra $n \geq 1$. Além disso,

$$c_n^{G,*}(UT_3(F)) = 2n(n+5)3^{n-2} - (n-2)2^{n-1},$$

para $n \geq 1$.

Demonstração: Faremos um cálculo por vez.

Cálculo da $(G,*)$-codimensão para $UT_2(F)$

Note que o Teorema 3.4.6 implica que $c_n^{G,*}(UT_2(F))$ é o número dos monômios bons em $P_n^{G,*}$. Além disso, a Observação 3.5.1, feita acima, implica que o número de indeterminadas de grau diferente de 0 em um monômio bom é no máximo 1. Note que quando não há indeterminadas de grau diferente de 0, temos 2^n monômios bons. Assim, contaremos quantos monômios bons existem da forma $M_1 x_{u_1,g_1}^{\delta_1} M_2$ em $P_n^{G,*}$, aqui $g_1 \neq 0$ e

$$M_i = x_{k_{i,1},0}^{\delta_{i,1}} \cdots x_{k_{i,s_i},0}^{\delta_{i,s_i}},$$

para $i = 1, 2.$.

Calculemos, então, o número dos monômios bons com $k=1$ indeterminadas de grau diferente de 0: Como estamos em $UT_2(F)$, temos uma $\mathbb{Z}$-graduação em $UT_2(F)$, induzida por $(1,0)$, onde a única possibilidade para g_1 é 1. Assim, a Condição II na Definição 3.4.1 implica que $\delta_1 = \emptyset$ e $M_1 = 1$.

Então,

- Temos n possibilidades para u_1;
- Temos 2 possibilidades para cada $\delta_{2,1}, \ldots, \delta_{2,n-1}$.

Portanto, o número de monômios bons é $n2^{n-1}$.

Assim, o total de monômios bons é

$$n2^{n-1} + 2^n = (n+2)2^{n-1}.$$

E temos a igualdade desejada.

Cálculo da $(G,*)$-codimensão para $UT_3(F)$

Conforme já comentado no caso de $m = 2$, o Teorema 3.4.6 implica que $c_n^{G,*}(UT_3(F))$ é o número dos monômios bons em $P_n^{G,*}$ e a Observação 3.5.1 implica que o número de indeterminadas de grau diferente de 0 no monômio bom é no máximo 2.

Note que existem 2^n monômios bons com indeterminadas de grau 0 apenas. Resta-nos contar o número de monômios bons para com 1 e 2 indeterminadas de grau diferente de zero.

Número dos monômios bons com $k = 1$ indeterminadas de grau diferente de 0: Seja

$$M_1 x_{u_1,g_1}^{\delta_1} M_2, \tag{3.16}$$

um monômio bom em $P_n^{G,*}$, aqui $g_1 \neq 0$ e

$$M_i = x_{k_{i,1},0}^{\delta_{i,1}} \cdots x_{k_{i,s_i},0}^{\delta_{i,s_i}},$$

para $i = 1, 2$.

Como estamos em $UT_3(F)$, temos uma $\mathbb{Z}$-graduação em $UT_3(F)$ induzida por $(1, 0, -1)$ resultando em duas possibilidades para g_1: 1 ou 2.

Caso I: $g_1 = 1$

Neste caso, a Condição VII na Definição 3.4.1 implica que $\delta_{1,1} = \cdots = \delta_{1,s_1} = \emptyset$ ou $\delta_{2,1} = \cdots = \delta_{2,s_2} = \emptyset$.

Se $\delta_{1,1} = \cdots = \delta_{1,s_1} = \emptyset$, então temos:

- 2 possibilidades para δ_1;
- n possibilidades para u_1;

- Fixados s_1, s_2, temos $\binom{n-1}{s_1}$ possibilidades para $k_{1,1}, \dots, k_{1,s_1}, k_{2,1}, \dots, k_{2,s_2}$;

- Para cada $\delta_{2,j}(j \in \{1, \dots, s_2\})$, temos 2 possibilidades, isto é, um total de 2^{s_2}.

Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos que o número total de monômios bons neste caso é dado por:

$$\sum_{s_1+s_2=n-1} 2n\binom{n-1}{s_1}2^{s_2}.$$

Pelo Binômio de Newton, temos:

$$\begin{aligned} 3^{n-1} &= (2+1)^{n-1} \\ &= \sum_{s_1=0}^{n-1}\binom{n-1}{s_1}2^{(n-1)-s_1} \\ &= \sum_{s_1=0}^{n-1}\binom{n-1}{s_1}2^{s_2}. \end{aligned}$$

Assim, o número de monômios bons quando $\delta_{1,1} = \dots = \delta_{1,s_1} = \emptyset$ é dado por

$$\sum_{s_1+s_2=n-1} 2n\binom{n-1}{s_1}2^{s_2} = 2n\sum_{s_1+s_2=n-1}\binom{n-1}{s_1}2^{s_2} = 2n3^{n-1}.$$

De modo análogo, vemos que existem $2n3^{n-1}$ monômios bons, quando $\delta_{2,1} = \dots = \delta_{2,s_2} = \emptyset$.

Por fim, o número de monômios bons com

$$\delta_{1,1} = \dots = \delta_{1,s_1} = \emptyset = \delta_{2,1} = \dots = \delta_{2,s_2}$$

é

$$\sum_{s_1+s_2=n-1} 2n\binom{n-1}{s_1}.$$

Usando novamente o Binômio de Newton, obtemos:

$$\begin{aligned}2^{n-1} =&(1+1)^{n-1}\\ =&\sum_{s_1=0}^{n-1}\binom{n-1}{s_1}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{s_1+s_2=n-1} 2n\binom{n-1}{s_1} = 2n2^{n-1}.$$

Portanto, o número de total de monômios bons no **Caso I** é o número de monômios bons quando $\delta_{1,1} = \cdots = \delta_{1,s_1} = \emptyset$, junto ao número de monômios bons quando $\delta_{2,1} = \cdots = \delta_{2,s_2} = \emptyset$. $2n3^{n-1} + 2n3^{n-1}$, menos o número de monômios quando ambos ocorrem. Isto é, o número de monômios bons no **Caso I** é:

$$4n3^{n-1} - 2n2^{n-1}.$$

Caso II: $g_1 = 2$

Neste caso, a Condição II na Definição 3.4.1 implica que $M_1 = 1$ e $\delta_1 = \emptyset$.

Assim,

- Existem n possibilidades para u_1;
- Existem 2 possibilidades para cada $\delta_{2,j}$, $1 \leq j \leq s_2 = n-1$.

Portanto, o número de monômios bons no **Caso II** é

$$n2^{n-1}.$$

Juntando os dois casos, concluímos que **o número de monômios bons em (3.16) com $k=1$ indeterminadas de grau diferente de 0 é $4n3^{n-1} - n2^{n-1}$.**

Número dos monômios bons com $k=2$ indeterminadas de grau diferente de 0: Neste caso, existem 2 indeterminadas de grau 1.

Seja

$$M_1x_{u_1,1}^{\delta_1}M_2x_{u_2,1}^{\delta_2}M_3, \tag{3.17}$$

um bom monômio em $P_n^{G,*}$, onde

$$M_i = x_{k_{i,1},0}^{\delta_{i,1}} \cdots x_{k_{i,s_i},0}^{\delta_{i,s_i}},$$

para $i = 1, 2, 3$.

As Condições III e IV na Definição 3.4.1 implicam que $M_1 = 1$, $\delta_{2,1} = \cdots = \delta_{2,s_2} = \emptyset$ e $u_1 < u_2$.

Vamos agora contar quantos monômios bons da forma 3.17 existem.

- Existem 2 possibilidades para δ_1;
- Existem 2 possibilidades para δ_2;
- Existem $\binom{n}{2}$ possibilidades para o par (u_1, u_2);
- Fixados s_2, s_3, existem $\binom{n-2}{s_2}$ escolhas para os índices $k_{2,1}, \ldots, k_{2,s_2}$; $k_{3,1}, \ldots, k_{3,s_3}$;
- Existem 2 escolhas para $\delta_{3,j}$, $j = 1, \ldots, s_3$.

Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de total de monômios bons em (3.17) é

$$\sum_{s_2+s_3=n-2} 4\binom{n}{2}\binom{n-2}{s_2}2^{s_3} = 2n(n-1)\sum_{s_2+s_3=n-2}\binom{n-2}{s_2}2^{s_3}.$$

Usando o Binômio de Newton,

$$\begin{aligned} 3^{n-2} = (1+2)^{n-2} &= \sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}1^{(n-2)-i}2^i \\ &= \sum_{s_2+s_3=n-2}\binom{n-2}{s_2}2^{s_3}. \end{aligned}$$

Deste modo, o número de monômios bons no **Caso II** é

$$2n(n-1)3^{n-2}.$$

Então, concluímos que

$$c_n^{G,*}(UT_3(F)) = 2^n + (4n3^{n-1} - n2^{n-1}) + 2n(n-1)3^{n-2},$$

e isso nos dá o resultado desejado.

■

Lema 3.5.4. O número de monômios bons em $P_n^{G,*}$ com $m-1$ indeterminadas de grau diferente de 0 é
$$2^{\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor}\frac{n!}{(n-m+1)!}m^{n-m+1},$$
para todo $n \geq m-1$.

Demonstração:

Seja

$$M_1 x_{u_1,g_1}^{\delta_1} M_2 x_{u_2,g_2}^{\delta_2} \cdots M_k x_{u_{m-1},g_{m-1}}^{\delta_{m-1}} M_m, \tag{3.18}$$

um monômio bom em $P_n^{G,*}$, onde $g_1, \ldots, g_{m-1} \neq 0$ e

$$M_i = x_{k_{i,1},0}^{\delta_{i,1}} \cdots x_{k_{i,s_i},0}^{\delta_{i,s_i}}.$$

Note que o único produto de $m-1$ matrizes elementares de grau diferente de 0 que não resulta em 0 é

$$E_{1,2}E_{2,3}\cdots E_{m-1,m}.$$

Logo, neste caso g_i é o grau de $E_{i,i+1}$ para $i = 1, \ldots, m-1$. Consideremos dois casos.

Caso I: $m = 2r+1$

Neste caso, as Condições III e IV na Definição 3.4.1 implicam que $M_1 = \cdots = M_r = 1$, as indeterminadas em M_{r+1} não tem $*$ e $u_i < u_{2r+1-i}$ para $i = 1, \ldots, r$. Contemos o número de monômios em (3.18) para $s_{r+1}, \ldots, s_{2r+1}$ fixados. O número de escolhas para $u_1, \ldots, u_{2r}$ é $\frac{n!}{2^r(n-2r)!}$ e o número de escolhas para $\delta_1, \ldots, \delta_{2r}$ é 2^{2r}. Para os índices,

$$k_{i,1}, \ldots, k_{i,s_i}\ , i = r+1, \ldots, 2r+1,$$

o número de escolhas é igual a

$$\binom{n-2r}{s_{r+1}, s_{r+2}, \ldots, s_{2r+1}}.$$

Existem 2 escolhas para cada $\delta_{i,j}$, $1 \leq j \leq s_i$, $i = r+2, r+3, \ldots, 2r+1$. Portanto, o número de monômios bons em (3.4.1), neste caso para $s_{r+1}, \ldots, s_{2r+1}$ fixados é

$$\frac{n!}{2^r(n-2r)!} \cdot 2^{2r} \cdot \binom{n-2r}{s_{r+1}, s_{r+2}, \ldots, s_{2r+1}} 2^{s_{r+2}} 2^{s_{r+3}} \cdots 2^{s_{2r+1}}.$$

Usando o teorema multinomial, temos:

$$\begin{aligned}(2r+1)^{n-2r} &= (2+\cdots+2+1)^{n-2r}\\ &= \sum_{s_{r+1}+\cdots+s_{2r}=n-2r} \binom{n-2}{s_{r+1}, \ldots, s_{2r+1}} 1^{s_{r+1}} 2^{s_{r+2}} \cdots 2^{s_{2r+1}}.\end{aligned}$$

Portanto, obtemos que o número de monômios bons em (3.18) é igual a

$$\begin{aligned}&\frac{2^r n!}{(n-2r)!} \sum_{s_{r+1}+\cdots+s_{2r}=n-2r} \binom{n-2r}{s_{r+1}, s_{r+2}, \ldots, s_{2r+1}} 2^{s_{r+2}} 2^{s_{r+3}} \cdots 2^{s_{2r+1}}\\ &= \frac{2^r n!}{(n-2r)!}(2r+1)^{n-2r}.\end{aligned}$$

Caso II: $m = 2r$

Para $m = 2r$, argumentamos analogamente, neste caso as Condições II e III na Definição 3.4.1 implicam que $M_1 = \cdots = M_r = 1$, $\delta_r = \emptyset$ e $u_i < u_{2r-i}$ para $i = 1, \ldots, r-1$, assim o número total de monômios bons em (3.18) neste caso é

$$\begin{aligned}&\frac{2^{2r-2} n!}{2^{r-1}(n-2r+1)!} \sum_{s_{r+1}+\cdots+s_{2r-1}=n-2r+1} \binom{n-2r+1}{s_{r+1}, s_{r+1}, \ldots, s_{2r}} 2^{s_{r+1}} 2^{s_{r+2}} \cdots 2^{s_{2r}}\\ &= \frac{2^{r-1} n!}{(n-2r+1)!}(2r)^{n-2r+1}.\end{aligned}$$

■

Lema 3.5.5. Seja $N_k(n)$ o número de monômios bons, para $UT_m(F)$, em $P_n^{G,*}$ com k indeterminadas de grau diferente de 0. Se $m \geq 4$, então

$$N_k(n) \leq (2C)^k \frac{n!}{(n-k)!} m^{n-k},$$

para todo $n \geq k$, onde C é o número de elementos no suporte da graduação mais fina de $UT_m(F)$.

Demonstração: A desigualdade acima claramente vale para $k = 0$. Como $m \geq 4$, também vale para $k = 1$. De fato, neste caso, os monômios são da forma

$$M_1 x_{u_1,g_1}^{\delta_1} M_2,$$

onde $M_i = x_{k_{i,1},0}^{\delta_{i,1}} \cdots x_{k_{i,s_i},0}^{\delta_{i,s_i}}$.

Note que temos:

- n possibilidades para u_1;
- Fixado s_1, temos $\binom{n-1}{s_1}$ possibilidades para $k_{1,1}, \ldots, k_{1,s_1}, k_{2,1}, \ldots, k_{2,s_2}$;
- Para cada $\delta_{1,1}, \ldots, \delta_{1,s_1}, \delta_{2,1}, \ldots, \delta_{2,s_2}$, temos 2 possibilidades, isto é, um total de 2^{n-1};
- $\delta_1 \in \{\varnothing, *\}$;
- g_1 com o número possibilidade menor que C.

Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos que o número total de monômios bons neste caso é menor que:

$$\sum_{s_1=0}^{n-1} 2nC \binom{n-1}{s_1} 2^{n-1}.$$

Assim,

$$N_1(n) \leq 2Cn4^{n-1} \leq 2Cnm^{n-1}.$$

Assumiremos agora que $k \geq 2$. Seja $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_k)$ uma k-upla de elementos de $G = \mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$ e seja $N_{\mathbf{g}}(n)$ o número de monômios bons em $P_n^{G,*}$ da forma

$$M_1 x_{u_1,g_1}^{\delta_1} M_2 x_{u_2,g_2}^{\delta_2} \cdots M_k x_{u_k,g_k}^{\delta_k} M_{k+1}, \tag{3.19}$$

onde

$$M_i = x_{k_{i,1},0}^{\delta_{i,1}} \cdots x_{k_{i,s_i},0}^{\delta_{i,s_i}}.$$

O resultado segue se provarmos que

$$N_{\mathbf{g}}(n) \leq 2^k \frac{n!}{(n-k)!} m^{n-k}, \tag{3.20}$$

para $n \geq k$, pois para cada g_i da k-upla $\mathbf{g}$, temos C possibilidades de escolha, resultando no desejado.

Assumimos que o monômio em (3.19) não é uma identidade para $UT_m(F)$, logo o Corolário 3.3.4 implica que

$$M = x_{u_1,g_1} x_{u_2,g_2} \cdots x_{u_k,g_k},$$

não é uma identidade para $UT_m(F)$. Lembrando que $k \geq 2$, logo, por ser multilinear, segue do Lema 3.2.9 que existe uma única substituição $S = (E_{i_1,i_2}, E_{i_2,i_3}, \ldots, E_{i_k,i_{k+1}})$ tal que $M_S \neq 0$. Então, $g_l = \deg E_{i_l,i_{l+1}}$ para $l = 1, \ldots, k$. Denotemos por $\mathbf{i}$ a sequência $i_1 < i_2 < \cdots < i_k < i_{k+1}$ obtida da k-upla $\mathbf{g}$ desta forma.

Agora, estabeleceremos a notação, baseada na sequência $\mathbf{i}$, que será necessária na prova do lema. Seja t o número de elementos no conjunto I de índices a, tais que existe b com $1 \leq a < b \leq k+1$ e $i_a + i_b = m+1$, além disso sejam $j_1 < j_2 < \cdots < j_{k+1-t}$ os índices no complemento de I. Note que para cada $a \in I$, segue que $g = g_a + g_{a+1} + \cdots + g_{b-1}$ é o grau da matriz E_{i_a,i_b}, como $E^*_{i_a,i_b} = E_{i_a,i_b}$, concluímos que a componente homogênea indexada por g tem dimensão 1. Então, as Condições II e III na Definição 3.4.1 implicam que $M_a = 1$, em (3.19). Além disso, denotamos $w(\mathbf{i}) := k+1-t$ e nos referimos a esse número como o peso de $\mathbf{i}$.

Obtemos uma limitação superior para $N_{\mathbf{g}}(n)$, contando o número de monômios em (3.19), tais que $M_a = 1$ sempre que $a \in I$. O número de escolhas para $u_1, \ldots, u_k$ é $\frac{n!}{(n-k)!}$, para $\delta_1, \ldots, \delta_k$ existem 2^k escolhas. Os índices $k_{j_l,1}, \ldots, k_{j_l,s_{j_l}}$, $l = 1, \ldots, k+t-1$ podemos escolher de $\binom{n-k}{s_{j_1},\ldots,s_{j_{k+1-t}}}$ maneiras e existem $2^{s_{j_l}}$ escolhas para $\delta_{j_l,1}, \ldots, \delta_{j_l,s_{j_l}}$, $j = 1, \ldots, l$. Portanto, o número de monômios bons neste caso para $s_{j_1}, \ldots, s_{j_{k+1-t}}$ dados é no máximo

$$2^k \frac{n!}{(n-k)!} \binom{n-k}{s_{j_1}, \ldots, s_{j_{k+1-t}}} 2^{s_{j_1}} 2^{s_{j_2}} \cdots 2^{s_{j_{k+1-t}}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{g}}(n) &\leq 2^k \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{s_{j_1}+\cdots+s_{j_{k+1-t}}=n-k} \binom{n-k}{s_{j_1},\ldots,s_{j_{k+1-t}}} 2^{s_{j_1}} 2^{s_{j_2}} \cdots 2^{s_{j_{k+1-t}}} \\ &= 2^k \frac{n!}{(n-k)!}(2(k+1-t))^{n-k}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Note que adicionar uma entrada para uma sequência não decresce seu peso, portanto $w(\mathbf{i})$ não é maior que o peso da sequência $1 < 2 < \cdots < m$. Logo, concluímos que $w(\mathbf{i}) \leq r+1$, onde $r = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. Se $w(\mathbf{i}) \leq r$, então a desigualdade (3.21) implica que

$$N_{\mathbf{g}}(n) \leq 2^k \frac{n!}{(n-k)!}(2r)^{n-k} \leq 2^k \frac{n!}{(n-k)!} m^{n-k},$$

portanto a desigualdade (3.20) vale neste caso.

Agora, assuma que $w(\mathbf{i}) = r+1$, afirmamos que $m = 2r+1$ e $r+1$ é uma entrada em $\mathbf{i}$. De fato, se $m = 2r$ o peso de $1, 2, \ldots, 2r$ é r, logo $w(\mathbf{i}) \leq r$. Isso implica que $m = 2r+1$. A sequência sem $r+1$, com o maior peso é $1, 2, \cdots, r, r+2, r+3, \ldots, 2r+1$, o peso dessa sequência é r. Portanto, $w(\mathbf{i}') \leq r$ se $r+1$ não é uma entrada em $\mathbf{i}'$. Deste modo, $r+1$ é uma entrada em $\mathbf{i}$. Então, as Condições IV-VI na Definição 3.4.1 implicam que $\delta_{j_w,1} = \cdots = \delta_{j_w,s_w} = \emptyset$ para algum w. Portanto

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{g}}(n) &\leq 2^k \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{s_{j_1}+\cdots+s_{j_{r+1}}=n-k} \binom{n-k}{s_{j_1},\ldots,s_{j_{r+1}}} 2^{s_{j_1}} \cdots 2^{s_{j_{w-1}}} 2^{s_{j_{w+1}}} \cdots 2^{s_{r+1}} \\ &= 2^k \frac{n!}{(n-k)!}(2r+1)^{n-k}, \end{aligned}$$

então (3.20) também vale neste caso. ■

Teorema 3.5.6. Para $UT_m(F)$, $m \geq 2$, com a graduação mais fina e a involução reflexão $\circledast$, temos

$$c_n^{G,*}(UT_m(F)) \sim K_m \, n^{m-1} m^n,$$

onde $K_m = \frac{2^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor}}{m^{m-1}}$. Em particular,

$$\exp^{G,*}(UT_m(F)) = m.$$

Demonstração: O Teorema 3.4.6 implica que $c_n^{G,*}(UT_m(F))$ é o número de monômios bons em $P_n^{G,*}$. Seja $N_k(n)$ o número de monômios bons em $P_n^{G,*}$ em k indeterminadas de grau diferente de 0, então a Observação 3.5.1 implica que

$$c_n^{G,*}(UT_m(F)) = N_0(n) + \cdots + N_{m-1}(n).$$

O resultado para $m = 2, 3$ segue da Proposição 3.5.3. Assumamos que $m \geq 4$.

O Lema 3.5.5 implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_k(n)}{n^{m-1}m^n} = 0,$$

para $k < m - 1$. O Lema 3.5.4 implica que

$$N_{m-1}(n) = 2^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{n!}{(n-m+1)!} m^{n-m+1},$$

para $n \geq m - 1$. Portanto, concluímos que

$$c_n^{G,*}(UT_m(F)) \sim N_{m-1}(n) \sim \left(\frac{2^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor}}{m^{m-1}} \right) n^{m-1} m^n.$$

■

Uma adaptação da prova do teorema acima prova o seguinte resultado.

Teorema 3.5.7. Para $UT_{2r}(F)$, com a graduação mais fina e involução simplética s, temos:

$$c_n^{G,*}(UT_{2r}(F)) \sim \left(\frac{1}{2^r r^{2r-1}} \right) n^{2r-1} (2r)^n.$$

Em particular,

$$\exp^{G,*}(UT_{2r}(F)) = 2r.$$

Como uma consequência da Proposição 3.1.16, do Teorema 3.5.6 e do Teorema 3.5.7, obtermos o seguinte resultado.

Corolário 3.5.8. Para uma G-graduação arbitrária em $UT_m(F)$ e involução graduada $*$, temos $\exp^{G,*}(UT_m(F)) = m$.

3.6 Identidades Graduadas com Involução para $UT_3(F)$

Nosso objetivo nesta seção é descrever as G-graduações em $UT_3(F)$ que admitem involução graduada, para um dado grupo G. Ora, comecemos analisando as possíveis graduações, dependendo das características do grupo.

Se o grupo G não tem elementos de ordem 2, então as únicas duas possibilidades de G-graduações (a menos de equivalência) são a graduação trivial e a graduação mais fina já vista neste capítulo. Se G tem elementos de ordem 2, então ele admite G-graduações equivalentes a $\mathbb{Z}_2$-graduação em $UT_3(F)$ induzida por $(0,1,0)$. Tal graduação admite, como uma involução graduada, a menos de equivalência, a involução reflexão. Descreveremos as identidades $(\mathbb{Z}_2,*)$-graduadas neste caso.

Consideremos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned}
Y^+ &= \{y_1^+, y_2^+, \dots\},\\
Y^- &= \{y_1^-, y_2^-, \dots\},\\
Z^+ &= \{z_1^+, z_2^+, \dots\},\\
Z^- &= \{z_1^-, z_2^-, \dots\},
\end{aligned}$$

todos eles enumeráveis, infinitos e dois a dois disjuntos. Ademais, tomemos $Y = Y^+ \cup Y^-$, $Z = Z^+ \cup Z^-$. Seja $F\langle Y \cup Z, *\rangle$ a álgebra livre livremente gerada por $Y \cup Z$ com a $\mathbb{Z}_2$-graduação, tal que as indeterminadas em Y tem grau 0 e as indeterminadas em Z tem grau 1, e involução $*$, tais que as indeterminadas em Y^+, Z^+ são simétricas e as indeterminadas em Y^-, Z^- são antissimétricas. Então $F\langle Y \cup Z, *\rangle$ é a álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada livre com involução graduada $*$.

Definição 3.6.1. Um polinômio em $F\langle Y \cup Z, *\rangle$ é Y^+-próprio se é uma combinação linear de polinômios da forma

$$(y_1^-)^{q_1}\cdots(y_b^-)^{q_b}(z_1^+)^{r_1}\cdots(z_c^+)^{r_c}(z_1^-)^{s_1}\cdots(z_d^-)^{s_d}u_1^{t_1}\cdots u_e^{t_e},$$

onde q_i, r_i, s_i, t_i são inteiros não-negativos e $u_1, \dots, u_e$ são comutadores normados à esquerda (de grau ≥ 2) de indeterminadas em $Y \cup Z$.

Seja Γ o subespaço de $F\langle Y \cup Z, *\rangle$ de polinômios Y^+-próprios. Como no caso de álgebras (não graduadas) com involução, como $\operatorname{char} F = 0$, qualquer $T_{\mathbb{Z}_2,*}$-ideal é gerado pelos seus polinômios multilineares Y^+-próprios multilineares, a prova segue de perto o de álgebras com involução e pode ser encontrada em [14], no Teorema 3.3.

Lembremos que $P_n^{\mathbb{Z}_2,*}$ é o subespaço de $F\langle Y \cup Z\rangle$ dos polinômios multilineares de grau n nas indeterminadas em $Y \cup Z$, tais que em cada monômio os índices i aparecem uma vez para $i = 1, \ldots, n$, também definimos $\Gamma_n = \Gamma \cap P_n^{\mathbb{Z}_2,*}$.

Definição 3.6.2. Seja A uma $\mathbb{Z}_2$-álgebra graduada com involução graduada. Definimos $\Gamma_n(A) = \Gamma_n/\Gamma_n \cap T_{\mathbb{Z}_2,*}(A)$, a n-ésima codimensão Y^+-própria de A é $\dim \Gamma_n(A)$ e é denotada por $\gamma_n^{\mathbb{Z}_2,*}(A)$.

No próximo resultado, temos uma relação entre a codimensão $c_n^{\mathbb{Z}_2,*}(A)$ e a codimensão própria de $\gamma_n^{\mathbb{Z}_2,*}(A)$. A prova é similar ao caso de álgebras (não graduadas) com involução (ver [22, Teorema 2.3]) e será omitida.

Proposição 3.6.3. Seja A uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada com involução graduada $*$. A sequência de codimensões $c_n^{\mathbb{Z}_2,*}(A)$ e a sequência de codimensões própria $\gamma_n^{\mathbb{Z}_2,*}(A)$ são relacionadas pela seguinte igualdade

$$c_n^{\mathbb{Z}_2,*}(A) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \gamma_n^{\mathbb{Z}_2,*}(A).$$

Nesta seção consideremos $\mathcal{U} = UT_3(F)$ com a $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida por $(0,1,0)$ e a involução reflexão. Então,

$$\mathcal{U}_0^+ = \langle E_{1,1} + E_{3,3}, E_{2,2}, E_{1,3} \rangle, \quad \mathcal{U}_0^- = \langle E_{1,1} - E_{3,3}, \rangle$$
$$\mathcal{U}_1^+ = \langle E_{1,2} + E_{2,3} \rangle, \quad \mathcal{U}_1^- = \langle E_{1,2} - E_{2,3} \rangle.$$

Buscando encontrar uma base para as $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades de $\mathcal{U} = UT_3(F)$, o primeiro passo é encontrar polinômios que sejam $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades. Isso será feito através do lema a seguir, no qual os elementos de Z sem índices superiores $+$ ou $-$ indicam elementos quaisquer de Z.

Lema 3.6.4. Os polinômios

$$x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1,\ x_1, x_3, \text{ ambos estão em um dos subconjuntos } Y^-, Z^+, Z^- \tag{3.22}$$
$$z_1z_2z_3 \tag{3.23}$$
$$[x_1, x_2],\ x_1, x_2, \text{ ambos estão em um dos subconjuntos } Y^+, Y^-, Z^+, Z^- \tag{3.24}$$
$$[y_1^+, y_2^-][x_3, x_4] \tag{3.25}$$
$$[y_1^+, z_1z_2] \tag{3.26}$$
$$[y_1^+, y_2^-]z_3,\ z_3[y_1^+, y_2^-] \tag{3.27}$$
$$[y_1^+, y_2^-]y_3^- + y_3^-[y_1^+, y_2^-] \tag{3.28}$$
$$y_1^- z_1 y_2^- \tag{3.29}$$
$$z_1 y_1^- z_2 \tag{3.30}$$
$$z_1^+ z_2^- + z_2^- z_1^+ \tag{3.31}$$
$$z_1z_2y_1^- + y_1^- z_1 z_2 \tag{3.32}$$

são identidades graduadas com involução para $UT_3(F)$.

Demonstração: Analisemos um polinômio por vez. Além disso, estamos fixando as bases $\{E_{1,1}+E_{3,3}, E_{2,2}, E_{1,3}\}$, $\{E_{1,1}-E_{3,3}\}$, $\{E_{1,2}+E_{2,3}\}$ e $\{E_{1,2}-E_{2,3}\}$ para os subespaços Y^+, Y^-, Z^+ e Z^-, respectivamente. Como nossos polinômios são multilineares, basta que consideremos na nossa demonstração elementos destas bases. Além disso, como Y^-, Z^+ e Z^- tem dimensão um, a variável só pode ser substituída por um único elemento que é o da base.

Dados $y^+ \in Y^+, y^- \in Y^-, z^+ \in Z^+$ e $z^- \in Z^-$, consideraremos no decorrer da demonstração as seguintes substituições:

$$(y^+)_{S_1} = \alpha E_{1,1} + \alpha E_{3,3} + \beta E_{2,2} + \gamma E_{1,3}, \text{ onde } \alpha, \beta \text{ e } \gamma \text{ são escalares,}$$
$$(y^-)_{S_2} = E_{1,1} - E_{3,3},$$
$$(z^+)_{S_3} = E_{1,2} + E_{2,3},$$
$$(z^-)_{S_4} = E_{1,2} - E_{2,3}.$$

No decorrer da demonstração, utilizaremos apenas S para denotar as substituições, embora tenhamos em mente que para cada subespaço a substituição seja diferente, como mostrado agora.

Polinômio 3.22: $x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1$, x_1, x_3 ambos estão em um dos subconjuntos

Y^-, Z^+, Z^-.

Como $(x_1)_S = (x_3)_S$, segue que $(x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1)_S = 0$. Assim, o polinômio (3.22) é uma $(G,*)$-identidade para $UT_3(F)$.

Polinômio 3.23: $z_1z_2z_3$

Se $z_1, z_2, z_3 \in Z = Z^+ \cup Z^-$, então temos que $(z_1z_2)_S = \pm E_{1,3}$. Assim, $(z_1z_2z_3)_S = 0$.

Segue que o polinômio (3.23) é uma $(G,*)$-identidade para $UT_3(F)$.

Polinômio 3.24: $[x_1, x_2]$, x_1, x_2, ambos estão em um dos subconjuntos Y^+, Y^-, Z^+, Z^-

Quando x_1 e x_2 estão nos subconjuntos Y^-, Z^+ ou Z^-, claramente o comutador é nulo, pois x_1 e x_2 são substituídos pelos mesmos elementos. Quando x_1 e x_2 estão no subconjunto Y^+, como temos duas variáveis e elas podem possuir variáveis diferentes, consideremos

$$(x_1)_S = \alpha(E_{1,1} + E_{3,3}) + \beta E_{2,2} + \gamma E_{1,3} \text{ e } (x_2)_S = \alpha(E_{1,1} + E_{3,3}) + \beta E_{2,2} + \gamma E_{1,3},$$

onde α, β e γ são escalares. Neste caso, facilmente temos também $([x_1, x_2])_S = 0$.

Deste modo, o polinômio (3.24) é uma $(G,*)$-identidade para $UT_3(F)$.

Polinômio 3.25: $[y_1^+, y_2^-][x_3, x_4]$

Note que:

$$\begin{aligned}(y_1^+y_2^-)_S &= (\alpha(E_{1,1} + E_{3,3}) + \beta E_{2,2} + \gamma E_{1,3})(E_{1,1} - E_{3,3}) \\ &= \alpha(E_{1,1} - E_{3,3}) - \gamma E_{1,3}.\end{aligned}$$

e, de modo análogo,

$$(y_2^-y_1^+)_S = \alpha(E_{1,1} - E_{3,3}) + \gamma E_{1,3}.$$

Segue que,

$$([y_1^+, y_2^-])_S = -2\gamma E_{1,3}.$$

Facilmente vemos que quando substituições no segundo comutador são não-nulas, temos $([x_3, x_4])_S = \pm 2E_{1,3}$. Assim, $([y_1^+, y_2^-][x_3, x_4])_S = 0$. Logo, o nosso polinômio (3.25) é uma $(G, *)$-identidade para $UT_3(F)$.

Polinômio 3.26: $[y_1^+, z_1 z_2]$

Inicialmente, como já observado na segunda identidade $(z_1 z_2)_S = \pm E_{1,3}$. Além disso, dado $\eta \in \{1, -1\}$, veja que

$$(\alpha(E_{1,1} + E_{3,3}) + \beta E_{2,2} + \gamma E_{1,3}) \cdot (\eta E_{1,3}) = \eta \alpha E_{1,3}, \tag{3.33}$$

e

$$\eta E_{1,3} \cdot (\alpha(E_{1,1} + E_{3,3}) + \beta E_{2,2} + \gamma E_{1,3}) = \eta \alpha E_{1,3}. \tag{3.34}$$

Como em 3.33 e 3.34 temos o mesmo valor, concluímos que o polinômio (3.26) é uma $(G, *)$-identidade para $UT_3(F)$.

Polinômio 3.27: $[y_1^+, y_2^-]z_3, z_3[y_1^+, y_2^-]$

Já vimos que $([y_1^+, y_2^-])_S$ é um múltiplo escalar de $E_{1,3}$. Então, como $(z_3)_S = E_{1,2} + E_{2,3}$ ou $(z_3)_S = E_{1,2} - E_{2,3}$, segue que o polinômio (3.27) é uma $(G, *)$-identidade para $UT_3(F)$.

Polinômio 3.28: $[y_1^+, y_2^-]y_3^- + y_3^-[y_1^+, y_2^-]$

Como $([y_1^+, y_2^-])_S$ é um múltiplo escalar de $E_{1,3}$ e $(y_3^-)_S = E_{1,1} - E_{3,3}$, temos que o polinômio (3.28) é uma $(G, *)$-identidade para $UT_3(F)$.

Polinômio 3.29: $y_1^- z_1 y_2^-$

Basta notar que

$$(y_1^- z_1 y_2^-)_S = (E_{1,1} - E_{3,3})(E_{1,2} \pm E_{2,3})(E_{1,1} - E_{3,3}) = 0.$$

Assim, o polinômio (3.29) é uma $(G, *)$-identidade para $UT_3(F)$.

Polinômio 3.30: $z_1 y_1^- z_2$

Como

$$(z_1y_1^-)_S = (E_{1,2} \pm E_{2,3})(E_{1,1} \pm E_{3,3}) = \pm E_{2,3},$$

segue que o polinômio (3.30) é uma $(G,*)$-identidade para $UT_3(F)$.

Polinômio 3.31: $z_1^+z_2^- + z_2^-z_1^+$

Basta notar que

$$(z_1^+z_2^- + z_2^-z_1^+)_S = (E_{1,2}+E_{2,3})(E_{1,2}-E_{2,3})-(E_{1,2}-E_{2,3})(E_{1,2}+E_{2,3}) = E_{1,3}-E_{1,3} = 0.$$

Assim, o polinômio (3.31) é uma $(G,*)$-identidade para $UT_3(F)$.

Polinômio 3.32: $z_1z_2y_1^- + y_1^-z_1z_2$

Como $(z_1z_2)_S = \pm E_{1,3}$, segue que

$$(z_1z_2y_1^- + y_1^-z_1z_2)_S = \pm E_{1,3}(E_{1,1} - E_{3,3}) + (E_{1,1} - E_{3,3}) \pm E_{1,3},$$

onde nas duas parcelas o sinal de $E_{1,3}$ será necessariamente o mesmo. Diante disso,

$$(z_1z_2y_1^- + y_1^-z_1z_2)_S = \pm(-E_{1,3} + E_{1,3}) = 0.$$

Então, o polinômio (3.32) é uma $(G,*)$-identidade para $UT_3(F)$.

■

No próximo teorema, verificaremos que os polinômios desse lema que acabamos de demonstrar, formam uma base para as $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para $\mathcal{U} = UT_3(F)$.

Teorema 3.6.5. Os polinômios (3.22)-(3.32) formam uma base para as $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para $\mathcal{U} = UT_3(F)$ com a $\mathbb{Z}_2$-graduação elementar induzida por $(0,1,0)$ e a involução reflexão.

Demonstração: Seja I o $T_{(\mathbb{Z}_2,*)}$-ideal gerado pelos polinômios (3.22)-(3.32). O Lema 3.6.4 implica que $I \subseteq T_{\mathbb{Z}_2,*}(\mathcal{U})$. Como o corpo é de característica zero, sabemos que qualquer $T_{\mathbb{Z}_2,*}$-ideal é gerado pelos seus polinômios multilineares Y^+-próprios multilineares, logo para provar que $I = T_{\mathbb{Z}_2,*}(\mathcal{U})$ é suficiente provarmos que $\Gamma_n \cap T_{\mathbb{Z}_2,*}(\mathcal{U}) \subseteq I$.

Seja f um polinômio em $\Gamma_n \cap T_{\mathbb{Z}_2,*}(\mathcal{U})$. Se o número de indeterminadas em f de grau ímpar é maior que 2, então f é uma consequência de (3.23), logo f está em I.

O resto da prova é feita em três casos: quando f possui apenas indeterminadas pares, quando f possui exatamente 1 indeterminada ímpar e, por fim, quando f possui exatamente 2 indeterminadas ímpares.

Caso 1: f é um polinômio em indeterminadas pares apenas.

Como f possui apenas indeterminadas pares e é Y^+-próprio, f é uma combinação linear de polinômios da forma

$$y_{k_1}^- \cdots y_{k_r}^- u_1 \cdots u_s, \tag{3.35}$$

onde $u_1, \ldots, u_s$ são comutadores em indeterminadas pares.

Se todas as suas indeterminadas forem antissimétricas, então pela identidade (3.24), as parcelas de f que tiverem comutadores estão em I, sendo, portanto, congruentes a 0, módulo I. Já as parcelas sem comutadores, devido a (3.24) podemos reordenar as indeterminadas, donde obtermos que f é congruente módulo I a um múltiplo escalar de

$$y_1^- \cdots y_n^-. \tag{3.36}$$

Seja α o escalar, tal que $f \equiv_I \alpha y_1^- \cdots y_n^-$. Como $f \in T_{\mathbb{Z}_2,*}(\mathcal{U})$ e $I \subseteq T_{\mathbb{Z}_2,*}(\mathcal{U})$, concluímos que $\alpha y_1^- \cdots y_n^- \in T_{\mathbb{Z}_2,*}(\mathcal{U})$. O monômio (3.36) não é uma identidade para $\mathcal{U}$, assim concluímos que $\alpha = 0$. Portanto, $f \in I$.

Agora, assuma que f tem indeterminadas simétricas. Como f é Y^+-próprio, se ele é um polinômio apenas em indeterminadas simétricas pares, então ele é uma consequência de (3.24), portanto ele está em I. Então, assumimos que f tem indeterminadas simétricas e antissimétricas.

Sejam $y_{i_1}^-, \ldots, y_{i_a}^-, y_{j_1}^+, \ldots, y_{j_b}^+$, com $a, b > 0$, as indeterminadas em f. Lembrando que f é uma combinação linear de polinômios da forma

$$y_{k_1}^- \cdots y_{k_r}^- u_1 \cdots u_s, \tag{3.37}$$

onde $u_1, \ldots, u_s$ são comutadores,

Note que se em um comutador u_i as duas primeiras indeterminadas são ambas simétricas ou ambas antissimétricas, então u_i é uma consequência de (3.24). Segue que, neste caso, o polinômio (3.37) está em I. Por outro lado, nós podemos usar a anticomutatividade nas duas primeiras indeterminadas do comutador normado a esquerda e a identidade de Jacobi para escrever f como uma combinação linear de polinômios em (3.37), tais que a primeira indeterminada em u_i é simétrica para $i = 1, \ldots, s$. Se $s > 1$, então o polinômio (3.37) é uma consequência de (3.25), assim f é congruente módulo I a uma combinação linear de polinômios da forma (3.37) com $s = 1$ e a primeira indeterminada simétrica no comutador. Note que $[y_{i_1}^+, y_{i_2}^-, \ldots, y_{i_k}^-]$ é um polinômio simétrico de grau 0, logo (3.24) implica que $[y_{i_1}^+, y_{i_2}^-, \ldots, y_{i_k}^-, y_{i_{k+1}}^+]$ está em I. Portanto, f é congruente módulo I a uma combinação linear de polinômios da forma

$$y_{k_1}^- \cdots y_{k_r}^- [y_{j_1}^+, y_{t_1}^-, \ldots, y_{t_s}^-]. \tag{3.38}$$

Usamos o polinômio em (3.28) para concluir que

$$[y_{j_1}^+, y_{t_1}^-, \ldots, y_{t_s}^-] \equiv_I (-2)^{s-1} y_{t_s}^- \cdots y_{t_2}^- [y_{j_1}^+, y_{t_1}^-].$$

Note que no polinômio acima, as indeterminadas antissimétricas podem ser reordenadas, módulo I, por (3.22) e (3.24). Assim, todo polinômio em Γ_n é congruente módulo I a uma combinação linear de polinômios da forma

$$p_j = y_{i_1}^- \cdots y_{i_{n-2}}^- [y_j^+, y_{i_{n-1}}^-], \tag{3.39}$$

onde $i_1 < \cdots < i_{n-1}, \{i_1, \ldots, i_{n-1}, j\} = \{1, \ldots, n\}$. Afirmarmos que os polinômios $p_1, \ldots, p_n$ são linearmente independentes módulo $T_{\mathbb{Z}_2,*}(\mathcal{U})$. De fato, sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ escalares, tais que

$$\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_n p_n \in T_{\mathbb{Z}_2,*}(\mathcal{U}).$$

Como diferentes conjuntos de indeterminadas aparecem em diferentes polinômios em (3.39), concluímos que $\alpha_i p_i \in T_{\mathbb{Z}_2,*}(\mathcal{U})$. Note que $p_i \notin T_{\mathbb{Z}_2,*}(\mathcal{U})$, $i = 1, \ldots, n$, portanto concluímos que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 0$. Agora, sejam $\alpha_1', \ldots, \alpha_n'$ escalares tais que

$$f \equiv_I \alpha_1' p_1 + \cdots + \alpha_n' p_n.$$

Então, $\alpha'_1 p_1 + \cdots + \alpha'_n p_n$ é uma $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidade para $\mathcal{U}$, como uma consequência $\alpha'_1 = \cdots = \alpha'_n = 0$. Portanto, $f \in I$.

Caso 2: f é um polinômio em uma indeterminada ímpar.

Como uma consequência de (3.24), (3.25) e (3.27) o polinômio f é congruente módulo I a uma combinação linear de polinômios da forma

$$y_{i_1}^- \cdots y_{i_{n-1}}^- z_j, \tag{3.40}$$

onde $i_1 < \cdots < i_{n-1}$, $\{i_1, \ldots, i_{n-1}, j\} = \{1, \ldots, n\}$ e de polinômios em Γ_n da forma

$$g = y_{i_1}^- \cdots y_{i_k}^- [z_j, y_{j_1}, \ldots, y_{j_{n-k}}]. \tag{3.41}$$

Segue das identidades (3.24) e (3.27) que podemos reordenar, módulo I, as indeterminadas pares no comutador em g e assumir que os elementos simétricos aparecem antes dos antissimétricos. Reescrevemos (3.29) como $y_1^- y_2^- z_1 + y_1^- [z_1, y_2^-]$, portanto módulo I, podemos assumir que, se $k \geq 1$, as indeterminadas pares anti-simétricas de g estão fora do comutador. Como uma consequência g é congruente, módulo I, a

$$y_{i_1}^- \cdots y_{i_a}^- [z_j, y_{k_1}^+, \ldots, y_{k_b}^+], \tag{3.42}$$

onde $b > 0$, $i_1 < \cdots < i_a$, $k_1 < \cdots < k_b$, $\{i_1, \ldots, i_a, j, k_1, \ldots, k_b\} = \{1, \ldots, n\}$ ou

$$[z_j, y_{k_1}^+, \ldots, y_{k_b}^+, y_{i_1}^-, \ldots, y_{i_a}^-], \tag{3.43}$$

onde $a > 0$, $i_1 < \cdots < i_a$, $k_1 < \cdots < k_b$, $\{i_1, \ldots, i_a, j, k_1, \ldots, k_b\} = \{1, \ldots, n\}$.

Deste modo, f é congruente, módulo I, a uma combinação linear de polinômios em (3.40), (3.42) e (3.43). É fácil verificar que esses polinômios são linearmente independentes módulo $T_{\mathbb{Z}_2,*}(\mathcal{U})$. Então, concluímos, como no caso anterior, que $f \in I$.

Caso 3: f é um polinômio em duas indeterminadas ímpares.

Note que se nenhuma indeterminada simétrica par aparece em f, então segue das identidades (3.24), (3.30), (3.31) e (3.32) que f é congruente módulo I a uma combinação linear de polinômios

$$y_{i_1}^- \cdots y_{i_{n-2}}^- z_{j_1} z_{j_2}, \tag{3.44}$$

onde $i_1 < \cdots < i_{n-2}$, $j_1 < j_2$ e $\{i_1, \ldots, i_{n-2}, j_1, j_2\} = \{1, \ldots, n\}$.

Agora, assuma que f tem indeterminadas simétricas pares.

Seja $u = [z_{j_1}, y_{t_1}, \ldots, y_{t_r}, z_{j_2}, y_{s_1}, \ldots, y_{s_{r'}}]$, $r, r' \geq 0$, um comutador envolvendo ambas as indeterminadas ímpares.

Afirmação: Se pelo menos um indeterminada par for simétrica, então u é uma combinação linear de polinômios Y^+-próprios nos quais as duas indeterminadas ímpares não aparecem no mesmo comutador.

De fato, se uma das indeterminadas y_{s_i}, $1 \leq i \leq r'$ é simétrica, segue de (3.26) que $u \in I$. Agora suponha que essas indeterminadas sejam antissimétricas. Neste caso segue de (3.32) que u é congruente módulo I a um múltiplo escalar de

$$y_{s_{r'}} \cdots y_{s_1} u',$$

onde $u' = [z_{j_1}, y_{t_1}, \ldots, y_{t_r}, z_{j_2}]$. Usamos as identidades (3.30)e (3.32) para concluir que u' é congruente, módulo I, a um múltiplo escalar de um polinômio da forma

$$y_{i_1}^- \cdots y_{i_a}^- [z_{j_1}, y_{k_1}^+, \ldots, y_{k_b}^+, z_{j_2}].$$

A identidade (3.26) implica que

$$z_1[y_1^+, z_2] + z_2[y_1^+, z_1] - [z_1, y_1^+, z_2] \in I.$$

Se $b > 0$, usamos essa identidade para escrever o comutador $[z_{j_1}, y_1^+, \ldots, y_b^+, z_{j_2}]$, módulo I, como uma combinação linear da forma desejada. Isso prova a afirmação.

Portanto, f é congruente módulo I a uma combinação linear de polinômios próprios da forma

$$y_{i_1}^- \cdots y_{i_a}^- [z_{j_1}, y_{k_1}^+, \ldots, y_{k_b}^+][z_{j_2}, y_{t_1}^+, \ldots, y_{t_c}^+]. \tag{3.45}$$

Usamos a identidade (3.26) para concluir que

$$[z_1, y_1^+] z_2 + z_1 [z_2, y_1^+] \equiv_I 0.$$

Esta última igualdade implica que (3.45) é congruente módulo I a uma múltiplo escalar de polinômios da forma

$$y_{i_1}^{-} \cdots y_{i_a}^{-} z_{j_1}[z_{j_2}, y_{s_1}^{+}, \ldots, y_{s_r}^{+}]. \tag{3.46}$$

Além disso, se z_1, z_2 são ambos simétricos ou antissimétricos, então $z_1[z_2, y_1^{+}] - z_2[z_1, y_1^{+}]$ segue de (3.22) e (3.24), se um é simétrico e outro antissimétrico, então $z_1[y_1^{+}, z_2] + z_2[y_1^{+}, z_1]$ segue de (3.24) e (3.26). Agora, usamos essas identidades para ordenar os índices das indeterminadas ímpares, as identidades (3.24) para ordenar os índices nas indeterminadas pares simétricas e antissimétricas e concluímos que f é congruente módulo I a uma combinação linear de polinômios em (3.44) e (3.46), onde os índices do polinômio em (3.46) satisfazem as seguintes condições: $r > 0$, $i_1 < \cdots < i_a$, $j_1 < j_2$, $s_1 < \cdots < s_r$ e $\{i_1, \ldots, i_a, j_1, j_2, s_1, \ldots, s_r\} = \{1, \ldots, n\}$. Esses polinômios são linearmente independentes módulo $T_{\mathbb{Z}_2,*}(\mathcal{U})$. Portanto, concluímos que $f \in I$. ■

No próximo corolário, calcularemos a sequência de codimensões para as identidades $(\mathbb{Z}_2, *)$-graduadas para $UT_3(F)$ com a graduação acima.

Corolário 3.6.6. Para $\mathcal{U} = UT_3(F)$ com a $\mathbb{Z}_2$-graduação elementar induzida por $(0, 1, 0)$ e a involução reflexão $\circledast$, temos

$$c_n^{\mathbb{Z}_2,*}(\mathcal{U}) = 2n(n+5)3^{n-2} - (n-2)2^{n-1} - n,$$

para todo $n \geq 0$.

Demonstração: Segue da prova do Teorema 3.6.5 que a imagem dos polinômios (3.36), (3.39), (3.40), (3.42), (3.43), (3.44) e (3.46) forma uma base para $\Gamma_n(\mathcal{U})$.

Assim, necessitamos analisar as possibilidades existentes em cada polinômio. Vejamos cada um separadamente:

- No Polinômio (3.36), como as indeterminadas pares antissimétricas comutam, há apenas uma possibilidade.

- No Polinômio (3.39), há $\binom{n}{1} = n$ possibilidades para a indeterminada par simétrica.

- No Polinômio (3.40), há $\binom{n}{1} = n$ possibilidades para a indeterminada ímpar. Como essa indeterminada pode ser simétrica ou antissimétrica, segue que neste caso que o número total de possibilidades é $2n$.

- Nos polinômios (3.42) e (3.43), ocorre o mesmo que o anterior. Mas, como cada indeterminada par pode ser simétrica ou antissimétrica, temos ainda 2^{n-1} possibilidades, destas tiramos apenas o caso em que todas são antissimétricas (no primeiro polinômio) e simétricas (no segundo polinômio), pois $b > 0$ e $a > 0$, respectivamente. Assim, temos $2n\,(2^{n-1}-1)$ possibilidades.

- No Polinômio (3.44), temos que das n indeterminadas duas serão ímpares e, além disso, cada uma tem duas possibilidades (pois podem ser simétricas ou antissimétricas), donde obtemos $4\binom{n}{2}$ possibilidades.

- No Polinômio (3.46), além do caso acima, ainda temos as possibilidades de cada indeterminada par ser simétrica ou antissimétrica.

Portanto, somando cada uma das possibilidades acima, temos:

$$\begin{aligned}\gamma_n^{\mathbb{Z}_2,*}(\mathcal{U}) &= 1 + n + 2n + 2n(2^{n-1}-1) + 2n\left(2^{n-1}-1\right) + 4\binom{n}{2} + 4\binom{n}{2}\left(2^{n-2}-1\right)\\ &= 1 - n + 4n2^{n-1} + 2n(n-1)2^{n-2},\end{aligned}$$

para $n \neq 1$.

Claramente, $\gamma_1^{\mathbb{Z}_2,*}(\mathcal{U}) = 3$. Assim, a Proposição 3.6.3 implica que

$$c_n^{\mathbb{Z}_2,*}(\mathcal{U}) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\gamma_i^{\mathbb{Z}_2,*}(\mathcal{U}).$$

Portanto, temos

$$c_n^{\mathbb{Z}_2,*}(\mathcal{U}) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(1 - i + 4i2^{i-1} + 2i(i-1)2^{i-2}\right) - \binom{n}{1}.$$

Como as igualdades,

$$i\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i-1} \quad \text{e} \quad i(i-1)\binom{n}{i} = n(n-1)\binom{n-2}{i-2}.$$

valem, segue que

$$
\begin{aligned}
c_n^{\mathbb{Z}_2,*}(\mathcal{U}) = & \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} - n\left(\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}\right) + 4n\left(\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}2^{i-1}\right) + \\
& 2n(n-1)\left(\sum_{i=2}^{n}\binom{n-2}{i-2}2^{i-2}\right) - n \\
= & \ 2^n - n2^{n-1} + 4n3^{n-1} + 2n(n-1)3^{n-2} - n,
\end{aligned}
$$

isso nos dá a igualdade desejada. ■

Observamos que para $UT_2(F)$ com a G-graduação elementar não-trivial, a involução reflexão e simplética são graduadas e uma adaptação do argumento na prova da Proposição 3.5.3 implica que $c_n^{G,*}(UT_2(F)) = (n+2)2^{n-1}$. A $*$-codimensões para $UT_2(F)$ são dadas em [18, Corolário 4.5], nós temos

$$c_n^*(UT_2(F)) = 2^n + n(2^{n-1} - 1),$$

para $UT_2(F)$ com a involução reflexão $\circledast$ e

$$c_n^*(UT_2(F)) = n2^{n-1} + 1,$$

para $UT_2(F)$ com a involução simplética s.

Essas observações juntas com o Corolário 3.6.6, Teorema3.5.6 e o Teorema 3.5.7 justificam a seguinte conjectura.

Conjectura 3.6.7. Seja $\mathcal{U}$ uma graduação pelo grupo G em $UT_m(F)$ e seja $*$ uma involução graduada em $\mathcal{U}$. Existe K, dependendo de $\mathcal{U}$ e $*$, tal que

$$c_n^{G,*}(\mathcal{U}) \sim Kn^{m-1}m^n.$$

Observamos que para as identidades ordinárias de uma álgebra afim W, existe $c \in \mathbb{R}$, $t \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ e um inteiro $d \geq 0$, tal que $c_n(W) \sim cn^t d^n$, onde $c_n(W)$ é a n-ésima codimensões de W. O número t é chamado a parte polinomial da sequência de codimensão de W, uma interpretação algébrica para t foi dada em [2].

Referências Bibliográficas

[1] E. Aljadeff, *On the codimension growth of G-graded algebras*, Proceedings of the American Mathematical Society. **138 (7)** (2010), 2311-2320.

[2] E. Aljadeff, G. Janssens, Y. Karasik, *The polynomial part of the codimension growth of affine PI-algebras*, Advances in Mathematics, **309** (2017), 487-511.

[3] S. A. Amitsur, J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*, Proceedings of the American Mathematical Society, **1**, 449-463, 1950

[4] N. Anisimov, *Z_p-codimensions of Z_p-identities of Grassmann algebra*, Communications Algebra, 29(9) (2001), 4211-4230.

[5] Y. Bahturin, S. K. Sehgal, and M. V. Zaicev, *Group gradings on associative algebras*, Journal of Algebra, **241 (2)** (2001), 677-698.

[6] Y. Bahturin, M. V. Zaicev, *Group gradings on matrix algebras*, Dedicated to Robert V. Moody. Canadian Mathematical Bulletin, **45 (4)** (2002), 499-508.

[7] Y. Bahturin, D. Diniz, *Graded Identities of Simple Real Graded Division Algebra*, Journal of Algebra, **500** (2018) 316-334.

[8] Y. Bahturin, A. Giambruno, D. Riley, *Group graded algebra satisfying a polynomial identity*, Israel Journal of Mathematics, (1998), 125-155.

[9] F. Beşleagă and S. Dăscălescu , *Structural matrix algebras, generalized flags, and gradings*, Transactions of the American Mathematical Society, **373** (2020), 6863-6885.

[10] L. Centrone, D., Diniz, T. M., Castilho, *Graded monomial identities and almost non-degenerate gradings on matrices*, Linear Algebra and its applications, **653**, (2022), 246-265.

[11] M. Cohen , S. Montgomery , *Group-graded rings, smash products, and group actions*, Transactions of the American Mathematical Society, **282 (1)** (1984), 237-258.

[12] J. Colombo, P. Koshlukov, *Identities with involution for the matrix algebra of order two in characteristic p*, Israel Journal of Mathematics, **146** (2005), 337-355.

[13] N. L. Costa, *Identidades polinomiais e polinômios centrais para álgebra de Grassmann,* Dissertação (Dissertação em Matemática) - UFCG, Campina Grande, 2012.

[14] W.D.S. Costa, A. Ioppolo, R.B. dos Santos, A.C. Vieira, **Unitary superalgebras with graded involution or superinvolution of polynomial growth**, Journal of Pure and Applied Algebra, **225 (9)** (2021).

[15] C. W. Curtis and I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Wiley, New York, 1962.

[16] M. Dehn, *Über die Grundlagen der projectiven Geometrir and allgemeine Zahlsysteme*, (German) Mathematische Annalen, **85** (1922), 184-194.

[17] O. M. Di Vincenzo, P. Koshlukov, and A. Valenti, *Gradings on the algebra of upper triangular matrices and their graded identities*, Journal of Algebra, **275 (2)** (2004), 550–566.

[18] O. M. Di Vincenzo, P. Koshlukov and R. La Scala. *Involutions for upper triangular matrix algebras*, Advances in Applied Mathematics, **37** (2006), 541-568.

[19] O. M. Di Vincenzo, E, Spinelli, *Graded polynomial identities on upper block triangular matrix algebras*, Journal of Algebra, **415** (2014), 50-64.

[20] D. Diniz, J. L. G. Silva, A. R. Borges. *Graded identities with involution for the algebra of upper triangular matrices,* Linear Algebra and its Applications, **688** (2024), 120-156.

[21] D. Diniz, J. L. G. Silva, P. Koshlukov *Gradings on block-triangular matrix algebras*, Proceedings of the American Mathematical Society, **152** (2024), 119-127.

[22] V. Drensky, A. Giambruno, *Cocharacters, codimensions and Hilbert series of the polynomial identities for* 2×2 *matrices with involution*, Canadian Journal of Mathematics, **46 (4)** (1994) 718-733.

[23] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras: graduate course in algebra*, Springer-Verlag, 2000.

[24] V. Drensky, E. Formanek, *Polynomial identity rings*, Springer-Basel AG, 2000.

[25] A. Elduque, M. Kochetov, *Gradings on simple Lie algebras*, Mathematical Surveys and Monographs, **189**. American Mathematical Society, Providence, RI, Atlantic Association for Research in the Mathematical Sciences (AARMS), Halifax, NS, 2013.

[26] C. Fidelis, D. J. Gonçalves, D. Diniz, F. Yasumura, *Graded involutions on block-triangular matrix algebras*, Linear Algebra and its Applications, **585** (2020) 24-44.

[27] A. Giambruno, M. V. Zaicev, *Codimension growth and minimal superalgebras*, Transactions of the American Mathematical Society, **355** (2003), 5091-5117.

[28] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, Mathematical Surveys and Monographs 122, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[29] A. Giambruno, M. V. Zaicev, *Minimal varieties of algebras of exponential growth*, Advances in Mathematics, **174** (2003), 310-323.

[30] L. F. Gonçalves, T. Castilho, *Graded polynomial identities for matrices with the transpose involution over an infinite field*, Communications in Algebra, **46** (2018), 1630-1640.

[31] D. Haile, M. Natapov, *Graded polynomial identities for matrices with the transpose involution*, Journal of Algebra, **464** (2016) 175-197.

[32] I. N. Herstein, *Noncommutative rings*, The Carus Mathematical Monographs, 15, The Mathematical Association of America, New York, 1968.

[33] N. Jacobson, *Basic algebra II* , Ed. 2a , W. H. Freeman and Company, 1989.

[34] I. Kaplansky, *Rings with polynomial identity*, Bulletin of the American Mathematical Society, **54** (1948), 496-500.

[35] G. Karpilovsky, *The algebraic structure of crossed products*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 142, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987.

[36] A. Kemer, *Finite basis property of identities of associative algebra*, Algebra and Logic, **26**, (1987), 362-397.

[37] A. Kemer, *Ideals of identities of associative algebra, Translations Math*, Monographs, 87, AMS, 1991.

[38] M. Kochetov, F. Y. Yasumura, *Group gradings on the Lie and Jordan algebras of block-triangular matrices*, Journal of Algebra, **537** (2019), 147-172.

[39] D. V. Levchenko, *Finite basis property of identities with involution of a second-order matrix algebra*, (Russian) Serdica Mathematical Journal, **8** (1982), 42-56.

[40] D. V. Levchenko, *Bases of identities with involution of second-order matrix algebras over finite fields*, (Russian) Serdica Mathematical Journal **10** (1984), 55-67.

[41] C. Năstăsescu , F. van Oystaeyen, *Graded ring Theory*, North-Holland Mathematical Library, 28, North-Holland Publishing Co., -New York, 1982, ix+340.

[42] L. H. Rowen, *Polynomial Identities in Ring Theory*. **1**, Academic. Press, New York, 1980.

[43] J. P. W. Tignol, R. Adrian, *Value functions on simple algebras, and associated graded rings*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham, 2015.

[44] R. I. Q. Urure, D. J. Gonçalves, *Identities with involution for* 2×2 *upper triangular matrices algebra over a finite field*, Linear Algebra and its Applications, 544 (2018), 223-253.

[45] A. Valenti, M. Zaicev, *Abelian gradings on upper block triangular matrices*, Canadian Mathematical Bulletin, **55 (01)** (2012), 208-213.

[46] A. Valenti, M. Zaicev, *Group gradings on upper triangular matrices*, Archiv der Mathematik, **89 (1)** (2007), 33-40.

[47] W. Wagner, *Über die Grundlagen der projectiven Geometrie and allgemeine Zahlsysteme*, Mathematische Annalen, **113** (1936), 528-567.

[48] F. Y. Yasumura, *Group gradings on upper block triangular matrices*, Archiv der Mathematik, **110 (4)** (2018), 327-332.

[49] F. Yasumura, P. Koshlukov, *Asymptotics of graded codimension of upper triangular matrices*. Israel Journal of Mathematics, **223** (2018) 423-439.