

CPgEE/CCT-UFPb

COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

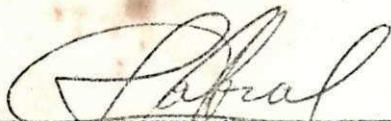
PARECER FINAL DO JULGAMENTO DA DISSERTAÇÃO DO MESTRANDO

WILTON PEREIRA DA SILVA

TÍTULO: "Teoria de Perturbação em Cálculos de Reator Nuclear"

CONCEITO: Aprovado com Distinção

COMISSÃO EXAMINADORA:

  
\_\_\_\_\_  
PROF. JOÃO SILVEIRA CABRAL - Mestre  
- Presidente -

  
\_\_\_\_\_  
PROF. JURGEN WOLFGANG PRECKER - Ph.D  
- Examinador Interno -

  
\_\_\_\_\_  
PROF. ZIELI DUTRA THOMÉ FILHO - Doutor  
- Examinador Externo -

Campina Grande, 25 de março de 1983.

WILTON PEREIRA DA SILVA

TEORIA DE PERTURBAÇÃO

EM

CÁLCULOS DE REATOR NUCLEAR

- APLICAÇÃO EM REATORES TÉRMICOS -

Dissertação apresentada à Coordenação dos Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal da Paraíba, em cumprimento parcial às exigências para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Processamento da Energia

ORIENTADOR: Prof. João Silveira Cabral

CAMPINA GRANDE, PB, MARÇO DE 1983.



S586t Silva, Wilton Pereira da.  
Teoria de perturbação em cálculos de reator nuclear :  
aplicação em reatores térmicos / Wilton Pereira da Silva. -  
Campina Grande, 1983.  
86 f.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) -  
Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências e  
Tecnologia, 1983.  
"Orientação : Prof. João Silveira Cabral".  
Referências.

1. Reator Nuclear - Engenharia Elétrica. 2. Teoria da  
Perturbação. 3. Reatores Térmicos. 4. Dissertação -  
Engenharia Elétrica. I. Cabral, João Silveira. II.  
Universidade Federal da Paraíba - Campina Grande (PB). III.  
Título

CDU 621.039.51(043)



Agradeço a todos que colaboraram direta ou indiretamente na realização deste trabalho.

## ABSTRACT

For the calculation of the densities of the nuclides in a nuclear reactor at constant power during its cycle, the method of perturbation is discussed. It is common practice to neglect second-order terms in this calculations, substituting the unknown neutron flux at the time  $t$  by the flux at time  $t_0$ .

In order to include second-order terms, a formula the perturbation is derived, using iterative techniques for the calculation of the flux.

The formulas of the perturbation are applied to a thermal reactor and the results are in agreement with the direct calculation.

## RESUMO

O cálculo das densidades dos nuclídeos por teoria de perturbação é discutido, para um reator nuclear operando com potência constante durante o seu ciclo. Nesse cálculo, é comum o desprezo dos termos de segunda ordem com a substituição do fluxo de nêutrons num tempo  $t$ , desconhecido, pelo fluxo no tempo  $t_0$ .

Para incluir os termos de segunda ordem, é derivada uma fórmula de perturbação com técnica iterativa para o cálculo do fluxo.

As fórmulas de perturbação aplicadas em cálculos de um reator térmico fornecem resultados que concordam com o cálculo direto.

## SÍMBOLOS

- $\phi$  - Fluxo de neutrons
- $\Sigma$  - Seção de choque macroscópica
- $\chi$  - Espectro de fissão
- $\nu$  - Neutrons emitidos na fissão
- $\vec{j}$  - Densidade de corrente de neutrons
- $D$  - Coeficiente de difusão
- $n$  - Densidade de neutrons
- $\psi^+$  - Função importância de neutrons
- $\phi^+$  - Fluxo adjunto
- $Q$  - Operador de difusão
- $N$  - Densidade de núclídeos
- $A$  - Matriz de queima
- $F^+$  - Função importância de núclídeos
- $N^+$  - Densidade adjunta de núclídeos
- $Q_m$  - Quantidade de interesse do núclídeo
- $\sigma$  - Seção de choque microscópica
- $\lambda$  - Constante de decaimento
- $R$  - Razão de taxas de reação
- $S^+$  - Termo de fonte para função importância
- $\rho_{i,j}$  - Reatividade

## ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
1. EQUAÇÃO DE DIFUSÃO .....	3
1.1 EQUAÇÃO DE DIFUSÃO A MULTIGRUPO .....	4
1.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO .....	9
1.3 CONSTANTES DE GRUPO .....	9
2. NEUTRONS: A FUNÇÃO IMPORTÂNCIA .....	11
2.1 O CONCEITO DE IMPORTÂNCIA .....	12
2.2 EQUAÇÃO DE IMPORTÂNCIA DE NEUTRONS .....	12
3. EQUAÇÃO ADJUNTA À EQUAÇÃO DE DIFUSÃO .....	19
3.1 PRODUTO ESCALAR DE DUAS FUNÇÕES .....	20
3.2 FUNÇÃO ADJUNTA .....	20
3.3 OPERADOR DE DIFUSÃO A MULTIGRUPO .....	21
3.4 EQUAÇÃO ADJUNTA À EQUAÇÃO DE DIFUSÃO A MULTIGRUPO ....	21
3.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO .....	26
3.6 INTERPRETAÇÕES DA FUNÇÃO ADJUNTA .....	27
3.7 EQUAÇÃO ADJUNTA DEPENDENTE DO TEMPO .....	27
3.8 CONDIÇÃO TEMPORAL .....	29
4. NUCLÍDEOS: A FUNÇÃO IMPORTÂNCIA .....	31
4.1 AS EQUAÇÕES DE QUEIMA .....	32
4.2 EXPRESSÕES ANALÍTICAS PARA AS DENSIDADES .....	32
4.3 EQUAÇÃO DE IMPORTÂNCIA DE NUCLÍDEOS .....	34
4.4 CONDIÇÃO FINAL PARA A FUNÇÃO IMPORTÂNCIA .....	37
4.5 EXPRESSÕES ANALÍTICAS PARA FUNÇÃO IMPORTÂNCIA .....	38
4.6 COMENTÁRIOS SOBRE IMPORTÂNCIA DE NUCLÍDEOS .....	41
5. EQUAÇÃO ADJUNTA À EQUAÇÃO DE DECAIMENTO .....	44
5.1 EQUAÇÃO ADJUNTA À EQUAÇÃO DE QUEIMA .....	45

5.2	CONDIÇÃO TEMPORAL .....	48
5.3	DEFINIÇÃO FORMAL PARA DENSIDADE ADJUNTA OU IMPORTÂNCIA. ....	49
6.	TEORIA DE PERTURBAÇÃO NO CÁLCULO DE DENSIDADES .....	50
6.1	QUANTIDADE DE INTERESSE PARA UMA MATRIZ DE QUEIMA CONSTANTE .....	51
6.2	QUANTIDADE DE INTERESSE PARA MATRIZ DE QUEIMA PERTUR- BADA .....	52
6.3	EXPRESSÕES ANALÍTICAS PARA $\delta q'_m(t_f)$ .....	54
7.	TEORIA DE PERTURBAÇÃO NO CÁLCULO DAS VARIAÇÕES DA MATRIZ DE QUEIMA .....	57
7.1	ESTUDO DA MATRIZ DE QUEIMA .....	58
7.2	DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE QUEIMA PELO MÉTODO DIRETO ..	60
7.3	TEORIA DE PERTURBAÇÃO GENERALIZADA .....	61
7.4	OBTENÇÃO DE $\delta a$ .....	63
8.	TEORIA DE PERTURBAÇÃO NO CÁLCULO DE CRITICALIDADE .....	70
8.1	REATOR CRÍTICO .....	71
8.2	PERTURBAÇÕES EM UM REATOR CRÍTICO .....	71
8.3	CÁLCULOS DE CRITICALIDADE .....	72
8.4	COMPENSAÇÃO DO SISTEMA DE CONTROLE .....	73
9.	APLICAÇÃO EM REATORES TÉRMICOS .....	74
9.1	CARACTERÍSTICAS DO REATOR .....	75
9.2	EQUAÇÕES UTILIZADA NOS CÁLCULOS .....	76
9.3	RESULTADOS .....	77
9.4	CONCLUSÕES .....	80
9.5	TABELAS .....	81
	BIBLIOGRAFIA .....	86

## INTRODUÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁÍB  
Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
Rua Aprígio Veloso, 882 Tel (083) 321 7222-R 35  
58.100 - Campina Grande - Paraíba

Em geral, um sistema físico é descrito por um conjunto de equações cuja solução mostra o seu comportamento. Se mudanças ocorrem em alguns parâmetros do sistema, é necessário determinar sua resposta a essas mudanças. Essa resposta pode ser obtida através da correção das equações do sistema com uma posterior determinação da nova solução, isto é, um cálculo direto, ou através da solução do sistema não perturbado utilizando a teoria de perturbação. A última alternativa evita o cálculo direto pois utiliza a solução das equações do sistema não perturbado.

A introdução da teoria de perturbação generalizada em cálculo de reatores se deu no início da década de 60 através de Usachev<sup>1</sup> que utilizou uma função importância de nêutrons para calcular mudanças na razão de frequências de vários processos, causados por perturbações em parâmetros de um reator. Em seguida, Gandini<sup>2</sup> utilizou uma equação adjunta à equação de queima para calcular as variações das densidades de núclídeos de uma cadeia cuja matriz de queima tenha sofrido perturbações. Posteriormente, M. Salvatores<sup>3</sup> aplicou teoria de Usachev-Gandini no cálculo da queima de combustível de um reator rápido operando com potência constante. Uma aplicação semelhante foi feita por Cabral<sup>4</sup> em um reator térmico. Nas duas aplicações, os termos de segunda ordem das fórmulas de perturbação foram desprezados: o fluxo num tempo  $t$ , desconhecido, foi substituído pelo fluxo no tempo  $t_0$ .

No presente trabalho, os termos de segunda ordem serão considerados. Com isso, a teoria de perturbação será utilizada em três cálculos distintos. Primeiro, com um procedimento semelhante ao de Mitani<sup>6</sup>, no cálculo do fluxo e do buckling material. Segundo, na determinação das variações da matriz de queima. Terceiro, na determinação das densidades dos núclídeos.

O último passo do trabalho consiste na aplicação da

teoria em cálculos de um reator térmico funcionando com potência constante.

## 1. EQUAÇÃO DE DIFUSÃO

O cálculo de dimensões críticas, composição, fluxo, potência, etc, é geralmente feito pelas equações de difusão a multigrupo. Tais equações consistem em várias aproximações feitas na equação de transporte.

Nesse capítulo, derivaremos a equação de difusão a multigrupo a partir da equação da continuidade. Apresentaremos as condições de contorno para a equação e discutiremos como gerar constantes de grupo.



1.1.1 - ANÁLISE DO TERMO (A): Taxa de variação

$$(A) = \frac{\partial n_g}{\partial t}. \text{ Fazendo } \phi_g = n_g v_g, \text{ onde } \phi_g, n_g \text{ e } v_g$$

são o fluxo, a densidade e a velocidade de nêutrons do grupo  $g$ , teremos

$$n_g = \frac{\phi_g}{v_g}$$

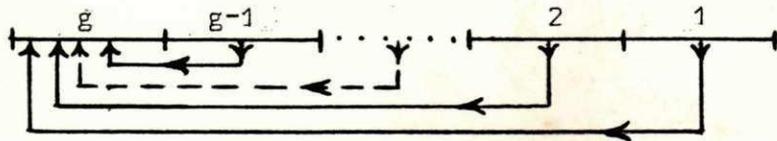
e o termo (A) torna-se:

$$(A) = \frac{\partial \phi_g}{v_g \partial t}$$

1.1.2 - ANÁLISE DO TERMO (B): Taxa de produção

Nêutrons entram no grupo  $g$  em  $dv$  de três maneiras:

1<sup>a</sup>) Nêutrons que por espalhamento "caem" na faixa de energia do grupo  $g$  em  $dv$ . Para grupos diretamente acoplados, desprezamos o upscattering ( $\Sigma_{h \rightarrow g}$  onde  $h > g$ ) e o espalhamento no próprio grupo ( $\Sigma_{h \rightarrow g}$  onde  $h = g$ ). Esquemáticamente, essa situação pode ser dada pelo diagrama:



$$\text{Assim: } (B1) = \sum_{h=1}^{g-1} \Sigma_{h \rightarrow g} \phi_h$$

2<sup>a</sup>.) Nêutrons de fissão na faixa de energia do grupo g em dv. Esse termo é dado por:

$$(B 2) = \chi_g \sum_{h=1}^{N} \nu_h \Sigma_{fh} \phi_h$$

onde o somatório nos dá todos os nêutrons de fissão e  $\chi_g$  é a fração desse total com energia no grupo g.

3<sup>a</sup>.) Fonte externa:

$$(B3) = S_g$$

Dessa forma, o termo (B) torna-se:

$$(B) = \sum_{h=1}^{g-1} \Sigma_{h \rightarrow g} \phi_h + \chi_g \sum_{h=1}^N \nu_h \Sigma_{fh} \phi_h + S_g$$

onde, não existindo fonte externa,  $S_g = 0$ .

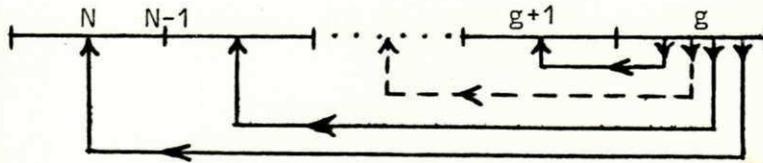
1.1.3 - ANÁLISE DO TERMO (C): Taxa de absorção

O termo (C) é simplesmente dado por:

$$(C) = \Sigma_{ag} \phi_g$$

1.1.4 - ANÁLISE DO TERMO (D): Espalhamento no grupo g.

Esquemáticamente, essa situação pode ser dada pelo diagrama:



Assim:

$$(D) = \sum_{h=g+1}^N \Sigma_{g \rightarrow h} \phi_g$$

1.1.5 - ANÁLISE DO TERMO (E): Fuga líquida de neutrons.

A taxa de fuga de neutrons de g em todo o reator é dada pela expressão:

$$\text{Taxa de fuga} = \int_S \vec{j}_g \cdot \vec{n} ds$$

Aqui  $\vec{j}_g$  (densidade de corrente de neutrons do grupo g) é o número líquido de neutrons de g que atravessam uma área elementar  $ds$ , na unidade de tempo. Usando o teorema da divergência:

$$\int_S \vec{j}_g \cdot \vec{n} ds = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_g dv$$

Assim, para um volume elementar  $dv$ , teremos:

$$(E) = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_g$$

Fazendo a aproximação  $\vec{j}_g = -D_g \vec{\nabla} \phi_g$  (onde  $D_g$  é o coeficiente de difusão), teremos:

$$(E) = -\vec{\nabla} \cdot D_g \vec{\nabla} \phi_g$$

Finalmente, para um reator sem fonte externa, obtemos a equação de difusão a multigrupo:

$$\frac{\partial \phi_g}{v_g \partial t} = \sum_{h=1}^{g-1} \Sigma_{h \rightarrow g} \phi_h + \chi_{g,h=1}^N v_h \Sigma_{fh} \phi_h - \Sigma_{remg} \phi_g + \vec{\nabla} \cdot D_g \vec{\nabla} \phi_g$$

onde  $\Sigma_{remg} = \Sigma_{ag} + \sum_{h=g+1}^N \Sigma_{g \rightarrow h}$

(1.1)

Para um reator crítico, a taxa de desaparecimento de neutrons é igual a taxa de produção. Dessa forma,  $\partial \phi_g / \partial t = 0$  e a equação (1.1) torna-se

$$\vec{\nabla} \cdot D_g \vec{\nabla} \phi_g - \Sigma_{remg} \phi_g + \sum_{h=1}^{g-1} \Sigma_{h \rightarrow g} \phi_h + \chi_{g,h=1}^N v_h \Sigma_{fh} \phi_h = 0 \quad (1.2)$$

Devemos observar que para  $g = 1, 2, \dots, N$ , a equação (1.2) em um ponto  $\vec{r}$  torna-se um sistema de  $N$  equações com  $N$  incógnitas que pode ser representado na forma matricial:

$$Q\phi = 0 \quad (1.3)$$

onde  $Q$  é uma matriz quadrada operador de  $\phi$  que é uma matriz coluna.

## 1.2 - CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno apropriadas para a equação de difusão serão enumeradas sem discussão, posto que seus fundamentos fogem de nossos objetivos. Tais condições são:

- a) Superfície livre:  $\phi_g(\vec{r}_s, t) = 0$
- b) Interface:  $\phi_g$  e  $\vec{J}_g$  são contínuos.
- c) Fluxo finito:  $0 \leq \phi_g(\vec{r}, t) < \infty$  (exceto nas proximidades de fontes localizadas)

## 1.3 - CONSTANTES DE GRUPO

Como observado no ítem "1.1", as equações (1.2) formam um sistema com N equações e N incógnitas para um ponto  $\vec{r}$ . Entretanto, isso só é verdade quando conhecemos as constantes de grupo, o que não ocorre. Assim, devemos inicialmente determinar tais constantes, que são media das tendo o fluxo como peso:

$$\Sigma_{ig}(\vec{r}) = \frac{\int_g \Sigma_i(\vec{r}, E) \phi(\vec{r}, E, t) dE}{\int_g \phi(\vec{r}, E, t) dE}$$

onde  $i$  é o tipo de seção de choque.

Como o fluxo não é conhecido (é exatamente nossa incógnita), o problema parece sem solução. Felizmente conhecemos o espectro do fluxo em energia, e fazemos então uma aproximação:

$\phi(\vec{r}, E, t) \equiv \phi_{\text{aprox}}(\vec{r}, E, t)$  onde

$\phi_{\text{aprox}}$  é conhecido. Assim:

$$\Sigma_{ig}(\vec{r}) = \frac{\int_g \Sigma_i(\vec{r}, E) \phi_{\text{aprox}}(\vec{r}, E, t) dE}{\int_g \phi_{\text{aprox}}(\vec{r}, E, t) dE}$$

Com as constantes de grupo calculadas desse modo, podemos resolver o sistema de equações (1.2). Torna-se óbvio, que a precisão da teoria de difusão depende da exatidão do cálculo das constantes de grupo.

## 2. NÊUTRONS: A FUNÇÃO IMPORTÂNCIA

Em um reator encontramos diferentes reações entre neutrons e nuclídeos, tais como: fissão, captura, produção de partículas, etc. Cada nêutron tem uma determinada importância no sistema, com respeito a um desses eventos e Usachev<sup>1</sup> mostrou como calcular essa importância para nêutrons de uma determinada geração.

No presente capítulo, definiremos a importância dos nêutrons com respeito a alguma reação. Derivaremos a equação de importância de nêutrons e suas aplicações serão discutidas nos capítulos posteriores.

## 2.1 - O CONCEITO DE IMPORTÂNCIA

Em física de reatores, um nêutron (ponto  $\vec{r}$ , com energia  $E$ , viajando na direção  $\vec{\Omega}$  no instante  $t$ ) pode gerar uma família de nêutrons (através de fissão e produção de nêutrons) chamados descendentes.

Se nós estamos interessados em algum tipo de evento num tempo  $t_f$  causado por um nêutron (ou por seus descendentes) introduzido em  $\vec{r}$  no tempo  $t$ , definimos:

"A importância  $\Psi^+(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$  de um nêutron num ponto  $\vec{r}$  com energia  $E$  e viajando na direção  $\vec{\Omega}$  num instante  $t$  com respeito a algum evento mensurável no tempo  $t_f$  é a sua contribuição esperada (ou provável) para o número total de eventos no tempo  $t_f$ ."

Da definição, observamos que a importância de um nêutron depende da posição: um nêutron perto da superfície do reator é menos importante para uma reação que outro no centro posto que sua probabilidade de escape é maior e portanto a probabilidade de que tal reação ocorra é menor. Um nêutron que deixa o sistema deve ter importância zero: não contribuirá para nenhum evento dentro do reator a partir do instante em que o deixa. A importância de um nêutron deve depender também do tempo em que ele foi introduzido no sistema e de sua energia e direção.

## 2.2 - EQUAÇÃO DE IMPORTÂNCIA DO NÊUTRON

Do próprio conceito, podemos formular uma "lei da conservação de importância de nêutrons" com respeito a

algum evento. Para uma população de nêutrons num ponto  $\vec{r}$  com energia E viajando numa direção  $\vec{\Omega}$ , é razoável supor que para os instantes t e t + Δt:

$$\begin{array}{cccc} \left[ \begin{array}{l} \text{importância} \\ \text{dos nêutrons} \\ \text{num tempo t} \end{array} \right] & = & \left[ \begin{array}{l} \text{Importância} \\ \text{dos nêutrons} \\ \text{que não inte} \\ \text{ragiram en-} \\ \text{tre t e t + } \Delta t \end{array} \right] & + & \left[ \begin{array}{l} \text{Importância} \\ \text{dos descen-} \\ \text{dentes da-} \\ \text{queles que} \\ \text{interagiram} \\ \text{entre t e} \\ \text{t + } \Delta t \end{array} \right] & + & \left[ \begin{array}{l} \text{Número} \\ \text{de e-} \\ \text{ventos} \\ \text{de in-} \\ \text{teres-} \\ \text{se en-} \\ \text{tre t} \\ \text{e t + } \Delta t \end{array} \right] \\ \text{(A)} & & \text{(B)} & & \text{(C)} & & \text{(D)} \end{array}$$

Passemos a análise de cada termo.

### 2.2.1 - ANÁLISE DO TERMO (A): Importância no instante t

Suponhamos que a população em questão seja constituída por n nêutrons e que a importância de cada um seja  $\psi^+(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$  com relação a algum evento de interesse. Dessa forma, a importância dos n nêutrons será dada por:

$$(A) = n\psi^+(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$$

### 2.2.2 - ANÁLISE DO TERMO (B): Importância dos remanescentes em t + Δt

No intervalo de tempo Δt, os nêutrons poderão ter atingido uma distância ΔS = vΔt. Dos n nêutrons, nΣ<sub>t</sub>ΔS colidiram e n(1 - Σ<sub>t</sub>ΔS) não sofreram colisão no intervalo de tempo Δt. Dessa forma, o termo (B) será:

$$(B) = n(1 - \Sigma_t \Delta S) \psi^+(\vec{r} + \Delta \vec{S}, E, \vec{\Omega}, t + \Delta t)$$

Devemos observar, em (B), que os nêutrons que

não interagiram permanecem com energia E e a direção  $\vec{\Omega}$  no tempo  $t + \Delta t$ .

### 2.2.3 - ANÁLISE DO TERMO (C): importância dos descendentes

Por descendentes, entenderemos os neutrons de fissão e de espalhamento. Assim o termo (C) será:

$$(C) = \int_{4\pi} \int_0^{\infty} n \Delta S \Sigma(\vec{r} + \Delta \vec{S}, E \rightarrow E', \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}') \psi^+(\vec{r} + \Delta \vec{S}, E', \vec{\Omega}', t + \Delta t) dE' d\vec{\Omega}' + \int_{4\pi} \int_0^{\infty} n \Delta S \Sigma_f(\vec{r} + \Delta \vec{S}, E, \vec{\Omega}) \cdot v(E) \cdot \chi(E', \vec{\Omega}') \psi^+(\vec{r} + \Delta \vec{S}, E', \vec{\Omega}', t + \Delta t) dE' d\vec{\Omega}' \quad (C1)$$
$$(C2)$$

Nessa expressão, (C1) é a importância dos neutrons com energia E' proveniente de neutrons com energia E que foram espalhados e (C2) é a importância de neutrons com energia E' provenientes da fissão por neutrons com energia E.

### 2.2.4 - ANÁLISE DO TERMO (D): número de eventos

O número de eventos será dado por:

$$(D) = n \Delta S \Sigma_i(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$$

onde  $\Sigma_i$  representa a seção de choque do evento de interesse.

Finalmente obtemos a equação de conservação da importância de neutrons, através de (A), (B), (C) e (D):

$$\begin{aligned}
 n\psi^+(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) &= n\psi^+(\vec{r} + \Delta\vec{S}, E, \vec{\Omega}, t + \Delta t) - n\Sigma_t \Delta S \psi^+(\vec{r} + \Delta\vec{S}, E, \vec{\Omega}, t + \Delta t) + \\
 &+ \int_{4\pi} \int_0^\infty n\Delta S \Sigma(\vec{r} + \Delta\vec{S}, E \rightarrow E', \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}') \psi^+(\vec{r} + \Delta\vec{S}, E', \vec{\Omega}', t + \Delta t) dE' d\Omega' + \\
 &+ \int_{4\pi} \int_0^\infty n\Delta S \Sigma_f(\vec{r} + \Delta\vec{S}, E, \vec{\Omega}) \nu(E) \chi(E', \vec{\Omega}') \psi^+(\vec{r} + \Delta\vec{S}, E', \vec{\Omega}', t + \Delta t) dE' d\Omega' + \\
 &+ n\Delta S \Sigma_i(\vec{r}, E, \vec{\Omega})
 \end{aligned}$$

Passando o primeiro termo do lado direito para esquerda, dividindo toda expressão por  $n\Delta S$  e tomando o limite quando  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}
 - \frac{d\psi^+(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)}{dS} &= - \Sigma_t \psi^+(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) + \\
 &+ \int_{4\pi} \int_0^\infty \Sigma(\vec{r}, E \rightarrow E', \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}') \psi^+(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t) dE' d\Omega' + \\
 &+ \nu(E) \Sigma_f(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \int_{4\pi} \int_0^\infty \chi(E', \vec{\Omega}') \psi^+(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t) dE' d\Omega' + \\
 &+ \Sigma_i(\vec{r}, E, \vec{\Omega})
 \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos finalmente escrever:

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
 Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
 Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
 Rua Aprígio Veloso, 882 - Tel (083) 321-7222-R 355  
 58.100 - Campina Grande - Paraíba

$$- \frac{\partial \psi^+(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega} \psi^+(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) + \Sigma_t \psi^+(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) -$$

$$- \int_{4\pi} \int_0^\infty \Sigma(\vec{r}, E \rightarrow E', \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}') \psi^+(\vec{r}, E, \vec{\Omega}', t) dE' d\vec{\Omega}' -$$

$$- v(E) \Sigma_f(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \int_{4\pi} \int_0^\infty \chi(E', \vec{\Omega}') \psi^+(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t) dE' d\Omega' =$$

$$= \Sigma_i(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$$

integrando em todas as direções  $\vec{\Omega}$ :

$$- \frac{\partial \psi^+(\vec{r}, E, t)}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}^+(\vec{r}, E, t) + \Sigma_t \psi^+(\vec{r}, E, t) -$$

$$- \int_0 \Sigma(\vec{r}, E \rightarrow E') \psi^+(\vec{r}, E', t) dE' -$$

$$- v(E) \Sigma_f(\vec{r}, E) \int_0^\infty \chi(E') \psi^+(\vec{r}, E', t) dE' = \Sigma_i(\vec{r}, E) \quad (2.1)$$

onde  $\vec{J}^+(\vec{r}, E, t) = \int_{4\pi} \vec{\Omega} \psi^+(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) d\vec{\Omega}$ . Fazendo:

$J^+(\vec{r}, E, t) = D \vec{\nabla} \psi^+(\vec{r}, E, t)$ , e dividindo o espectro contínuo de energia em grupos, teremos para o ponto  $\vec{r}$  no instante  $t$ :

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
 Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
 Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
 Rua Aprígio Veloso, 882 Tel (083) 321-7222-R 355  
 68.100 - Campina Grande - Paraíba

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\partial \psi_g^+}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot D_g \vec{\nabla} \psi_g^+ + \Sigma_{remg} \psi_g^+ - \sum_{h=g+1}^N \Sigma_{g \rightarrow h} \psi_h^+ - \\
 & - \nu_g \Sigma_{fg} \sum_{h=1}^N \chi_h \psi_h^+ = \Sigma_{ig} \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

onde o somatório de  $h = g + 1$  até  $N$  implica na não existência de *upscattering*.

Em um sistema crítico, a taxa de variação de importância é zero, posto que em qualquer instante a contribuição de um neutron para algum evento é a mesma. Assim, a equação (2.2) torna-se:

$$\begin{aligned}
 & + \vec{\nabla} \cdot D_g \vec{\nabla} \psi_g^+ - \Sigma_{remg} \psi_g^+ + \sum_{h=g+1}^N \Sigma_{g \rightarrow h} \psi_h^+ + \nu_g \Sigma_{fg} \sum_{h=1}^N \chi_h \psi_h^+ = -\Sigma_{ig} \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

e, na forma matricial:  $Q^+ \phi^+ = -\Sigma_{ig}$

A equação (2.3) dá a importância de um neutron do grupo  $g$  no ponto  $\vec{r}$ , com relação a um evento determinado por  $\Sigma_{ig}(\vec{r})$ , para um reator crítico.

Da definição de importância, deve ficar claro que se estamos interessados em eventos que ocorrem em uma região específica do reator,  $\Sigma_{ig}(\vec{r})$  deverá ser zero para  $\vec{r}$  fora dessa região. Essa afirmativa torna-se mais clara se imaginarmos um detetor introduzido em um reator. Os neutrons absorvidos pelo detetor de seção de choque  $\Sigma_{ad}$  serão contados, porém, neutrons absorvidos fora do detetor não o sensibilizará. Neutrons absorvidos fora do detetor não contribuem para sua contagem. Para tais neutrons o detetor tem seção de choque  $\Sigma_{ad} = 0$ . A quantidade de neutrons que sensibiliza o detetor é obtida multiplicando a equação (2.3) por  $\phi$  e integrando em todos os

limites das variáveis:

$$- \int_V \phi Q^+ \psi^+ dV = \int_V \phi \Sigma_1(\vec{r}) dV \quad (2.4)$$

onde  $Q^+ \psi^+$ , é um vetor coluna (como  $\Sigma_1(\vec{r})$ ) no qual cada elemento apresenta um grupo de energia e  $\phi$  é um vetor linha. O segundo membro de (2.4) nos dá o número de e ventos de interesse em todo o reator. Então, para obtermos o número de eventos em uma região determinada, bas ta fazer  $\Sigma_1(\vec{r}) = 0$  para  $\vec{r}$  fora dessa região de interesse.

### 3. EQUAÇÃO ADJUNTA À EQUAÇÃO DE DIFUSÃO

Dentre as aplicações da função adjunta destacam-se: a determinação de mudanças na razão constante de multiplicação de neutrons, determinação de mudanças no fator de multiplicação efetivo devido a pequenas mudanças de seção de choque, cálculo de dimensões críticas, avaliação de constantes de grupo em cálculos de multigrupo, uso de soluções de problemas em uma dimensão para derivar soluções de dimensões mais complexas.

No presente trabalho, utilizaremos a função adjunta ao fluxo para cálculos de criticalidade. Definiremos operador adjunto e função adjunta. Obteremos a equação adjunta à equação de difusão multigrupo a partir da definição matemática. O significado físico de função adjunta como importância de neutrons será enfatizado.

### 3.1 - PRODUTO ESCALAR DE DUAS FUNÇÕES

Sejam duas funções  $\phi(\xi)$  e  $\phi^+(\xi)$ , ambas, funções das mesmas variáveis representada por  $\xi$ . O produto escalar dessas funções é definido da seguinte maneira:

$$(\phi^+, \phi) = \int \phi^+(\xi) \phi(\xi) d\xi \quad (3.1)$$

onde a integração é feita em todos os limites das variáveis.

### 3.2 - FUNÇÃO ADJUNTA

Dadas  $\phi(\xi)$  uma auto-função do operador  $M$  e  $\phi^+(\xi)$  uma auto-função do operador  $M^+$ , definiremos:

$\phi^+(\xi)$  é uma função adjunta de  $\phi(\xi)$  e  $M^+$  é um operador adjunto de  $M$  se, e somente se:

$$(\phi^+, M\phi) = (\phi, M^+\phi^+) \quad (3.2)$$

Em particular, se  $M^+ = M$ , o operador  $M$  é chamado auto-adjunto.

Devemos observar que se  $\phi$  é uma auto-função de  $M$  tal que possamos escrever  $M\phi = \lambda\phi$  e  $\phi^+$  uma auto-função de  $M^+$  tal que  $M^+\phi^+ = \eta\phi^+$  com  $\lambda$  e  $\eta$  autovalores de  $M$  e  $M^+$ , respectivamente, a equação (3.2) torna-se:

$$(\phi^+, \lambda\phi) = (\phi, \eta\phi^+)$$

como  $\lambda$  e  $\eta$  são constantes, a última expressão pode ser escrita da seguinte forma:

$$\lambda(\phi^+, \phi) = \eta(\phi, \phi^+)$$

onde os produtos escalares são iguais. Assim:

$$(\lambda - \eta) (\phi^+, \phi) = 0 \quad (3.3)$$

Como temos um produto igual a zero, se  $\lambda \neq \eta$  devemos ter  $(\phi^+, \phi) = 0$  e  $\phi^+$  e  $\phi$  são ortogonais. Por outro lado se  $(\phi^+, \phi) \neq 0$  devemos ter  $\lambda = \eta$ .

### 3.3 - OPERADOR DE DIFUSÃO A MULTIGRUPO

Como vimos no capítulo 1, a equação de difusão a multigrupo para um reator crítico é dada pela equação (1.2):

$$\vec{\nabla} \cdot D_g \vec{\nabla} \phi_g - \Sigma_{remg} \phi_g + \sum_{h=1}^{g-1} \Sigma_{h \rightarrow g} \phi_h + \chi_g \sum_{h=1}^N \nu_h \Sigma_{fh} \phi_h = 0 \quad (3.4)$$

onde a expressão representa um sistema de N equações com N incógnitas para um ponto  $\vec{r}$ , e pode ser escrita na forma matricial:

$$Q\phi = 0 \quad (3.5)$$

onde  $\phi$  é um vetor coluna e Q é uma matriz quadrada com elementos do tipo:

$$q_{ii} = \vec{\nabla} \cdot D_i \vec{\nabla} - \Sigma_{remg} + \chi_i \nu_i \Sigma_{fi}$$

$$q_{ij} = \Sigma_{j \rightarrow i} + \chi_i \nu_j \Sigma_{fj} \text{ para } i > j \quad q_{ij} = \chi_i \nu_j \Sigma_{fj} \text{ para } i < j$$

### 3.4 - EQUAÇÃO ADJUNTA À EQUAÇÃO DE DIFUSÃO A MULTIGRUPO

Nessa seção, obteremos a equação adjunta à equação de difusão a partir de sua definição matemática dada pela equação (3.2). Por simplicidade, obteremos a adjunta para cada termo da equação de difusão separadamente. Passemos à análise de cada termo:

3.4.1 - ADJUNTA AO TERMO  $\vec{\nabla} \cdot D_g \vec{\nabla} \phi_g$

Da definição de produto interno:

$$(\phi^+, \vec{\nabla} \cdot D_g \vec{\nabla} \phi) = \sum_{g=1}^N \int_V \phi_g^+ \vec{\nabla} \cdot D_g \vec{\nabla} \phi_g dV \quad (3.6a)$$

onde N é o número de grupos.

Por outro lado, podemos escrever:

$$1^\circ) \vec{\nabla} \cdot \phi_g^+ (D_g \vec{\nabla} \phi_g) = \vec{\nabla} \phi_g^+ \cdot (D_g \vec{\nabla} \phi_g) + \phi_g^+ \vec{\nabla} \cdot D_g \vec{\nabla} \phi_g$$

ou ainda:

$$\phi_g^+ \vec{\nabla} \cdot D_g \vec{\nabla} \phi_g = \vec{\nabla} \cdot \phi_g^+ (D_g \vec{\nabla} \phi_g) - D_g \vec{\nabla} \phi_g \cdot \vec{\nabla} \phi_g^+ \quad (I)$$

$$2^\circ) \vec{\nabla} \cdot \phi_g (D_g \vec{\nabla} \phi_g^+) = D_g \vec{\nabla} \phi_g^+ \cdot \vec{\nabla} \phi_g + \phi_g \vec{\nabla} \cdot D_g \vec{\nabla} \phi_g^+$$

ou ainda:

$$D_g \vec{\nabla} \phi_g^+ \cdot \vec{\nabla} \phi_g = \vec{\nabla} \cdot \phi_g (D_g \vec{\nabla} \phi_g^+) - \phi_g \vec{\nabla} \cdot D_g \vec{\nabla} \phi_g^+ \quad (II)$$

levando (II) em (I), e a nova expressão (I) em (3.6a), teremos:

$$(\phi^+, \vec{\nabla} \cdot D \vec{\nabla} \phi) = \sum_{g=1}^N \int_V \left[ \vec{\nabla} \cdot \phi_g^+ (D_g \vec{\nabla} \phi_g) - \vec{\nabla} \cdot \phi_g (D_g \vec{\nabla} \phi_g^+) + \phi_g \vec{\nabla} \cdot D_g \vec{\nabla} \phi_g^+ \right] dV \quad (3.6b)$$

Para que  $\phi^+$  seja uma função adjunta de  $\phi$ , devemos sanfazer (3.2). Então:

$$\sum_{g=1}^N \int_V \left[ \vec{\nabla} \cdot \phi_g^+ (D_g \vec{\nabla} \phi_g) - \vec{\nabla} \cdot \phi_g (D_g \vec{\nabla} \phi_g^+) \right] dV = 0 \quad \text{e dessa forma,} \quad (3.6b)$$

$$\text{torna-se: } (\phi^+, \vec{\nabla} \cdot D \vec{\nabla} \phi) = \sum_{g=1}^N \int_V \phi_g \vec{\nabla} \cdot D_g \vec{\nabla} \phi_g^+ dV \quad \text{ou}$$

$$(\phi^+, \vec{\nabla} \cdot D \vec{\nabla} \phi) = (\phi, \vec{\nabla} \cdot D \vec{\nabla} \phi^+). \quad \text{Assim, se } M_{1g} \phi_g = \vec{\nabla} \cdot D_g \vec{\nabla} \phi_g, \quad \text{devemos}$$

$$\text{ter: } M_{1g}^+ \phi_g^+ = \vec{\nabla} \cdot D_g \vec{\nabla} \phi_g^+ \quad (3.7)$$

#### 3.4.2 - ADJUNTA AO TERMO $-\Sigma_{rem} \phi_g$

Aplicando novamente a definição de produto interno:

$$(\phi^+, -\Sigma_{rem} \phi) = - \sum_{g=1}^N \int_V \phi_g^+ \Sigma_{rem} \phi_g dV$$

trocando as posições entre  $\phi^+$  e  $\phi$ , a última expressão torna-se:

$$(\phi^+, -\Sigma_{rem} \phi) = - \sum_{g=1}^N \int_V \phi_g \Sigma_{rem} \phi_g^+ dV$$

o segundo membro da equação pode então ser escrito como segue:

$$(\phi^+, -\Sigma_{rem} \phi) = (\phi, -\Sigma_{rem} \phi^+),$$

logo, se  $M_{2g} \phi_g = -\Sigma_{rem} \phi_g$ ; podemos escrever:

$$M_{2g}^+ \phi_g^+ = -\Sigma_{rem} \phi_g^+ \quad (3.8)$$

3.4.3 - ADJUNTA AO TERMO  $\sum_{h=1}^{g-1} \Sigma_{h \rightarrow g} \phi_h$

Da definição:

$$(\phi^+, M_3 \phi) = \sum_{g=1}^N \int_V \phi_g^+ \sum_{h=1}^{g-1} \Sigma_{h \rightarrow g} \phi_h dV$$

onde, na realidade, o somatório só é definido a partir de  $g=2$  posto que não estamos considerando espalhamento dentro do próprio grupo. Observando que  $\phi_g^+$  independe de  $h$ , podemos reescrever a expressão da seguinte maneira:

$$(\phi^+, M_3 \phi) = \sum_{g=1}^N \int_V \sum_{h=1}^{g-1} \Sigma_{h \rightarrow g} \phi_h \phi_g^+ dV$$

Se nós trocarmos os índices de  $\Sigma$ ,  $\phi$  e  $\phi^+$   $h$  por  $g$  e vice-versa, os novos limites de integração serão:

$$(\phi^+, M_3 \phi) = \sum_{g=1}^N \int_V \sum_{h=g+1}^N \Sigma_{g \rightarrow h} \phi_g \phi_h^+ dV$$

e, pela razão dada anteriormente, o somatório em  $g$  só é definido até  $N-1$ . Como  $\phi_g$  independe de  $h$ , podemos reescrever a última expressão:

$$(\phi^+, M_3 \phi) = \sum_{g=1}^N \int_V \phi_g \sum_{h=g+1}^N \Sigma_{g \rightarrow h} \phi_h^+ dV$$

O segundo membro da equação pode ser escrito como segue:

$$(\phi^+, M_3 \phi) = (\phi, M_3^+ \phi^+)$$

Dessa forma, se  $M_3 \phi_g = \sum_{h=1}^{g-1} \Sigma_{h \rightarrow g} \phi_h$ , podemos escrever:

$$M_3^+ \phi_g^+ = \sum_{h=g+1}^{N-1} \Sigma_{g \rightarrow h} \phi_h^+ \tag{3.9}$$

3.4.4 ADJUNTA AO TERMO  $\chi_g \sum_{h=1}^N v_h \Sigma_{fh} \phi_h$

Com o mesmo raciocínio usado para os termos anteriores

$$(\phi^+, M_4 \phi) = \sum_{g=1}^N \int_V \phi_g^+ \chi_g \sum_{h=1}^N v_h \Sigma_{fh} \phi_h dV$$

Como o somatório em h não opera em  $\phi_g^+ \chi_g$ , podemos fazer:

$$(\phi^+, M_4 \phi) = \int_V \sum_{h=1}^N \sum_{g=1}^N \phi_g^+ \chi_g v_h \Sigma_{fh} \phi_h dV$$

O segundo membro da equação pode ainda ser escrito da seguinte maneira:

$$(\phi^+, M_4 \phi) = \int_V \sum_{g=1}^N \sum_{h=1}^N \phi_h^+ \chi_g v_g \Sigma_{fg} \phi_g dV$$

onde os índices de  $\chi$ ,  $v$ ,  $\Sigma$ ,  $\phi$  e  $\phi^+$  foram trocados: h por g e vice versa. Disso, podemos escrever:

$$(\phi^+, M_4 \phi) = \sum_{g=1}^N \int_V \phi_g v_g \Sigma_{fg} \sum_{h=1}^N \chi_h \phi_h^+ dV$$

Podemos, ainda, escrever a equação da seguinte maneira:

$$(\phi^+, M_4 \phi) = (\phi, M_4^+ \phi^+)$$

Dessa forma, se  $M_{4g} \phi_g = \chi_g \sum_{h=1}^N v_h \Sigma_{fh} \phi_h$ , podemos escrever:

$$M_{4g}^+ \phi_g^+ = v_g \Sigma_{fg} \sum_{h=1}^N \chi_h \phi_h^+ \quad (3.10)$$

Assim, com (3.7), (3.8), (3.9) e (3.10) podemos escrever a equação adjunta à equação de difusão:

$$\vec{\nabla}_g \cdot D_g \vec{\nabla} \phi_g^+ - \sum_{remg} \phi_g^+ + \sum_{h=g+1}^N \sum_{g \rightarrow h} \phi_h^+ + v_g \sum_{fg} \sum_{h=1}^N \chi_h \phi_h^+ = 0. \quad (3.11)$$

A equação (3.11) representa um sistema de N equações com N incógnitas para um ponto  $\vec{r}$  e pode ser escrita na forma matricial

$$Q^+ \phi^+ = 0 \quad (3.12)$$

onde  $Q^+$  é uma matriz quadrada (transposta de Q) e  $\phi^+$  um vetor coluna.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
Coordenação Geral de Pós-Graduação  
Rua Aprígio Veloso 882 - 51401-900 - 371 7-1014 - 355  
58.100 - Campina Grande - Paraíba

### 3,5 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Do item '3.4.1', vemos que para que o termo  $\vec{\nabla}_g \cdot D_g \vec{\nabla} \phi_g^+$  seja adjunto de  $\vec{\nabla}_g \cdot D_g \vec{\nabla} \phi_g$  devemos fazer:

$$\sum_{g=1}^N \int_V \left[ \vec{\nabla}_g \phi_g^+ (D_g \vec{\nabla} \phi_g) - \vec{\nabla}_g \phi_g (D_g \vec{\nabla} \phi_g^+) \right] dV = 0.$$

Pelo teorema da divergência, a última expressão torna-se:

$$\sum_{g=1}^N \int_S \left[ \phi_g^+ (D_g \vec{\nabla} \phi_g) - \phi_g (D_g \vec{\nabla} \phi_g^+) \right] \cdot \vec{n} dS = 0$$

onde a integração é feita em toda a superfície.

Por outro lado, no capítulo 1 vimos que uma das condições de contorno para a equação da difusão é dada por  $\phi(\vec{r}_s) = 0$ , e, como  $\vec{\nabla} \phi_g$  e  $D_g$  são diferentes de zero em  $\vec{r}_s$ , devemos ter  $\phi_g^+(\vec{r}_s) = 0$  para que a integração de superfície seja zero. Do exposto, e da

semelhança entre as equações (1.2) e (3.12), devemos esperar:

a.)  $\phi_g^+(\vec{r}_s) = 0$

b.)  $0 \leq \phi_g^+(\vec{r}) < \infty$

c.)  $\phi_g^+(\vec{r})$  deve ser contínuo

### 3.6 - INTERPRETAÇÕES DA FUNÇÃO ADJUNTA

Comparando a equação da função importância (2.3) com a equação adjunta ao fluxo (3.11), concluímos, exceto pelo termo de fonte, que são iguais. Constatamos na equação '3.5' que  $\phi_g^+(\vec{r}_s) = 0$ . Esse resultado obtido para a função adjunta tem um claro sentido físico de importância: um nêutron na superfície tem importância zero posto que não poderá mais contribuir para algum evento no reator. Então, escolhendo um termo de fonte (com respeito a algum evento) para a função adjunta, teremos a função importância. Deve ficar claro, entretanto, que nem toda função importância de nêutrons é adjunta, posto que nem todas elas satisfazem a equação (3.2). No capítulo 2, citamos o exemplo da importância de nêutron para a contagem de um detector. Essa função importância não é adjunta. No capítulo 7 estudaremos a função importância relativa ao efeito indireto. Tal função importância é adjunta, como veremos.

### 3.7 - EQUAÇÃO ADJUNTA DEPENDENTE DO TEMPO

No capítulo 1, vimos que a equação de difusão dependente do tempo é dado por

$$\frac{\partial \phi_g}{V_g \partial t} = Q\phi \quad (3.13)$$

onde a adjunta para  $Q\phi$  é dada pela equação (3.11). Dessa forma,

para determinarmos uma equação adjunta à equação (3.13), é necessário determinarmos um termo adjunto para  $\frac{\partial \phi_g}{V \partial t}$ . Com esse fim, escrevemos:

$$(\phi^+, M_5 \phi) = \sum_{g=1}^N \int_V \int_{t_0}^{t_f} \phi_g^+ \frac{\partial \phi_g}{V \partial t} dt dV \quad (3.14)$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial(\phi_g^+ \phi_g)}{\partial t} = \phi_g^+ \frac{\partial \phi_g}{\partial t} + \phi_g \frac{\partial \phi_g^+}{\partial t}$$

ou

$$\phi_g^+ \frac{\partial \phi_g}{\partial t} = \frac{\partial(\phi_g^+ \phi_g)}{\partial t} - \phi_g \frac{\partial \phi_g^+}{\partial t} \quad (I)$$

levando a expressão (I) em (3.14), teremos:

$$(\phi^+, M_5 \phi) = \sum_{g=1}^N \int_V \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial \phi_g^+ \phi_g}{V \partial t} dt dV - \sum_{g=1}^N \int_V \int_{t_0}^{t_f} \phi_g \frac{\partial \phi_g^+}{V \partial t} dt dV \quad (3.14a)$$

Para que a equação (3.14a) satisfaça a definição dada em (3.2) devemos ter:

$$\sum_{g=1}^N \int_V \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial \phi_g^+ \phi_g}{V \partial t} dt dV = 0 \quad (3.15)$$

Dessa forma, (3.14a) torna-se:

$$(\phi^+, M_5 \phi) = - \sum_{g=1}^N \int_V \int_{t_0}^{t_f} \phi_g \frac{\partial \phi_g^+}{V \partial t} dt dV ..$$

Podemos escrever essa expressão da seguinte maneira:

$$(\phi^+, M_5 \phi) = (\phi, M_g^+ \phi^+)$$

Assim, se

$$M_5 \phi_g = \frac{\partial \phi_g}{V_g \partial t}, \text{ devemos ter:}$$

$$M_5^+ \phi_g^+ = - \frac{\partial \phi_g^+}{V_g \partial t}. \quad (3.16)$$

Logo, podemos escrever a equação adjunta depende do tempo:

$$- \frac{\partial \phi^+}{V \partial t} = Q^+ \phi^+ \quad (3.17)$$

onde  $Q^+ \phi^+$  foi obtido na seção '3.4'.

### 3.8 CONDIÇÃO TEMPORAL

Na última seção, vimos que a condição imposta para que o termo  $-\frac{\partial \phi_g^+}{V_g \partial t}$  seja adjunto de  $\frac{\partial \phi_g}{V_g \partial t}$  é:

$$\sum_{g=1}^N \int_V \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial \phi_g^+ \phi_g}{V_g \partial t} dt dV = 0$$

Integrando a última expressão na variável tempo, teremos:

$$\sum_{g=1}^N \int_V \frac{1}{V_g} \phi_g^+(\vec{r}, t_f) \phi_g(\vec{r}, t_f) dV = \sum_{g=1}^N \int_V \frac{1}{V_g} \phi_g^+(\vec{r}, t_0) \phi_g(\vec{r}, t_0) dV$$

$$(3.18)$$

A interpretação da equação (3.18) depende da condição temporal sobre  $\phi_g$  e  $\phi_g^+$ . Suponhamos que em um reator, no instante  $t = 0$ , exista um único nêutron no ponto  $\vec{r}_0$  com energia  $E_0$  dentro do grupo  $g_0$ . Assim,  $\phi_{g_0}(\vec{r}_0, 0) = V_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$  (condição inicial para o fluxo). Suponhamos ainda, que em  $t = t_f$  escolheremos  $\phi_g^+(\vec{r}, t_f) = 1$  (condição final para a função adjunta). Dessa forma, (3.15) torna-se:

$$\sum_{g=1}^N \int_V \frac{1}{V_g} \phi_g(\vec{r}, t_f) dV = \phi_g^+(\vec{r}, t_0)$$

O primeiro membro é simplesmente o número de neutrons esperados em  $t = t_f$ , devido a um neutron em  $t = 0$ . Portanto, com as condições temporais dadas, a interpretação de  $\phi^+$  fica estabelecida.

#### 4. NUCLÍDEOS: A FUNÇÃO IMPORTÂNCIA

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
Rua Aprígio Veloso, 832 - Tel. (33) 321 7222-R 355  
58.100 - Campina Grande - Paraíba

O Comportamento temporal das densidades de nuclídeos é fundamental no estudo de reatores. Nas duas últimas décadas foi introduzido, em física de reatores, o conceito de densidade ad junta, que nos auxilia no estudo do comportamento temporal das densidades. M. Salvatores<sup>3</sup> derivou expressões analíticas para densidades adjuntas de nuclídeos, para uma cadeia cuja matriz de queima só possui os elementos  $a_{i-1,i}$  e  $a_{i,i}$ . Com isso Salvatores estudou a produção de isótopos físséis.

Nesse capítulo e no seguinte, identificaremos a densidade adjunta como importância de um nuclídeo. Obteremos expressões analíticas para densidade e importância de nuclídeos, para uma matriz de queima triangular inferior. Desse modo, poderemos estudar não só a produção de isótopos físséis, como também os produtos de fissão.

#### 4.1 - AS EQUAÇÕES DE QUEIMA

Em um reator, a taxa de variação das densidades dos nuclídeos de uma cadeia devido a decaimento, captura, fissão, etc, pode ser dada através das seguintes equações

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= - a_{11} N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} &= a_{21} N_1 - a_{22} N_2 \\ &\vdots \\ \frac{dN_k}{dt} &= a_{k1} N_1 + a_{k2} N_2 + \dots - a_{kk} N_k\end{aligned}\tag{4.1a}$$

ou simplesmente

$$\frac{dN}{dt} = [A] N\tag{4.1b}$$

onde  $[A]$  é uma matriz (de queima) e  $N$  um vetor coluna.

Aqui não estamos considerando reações do tipo  $(n, 2n)$  para as quais a matriz de queima possui elementos acima da diagonal.

#### 4.1 - EXPRESSÕES ANALÍTICAS PARA AS DENSIDADES

Derivaremos expressões analíticas simples para uma matriz triangular inferior, e, para tal, admitiremos que a matriz  $[A]$  seja constante. Admitiremos uma cadeia com 4 núclídeos, e em seguida faremos uma generalização.

#### 4.2.1 NUCLÍDEO 1.

Das equações (4.1), teremos a seguinte equação para o decaimento do nuclídeo 1:

$$\frac{dN_1}{dt} = -a_{11}N_1 \quad \text{ou} \quad \frac{dN_1}{dt} + a_{11}N_1 = 0$$

Multiplicando a expressão por  $e^{a_{11}t}$  podemos escrever  $\frac{dN_1 e^{a_{11}t}}{dt} = 0$  que integrada de  $t_0 = 0$  a  $t$ , nos dá:

$$N_1(t) = C_{11} e^{-a_{11}t} \quad (4.2)$$

onde  $C_{11} = N_1(0)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
Rua Aprígio Veloso, 882 - Tel (083) 321 7222-R 355  
58.100 - Campina Grande - Paraíba

#### 4.2.2 NUCLÍDEOS 2, 3 e 4

Utilizando o mesmo procedimento do item '4.2.1', obtemos:

##### 1º) NUCLÍDEO 2

$$N_2(t) = C_{22} e^{-a_{22}t} + C_{21} e^{-a_{11}t} \quad (4.3)$$

onde  $C_{21} = \frac{a_{21}C_{11}}{a_{22} - a_{11}}$  e  $C_{22} = N_2(0) - C_{21}$

##### 2º) NUCLÍDEO 3

$$N_3(t) = C_{33} e^{-a_{33}t} + C_{32} e^{-a_{22}t} + C_{31} e^{-a_{11}t} \quad (4.4)$$

onde  $C_{31} = \frac{a_{32}C_{21} + a_{31}C_{11}}{a_{33} - a_{11}}$ ,  $C_{32} = \frac{a_{32}C_{22}}{a_{33} - a_{22}}$  e

$$C_{33} = N_{33}(0) - (C_{31} + C_{32})$$

### 3º) NUCLÍDEO 4

$$N_4(t) = C_{44} e^{-a_{44}t} + C_{43} e^{-a_{33}t} + C_{42} e^{-a_{22}t} + C_{41} e^{-a_{11}t} \quad (4.5)$$

onde  $C_{41} = \frac{a_{43}C_{31} + a_{42}C_{21} + a_{41}C_{11}}{a_{44} - a_{11}}$ ,  $C_{42} = \frac{a_{43}a_{32} + a_{42}C_{22}}{a_{44} - a_{22}}$ ,

$$C_{43} = \frac{a_{43}C_{33}}{a_{44} - a_{33}} \text{ e } C_{44} = N_4(0) - (C_{41} + C_{42} + C_{43})$$

#### 4.2.3 GENERALIZAÇÃO

Com a rotina estabelecida, poderemos generalizar a expressão da densidade de um nuclídeo J como segue:

$$N_J(t) = \sum_{l=1}^J C_{Jl} e^{-a_{ll}t} \quad (4.6)$$

onde  $C_{Jl} = \sum_{i=l}^{J-1} \frac{a_{Ji}C_{il}}{a_{JJ} - a_{ll}}$  (para  $a_{JJ} \neq a_{ll}$  e  $l < J$ ) e

$$C_{JJ} = N_J(0) - \sum_{l=1}^{J-1} C_{Jl}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
Rua Aprício Veloso 882 Tel. (083) 301 7221-R 355  
58 100 - Campina Grande - Paraíba

#### 4,3 - EQUAÇÃO DE IMPORTÂNCIA DE NUCLÍDEOS

Da mesma forma que obtivemos a equação da função importância para neutrons (capítulo 2), podemos fazê-lo no campo dos nuclídeos, utilizando o princípio de conservação de importância

de nuclídeos.

Suponhamos, por exemplo, que nossa cadeia constitua-se de  $N_k$  nuclídeos dos quais sô os três primeiros são de interesse:

$$\begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dt} \\ \frac{dN_2}{dt} \\ \frac{dN_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & -a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Das equações, observamos que o nuclídeo 1 é importante, com respeito a quantidade final dos nuclídeos 1, 2 e 3. Isso se torna claro posto que: dos  $N_1(0)$  nuclídeos 1 no tempo  $t_0$ , parte não decairá até  $t_f(N_1(t_f))$  e parte do que decair, contribuirá para as quantidades finais dos nuclídeos 2 e 3 ( $N_2(t_f)$  e  $N_3(t_f)$ ).

Da mesma forma o nuclídeo 2 é importante na quantidade final 2 e 3 enquanto que o nuclídeo 3 é importante sô para 3. Talvez 1, 2 e 3 sejam importantes para formação de nuclídeos 4, 5, etc, mas esses não são de interesse no presente exemplo.

Começemos aplicando o princípio de conservação de importância (como vimos no capítulo 2) para o nuclídeo 3. Suponhamos que no instante  $t$ , tenhamos  $N_3(t)$  nuclídeos, cada um com importância  $F_3^+(t)$ , com respeito à sua quantidade final.

Dos  $N_3(t)$  nuclídeos,  $a_{33}N_3(t)\Delta t$  decairão num intervalo de tempo  $\Delta t$  formando nuclídeos  $i$  de importância  $F_i^+(t + \Delta t)$ , restando  $N_3(t) - a_{33}N_3(t)\Delta t$  nuclídeos 3 cada um com importância  $F_3^+(t + \Delta t)$ . Assim:

$$N_3(t)F_3^+(t) = \left[ N_3(t) - a_{33}N_3(t)\Delta t \right] F_3^+(t+\Delta t) + \\ + \sum_{i=4}^{NK} a_{i3}N_3(t)\Delta t F_i^+(t+\Delta t)$$

Como s $\hat{o}$  estamos interessados nos 3 nucl $\acute{e}$ deos j $\acute{a}$  citados  $F_i^+(t+\Delta t) = 0$  para  $i = 4, 5, \text{ etc.}$  Assim, a  $\acute{u}$ ltima express $\tilde{a}$ o torna-se:

$$N_3(t)F_3^+(t) = N_3(t)F_3^+(t+\Delta t) - a_{33}N_3(t)\Delta t F_3^+(t+\Delta t)$$

Passando o primeiro termo do segundo membro para o primeiro, dividindo a equa $\tilde{c}$ ao por  $N_3(t)\Delta t$  e aplicando limite com  $\Delta t \rightarrow 0$ , teremos:

$$- \frac{dF_3^+(t)}{dt} = - a_{33}F_3^+(t) \quad (4.8)$$

Utilizando o mesmo racioc $\acute{e}$ nio para o nucl $\acute{e}$ deo 2 com rela $\tilde{c}$ ao as quantidades finais de 2 e 3, teremos:

$$N_2(t)F_2^+(t) = \left[ N_2(t) - a_{22}N_2(t)\Delta t \right] F_2^+(t+\Delta t) + \\ + \sum_{i=3}^{NK} a_{i2}N_2(t)\Delta t F_i^+(t+\Delta t)$$

onde  $F_i^+(t+\Delta t) = 0$  para  $i = 4, 5, \text{ etc.}$  Com o procedimento anterior obtemos:

$$- \frac{dF_2^+(t)}{dt} = - a_{22}F_2^+(t) + a_{32}F_3^+(t) \quad (4.9)$$

Procedendo da mesma forma para o nucl $\acute{e}$ deo 1, encontramos:

$$-\frac{dF_1^+}{dt} = -a_{11}F_1^+(t) + a_{21}F_2^+(t) + a_{31}F_3^+(t) \quad (4.10)$$

Observando (4.8), (4.9) e (4.10) concluimos que as equações de importância dos núclídeos podem ser dadas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} -\frac{dF_1^+}{dt} \\ -\frac{dF_2^+}{dt} \\ -\frac{dF_3^+}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ 0 & -a_{22} & a_{32} \\ 0 & 0 & -a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^+ \\ F_2^+ \\ F_3^+ \end{bmatrix} \quad (4.11a)$$

onde a matriz quadrada é a transposta de  $[A]$ , da equação (4.7). Assim, generalizamos:

$$-\frac{dF^+}{dt} = [A]^T F^+ \quad (4.11b)$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
Rua "Prigio Veloso" 882 Tel (083) 321 7222-R 355  
58.100 - Campina Grande - Paraíba

#### 4.4 CONDIÇÃO FINAL PARA A FUNÇÃO IMPORTÂNCIA

Na seção '4.3', quando obtivemos a equação de importância, vimos que se não estamos interessados no núclídeo  $i$ ,  $F_i^+(t) = 0$ .

Vejamos agora uma condição final para a importância do núclídeo  $i$ , com respeito a quantidade final  $Q_i(t_f)$ . Quando o núclídeo  $i$  aparece no sistema em um instante  $t$  bem anterior a  $t_f$ , sua probabilidade de contribuir para a quantidade  $Q_i(t_f)$  deve ser relativamente pequena (posto que existe uma grande chance que  $i$  decaia entre  $t$  e  $t_f$ ). A medida que  $t$  se aproxima de  $t_f$ , a

probabilidade de decaimento diminua, aumentando pois a probabilidade de contribuição para  $Q_i(t_f)$ . Se o nuclídeo  $i$  está presente em  $t = t_f$ , sua contribuição para  $Q_i(t_f)$  é 1, isto é, ele mesmo. Assim, para uma quantidade de interesse  $Q_i(t_f)$ , teremos:

$$F_J^+(t_f) = \begin{cases} 1 & \text{se } J = i \\ 0 & \text{se } J \neq i \end{cases} \quad (4.12)$$

#### 4.5 EXPRESSÕES ANALÍTICAS PARA FUNÇÃO IMPORTÂNCIA

Na seção '4.3', obtivemos equações para importância de nuclídeos de interesse numa cadeia. Resolvendo essas equações, obteremos expressões analíticas para função importância. Com esse fim, admitiremos uma cadeia onde somente os 4 primeiros nuclídeos são de interesse:

$$\begin{bmatrix} -\frac{dF_1^+}{dt} \\ -\frac{dF_2^+}{dt} \\ -\frac{dF_3^+}{dt} \\ -\frac{dF_4^+}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ 0 & -a_{21} & a_{32} & a_{42} \\ 0 & 0 & -a_{33} & a_{43} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^+ \\ F_2^+ \\ F_3^+ \\ F_4^+ \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Esse sistema pode ser resolvido como segue.

##### 4.5.1 NUCLÍDEO 4

De (4.13) podemos escrever:

$$-\frac{dF_4^+}{dt} = -a_{44}F_4^+ \quad \text{ou} \quad -\frac{dF_4^+}{dt} + a_{44}F_4^+ = 0$$

Multiplicando a expressão por  $e^{-a_{44}t}$ , podemos reescrevê-la:

$$-\frac{dF_4^+ e^{-a_{44}t}}{dt} = 0$$

integrando de  $t_f$  a  $t$ :

$$F_4^+(t) = C_{44}^+ e^{a_{44}(t-t_f)} \quad (4.14)$$

onde  $C_{44}^+ = F_4^+(t_f)$

#### 4.5.2 NUCLÍDEOS 3, 2 4 1

Utilizando o mesmo procedimento do item '4.5.1'. obtemos:

##### 1º) NÚCLÍDEO 3

$$F_3^+(t) = C_{33}^+ e^{a_{33}(t-t_f)} + C_{34}^+ e^{a_{44}(t-t_f)} \quad (4.15)$$

onde  $C_{34}^+ = -\frac{a_{43}C_{44}^+}{a_{44} - a_{33}}$  e  $C_{33}^+ = F_3^+(t_f) - C_{34}^+$

##### 2º) NUCLÍDEO 2

$$F_2^+(t) = C_{22}^+ e^{a_{22}(t-tf)} + C_{23}^+ e^{a_{33}(t-tf)} + C_{24}^+ e^{a_{44}(t-tf)} \quad (4.16)$$

onde  $C_{24}^+ = - \frac{a_{32}C_{34}^+ + a_{42}C_{44}^+}{a_{44} - a_{22}}$  ,  $C_{23}^+ = - \frac{a_{32}C_{33}^+}{a_{33} - a_{22}}$  e

$$C_{22}^+ = F_2^+(tf) - (C_{23}^+ + C_{24}^+)$$

### 3º) NUCLÍDEO 1

$$F_1^+(t) = C_{11}^+ e^{a_{11}(t-tf)} + C_{12}^+ e^{a_{22}(t-tf)} + C_{13}^+ e^{a_{33}(t-tf)} + C_{14}^+ e^{a_{44}(t-tf)} \quad (4.17)$$

onde  $C_{14}^+ = - \frac{a_{21}C_{24}^+ + a_{31}C_{34}^+ + a_{41}C_{44}^+}{a_{44} - a_{11}}$  ,

$$C_{13}^+ = - \frac{a_{21}C_{23}^+ + a_{31}C_{33}^+}{a_{33} - a_{11}} , \quad C_{12}^+ = - \frac{a_{21}C_{22}^+}{a_{22} - a_{11}} e$$

$$C_{11}^+ = F_1^+(tf) - (C_{12}^+ + C_{13}^+ + C_{14}^+)$$

### 4.5.3 GENERALIZAÇÃO

Com a rotina estabelecida, podemos generalizar a expressão para importância de um nuclídeo  $i$ :

$$F_i^+(t) = \sum_{k=i}^n C_{ik}^+ e^{a_{kk}(t-tf)} \quad \text{onde} \quad (4.18)$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior

Coordenação Setorial de Pós-Graduação

Rua Aprígio Veloso 882 Tel (083) 311 7222-R 355

58 100 - Campina Grande - Paraíba

$$C_{ik}^+ = - \sum_{u=i+1}^k \frac{a_{ui} C_{uk}^+}{a_{kk} - a_{ii}} \quad \text{para } a_{kk} \neq a_{ii} \text{ e } k > i$$

$$\text{e } C_{ii}^+ = F_i^+(tf) - \sum_{k=i+1}^n C_{ik}^+$$

onde  $n$  é o número de ordem do último nuclídeo de interesse na cadeia.

#### 4.6 COMENTÁRIOS SOBRE IMPORTANCIA DE NUCLÍDEOS

Para maior clareza, vejamos como a função importância se comporta ao analisarmos várias quantidades de interesse diferentes. Como exemplo, admitamos uma cadeia com 4 nuclídeos.

##### 4.6.1 ANÁLISE DE $F_i^+(t)$ SUPONDO QUE A QUANTIDADE DE INTERESSE EM $t_f$ SEJA O NUCLÍDEO 1

As condições finais apropriadas nesse caso são,  $F_1^+(t_f) = 1$  e  $F_i^+(t_f) = 0$  para  $i \neq 1$ . Assim as equações (4.18) nos dão:

$$C_{44}^+ = 0, \quad C_{34}^+ = 0, \quad C_{33}^+ = 0, \quad C_{24}^+ = 0, \quad C_{23}^+ = 0,$$

$$C_{22}^+ = 0, \quad C_{14}^+ = 0, \quad C_{13}^+ = 0, \quad C_{12}^+ = 0, \quad C_{11}^+ \neq 0.$$

Com isso, teremos:

$$F_1^+(t) = C_{11}^+ e^{a_{11}(t-t_f)} \quad \text{e } F_i^+(t) = 0 \quad \text{para } i > 1$$

4.6.2 ANÁLISE DE  $F_i^+(t)$  SUPONDO QUE A QUANTIDADE DE INTERESSE EM  $t_f$  SEJA O NUCLÍDEO 2

Condições finais:  $F_2^+(t_f) = 1$  e  $F_i^+(t_f) = 0$  para  $i \neq 2$

Com isso teremos os coeficientes,  $C_{22}$ ,  $C_{12}$  e  $C_{11}$  diferentes de zero e os demais iguais a zero. Logo:

$$F_1^+(t) = C_{11}^+ e^{a_{11}(t-t_f)} + C_{12}^+ e^{a_{22}(t-t_f)}$$

$$F_2^+(t) = C_{22}^+ e^{a_{22}(t-t_f)} \quad \text{e} \quad F_i^+(t) = 0 \quad \text{para} \quad i > 2$$

Aqui,  $C_{11}^+$  é diferente de  $C_{11}^+$  anterior.

4.6.3 ANÁLISE DE  $F_i^+(t)$  PARA O NUCLÍDEO 3 EM  $t_f$

Condições finais:  $F_3^+(t_f) = 1$  e  $F_i^+(t_f) = 0$  para  $i \neq 3$

Com o mesmo raciocínio anterior, encontramos:

$$F_1^+(t) = C_{11}^+ e^{a_{11}(t-t_f)} + C_{12}^+ e^{a_{22}(t-t_f)} + C_{13}^+ e^{a_{33}(t-t_f)}$$

$$F_2^+(t) = C_{22}^+ e^{a_{22}(t-t_f)} + C_{23}^+ e^{a_{33}(t-t_f)}$$

$$F_3^+(t) = C_{33}^+ e^{a_{33}(t-t_f)}$$

$$\text{e} \quad F_i^+(t) = 0 \quad \text{para} \quad i > 3$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
Coordenação Geral de Pós-Graduação  
Rua Aprígio Veloso 882 - 511 (PQ) 301 7027-R 355  
58.100 - Campina Grande - Paraíba

onde novamente os coeficiente assumem valores diferentes dos anteriores.

Do exposto, concluimos que se a quantidade de interesse em  $t_f$  é a do nuclídeo  $m$ , então  $F_i^+(t) = 0$  para  $i > m$ . Esta mesma idéia foi dada na seção '4.3', envolvendo três nuclídeos. Concluimos ainda, analisando a seção '4.5', que se uma cadeia possui  $n$  nuclídeos de interesse, porém queremos a quantidade final do nuclídeo  $m$ , devemos fazer  $n = m$ . Assim, a equação (4.18) torna-se

$$F_i^+(t) = \sum_{k=i}^m C_{ik}^+ e^{a_{kk}(t-t_f)} \quad (4.19)$$

e os coeficientes  $C_{ik}^+$  são obtidos como em (4.18) trocando-se  $n$  por  $m$ .

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA  
Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
Rua Aprigio Veloso, 882 - Tel (083) 321-7222-R 355  
58.100 - Campina Grande - Paraíba

## 5. EQUAÇÃO ADJUNTA A EQUAÇÃO DE DECAIMENTO

No capítulo 4, já salientamos que em física de reatores é necessário o conhecimento das densidades dos nuclídeos no decorrer do tempo. Gandini<sup>2</sup>, derivou expressões para o cálculo das densidades através de equações adjuntas às equações de queima.

Nesse capítulo, estudaremos como obter as densidades dos nuclídeos a partir da determinação de densidades adjuntas. Compararemos importância de nuclídeos com densidades adjuntas e definiremos essas grandezas.

## 5.1 EQUAÇÃO ADJUNTA À EQUAÇÃO DE QUEIMA

Relembramos que a equação de queima na forma matricial é dada pela equação (4.1b):

$$\frac{dN}{dt} = [A] N$$

Determinaremos a equação adjunta à equação de decaimento dos nuclídeos através da definição dada pela equação (3.2), denominando as densidades adjuntas por  $N^+$ . Por simplicidade, obteremos a adjunta de cada termo separadamente.

### 5.1.1 ADJUNTA AO TERMO $\frac{dN}{dt}$

Aplicando a definição da equação (3.2) e levando em consideração que  $N$  é um vetor coluna e deve pois ser multiplicado, por um vetor linha, teremos:

$$(N^+, \frac{dN}{dt}) = \int_0^{t_f} N^+ \frac{dN}{dt} dt \quad (5.1)$$

Nessa expressão,  $N^+$  é uma matriz linha transposta da matriz coluna  $N$ , que representa as densidades adjuntas.

Por outro lado,

$$\frac{d(N^+ N)}{dt} = \frac{dN^+}{dt} N + N^+ \frac{dN}{dt}$$

ou

$$N^+ \frac{dN}{dt} = \frac{d(N^+ N)}{dt} - \frac{dN^+}{dt} N$$

Trocando a ordem dos fatores no último termo, escrevemos:

$$N^{+T} \frac{dN}{dt} = \frac{d(N^{+T} N)}{dt} - N^T \frac{dN^+}{dt} \quad (5.1a)$$

Levando (I) na equação (5.1), teremos:

$$(N^{+T}, \frac{dN}{dt}) = \int_0^{tf} (\frac{d(N^{+T} N)}{dt} - N^T \frac{dN^+}{dt}) dt \quad (5.1b)$$

Dessa forma, para que a equação (3.2) seja satisfeita, devemos impor:

$$\int_0^{tf} \frac{d(N^{+T} N)}{dt} dt = 0$$

Com isso, a equação (5.1a) torna-se:

$$(N^{+T}, \frac{dN}{dt}) = - \int_0^{tf} N^T \frac{dN^+}{dt} dt$$

ou

$$(N^{+T}, \frac{dN}{dt}) = (N^T, - \frac{dN^+}{dt})$$

Logo, se  $M_1 N = \frac{dN}{dt}$ , devemos ter:

$$M_1^+ N^+ = - \frac{dN^+}{dt} \quad (5.2)$$

### 5.1.2 ADJUNTA AO TERMO $[A] N$

Aplicando novamente a definição dada pela equação (3.2):

$$(N^{+T}, [A] N) = \int_0^{tf} N^{+T} [A] N dt$$

$$\text{ou } (N^+, [A]N) = \int_0^{t_f} [N_i^+] [a_{ij}] [N_j] dt$$

Onde  $N_i^+$ ,  $a_{ij}$  e  $N_j$  são os elementos do vetor linha de densidades adjuntas, da matriz de queima e do vetor coluna de densidades respectivamente. Dessa forma, podemos escrever:

$$(N^+, [A]N) = \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^n N_i^+ \sum_{j=1}^n a_{ij} N_j dt, \text{ ou ainda}$$

$$(N^+, [A]N) = \int_0^{t_f} \sum_{j=1}^n N_j \sum_{i=1}^n a_{ij} N_i^+ dt$$

trocando o índice  $i$ , por  $J$  e vice versa, teremos

$$(N^+, [A]N) = \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^n N_i \sum_{j=1}^n a_{ji} N_j^+ dt \text{ ou}$$

$$(N^+, [A]N) = \int_0^{t_f} [N_i] [a_{ji}] [N_j^+] dt$$

que pode ser escrito na seguinte forma:

$$(N^+, [A]N) = \int_0^{t_f} N^T [A]^T N^+ dt$$

ou simplesmente:

$$(N^+, [A]N) = (N^T, [A]^T N^+).$$

Logo, se  $M_2 N = [A]N$ , então

$$M_2^+ N^+ = [A]^T N^+. \quad (5.3)$$

Com as equações (5.2) e (5.3) podemos escrever a equação adjunta à equação de queima:

$$-\frac{dN^+}{dt} = [A]^T N^+, \quad (5.4)$$

Comparando a equação adjunta dada por (5.4) com a equação de importância de núclídeos dada por (4.11b), concluímos que são idênticas e apresentarão mesma solução se a condição temporal sobre ambas forem iguais.

## 5.2 CONDIÇÃO TEMPORAL

No ítem '5.1.1', vimos que a condição imposta para que o termo  $-\frac{dN^+}{dt}$  seja adjunto ao termo  $\frac{dN}{dt}$  foi:

$$\int_0^{t_f} \frac{d(N^+ N)}{dt} dt = 0$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
Rua Aprígio Veloso, 832 - Tel. (333) 321 7222-R 355  
58.100 - Campina Grande - Paraíba

Integrando, obtemos:

$$N^{+T}(t_f)N(t_f) = N^{+T}(0)N(0) \quad (5.4)$$

Devemos observar que  $N$  e  $N^+$  são vetores cujos elementos correspondem aos núclídeos de uma cadeia. Então, fazendo  $N_m^+(t_f) = 1$  para um determinado núclídeo  $m$  e  $N_i^+(t_f) = 0$  para  $i \neq m$ , a equação (5.4) torna-se:

$$N_m(t_f) = \sum_{i=1}^m N_i^+(0)N_i(0) \quad (5.5)$$

Com isto nós concluímos que para a mesma condição final

de importância dada por (4.17), a densidade adjunta nos dá a contribuição de cada nuclídeo presente em  $t = 0$  para uma quantidade final de interesse. Isso significa que a densidade adjunta obtida a partir de conceitos puramente matemáticos é igual à função importância de nuclídeos:  $F_i^+(t) = N_i^+(t)$ . Logo, a solução para a equação (5.4) é dada por (4.18).

### 5.3 DEFINIÇÃO FORMAL PARA DENSIDADE ADJUNTA OU IMPORTÂNCIA

Da equação (5.5) torna-se claro que a densidade de um nuclídeo  $m$  no tempo final  $t_f$  é a soma das contribuições de todos os nuclídeos a partir do tempo inicial  $t_0 = 0$ . Na verdade, a equação (5.5) pode ser interpretada como o somatório das densidades em  $t_0$  multiplicadas pelas suas respectivas probabilidades de contribuir para a quantidade de nuclídeos  $m$  no tempo final  $t_f$ . Aqui a palavra "contribuir" significa "decair no nuclídeo  $m$  e não decair mais" (para nuclídeos  $i \neq m$ ) e "não decair" (para nuclídeos  $m$ ). Dessa forma, podemos definir: Importância de um nuclídeo ou densidade adjunta é a probabilidade de um nuclídeo que aparece no sistema num instante  $t$ , contribuir para quantidade final de interesse.

## 6. TEORIA DE PERTURBAÇÃO NO CÁLCULO DAS DENSIDADES

Um sistema físico, geralmente, é descrito por equações que mostram o seu comportamento. Se alguma mudança ocorre num parâmetro do sistema, é necessário determinar sua resposta a essa mudança. Caso a mudança (perturbação) seja pequena, podemos calcular essa resposta sem corrigir as equações do sistema, através da teoria de perturbação. Com essa teoria, Gandini<sup>2</sup> calculou a variação das densidades dos nuclídeos devido à variação na matriz de queima.

Nesse capítulo, obteremos expressões para a variação das densidades devido as variações  $\delta a_{i,j}$  por teoria de perturbação, para uma matriz de queima triangular inferior.

## 6.1 QUANTIDADE DE INTERESSE PARA UMA MATRIZ DE QUEIMA CONSTANTE

No capítulo 4, montamos um sistema de equações para densidades de núclídeos, que na forma matricial são dadas pela equação (4.1b):

$$\frac{dN}{dt} = [A] N \quad (6.1)$$

No capítulo 5, derivamos a equação adjunta à equação de queima dada pela equação (5.4):

$$- \frac{dN^+}{dt} = [A]^T N^+ \quad (6.2)$$

Agora, suponhamos que o nosso interesse seja calcular a densidade de um núclídeo  $m$  num tempo final  $t_f$ . Para determinarmos a densidade final do núclídeo  $m$ , usaremos o seguinte procedimento: multiplicaremos (6.1) por  $N^{+T}$  e (6.2) por  $N^T$ . Integrando os produtos de  $t = 0$  a  $t = t_f$  teremos expressões seguintes:

$$\int_0^{t_f} N^{+T} \frac{dN}{dt} dt = \int_0^{t_f} N^{+T} [A] N dt \quad (I)$$

e

$$- \int_0^{t_f} N^T \frac{dN^+}{dt} dt = \int_0^{t_f} N^T [A]^T N^+ dt \quad (II)$$

Fazendo (I) - (II) e simplificando o primeiro membro, podemos escrever:

$$\int_0^{t_f} \frac{dN^{+T} N}{dt} dt = \int_0^{t_f} N^{+T} [A] N dt - \int_0^{t_f} N^T [A]^T N^+ dt$$

ou simplesmente

$$\int_0^{t_f} \frac{dN^{+T} N}{dt} dt = (N^{+T}, [A] N) - (N^T, [A]^T N^+)$$

Pela definição de operador adjunto, o segundo membro é igual a zero. Então, integrando o primeiro membro, obtemos:

$$N^{+T}(t_f) N(t_f) = N^{+T}(0) N(0) \quad (6.3)$$

Esse mesmo resultado foi obtido na equação (5.4). Para obtermos a quantidade final do nuclídeo  $m$  através da equação (6.3), devemos fazer  $N_m^+(t_f) = 1$  e  $N_i^+(t_f) = 0$  para  $i \neq m$ . Assim a equação (6.3) torna-se:

$$N_m(t_f) = \sum_{i=1}^m N_i^+(0) N_i(0) \quad (6.4)$$

onde  $N_m(t_f)$  é quantidade de interesse (densidade do nuclídeo  $m$ ) e  $N_i^+(0)$  é obtido através da equação (4.18).

## 6.2 QUANTIDADE DE INTERESSE PARA UMA MATRIZ DE QUEIMA PERTURBADA

Na seção '6.1', calculamos a quantidade final do nuclídeo  $m$ , para uma matriz de queima constante. Na verdade, em reatores à potência constante, a matriz de queima é lentamente variável no tempo. Suponhamos então, que em  $t_0 = 0$  é introduzida uma perturbação  $\delta A$  na matriz de queima. Dessa forma nossas equações de densidades tornam-se:

$$\frac{dN'}{dt} = [A + \delta A] N'$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
Rua Aprígio Veloso, 882 - Tel (083) 321-7222-R 355  
58.100 - Campina Grande - Paraíba

(6.5)

onde  $N'$  são as densidades dos núclídeos para a matriz de queima perturbada. A equação adjunta para o sistema não perturbado é:

$$-\frac{dN^+}{dt} = [A]^T N^+ \quad (6.6)$$

Multiplicando (6.5) por  $N^{+T}$  e (6.6) por  $N'^T$ , integrando os resultados de zero a  $t_f$  e finalmente subtraindo, obtemos:

$$\int_0^{t_f} \frac{d(N^{+T} N')}{dt} dt = \int_0^{t_f} N^{+T} [A + \delta A] N' dt - \int_0^{t_f} N'^T [A]^T N^+ dt$$

ou

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} \frac{d(N^{+T} N')}{dt} dt &= \int_0^{t_f} N^{+T} [A] N' dt - \int_0^{t_f} N'^T [A]^T N^+ dt + \\ &+ \int_0^{t_f} N^{+T} [\delta A] N' dt \end{aligned}$$

Relembrando novamente a definição de adjunta, percebemos que os dois primeiros termos do segundo membro se anulam, Assim:

$$N^{+T}(t_f) N'(t_f) - N^{+T}(0) N'(0) = \int_0^{t_f} N^{+T} [\delta A] N' dt \quad (6.7)$$

Como as perturbações foram introduzidas em  $t_0 = 0$ , é claro que  $N^{+T}(0) N'(0) = N^{+T}(0) N(0) = N_m(t_f)$  (conforme equação (6.4)), e que  $N^{+T}(t_f) N'(t_f) = N_m'(t_f)$  (sujeito as mesmas observações feitas para equação (6.3)). Fazendo  $N_m'(t_f) - N_m(t_f) = \delta q_m'(t_f)$  podemos reescrever a equação (6.7) da seguinte maneira:

$$\delta q_m'(t_f) = \int_0^{t_f} N^{+T} [\delta A] N' dt \quad (6.8)$$

Notamos, no entanto que  $N'$  na equação (6.8) não é conhecido. Admitindo que as perturbações sejam pequenas tal que possamos fazer  $N' = N + \delta N$  em (6.8) e desprezando o termo de segunda ordem, a expressão para  $\delta q'_m(t_f)$  torna-se:

$$\delta q'_m(t_f) = \int_0^{t_f} N^{+T} [\delta A] N dt \quad (6.9)$$

### 6.3 EXPRESSÕES ANALÍTICAS PARA $\delta q'_m(t_f)$

Através de uma inspeção na expressão para quantidade de interesse, equação (6.9), notamos que tal expressão poderia ser escrita como segue:

$$\delta q'_m(t_f) = \int_0^{t_f} [N_i^+] [\delta a_{ij}] [N_j] dt$$

onde  $N_i^+$ ,  $\delta a_{ij}$  e  $N_j$  são os elementos das densidades adjuntas, das perturbações na matriz de queima e das densidades respectivamente.

Dessa forma, podemos ainda escrever:

$$\delta q'_m(t_f) = \int_0^{t_f} [N_i^+] \left[ \sum_{j=1}^i \delta a_{ij} N_j \right] dt$$

onde estamos fazendo o somatório até  $j = i$  porque  $\delta a_{ij} = 0$  para  $j > i$ .

Conforme vimos na seção '4.6',  $N_i^+(t) = 0$  para  $i > m$ , logo o produto matricial torna-se:

$$\delta q'_m(t_f) = \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^m N_i^+ \sum_{j=1}^i \delta a_{ij} N_j dt \quad \text{ou}$$

$$\delta q'_m(t_f) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \delta a_{ij} \int_0^{t_f} N_j N_i^+ dt$$

Substituindo  $N_j$  e  $N_i^+$  pelas expressões (4.6) e (4.18):

$$\delta q'_m(t_f) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \delta a_{ij} \int_0^{t_f} \left( \sum_{l=1}^j c_{jl} e^{-a_{ll}t} \right) \cdot$$

$$\cdot \left( \sum_{k=1}^m c_{ik}^+ e^{a_{kk}(t-t_f)} \right) dt$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
 Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
 Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
 Rua Aprígio Veloso, 822 - Tel. (83) 321 7222-R 355  
 58.090 - Campina Grande - Paraíba

ou

$$\delta q'_m(t_f) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \delta a_{ij} \sum_{l=1}^j \sum_{\substack{k=i \\ k \neq l}}^m \int_0^{t_f} c_{jl} c_{ik}^+ e^{-a_{kk}t_f} \cdot e^{(a_{kk} - a_{ll})t} dt + \sum_{i=1}^m \delta a_{ii} \int_0^{t_f} c_{ii} c_{ii}^+ e^{-a_{ii}t_f} dt$$

integrando:

$$\delta q'_m(t_f) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \delta a_{ij} \sum_{l=1}^j \sum_{\substack{k=i \\ k \neq l}}^m \frac{c_{jl} c_{ik}^+}{a_{kk} - a_{ll}} e^{-a_{kk}t_f} \cdot e^{(a_{kk} - a_{ll})t} \Big|_0^{t_f} + \sum_{i=1}^m \delta a_{ii} c_{ii} c_{ii}^+ e^{-a_{ii}t_f} t \Big|_0^{t_f}$$

o que finalmente nos dá:

$$\delta q'_m(t_f) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \delta a_{ij} \sum_{l=1}^j \sum_{\substack{k=i \\ k \neq l}}^m \frac{c_{jl} c_{ik}^+}{(a_{kk} - a_{ll})} \left( e^{-a_{ll}t_f} - \right)$$

$$- e^{-a_{kk} t_f} \Big\} + \sum_{i=1}^m \delta a_{ii} C_{ii} C_{ii}^+ e^{-a_{ii} t_f} \quad (6.10)$$

A equação (6.10) nos dá a variação da quantidade de interesse do nuclídeo  $m$  no tempo  $t_f$ , devido a uma perturbação  $\delta A$  na matriz de queima em  $t_0 = 0$ . A validade da equação (6.10) pode ser constatada pela diferenciação direta de (4.6) para algum nuclídeo da cadeia.

Suponhamos agora, que entre os instantes  $t_0$  e  $t_f$ , várias perturbações  $f$  são introduzidas no reator. Dessa forma, a equação (6.9) deve ser escrita da seguinte forma:

$$\delta q'_m(t_f) = \sum_f \int_{t_1^f}^{t_2^f} N^{+T} [\delta A_f] N dt$$

Substituindo  $N^{+T}$  e  $N$  na expressão anterior e integrando, obtemos:

$$\delta q'_m(t_f) = \sum_f \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \delta a_{ij}^f \sum_{l=1}^j \sum_{\substack{k=i \\ k \neq l}}^m \frac{C_{jl} C_{ik}^+}{(a_{kk} - a_{ll})} e^{-a_{kk} t_f} \cdot$$

$$\left[ e^{(a_{kk} - a_{ll}) t_2^f} - e^{(a_{kk} - a_{ll}) t_1^f} \right] + \sum_f \sum_{i=1}^m$$

$$\delta a_{ii}^f C_{ii} C_{ii}^+ e^{-a_{ii} t_f} (t_2^f - t_1^f) \quad (6.11)$$

Dessa forma, o cálculo das densidades dos nuclídeos para perturbações  $\delta a_{ij}^f$  dadas, tem sido completamente estabelecido.

## 7. TEORIA DE PERTURBAÇÃO NO CÁLCULO DAS VARIACÕES DA MATRIZ DE QUEIMA

No capítulo anterior, vimos como calcular a variação das densidades de núclídeos devido a variações dadas nos elementos da matriz de queima. Nosso problema, agora é calcular as variações  $\delta a_{i,j}$  para algum tipo de perturbação.

M. Salvatores<sup>3</sup> obteve expressões para o cálculo de  $\delta a_{i,j}(t)$  da matriz de queima para uma perturbação específica: variação do fluxo de um reator à potência constante. Essas expressões foram obtidas através da teoria de perturbação generalizada onde os termos de segunda ordem foram desprezados. Com isso, os elementos  $\delta a_{i,j}(t)$  foram dados em função do fluxo em  $t_0$ .

Nesse capítulo, obteremos expressões para os elementos  $\delta a_{i,j}(t)$  em função do fluxo no tempo  $t$ , considerando, assim, os termos de segunda ordem.



2º) Fissão, captura radiotiva, etc, de nuclídeos J.

$$(B2) = \sum_j \int_0^\infty \Sigma_{i,j}(\vec{r}, E, t) \phi(\vec{r}, E, t) dE$$

onde  $\Sigma_{i,j}$  é a seção de choque do nuclídeo j que produz o nuclídeo i, e é dado por  $\Sigma_{i,j} = N_j(\vec{r}, t) \sigma_{i,j}(E)$ .

Logo o termo (B) = (B2) + (B1) é dado por:

$$(B) = \sum_j N_j(\vec{r}, t) \int_0^\infty \sigma_{i,j}(E) \phi(\vec{r}, E, t) dE + \sum_j \lambda_{i,j} N_j(\vec{r}, t) \quad (7.3)$$

### 7.1.3 ANÁLISE DO TERMO (C): Taxa de desaparecimento

Um nuclídeo i desaparece no reator devido aos processos de fissão, captura radiotiva, decaimento, etc, associados a ele. Assim, podemos decompor o termo (C) em dois outros:

1º) Fissão, captura radiotiva, etc. do nuclídeo i:

$$(C1) = N_i(\vec{r}, t) \int_0^\infty \sigma_{ai}(E) \phi(\vec{r}, E, t) dE + \lambda_i N_i(\vec{r}, t)$$

onde  $\sigma_{ai}(E)$  é a seção de choque microscópica de absorção de i.

2º) Decaimento do nuclídeo i.

$$(C2) = \lambda_i N_i(\vec{r}, t)$$

Logo o termo (C) = (C1) + (C2) é dado por:

$$(C) = N_i(\vec{r}, t) \int_0^\infty \sigma_{ai}(E) \phi(\vec{r}, E, t) dE + \lambda_i N_i(\vec{r}, t) \quad (7.4)$$

Das equações (7.2), (7.3) e (7.4) obtemos finalmente a equação para a taxa de variação da densidade de um nuclídeo  $i$ :

$$\begin{aligned} \frac{dN_i(\vec{r}, t)}{dt} = & \sum_j N_j(\vec{r}, t) \int_0^\infty \sigma_{i,j}(E) \phi(\vec{r}, E, t) dE + \sum_j \lambda_{i,j} N_j(\vec{r}, t) - \\ & - N_i(\vec{r}, t) \int_0^\infty \sigma_{ai}(E) \phi(\vec{r}, E, t) dE - \lambda_i N_i(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (7.5)$$

Assim, a taxa de variação das densidades de todos os nuclídeos de uma cadeia pode ser representada na forma matricial, como segue:

$$\frac{dN(\vec{r}, t)}{dt} = [A(\vec{r}, t)] N(\vec{r}, t) \quad (7.6)$$

onde a matriz de queima  $[A(\vec{r}, t)]$ , é formada por elementos dos tipos:

$$\begin{aligned} a_{i,j}(\vec{r}, t) &= \int_0^\infty \sigma_{ij}(E) \phi(\vec{r}, E, t) dE, \\ a_{i,i}(\vec{r}, t) &= \int_0^\infty \sigma_{ai}(E) \phi(\vec{r}, E, t) dE, \\ a_{i,j}(\vec{r}, t) &= \lambda_j \quad \text{e} \quad a_{i,i} = \lambda_i \end{aligned} \quad (7.7)$$

## 7.2 DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE QUEIMA PELO MÉTODO DIRETO

Observando a equação (7.6), notamos que tal equação não é linear posto que a matriz  $[A]$  varia no decorrer do tempo. Das equações (7.7), percebemos que os elementos  $a_{i,j}$  variam devido à variação do fluxo posto que  $\sigma$  e  $\lambda$  são constantes. Na maioria

dos códigos de cálculo de reatores, a solução de equação (7.6) é feita (via linearização) de acordo com a rotina estabelecida a seguir.

### 7.2.1 ROTINA PARA O CÁLCULO DIRETO DAS DENSIDADES

1) O ciclo do reator (tempo de um reabastecimento a outro) é dividido em intervalos de tempo, suficientemente pequenos tal que o fluxo em um intervalo possa ser considerado constante.

2) Calcule-se o fluxo em  $t_0$ .

3) Resolve-se as equações (7.7) determinando-se a matriz de queima que é mantida constante para o intervalo.

4) Resolve-se as equações (7.6) obtendo assim as densidades no fim do intervalo.

5) Com as novas densidades calcula-se as novas seções de choque, e a partir daí, calcula-se o novo fluxo. Com o fluxo calculado, retorna-se ao terceiro passo.

Devemos notar que a cada intervalo de tempo é necessário o cálculo do fluxo através, por exemplo, da equação de difusão. Isso exige muito tempo computacional. Buscaremos, então, uma nova forma de calcular tais densidades sem a necessidade do cálculo direto do fluxo (via equação de difusão) a cada intervalo de tempo.

### 7.3 TEORIA DE PERTURBAÇÃO GENERALIZADA

Como vimos, a matriz de queima tem uma dependência temporal. Para um reator que funciona com potência constante, podemos explicitar essa dependência da seguinte maneira:

$$A(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t_0) + \delta A(\vec{r}, t)$$

(7.8)  
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
Rua Aprígio Veloso, 882 - Tel (083) 321-7222-R 355  
53.100 - Campina Grande - Paraíba

onde  $A(\vec{r}, t_0)$  é a matriz de queima não perturbada cujos elementos são calculados pela equação (7.7) e  $\delta A(\vec{r}, t)$  é a perturbação produzida em A entre  $t_0$  e t.

Nosso propósito é estabelecer uma maneira de calcular  $\delta A(r, t)$  sem a necessidade do cálculo direto do fluxo a cada intervalo de tempo. Para tal, façamos a normalização dos elementos  $a_{i,j}(\vec{r}, t)$  para a potência do reator:

$$R_{i,j}(\vec{r}, t) = \frac{a_{i,j}(\vec{r}, t)}{P(t)} \quad (7.9)$$

onde  $P(t)$  é a potência do reator no instante t e é dada por:

$$P(t) = \int_V \int_0^\infty \phi(\vec{r}, E, t) \sum_{k=1}^n P^k \Sigma_f^k(\vec{r}, E, t) dE dV \quad (7.10)$$

onde V é o volume do reator, n é o número de isótopos físseis ou fissionáveis e  $P^k$  é a energia desprendida na fissão do isótopo k.

A equação (7.9) nos dá uma razão de taxas no instante t e pode ser dada em função dos parâmetros iniciais:

$$R_{i,j}(\vec{r}, t) = \frac{a_{i,j}(\vec{r}, 0) + \delta a_{i,j}(\vec{r}, t)}{P(0) + \delta P(t)}$$

Dessa forma, a variação da razão de taxas entre os instantes  $t_0 = 0$  e t, é dada por:

$$\delta R_{i,j}(\vec{r}, t) = \frac{a_{i,j}(\vec{r}, 0) + \delta a_{i,j}(\vec{r}, t)}{P(0) + \delta P(t)} - \frac{a_{i,j}(\vec{r}, 0)}{P(0)}$$

ou

$$\delta R_{i,j}(\vec{r}, t) = \frac{\delta a_{i,j}(\vec{r}, t)}{P(0) + \delta P(t)} - \frac{a_{i,j}(\vec{r}, 0) \delta P(t)}{P(0) [P(0) + \delta P(t)]}$$

Colocando o termo  $\frac{a_{i,j}(\vec{r},0)}{P(0) + \delta P(t)}$  em evidência, teremos:

$$\delta R_{i,j}(\vec{r},t) \approx \frac{a_{i,j}(\vec{r},0)}{P(0) + \delta P(t)} \left[ \frac{\delta a_{i,j}(\vec{r},t)}{a_{i,j}(\vec{r},0)} - \frac{\delta P(t)}{P(0)} \right]$$

expandindo  $\frac{1}{P(0) + \delta P(t)}$ , efetuando as operações indicadas e desprezando os termos de segunda ordem, podemos escrever:

$$\frac{\delta R_{i,j}(\vec{r},t)}{R_{i,j}(\vec{r},0)} = \frac{\delta a_{i,j}(\vec{r},t)}{a_{i,j}(\vec{r},0)} - \frac{\delta P(t)}{P(0)} \quad (7.11)$$

Devemos observar que para um reator à potência constante,  $P(t) = P(0)$  não sendo necessária a expansão anterior. Nesse caso, a equação (7.11) é exata.

Por outro lado, das equações (7.7) e (7.10), encontramos:

$$\delta a_{i,j}(\vec{r},t) = \int_0^\infty \sigma_{i,j}(E) \delta \phi(\vec{r},E,t) dE$$

$$e \quad \delta P(t) = \int_V \int_0^\infty \sum_k P^k \Sigma_f^k(\vec{r},E,0) \delta \phi(\vec{r},E,t) dE dV + \\ + \int_V \int_0^\infty \phi(\vec{r},E,t) \sum_k \delta [P^k \Sigma_f^k(\vec{r},E,t)] dE dV$$

Levando esses resultados na equação (7.11), teremos:

$$\frac{\delta R_{i,j}(\vec{r},t)}{R_{i,j}(\vec{r},0)} = \frac{1}{a_{i,j}(\vec{r},0)} \int_0^\infty \sigma_{i,j}(E) \delta \phi(\vec{r},E,t) dE -$$

### 7.3.2 O EFEITO INDIRETO

O efeito indireto, dado pela variação do fluxo, é obtido conforme as discussões anteriores:

$$\left. \frac{\delta R_{i,j}(r,t)}{R_{i,j}(\vec{r},0)} \right|_{\text{indir}} = \frac{1}{a_{i,j}(\vec{r},0)} \int_0^\infty \sigma_{i,j}(E) \delta\phi(\vec{r},E,t) dE - \frac{1}{P(0)} \int_V \int_0^\infty \sum_k P^k \Sigma_f^k(\vec{r},E,0) \delta\phi(\vec{r},E,t) dE dV \quad (7.14)$$

Para calcularmos o efeito indireto, utilizaremos a teoria de perturbação. Devemos lembrar que um reator crítico pode ser descrito pelas equações de difusão a multigrupo, conforme equação (1.2):

$$Q\phi = 0 \quad (7.15)$$

Devemos lembrar ainda, do capítulo 2, que em um reator crítico a importância de um nêutron com relação a um determinado evento é dada pela equação (2.3):

$$Q^+\psi^+ = S^+ \quad (7.16)$$

onde  $S^+$  é o termo de fonte relativo ao evento de interesse.

Para que a função importância seja também adjunta ao fluxo, devemos impor uma condição sobre  $S^+$ , obtida pela definição de adjunta dada pela equação (3.2). Assim, multiplicando (7.15) por  $\psi^+$  e (7.16) por  $\phi$ , integrando os produtos em todos os limites das variáveis e subtraindo as integrais, teremos:

$$\int \psi^+ Q\phi d\xi - \int \phi Q^+\psi^+ d\xi = - \int S^+\phi d\xi \quad (7.17)$$

onde  $\xi$  representa as variáveis de energia e volume.

Da definição de equação adjunta, o primeiro membro da equação (7.17) deve ser zero. Assim, obtemos a condição para que a função importância de nêutrons com relação a algum evento seja também adjunta:

$$\int S^+ \phi d\xi = 0 \quad (7.18)$$

Isso significa que  $S^+$  não contribui para a potência do reator.

Suponhamos agora que no tempo  $t_0 = 0$ , uma pequena perturbação seja introduzida no reator, que no entanto permanece crítico devido ao sistema de controle. Tal situação pode ser descrita por:

$$Q' \phi' = 0 \quad (7.19)$$

Procedendo da forma anterior, isto é, multiplicando (7.19) por  $\psi^+$  e, (7.16) por  $\phi'$ , integrando e subtraindo os resultados, teremos:

$$\int \psi^+ Q' \phi' d\xi - \int \phi' Q^+ \psi^+ d\xi = - \int S^+ \phi' d\xi \quad (7.20)$$

Entretanto, a perturbação no operador de Boltzmann pode ser descrita por:

$$Q' = Q + \delta Q$$

onde  $\delta Q$  tem uma parcela devido a variação das densidades e outra devido ao sistema de controle que atua para manter a criticalidade. Levando a expressão de  $Q'$  na equação (7.20) e fazendo as simplificações devido aos termos adjuntos, teremos:

$$\int \psi^+ \delta Q \phi' d\xi = - \int S^+ \phi' d\xi \quad (7.21)$$

Relembrando a condição imposta sobre a função importância dada pela equação (7.18), podemos reescrever a equação (7.21):

$$\int \psi^+ \delta Q \phi' d\xi = - \int S^+ \delta \phi d\xi \quad \text{ou:} \quad (7.22)$$

$$\int_V \int_0^\infty \psi^+ \delta Q \phi' dE dV = - \int_V \int_0^\infty S^+ \delta \phi dE dV \quad (7.22a)$$

O nosso objetivo é determinar uma maneira pela qual possamos calcular o efeito indireto. Comparando a equação (7.14) com a equação (7.22a), observamos que é possível escolher um termo de fonte tal que a equação (7.22) nos dê o efeito indireto para os elementos da matriz de queima:

$$S_{i,j}^+(\vec{r}, E) = - \frac{\sigma_{i,j}(E)}{a_{i,j}(\vec{r}, 0)} + \frac{\sum_k P^k \Sigma_f^k(\vec{r}, E, 0)}{P(0)} \quad (I)$$

e como estamos interessados na razão de taxas para um ponto específico  $\vec{r}$ , devemos fazer o termo  $\sigma_{i,j}(E) = 0$  fora do ponto  $\vec{r}$ ; o que decorre do significado de importância visto no capítulo 2. Assim, levando (I) na equação (7.22a):

$$\int_V \int_0^\infty \psi_{i,j}^+ \delta Q \phi' dE dV = \frac{\int_0^\infty \sigma_{i,j}(E) \delta \phi(\vec{r}, E, t) dE}{a_{i,j}(\vec{r}, 0)} - \frac{1}{P(0)} \int_V \int_0^\infty \sum_k P^k \Sigma_f^k(\vec{r}, E, 0) \delta \phi(\vec{r}, E, t) dE dV$$

O segundo membro da última expressão é exatamente o efeito indireto dado pela equação (7.14). Assim:

$$\left. \frac{\delta R_{i,j}(\vec{r},t)}{R_{i,j}(\vec{r},0)} \right|_{\text{indir}} = \int_V \int_0^\infty \psi_{i,j}^+ \delta Q \phi' dE dV . \quad (7.22b)$$

Para um reator dividido em N elementos de volume  $\Delta V$  a equação (7.22b) para uma zona Z fica da seguinte forma:

$$\left. \frac{\delta R_{i,j}^Z(t)}{R_{i,j}^Z(0)} \right|_{\text{indir}} = \sum_{l=1}^N \int_0^\infty \psi_{i,j}^{+l} \delta Q \phi'^l dE \quad (7.23)$$

onde  $\psi_{i,j}^{+Z}$  é calculado com os seguintes termos de fonte:

$$S_{i,j}^{+Z} = \frac{\sigma_{i,j}^Z(E)}{a_{i,j}(0)} + \frac{\sum_k P^k \Sigma_{fZ}^k(E,0)}{P(0)} \quad \text{para a zona Z, e} \quad (II)$$

$$S_{i,j}^{+1} = \frac{\sum_k P^k \Sigma_{f1}^k(E,0)}{P(0)} \quad 1 \neq Z$$

Nesse ponto, é importante observarmos que tanto o termo de fonte (I) quanto o (II) satisfazem a equação (7.18). É por essa razão que trabalhamos com razão de taxas: é sempre possível obter um termo de fonte para a função importância que satisfaça a condição (7.18).

#### 7.4 OBTENÇÃO DE $\delta a$

Da seção '7.3', vimos que

$$\frac{\delta R_{i,j}(\vec{r},t)}{R_{i,j}(\vec{r},0)} = \left. \frac{\delta R_{i,j}(\vec{r},t)}{R_{i,j}(\vec{r},0)} \right|_{\text{dir}} + \left. \frac{R_{i,j}(r,t)}{R_{i,j}(r,0)} \right|_{\text{indir}} \quad (7.24)$$

onde os efeitos direto e indireto são calculados pelas equações (7.13) e (7.22b) respectivamente.

Por outro lado, para um reator operando à potência constante, teremos:

$$R_{i,j}(\vec{r},t) = \frac{a_{i,j}(\vec{r},t)}{P} \quad \text{o que nos dá:}$$

$$\delta R_{i,j}(\vec{r},t) = \frac{\delta a_{i,j}(\vec{r},t)}{P} \quad \text{ou ainda}$$

$$\frac{\delta R_{i,j}(\vec{r},t)}{R_{i,j}(\vec{r},0)} = \frac{\delta a_{i,j}(\vec{r},t)}{a_{i,j}(\vec{r},0)}$$

dessa forma, podemos escrever:

$$\delta a_{i,j}(\vec{r},t) = a_{i,j}(\vec{r},0) \frac{\delta R_{i,j}(\vec{r},t)}{R_{i,j}(\vec{r},0)} \quad (7.25)$$

onde  $\delta R/R$  é calculado através da equação (7.24).

As equações (7.13) e (7.22b) foram usadas por M. Salvatores<sup>3</sup> e por Cabral<sup>4</sup>, com a substituição de  $\phi'$  por  $\phi_0$ . Isso simplifica os cálculos mas introduz erros devido ao desprezo dos termos de segunda ordem. No capítulo 8, estudaremos um método para o cálculo do fluxo num tempo  $t$ . A substituição desse fluxo em (7.13) e (7.22b), deve melhorar os resultados obtidos por M. Salvatores<sup>3</sup> e Cabral<sup>4</sup>.

## 8. TEORIA DE PERTURBAÇÃO NO CÁLCULO DE CRITICALIDADE

Um reator crítico pode fugir à criticalidade se houver mudanças em algum de seus parâmetros. Nesse caso, para que o reator volte à criticalidade, é necessário que a perturbação seja compensada pelo sistema do controle. Essa compensação pode ser feita através de uma mudança na produção ou no desaparecimento de nêutrons. Mitani<sup>6</sup> utilizou altas ordens de perturbação para compensar perturbações através da mudança na produção de nêutrons.

Nesse capítulo, utilizaremos altas ordens de perturbação para calcular mudanças do fluxo e do buckling material. Com isso, a criticalidade pode ser mantida através da mudança do termo de fuga dos nêutrons: o buckling geométrico deve ser ajustado ao buckling material calculado.

## 8.1 REATOR CRÍTICO

Como vimos no capítulo 1, um reator crítico pode ser descrito por

$$Q\phi = 0 \quad (8.1)$$

A equação (8.1) dá o balanço entre a produção e desaparecimento de neutrons e pode ser escrita da seguinte forma:

$$M\phi = S\phi \quad (8.2)$$

Nessa expressão, M é o operador de desaparecimento e S é o operador de produção de nêutrons. Assim, Q pode ser dado por:

$$Q = M - S \quad (8.3)$$

## 8.2 PERTURBAÇÕES EM UM REATOR CRÍTICO

Suponhamos que seja introduzida uma perturbação  $\delta Q_p$  nos parâmetros de um reator crítico. Devido à perturbação  $\delta Q_p$ , o reator pode fugir à criticalidade, e, para que retorne, o sistema de controle deve atuar introduzindo uma perturbação  $\delta Q_c$  que anule o efeito de  $\delta Q_p$ . Com isso, o reator passa a ser descrito por

$$(Q + \delta Q_p + \delta Q_c)\phi' = 0, \quad \text{ou ainda:}$$

$$Q'\phi' = -\delta Q_c\phi' \quad (8.4)$$

onde  $Q' = Q + \delta Q_p$ .

O nosso problema agora, é determinar qual a perturbação de controle  $\delta Q_c$  que traz o reator de volta à criticalidade.

### 8.3 CÁLCULOS DE CRITICALIDADE

Para determinarmos  $\delta Q_c$ , admiteremos que  $\phi'$ ,  $\delta Q_c$  e  $Q'$  possam ser escritos da seguinte maneira:

$$\phi' = \phi_0 + \sum_{i=1}^n \lambda^i \phi_i$$

$$\delta Q_c = \sum_{i=1}^n \lambda^i \delta Q_c^i$$

$$Q' = Q + \lambda \delta Q_p$$

onde o índice  $i$  dá ordem de perturbação sobre  $\phi'$  e  $\delta Q_c$ . Substituindo as expressões anteriores na equação (8.4) e identificando os termos de mesma potência de  $\lambda$ , teremos:

$$Q\phi_0 = 0 \tag{8.5a}$$

$$Q\phi_1 = -\delta Q_p \phi_0 - \delta Q_c^1 \phi_0 \tag{8.5b}$$

$$Q\phi_2 = -\delta Q_p \phi_1 - \delta Q_c^1 \phi_1 - \delta Q_c^2 \phi_0 \tag{8.5c}$$

$\vdots$

$$Q\phi_n = -\delta Q_p \phi_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} \delta Q_c^i \phi_{n-i} - \delta Q_c^n \phi_0 \tag{8.5d}$$

Observando as equações (8.5), notamos que a primeira refere-se, ao reator não perturbado, logo sua solução é conhecida. A segunda não pode ser resolvida diretamente porque envolve  $\phi_1$  e  $\delta Q_c^1$ , ambos, desconhecidos. Para resolver esse impasse, utilizaremos uma equação adjunta à equação (8.1) obtida conforme a definição dada pela equação (3.2):

$$Q^+ \phi^+ = 0 \quad (8.6)$$

Multiplicando a equação (8.5b) por  $\phi^+$  e (8.6) por  $\phi_1$ , integrando os produtos e subtraindo as integrais, encontramos:

$$\int \phi^+ \delta Q_c^1 \phi_0 d\xi = - \int \phi^+ \delta Q_p \phi_0 d\xi \quad (8.7)$$

onde usamos  $(\phi^+, Q\phi_1) - (\phi_1, Q^+\phi^+) = 0$  conforme a definição de equação adjunta.

A equação (8.7) permite-nos calcular  $\delta Q_c^1$  para uma compensação do sistema de controle determinada. Com  $\delta Q_c^1$  determinado, podemos determinar  $\phi_1$  através de (8.5b). Com o mesmo procedimento, podemos obter  $\delta Q_c^2$  e daí  $\phi_2$  e assim sucessivamente até a ordem de perturbação desejada.

#### 8.4 COMPENSAÇÃO DO SISTEMA DE CONTROLE

Para trazer um reator não crítico de volta à criticalidade, devemos modificar a produção ou o desaparecimento de nêutrons. Para modificar a produção de nêutrons, devemos acrescentar ou subtrair nuclídeos físseis ao reator. Para modificar o desaparecimento, temos duas maneiras: a primeira consiste em adicionar ou subtrair nuclídeos absorvedores enquanto que a segunda consiste na mudança do termo de fuga através de uma variação do buckling geométrico. Nesse último caso fazemos:

$$\delta Q_c = D' \delta B^2 \quad (8.8)$$

Com a compensação do sistema de controle definida desse modo, podemos determinar  $\delta B$  e  $\phi'$  conforme o procedimento da seção anterior.

## 9. APLICAÇÃO EM REATORES TÉRMICOS

Para analisarmos a influência das altas ordens de perturbação no cálculo do fluxo, do buckling e das densidades dos núclídeos, utilizamos um reator térmico à potência constante. Os resultados foram comparados com os cálculos diretos efetuados pelo código Leopard que gera parâmetros em quatro grupos de energia.

O ciclo do reator, de 4930 horas, foi dividido em 14 intervalos de tempo sendo o primeiro de 50 hs, os dois seguintes de 240 hs e os demais de 400 hs. Em cada intervalo, a criticidade foi mantida através da variação do buckling geométrico.

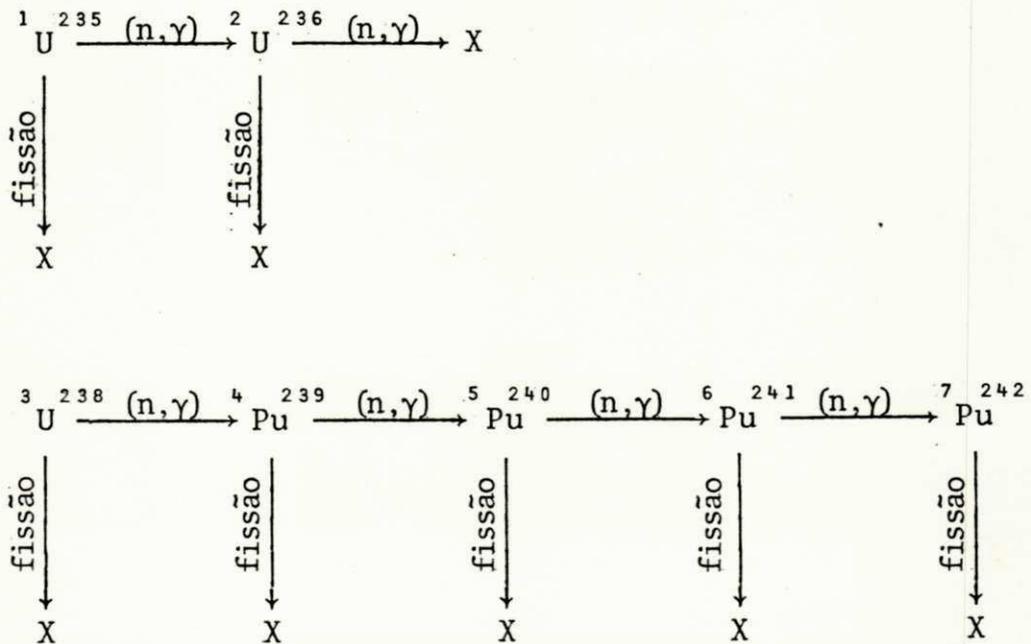
Os dados iniciais utilizados nos cálculos por teoria de perturbação foram fornecido pelo Leopard no fim do primeiro intervalo.

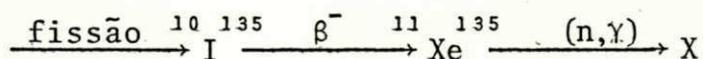
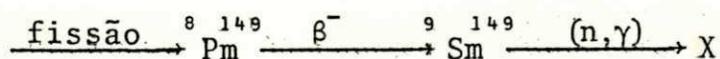
### 9.1 - CARACTERÍSTICAS DO REATOR

Foi utilizado um reator térmico com uma densidade de potência de 107,1 KW/l e com as características iniciais dadas no quadro a seguir:

NUCLÍDEO	DENSIDADE (átomos/A <sup>3</sup> )
HIDROGÊNIO	2.71677 x 10 <sup>-2</sup>
OXIGÊNIO	2.77097 x 10 <sup>-2</sup>
ZIRCONIO-2	4.09475 x 10 <sup>-3</sup>
NÍQUEL	3.73537 x 10 <sup>-4</sup>
URÂNIO 235	1.28725 x 10 <sup>-4</sup>
URÂNIO 238	6.93419 x 10 <sup>-3</sup>
$B^2 = 2.69909 \times 10^{-3}$	

A cadeia de queima para esse carregamento (veja Cabral<sup>4</sup>), é dada a seguir:





Essa cadeia foi simplificada, não explicitando nuclídeos de vida média muito curta. Os números de 1 até 11 dão a posição de cada nuclídeo na cadeia e X (número 12) é um nuclídeo fictício, estável, que "fecha" a cadeia.

## 9.2 - EQUAÇÕES UTILIZADAS NOS CÁLCULOS

O Leopard é um código que calcula a dependência energética dos parâmetros de um reator e utiliza a equação de difusão em quatro grupos de energia para o cálculo do fluxo. A equação de difusão com dependência energética é obtida supondo que a distribuição do fluxo em energia não dependa da distribuição espacial. Dessa forma, pode-se escrever a seguinte solução para a equação 1.2:

$$\phi_g(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) \phi_g$$

Substituindo essa solução na equação de difusão e fazendo uma separação de variáveis obtém-se:

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) + B^2 \psi(\vec{r}) = 0 \tag{9.1}$$

e

$$(D_g B^2 + \Sigma_{Rg}) \phi_g - \sum_{h=1}^{g-1} \Sigma_{h \rightarrow g} \phi_h = \chi_g \sum_{h=1}^N \nu_h \Sigma_{fh} \phi_h \tag{9.2}$$

onde  $B^2$  é o buckling geométrico.

A equação (9.2) é resolvida pelo código Leopard com a seguinte normalização sobre o fluxo:

$$\sum_{h=1}^N v_h \Sigma_{fh} \phi_h = 1 .$$

Outra equação utilizada na teoria de perturbação é a equação adjunta à equação de difusão, obtida conforme mostra o capítulo 3:

$$(D_g B^2 + \Sigma_{Rg}) \phi_g^+ - \sum_{h=g+1}^N \Sigma_{g \rightarrow h} \phi_h^+ = v_g \Sigma_{fg} \sum_{h=1}^N \chi_h \phi_h^+ \quad (9.3)$$

onde vamos impor a normalização:

$$\sum_{h=1}^N \chi_h \phi_h^+ = 1 .$$

Como foi visto no capítulo 7, o efeito indireto é obtido através da função importância calculada através da equação:

$$\begin{aligned} (D_g B^2 + \Sigma_{Rg}) \psi_{gi,J}^+ - \sum_{h=g+1}^N \Sigma_{g \rightarrow h} \psi_{hi,J}^+ - v_g \Sigma_{fg} \sum_{h=1}^N \chi_h \psi_{gi,J}^+ \\ = S_{i,J}^+ \end{aligned}$$

onde  $S_{i,J}^+$  refere-se ao elemento  $a_{i,J}$  da matriz de queima.

### 9.3 - RESULTADOS

Com as seções de choque microscópicas e o fluxo forneci

9.5 - TABELAS

Unidades do bucklinge e densidades:  $\text{cm}^{-2}$  e átomos/ $\text{A}^3$

I. - Fluxos (em  $t_0 = .50 \text{ hs}$  e  $t = 4930 \text{ hs}$ ) por Leopard

GRUPO	1	2	3	4
$\phi(0)$	10.4117	13.7030	11.1485	9.2307
$\phi(t)$	11.0661	14.6196	11.9165	7.8576
$\delta\phi/\phi(0) \%$	6,28	6,69	6,89	-14,87
$B_0^2 = 2,13163 \times 10^{-3}$	$B^2(t) = 4,72827 \times 10^{-4}$		$\delta B^2/B_0^2 = -77.8\%$	

II. - Fluxos (em  $t = 4930 \text{ hs}$ ) por teoria de perturbação

GRUPO		1	2	3	4
$\phi(t)$	ORDEM	11.2086	15.0135	11.8874	8.1034
	1 Erro %	-1.29	-2.69	+0.24	-3.13
	2	11.2036	15.0405	11.8280	8.1075
	Erro %	-1.24	-2.88	+0.74	-3.18
	3	11.2020	15.0377	11.8269	8.1077
	Erro %	-1.23	-2.86	+0.75	-3.18
	4	11.2022	15.0379	11.8274	8.1076
	Erro %	-1.23	-2.86	+0.75	-3.18

III. - Buckling (em  $t = 4930 \text{ hs}$ ) por teoria de perturbação

ORDEM	1	2	3	4
BUCKLING	$-1,81369 \times 10^{-4}$	$4,5172 \times 10^{-5}$	$1,25755 \times 10^{-5}$	$1,77982 \times 10^{-5}$
$\delta B^2/B_0^2 \%$	-108,5	-97,9	-99,4	-99,2

TABELAS II, III e IV - Rotina dos cálculos por teoria de perturbação  
 $\sigma, \phi, B^2, N \rightarrow A_0 \rightarrow N \rightarrow \delta \Sigma \rightarrow \delta \phi$  e  $\delta B^2 \rightarrow \delta a_{1J} \rightarrow \delta q$   
p/todos os intervalos

IV - Densidades (em t = 4930 hs). P/Leoparde teoria de perturbação

NUCLÍDEO	N (p/Leopard)	N (A ≡ Cte)	ERRO %	N (p/1 ordem)	ERRO %
U235	$7.85469 \times 10^{-5}$	$7.59951 \times 10^{-5}$	3.25	$7.82303 \times 10^{-5}$	0.40
U236	$8.54075 \times 10^{-6}$	$8.83383 \times 10^{-6}$	-3.43	$8.57670 \times 10^{-6}$	-0.42
U238	$6.88559 \times 10^{-3}$	$6.88660 \times 10^{-3}$	-0.01	$6.88561 \times 10^{-3}$	-0.0003
Pu239	$2.35104 \times 10^{-5}$	$2.14179 \times 10^{-5}$	8.9	$2.29025 \times 10^{-5}$	2.58
Pu240	$4.85784 \times 10^{-6}$	$4.87854 \times 10^{-6}$	-0.43	$4.63903 \times 10^{-6}$	4.50
Pu241	$1.60802 \times 10^{-6}$	$1.90290 \times 10^{-6}$	-18.34	$2.17921 \times 10^{-6}$	-35.52
Pu242	$1.88832 \times 10^{-7}$	$2.49478 \times 10^{-7}$	-32.12	$3.12109 \times 10^{-7}$	-65.28
Pm149	$1.28889 \times 10^{-8}$	$1.35665 \times 10^{-8}$	-5.26	$1.32567 \times 10^{-8}$	-2.85
Sm149	$1.22998 \times 10^{-8}$	$1.14021 \times 10^{-8}$	7.30	$1.20493 \times 10^{-8}$	2.04
I135	$7.49377 \times 10^{-9}$	$7.89234 \times 10^{-9}$	-5.32	$7.70713 \times 10^{-9}$	-2.85
Xe135	$1.74262 \times 10^{-9}$	$1.65120 \times 10^{-9}$	5.25	$1.72634 \times 10^{-9}$	0.93
X	$5.97795 \times 10^{-5}$	$6.31069 \times 10^{-5}$	-5.57	$6.06627 \times 10^{-5}$	-1.48

Calculado pela equação (6.11)

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
 Pró-Reitoria Para Assuntos do Interior  
 Coordenação Setorial de Pós-Graduação  
 Rua Argrigo Veloso, 832 - 13011-900 - 331 7222-R 355  
 58100- Campina Grande - Paraíba

N (p/ 2 ordens)	ERRO %	N (p/ 3 ordens)	ERRO %	N (p/ 4 ordens)	ERRO %
$7.82335 \times 10^{-5}$	0.40	$7.82333 \times 10^{-5}$	0.40	$7.82333 \times 10^{-5}$	0.40
$8.57654 \times 10^{-6}$	-0.42	$8.57653 \times 10^{-6}$	-0.42	$8.57653 \times 10^{-6}$	-0.42
$6.88559 \times 10^{-3}$	0.00	$6.88559 \times 10^{-3}$	0.00	$6.88554 \times 10^{-3}$	0.00
$2.29149 \times 10^{-5}$	2.53	$2.29133 \times 10^{-5}$	2.54	$2.29136 \times 10^{-5}$	2.54
$4.63851 \times 10^{-6}$	4.51	$4.63855 \times 10^{-6}$	4.51	$4.63854 \times 10^{-6}$	4.51
$1.91963 \times 10^{-6}$	-19.38	$1.95656 \times 10^{-6}$	-21.67	$1.95074 \times 10^{-6}$	-21.31
$2.18686 \times 10^{-7}$	-15.81	$2.31954 \times 10^{-7}$	-22.84	$2.29871 \times 10^{-7}$	-21.73
$1.35096 \times 10^{-8}$	-4.81	$1.34723 \times 10^{-8}$	-4.53	$1.34784 \times 10^{-8}$	-4.57
$1.22639 \times 10^{-8}$	0.29	$1.22325 \times 10^{-8}$	0.55	$1.22376 \times 10^{-8}$	0.51
$7.81511 \times 10^{-9}$	-4.29	$7.79920 \times 10^{-9}$	-4.07	$7.80178 \times 10^{-9}$	-4.11
$1.74952 \times 10^{-9}$	-0.39	$1.74612 \times 10^{-9}$	-0.20	$1.74668 \times 10^{-9}$	-0.23
$6.06730 \times 10^{-5}$	-1.78	$6.08428 \times 10^{-5}$	-1.78	$6.08476 \times 10^{-5}$	-1.79

V - Densidades (em t = 4930 hs)

TABELA V - Rotina:  
 $\sigma, \phi, B^2, N \rightarrow A, N \rightarrow \delta \Sigma + \delta \phi$  e  $\delta B^2 + \delta \alpha \rightarrow N'$   
 p/todos os intervalos

NUCLÍDEO	N	ERRO %
U235	$7.8279 \times 10^{-5}$	0.34
U236	$8.57211 \times 10^{-6}$	-0.37
U238	$6.88559 \times 10^{-3}$	0.00
Pu239	$2.2951 \times 10^{-5}$	2.38
Pu240	$4.63571 \times 10^{-6}$	4.57
Pu241	$1.94146 \times 10^{-6}$	-20.74
Pu242	$2.28814 \times 10^{-7}$	-21.17
Pm149	$1.34474 \times 10^{-8}$	-4.33
Sm149	$1.22815 \times 10^{-8}$	0.15
I135	$7.78437 \times 10^{-9}$	-3.88
Xe 135	$1.74999 \times 10^{-9}$	-0.42
X	$6.07837 \times 10^{-5}$	-1.68

Calculado pela equação (4.6) com correções na matriz A

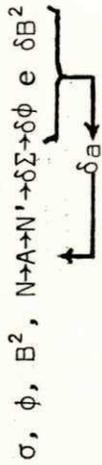
VI - Fluxos (em t = 4930 hs)

GRUPO	1	2	3	4
$\phi$ (4 ordens)	11.0909	14.8488	11.6545	7.7216
ERRO %	-0.22	-1.57	2.20	1.73
$B^2 = 2.95947 \times 10^{-4} \frac{\delta B^2}{B^2_0} = - 86.1\%$				

Recalculado após cálculo das densidades

VII - Densidades (em t = 4930 hs)

TABELAS VII, VIII, IX, X e XI - Rotina:



NUCLÍDEO	N	ERRO %
U235	$7.86434 \times 10^{-5}$	-0.12
U236	$8.50596 \times 10^{-6}$	0.41
U238	$6.88613 \times 10^{-3}$	-0.008
Pu239	$2.29178 \times 10^{-5}$	2.52
Pu240	$4.54506 \times 10^{-6}$	6.44
Pu241	$1.90252 \times 10^{-6}$	-18.31
Pu242	$2.20898 \times 10^{-7}$	-16.98
Pm149	$1.29453 \times 10^{-8}$	-0.44
Sm149	$1.23381 \times 10^{-8}$	-0.31
I135	$7.49636 \times 10^{-9}$	-0.034
Xe135	$1.74695 \times 10^{-9}$	-0.25
X	$6.01038 \times 10^{-5}$	-0.54

Calculado a cada intervalo com correção da matriz

[A]

VIII - Fluxos (em t = 4930 hs)

GRUPO	1	2	3	4
$\phi$ (4 ORDENS)	11.0773	14.8259	11.6431	7.7146
ERRO %	-0.10	-1.41	2.29	1.82
$B^2 = 3.29075 \times 10^{-4} \frac{\delta B^2}{B^2} = -84.54\%$				

Calculado através das densidades corrigidas em cada stepe

IX - Fluxos (em t = 2530 hs). P/Leopard

GRUPO	1	2	3	4
$\phi(t)$	10.7250	14.1445	11.5146	8.1523
$(\delta\phi/\phi_0) \%$	3.01	3.22	3.28	-11.68
$B^2(t) = 1.30001 \times 10^{-3} \frac{\delta B^2}{B^2_0} \times 100 = -39,0\%$				

X - Fluxos (em t = 2530 hs). P/teoria de perturbação

GRUPO	1	2	3	4
$\phi(t)$	10.7078	14.2028	11.3785	8.0505
ERRO %	0.16	-0.41	1.18	1.25
$B^2(t) = 1.28919 \times 10^{-3} \frac{\delta B^2}{B^2_0} = -39,5\%$				

XI - Densidades (em t = 2530 hs)

NUCLÍDEO	N (Leopard)	N (A $\equiv$ Cte)	ERRO %	N(T.P)	ERRO %
U235	$9.93641 \times 10^{-5}$	$9.82199 \times 10^{-5}$	1.15	$9.93833 \times 10^{-5}$	-0.02
U236	$5.02910 \times 10^{-6}$	$5.17442 \times 10^{-6}$	-2.89	$5.02184 \times 10^{-6}$	0.14
U238	$6.09055 \times 10^{-3}$	$6.90973 \times 10^{-3}$	-0.003	$6.90967 \times 10^{-3}$	-0.002
Pu239	$1.56538 \times 10^{-5}$	$1.51404 \times 10^{-5}$	3.28	$1.55166 \times 10^{-5}$	0.88
Pu240	$1.89362 \times 10^{-6}$	$1.98917 \times 10^{-6}$	-5.04	$1.87774 \times 10^{-6}$	0.84
Pu241	$3.87871 \times 10^{-7}$	$4.29747 \times 10^{-7}$	-10.80	$4.17233 \times 10^{-7}$	-7.57
Pu242	$2.21977 \times 10^{-8}$	$2.60043 \times 10^{-8}$	-17.15	$2.43308 \times 10^{-8}$	-9.61
Pm149	$1.20480 \times 10^{-8}$	$1.28406 \times 10^{-8}$	-6.58	$1.21439 \times 10^{-8}$	-0.79
Sm149	$1.11469 \times 10^{-8}$	$1.07729 \times 10^{-8}$	3.35	$1.11921 \times 10^{-8}$	-0.40
I135	$7.47045 \times 10^{-9}$	$7.95980 \times 10^{-9}$	-6.55	$7.50030 \times 10^{-9}$	-0.40
Xe135	$1.69481 \times 10^{-9}$	$1.66597 \times 10^{-9}$	1.77	$1.70097 \times 10^{-9}$	-0.36
X	$3.09195 \times 10^{-5}$	$3.22154 \times 10^{-5}$	-4.21	$3.10042 \times 10^{-5}$	-0.27

BIBLIOGRAFIA

- 1 - USACHEV, L.N.: "Perturbation Theory for the Breeding Ratio and for Other Number Ratios Pertaining to Various Reactor Processes", Journal of Nuclear Energy Parts A/B, Vol. 18, pp 571-583 (1964).
- 2 - GANDINI, A.: "Time - Dependent Generalized Perturbation Methods for Burn-up Analyses", Comitato Nazionale Energia Nucleare.
- 3 - SALVATORES et al: "Burnup Calculations with Time-Dependent Generalized Perturbation Theory, Nuclear Science and Engineering 66 n° 2, pp 304-309 (1977).
- 4 - CABRAL, J.S.: "Cálculos de Queima de Combustível Nuclear por Teoria de Perturbação Generalizada", COPPE (1980).
- 5 - KOMATA, M.: "New Interpretations for the Usachev-Gandini Perturbation Theory", Nuclear Science and Engineering 47, pp 489-493 (1972).
- 6 - MITANI, H.: "Higher Order Perturbation Method in Reactor Calculation", Nuclear Science and Engineering 51, pp 180-188 (1973).
- 7 - BELL-GLASSTONE: "The Adjoint Equation, Perturbation Theory, and Variational Methods", Nuclear Reactor Theory, Van Nostrand Reinhold Company, Chap. 6 (1970).
- 8 - GANDINI et al: "New Developments in Generalized Perturbation Methods in the Nuclide Field", Nuclear Science and Engineering, pp 339-345 (1976).