UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CLEANO GOMES RAMALHO

O USO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

CUITÉ
2024

CLEANO GOMES RAMALHO

O USO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Célia Maria Rufino Franco

CUITÉ

2024

R165u Ramalho, Cleano Gomes.

O uso da transformada de Laplace na resolução de problemas de valor inicial. / Cleano Gomes Ramalho. - Cuité, 2024.
68 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2024.
"Orientação: Profa. Dra. Célia Maria Rufino Franco".

Referências.
1. Equações diferenciais. 2. Transformada da Laplace. 3. Problema de valor. 4. Equações diferenciais ordinárias. 5. Resolução de problemas. 6. Equação algébrica. 7. Centro de Educação e Saúde. I. Franco, Célia Maria Rufino. II. Título.

CDU 514.745.8(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIO Msc. Jesiel Ferreira Gomes - CRB-15/256

CLEANO GOMES RAMALHO

O USO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Licenciatura em Matemática.

Aprovada em: 04 de Outubro de 2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dra. Célia Maria Rufino Franco (Orientadora)
UFCG

Prof. Dr. Aluizio Freire da Silva Junior
UFCG
Examinador

Prof. Dra. Glageane da Silva Sousa
UFCG
Examinador

Dedico esse trabalho à toda minha família, em especial ao meu amado pai Francisco Sales Ramalho (In memorian) , mesmo não estando entre nós, continua aqui comigo, pois, sei que o sonho do senhor contínua vivo dentro de mim, sua lembrança me traz segurança e confiança para nunca desistir, agradeço à Deus a oportunidade de ser seu filho.

AGRADECIMENTOS

À minha família, especialmente a minha mãe Damiana, meus irmãos;Kaelano,Keliane e Kalívia, a minha cunhada Cícera, as minhas tias em especial Cenir,agradeço por todo e incondicional apoio e carinho, AMO VOCÊS.

Ao meu professor e amigo Maílson que desde o ensino médio acreditou em mim, a minha amiga Mariza que foi minha base no início do curso e hoje desempenha um papel importante na minha vida, que Deus ilumine sempre a vida de vocês.

Aos meus amigos; Ivo, Ítalo, Leandro, Alandelon, Ismael,João, Júlia,Erick Emanuel, Anderson, Aldaí, Jardel Matheus, Olga,Jennyfer, João Paulo, Isac, Abimael,Alanderson, Vinicius, Matheus, meus sinceros agradecimentos por todo apoio e carinho.

Ao curso de Matemática da UFCG/CES, e todas às pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para que isso acontecesse.

À minha orientadora Célia Maria Ruffino pela paciência no decorrer desse trabalho (Esse ano mais ainda) e pelos ensinamentos passados durante esse período de tempo, aos professores Aluízio e Glageane por aceitarem fazer parte da banca examinadora e tornar possível a realização desse sonho.

A todos os professores do curso de Matemática pelo empenho e dedicação como todos aqueles que fazem a comunidade acadêmica.

Que Deus ilumine sempre, obrigado por tudo!

"O senhor é a minha força e o meu escudo;nele o meu coração confia, e dele recebo ajuda. Meu coração exulta de alegria, e com o meu cântico lhe darei graças."

((Salmos 28:7)

RESUMO

Nesse trabalho foi apresentado um breve estudo sobre as Equações Diferenciais Ordinárias com ênfase na Transformada de Laplace que se apresenta como um importante médodo na resolução de problemas que envolvem sistemas mecânicos ou elétricos atuados por agentes descontínuos ou impulsivos. Esse método consiste em resolver um problema próprio das Equações Diferenciais, fazendo uso de uma integral imprópria transformando em uma equação algébrica, que se torna fácil de resolver se comparado aos métodos tradicionais de resolução de EDOs. Por fim, mostramos que o método é útil na resolução de problemas de valor inicial, fazendo uma comparação da resolução feita com os métodos tradicionais, com a resolução feita usando a Transformada de Laplace.

Palavras-chave: Equações Diferenciais. Transformada de Laplace. Problema de Valor Inicial.

ABSTRACT

In this work, a brief study on Ordinary Differential Equations was presented with an emphasis on Laplace's Transformation, which presents itself as an important method in the Solving problems involving mechanical or electrical systems acted by agents discontinuous or impulsive. This method consists of solving a problem specific to the Differential Equations, making use of an improper integral transforming into a algebraic equation, which becomes easy to solve compared to traditional methods resolution of EDOs. Finally, we show that the method is useful in solving problems of initial value, making a comparison of the resolution made with traditional methods, with the resolution made using the Laplace transform.

Keywords: Differential Equations. Laplace transform. Value Problem Initial.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As Equações Diferenciais Ordinárias(EDO's), são grandes ferramentas matemáticas,elas podem descrever e formular diversos tipos de sistemas físicos numa linguagem matemática e são utilizadas em diversas áreas do conhecimento, como: Matemática, Física, Química, Engenharia, etc. Para solucionar problemas que envolvam EDOs, costuma-se utilizar alguns métodos específicos, como por exemplo: O método da Variação de Parêmetros para Equações Lineraes de 1ª ordem Não Homogênea ou o método dos coeficientes Inderterminados para Equações Lineares de 2ª ordem Não Homogênea. Contudo, visto a complexidade que algumas equações apresentam, tornou-se preciso buscar novos métodos que conseguissem "diminuir", essa dificuldade na resolução. Diante disso, um método inventado pelo matemático francês Pierre Simon Laplace(1749-18257) e que leva seu nome, se mostrou como uma execelente facilitadora na resolução de tais problemas, o método é chamado de Transformada de Laplace, que alguns anos depois seria desenvolvido pelo físico britânico Oliver Heaviside (1850-1925).

O método é resumido em três passos: 1º) Aplica-se a Transformada de Laplace em toda a equação, com isso, a (EDO) será transformada em uma equação algébrica, 2º) Resolve a equação álgebrica e 3º) Aplica-se a Transformada Inversa de Laplace na solução da equação algébrica, encontrando assim a solução do problema.

Sendo assim, esse trabalho tem como objetivo principal estudar a Transformada de Laplace, apresentando os principais conceitos sobre o método e aplicar na resolução de Equações Diferenciais Ordinárias que envolvem problemas de valor inicial. O estudo está disposto em 5 capítulos:No capítulo faremos uma pequena introdução sobre as Equações Diferenciais Ordinárias. No capítulo 2, estudamos os principais conceitos sobre Equações Diferenciais Ordinárias, que servirão de base para o desenvolvimento dos capítulos posteriores. No capítulo 3, desenvolvemos o método da Transformada de Laplace, apresentando os principais conceitos, demonstrações das principais propriedades como por exemplo a Linearidade da Transformada e a resolução de exemplos envolvendo o método. No capítulo 4, falamos sobre o problema de Valor Inicial, onde resolvemos os exemplos do capítulo 2, só que fazendo uso da Transformada de Laplace como maneira de comparar a patricidade que o método possui. No capítulo 5 (último capítulo), está destinado as considerações finais.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Nesse capítulo, iremos abordar alguns conceitos importantes sobre Equações Diferenciais Ordinárias, que serão de grande relevância para o desenvolvimento da Transformada de Laplace.

2.1 Equações Diferenciais

Definição 2.1 *Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de* ***equação diferencial (ED)****.*

2.1.1 Classificação das Equações Diferenciais

A classificação das Equações Diferenciais se dão de acordo com o **tipo**, a **ordem** e a **linearidade**.

Classificação por Tipo

Se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes com relação a uma única variável independente, então ela é chamada de **Equação Diferencial Ordinária** (EDO). Caso a equação contenha derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes, então ela é chamada de **Equação Diferencial Parcial** (EDP).

Exemplos:

1. $\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\dfrac{\partial u}{\partial t}$

.

As equações 01 e 02 são exemplos de EDOs e as equações 03 e 04 são exemplos de

EDPs.

Classificação por Ordem

Uma equação diferencial ordinária geral de n-ésima ordem é frequentemente representada pelo simbolismo:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, ..., \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \tag{2.1}$$

em que a **Ordem** de uma equação deferencial (EDO) ou (EDP) é dada pela maior derivada na equação. Por exemplo:

1. $\frac{dy}{dx} = (\cos x)$ (EDO de Primeira Ordem)
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$ (EDO de Segunda Ordem)
3. $a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ (EDP de Quarta Ordem)
4. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$ (EDP de Primeira Ordem)

Classificação por Linearidade

Uma equação diferencial é chamada de **linear** quando pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_n - 1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{2.2}$$

E que se caracteriza pelas seguintes propriedades:

- A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau; isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1.
- Cada coeficiente depende apenas da variável independente x.

Caso alguma dessas propriedades não forem satisfeitas, a equação será denominada de **Não-Linear**.

Exemplos:

1. $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}$ (EDO linear de Ordem 1)
2. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$ (EDO linear de Ordem 2)
3. $\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$ (EDO não-linear de ordem 1)

.

2.2 Solução de Uma Equação Diferencial Ordinária

Definição 2.2 *Toda função f, definida em um intervalo I que tem pelo menos n derivadas contínuas em I, as quais quando substituídas em uma equação diferencial ordinária de ordem n reduzem a equação a uma identidade, é denominada uma* ***solução*** *da equação diferencial no intervalo.*

Ou seja, a solução para a EDO

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},...,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

é uma função f que tem pelo menos n derivadas e para a qual,

$$F(x,f(x),f'(x),...,f^{(n)}(x))=0,\ \forall x\in I$$

Não se pode pensar em solução de uma equação diferencial ordinária sem, simultaneamente, pensar em intervalo, nesse caso, o intervalo I considerado na Definicão 2, pode ser o intervalo aberto (a,b), o intervalo fechado [a,b], um intervalo infinito (a, ∞), e assim por diante.

Uma forma simples de verificar se uma dada função é ou não solução para uma EDO, é substituindo-a na equação e verifcando se resulta em uma identidade.

Exemplo 1 *Verifique se a função dada, constitui uma solução da equação diferencial.*

a)$\dfrac{d^2y}{dx^2}-y=0, y(x)=e^x$

Para verificar isso, basta aplicar a função e sua segunda derivada na equação. Sendo assim, temos:

Solução

Derivando $y(x)=e^x$, temos: $\dfrac{dy}{dx}=e^x$, derivando novamente encontramos: $\dfrac{d^2y}{dx^2}=e^x$, agora substituindo $\dfrac{d^2y}{dx^2}=e^x$ e $y(x)=e^x$ na equação dada, obtemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-y=0\Longrightarrow e^x\text{- }e^x\text{=0.}$$

b)$x\dfrac{dy}{dx}-y=x^2, y=3x+x^2$

Solução

Analogamente ao primeiro exemplo, calculemos a primeira derivada da função e em seguida faremos as substituições devidas na equação, sendo assim, temos:

$\frac{dy}{dx} = 3+2x$, substituindo o resultado da derivada o valor da função em $x\frac{dy}{dx} - y = x^2$, obtemos:

$x(3+2x)-(3x+x^2) = x^2 \Longrightarrow 3x+2x^2-3x-x^2 = x^2$, o que resulta em $x^2 = x^2$.

2.2.1 *Problema de Valor Inicial*

Em muitos casos, a solução particular de um determinado problema, pode ser encontrada por meio da solução geral, mediante uma **condição inicial**, condições essas que são impostas à solução desconhecida $y = y(x)$ e suas derivadas em algum intervalo I contendo x_0, sendo o seguinte problema a ser resolvido:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x,y,y^{'},...,y^{n-1}) \tag{2.3}$$

Sujeito aos seguintes valores: $y(x_0) = y_0, y^{'}(x_0) = y_1, y_2, ..., y^{n-1} = y_{n-1}$, onde $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ são constantes reais específicas, sendo assim, a chamaremos de **Problema de Valor Inicial** ou **(PVI)**. Os valores de $y(x)$ e suas $n-1$ derivadas em um único ponto $x_0 : y_0, y^{'}(x_0) = y_1, ..., y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$ são chamados de condições iniciais. Iremos apresentar na sequência o PVI para Equações Diferenciais de Primeira Ordem.

2.2.2 *Equações Diferenciais de Primeira Ordem*

Para as equações de primeira ordem, (2.2) torna-se da seguinte forma;

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Nosso objetivo é encontrar então uma solução para a equação diferencial definida no intervalo I, em que o gráfico da solução dessa equação passe pelo ponto (x_0, y_0), com x_0 pertencente ao intervalo I e y_0 um número real arbitrário.

O teorema a seguir nos dá condições suficientes para garantir a existência e a unicidade de uma solução do problema de valor inicial de primeira ordem da forma apresentada em (2.4) para equações de primeira ordem. temos

Teorema 2.2.1 (Existência de uma Única Solução) *Seja R uma região retangular no plano xy definida por* $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$*, que contém o ponto* (x_0, y_0) *em seu interior. Se* $f(x,y)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *são contínuas em R, então existe um intervalo I centrado em* x_0 *e uma única função* $y(x)$ *definida em I que satisfaz o problema de valor inicial (2.4).*

Neste momento iremos apresentar alguns métodos de soluções para EDO de primeira ordem que é de suma importância para o desenvolvimento do nosso trabalho.

2.3 Equações Separáveis

Definição 2.3 *Toda equação diferencial de primeira ordem que possa ser escrita da seguinte forma*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

é chamada ***Separável*** *ou tem* ***variáveis separáveis****.*

Fazendo uso de manipulações matemáticas, podemos perceber que a equação do tipo separável pode ser escrita como

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{2.5}$$

Se $y = f(x)$ denota uma solução para (2.5) e dado que as funções g e h são contínuas, temos que a função y tem a sua primeira derivada contínua, sendo assim

$$h(f(x))f^{'}(x) = g(x)$$

Integrando de ambos os lados com relação a variável x

$$\int h(f(x))f^{'}(x)dx = \int g(x)dx + c \tag{2.6}$$

Com c sendo uma constante arbitrária. Como $dy = f^{'}(x)dx$,temos que a equação 2.6 se torna

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c \tag{2.7}$$

A equação (2.7) indica o procedimento para resolver equações diferenciais separáveis. A constante arbitrária c nos fornece uma família de soluções para a equação. É notório que não necessita usar duas constantes de integração no procedimento, pois

$$\int h(y)dy + c_1 = \int g(x)dx + c_2 \Rightarrow \int h(y)dy = \int g(x)dx + c_2 - c_1 = \int g(x)dx + c$$

Em que $c = c_2 - c_1$ é uma constante completamente arbitrária

Exemplo 2 *Problemas com equações separáveis, mediante PVI.*

a) Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-1}{3y^2-3} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Solução: Podemos rescrever a equação $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-1}{3y^2-3}$ como

$$(3y^2-3)dy = (2x-1)dx$$

Integrando de ambos os lados, temos:

$$\int (3y^2-3)dy = \int (2x-1)dx$$

$\Rightarrow y^3 - 3y = x^2 - x + c$, onde c fornece uma família de solução para a EDO. Para encontrar a solução do PVI, aplicamos $x = 1$ e $y = 0$ na solução encontrada, segue que.

$$0 = 1^2 - 1 + c \Rightarrow c = 0$$

Sendo assim, a solução do PVI será:

$$y^3 - 3y - x^2 + x = 0$$

Nos fornece a solução que passa pelo ponto $(1,0)$.

b) Resolva $x^2\dfrac{dy}{dx} = y - xy$, com $y(-1) = -1$

solução Dividindo ambos os lados por x^2, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2} - \frac{y}{x}$$

colocando y em evidência

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)$$

Utilizando a técnica de separação de variáveis, podemos encontrar

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)dx$$

Integrando de ambos os lados, temos

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)dx$$

Resolvendo as integrais, econtramos como solução

$$\ln|y| = -\frac{1}{x} - \ln|x| + c$$

Organizando as funções ln de um lado, aplicando a regra do produto do ln e usando as condições iniciais $y(-1) = -1$, podemos encontrar a solução do PVI.segue então

$$\ln(xy) = -\frac{1}{x} + c$$

$\Rightarrow$

$$\ln(-1.-1) = -\left(\frac{1}{-1}\right) + c$$

Encontramos então que $c = -1$ e daí podemos encontrar a solução para o PVI que passa pelo ponto $y(-1) = -1$ que será dada por

$$\ln(xy) = -\frac{1}{x} - 1$$

Aplicando a função exponencial, temos:

$$xy = e^{-\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

.

2.4 Equações Exatas

Definição 2.4 *Uma expressão diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ é uma diferencial exata em uma região R do plano xy se ela corresponde à diferencial total de alguma função $f(x,y)$. Uma equação diferencial da forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é chamada de uma* ***equação exata*** *se a expressão do lado esquerdo é uma diferencial exata.(ZILL, 2001)*

Um critério para uma diferencial ser exata é definida pelo teorema a seguir

Teorema 2.4.1 *Sejam $M(x,y)$ e $N(x,y)$ funções contínuas com derivadas parciais contínuas em uma região retangular R definida por $a < x < b, c < y < d$. Então, uma condição necessária e suficiente para que $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ seja uma diferencial exata é*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

A prova dessa condição pode ser encontrada em (ZILL, 2001)
Uma equação escrita da forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.8}$$

é chamada de Equação **exata** quando o Teorema (2.4.1) é satisfeito, caso contrário, é chamada de **não-exata**.

Exemplo 3 $x^2y^3dx + x^3y^2dy = 0$

Solução:

$$M(x,y) = x^2y^3 \text{ e } N(x,y) = x^3y^2$$

sendo assim

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial (x^2y^3)}{\partial y} = 3y^2x^2$$

e

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial (x^3y^2)}{\partial x} = 3x^2y^2$$

. Logo, temos uma equação exata.

2.4.1 Fator Integrante

Em alguns casos, as equações podem não ser exatas, sendo assim, multiplicamos por um fator integrante que a tornará exata.
Multiplicando a Equação 2.8 por uma função $\eta(x)$, temos:

$$\eta(x)M(x,y)dx + \eta(x)N(x,y)dy = 0 \tag{2.9}$$

Por definição, uma equação exata precisa atender a condição imposta no Teorema (2.4.1). Diante disso, temos:

$$\frac{\partial(\eta(x)M(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial(\eta(x)N(x,y))}{\partial x} \tag{2.10}$$

fazendo uso da regra do produto para derivadas, temos

$$\frac{\partial(M(x,y))\eta(x)}{\partial y}+\frac{M(x,y)\partial(\eta(x))}{\partial y}=\frac{\partial(N(x,y))\eta(x)}{\partial x}+\eta^{'}(x)N(x,y) \tag{2.11}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial(M(x,y))\eta(x)}{\partial y}=\frac{\partial(N(x,y))\eta(x)}{\partial x}+\eta^{'}(x)N(x,y) \tag{2.12}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial(M(x,y))\eta(x)}{\partial y}-\frac{\partial(N(x,y))\eta(x)}{\partial x}=\eta^{'}(x)N(x,y) \tag{2.13}$$

Colocando $\eta(x)$ em evidência

$$\eta(x)\left[\frac{\partial(M(x,y))}{\partial y}-\frac{\partial(N(x,y))}{\partial x}\right]=\eta^{'}(x)N(x,y). \tag{2.14}$$

$\Rightarrow$

$$\eta^{'}(x)N(x,y)=\eta(x)\left[\frac{\partial(M(x,y))}{\partial y}-\frac{\partial(N(x,y))}{\partial x}\right]. \tag{2.15}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\eta^{'}(x)}{\eta(x)}=\frac{\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]}{N} \tag{2.16}$$

como $\ln(\eta(x))=\int\frac{\eta^{'}(x)}{\eta(x)}dx\Rightarrow$

$$\frac{d[\ln(\eta(x)]}{dx}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N} \tag{2.17}$$

Integrando em ambos os lados, temos

$$\int\frac{d[\ln(\eta(x)]}{dx}=\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx \tag{2.18}$$

$\Rightarrow$

$$\ln(\eta(x))=\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx+C \tag{2.19}$$

Quando aplicada a exponencial, encontramos

$$\eta(x)=e^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx} \tag{2.20}$$

Podemos encontrar duas funções η, a primeira é dada por (2.20) e a outra na variável y,de maneira análoga.

2.5 Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Definição 2.5 *Uma equação diferencial é dita de primeira ordem, quando pode ser escrita da seguinte forma:*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{2.21}$$

onde a função f é de duas variáveis variáveis.

2.6 Equações Lineares

Como visto anteriormente, a forma geral de uma equação diferencial linear de ordem n é aquela que pode ser escrita na forma (**??**). Ressaltando que o termo linearidade nos diz que todos os coeficientes são funçoes exclusivamente de x e que y e todas as suas derivadas são elevadas à primeira potência. Quando temos que o valor de n na equação é igual a 1, obtemos então uma EDO linear de primeira ordem, que irá ser escrita da seguinte maneira

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{2.22}$$

Dividindo a equação (2.22) pelo termo $a_1(x)$, podemos encontrar uma forma mais útil para a equação acima, que ficará da seguinte forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = q(x) \tag{2.23}$$

em que $P(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas e temos como objetivo procurar uma solução para a (2.23) em um intervalo I. Para resolvermos uma equação difencial do tipo (2.23), devemos encontrar primeiramente uma fator de integração. Com a ajuda desse fator de integração apropriado, pode-se encontrar uma técnica padrão para resolver a equação de primiera ordem linear. Destaca-se então como método de resolução de Equações lineares, o método dos fatores integrantes e o método da variação de parâmetros (Método de Lagrange).

2.6.1 Método dos Fatores Integrantes

O método do fator integrante é usado na resolução de uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem da forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x) \tag{2.24}$$

Esse método consiste do uso de uma função auxiliar, que chamaremos de **Fator Integrante**, que transformará a equação acima em uma outra equação diferencial equivalente e que pode ser resolvida via integração direta. De início, vamos multiplicar a equação (2.24) por uma função fator integrante $\eta(x)$ a determinar, obtemos

$$\eta(x)\frac{dy}{dx} + \eta(x)p(x)y = \eta(x)g(x) \tag{2.25}$$

Pressupondo que o lado esquerdo da equação é a derivada do produto das funções $y(x)$ e $\eta(x)$, temos

$$\frac{d[\eta(x)y]}{dx} = \eta(x)\frac{dy}{dx} + \eta(x)p(x)y \tag{2.26}$$

Logo, temos:

$$\frac{d[\eta(x)y]}{dx} = \eta(x)g(x) \tag{2.27}$$

Usando a regra do produto, temos

$$\eta^{'}(x)y + \eta(x)y^{'} = \eta(x)\frac{dy}{dx} + \eta(x)p(x)y \tag{2.28}$$

Dessa forma, torna-se muito complicado a solução. Deste modo, tentamos resover de uma forma mais simples. Vamos procurar um fator integrante que dependa apenas de uma variável, felizmente em muitos casos existem fatores desse tipo , como veremos. Fazendo então $\eta(x) = f(x)$, temos:
$\frac{dy}{dx} = 0$ e $\eta^{'}(x) = \frac{d[\eta(x)]}{dx}$. Podemos simplificar a equação 2.28

$$\eta^{'}(x)y(x) + \eta(x)y^{'}(x) = \eta(x)\frac{dy}{dx} + p(x)\eta(x)y \tag{2.29}$$

$\Rightarrow$

$$\eta^{'}(x)y(x) = p(x)\eta(x)y \tag{2.30}$$

$\Rightarrow$

$$\eta^{'}(x) = p(x)\eta(x) \tag{2.31}$$

$\Rightarrow$

$$p(x) = \frac{\eta^{'}(x)}{\eta(x)} \tag{2.32}$$

Integrando em ambos os lados da equação com relação a x, temos

$$\int p(x)dx = \int \frac{\eta^{'}(x)}{\eta(x)}dx \tag{2.33}$$

$\Rightarrow$

$$\int p(x)dx = \ln(\eta(x)) + C \tag{2.34}$$

Sendo assim, temos $\ln(\eta(x)) = \displaystyle\int p(x)dx$. Aplicando a exponencial

$$\eta(x) = e^{\int p(x)dx} \tag{2.35}$$

Essa função simplica a equação (2.25). Após encontrar a função fator integrante, podemos substituir o valor na equação (2.27) e assim encontrar a solução $y(x)$ da EDO (2.24), como segue

$$\frac{d}{dx}[\eta(x)y] = \eta(x)g(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}[e^{\int p(x)dx}y] = e^{\int p(x)dx}g(x) \tag{2.36}$$

$$\Rightarrow \int \frac{d}{dx}[e^{\int p(x)dx}y]dx = \int e^{\int p(x)dx}g(x)dx \tag{2.37}$$

$$\Rightarrow e^{\int p(x)dx}y = \int e^{\int p(x)dx}g(x)dx + C \tag{2.38}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{\displaystyle\int e^{\int p(x)dx}g(x)dx + C}{e^{\int p(x)dx}} \tag{2.39}$$

De forma geral, quando estamos trabalhando com uma EDO do tipo (2.24), multiplicamos ela por um fator inegrante $\eta(x) = e^{\int p(x)dx}$ e o mesmo a transformará em uma EDO do tipo (2.27) e daí a solução é obtida por integração direta.

Exemplo 4 *Dada a EDO*

$$x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x$$

Dividindo toda a equação por x, encontramos a EDO na forma $\boxed{\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{4}{x} = x^5e^x}$ *e a função fator integrante é dada por*

$$\begin{cases} \eta(x) = e^{\int p(x)dx} \\ p(x) = \dfrac{-4}{x} \end{cases}$$

Sendo assim, temos

$$\eta(x) = e^{\displaystyle\int \frac{-4}{x}dx} \Rightarrow \boxed{\eta(x) = x^{-4}}$$

Multiplicando a equação $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{4}{x} = x^5e^x$ *por* x^{-4}*,temos*

$$x^{-4}\frac{dy}{dx} - (x^{-4})\frac{4}{x}y = x^{-4}x^5e^x$$

o que resulta então em

$$x^{-4}\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x^5}y = xe^x$$

Como o lado da equação é a derivada do produto das funções x^{-4} *e y, temos*

$$\frac{d}{dx}[x^{-4}y] = xe^x$$

Aplicando a integral em ambos os lados, temos

$$\int \frac{d}{dx}[x^{-4}y]dx = \int xe^x dx \Rightarrow x^{-4}y = xe^x - e^{x+C} \Rightarrow y = \frac{xe^x - e^x + C}{x^{-4}}$$

Logo, a solução é:

$$y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4$$

2.6.2 Existência e Unicidade de Solução

Teorema 2.6.1 (Existência e Unicidade) *Suponha que $P(x)$ e $Q(x)$ sejam contínuos em um intervalo (a,b) que contém o ponto x_0. Então, para qualquer escolha de valor inicial y_0, existe uma solução única $y(x)$ em (a,b) para o problema de valor inicial.*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),\ y(x_0) = y_0$$

2.7 Equações Lineares de Segunda Ordem

Uma EDO de segunda ordem é chamada de **linear** quando ela pode ser escrita na forma:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{2.40}$$

com $p(x)$, $q(x)$ e $g(x)$ funções contínuas.

E é **não linear** caso não possa ser escrita nessa forma. Pode ser encontrada também na seguinte forma:

$$P(x)y^{''} + Q(x)y^{'} + R(x)y = G(x) \tag{2.41}$$

com $P(x) \neq 0$, na qual podemos dividir toda a equação (2.41) por $P(x)$, obtendo a equação (2.40) da seguinte forma

$$p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}, q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}, g(x) = \frac{G(x)}{P(x)}$$

Com as seguintes condições iniciais:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y^{'}(x_0) = y^{'}(0) \end{cases}$$

onde são dados os valores para y_0 e $y^{'}(0)$.

O teorema a seguir apresenta o PVI para Equações Lineares de Segunda Ordem.

Teorema 2.7.1 (Existência e Unicidade de Solução) *Sejam p,q e g funções contínuas num intervalo I. Então há somente uma solução $y = \phi(x)$ deste problema e existe para todo o intervalo I;*

$$y^{''} + p(x)y^{'} + q(x)y = g(x) \ com, \ y^{'}(x_0) = y_0, \ y^{'}(x_0) = y^{'}(0)$$

O teorema (2.7.1) afirma que;

a) O problema de valor inicial tem solução

b) Que essa solução é única

c) Que ϕ, que é a solução está definida para todo o intervalo I, sendo derivável pelo menos duas vezes e os coeficientes são contínuos .

2.7.1 Dependência e Independência Linear

As próximas definições são base para o estudo sobre equações diferenciais lineares.

Definição 2.6 *Dizemos que um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ é **Linearmente Dependente** (LD) em um intervalo I se existirem constantes $c_1, c_2, ..., c_n$ não todas nulas, tais que*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_2 f_n(x) = 0$$

$\forall x$ no intervalo.

Definição 2.7 *Dizemos que um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ é **Linearmente Independente** (LI) em um intervalo I, se ele não for linearmente dependente no intervalo.*

Ou seja, no caso das funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$, se ambas forem linearmente dependentes em um intervalo, existirá constantes c_1 e c_2 não nulas, tais que, para todo x no intervalo

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$$

Se supormos $c_1 \neq 0$, temos:

$$f_1(x) = -\frac{c_2}{c_1} f_2(x)$$

ou seja, se duas funções são linearmente dependentes,então, uma é múltipla da outra, significando que, se $f_1(x) = c_2 f_2(x)$, para alguma constante c, logo

$$(-1) f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$$

para todo x em algum intervalo. Sendo assim, as funções f_1 e f_2 são linearmente dependentes. Diante disso, duas funções serão linearmente independentes quando nenhuma delas é múltipla da outra em um intervalo.

2.8 Wronskiano

O teorema a seguir nos informa como estabelecer uma condição suficiente para que um conjunto com n funções sejam Linearmente Independentes em um determinado intervalo I.

Teorema 2.8.1 (Critério para Independência Linear de Funções) *Dadas $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ funções diferenciáveis pelo menos $n-1$ vezes. Se o determinante*

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

for diferente de zero para algum intervalo I, as funções $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ *serão linearmente independentes no intervalo.*

O determinante em questão recebe um nome especial, ele é chamado de **Wronskiano** das funções $f_1(x), f_2(x, ..., f_n(x))$ e é denotado por

$$W(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)).$$

2.9 Equações Homogêneas

Uma equação linear de segunda ordem é dita **homogênea** se a função $g(x)$ na equação (2.40) ou $G(x)$ na equação (2.41), for igual a zero para todo x. Caso contrário, ela é chamada de **não-homogênea**. O estudo das equações de segunda ordem se iniciará com as equações homogêneas, que podemos escrever na forma

$$P(x)y^{''} + Q(x)y^{'} + R(x)y = 0 \tag{2.42}$$

Considerando as funções P, Q e R constantes a equação (2.42) torna-se:

$$ay^{''} + by^{'} + cy = 0 \tag{2.43}$$

onde a, b e c são constante dadas. A equação (2.43) é chamada de homogênea com coeficientes constantes.

2.9.1 Soluções de Equações Lineares Homogêneas

Princípio de Superposição

O próximo teorema garante que a combinação linear de duas ou mais soluções de uma equação diferencial linear homogênea é também solução.

Teorema 2.9.1 (Princípio da Superposição) *Sejam* y_1,y_2,...,y_k *soluções para uma equação diferencial linear homogênea de n-ésima ordem, em um intervalo I. Então, a combinação linear*

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ky_k(x)$$

em que $ci, i = 1, 2, 3, ..., k$ *são constantes arbitrárias, é também uma solução para a equação no intervalo.*

Demonstração:

Sejam $y_1(x)$, $y_2(x)$,...,$y_k(x)$ soluções para

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + ... + a_1(x)y^{'} + a_0(x)y = 0$$

Se definimos $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ky_k(x)$, então

$$a_n(x)[c_1y_1^{(n-1)}(x) + c_2y_2^{(n-1)}(x) + ... + c_ky_k^{(n-1)}(x)] + ... + a_1(x)[c_1y_1^{'}(x) + c_2y_2{'}(x) + ... + c_ky_k^{'} + ... + c_ky_k^{'}(x)] + a_0(x)[c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ky_k(x)] = c_1[a_n(x)y_1^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y_1^{'} + a_0(x)y_1(x)] + c_2[a_n(x)y_2^{n}(x) + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y_2^{'} + a_0(x)y_2(x)] + ... + c_k[a_n(x)y_k^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_k^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y_k^{'} + a_0(x)y_k(x)] = c_1.0 + c_2.0 + ... + c_k.0 = 0$$

■

Corolário 2.9.1 *Um múltiplo $y = c_1y_1(x)$ de uma solução $y_1(x)$ para uma equação deiferencial linear homogênea é também uma solução*

Corolário 2.9.2 *Uma equação diferencial linear homogênea sempre possui a solução trivial $y = 0$.*

Definição 2.8 *Qualquer conjunto $y_1, y_2, ..., y_n$ de n soluções linearmente independentes para a equação difernciał linear homogênea de n-ésima ordem em um intervalo I é chamado de **conjunto fundamental de soluções** no intervalo.*

Definição 2.9 *Sejam $y_1, y_2, ..., y_n$ n soluções linearmente independentes para a equação linear homogênea de n-ésima ordem em um intervalo I. A solução geral para a equação no intervalo é definida por*

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x)$$

em que os $c_i, i = 1, 2, 3, ..., n$ são constantes arbitrárias.

2.9.2 Equações Homogêneas Lineares com Coeficientes Constantes

A equação linear do tipo $\dfrac{dy}{dx} + ay = 0$ com a constante, possui como solução uma função exponencial $y = c_1e^{-\alpha x}$ em $(-\infty, \infty)$. Diante disso, é habitual procurarmos determinar soluções do tipo exponencial no intervalo $(-\infty, \infty)$ para equações que possuem ordem superior, como:

$$a_ny^n + a_{n-1}y^{n-1} + ... + a_2y^{''} + a_1y' + a_0y = 0 \tag{2.44}$$

em que os a_i, $i = 0, 1, 2, ..., n$ são constantes. Na sequência determinaremos a solução de uma EDO Homogênea de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes escrita

$$ay^{''} + by^{'} + cy = 0 \tag{2.45}$$

Como todas as soluções para a equação (2.44) desenvolve-se em torno das funções exponenciais, vamos supor então uma solução da forma $y = e^{mx}$ como solução para (2.45). Derivando y encontramos $y^{'} = me^{mx}$, derivando novamente, encontramos $y^{''} = m^2 e^{mx}$. Substituindo na equação 2.45, temos

$$a(m^2 e^{mx}) + b(me^{mx}) + c(e^{mx}) = 0$$

Colocando o termo comum em evidência

$$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$$

Tendo em vista que $e^{mx} \neq 0$, para qualquer valor de x, logo para a função satisfazer essa equação, devemos encontrar um valor para m que seja raiz da equação

$$am^2 + bm + c = 0 \tag{2.46}$$

A equação quadrática (2.46) recebe um nome especial, é chamada de **equação auxiliar** ou **equação característica** da equação (2.45). As raízes de uma equação quadrática escrita da forma (2.46), podem ser de três tipos: raízes reais e distintas, reais iguais ou complexas conjugadas. Analisaremos os três possíveis casos.

Caso I- Reais Distintas

Dadas r_1 e r_2 raízes reais e distintas para (2.46), teremos as seguintes soluções para a equação (2.45): $y_1 = e^{r_1 x}$ e $y_2 = e^{r_2 x}$. Essas funções são linearmente independentes no intervalo $(-\infty, \infty)$ e assim sendo, formam um conjunto fundamental de soluções. Logo, no intervalo $(-\infty, \infty)$

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

é solução geral da equação 2.46.

Caso II- Reais Iguais, isto é, $r_1 = r_2 = \dfrac{-b}{2a}$, então teremos uma única solução exponencial $y_1 = e^{r_1 x}$ para equação (2.45). Podemos determinar uma outra solução y_2 para equação (2.45), de forma que y_1 e y_2 sejam Linearmente Independentes, ver no livro (SANTOS, 2011), pág.271. A outra solução é da forma $y_2(x) = xe^{r_1 x}$. Com isso, $y_1(x) = e^{r_1 x}$ e $y_2(x) = xe^{r_1 x}$. Logo, $y_1(x) = e^{r_1 x}$ e $y_2(x) = xe^{r_1 x}$ são soluções fundamentais, pois o wonskiano de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ é $\neq 0$, como segue:

$$det = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x) \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} e^{r_1x} & xe^{r_1x} \\ r_1e^{r_1x} & e^{r_1x} + r_1xe^{r_1x} \end{bmatrix} = e^{2r_1x} \neq 0.$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$. Sendo assim, a solução geral da equação (2.45) é

$$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2xe^{r_1x}.$$

Para quando $r_1 = r_2$.

Caso III- Complexas Conjugadas.

Para $\triangle < 0$, temos que r_1 e r_2 serão números complexos conjugados, denotados por: $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$, com $\alpha, \beta > 0$ valores reais e $i^2 = -1$. As soluções para equação (2.46) são:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} \text{ e } y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$$

Com sua solução geral tornando-se

$$y = c_1e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2e^{(\alpha-i\beta)x}$$

É do nosso interesse trabalhar com funções definidas no reais em vez de exponenciais complexas. Diante disso, recordemos uma importante relação na matemática conhecida como fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + isen(\theta)$$

com θ pertencente aos reais. Do que segue

$$e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + isen(\beta x) \tag{2.47}$$

e

$$e^{-i\beta x} = \cos(\beta x) - isen(\beta x) \tag{2.48}$$

Sabendo que $\cos(-\beta x) = \cos(\beta x\ )$e $sen(-\beta x) = -sen(\beta x)$, somando e subtraindo as duas equações, temos

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = \cos(\beta x) + isen(\beta x) + \cos(\beta x) - isen(\beta x) = 2\cos(\beta x)$$

$$e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = \cos(\beta x) + isen(\beta x) - \cos(\beta x) + isen(\beta x) = 2isen(\beta x)$$

Como $y = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$ é solução para (2.46) para quaisquer valores que c_1 e c_2 assumirem. Fazendo $c_1 = c_2 = 1$, temos

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}$$

$\Rightarrow$

$$y_1 = e^{(\alpha x)}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) \tag{2.49}$$

como $e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2\cos(\beta x)$ e $e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2isen(\beta x)$, temos $y_1 = e^{\alpha x}(2\cos(\beta x)) = 2e^{\alpha x}\cos(\beta x)$. Fazendo $c_1 = 1$ e $c_2 = -1$, teremos

$$y_2 = e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}$$

$\Rightarrow$

$$y_2 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) \tag{2.50}$$

Sabendo que $e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2isen(\beta x)$, temos então

$$y_2 = e^{\alpha x}(2isen(\beta x)) = i2e^{\alpha x}sen(\beta x)$$

Pelo colorário (2.9.1), as funções $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e $e^{\alpha x}sen(\beta x)$ são soluções para a equação (2.46). Como as soluções são LI em $(-\infty, \infty)$, pois $W(e^{\alpha x}\cos(\beta x)\ , e^{\alpha x}sen(\beta x)) \neq 0$. Conclui-se então que tais funções formam um conjunto fundamental de soluções. Pelo princípio da superposição, a solução geral será dada por:

$$y = e^{\alpha x}[c_1\cos(\beta x) + c_2 sen(\beta x)]$$

2.10 Equações Não-Homogêneas

Vimos no estudo anterior como obter a solução geral de uma EDO linear homogênea. Agora veremos como resolver o problema para equações não homogêneas. Uma equação linear de segunda ordem é não homogênea, quando é escrita na forma

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x) \tag{2.51}$$

com p, q funções contínuas da variável independente x e $g(x)$ uma função não nula.

Teorema 2.10.1 *Seja y_p uma solução para equação diferencial linear não homogênea de n-ésima ordem em um intervalo I e sejam $y_1, y_2, ..., y_n$ um conjunto fundamental de soluções para equação homogênea associada no intervalo. Então, para qualquer solução $y(x)$ em I, podemos encontrar constantes $c_1, c_2, ..., c_n$ tais que*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x) + y_p(x)$$

Demonstração: Vamos provar para $n = 2$. Seja $y(x)$ e $y_p(x)$ soluções para equação (2.51). Definindo $Y(x) = y(x) - y_p(x)$, queremos mostrar que $Y(x)$ é solução da equação homogênea associada

$$y^{''}(x) + p(x)y^{'}(x) + q(x)y(x) = 0 \tag{2.52}$$

Substituindo o valor de $Y(x)$ na equação (2.52), temos $Y^{''}(x) + p(x)Y^{'}(x) + q(x)Y(x) = (y^{''}(x) - y_p^{''}(x) + p(x)[y^{'}(x) - y_p^{'}(x)] + q(x)[y(x) - y_p(x)])$

$\Rightarrow$

$Y^{''}(x) + p(x)Y^{'}(x) + q(x)Y(x) = y^{''}(x) + p(x)y^{'}(x) + q(x)y(x) - [y_p^{''}(x) + p(x)y_p^{'}(x) + q(x)y_p(x)]$

Como $y(x)$ e $y_p(x)$ são soluções para a equação não homogênea, logo $y^{''}(x) + p(x)y^{'}(x) + q(x)y(x) = g(x) = y_p^{''}(x) + p(x)y_p^{'}(x) + q(x)y_p(x)$.
Daí, temos então $g(x) - g(x) = 0$
Sendo assim, $Y(x)$ é solução da equação homogênea (2.52), pelo teorema 2.9.1, temos que $Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, como $Y(x) = y(x) - y_p(x)$, temos

$$y(x) - y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) \tag{2.53}$$

■

Para encontrar a solução geral de equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea, encontramos primeiro a solução geral da homogênea associada e em seguida a particular da não homogênea. Contudo, como encontramos a solução particular da equação não homogênea?. Na sequência, apresentaremos um método eficaz que aplica-se em quaisquer EDOs lineares de coeficientes constantes ou não, chamado método da variação de parâmetros.

2.10.1 Método da variação de parâmetros

Seja a equação linear de segunda ordem não homogênea

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x) \tag{2.54}$$

talque sua homogênea associada é dada por:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \tag{2.55}$$

cuja solução geral é da forma

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{2.56}$$

A ideia básica do método é substituir as constantes c_1 e c_2 por funções $u_1(x)$ e $u_2(x)$ de modo que, ao determinar essas funções, o resultado seja solução da equação não homogênea. Isto nos dá

$$y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \tag{2.57}$$

Derivando a equação (2.57), temos:

$$y' = u_1'(x)y_1(x) + u_1(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2(x) + u_2(x)y'(x)$$

Vamos supor que seja nula a soma das parcelas que envolvem $u_1'(x)$ e $u_2'(x)$, isto é

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \tag{2.58}$$

Assim

$$y' = u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x)$$

Agora,derivando y'

$$y'' = u_1'(x)y_1'(x) + u_1(x)y_1''(x) + u_2'(x) + u_2(x)y_2''(x)$$

Substituindo os valores de y'', y' e y na equação (2.54), temos

$$[u_1'(x)y_1'(x) + u_1(x)y_1''(x) + u_2'(x)y_2'(x) + u_2(x)y_2''(x)] + p(x)[u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x)] +$$
$$q(x)[u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)] = g(x)$$

$\Rightarrow$

$$u_1(x)[y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+q(x)y_1(x)]+u_2(x)[y_2''(x)+p(x)y_2'(x)+q(x)y_2(x)]+u_1'(x)y_1'(x)+ u_2'(x)y_2'(x)=g(x)$$

Como y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea (2.55), temos que $[y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+ q(x)y_1(x)]$ e $[y_2''(x)+p(x)y_2'(x)+q(x)y_2(x)]$ são iguais a zero, o que nos resta

$$u_1'(x)y_1'(x)+u_2'(x)y_2'(x)=g(x) \tag{2.59}$$

Temos que as equações (2.58) e (2.59) formam um sistema de equações lineares nas derivadas $u_1'(x)$ e $u_2'(x)$, que pode ser resolvido na forma tradicional

$$\begin{cases} u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x)=0 \\ u_1'(x)y_1'(x)+u_2'(x)y_2'(x)=g(x) \end{cases}$$

Isolando $u_1'(x)$ na primeira equação e substituindo na segunda, temos

$$u_1'(x)=\frac{-u_2'(x)y_2(x)}{y_1(x)} \Rightarrow$$

$$[\tfrac{-u_2'(x)y_2(x)}{y_1(x)}]y_1'(x)+u_2'(x)y_2'(x)=g(x)$$

Multiplicando todos os termos pelo fator $y_1(x)$ e colocando $u_2'(x)$ em evidência, temos

$$u_2'(x)[-y_2(x)y_1'(x)+y_1(x)y_2'(x)]=y_1(x)g(x)$$

Logo,

$$u_2'(x)=\frac{y_1(x)g(x)}{-y_2(x)y_1'(x)+y_1(x)y_2'(x)}$$

mas, $-y_2(x)y_1'(x)+y_1(x)y_2'(x)$ é o $W[y_1,y_2](x)$, então

$$u_2'(x)=\frac{y_1(x)g(x)}{W[y_1,y_2](x)}$$

substituindo o valor $u_2'(x)$ em $u_1'(x)$ encontramos

$$u_1'(x)=\frac{-y_2(x)g(x)}{W[y_1,y_2](x)}$$

Integrando-as em relação a x, obtemos

$$u_1(x)=-\int\frac{y_2(x)g(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx$$

$$u_2(x)=\int\frac{y_1(x)g(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx$$

substituindo os valores encontrados na equação (2.57), obtemos uma solução particular

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)g(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)g(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx.$$

e a solução geral é dada por

$$y(x) = y_h + y_p \tag{2.60}$$

onde y_h é a solução geral da homogênea associada e y_p é a solução particular da não homogênea.

Exemplo 5 *Resolva a equação diferencial*

$$y^{''} + 2y^{'} + y = 4e^{-t};$$

Sujeito às condições iniciais; $y(0) = 2, y^{'}(0) = -1$

Solução: A solução geral da equação diferencial é dada calculando a solução da homogênea associada y_h, somada à uma solução particular y_p, ou seja, $y(t) = y_h + y_p$. Vamos calcular a solução da homogênea associada. Para isso, temos o seguinte

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

Resolvendo a equação do 2 grau pela fórmula de Báskara, encontramos duas raízes

$$r_1 = -2 + \frac{\sqrt{0}}{2}$$
$$r_2 = -2 - \frac{\sqrt{0}}{2}$$

Logo, percebe-se que as ráizes r_1 e r_2 são iguais e valem -1. Sendo assim, a solução da homogênea é dada por;

$$y_h = C_1e^{r_1t} + C_2te^{r_1t}$$

Como ambas as raízes são iguais, temos

$$y_h = C_1e^{-t} + C_2te^{-t}$$

Calculando $y_h^{'}$ e aplicando as condições iniciais, encontra-se os valores para as constantes C_1 e C_2. Assim,

$$y_h^{'} = -C_1e^{-t} + C_2(e^{-t} + te^{-t})$$

Das condições iniciais, temos

$$2 = C_1e^0 + C_2 0e^0$$

Logo,

$$C_1 = 2$$

Substituindo $y^{'}(0) = 0$, encontramos C_2

$$-1 = -2e^0 + C_2(e^0 + 0e^0)$$

Assim,

$$C_2 = 1$$

Segue que,

$$y_h = 2e^{-t} + te^{-t}$$

Vamos calcular agora a solução particular, para isso, vamos encontrar valores para as funções $u(t)$ e $v(t)$;

$$y_p = u(t)y_1 + v(t)y_2$$

onde $y_1 = e^{-t}$ e $y_2 = te^{-t}$

Calculando $y_1^{'}$ e $y_2^{'}$, temos

$y_1^{'} = -e^{-t}$ e $y_2^{'} = e^{-t} - te^{-t}$ Calculando o determinante da matriz W formada por; y_1, $y_1^{'}$,y_2, $y_2^{'}$

$$W = \begin{bmatrix} y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} -e^{-t} & e^{-t} - te^{-t} \\ e^{-t} & te^{-t} \end{bmatrix}$$

Temos então;

$$W = (-e^{-t})te^{-t} - e^{-t}(e^{-t} - te^{-t} = -te^{-2t} - e^{-2t} + te^{-2t} = -e^{-2t}.$$

A função $u(t)$ é dada por

$$u(t) = \int \frac{y_2 g(t)}{W} dt$$

onde $g(t) = 4e^{-t}$.

$$u(t) = \int \frac{te^{-t}4e^{-t}}{-e^{-2t}} dt$$

$\Rightarrow$

$$u(t) = \int \frac{4te^{-2t}}{-e^{-2t}} dt$$

$\Rightarrow$

$$u(t) = -4 \int t dt = -2t^2$$

Calculando $v(t)$, temos

$$v(t) = \int -\frac{y_1 g(t)}{W} dt$$

$\Rightarrow$

$$v(t) = -\int \frac{e^{-t} 4e^{-t}}{-e^{-2t}} dt = 4 \int t dt$$

$\Rightarrow$

$$v(t) = 4t$$

Logo, a solução particular será dado por

$$y^p = -2t^2 e^{-t} + 4t^2 e^{-t}$$

$\Rightarrow$

$$y_p = 2t^2 e^{-t}$$

Sendo assim,

$$y(t) = y_h + y_p$$

$\Rightarrow$

$$y(t) = 2e^{-t} + te^{-t} + 2t^2 e^{-t}.$$

3 TRANSFORMADA DE LAPLACE

A transformada de Laplace é um importante método de resolução de equações diferenciais e dos problemas de valores iniciais, reduzindo-se uma EDO cuja solução pelos métodos tradicionais seria difícil ou trabalhosa, a uma equação algébrica, cuja solução torna-se mais fácil de ser encontrada.

Definição 3.1 *Seja $f(t)$ uma função definida para $t \geq 0$. Chama-se **Transformada de Laplace** da função f e denota-se por $F(s)$ ou $\mathscr{L}\{f(t)\}$, uma função definida por:*

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{3.1}$$

Como a integral é imprópria, então

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \lim_{a\to\infty}\int_0^a f(t)e^{-st}dt$$

A integral é definida para todo s desde que a integral convirja e o limite seja finito.

Exemplo 6 *Considere a seguinte função f(t)=1.Encontre a transformada de laplace de f(t).*

Solução: Pela definição, temos:

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty 1e^{-st}dt \tag{3.2}$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{-e^{-st}}{s}|_0^a \tag{3.3}$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{-e^{-sa}}{s} - \frac{-e^{s.0}}{s} \tag{3.4}$$

$$= \frac{e^0}{s} \tag{3.5}$$

$$= \frac{1}{s}, s > 0. \tag{3.6}$$

Exemplo 7 *Calcule $\mathscr{L}\{e^{at}\}$.*

Solução: Pela definição 3.1, temos

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\{e^{at}\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt && (3.7)\\
&= \int_0^\infty e^{(a-s)t}dt && (3.8)\\
&= \left[\lim_{t\to\infty}\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\right]-\frac{1}{a-s}e^{(a-s)0} && (3.9)\\
&= \frac{1}{a-s}\lim_{t\to\infty}e^{(a-s)t}-\frac{1}{a-s} && (3.10)\\
&= \frac{1}{s-a}. && (3.11)\\
\mathscr{L}\{e^{at}\} &= \frac{1}{s-a}, s>a. && (3.12)
\end{aligned}
$$

Logo

$$\mathscr{L}\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}, s>a$$

Exemplo 8 *Calcule* $\mathscr{L}\{t\}$

Solução: Temos que

$$\mathscr{L}\{t\}=\int_0^\infty te^{-st}dt$$

usando a técnica de integrais por partes

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\{t\} &= \frac{-te^{-st}}{s}-\int_0^\infty\frac{-e^{-st}}{s}dt && (3.13)\\
&= \frac{-te^{-st}}{s}|_0^\infty-\frac{-1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt && (3.14)\\
&= \frac{-1}{s}\left[\lim_{a\to\infty}te^{-st}-0-\int_0^\infty e^{-st}dt\right] && (3.15)\\
&= \frac{-1}{s}\left[-\int_0^\infty e^{-st}dt\right] && (3.16)
\end{aligned}
$$

pelo exemplo 6, $\int_0^\infty e^{-st}dt=\mathscr{L}\{1\}=\frac{1}{s}$, sendo assim

$$\mathscr{L}\{t\}=\left(\frac{-1}{s}\right)\frac{-1}{s}=\frac{1}{s^2} \tag{3.17}$$

Usando essa mesma estratégia podemos encontrar a Transformada de Laplace de várias funções. O quadro a seguir mostra o resultado de algumas

A transformada de laplace associa cada função $f(t)$ uma nova função $F(s)$ como operador sobre funções . Uma das propriedades mais importantes deste operador é dada pelo seguinte teorema.

Tabela 1 – Transformadas de Laplace:

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, com n $\in \mathbb{N}$
$sen(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$, s>0
$cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$, s>0
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$tsen(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$tcos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$e^{at}cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, s>0
$senh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, s>0

Fonte: (BOYCE; DIPRIMA, 2010)

Teorema 3.0.1 (Teorema da Linearidade) *Sejam f e g funções contínuas por partes no intervalo* $[0,\infty)$ *e* α, β *contantes. Temos que*

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\} = \alpha\mathscr{L}\{f(t)\}+\beta\mathscr{L}\{g(t)\}$$

Demosntração: Temos que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}[\alpha f(t)+\beta g(t)]dt && (3.18)\\
&= \lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{-st}[\alpha f(t)+\beta g(t)]dt && (3.19)\\
&= \lim_{k\to\infty}\int_0^k \alpha e^{-st} f(t)dt + \lim_{k\to\infty}\int_0^k \beta e^{-st}g(t)dt && (3.20)\\
&= \alpha\lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{-st} f(t)dt + \beta\lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{-st}g(t)dt && (3.21)\\
&= \alpha\mathscr{L}\{f(t)\}+\beta\mathscr{L}\{g(t)\}. && (3.22)
\end{aligned}$$

3.0.1 Condições de Existência

A transformada de Laplace é definida por uma integral imprópria,

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-st}dt \qquad (3.23)$$

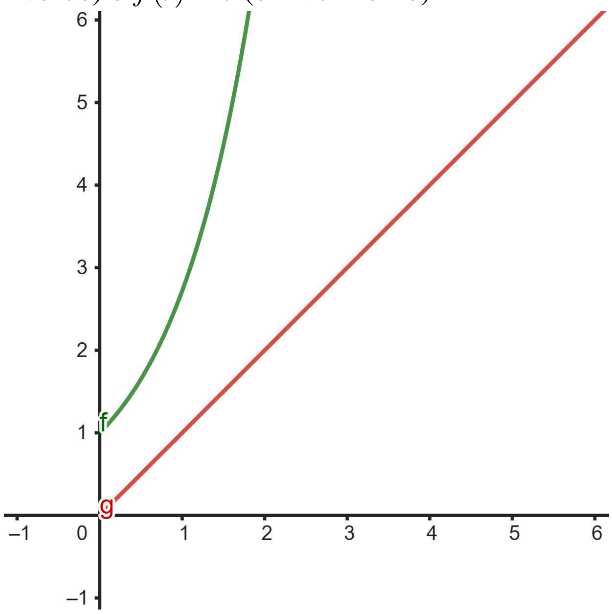
que pela definição, precisa ser convergente, logo fica claro que nem toda função terá transformada de laplace. O teorema a seguir fornecerá condição suficiente para que uma função tenha transformada de laplace. Para tanto, é preciso enuciar duas definições para na sequência apresentar o teorema.

Definição 3.2 (Função Seccionalmente Contínua) *Uma função f(t) é dita seccionalmente contínua se tem no máximo um número finito de descontinuidade no intervalo $[a,b]$, contido no intervalo $[0,\infty)$, e nestes pontos os limites laterais existem e são finitos.*

Definição 3.3 (Ordem Exponencial) *Uma função é de dita de Ordem Exponencial se existem constantes a, M>0 e T>0, tais que $|f(t)| \leq Me^{at}$ para todo $t > T$.*

Se a função f for crescente, então a condição de ordem exponencial afirma que o gráfico da função no intervalo $[T,\infty)$, não cresce mais rápido que o gráfico da função Me^{at}, onde a é uma constante positiva. As funções $f(t) = t$ e $f(t) = e^{-t}$, saõ funções do tipo exponencial para $t > 0$, pois temos $|t| \leq e^{t}$ e $|e^{-t}| \leq e^{t}$. Vejamos os gráficos dessas funções .

Figura 1 – $f(t) = e^{t}$ (em verde) e $f(t) = t$ (em vermelho)

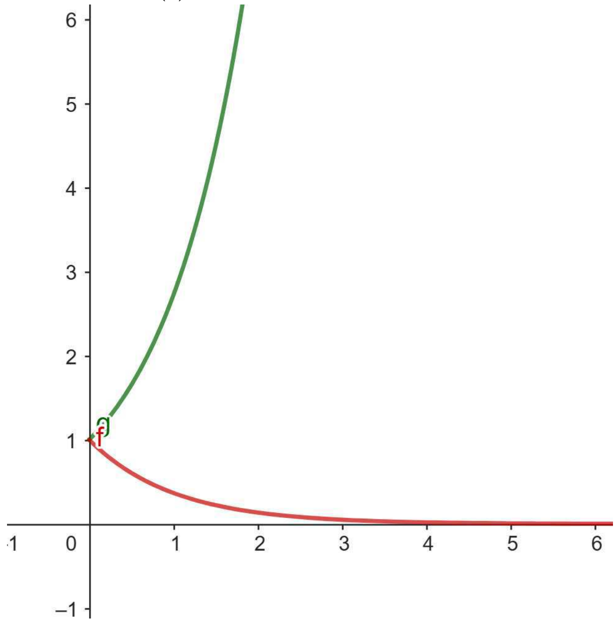


Fonte: Própria

.

Teorema 3.0.2 (Condições Suficientes de Existência) *Seja f uma função contínua por partes no intervalo $[0,\infty)$ e de ordem exponencial para $t > T$.Então a transformada de Laplace existe para $s > c$.*

Figura 2 – $f(t) = e^t$ (em verde) e $f(t) = e^{-t}$ (em vermelho)



Fonte:Própria

Demonstração: Temos que

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

Dividindo a integral imprópria em duas partes, temos:

$$\int_0^M e^{-st} dt + \int_M^\infty e^{-st} f(t) dt$$

Pela Definição (3.2) a primeira integral existe, logo,para $F(s)$ existir temos que analisar a convergência da segunda integral. Pela Definição (3.3), temos $t \geq M$, sendo assim

$$\int_M^\infty |e^{-st} f(t)| dt \leq K \int_M^\infty e^{-st} e^{at} dt \tag{3.24}$$

$$= K \int_M^\infty e^{(a-s)t} dt \tag{3.25}$$

$$= -M \frac{-e^{-(s-a)t}}{s-a} \tag{3.26}$$

$$= M \frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} |_M^\infty \tag{3.27}$$

como $s > a$, a integral é convergente e a transformada de laplace está bem definida.

A transformada de laplace de f' está relacionada à transformada de f, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 3.0.3 *Supondo f uma função contínua e que $f^{'}$ seja seccionalmente contínua no intervalo $[0,T]$, considerando também que f seja de ordem exponencial. Então $\mathscr{L}\{f^{'}(t)\}$ existe para $s > T$.*

Demosntração: Se $\mathscr{L}\{f^{'}(t)\}$ existe, então a integral será dada da forma

$$\mathscr{L}\{f^{'}(t)\} = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}f^{'}(t)dt$$

Como $f^{'}$ é seccionalmente contínua no intervalo $[0,T]$, existe então uma quantidade finita de pontos com descontinuidade, sendo eles $t_1, t_2, ..., tn$, assim a integral pode ser desmembrada ficando da forma

$$\mathscr{L}\{f^{'}(t)\} = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}f^{'}(t)dt$$
$$= \lim_{T\to\infty}\left(\int_0^{t_1} e^{-st}f^{'}(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st}f^{'}(t)dt +, ..., + \int_{t_n}^{T} e^{-st}f^{'}(t)dt\right).$$

usando método de integrais por partes para integrar cada função, temos

$$\lim_{T\to\infty}\left(f(t)e^{-st}|_0^{t_1} + f(t)e^{-st}|_{t_1}^{t_2} + ... + f(t)e^{-st}|_{t_n}^{T}\right) +$$
$$\lim_{T\to\infty} s\left(\int_0^{t_1} f(t)e^{-st}dt + \int_{t_1}^{t_2} f(t)e^{-st}dt + ... + \int_{t_n}^{T} f(t)e^{-st}dt\right)$$

Aplicando os limites de integração, obteremos como resultado $-f(0)$(devido aos cancelamentos).A soma das integrais do segundo membro podem ser reduzidas a uma única integral, ficando assim

$$\mathscr{L}\{f^{'}(t)\} = -f(0) + s\lim_{T\to\infty}\int_0^T f(t)e^{-st}dt$$

resultando então

$$\mathscr{L}\{f^{'}(t)\} = s\mathscr{L}\{f(t)\} - f(0) \blacksquare$$

Para encontra $\mathscr{L}\{f^{''}(t)\}$ segue o mesmo caminho que $\mathscr{L}\{f^{'}(t)\}$. Se $f^{'}$ e $f^{''}$ obedecem as condições do Teorema (3.0.2), têm-se que a Transfromada de Laplace de $f^{''}$ existe para $s > a$ e é dada por

$$\mathscr{L}\{f^{''}(t)\} = s^2\mathscr{L}\{f(t)\} - sf(0) - f^{'}(0) \tag{3.28}$$

Pode-se encontrar a Transformada e Laplace das derivadas de ordem mais alta, para isso vejamos o colorário a seguir.

Corolário 3.0.1 *Suponha que as funções $f, f', ..., f^{n-1}$ sejam seccionalmente contínuas no intervalo $[0,A]$. Além disso, suponhamos também que as funções $f, f', ..., f^{n-1}$ sejam de ordem exponencial. Entao, $\mathscr{L}\{f^n(t)\}$ existe para $s > a$ e é dada da seguinte forma*

$$\mathscr{L}\{f^n(t)\} = s^n\mathscr{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - ... - sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0).$$

O Teorema a seguir mostra que ao multiplicarmos a função $f(t)$ por uma exponencial obtém-se uma translação da transformada $F(s)$.

Teorema 3.0.4 (Primeiro Teorema da Translação) *Seja a um número real, então,*

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt & (3.29)\\
&= \int_0^\infty e^{(a-s)t}f(t)dt & (3.30)\\
&= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt & (3.31)\\
&= F(s-a). & (3.32)
\end{aligned}$$

■

Diante dos conceitos já apresentados nesse trabalho, percebemos que dada uma função $f(t)$ que satisfaz as condições impostas no Teorema 3.0.3, existe sua Transformada $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$. Sendo assim, fica o questionamento, será que se dada $F(s)$ com certas propriedades, pode-se encontrar $f(t)$?. A resposta para essa pergunta é sim, e ocorre através da **Transformada Inversa de Laplace** que é denotada por $\mathscr{L}^{-1}\{f(t)\}$. No entanto, para realização do cálculo necessita-se do conhecimento sobre funções de variáveis complexas e como no nosso trabalho usaremos apenas funções com variáveis reais,não nos aprofundaremos nesse tema. O leitor interessado em apriomorar os conhecimentos sobre o desenvolvimento da Transformada Inversa de Laplace, recomenda-se consultar (TONIDANDEL, 2011) ou (MARSDEN; HOFFMAN, 1999).

Pode-se provar que se f uma função contínua cuja Transformada de Laplace é F, então não existe uma outra função contínua tendo a mesma transformada. Em outras palavras, existe uma bijeção entre as funções e suas Transformadas de Laplace. Assim, as transformadas Inversas são espelhadas nas já conhecidas Transformadas de Laplace, que podem ser encontradas na tabela (**??**).

Exemplo 9 *Foi mostrado no exemplo 6 que* $\mathscr{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$*.Então,* $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = 1$.

Exemplo 10 *Temos no exemplo 7,* $\mathscr{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$*. Então* $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s-a}\} = e^{at}$.

Tabela 2 – Transformadas Inversa de Laplace

$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$	$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$
$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$, com n $\in \mathbb{N}$	t^n
$\dfrac{a}{s^2+a^2}$, s>0	$sen(at)$
$\dfrac{s}{s^2+a^2}$, s>0	$cos(at)$
$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
$\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$tsen(at)$
$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$tcos(at)$
$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$, s>a	$e^{at}sen(bt)$
$F(s-a)$	$e^{at}f(t)$
$\dfrac{a}{s^2-a^2}$	$senh(at)$
$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$cosh(at)$
$\dfrac{1}{s-a}$, s>0	e^{at}

Fonte: (BOYCE; DIPRIMA, 2010)

3.1 Função Degrau Unitário Ou Função de Heaviside

Em engenharia. encontramos frequentemente funções que podem estar em uma dualidade, "ligada"ou "desligada", como por exemplo uma força externa agindo sobre um sistema mecânico. Para casos assim, é conveninete definir uma função especial chamada **função degrau unitário ou função de Heaviside**(ZILL, 2001).

Definição 3.4 *A função* $u(t-a)$ *é definida por*

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases} \tag{3.33}$$

é chamada função Degrau Unitário ou função de Heaviside.

Representação gráfica:

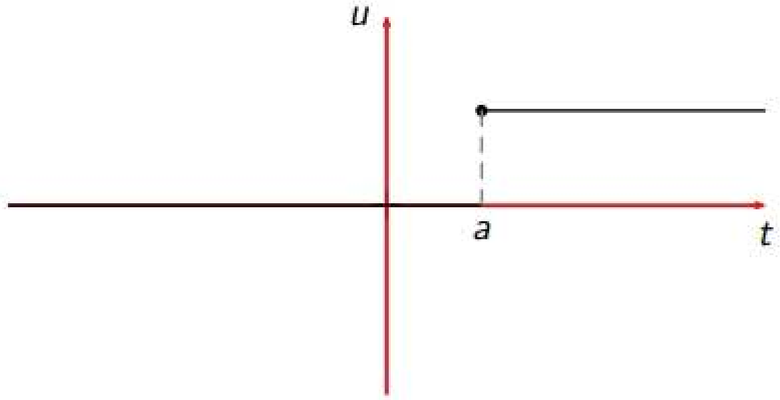


Figura 3 – Função Degrau Unitário

Pode-se usar a Função Degrau Unitário para escrever funções contínuas por partes em uma forma mais compacta. Considere a função

$$f(t) = \begin{cases} h(t), & 0 \leq t < a \\ v(t), & t \geq a \end{cases}$$

Então, podemos escrever

$$f(t) = h(t) - h(t)u(t-a) + v(t)u(t-a)$$

Pela Definição 3.4

$$f(t) = \begin{cases} h(t) - h(t).0 + v(t).0, & 0 \leq t < a \\ h(t) - h(t).1 + v(t).1, & t \geq a \end{cases}$$

Do mesmo modo, uma função da forma

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ h(t), & a \leq t \leq b \\ 0, & t \geq b \end{cases}$$

pode ser escrita como

$$f(t) = h(t)[u(t-a) - u(t-b)]$$

Podemos encontrar a Transfromada e Laplace da função Degrau Unitário.

Exemplo 11 *Determine a Transformada de Laplace da função*

$$f(t) = u(t-a)$$

***Solução**: Pela definição, temos*

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t-a)dt = \int_0^{a} e^{-st} u(t-a)dt + \int_a^{\infty} e^{-st} u(t-a)dt$$

$$= \int_a^{\infty} e^{-st} dt$$

$$= \lim_{c\to\infty} \int_a^{c} e^{-st} dt$$

$$= \lim_{c\to\infty} -\frac{e^{-st}}{s}|_a^c$$

$$= -\frac{-e^{-as}}{s}$$

$$= \frac{e^{-as}}{s},\ s > 0.$$

Teorema 3.1.1 (Segundo Teorema do Deslocamento) *Seja k uma constante positiva. Se $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$, então a transformada da função*

$$h(t) = f(t-a)u(t-a)$$

é $H(s) = e^{-as}F(s)$.

Demonstração: Pela Definição 3.1, temos

$$H(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-a)u(t-a)dt$$

$$= \int_0^{a} f(t-a)u(t-a)dt + \int_a^{\infty} e^{-st} f(t-a)u(t-a)dt$$

$$= \int_a^{\infty} e^{-st} f(t-a)u(t-a)dt = \int_a^{\infty} e^{-st} f(t-a)dt$$

Note que, no intervalo $[0,\infty)$, temos $u(t-a) = 1$. Sendo assim, fazendo $v = t-a$, temos $dv = dt$. Assim;

$$H(s) = \int_0^{\infty} e^{-s(a+v)} f(v)dv = \int_0^{\infty} e^{-as}.e^{-vs} f(v)dv$$

$$= e^{-as}\int_0^{\infty} e^{-vs}f(v)dv$$

$$= e^{-as}F(s).$$

Achar a Transformada de Laplace da função h(t) dada por;

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ (t-2)^2, & t \geq 2 \end{cases}$$

Solução: Podemos escrever $h(t)$ na forma em termos da função Degrau unitário como sendo

$$h(t) = (t-2)^2 u(t-2)$$

Seja $H(s)$ a transformada de $h(t)$ Como $a = 2$, pelo Teorema 3.1.1, temos $H(s) = e^{-2s}\mathscr{L}\{f(t)\}$, onde $f(t) = t^2$, portanto

$$H(s) = e^{-2s}\mathscr{L}\{t^2\} = e^{-2s}\frac{2}{s^3} = \frac{2e^{-2s}}{s^3}.$$

Do Teorema (3.1.1) vimos que $\mathscr{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$, onde $F(s)$ é a Transformada de Laplace de $f(t)$. Sendo assim, a forma Inversa será dada por;

$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a).$$

Na próxima seção vamos apresentar algumas propriedades da Transformada de Laplace que são úteis para aplicações de Equações Diferenciais Lineares sob o domínio de funções descontínuas ou de impulso que aparecem por exemplo, na análise de fluxo de corrente em circuitos elétricos ou nas vibrações de sistemas mecânicos.

3.2 Função Impulso(Delta de Dirac)

Os sistemas mecânicos estão frequentementes sujeitos a fenômenos impulsivos, ou seja, forças externas que atuam nesses sistemas por um pequeno intervalo de tempo e apresentam grande magnitude. Por exemplo, a massa de uma mola que sofre a ação de uma martelada, uma bola de tênis atingida por uma raquete,etc. A função

$$\delta_k(t-p) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < p-k \\ \dfrac{1}{2k}, & p-k \leq t < p+k \\ 0, & t \geq p+k \end{cases}$$

com $k > 0$ e $p > 0$, pode servir como modelo matemático de tais forças. Para k muito pequeno, $\delta_k(t-p)$ é essencialmente uma função constante de grande amplitude, que age num curto período de tempo. A função acima é chamada de **Impulso Unitário**, devido apresentar a propriedade

$$\int_0^\infty \delta_k(t-p)dt = 1$$

Outro tipo de impulso unitário utilizado na prática é o seguinte.

$$\delta(t-p) = \lim_{k\to 0} \delta_k(t-p) \tag{3.34}$$

A expressão (3.34), que não é uma função, caracteriza-se por duas propriedades

1ª) $\delta(t-p) = \begin{cases} \infty, & t = p \\ 0, & t \neq p \end{cases}$

2ª) $\displaystyle\int_0^\infty \delta(t-p) = 1$

A expressão $\delta(t-p)$ é chamada de função Delta de Dirac. A transformada de Laplace da função Delta de Dirac pode ser encontrada supondo formalmente que

$$\mathscr{L}\{\delta(t-p)\} = \lim_{k\to 0}\mathscr{L}\{\delta_k(t-p)\}$$

Teorema 3.2.1 *(Transformada de Laplace da Função Delta de Dirac). Sendo $p > 0$, a Transformada de Laplace da função Delta de Dirac é*

$$\mathscr{L}\{\delta(t-p)\} = e^{-sp}$$

Demonstração: Podemos escrever a função Impulso Unitário $\delta_k(t-p)$ em termos da função Degrau Unitário na sua forma compacta

$$\delta_k(t-p) = \frac{1}{2k}[U(t-(p-k)) - U(t-(p+k))]$$

Sendo assim

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\delta_k(t-p)\} &= \frac{1}{2k}\mathscr{L}\{U(t-(p-k)) - U(t-(p+k))\} \\
&= \frac{1}{2k}\left[\frac{e^{-s(p-k)}}{s} - \frac{e^{-s(p+k)}}{s}\right] \\
&= \frac{1}{2k}\left[\frac{e^{-sp}.e^{sk} - e^{-sp}.e^{-sk}}{s}\right]
\end{aligned}$$

Colocando o termo e^{-sp} em evidência, temos

$$= e^{-sp}\left[\frac{e^{sk}-e^{-sk}}{2ks}\right]$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\delta(t-p)\} &= \lim_{k\to\infty}\mathscr{L}\{\delta_k(t-p)\}\\ &= \lim_{k\to 0} e^{-sp}\left[\frac{e^{sk}-e^{-sk}}{2ks}\right]\\ &= e^{-sp}\lim_{k\to 0}\left[\frac{e^{sk}-e^{-sk}}{2ks}\right]\end{aligned}$$

Como o limite tem a forma indeterminada $\frac{0}{0}$, aplicamos $L^{'}Hospital$, o que resulta

$$\mathscr{L}\{\delta(t-p)\} = e^{-sp}\lim_{k\to 0}\left[\frac{se^{sk}+se^{-sk}}{2s}\right] = e^{-sp}$$

como queríamos demonstrar.
Se $p=0$, então $\mathscr{L}\{\delta(t-p)\} = \mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1$. Vejamos a seguir um exemplo de um problema de valor inicial usando a Transformada de Laplace.

Exemplo 12 *Resolva a equação diferencial*

$$y^{''}(t)+\frac{y^{'}(t)}{2}+y(t) = \delta(t-1)$$

sujeito as condições iniciais $y(0)=0, y^{'}(0)=0$.

Solução: Aplicando a Transformada de Laplace na Equação Diferencial acima, temos

$$\mathscr{L}\{y^{''}(t)\}+\frac{1}{2}\mathscr{L}\{y^{'}(t)\}+\mathscr{L}\{y(t)\} = \mathscr{L}\{\delta(t-1)\}$$

$\Rightarrow$

$$s^2Y(s)-sy(0)+y^{'}(0)+\frac{1}{2}sY(s)-y(0)+Y(s) = e^{-s}$$

Aplicando as condições iniciais, temos:

$$s^2Y(s)-s.0+0+\frac{1}{2}sY(s)-0+Y(s) = e^{-s}$$

Colocando $Y(s)$ em evidência

$$Y(s)(s^2+\frac{s}{2}+1) = e^{-s}$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{(s^2 + \frac{s}{2} + 1)}$$

Podemos escrever $(s^2 + \frac{s}{2} + 1)$ como sendo, $(s^1 + \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}$.

Ou seja,

$$Y(s) = e^{-s}.\frac{1}{(s^1 + \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}}$$

Pela linha 7 da Tabela 2, temos

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^1 + \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}}\right\} = \frac{4}{\sqrt{15}} e^{(-\frac{t}{4})} sen(\frac{\sqrt{15}}{4} t)$$

Portanto

$$y(t) = \frac{4}{\sqrt{15}} u(t) e^{(-\frac{t}{4})} sen(\frac{\sqrt{15}}{4} t).$$

4 PROBLEMA DE VALORES INICIAIS

Neste capítulo, será apresentado como a Transformada de Laplace pode ser usada para resolver problemas de valor inicial para equações deiferenciais com coeficientes constantes. A ideia é aplicar a Transformada de Laplace na equação Diferencial e, com as condições iniciais, escrever uma equação algébrica que após resolvida aplica-se a Transformada Inversa e obtém a solução do problema.

Vamos considerar a seguinte equação

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t) \tag{4.1}$$

com a, b, y_0 e y'_0 constantes. Aplicando a Transformada de Laplace

$$\mathscr{L}\{y''(t)\} + a\mathscr{L}\{y'(t)\} + b\mathscr{L}\{y(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\}$$

Pelo Teorema (3.0.3), temos

$$s^2\mathscr{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) + as\mathscr{L}\{y(t)\} - ay(0) + b\mathscr{L}\{y(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\}$$

Colocando o termo $\mathscr{L}\{y(t)\}$ em evidência no primeiro membro

$$\mathscr{L}\{y(t)\}[s^2 + as + b] - sy(0) - y'(0) - ay(0) = \mathscr{L}\{f(t)\}$$

Tomando $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ e $\mathscr{L}\{y(t)\} = Y(s)$, obtemos

$$Y(s)[s^2 + as + b] - sy(0) - y'(0) - ay(0) = F(s)$$

ou seja

$$Y(s) = \frac{F(s) + sy(0) + y'(0) + ay(0)}{[s^2 + as + b]} \tag{4.2}$$

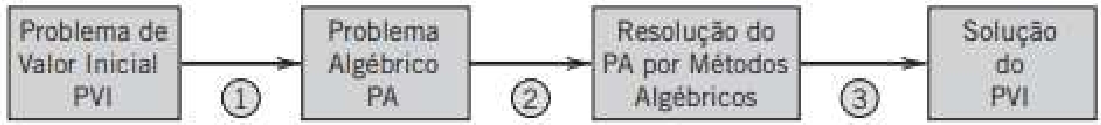
Sendo assim, a solução da equação (4.1), se reduz a resolver a equação 4.2 e conhecendo os valores de $y(0)$ e $y'(0)$, pode-se encontrar a solução da equação (4.2) e com isso resolvemos o PVI aplicando a Trnsformada Inversa de Laplace, como mostra o esquema a seguir.

.

Exemplo 13 *Resolva o problema de valor inicial*

$$y'' + 4y' + 4y = t^2e^{-2t}$$
$$y(0) = 0$$
$$y'(0) = 0$$

Figura 4 – Resolução de um PVI por Transformada de Laplace



Fonte: (KREYSZIG, 2009)

Solução: Aplicando a Transformada de Laplace em ambos os lados da equação

$$\mathscr{L}\{y^{''}+4y^{'}+4y\} = \mathscr{L}\{t^2e^{-2t}\}$$

Pelo Teorema (3.0.1), segue

$$\mathscr{L}\{y^{''}\}+4\mathscr{L}\{y^{'}\}+4\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{t^2e^{-2t}\}$$

$\Rightarrow$

$$s^2\mathscr{L}\{y\}-sy(0)-y^{'}(0)+4s\mathscr{L}\{y\}-y(0)+4\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{t^2e^{-2t}\}$$

pela Tabela 1 o valor $\mathscr{L}\{t^2e^{-2t}\} = \dfrac{2}{(s+2)^3}$, substituindo o valor da transformada e aplicando os valores de $y(0) = 0$ e $y^{'}(0) = 0$, temos

$$s^2\mathscr{L}\{y\}+4s\mathscr{L}\{y\}+4\mathscr{L}\{y\} = \frac{2}{(s+2)^3}$$

Considerando $\mathscr{L}\{y\} = Y(s)$ e colocando em evidência

$$Y(s)[s^2+4s+4] = \frac{2}{(s+2)^3}$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s+2)^3[s^2+4s+4]}$$

Fatorando $s^2+4s+4=0$, podemos encontrar duas raízes, sendo $x^{'}$ e $x^{''}$ as raízes da equação, segue que

$$x^{'} = -4+\frac{\sqrt{0}}{2} \Rightarrow x^{'} = -2$$
$$x^{''} = -4-\frac{\sqrt{0}}{2} \Rightarrow x^{''} = -2$$

Na forma fatorada, $s^2+4s+4 = 0 = (s+2)(s+2) = (s+2)^2$,sendo assim

$$Y(s) = \frac{2}{(s+2)^5}$$

Aplicando a transformada inversa em ambos os lados

$$\mathscr{L}^{1}\{Y(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{2}{(s+2)^5}\} \tag{4.3}$$

Sabemos que $\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$ é $y(t)$, precisamos encontrar $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{2}{(s+2)^5}\}$. Tendo conhecimento da Tabela (**??**) que $\mathscr{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, podemos manipular o lado direito de (4.3) afim de encontramos a solução, sendo assim

$$\frac{2}{(s+2)^5} = \frac{2}{4!}\frac{4!}{(s-(-2))^{4+1}} = \frac{2}{4!}(t^4e^{-2t})$$

De onde concluímos que

$$y(t) = \frac{t^4e^{-2t}}{12}.$$

Vamos retomar o exemplo (5) e resolvê-lo utilizando a transformada de laplace, com isso, termos uma idéia da facilidade que é a utilização desse método.

Exemplo 14 *Use a transformada de laplace para resolver o problema de valor inicial proposto.*

$$y^{''} + 2y^{'} + y = 4e^{-t}$$

Sujeito às condições iniciais $y(0) = 2, y^{'}(0) = -1.$

Solução: Aplicando a transformada de laplace em ambos os lados da equação, temos

$$\mathscr{L}\{y^{''} + 2y^{'} + y\} = \mathscr{L}\{4e^{-t}\}$$

Pelo Teorema (3.0.1), segue

$$\mathscr{L}\{y^{''}\} + 2\mathscr{L}\{y^{'}\} + \mathscr{L}\{y\} = 4\mathscr{L}\{e^{-t}\}$$

$\Rightarrow$

$$s^2\mathscr{L}\{y\} - sy(0) - y^{'}(0) + 2(s\mathscr{L}\{y\} - y(0)) + \mathscr{L}\{y\} = 4\mathscr{L}\{e^{-t}\}$$

Pela Tabela (**??**), o valor de $\mathscr{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{s+1}$, substituindo esse valor e atribuindo as condições iniciais, temos

$$s^2\mathscr{L}\{y\} - 2s + 1 + 2s\mathscr{L}\{y\} - 4 + \mathscr{L}\{y\} = \frac{4}{s+1}$$

Considerando $\mathscr{L}\{y\} = Y(s)$, podemos colocar em evidência

$$Y(s)(s^2+2s+1)-2s-3=\frac{4}{s+1}$$

$\Rightarrow$

$$Y(s)(s^2+2s+1)=\frac{4}{s+1}+2s+3$$

Fatorando (s^2+2s+1), podemos escrever da forma $(s+1)^2$ Assim,

$$Y(s)(s+1)^2=\frac{4}{s+1}+2s+3$$

Dividindo ambos os lados da equação por $(s+1)^2$, temos

$$Y(s)=\frac{4}{(s+1)^3}+\frac{2s+3}{(s+1)^2}$$

Contudo, podemos ainda escrever $(2s+3)$ na forma $(2(s+1)+1)$, resultando então

$$Y(s)=\frac{4}{(s+1)^3}+\frac{2(s+1)+1}{(s+1)^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y(s)=\frac{4}{(s+1)^3}+\frac{2(s+1)}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)^2}$$

Segue então

$$Y(s)=\frac{4}{(s+1)^3}+\frac{2}{(s+1)}+\frac{1}{(s+1)^2}$$

Aplicando a transformada inversa, temos;

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+1)^3}+\frac{2}{(s+1)}+\frac{1}{(s+1)^2}\right\}=$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+1)^3}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}$$

Pela Tabela (**??**), temos que $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)}\right\}=2e^{-t}$, $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}=te^{-t}$ e $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+1)^3}\right\}=2t^2e^{-t}$.

Concluimos então

$$y(t)=2e^{-t}+te^{-t}+2t^2e^{-t}$$

Exemplo 15 *Resolva o Problema de valor inicial*

$$y''-y'=e^t cos(t);\ y(0)=0, y'(0)=0$$

Solução: Aplicando a transformada de laplace em ambos os lados da equação, temos:

$$\mathscr{L}\{y^{''}\} - \mathscr{L}\{y^{'}\} = \mathscr{L}\{e^t cos(t)\}$$

Pelo Teorema (3.0.1), temos:

$$\mathscr{L}\{y^{''}\} - \mathscr{L}\{y^{'}\} = \mathscr{L}\{e^t cos(t)\}$$

Pela Tabela (**??**), $\mathscr{L}\{e^t cos(t)\} = \dfrac{s-1}{(s-1)^2+1}$
$\Rightarrow$

$$s^2\mathscr{L}\{y\} - sy(0) - y^{'}(0) - (s\mathscr{L}\{y\} + y(0)) = \frac{s-1}{(s-1)^2+1}$$

Aplicando as condições iniciais, temos

$$s^2\mathscr{L}\{y\} - s\mathscr{L}\{y\} = \frac{s-1}{(s-1)^2+1}$$

tomando $\mathscr{L}\{y\} = Y(s)$ e colocando-o em evidência

$$Y(s)(s^2 - s) = \frac{s-1}{(s-1)^2+1}$$

Podemos escrever $\dfrac{s-1}{(s-1)^2+1}$ como ,$\dfrac{s-1}{(s^2-2s+2}$

Com isso,

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s^2-s)(s^2-2s+2)}$$

temos que $(s^2 - s) = s(s-1)$, então

$$Y(s) = \frac{s-1}{s(s-1)(s^2-2s+2)}$$

simplificando $(s-1)$ do numerador com $s-1$ do denominador, temos

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2-2s+2)}$$

Sendo assim, a solução $y(t)$ será dada calculando a transformada inversa de laplace

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2-2s+2)}\right\}$$

utilizando o método das frações parciais, temos que:

$$\frac{1}{s(s^2-2s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2-2s+2}$$

multiplicando ambos os lados da equação por $s(s^2-2s+2)$, temos;

$$A(s^2-2s+2)+Bs+C(s)=1$$

Segue,

$$As^2-2As+2A+Bs^2+Cs=1$$

organizando os fatores, temos;

$$(A+B)s^2+(-2A+C)s+2A=1$$

Comparando os coeficientes

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+C=0 \\ A=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ou seja;

$$\begin{cases} A=\dfrac{1}{2} \\ \\ B=-\dfrac{1}{2} \\ \\ C=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{s(s^2-2s+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{s}+\frac{\frac{-1s}{2}+1}{s^2-2s+2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{s(s^2-2s+2)}=\frac{1}{2s}-\frac{1}{2}\frac{s}{(s-1)^2+1}+\frac{1}{(s-1)^2+1}$$

contudo, podemos escrever $\dfrac{s}{(s-1)^2+1}$ como sendo $\dfrac{s-1+1}{(s-1)^2+1}$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{s(s^2-2s+2)}=\frac{1}{2s}-\frac{1}{2}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+1}+\frac{1}{(s-1)^2+1}\right\}+\frac{1}{(s-1)^2+1}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{s(s^2-2s+2)}=\frac{1}{2s}-\frac{s-1}{2((s-1)^2+1)}-\frac{1}{2((s-1)^2+1)}+\frac{1}{(s-1)^2+1}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{s(s^2-2s+2)}=\frac{1}{2s}-\frac{s-1}{2((s-1)^2+1)}+\frac{1}{(s-1)^2+1}$$

$y(t)$ será dada por;

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s}-\frac{s-1}{2((s-1)^2+1)}+\frac{1}{(s-1)^2+1}\right\}$$

pela Tabela (**??**), temos;

$$y(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^t cos(t)+\frac{1}{2}e^t sen(t)$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho teve como foco principal fazer um pequeno estudo sobre o método da Transformada de Laplace, que é um método extremamente importante na resolução de Equações Diferenciias, que não é estudado no curso regular de EDO. Destacamos os principais conceitos relacionados às Equações Difenrenciais Ordinárias, que foram de suma importância para o desenvolvimento desse método.

Foi notório que a Transformada de Laplace apresenta grande utilidade e aplicação em diversas áreas de estudo, no entanto o objetivo principal do trabalho foi fazer uma comparação desse método de resolução, com outros métodos estudados na disciplina regular de EDO como o método da variação de parâmetros e o método dos coeficientes constantes, para com isso, qual método apresentaria maior facilidade na resolução de problemas de valores inicial relacionados às Equações Lineares de 2ª ordem como visto nos exemplos resolvidos.

Onde (5) foi solucionado usando os métodos tradicionais de EDOs, na qual consistia encontrar uma solução para a homogênea associda e uma solução particular para com isso,encontrar a solução geral e o exemplo (14), foi resolvido usando o método da Transformada de Laplace, que seu deu encontrando uma equação algébrica e ao resolvê-la, aplicou-se a Transformada Inversa de Laplace, encontrando assim a solução desejada.

Diante disso, percebemos a importância e praticidade que é trabalhar com a Transformada de Laplace, pois é um método eficiente na resolução de Problemas de Valor Inicial, na qual diminui consideralvemente a complexidade do problema que deseja resolver.

Os exemplos resolvidos nesse trabalho, são exercícios que podem ser consultados em (BOYCE; DIPRIMA, 2010),(ZILL, 2001), que foram as principais referências desse estudo.

Uma sugestão para estudos é futuros é utilizar a Transfromada de Laplace para analisar o comportamento dinâmico de um sistema linear, como o problema do pêndulo simples que é um sistema muito usado no estudo de movimentos oscilatórios e periódicos.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. [S.l.]: LTC Rio de Janeiro, 2010. v. 10.

KREYSZIG, E. **Matemática superior para engenharia**. [S.l.]: Livros Tecnicos e Cientificos, 2009.

MARSDEN, J. E.; HOFFMAN, M. J. **Basic complex analysis**. [S.l.]: Macmillan, 1999.

SANTOS, R. J. Introduçaoas equaçoes diferenciais ordinárias. **Belo Horizonte**, 2011.

TONIDANDEL, D. A. V. Entre o real e o complexo: uma visao unificada do conceito de transformada. Universidade Federal de Minas Gerais, 2011.

ZILL, D. **Cullen. Equações Diferenciais**. [S.l.]: Editora Pearson Education. São Paulo, 2001.