



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

José Ronaldo dos Santos

# **Eletrodinâmica de Maxwell-Podolsky aplicada para sistemas bidimensionais**

Campina Grande, Paraíba, Brasil

2 de agosto de 2024



José Ronaldo dos Santos

**Eletrodinâmica de Maxwell-Podolsky aplicada para  
sistemas bidimensionais**

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Leandro Oliveira do Nascimento, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Professor Dr. Leandro Oliveira do Nascimento

Campina Grande, Paraíba, Brasil

2 de agosto de 2024

S237e Santos, José Ronaldo dos.  
Eletrodinâmica de Maxwell-Podolsky aplicada para sistemas bidimensionais / José Ronaldo dos Santos. – Campina Grande, 2024.  
67 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.

"Orientação: Prof. Dr. Leandro Oliveira do Nascimento".  
Referências.

1. Teoria Quântica de Campos. 2. Sistemas Bidimensionais. 3. Teoria de Maxwell-Podolsky. I. Nascimento, Leandro Oliveira do. II. Título.

CDU 537.8(043)

**JOSÉ RONALDO DOS SANTOS**

**ELETRODINÂMICA DE MAXWELL-PODOLSKY APLICADA PARA  
SISTEMAS BIDIMENSIONAIS**

Dissertação aprovada em 11/02/2024

**BANCA EXAMINADORA**

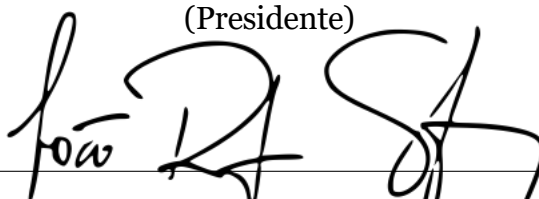
Documento assinado digitalmente  
**gov.br** LEANDRO OLIVEIRA DO NASCIMENTO  
Data: 06/08/2024 18:34:19-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Leandro Oliveira do Nascimento

Unidade Acadêmica de Física - UFPA

(Presidente)



---

Prof. Dr. João Rafael Lucio dos Santos

Unidade Acadêmica de Física - UFCG

(Membro Interno)



---

Prof. Dr. Van Sergio da Silva Alves

Unidade Acadêmica de Física - UFPA

(Membro Externo)





*Dedico este trabalho ao meu orientador, que me guiou com sabedoria, aos meus avós, cuja força e amor sempre me inspiraram, aos meus familiares, que sempre estiveram ao meu lado, a todos aqueles que não tiveram a oportunidade de perseguir seus sonhos, e a todos que, com coragem e determinação, enfrentam a árdua e constante batalha em busca de seus estudos e de um futuro brilhante.*





# Agradecimentos

- Ao Prof. Dr. Leandro Oliveira do Nascimento, pelas sugestões, estímulo e competência com que conduziu este trabalho.
- Agradeço a todos os membros da Banca Examinadora por terem aceitado o convite e pelas valiosas contribuições.
- Agradeço a todos os professores desta Unidade Acadêmica que colaboraram para o meu desenvolvimento acadêmico.
- Expresso minha gratidão à minha mãe, meus avós e todos os familiares que sempre deram apoio e estímulo à minha perseverança na busca incessante pela realização dos meus objetivos e sonhos.
- Aos meus amigos que, ao meu lado, compartilharam momentos de aprendizado, desafios, conquistas, e sempre estiveram disponíveis para auxiliar em dúvidas que surgiram durante o trabalho
- Aos colegas de pós-graduação e aos funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela agradável convivência ao longo da minha permanência nesta instituição..
- Agradeço a todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a conclusão deste trabalho.



*"A menos que modifiquemos a  
nossa maneira de pensar, não  
seremos capazes de resolver os  
problemas causados pela forma  
como nos acostumamos a ver o  
mundo “.*  
*(Albert Einstein)*



# Resumo

Teorias Quânticas de Campo(TQC) em  $(2+1)D$  tem sido amplamente estudadas tanto por comparação com a Cromodinâmica Quântica(QCD) quanto com sistemas bidimensionais em Física da Matéria Condensada(FMC), tais como o grafeno. Nesse trabalho, discutimos as interações elétron-elétron na eletrodinâmica quântica (QED) e na Pseudo Eletrodinâmica Quântica (PQED). Essas interações são dadas ao nível clássico e podem ser corrigidas por efeitos quânticos, via tensor de polarização do vácuo para férmions de Dirac massivos ou não massivos. Mostramos que a correção para férmions massivos produz um termo de Podolsky. Em seguida, calculamos o efeito dessa correção para a interação estática e calculamos soluções das equações de Schwinger-Dyson na teoria de Maxwell-Podolsky em  $(2+1)D$ , usando férmions de Dirac com quatro componentes. Nossos resultados, são relevantes para compreender um processo de geração espontânea do termo de Podolsky bem como produzir uma interação de curto alcance entre os elétrons que vivem no plano bidimensional.

**Palavras-chave:** Teoria Quântica de Campos. Sistemas Bidimensionais. Teoria de Maxwell-Podolsky.



# Abstract

Quantum Field Theories (TQC) in  $(2 + 1)D$  have been widely studied both by comparison with Quantum Chromodynamics (QCD) and with two-dimensional systems in Condensed Matter Physics (FMC), such as graphene. In this work, we discuss electron-electron interactions in quantum electrodynamics (QED) and Pseudo Quantum Electrodynamics (PQED). These interactions are given at the classical level and can be corrected by quantum effects, via the vacuum polarization tensor for massive or non-massive Dirac fermions. We show that the correction for massive fermions produces a Podolsky term. We then calculated the effect of this correction for the static interaction and calculated solutions of the Schwinger-Dyson equations in the Maxwell-Podolsky theory in  $(2 + 1)D$ , using four-component Dirac fermions. Our results are relevant to understanding a process of spontaneous generation of the Podolsky term as well as producing a short-range interaction between electrons living in the two-dimensional plane.

**Keywords:** Quantum Field Theories. Two-Dimensional Systems. Maxwell-Podolsky Theory.





# Lista de ilustrações

|  |    |
|--|----|
| Figura 1 – Potencial estático de Maxwell-Podolsky em $(2+1)D$ . A linha tracejada representa o potencial de Maxwell sem a contribuição do termo de Podolsky, enquanto a linha contínua mostra o potencial com a contribuição do termo de Maxwell-Podolsky. . . . . | 44 |
| Figura 2 – Equação de Schwinger-Dyson para o fóton [1, 2]. . . . .   | 49 |
| Figura 3 – Equação de Schwinger-Dyson para o férmion [1, 2]. . . . .   | 49 |



# Lista de abreviaturas e siglas

|      |                                |
|------|--------------------------------|
| TQC  | Teoria Quântica de Campos      |
| QED  | Eletrodinâmica Quântica        |
| PQED | Pseudo Eletrodinâmica Quântica |
| FMC  | Física da Materia Condensada   |



# Lista de símbolos

|                  |   |
|------------------|---|
| $\alpha$         | Letra grega minúscula Alpha                       |
| $\beta$          | Letra grega minúscula Beta                        |
| $\Gamma\gamma$   | Letra grega Gamma e letra grega minúscula Gamma   |
| $\Delta\delta$   | Letra grega Delta e Letra grega minúscula Delta   |
| $\epsilon$       | Letra grega Epsilon                               |
| $\Lambda\lambda$ | Letra grega Lambda e letra grega minúscula Lambda |
| $\mu$            | Letra grega Mu                                    |
| $\nu$            | Letra grega Nu                                    |
| $\Xi$            | Letra grega Xi                                    |
| $\Pi\pi$         | Letra grega Pi letra grega minúscula Pi           |
| $\rho$           | Letra grega minúscula Rho                         |
| $\Sigma$         | Letra grega Sigma                                 |
| $\phi$           | Letra grega minúscula Phi                         |
| $\psi$           | Letra grega minúscula Psi                         |



# Sumário

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>   | <b>21</b> |
| <b>2</b> | <b>TEORIAS DE CALIBRE EM (2+1)D</b>   | <b>23</b> |
| 2.1      | Uma revisão do eletromagnetismo clássico                                      | 23        |
| 2.2      | QED em (2+1)D   | 26        |
| 2.2.1    | Propagador do campo de Maxwell  | 28        |
| 2.3      | PQED em (2+1)D  | 32        |
| 2.3.1    | Potencial Logarítmico da QED  | 32        |
| 2.3.2    | Potencial Coulombiano no plano da PQED  | 34        |
| 2.4      | QED com o termo de Maxwell-Podolsky em (3+1)D                                 | 35        |
| <b>3</b> | <b>MAXWELL-PODOLSKY VIA TENSOR DE POLARIZAÇÃO EM (2+1)D</b>                   | <b>41</b> |
| 3.1      | Maxwell-Podolsky via tensor de polarização em (2+1)D                          | 41        |
| 3.2      | Interação estática de Maxwell-Podolsky em(2+1)D                               | 43        |
| <b>4</b> | <b>GERAÇÃO DINÂMICA DE MASSA PARA ELÉTRONS DE DIRAC EM (2+1)D</b>             | <b>47</b> |
| 4.1      | Breve histórico   | 47        |
| 4.2      | Equações de Schwinger-Dyson para elétrons na aproximação rainbow-<br>quenched | 48        |
| 4.3      | Geração de Massa na PQED com termo de Podolsky                                | 53        |
| <b>5</b> | <b>RESULTADOS E CONCLUSÕES</b>  | <b>55</b> |
|          | <b>APÊNDICES</b>  | <b>59</b> |
|          | <b>APÊNDICE A – POTENCIAL BILOCAL E EQUAÇÕES DE SCHWINGER-DYSON</b>           | <b>61</b> |
|          | <b>APÊNDICE B – INTEGRAL FERMIONICA DO FORMALISMO FUNCIONAL</b>               | <b>65</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS</b>  | <b>67</b> |





# 1 Introdução

O desenvolvimento das equações para os campos elétricos e magnéticos formuladas por Maxwell em 1873 e publicadas no seu trabalho intitulado “O tratado para a eletricidade e o magnetismo”, foi a base para a formulação da Teoria Clássica de Campos, que descreve o estudo dos campos físicos que estão interagindo com a matéria [3].

Esta teoria foi o primeiro passo para o estudo das interações dos campos elétricos e magnéticos que estão interagindo com a matéria. Porém, foi a partir do início do século XX com a formulação da Teoria da Relatividade de Einstein em 1905 e o desenvolvimento da Teoria Quântica que foi possível a construção dos alicerces de uma teoria quântica de campos, em particular, o desenvolvimento do método de segunda quantização [3].

O desenvolvimento dessas duas teorias no início do século XX e também a contribuição da segunda quantização dos campos elétricos e magnéticos feita por Einstein, cooperaram para a formulação da TQC (Teoria Quântica de Campos) em 1928 [4], unificando-as de maneira elegante [5].

A Teoria Quântica de Campos é um conjunto de técnicas matemáticas utilizado também para descrever quanticamente as interações dos campos eletromagnéticos com a matéria, dispondo de um número infinito de graus de liberdade. Inicialmente, essa teoria foi desenvolvida com o intuito de descrever as interações mais fundamentais, ou seja, as partículas elementares, que, em princípio, acumulam um número alto de simetrias fundamentais.

Posteriormente, foi notória a aplicação da TQC em outras áreas da física, como: Cosmologia e FMC (Física da Matéria Condensada). Nessa dissertação, focaremos na discussão sobre TQC em FMC. Assim, vale ressaltar que esse contexto é amplo, envolvendo outros estados de matéria, como os estados quânticos e os topológicos. Mesmo com essas diferenças em relação aos sistemas de partículas elementares, é possível construir modelos de TQC que se proponham a descrever fenômenos de FMC.

A realização experimental do grafeno em 2004 pelo grupo do A. Geim e K. Novoselov permitiu a construção de uma ponte mais direta entre TQC e FMC. Isso porque os elétrons do grafeno possuem uma relação de dispersão dada por  $E \propto \pm v_F |\mathbf{p}|$ , sendo  $E$  a energia dos elétrons,  $v_F \approx c/300$  a velocidade de Fermi,  $c$  a velocidade da luz e  $\mathbf{p}$  o momento linear medido em relação aos pontos de alta simetria (vale  $K$  e vale  $K'$ ) da primeira zona de Brillouin.

A eletrodinâmica de materiais bidimensionais é um problema conceitualmente de dimensão mista, ou seja, uma partícula vive em dimensão maior do que a outra. Nesse

caso, o fóton é descrito pela teoria de Maxwell em (3+1)D enquanto o elétron é descrito pela teoria de Dirac em (2+1)D. Essa questão foi devidamente resolvida no contexto da Pseudo Eletrodinâmica Quântica (PQED)[6]. Nesse modelo, obtido da redução dimensional da  $QED_4$ , os elétrons interagem via interação Coulombiana  $\propto e^2/r$  no limite estático. Considerando-se o efeito dessa repulsão é possível explicar a renormalização da velocidade de Fermi no grafeno. De acordo com esse efeito, ao reduzirmos a densidade de elétrons no grafeno, chegaremos a um limite assintótico em que  $v_F \rightarrow c$  e, portanto, a simetria de Lorentz é recuperada [5].

Nesse contexto, uma importante questão é compreender os efeitos de outras interações microscópicas que ocorrem entre os elétrons em um sistema bidimensional, e que podem modificar a interação Coulombiana. Essas interações são geradas por diversos elementos, como: desordem; impurezas ou; vacâncias, dentre outros[7]. Esses efeitos tendem a blindar a interação Coulombiana e, portanto, geram uma interação de curto alcance[1]. Nesse sentido, é importante analisar formas de gerar massa ao campo de matéria. Uma dessas formas é o termo de Podolsky que garante a simetria de calibre e melhora o comportamento ultravioleta do propagador do campo de calibre[1].

Essa dissertação é dividida da seguinte forma: (i) No capítulo 2, discutimos características básicas da QED e da PQED em (2+1)D; (ii) No capítulo 3, deduzimos o termo de Podolsky através da correção quântica via tensor de polarização e; (iii) No capítulo 4, resolvemos as equações de Schwinger-Dyson para a teoria de Maxwell-Podolsky em (2+1)D, considerando o caso com momento externo nulo. Além dos capítulos, nós incluímos 2 apêndices com algumas derivações úteis para sustentar nossos resultados principais.

## 2 Teorias de Calibre em $(2+1)D$

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados relacionados à Eletrodinâmica de Maxwell. Na primeira seção, faremos uma revisão do eletromagnetismo clássico até a formulação da QED em  $(2+1)D$  (Eletrodinâmica Quântica em  $3D$ ). Essa teoria é um exemplo de modelo de TQC, formulado no início do século XX com a junção da Teoria Quântica e da Relatividade Especial de Einstein.

Posteriormente, dedicaremos uma seção à obtenção do propagador do campo de Maxwell. Demonstraremos como as ondas eletromagnéticas se propagam e interagem com objetos materiais. Na seção subsequente, realizaremos uma discussão sobre a PQED em  $(2+1)D$  (Pseudo Eletrodinâmica Quântica em  $3D$ ), a qual serve para descrever a interação entre partículas carregadas em um espaço-tempo bidimensional. Essa interação é Coulombiana, desde que o fóton esteja livre para se propagar fora do plano que contém os elétrons confinados a ele.

Em seguida, calculamos os potenciais estáticos tanto da  $QED_3$  quanto da PQED, mostrando que esses são dados por um potencial logarítmico e Coulombiano, respectivamente. Curiosamente, o potencial confinante da  $QED_3$  é drasticamente modificado quando consideramos correções quânticas no limite de baixas energias[8].

### 2.1 Uma revisão do eletromagnetismo clássico

James Clerk Maxwell (1831-1879), renomado físico e matemático, teve sua origem em Edimburgo, Escócia. Ao ingressar na Universidade de Edimburgo aos 16 anos, Maxwell já se destacava como um prodigioso matemático, conduzindo diversas experiências científicas durante essa fase de sua vida. Seus trabalhos publicados contribuíram significativamente para estabelecer conexões fundamentais entre eletricidade, magnetismo e luz.

Os primeiros trabalhos de Maxwell, que explicavam e estabeleciam relações entre os fenômenos elétricos e magnéticos, consistiram em um conjunto de quatro artigos intitulados “On Physical of Force”, publicados entre 1861 e 1862 [9]. Em continuidade a essa linha de pesquisa, Maxwell apresentou um trabalho em 1873 intitulado “Treatise on Electricity and Magnetism” [10]. Nesse trabalho, formulou os resultados utilizando operadores vetoriais de divergência e rotacional para descrever as propriedades dos campos elétricos e magnéticos. A adoção desses operadores permitiu a expressão das equações de forma mais concisa e elegante. Essas contribuições representaram avanços fundamentais na compreensão unificada dos fenômenos eletromagnéticos.

Neste tratado, Maxwell desempenhou um papel crucial ao formular a matemática unificada das leis de Coulomb, Oersted, Ampère, Biot Savart e Lenz. Ele expressou essas leis de maneira integrada por meio de quatro equações, agora conhecidas como equações de Maxwell. Essas equações, também denominadas Leis de Gauss para eletricidade e magnetismo, Lei de Ampère-Maxwell e Lei de Indução de Faraday, foram estabelecidas por Maxwell no ano de 1873 [11]. Elas representam uma descrição abrangente e unificada do comportamento dos campos elétricos e magnéticos. Esse avanço teórico proporcionou uma compreensão mais completa e interconectada dos fenômenos eletromagnéticos, consolidando o legado de Maxwell na área.

No desdobramento dessa pesquisa, Maxwell demonstrou de maneira inequívoca que as leis do eletromagnetismo eram intrinsecamente inter-relacionadas. Ele evidenciou que as cargas elétricas em movimento geravam campos magnéticos e vice-versa, estabelecendo uma interconexão fundamental entre eletricidade e magnetismo. Essa descoberta conduziu à perspicaz concepção de que a eletricidade e o magnetismo eram, na verdade, manifestações distintas do mesmo fenômeno. Essa percepção representou uma significativa unificação na física, proporcionando uma visão mais abrangente e coerente dos princípios fundamentais que regem o eletromagnetismo.

Apesar dos avanços de Maxwell na unificação das teorias elétricas e magnéticas, seu tratado apresentava uma considerável complexidade na interpretação. Somente na década de 1870 é que o físico Oliver Heaviside (1850-1925) desempenhou um papel crucial ao esclarecer a Teoria de Maxwell. Ele simplificou a teoria, condensando-a nas quatro equações fundamentais que relacionam os campos elétricos e magnéticos. Essas equações, na forma que reconhecemos hoje, foram um passo essencial para tornar a teoria de Maxwell mais acessível e compreensível, consolidando assim a base para o entendimento moderno do eletromagnetismo [10].

Dessa forma, surgem as quatro equações fundamentais que constituem o alicerce essencial da teoria eletromagnética. Essas equações representam um conjunto de equações diferenciais parciais que estabelecem a relação intrínseca entre os campos elétricos e magnéticos, considerando também as fontes de densidade de carga e corrente associadas. Importante destacar que essas equações são universalmente válidas, aplicando-se a qualquer meio que envolva campos com variação temporal. Esse conjunto de equações não apenas simplificou a compreensão da teoria de Maxwell, como também proporcionou uma descrição matemática robusta e abrangente dos fenômenos eletromagnéticos.

Assim, as equações que regem os fenômenos eletromagnéticos assumem a forma específica das equações de Maxwell, especialmente quando se consideram fontes no vácuo

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.4)$$

As quatro equações fundamentais de Maxwell constituem os alicerces essenciais da teoria eletromagnética. Cada uma dessas equações descreve aspectos cruciais do comportamento dos campos elétrico e magnético no universo, proporcionando concepções profundas sobre a interação entre a eletricidade e o magnetismo.

A Eq. (2.1), derivada da lei de Gauss, afirma que a divergência do campo elétrico ( $\mathbf{E}$ ) é proporcional à densidade volumétrica de carga elétrica ( $\rho$ ) no espaço onde  $\epsilon_0$  representa a permissividade elétrica no vácuo [12]. Em outras palavras, isso indica que a intensidade do campo elétrico em um ponto depende das cargas elétricas presentes na vizinhança desse ponto.

A Eq. (2.2) é uma constatação importante, ela nos informa que não existem monopólos magnéticos isolados na natureza [13]. Em contraste com as cargas elétricas, que geram campos elétricos, não encontramos fontes magnéticas análogas que gerem campos magnéticos isoladamente. Portanto, a divergência do campo magnético ( $\nabla \cdot \mathbf{B}$ ) é sempre igual a zero.

A terceira Eq. (2.3), derivada da lei de Faraday, estabelece uma conexão entre a variação temporal do campo magnético ( $\mathbf{B}$ ) ao longo de uma trajetória fechada ( $\mathbf{C}$ ) e a taxa de alteração do fluxo magnético através de uma superfície limitada por essa trajetória. Essa expressão demonstra a relação entre campos elétricos variáveis no tempo e a indução de campos magnéticos.

Por fim, a quarta Eq. (2.4) é a equação de Ampère com as correções de Maxwell que incorpora um termo adicional relacionado à variação temporal dos campos elétricos ( $\mathbf{E}$ ). Ela relaciona a circulação do campo magnético ( $\mathbf{B}$ ) em torno de uma trajetória fechada ( $\mathbf{C}$ ) com a densidade de corrente ( $\mathbf{J}$ ) que atravessa a superfície limitada por essa trajetória e o termo  $\mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$  introduzido por Maxwell e chamado de densidade de corrente de deslocamento.

Essas equações são fundamentais para a compreensão de uma ampla gama de fenômenos naturais, unificando as teorias elétricas e magnéticas, fornecendo uma estrutura coesa para a descrição matemática dos campos eletromagnéticos em sistemas complexos.

As equações clássicas de Maxwell, publicadas em 1873, descrevem as interações dos campos elétricos e magnéticos com a matéria e serviram como base para o desenvolvimento da Teoria Clássica de Campos [14, 15]. No entanto, no início do século XX, a formulação da Teoria da Relatividade Restrita de Einstein, publicada em 1905 [3], e o desenvolvimento da Mecânica Quântica, com contribuições de vários físicos, como Planck, Bohr, Dirac,

Heisenberg, entre outros, possibilitaram a segunda quantização dos campos elétricos e magnéticos.

A combinação da Relatividade Restrita e da Mecânica Quântica levou à formulação da TQC em 1928, que unificou elegantemente essas duas teorias [4]. Posteriormente, surgiu a Eletrodinâmica Quântica (QED), derivada da TQC no início do século XX, proporcionando uma descrição precisa das interações eletromagnéticas entre as partículas elementares.

Esses avanços na física teórica permitiram uma compreensão mais aprofundada das interações eletromagnéticas em escalas subatômicas e abriram caminho para o desenvolvimento de teorias mais abrangentes que descrevem as forças fundamentais da natureza.

Portanto, o avanço da Eletrodinâmica Quântica (QED) marcou um ponto significativo na progressão das equações de Maxwell, proporcionando uma descrição mais precisa e abrangente das interações eletromagnéticas em níveis subatômicos. A formulação da QED não apenas refinou e enriqueceu as equações de Maxwell, mas também tornou acessível a análise das complexas interações quânticas entre as partículas elementares e os campos eletromagnéticos. Esse avanço é especialmente relevante ao se considerar materiais bidimensionais, nos quais as propriedades eletromagnéticas podem ser exploradas de maneira mais detalhada e específica devido às características particulares desse contexto. A realização experimental desses materiais reforça a relevância em se estudar teorias quânticas em baixa dimensionalidade. Aqui, discutiremos dois exemplos da  $QED_3$  e a PQED.

## 2.2 QED em $(2+1)D$

A Eletrodinâmica Quântica (QED), desenvolvida no final dos anos 1940, é derivada dos estudos da TQC. Essa teoria integradora unifica duas correntes fundamentais da física: I - a Relatividade Restrita de Albert Einstein, que surgiu da necessidade de abordar questões originadas pelo desenvolvimento do Eletromagnetismo Clássico de Maxwell no final do século XIX. Einstein inaugurou o século XX com sua publicação na revista "Annalen der Physik", apresentando uma nova concepção sobre o espaço-tempo [16]. II - a Teoria Quântica formulada no início do século XX, que introduziu o conceito de quantização de energia em termos de operadores matemáticos, descrevendo propriedades observáveis de partículas e comportamentos probabilísticos [3].

A TQC, como parte integral da Mecânica Quântica, desempenha um papel fundamental ao estabelecer as bases teóricas para a QED. Essa integração possibilita a descrição quantitativa das interações eletromagnéticas em termos de fótons e partículas carregadas. A QED, por sua vez, oferece a capacidade de prever fenômenos em escala subatômica,

incluindo o espalhamento de elétrons, a emissão de radiação eletromagnética e a formação de pares elétron-pósitron. Funcionando como uma ponte entre a física clássica e a física moderna, ela ilustra como a fusão das teorias da relatividade e da mecânica quântica possibilitou uma compreensão e explicação adequada das interações, constituindo uma das quatro forças fundamentais da natureza que atuam sobre as partículas.

Houve uma percepção inicial de que a TQC enfrentava desafios em sua capacidade de abordar de forma abrangente todas as interações das forças fundamentais da natureza. No entanto, é crucial observar que a QED representa uma parte essencial da TQC e tem-se mostrado bem-sucedida ao descrever e explicar a força eletromagnética. Apesar dos obstáculos relacionados às energias negativas, a QED superou esses problemas e reproduziu com êxito diversos resultados experimentais, incluindo o spin, o momento magnético do elétron e correções relativísticas no espectro do átomo de hidrogênio. Posteriormente, o processo de renormalização, demonstrado por Tomonaga, Schwinger e Feynman em 1949, permitiu extrair informações físicas significativas da QED, culminando com o Prêmio Nobel concedido a eles em 1965. Esse avanço revelou a robustez e eficácia da QED como uma parte crucial da TQC [4].

Considerando os avanços notáveis da QED ao longo de sua história, esta teoria se destaca como um pilar fundamental para descrever as interações eletromagnéticas em termos de partículas elementares e campos quânticos. Uma extensão específica dessa teoria é a QED em (2+1)D, adaptada para um espaço-tempo com duas dimensões espaciais e uma dimensão temporal. Embora a maioria dos desenvolvimentos da QED esteja fundamentada em um espaço tridimensional, a QED em (2+1)D tem sido objeto de estudo para compreender a física de materiais bidimensionais e sistemas de baixa dimensionalidade, como o grafeno. Essa abordagem especializada da QED destaca-se por sua aplicabilidade em contextos específicos, contribuindo para a compreensão mais profunda de fenômenos eletromagnéticos em escalas dimensionais reduzidas.

Uma característica distintiva da QED em (2+1)D é a modificação das equações de campo eletromagnético para se adaptarem à geometria do espaço-tempo tridimensional. A aplicação da teoria de calibre nesse contexto é essencial para descrever as interações eletromagnéticas, garantindo consistência matemática e a preservação das leis de conservação. A invariância associada às transformações de simetria nos potenciais eletromagnéticos é crucial, mantendo as equações de campo inalteradas e assegurando a coerência principalmente na conservação de carga elétrica [17].

Do ponto de vista fenomenológico, a QED em (2+1)D apresenta peculiaridades intrigantes devido às propriedades topológicas do sistema bidimensional [18]. Nesse contexto, podem emergir quasipartículas com estatísticas fracionárias, conhecidas como anyons. Essas quasipartículas exibem propriedades intermediárias entre bósons e férmions, estando intimamente ligadas às características únicas do espaço-tempo bidimensional

[19, 20] Essa abordagem especializada da QED proporciona concepções interessantes sobre fenômenos eletromagnéticos em sistemas de baixa dimensionalidade, como materiais bidimensionais.

Desta forma, através da QED em (2+1)D e o propagador do campo de Maxwell descreve a propagação e as interações eletromagnéticas no espaço-tempo. Sendo que, as equações de campo de Maxwell são modificadas para acomodar as duas dimensões espaciais e a dimensão temporal. Essas equações modificadas incorporam a invariância de calibre e determinam a propagação do campo eletromagnético no sistema, fornecendo informações sobre a dispersão de partículas, a resposta a campos externos, a polarização do campo eletromagnético, entre outros aspectos relevantes.

Portanto, o propagador do campo de Maxwell desempenha um papel crucial na descrição das interações eletromagnéticas na QED, permitindo calcular as amplitudes de probabilidade para a interação de partículas carregadas eletricamente em um espaço-tempo bidimensional, fornecendo informações sobre as propriedades físicas dessas interações. O estudo do propagador do campo de Maxwell em (2+1)D, se faz necessário para uma melhor compreensão das propriedades e fenômenos específicos da QED nesse contexto de dimensionalidade reduzida.

### 2.2.1 Propagador do campo de Maxwell

Nesta seção, apresentaremos a derivação do campo de calibre para o propagador dos campos de Maxwell em (2+1)D, expressando-os para os campos quantizados. As equações resultantes são descritas por densidades lagrangeanas  $\mathcal{L}$ , as quais mantêm invariância sob grupos de simetrias específicos, estabelecendo assim a QED em (2+1)D. Tais equações são expressas no espaço euclidiano da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial^\mu A_\mu)^2 - j^\mu A_\mu. \quad (2.5)$$

No contexto anterior, discutimos a derivação do campo de calibre para os campos de Maxwell em (2+1)D, considerando sua quantização. A equação resultante, expressa pela densidade lagrangeana  $\mathcal{L}$ , é fundamental para a descrição da QED nesse espaço dimensional. Para garantir a invariância de calibre, a densidade lagrangeana deve estar livre das partículas que dão origem à corrente  $j^\mu$  ou garantir que esta seja conservada. Entretanto, a Eq. (2.5) é composta por diversos termos, incluindo os tensores eletromagnéticos  $F^{\mu\nu}$ , o fixador de calibre  $\lambda$ , o termo quadrático  $(\partial^\mu A_\mu)^2$ , a densidade de matéria  $J^\mu$  e o campo de calibre  $A_\mu$ . Os tensores eletromagnéticos, por sua vez, são covariantes e uma combinação antissimétrica de

A equação acima é invariante de calibre, se a densidade lagrangeana for livre das partículas que dão origem à corrente  $j^\mu$  ou se esta for conservada. Porém, a Eq. (2.5) é



composta pelos seguintes termos:  $F^{\mu\nu}$  tensores eletromagnéticos;  $\lambda$  é fixador de calibre;  $(\partial^\mu A_\mu)^2$  termo quadrático;  $j^\mu$  densidade de corrente na matéria e  $A_\mu$  é o campo de calibre. Onde os tensores eletromagnéticos são covariante e uma combinação antissimétrica de

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.6)$$

sendo que, esses tensores eletromagnéticos também são representados mediante uma matriz antissimétrica de ordem  $4 \times 4$  [4], onde a equação de conservação atual pode ser escrita conforme a representação matricial abaixo.

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Efetuamos a contração total dos tensores eletromagnéticos do campo de calibre, conforme representado na Eq. (2.5) por  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ . Essa operação possibilita a verificação da invariância desses tensores

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (2.7)$$

$$= (\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu) - (\partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu) - (\partial^\nu A^\mu \partial_\mu A_\nu) + (\partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu), \quad (2.8)$$

sendo que, a contração total destes tensores é dado por

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - 2(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu). \quad (2.9)$$

A contração total dos tensores eletromagnéticos da Eq. (2.5) é dada por a expressão acima. Desta forma, podemos separar o termo quadrático em relação ao campo de calibre  $A_\mu$ , assim

$$(\partial^\mu A_\mu)(\partial^\nu A_\nu) = \partial^\mu(A_\mu \partial^\nu A_\nu) - A_\mu \partial^\mu \partial^\nu A_\nu, \quad (2.10)$$

O termo  $\partial^\mu(A_\mu \partial^\nu A_\nu)$  se anula ao ser integrado sobre todo o espaço-tempo, devido ao comportamento de  $A_\mu$  para  $x \rightarrow \pm\infty$ , onde  $A_\mu$  tende a zero. Essa anulação ocorre porque os termos correspondentes agem apenas na superfície, e pelo teorema de Gauss, a integral sobre esses termos é nula, dado que os campos, por definição, se anulam no infinito.

$$(\partial^\mu A_\mu)(\partial^\nu A_\nu) = (\partial^\mu A_\mu)^2 = -A_\mu \partial^\mu \partial^\nu A_\nu. \quad (2.11)$$

Ao isolar o termo quadrático envolvendo  $A_\mu$  na equação mencionada e combinando com a Eq. (2.9), obtemos

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -2A_\mu \partial_\nu \partial^\mu A^\nu + 2A_\mu \partial^\mu \partial^\nu A_\nu, \quad (2.12)$$

sendo que  $(\partial_\mu \partial^\mu = \square)$ . Assim, obtemos a igualdade dada por

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -2A_\mu [\delta_{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu] A_\nu. \quad (2.13)$$

Portanto a Eq. (2.5) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} A_\mu [\delta_{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu] A_\nu + \frac{\lambda}{2} A_\mu \partial^\mu \partial^\nu A_\nu. \quad (2.14)$$

Logo,

$$\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial^\mu A_\mu)^2 = \frac{1}{2} A_\mu [\delta_{\mu\nu} (-\square) + \partial^\mu \partial^\nu] (1 + \lambda) A_\nu, \quad (2.15)$$

sendo que definimos o tensor (que é o inverso do propagador do campo de Maxwell) de 2ª ordem dado por

$$(\delta_{\mu\nu} (-\square) + \partial^\mu \partial^\nu (1 + \lambda)) = G_{\mu\nu}^{-1}. \quad (2.16)$$

Utilizando o inverso do propagador da expressão acima na Eq. (2.15), podemos reescrever a densidade lagrangeana da seguinte forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^\mu G_{\mu\nu}^{-1} A^\nu, \quad (2.17)$$

sendo que podemos calcular a transformada de Fourier, usando as seguintes regras

$$\begin{aligned} \partial_\mu &\rightarrow ip_\mu; \\ \square &\rightarrow -p^2; \\ \partial_\mu \partial_\nu &\rightarrow -p_\mu p_\nu. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Portanto, ao reescrever o campo de calibre no espaço de momentos, temos

$$G_{\mu\nu}^{-1} = \delta_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu (1 + \lambda). \quad (2.19)$$

Podemos calcular o inverso dessa quantidade usando

$$G_{\mu\nu}^{-1} G^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\alpha, \quad (2.20)$$

sendo que

$$G^{\alpha\nu} = A \delta^{\alpha\nu} + B p^\alpha p^\nu, \quad (2.21)$$

no qual  $A$  e  $B$  são funções do momento a serem determinadas. Usando isso na Eq. (2.20), temos

$$G_{\mu\alpha}^{-1} G^{\alpha\nu} = [\delta_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu (1 + \lambda)] [A \delta^{\alpha\nu} + B p^\alpha p^\nu] = \delta_\mu^\nu, \quad (2.22)$$

$$= A p^2 \delta_{\mu\nu} \delta^{\alpha\nu} + p^2 B \delta_{\mu\nu} p^\alpha p^\nu - A p_\mu p_\nu (1 + \lambda) \delta^{\alpha\nu} - p_\mu p_\nu (1 + \lambda) B p^\alpha p^\nu = \delta_\mu^\nu \quad (2.23)$$

sendo que algumas contrações relevantes são dadas por

$$\begin{aligned}\delta_{\mu\nu}\delta^{\alpha\nu} &\mapsto \delta_{\mu}^{\nu}; \\ p_{\mu}p_{\alpha}\delta^{\alpha\nu} &\mapsto p_{\mu}p^{\nu}; \\ p_{\mu}p_{\nu}p^{\nu}p^{\alpha} &\mapsto p_{\mu}p^2p^{\alpha}.\end{aligned}\tag{2.24}$$

Então,

$$G_{\mu\alpha}^{-1}G^{\alpha\nu} = p^2A[\delta_{\mu}^{\nu} + p_{\mu}p^{\nu}][Bp^2 - A(1 + \lambda) - (1 + \lambda)Bp^2] = \delta_{\mu}^{\nu}.\tag{2.25}$$

Partindo da Eq. acima e realizando a separação de termos, podemos escrevê-las da seguinte forma

$$p^2A = 1 \mapsto A = \frac{1}{p^2},\tag{2.26}$$

e

$$-A(1 + \lambda) - \lambda Bp^2 = 0 \mapsto B = -\frac{1}{p^4}\left(\frac{1}{\lambda} + 1\right).\tag{2.27}$$

Usando as combinações das Eqs. (2.26) e (2.27) na equação para o propagador do campo de calibre, temos

$$G_{\mu\nu} = A\delta_{\mu\nu} + Bp^{\mu}p^{\nu}.\tag{2.28}$$

Portanto,

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{p^2}\left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p^{\mu}p^{\nu}}{p^2}\right] - \frac{p_{\mu}p_{\nu}}{p^4\lambda}.\tag{2.29}$$

Podemos definir o operador de projeção, dado por

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - \frac{p^{\mu}p^{\nu}}{p^2},\tag{2.30}$$

então, utilizando a expressão acima na Eq. (2.29), obtemos o campo de calibre

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{p^2}\mathcal{P}_{\mu\nu} - \frac{p^{\mu}p^{\nu}}{\lambda p^4}.\tag{2.31}$$

Note que a amplitude escalar do propagador é  $p^{-2}$ , tal qual a  $QED_4$ . Essa quantidade gera a interação logarítmica no plano. Além disso, o segundo termo, que depende de  $\lambda$ , é o termo dependente de fixação de calibre e corresponde a parte longitudinal do propagador.

## 2.3 PQED em (2+1)D

Alguns sistemas de Física da Matéria Condensada (FMC) apresentam graus de liberdade representados por partículas que se movem em um plano bidimensional. Um exemplo notável é o grafeno, um material bidimensional cujas propriedades especiais.

Na análise de materiais planares como o grafeno, observamos que o campo eletromagnético associado às partículas interativas não está restrito exclusivamente ao plano. Portanto, a interação nesses materiais é predominantemente regida pela teoria tridimensional de Maxwell, apesar da natureza cinemática bidimensional do sistema. Uma abordagem inicial para abordar essa questão seria a utilização da teoria  $QED_3$ . No entanto, esse modelo restringe o campo do fóton ao plano bidimensional, o que não corresponde à realidade física observada no grafeno ou em outros materiais bidimensionais [21].

A solução para o problema de dimensão mista desta teoria surgiu em 1993 com Marino [6]. Ele identificou que uma redução dimensional era necessária tanto para a matéria quanto para o campo eletromagnético. No entanto, é crucial ressaltar que essa redução dimensional deve ser aplicada exclusivamente à matéria, uma vez que o campo eletromagnético não está necessariamente sujeito a essa restrição. Diante dessa consideração, Marino desenvolveu a PQED (Pseudo-Eletrodinâmica Quântica) [6, 21], uma teoria eletromagnética completamente em (2+1)D, capaz de reproduzir a mesma energia de interação na Eletrodinâmica de Maxwell em (3+1)D. Essa abordagem esclarece e supera a incongruência anterior, proporcionando uma compreensão mais coerente das interações eletromagnéticas em um espaço-tempo bidimensional.

Portanto, neste capítulo, apresentaremos alguns resultados relacionados à PQED e sua aplicação em espaços bidimensionais. Inicialmente, abordaremos o potencial logarítmico da QED, explorando seu papel e discutindo o potencial confinante e o comportamento. Em seguida, examinaremos o Potencial Coulombiano no plano da PQED. Por fim, concluiremos esta seção apresentando um breve histórico sobre a teoria de Maxwell-Podolsky. Essa abordagem oferece concepções valiosas sobre as interações eletromagnéticas em espaços bidimensionais, ampliando nossa compreensão desses fenômenos em contextos específicos de dimensionalidade reduzida.

### 2.3.1 Potencial Logarítmico da QED

Para encontrarmos o potencial logarítmico, iremos escrever o potencial em termos do propagador de calibre gerado por duas cargas[8], dado por

$$V(\mathbf{r}) = e^2 \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{p}|^2}. \quad (2.32)$$

Adotando o sistema de coordenadas polares afim de possibilitar a determinação de

$V(\mathbf{r})$ , isto é

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\mathbf{p}| \leq \infty, \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi, \end{aligned} \quad (2.33)$$

e o elemento de área do sistema de coordenadas polares, é dado por  $d^2p = |\mathbf{p}|d\theta dp$ , assim a Eq. (2.32) no sistema de coordenadas polares, é dado por

$$V(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{1}{|\mathbf{p}|} dp \int_0^{2\pi} e^{-i|\mathbf{p}||\mathbf{r}|\cos\theta} d\theta. \quad (2.34)$$

A solução para a componente angular da equação acima é encontrada através da integração da função de Bessel de primeira espécie e ordem zero [22], dada por

$$J_0(-\mathbf{p}\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i|\mathbf{p}||\mathbf{r}|\cos\theta} d\theta. \quad (2.35)$$

Ao derivar  $V(\mathbf{r})$  em relação a "r" na Eq. (2.34) [23]

$$\frac{dV}{dr} = \frac{e^2}{2\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{\partial J_0(-|\mathbf{p}||\mathbf{r}|)}{\partial r} dp, \quad (2.36)$$

então

$$\frac{\partial}{\partial r} J_0(-\mathbf{p}\mathbf{r}) = -|\mathbf{p}| \frac{\partial}{\partial r} J_0(-\mathbf{p}\mathbf{r}). \quad (2.37)$$

Aplicando a identidade da função de Bessel [22],

$$J_1 = -\frac{d}{dr} J_0(-|\mathbf{p}||\mathbf{r}|), \quad (2.38)$$

obtém-se

$$\frac{dV}{dr} = \frac{e^2}{2\pi} \int_0^\infty J_1(|\mathbf{p}||\mathbf{r}|) dp = 2\pi \frac{e^2}{|\mathbf{r}|}. \quad (2.39)$$

Consequentemente,

$$\int dV = \frac{e^2}{2\pi} \int_a^r \frac{1}{|\mathbf{r}|} dr, \quad (2.40)$$

que gera

$$V(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{r}|}{a}, \quad (2.41)$$

Em unidades naturais, é conveniente definir uma escala de referência onde o potencial é nulo. Denotamos essa escala por "a". Devido a considerações de dimensionalidade, definimos  $a = e^{-2}$ , onde "e" é a constante de acoplamento com a dimensão  $[e] = M^{\frac{1}{2}}$ . Essa escolha é motivada pelo fato de que, em unidades naturais ( $\hbar = c = 1$ ), as dimensões físicas são expressas em termos de energia ou massa, simplificando as relações entre as grandezas físicas. Assim,

$$V(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{2\pi} \ln(e^2|\mathbf{r}|), \quad (2.42)$$

que descreve um potencial que pode ser interpretado como confinante. À medida que a distância " $\nabla$ " descreve um potencial que pode ser interpretado como confinante. À medida que a distância entre as partículas aumenta, o valor do potencial  $V(\mathbf{r})$  também aumenta. Especificamente, este potencial cresce de forma logarítmica com  $\mathbf{r}$ , o que implica que a energia necessária para separar duas partículas cresce indefinidamente à medida que elas se afastam. Assim, o potencial efetivamente confina as partículas, tornando a separação entre elas energeticamente desfavorável para grandes valores de  $\nabla$ .

### 2.3.2 Potencial Coulombiano no plano da PQED

A Pseudo-Eletrodinâmica Quântica (PQED) pode ser obtida por meio da redução dimensional da  $QED_4$ . Consequentemente, o propagador livre da PQED no espaço de momentos, conforme derivado nos passos anteriores, é expresso por

$$G_{\mu\nu}(\mathbf{p}) = \frac{\delta_{\mu\nu}}{2\sqrt{p^2}}, \quad (2.43)$$

essa forma é derivada levando em consideração a nova dimensionalidade e a necessidade de ajustar o propagador para refletir as propriedades físicas em  $(2+1)D$ . Aqui,  $\mu$  e  $\nu$  variam entre 0, 1 e 2, e  $p^2 = p_0^2 + \mathbf{p}^2$ .

Portanto, o potencial de interação é modificado da seguinte forma

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= e^2 \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} e^{(-i\mathbf{p}\mathbf{r})} \left( \frac{1}{2|\mathbf{p}|} \right) \\ &= e^2 \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} e^{(-i|\mathbf{p}||\mathbf{r}|\cos\theta)} \left( \frac{1}{2|\mathbf{p}|} \right) \\ V(\mathbf{r}) &= \frac{e^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \int d^2p e^{(-i|\mathbf{p}||\mathbf{r}|\cos\theta)} \frac{1}{|\mathbf{p}|}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

assumindo  $|\mathbf{p}| = p$ ,  $|\mathbf{p}\mathbf{r}| = pr \cos \theta$  e, utilizando coordenadas polares, o elemento de área  $d^2p = |\mathbf{p}| dp d\theta$ , para  $0 \leq p < \infty$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Assim,

$$V(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{(-ipr \cos \theta)} \frac{d\theta p dp}{p}. \quad (2.45)$$

A integral da parte angular em " $\mathbf{p}$ " da expressão acima, pode ser escrita utilizando a identidade de Bessel [22] presente na Eq.(2.35)

$$\int_0^{2\pi} e^{(-ipr \cos \theta)} = 2\pi \times J_0(-pr). \quad (2.46)$$

Substituindo a solução radial na Eq.(2.45), obtemos

$$V(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} 2\pi \int_0^\infty dp J_0(-pr), \quad (2.47)$$

fazendo  $(-jr) = -y$ ,  $y=pr$ , pode-se escrever

$$\int_0^\infty \frac{1}{r} dy J_0(-y) = \frac{1}{r} \int_0^\infty dy J_0(-y) = \frac{1}{r}. \quad (2.48)$$

Assim, o potencial de interação para a PQED é determinado como

$$V(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}|}, \quad (2.49)$$

que resulta no conhecido potencial de  $1/r$  de Coulomb da  $QED_4$ , gerando um potencial no plano bidimensional. Ao relacionar esse resultado com materiais bidimensionais, destaca-se a importância dessa expressão na descrição das interações eletromagnéticas em sistemas de geometria bidimensional. Materiais como o grafeno, dissulfeto de molibdênio e o fosforeno, são regidos por esse tipo de potencial, impactando suas propriedades e comportamentos específicos, tais como renormalização da velocidade de Fermi ou da lacuna de energia dos elétrons do cristal [24, 25, 26].

## 2.4 QED com o termo de Maxwell-Podolsky em (3+1)D

Em 1856, James Maxwell publicou um artigo intitulado "On Faraday's Lines of Force", no qual não apenas esclareceu o significado das linhas de força de Faraday, mas também estabeleceu uma intrigante analogia física entre a eletrodinâmica e a dinâmica dos fluidos incompressíveis. Ele associou as linhas de força aos tubos de corrente do fluido, o potencial elétrico à pressão do fluido, a carga positiva a uma fonte do fluido e descreveu a carga negativa como algo semelhante a um sumidouro [27]. Essa abordagem inovadora contribuiu significativamente para o entendimento da interação entre eletricidade e magnetismo.

Posteriormente, entre os anos de 1861 e 1862, Maxwell publicou uma série de quatro artigos intitulados "On Physical Lines of Force", nos quais explicava suas teorias sobre os fenômenos magnéticos, correntes elétricas, eletricidade estática e a ação do magnetismo na luz polarizada [28, 9]. Em um marco científico significativo em 1873, James Maxwell transcendeu fronteiras ao unificar os campos da eletricidade, magnetismo e óptica com a publicação de "A Treatise on Electricity and Magnetism". Essa obra possibilitou a abertura de novos horizontes ao apresentar uma visão integrada desses fenômenos aparentemente distintos. A abordagem unificadora de Maxwell contribuiu substancialmente para o desenvolvimento da teoria eletromagnética, consolidando seu lugar como uma das figuras mais influentes na história da física.

Em 1864, na parte III do artigo "A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field", Maxwell pela primeira vez, formula por extenso todas as suas equações do eletromagnetismo, as quais são representadas nos capítulos VIII e IX da parte IV do volume 2 do seu artigo intitulado do "Treatise" [27]. As renomadas equações de Maxwell, delineando o campo

eletromagnético em sua formulação diferencial parcial, encontram-se formalizadas nas Eqs. (2.1) até a (2.4), permanecendo universalmente reconhecidas até os dias atuais.

As equações de Maxwell, na forma diferencial ou integral, descreve os campos eletromagnéticos em escalas macroscópicas. No entanto, ao explorar o mundo quântico, especialmente em escalas subatômicas, surgem nuances importantes. Para uma descrição dos campos quânticos, é necessário recorrer à QED, que se baseia nos princípios da Mecânica Quântica.

Portanto, na descrição dos campos quantizados, utiliza-se o formalismo lagrangiano. Esse método possibilita a formulação estruturalmente análoga de teorias distintas, como aquelas relacionadas a campos clássicos e quânticos. Isso ocorre porque os próprios campos, quando descritos em termos lagrangianos, são concebidos como sistemas com um número infinito de graus de liberdade [29, 30]. A Eletrodinâmica de Maxwell no formalismo lagrangiano, representada na Eq. (2.5), apesar de ter alcançado enorme sucesso na descrição de uma ampla gama de fenômenos eletromagnéticos em três dimensões espaciais e uma dimensão temporal  $(3+1)D$ , revela algumas limitações ao tentarmos generalizá-la.

No entanto, a teoria de Maxwell para os campos quantizados apresenta limitações. São elas: (I) O problema da massa - a quebra da invariância de calibre  $U(1)$  quando se tenta implementar massa ao campo eletromagnético livre em  $(3+1)D$  e (II) O problema de divergência - a energia potencial eletrostática entre duas cargas pontuais em um sistema  $(2+1)D$  de forma logarítmica. Ou seja, essa energia potencial cresce ou decresce dependendo do sinal das cargas à medida que a distância entre elas aumenta. Esse comportamento logarítmico pode levar a divergências matemáticas, exigindo cuidadosa análise e tratamento para garantir resultados físicos consistentes e válidos [31].

A Eletrodinâmica de Maxwell, quando formulada no contexto do formalismo lagrangiano, revela uma notável invariância de calibre, sugerindo a conservação de uma quantidade fundamental: a carga elétrica. No entanto, ao introduzir a noção de massa ao campo eletromagnético, observa-se que o termo associado à massa quebra a invariância de calibre, assegurando, assim, a preservação da carga elétrica, como descrita na primeira limitação[31].

Abordando a segunda limitação, ao analisarmos a hamiltoniana da Eletrodinâmica em  $(2+1)D$ , constatamos um resultado surpreendente, a interação entre duas cargas tende a aumentar indefinidamente com a distância entre elas, conforme observado por Marino [21]. Este fenômeno revela uma interação logarítmica, indicando um comportamento de confinamento. Tal resultado é inesperado, uma vez que a energia de interação entre duas cargas não deveria sofrer alterações apenas por as cargas estarem confinadas em duas dimensões espaciais. Isso sugere que as propriedades e comportamentos de sistemas físicos em dimensões reduzidas podem apresentar características distintas e não intuitivas em comparação com sistemas tridimensionais mais familiares. Essa percepção ressalta a



importância de investigar e compreender os efeitos da dimensionalidade em fenômenos físicos, especialmente em campos como a física da matéria condensada e a teoria quântica de campos[31].

Em 1952, Boris Podolsky resolve o problema das limitações mencionadas acima com a generalização da eletrodinâmica de Maxwell, acrescentando um termo constante (nomeada como constante de Podolsky) que envolve o produto de derivadas dos tensores eletromagnéticos de Faraday no formalismo lagrangiano de Maxwell, nomeando essa generalização como GED (Eletrodinâmica Generalizada), no limite que a constante de Podolsky vai a zero recupera-se o formalismo lagrangiano da Eletrodinâmica de Maxwell.

Ao ajustar essa generalização, Podolsky argumentou que essa abordagem é a única maneira de estender a teoria de Maxwell para solucionar o problema de massa, mantendo a linearidade e a invariância de calibre. E no que se diz respeito à constante de Podolsky, observa-se que sua dimensão é inversamente proporcional ao quadrado da energia (em unidades naturais), e está associada a um modo massivo do campo eletromagnético.

Portanto, a abordagem de Podolsky para generalizar a teoria de Maxwell, mantendo a linearidade e invariância de calibre, é uma tentativa notável de estender os fundamentos da eletrodinâmica. Sendo que, a associação da constante de Podolsky a um modo massivo do campo eletromagnético [31], demonstra como a teoria pode incorporar aspectos massivos aos campos sem comprometer a invariância de calibre.

Essa correção para o termo de fixação de calibre da GQED foi proposta por Galvão e Pimentel (1987) e Cuzinato et al. (2006) [31]. Essa teoria é a única de segunda ordem invariante pelos grupos de Lorentz e  $U(1)$  local, tornando-a a única generalização de segunda ordem para a eletrodinâmica de Maxwell.

Assim, ao examinar as características da Eletrodinâmica de Podolsky, poder-se-ia razoavelmente conjecturar que sua formulação em (2+1)D pudesse solucionar a questão das divergências encontradas na Eletrodinâmica de Maxwell em (2+1)D. Contudo, ao analisar a versão de Podolsky nesse contexto dimensional, observa-se que ela manifesta um potencial logarítmico à medida que à distância entre as cargas aumenta.

Portanto, a teoria de Maxwell-Podolsky é a extensão da Eletrodinâmica de Maxwell com a inserção de um termo de massivo e o tensor eletromagnético de Faraday ao formalismo lagrangiano de Maxwell da QED, solucionando o problema da quebra de simetria e invariância de calibre ao inserir um termo massivo a teoria Eletromagnética. Desta forma, a teoria de Maxwell-Podolsky, introduz um novo elemento que pode influenciar a interação entre as cargas e preservar a linearidade, invariância de calibre e aos grupos de Lorentz e  $U(1)$  local.

O campo de Podolsky se assemelha à descrição do campo de Maxwell dada pela Eq. (2.5), com a adição do tensor eletromagnético de Faraday e do termo de Podolsky. Dessa

forma, podemos expressar a densidade lagrangeana do campo de Podolsky da seguinte maneira no espaço Euclidiano

$$\mathcal{L}_P = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{a^2}{2}\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\beta F_{\mu\beta}, \quad (2.50)$$

considerando que " $a^2$ " representa o termo de Podolsky e  $\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\beta F_{\mu\beta}$  denota o tensor eletromagnético de Faraday, é importante notar que recuperamos a densidade lagrangeana de Maxwell  $\mathcal{L}$  quando  $a^2 \rightarrow 0$ . A contração total dos tensores eletromagnéticos de Maxwell, conforme descrito no primeiro termo da equação acima, definido na Eq. (2.9), pode ser expressa de forma mais concisa como

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2A^\nu\Box A_\nu - 2\partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu. \quad (2.51)$$

O tensor eletromagnético de Faraday é dado por

$$\{\partial_\nu[\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu]\}\{\partial^\beta[\partial_\mu A_\beta - \partial_\beta A_\mu]\} = \partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\beta F_{\mu\beta} \quad (2.52)$$

A contração total dos tensores eletromagnéticos de Faraday resulta em

$$\begin{aligned} & (\partial_\nu\partial^\mu A^\nu)(\partial^\beta\partial_\mu A_\beta) - (\partial_\nu\partial^\mu A^\nu)\Box A_\mu - (\Box A^\mu)(\partial^\beta\partial_\mu A_\beta) + (\Box A^\mu)(\Box A_\mu) \\ & - A^\nu[\partial_\nu\partial^\mu\partial^\beta\partial_\mu]A_\beta + A^\nu[\partial_\nu\partial^\mu\Box]A_\mu + A^\mu(\Box\partial^\beta\partial_\mu)A_\beta = A^\nu[\nu\partial^\mu\Box]A_\mu - A_\mu\Box\Box A^\mu \end{aligned} \quad (2.53)$$

Ao incluir o termo de fixação de calibre e o termo quadrático na densidade lagrangeana de Podolsky " $\mathcal{L}_P$ ", conforme estabelecido na Eq.(2.50), obtemos o seguinte resultado

$$\mathcal{L}_P = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2 - \frac{a^2}{2}\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\beta F_{\mu\beta}. \quad (2.54)$$

Logo,

$$\mathcal{L}_P = \frac{1}{4}(-2A^\nu\Box A_\mu + 2A^\mu\partial_\nu\partial_\mu A^\nu) - \frac{\lambda}{2}A_\mu\partial^\mu\partial^\nu A_\nu - \frac{a^2}{2}[-A^\mu\Box\Box A_\mu] - \frac{a^2}{2}A^\nu(\partial_\nu\partial_\mu\Box)A_\mu. \quad (2.55)$$

Portanto, uma forma compacta de descrever o campo eletromagnético na teoria, incluindo múltiplos termos que afetam as propriedades e interações dos campos  $A_\nu$  é dada pela equação

$$\mathcal{L}_P = \frac{1}{2}A^\nu[(-\Box)(1 - a^2\Box)\delta_{\mu\nu} + \partial_\nu\partial_\mu(1 - \lambda - a^2\Box)]A_\nu. \quad (2.56)$$

A expressão para o inverso do propagador é

$$G_{\mu\nu}^{-1} = (-\Box)(1 - a^2\Box)\delta_{\mu\nu} + \partial_\nu\partial_\mu(1 - \lambda - a^2\Box). \quad (2.57)$$

Assim, podemos reescrever a densidade lagrangeana para o campo de Podolsky da seguinte forma

$$\mathcal{L}_P = \frac{1}{2} A_\nu G_{\mu\nu}^{-1} A^\nu, \quad (2.58)$$

onde

$$G_{\mu\nu}^{-1} = A\delta_{\mu\nu} + Bp_\mu p_\nu, \quad (2.59)$$

e as constantes A e B são

$$\begin{aligned} A &= p^2(1 + a^2 p^2) \\ B &= -p_\mu p_\nu(1 - \lambda + a^2 p^2). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Desta forma, propagador do campo é dado por

$$G^{\nu\alpha} = C\delta^{\nu\alpha} + Dp^\nu p^\alpha. \quad (2.61)$$

Ao contrair o inverso do propagador com o campo de calibre, obtemos

$$G_{\mu\nu}^{-1} G^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\alpha. \quad (2.62)$$

Vamos encontrar as constantes C e D ao contrair completamente os propagadores, resultando em

$$(A\delta_{\mu\nu}\delta^{\nu\alpha} + Bp_\mu p_\nu)(C\delta^{\nu\alpha} + Dp^\nu p^\alpha) = \delta_\mu^\alpha \quad (2.63)$$

$$G_{\mu\nu}^{-1} G^{\nu\alpha} = AC\delta_{\mu\nu}\delta^{\nu\alpha} + AD\delta_{\mu\nu}p^\nu p^\alpha + BCp_\mu p_\nu p^\nu p^\alpha = \delta_\mu^\alpha, \quad (2.64)$$

onde

$$\begin{aligned} \delta_{\mu\nu}\delta^{\mu\alpha} &= \delta_\mu^\alpha \\ \delta_{\mu\nu}p^\nu p^\alpha &= p_\mu p^\alpha \\ \delta^{\nu\alpha}p_\mu p_\nu &= p_\mu p^\alpha \\ p_\mu p_\nu p^\nu p^\alpha &= p^2 p_\mu p^\alpha \end{aligned} \quad (2.65)$$

Logo,

$$AC\delta_\mu^\alpha + p_\mu p^\alpha(AD + BC + BDp^2) = \delta_\mu^\alpha, \quad (2.66)$$

sendo que

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{p^2(1 + a^2 p^2)} \\ D &= -\frac{1}{p^4} \left[ \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{1 + a^2 p^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Sendo assim,

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{p^2(1 + a^2 p^2)} \left[ \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] - \frac{p_\mu p_\nu}{p^4 \lambda}. \quad (2.68)$$

Assim como na densidade lagrangeana de Maxwell, o propagador da teoria apresenta um termo dependente do calibre. No entanto, em contraste com a teoria de Maxwell, o polo da amplitude escalar revela a presença de um modo não massivo e outro massivo. Essa dualidade entre modos massivos e não massivos é semelhante à observada na densidade lagrangeana de Proca, onde também encontramos componentes massivos e não massivos. Vale ressaltar que, como realizamos o cálculo no espaço Euclidiano, seria necessário aplicar uma rotação de Wick para calcular corretamente os polos no espaço de Minkowski. Essa rotação é uma técnica comum para transitar entre os espaços Euclidiano e Minkowski, garantindo consistência nos resultados físicos obtidos.

## 3 Maxwell-Podolsky via tensor de polarização em (2+1)D

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados relativos à teoria de Maxwell-Podolsky por meio do tensor de polarização em (2+1)D. Na próxima seção, abordaremos a interação estática de Maxwell-Podolsky em (2+1)D. Inicialmente mostraremos como obter o termo de Podolsky a partir do tensor de polarização do vácuo da teoria de Dirac massiva. Esse resultado segue de perto o método de obtenção do termo de Chern-Simons, via correção radiativa. Em seguida, calculamos a interação estática na teoria de Maxwell-Podolsky em (2+1)D.

### 3.1 Maxwell-Podolsky via tensor de polarização em (2+1)D

Nesta seção, mostraremos como obter a teoria de Maxwell-Podolsky em (2+1)D utilizando o tensor de polarização do campo fermiônico. Nosso método é análogo à obtenção do termo de Chern-Simons via anomalia de paridade [6]. Alguns detalhes sobre o cálculo funcional são fornecidos no Apêndice B, o que será útil para os leitores menos familiarizados com o método funcional.

Nós começamos com a ação do campo de Dirac em (2+1)D, no espaço Euclidiano, dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi, \quad (3.1)$$

sendo que  $\psi$  é o campo de matéria,  $\gamma_\mu$  são as matrizes de Dirac e  $m$  é a massa bare do elétron. Portanto, o funcional gerador das funções de correlação corrente-corrente é dado por [24, 32]

$$Z_\psi[J] = Z^{\psi_0} \int D\bar{\psi} D\psi e^{-S_D + \int d^D x j_\mu J^\mu}, \quad (3.2)$$

considerando que  $j_\mu = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$  representa a corrente de matéria,  $Z_0^\psi$  é uma constante de normalização e  $J_\mu$  é uma fonte externa, a Equação (3.2) se apresenta de forma quadrática no campo de Dirac. Portanto, ao empregar a Eq.(3.1) na Eq.(3.2), podemos resolver a integral em relação a  $\psi$  e obter

$$\begin{aligned} Z_\psi[J] &= \det \left[ 1 + \frac{e\gamma^\nu J_\nu}{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)} \right] \\ &= \exp \left\{ \text{Tr} \ln \left[ 1 + \frac{e\gamma^\nu J_\nu}{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ \text{Tr} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^{N-1}}{N} \left[ \frac{e\gamma^\nu J_\nu}{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)} \right]^N \right\}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

sendo que nós usamos a constante arbitrária  $Z_0^\psi$  para fixar  $Z_\psi[0] = 1$ . Da Eq. (3.3) segue que  $Z_\psi[J] = Z_2^\psi[J]Z_{N>2}^\psi[J]$ , sendo que  $\ln Z_2^\psi[J]$  é um termo quadrático na fonte externa  $J_\mu$  e  $\ln Z_{N>2}^\psi[J]$  são polinômios de ordem superior em  $J_\mu$ . Em particular,  $Z_2^\psi[J]$  é dado por

$$Z_2^\psi[J] = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^D x d^D y J_\mu(x) \Pi^{\mu\nu}(x-y) J_\nu(y) \right\}, \quad (3.4)$$

sendo que  $\Pi_{\mu\nu}$  é o tensor de polarização do vácuo. Esse termo, portanto, é a correção quântica ao propagador de um campo de calibre que está acoplado minimamente ao campo de Dirac. Naturalmente, a função de correlação de 2 pontos  $\langle j_\mu j_\nu \rangle$ , por exemplo, é dada por

$$\langle j_\mu(x) j_\nu(y) \rangle = \frac{\delta^2 Z_\psi[J]}{\delta J^\mu(x) \delta J^\nu(y)} \Big|_{J=0} = \Pi_{\mu\nu}(x-y). \quad (3.5)$$

Usando-se o esquema de regularização dimensional para matrizes de Dirac  $4 \times 4$ , nós temos

$$\Pi^{\mu\nu}(p, m) = \Pi_1(p, m) P^{\mu\nu} \quad (3.6)$$

sendo que [33, 34]

$$\Pi_1(p, m) = -\frac{e^2}{2\pi} \int_0^1 dx \frac{p^2 x(1-x)}{\sqrt{x(1-x)p^2 + m^2}}. \quad (3.7)$$

A correção quântica dada pela expressão acima são exatas (em 1-loop), porque não há necessidade de fazer aproximações além dessa ordem para manter a precisão dos resultados dentro desse contexto específico de correções de 1-loop da teoria quântica de campos. Embora sejam complicadas funções de  $(p, m)$ . Para simplificar isso, vamos propor uma aproximação para férmions com massa grande, ou seja,  $m^2 \gg p^2$ . Expandindo até ordem de  $p^4/m^4$ , temos [33, 34]

$$\Pi_1(p, m) \approx -\frac{e^2 p^2}{12|m|\pi} + \frac{e^2 p^4}{120|m|^3\pi} + O\left(\frac{p^6}{|m|^5}\right). \quad (3.8)$$

A Eq.(3.8) pode ser usada na Eq. (3.4) e, assim, obtemos uma expressão para um campo de calibre, após trocar  $J_\mu \rightarrow B_\mu$  de tal forma que  $B_\mu$  denota um campo de calibre auxiliar e gera as mesmas funções de Green de N pontos do que a teoria de Dirac no limite de baixas energias. Esse é o processo de Bosonização[6, 33]. Podemos fazer uma transformação de escala no campo de calibre, dada por  $B_\mu \rightarrow \sqrt{12m\pi} \bar{B}_\mu / e$ , tal que  $[\bar{B}_\mu] = 1/2$  e, assim, o campo de calibre  $\bar{B}_\mu$  fica com a mesma dimensão do campo de Maxwell. Levando em conta que uma ação de Maxwell-Podolsky gera um termo quadrático dado por  $\bar{B}_\mu(p^2 + a^2 p^4) \bar{B}^\mu / 2$ , sendo  $a^2$  o termo de Podolsky (ver capítulo 2). Portanto, usando a Eq. (3.8) na Eq. (3.4), nós obtemos que  $a^2 = 1/(10m^2)$ , mostrando que o termo de Podolsky é, essencialmente, o inverso da massa do campo fermiônico. Esse resultado tem um análogo bem conhecido quando consideramos a representação 2x2 das matrizes de Dirac. Nesse caso, é gerado um termo de Chern-Simons via tensor de polarização, cujo termo de Chern-Simons é proporcional ao sinal da massa do campo de Dirac.

Na próxima seção, vamos considerar que o termo de Podolsky é incluído inicialmente na teoria do campo de calibre. Assim, vamos investigar qual a interação que esse termo gera entre elétrons estáticos no plano.

## 3.2 Interação estática de Maxwell-Podolsky em(2+1)D

Nessa seção vamos calcular o potencial estático entre duas partículas carregadas e vinculadas ao plano bidimensional na teoria de Maxwell-Podolsky. Para isso, partimos do propagador livre da teoria dado por

$$\Delta_{0\mu\nu}(p) = \frac{\delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / p^2}{p^2(1 + a^2 p^2)} - \frac{p_\mu p_\nu}{\lambda p^4}, \quad (3.9)$$

sendo que o termo de calibre não contribui por conta da conservação da carga elétrica [35, 1]. Conforme discutido anteriormente, o potencial de interação estático será dado pela transformada de Fourier do propagador com  $p_0 = 0$ , levando-se em conta apenas as componentes  $(\mu, \nu) = (0, 0)$  já que apenas o acoplamento com a densidade de carga  $j_0$  é levado em conta. Sendo assim, chegaremos em

$$V(r) = e^2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{k^2(1 + a^2 k^2)}. \quad (3.10)$$

Resolvendo a integral angular, temos

$$V(r) = \frac{e^2}{2\pi} \int_0^\infty k dk \frac{J_0(kr)}{k^2(1 + a^2 k^2)}. \quad (3.11)$$

A integral em  $k$  não pode ser diretamente resolvida por problema de convergência em  $k = 0$ , no infravermelho. Assim, tomamos uma derivada com relação a  $r$  dos dois lados da equação para obter

$$\frac{dV(r)}{dr} = -\frac{e^2}{2\pi} \int_0^\infty k^2 dk \frac{J_1(kr)}{k^2(1 + a^2 k^2)}. \quad (3.12)$$

Agora não temos mais o problema de divergência em  $k = 0$ , assim, resolvendo a integral em  $k$ , temos

$$\frac{dV(r)}{dr} = -\frac{e^2}{2\pi} \left[ \frac{1}{r} - \frac{K_1(r/|a|)}{|a|} \right], \quad (3.13)$$

sendo  $K_n(z)$  a função de Bessel modificada de segunda espécie. Integrando os dois lados com relação a  $r$ , obtemos

$$V(r) = -\frac{e^2}{2\pi} \left[ \ln(e^2 r) + K_0(r/|a|) \right]. \quad (3.14)$$

Na Fig. (1), plotamos a Eq. (3.14) para analisar a contribuição do termo de Podolsky. Como esperado, observa-se que a contribuição deste termo é relevante apenas no limite de pequenas distâncias ou grandes momentos. Além disso, nota-se que a divergência

logarítmica desaparece devido ao termo de Podolsky. Entretanto, quando  $a \rightarrow 0$ , o potencial reduz-se a um potencial logarítmico, conforme mostrado pelo resultado.

Dessa forma, concluímos que o propagador da teoria, expresso na Eq. (3.1), revela que, para valores muito baixos de  $p$ , não é possível observar a influência do termo de Podolsky, resultando apenas na  $QED_3$ . Logo, para distâncias consideráveis, o termo de Podolsky se torna praticamente insignificante, sendo relevante apenas em situações que envolvem grandes momentos.

Adicionalmente, ao analisarmos a Eq. (3.1), podemos derivar a Eq. (3.14), a qual indica que a contribuição desse termo é relevante somente quando estamos lidando com distâncias pequenas (ou momentos grandes), mantendo assim a divergência logarítmica.

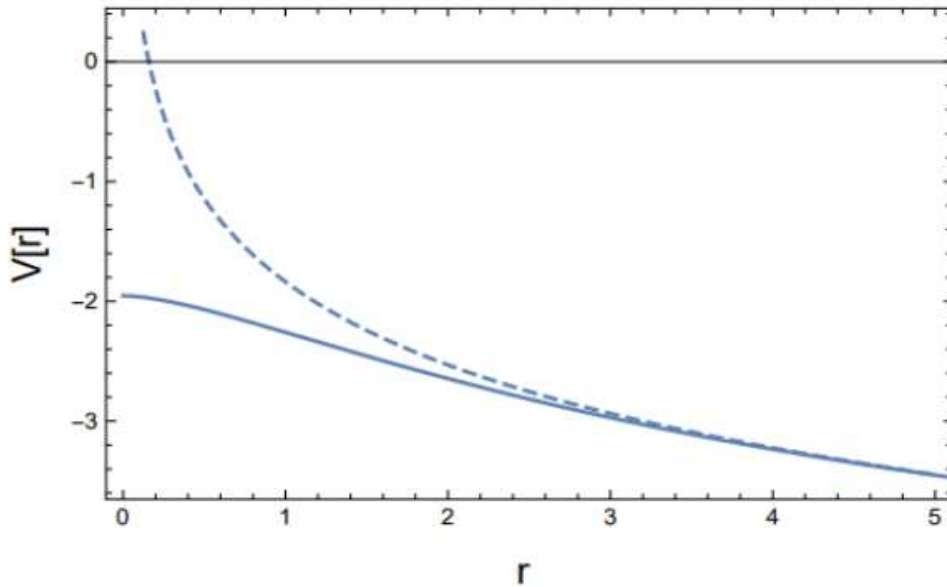


Figura 1 – Potencial estático de Maxwell-Podolsky em  $(2+1)D$ . A linha tracejada representa o potencial de Maxwell sem a contribuição do termo de Podolsky, enquanto a linha contínua mostra o potencial com a contribuição do termo de Maxwell-Podolsky.

A partir desse ponto abandonaremos as aproximações estáticas e consideraremos os efeitos dinâmicos nos modelos discutidos. A principal ferramenta para fazer isso serão as equações de Schwinger-Dyson que constituem um método não-perturbativo em teoria quântica de campos. Esse método tem sido utilizado para o cálculo da geração dinâmica de massa para elétrons, o que implica uma quebra de simetria quiral em  $(2+1)D$  apenas para férmions de quatro componentes. Isso é interessante do ponto de vista de comparação com a cromodinâmica quântica. Por outro lado, esse fenômeno também tem grande relevância para a descrição dos níveis de energia em materiais bidimensionais, tais como o grafeno e dicalcogenetos de metais de transição[36, 37]. Em ambos os casos, podemos incluir um cutoff ultravioleta  $\Lambda$  para calcular a massa gerada por  $M$ . Dependendo do comportamento



ultravioleta do modelo, a massa  $M$  pode depender de  $\Lambda$ . Isso não é um problema, desde que  $\Lambda$  seja um parâmetro finito. Caso contrário, é necessário impor uma equação do grupo de renormalização para  $M$  e, assim, obter uma função beta para um parâmetro do modelo que, variando com  $\Lambda$ , permite que  $M$  seja independente de  $\Lambda$ . Vale ressaltar que o capítulo 3 e 4 constituem a parte original desta dissertação. Em particular, até onde sabemos, nenhuma referência obteve o termo de Podolsky via correção radiativa.



## 4 Geração dinâmica de massa para elétrons de Dirac em $(2+1)D$

A geração dinâmica de massa para elétrons de Dirac em  $(2+1)D$  é um fenômeno relevante na Física de Partículas e na Teoria Quântica de Campos (TQC). Em  $(2+1)D$ , a equação de Dirac para elétrons, que descreve seu comportamento quântico relativístico, pode ser modificada para incluir a geração de massa dinâmica adicionando termos que representam as interações responsáveis pela aquisição de massa. Essas interações podem ser com campos escalares, quebra de simetria, ou correções radiativas, resultando em um termo de massa efetivo na equação de Dirac. A massa dinâmica é uma maneira pela qual partículas, que normalmente são consideradas como sem massa intrínseca, podem adquirir massa devido a interações com outros campos quânticos no vácuo. Dessa forma, a existência da massa é justificada por meio dessas interações com campos quânticos. [38].

Portanto, aqui abordaremos uma rota alternativa ao mecanismo de Higgs em que a massa para o elétron é gerada por efeitos dinâmicos da interação eletromagnética. Esse fenômeno, por outro lado, requer uma forte interação entre o campo e de radiação de matéria, gerando o que é normalmente chamado de constante crítica de acoplamento que separa a fase simétrica (sem massa) da fase não simétrica (com massa)[39].

### 4.1 Breve histórico

Com o desenvolvimento da Mecânica Quântica no início do século XX, a descrição de fenômenos de altas energias demandou a unificação dessa teoria com a Relatividade Restrita, o que possibilitou o surgimento de um novo campo da física conhecido como Mecânica Quântica Relativística [40, 41]. A primeira tentativa nesse sentido foi a equação de Klein-Gordon que descreve uma partícula quântica relativística

Em 1928, Paul Dirac abordou o desafio das densidades de probabilidade negativas ao propor uma equação de onda relativística de primeira ordem em variáveis espaciais e temporais. Essa equação descreve a dinâmica quântica dos férmions. No entanto, em 1934, Pauli e Weisskopf resolveram o problema das densidades de probabilidade negativas ao interpretar o campo escalar relativístico de Klein-Gordon em termos de densidade de carga e corrente de densidade de probabilidade. Apesar da resolução do problema associado à equação de Klein-Gordon, a equação de Dirac continua sendo amplamente utilizada devido a várias vantagens, incluindo: I) a descrição natural do spin do elétron, a previsão da existência da antimatéria e a reprodução precisa do espectro do hidrogênio; II) a previsão do paradoxo de Klein e a Zitterbewegung [41].

Portanto, além das notáveis contribuições na evolução das equações de onda relativística, como evidenciado pela trajetória desde a equação de Klein-Gordon até a influente equação de Dirac, a investigação teórica continua a desempenhar um papel crucial na compreensão dos fenômenos quânticos. Em uma linha similar, as equações de Schwinger-Dyson para elétrons na aproximação rainbow-quenched, que é uma técnica de simplificação usada na Física de Partículas e na TQC para estudar a dinâmica de férmions em teorias de calibre, combinando a aproximação Rainbow, que simplifica a auto-energia dos férmions, com a aproximação quenched, que ignora as flutuações quânticas dos férmions, resultando em um modelo mais tratável matematicamente. Desta forma, a aproximação Rainbow-quenched constitui uma abordagem teórica avançada que busca fornecer uma descrição mais completa e precisa da dinâmica quântica. Essas equações, ao incorporarem efeitos de várias ordens de acoplamento, oferecem uma visão mais refinada do comportamento dos elétrons, contribuindo para a compreensão abrangente do intrincado cenário subatômico[38].

## 4.2 Equações de Schwinger-Dyson para elétrons na aproximação rainbow-quenched

A quebra de simetria quiral em teorias de calibre ocorre quando o elétron, até então sem massa, adquira uma massa devido aos efeitos quânticos de sua interação com o campo de calibre. As equações de Schwinger-Dyson são ferramentas ideais para estudar esse tipo de fenômeno, pois são capazes de capturar as interações complexas envolvidas, sem precisar considerar uma constante de acoplamento pequena, o que apenas ocorre no limite perturbativo [8]. Nesta seção, faremos uma breve introdução sobre as equações de Schwinger-Dyson, considerando o esquema de aproximação que adotaremos para o fóton, férmion e vértice de interação.

As equações de Schwinger-Dyson constituem um conjunto coeso de equações integrais não-lineares interconectadas, permitindo uma descrição abrangente dos processos físicos envolvidos. Em particular, ao explorar teorias de calibre com campos fermiônicos, essas equações podem ser separadas em três grupos distintos, cada uma tratando das interações específicas entre fótons, férmions e a função de vértice [42, 8]. A equação de Schwinger-Dyson para o fóton pode ser escrita como

$$\Delta_{\mu\nu}^{-1}(p) = \Delta_{0\mu\nu}^{-1}(p) - \Pi_{\mu\nu}(p), \quad (4.1)$$

sendo que o termo do lado esquerdo representa o inverso do propagador do fóton, colocando-se todas as correções radiativas. O primeiro termo do lado direito é o inverso do propagador livre do fóton (sem efeito de "loop"fermiônico) e o segundo termo do lado direito é a auto-energia do fóton, em  $(2+1)D$ , definido como

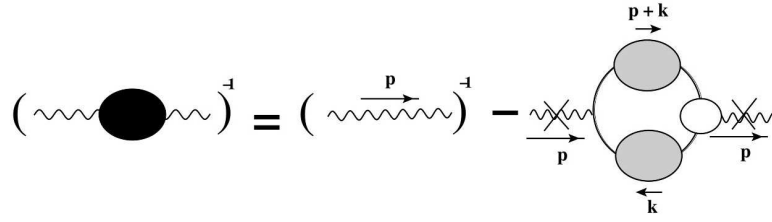


Figura 2 – Equação de Schwinger-Dyson para o fóton [1, 2].

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = -e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr}[\gamma^\mu S_F(k+p)\Gamma^\nu(k,p)S_F(k)], \quad (4.2)$$

sendo que "e" é a carga elétrica do elétron,  $\gamma^\mu$  são as matrizes de Dirac,  $\Gamma^\nu(k,p)$  e  $S_F(p)$  são a função de vértice e o propagador do férmion, respectivamente, com todas as correções radiativas. A representação diagramática da equação de Schwinger-Dyson para o fóton é mostrada na Fig. (2). Vale ressaltar que optamos por trabalhar no espaço Euclidiano, como é comum na literatura sobre o tema. Adicionalmente, é importante notar que a equação (4.2) está intrinsecamente ligada ao propagador do férmion totalmente corrigido.

Agora, vejamos as equações para o férmion. Esta pode ser convenientemente escrita como

$$S_F^{-1}(p) = S_{0F}^{-1}(p) - \Xi(p), \quad (4.3)$$

sendo que a auto-energia do elétron é dada por  $\Xi$  é dada por

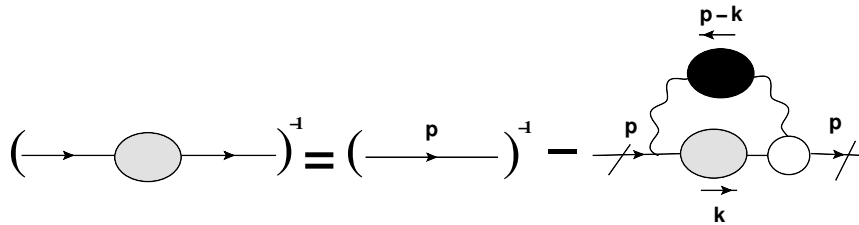


Figura 3 – Equação de Schwinger-Dyson para o férmion [1, 2].

$$\Xi(p) = e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \gamma^\mu S_F(k)\Gamma^\nu(k,p)\Delta_{\mu\nu}(p-k). \quad (4.4)$$

Observamos a partir da equação acima que, para determinar a função  $\Xi(p)$ , precisamos conhecer o propagador do fóton corrigido. Por outro lado, a obtenção desse propagador requer conhecimento prévio do propagador  $S_F(p)$  do férmion. A representação gráfica da equação de Schwinger-Dyson relacionada ao férmion é representada na Fig. (3). Essa configuração é uma característica intrínseca das equações de Schwinger-Dyson, já que elas estão interligadas. Resolver essa interdependência exige a implementação de um esquema de truncamento. Dentre as opções disponíveis, destacamos as abordagens

"quenched" e a "rainbow", que envolvem, respectivamente, a exclusão dos loops fermiônicos no cálculo do propagador do fóton ( $\Pi^{\mu\nu}(p) = 0$ ) e a consideração da função vértice como sendo as próprias matrizes de Dirac.

Conforme mencionado, adotaremos a abordagem "rainbow", que simplifica a função de vértice para  $\Gamma^\mu(k, p) = \gamma^\mu$ . Na seção subsequente, iremos direcionar nosso estudo para a investigação da quebra de simetria quiral da teoria de Maxwell-Podolsky [8].

Por correções quânticas na função de Green de dois pontos do férmion, podem existir contra-termos para a função de onda e a massa deste. Assim, iremos propor a seguinte forma para o inverso do propagador completo do férmion

$$S_F^{-1}(p) = A(p)\gamma^\mu p_\mu + \Sigma(p), \quad (4.5)$$

que  $A(p)$  é a constante de renormalização da função de onda do campo fermiônico e  $\Sigma(p)$  é identificado como a função de massa ou termo de geração de massa do campo fermiônico, o foco central reside no cálculo do termo  $\Sigma(p)$ . Este termo é responsável por desencadear a quebra de simetria quiral e, conseqüentemente, a geração de massa para os elétrons.

Adicionalmente, exploramos as propriedades do traço de matrizes de Dirac no contexto do espaço euclidiano.

$$Tr(\gamma^\mu) = 0, \quad (4.6)$$

o traço de uma matriz

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = -4\delta^{\mu\nu}, \quad (4.7)$$

o traço de duas matrizes na representação 4x4 e

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha) = 0, \quad (4.8)$$

o traço de três matrizes de Dirac na representação 4x4.

Inicialmente, vamos considerar a Lagrangeana da  $QED_3$  com um termo de Podolsky. A lagrangeana desse modelo, no espaço Euclidiano, é

$$L = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{a^2}{2}\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\beta F_{\mu\beta} - \frac{\lambda}{2}A_\mu\partial^\mu\partial^\nu A_\nu + i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \quad (4.9)$$

sendo que  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é o tensor intensidade do campo de calibre  $A_\mu$ ,  $\psi$  é o campo de Dirac sendo  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$  o seu campo adjunto,  $\gamma_\mu$  são as matrizes de Dirac na representação 4x4,  $\lambda$  é o parâmetro de fixação de calibre e  $e$  é constante de acoplamento. Neste caso, a dimensão do termo de Podolsky é  $[a] = -1$  em unidade de massa, representando um termo inverso de massa. O propagador livre do campo fermiônico é

$$S_F^0(p) = \frac{1}{\gamma_\mu p^\mu} \quad (4.10)$$

e o vértice interação, na aproximação de árvore, é  $e\gamma_\mu$ .

Utilizando a equação (4.5), é possível demonstrar que  $A(p) = 1 + O(\alpha)$ , onde  $\alpha$  é a constante de acoplamento, o que nos permite considerar  $A(p)$  como unitário, ou seja,  $A(p) = 1$ . Esse resultado também se alinha com a abordagem "rainbow" adotada. Para isolar  $\Sigma(p)$ , podemos calcular o traço da expressão mencionada e, utilizando-a equação (4.12), chegamos a

$$\Sigma(p) = e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} \delta^{\mu\nu} \Delta_{0\mu\nu}(p-k), \quad (4.11)$$

sendo que

$$\Delta_{0\mu\nu}(p) = \frac{\delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / p^2}{p^2(1 + a^2 p^2)} - \frac{p_\mu p_\nu}{\lambda p^4}. \quad (4.12)$$

Usando a Eq.(4.12) na Eq. (4.11), temos

$$\Sigma(p) = 2e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} \frac{1}{(p-k)^2 [1 + a^2(p-k)^2]}, \quad (4.13)$$

sendo que  $(p-k)^2 = p^2 + k^2 - 2pk \cos \theta$ .

A Eq.(4.13) é uma complicada equação integral que determina a função de massa  $\Sigma(p)$ . Ocorre que ela depende da própria função de massa  $\Sigma(k)$  calculada dentro do loop de integração. Uma alternativa trabalhosa seria converter essa equação integral em uma equação diferencial e aplicar algumas condições de contorno sobre  $\Sigma(p)$ . Em geral, essa solução deve ser comparada com resultados numéricos para testar sua validade. Aqui, iremos propor uma aproximação menos precisa, mas suficiente para descrever o fenômeno de geração dinâmica de massa. Nesse caso, iremos propor uma solução constante tal que  $\Sigma(p) = M$  sendo  $M$  uma constante fixa. Obviamente, essa aproximação falha para  $p \rightarrow \infty$ , pois claramente temos que  $\Sigma(p \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ . Para evitar essa região, basta tomar  $p \rightarrow 0$  no kernel da integral. Assim,

$$M = 2e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{M}{k^2 + M^2} \frac{1}{k^2(1 + a^2 k^2)}. \quad (4.14)$$

Usando que  $d^3k = k^2 dk 4\pi$  e  $0 \leq k \leq \Lambda$ , temos

$$M = \frac{\alpha}{4\pi^2} \int_0^\Lambda k^2 dk \frac{M}{k^2 + M^2} \frac{1}{k^2(1 + a^2 k^2)}. \quad (4.15)$$

Resolvendo a integral em  $k$ , temos

$$1 = \alpha \frac{[\tan^{-1}(\Lambda/M) - aM \tan^{-1}(a\Lambda)]}{4\pi^2 M(1 - a^2 M^2)}. \quad (4.16)$$

Podemos expandir a equação de gap Eq.(4.16) no limite em que  $\Lambda \rightarrow \infty$ , onde  $\Lambda$  é o parâmetro de corte introduzido para regularizar as integrais. No contexto de matéria condensada, este limite permite considerar todas as contribuições de alta energia ao sistema. Assim, finalmente, obtemos:

$$1 = \sqrt{a^2\alpha - \frac{\alpha}{\sqrt{M^2}} \frac{8\pi}{a^2M^2 - 1}} + O\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right), \quad (4.17)$$

sendo que o efeito do cutoff ultravioleta claramente é de ordem subdominante.

As soluções da Eq.(4.17) fornecem a massa gerada para o elétron  $M$ . Definindo  $y = a^2M^2$  e  $z = \sqrt{\alpha^2e^2}/8\pi$ , constantes reais tais que  $(y, z) > 0$ , temos

$$1 = z \left( \frac{1 - 1/\sqrt{y}}{y^2 - 1} \right). \quad (4.18)$$

Assim, concluímos que  $a^2$  deve sempre ser positivo para gerar uma solução  $M$  real. Note que, uma vez que  $z > 0$ , então os dois lados da equação devem ser positivos. Por outro lado, para qualquer valor de  $y$  temos que  $(1 - 1/\sqrt{y})/(y^2 - 1) > 0$ , assim, não há limitação para geração de massa com relação ao valor de  $a$ . Podemos, assim, isolar  $M$  e obter

$$8\pi^2a^4M^2 = \frac{16\pi^2 + \Delta}{8} \pm \sqrt{\Delta}, \quad (4.19)$$

sendo que  $\Delta = 16\pi^2 + 8\pi\sqrt{a^2\alpha^2}$ . Note que existem dois valores possíveis para  $M^2$ . Assim, esse resultado indica que o espectro do sistema admite 4 níveis de energia distintos, ou seja, 4 valores possíveis para  $M$ . Esse resultado tem grande relevância para a estrutura eletrônica desse sistema e esse efeito é gerado pela presença do termo de Podolsky com  $a \neq 0$ . Com efeito, tomando  $a = 0$  na Eq. (4.17), teremos apenas 2 soluções possíveis para  $M$ , dadas por  $\pm\alpha/8\pi$ , que correspondem as soluções para a  $QED_3$ .

Existem ainda alguns pontos a serem considerados em nosso resultado. Inicialmente seria a dependência com relação ao momento externo " $p$ ". Em geral, a função de massa decresce com o aumento de " $p$ ". Entretanto, o valor para  $p = 0$  é máximo, então é suficiente mostrar que  $\Sigma(0) = M \neq 0$ , para que ocorra a quebra da simetria quiral.. Então, nesse sentido nosso cálculo é suficiente. Ocorre, entretanto, que no nosso método aproximativo nós não somos capazes de observar a existência de uma constante crítica de acoplamento  $\alpha_c$ . Essa constante separa as fases simétricas e não simétricas e é não nula tanto para  $QED_3/QED_4$  quanto para a PQED. Esse cálculo corresponde a uma perspectiva futura de generalização de nosso trabalho.

Nosso resultado implica uma transição de uma fase simétrica (férmions de Dirac não massivos) para uma fase não simétrica (férmions de Dirac massivos). Dentre as 4 soluções possíveis, é natural concluir que apenas o subconjunto que contém o menor nível de energia (estado de vácuo) será o nível observado em um experimento medindo, por exemplo, a banda de energia de uma quase-partícula em um material bidimensional. A existência dos outros níveis, entretanto, é relevante no que concerne a topologia do sistema. Sabe-se que, pela correspondência centro-borda, cada nível de energia calculado no centro do material implica um nível de energia na borda com condutividade elétrica  $e^2/h$ . Assim, considerando um sistema em que os níveis de energia estão preenchido até  $E_F = 0$ , então



isso implica uma condutividade transversa de  $2e^2/h$ , em analogia ao efeito Hall quântico de vale[1].

### 4.3 Geração de Massa na PQED com termo de Podolsky

Nessa seção iremos repetir o cálculo sobre geração dinâmica de massa, entretanto, usando a PQED com termo de Podolsky. A lagrangeana do modelo, no espaço Euclidiano, é

$$L = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(-\square)^{1/2}F^{\mu\nu} - \frac{a^2}{2}\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\beta F_{\mu\beta} - \frac{\lambda}{2}A_\mu \frac{\partial^\mu \partial^\nu A_\nu}{(-\square)^{1/2}} + i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \quad (4.20)$$

sendo que tanto o campo de calibre quanto o campo de matéria seguem as mesmas definições da seção anterior. Entretanto, a constante de acoplamento "e" é adimensional e o termo de PQED-Podolsky tem dimensão de  $[a] = -3/2$  em unidade de massa.

Para resolver as equações de Schwinger-Dyson, é importante conhecer o propagador do campo de calibre. Levando em conta apenas a parte quadrática do campo de calibre, podemos mostrar que a Lagrangeana da Eq. (4.20) pode ser escrita como

$$\frac{1}{2}A^\mu \left\{ [2(-\square)^{1/2} + a^2(-\square)^2]\delta_{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{(-\square)^{1/2}}(2 - \lambda - a^2(-\square)^{1/2}\square) \right\} A^\nu. \quad (4.21)$$

Conforme discutido antes, devemos inverter o termo quadrático no campo. Assim, após um cálculo análogo ao caso da QED, temos

$$\Delta_{0\mu\nu}(p) = \frac{\delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / p^2}{[2(p^2)^{1/2} + a^2(p^2)^2]}, \quad (4.22)$$

sendo que usamos o calibre de Landau  $\lambda \rightarrow \infty$ . O propagador livre do campo fermiônico é

$$S_F^0(p) = \frac{1}{\gamma_\mu p^\mu}, \quad (4.23)$$

e o vértice interação, tal qual a QED, é  $e\gamma_\mu$ . As regras de traço das matrizes de Dirac são mantidas tal qual como no caso da  $QED_3$  no espaço Euclidiano na representação de  $4 \times 4$ . No esquema unquenched-rainbow, nós consideramos as soluções livres tanto para o vértice quanto para o propagador do campo de calibre. Por outro lado, para o propagador do campo de Dirac, nós usamos o mesmo ansatz da QED, dado por

$$S_F^{-1}(p) = A(p)\gamma_\mu p^\mu + \Sigma(p), \quad (4.24)$$

sendo que, em ordem mais baixa, podemos tomar  $A(p) \approx 1$  e assim obter a seguinte equação integral para a função de massa, dada por

$$\Sigma(p) = e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} \delta^{\mu\nu} \Delta_{0\mu\nu}(p-k). \quad (4.25)$$

Usando a Eq. (4.22) na Eq. (4.25), temos

$$\Sigma(p) = 2e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} \frac{1}{2[(p-k)^2]^{1/2} + a^2(p-k)^4}, \quad (4.26)$$

sendo que  $(p-k)^2 = p^2 + k^2 - 2pk \cos \theta$ .

Para calcular o valor máximo da função de massa, conforme discutido anteriormente, podemos tomar  $\Sigma(p) \rightarrow \Sigma(0) = M$ . Assim, tomando  $p \rightarrow 0$  no kernel da integral, temos

$$M = 2e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{M}{k^2 + M^2} \frac{1}{2k + a^2k^4}. \quad (4.27)$$

Usando que  $d^3k = k^2 dk 4\pi$ ,  $0 \leq k \leq \Lambda$  e  $e^2 = 4\pi\alpha$ , temos

$$M = \frac{4\alpha}{\pi} \int_0^\Lambda k^2 dk \frac{M}{k^2 + M^2} \frac{1}{2k + a^2k^4}. \quad (4.28)$$

A integral em  $k$  é facilmente resolvida entretanto seu resultado é uma complexa função de  $(\Lambda, \alpha, M, a)$ . Para facilitar nossa análise do problema, vamos tratar  $\Lambda$  como uma constante grande e, assim, expandir o resultado da integral para  $(M, a) \ll \Lambda$ . Assim, após alguma algebra, encontramos

$$M = \pm \Lambda e^{-\alpha/(2\pi)} e^{-a^2\Lambda^3/6}. \quad (4.29)$$

Note que obtivemos apenas duas soluções possíveis, o que é efeito da aproximação adotada. Por outro lado, note que sempre teremos  $M < \Lambda$ , como esperado. Além disso, não foi possível obter uma constante crítica  $\alpha_c$  nesse regime de aproximação. Esse resultado é geral, pois podemos concluir, via Eq. (4.28) que não existe nenhum valor de  $\alpha = \alpha_c$  que satisfaça  $M(\alpha_c) = 0$ . Com relação ao termo de Podolsky, podemos concluir que ele atua como um inibidor do processo de geração de massa, pois  $M \rightarrow 0$  quando  $a \gg \Lambda$ . Isso é um resultado exato que pode ser checado pela equação de gap de forma simples. Naturalmente, como esse termo blinda a interação Coulombiana é natural que ele atue como um inibidor da geração de massa [39]. Naturalmente, há outras aproximações que podem ser feitas, de maneira a se encontrar qual é o acoplamento crítico da teoria, entre outras coisas.

## 5 Resultados e Conclusões

No capítulo 2, apresentamos uma breve introdução histórica desde a formulação do eletromagnetismo clássico, destacando alguns desafios encontrados durante esse processo e a contribuição de diversos físicos para a sua formulação. Exploramos a evolução dessa teoria até a formulação da TQC, que se consolidou no início do século XX a partir da integração da mecânica quântica com a relatividade restrita de Einstein, ressaltando que a mesma representa um marco significativo na compreensão das forças fundamentais da natureza, unificando conceitos aparentemente distintos e fornecendo um quadro teórico abrangente para a descrição das interações eletromagnéticas. Posteriormente, emergiu a QED como uma extensão da TQC, desempenhando um papel fundamental na descrição das interações eletromagnéticas em termos de partículas elementares e campos quânticos.

Neste mesmo capítulo, apresentamos a formulação da PQED elaborada por Marino em 1993, que realizou a redução dimensional no campo de matéria da  $QED_4$  para a  $QED_3$ . Este refinamento proporcionou uma compreensão mais consistente das interações eletromagnéticas em um espaço-tempo tridimensional, abrindo caminhos para insights valiosos.

Ao estabelecer nossa análise para o potencial estático no plano da PQED, obtivemos o potencial  $1/r$  conhecido como potencial Coulombiano da  $QED_4$ . Esse resultado é particularmente relevante ao considerar materiais bidimensionais, como o grafeno, onde a geometria é fundamental. Este potencial influencia diretamente as propriedades desses materiais, como a renormalização de Fermi. Portanto, a compreensão desses aspectos da PQED oferece insights para aplicações práticas em materiais bidimensionais [39, 21].

Posteriormente, no mesmo capítulo, apresentamos uma contextualização histórica relevante da QED, destacando o termo de Maxwell-Podolsky em  $(3 + 1)D$ . Em 1952, Podolsky solucionou a limitação do problema da teoria de Maxwell, introduzindo no formalismo lagrangeano um termo massivo, denominado termo de Podolsky. Esse componente envolve o produto de derivadas dos tensores de Faraday, e, interessantemente, no  $a \rightarrow 0$ , recuperamos o formalismo lagrangeano da Eletrodinâmica de Maxwell.

Ao calcular o propagador utilizando o formalismo lagrangeano de Podolsky, obtivemos o campo de calibre da teoria. Observamos que, assim como na teoria de Maxwell, a de Podolsky também depende do termo de fixação de calibre. Porém, ao analisarmos, o polo da amplitude escalar, evidenciamos a presença de um modo massivo e outro não massivo. Essa abordagem, possibilita uma compreensão aprofundada sobre a natureza dos modos massivos e não massivos presentes na teoria.

No capítulo 3, detalhamos nosso método que segue uma analogia à obtenção do

termo de Chern-Simons via anomalia de paridade, começando com o cálculo do funcional utilizando a ação do campo de Dirac em (2+1)D no espaço Euclidiano, através do formalismo lagrangeano de Dirac. Obtendo uma expressão para o campo de calibre, substituímos  $J_\mu \rightarrow B_\mu$  de modo que  $B_\mu$  reproduza as mesmas funções de Green para  $N$  pontos que a teoria de Dirac para baixas energias. Em seguida, realizamos uma transformação de escala no campo de calibre. Esta transformação, expressa por  $B_\mu \rightarrow \sqrt{12m\pi\bar{B}_\mu}/e$ , onde  $B_\mu = 1/2$ , garante que o campo de calibre  $\bar{B}^\mu$  possua as mesmas dimensões do campo de Maxwell, considerando o termo de Maxwell-Podolsky. Dessa forma, evidenciamos que o termo de Podolsky é, fundamentalmente, inversamente proporcional à massa do campo fermiônico. Esta análise não apenas esclarece a relação entre os campos eletromagnéticos e fermiônicos, mas também destaca a influência do termo de Podolsky na dinâmica dos campos. . Essa parte, até onde sabemos, não foi discutida em nenhum trabalho e pretendemos levar esse resultado para publicação.

Prosseguindo com essa abordagem, na seção subsequente (3.2), apresentamos a interação estática de Maxwell-Podolsky em (2+1)D, calculando esse potencial por meio de duas partículas carregadas restritas ao plano bidimensional. Demonstra-se que o termo de calibre não influencia a interação estática devido à conservação de carga. Contudo, ao analisarmos a contribuição do termo de Podolsky  $a$ , verificamos sua relevância apenas para pequenas distâncias, eliminando a divergência logarítmica. Utilizamos as equações de Schwinger-Dyson como principal ferramenta, que constituem um método não-perturbativo na teoria de campos quânticos. Estas equações são uma série de equações integrais que descrevem todas as funções de Green de uma teoria de campos quânticos. Diferentemente dos métodos perturbativos, que expandem em séries de potências de um parâmetro pequeno (como a constante de acoplamento), as equações de Schwinger-Dyson permitem o estudo não-perturbativo dos fenômenos, capturando efeitos que ocorrem em todas as ordens de perturbação. Esse método é crucial para entender a geração dinâmica de massa e outras propriedades emergentes em teorias de campos quânticos. Essa análise evidencia a importância do termo de Podolsky em corrigir o comportamento de curto alcance na interação estática, proporcionando uma descrição mais precisa e regularizada das interações entre partículas carregadas em (2+1)D.

No capítulo 4, empreendemos a construção da geração de massa para elétrons de Dirac em (2 + 1)D. Inicialmente, determinamos as equações de Schwinger-Dyson para elétrons na aproximação rainbow-quenched, permitindo-nos analisar as teorias de calibre e as interações entre os campos fermiônicos de Dirac. Para isso, exploramos as interações entre fótons e férmions e a função de vértice no espaço Euclidiano em dimensão reduzida. Começamos utilizando as equações de Schwinger-Dyson para calcular a interação do fóton, incorporando todas as correções radiativas. Essas correções são essenciais para capturar os efeitos quânticos completos que afetam a propagação e a interação dos fótons. Posteriormente, examinamos as equações para o férmion  $e$ , para determinar a auto-energia

do elétron. Dentro dessa aproximação, conseguimos calcular a massa gerada para o elétron em função do termo de Podolsky tanto para a  $QED_3$  quanto para a PQED.

Portanto, a perspectiva futura desta dissertação sugere a busca por avanços na compreensão da geração dinâmica de massa para o elétron em  $(2 + 1)D$ . Especificamente, a consideração de melhores aproximações nas equações de Schwinger-Dyson é apontada como uma área promissora para investigação. Uma atenção particular deve ser dada à dependência da função de massa em relação ao momento  $p$ . Essa abordagem indica a necessidade de refinamentos nas análises teóricas, explorando de maneira mais detalhada como a função de massa do elétron pode variar em função do momento  $p$ .



# Apêndices





# APÊNDICE A – Potencial Bilocal e Equações de Schwinger-Dyson

As equações de Schwinger-Dyson fornecem informações detalhadas sobre a teoria quântica de um conjunto de partículas em interação.. Entretanto, sua solução exata não é, em geral, conhecida e assim devemos impor diversos tipos de aproximações. Em particular, a solução para momento externo zero serve para obter uma massa gerada  $M$  de forma, razoavelmente, simples. A derivação completa das equações de Schwinger-Dyson envolve o uso de identidades escritas no formalismo funcional, porém, aqui iremos utilizar a abordagem do potencial bilocal de Cahill-Roberts, discutida na Ref.[38].

A dedução via potencial bilocal funciona tanto para a QED quanto para a PQED, pois envolve apenas a estrutura tensorial de uma dada ação. Portanto, de forma esquemática, vamos partir da seguinte lagrangeana

$$L_D = \frac{1}{2}A_\mu D(x-y)A^\mu + GF + \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \quad (\text{A.1})$$

sendo que  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é o tensor intensidade do campo de calibre  $A_\mu$ ,  $\psi$  é o campo de Dirac sendo  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$  o seu campo adjunto,  $\gamma_\mu$  são as matrizes de Dirac na representação 4x4,  $GF$  representa o termo de fixação de calibre e  $e$  é constante de acoplamento. Note que  $D(x-y)$  é a amplitude escalar do propagador do campo de calibre e assume valores diferentes, dependendo do modelo que estamos estudando. Essa quantidade pode também incluir o efeito de diferentes termos, como o de Podolsky ou de Chern-Simons.

Nosso interesse é deduzir a equação de Schwinger-Dyson para o elétron, portanto, é suficiente discutir apenas sobre o funcional gerador  $Z[\bar{\eta}, \eta]$  das funções de Green do férmion. Essa quantidade é definida, no espaço Euclidiano, como

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = Z_0 \int D\bar{\psi}D\psi DA_\mu e^{-S_D[A_\mu, \psi]} e^{-\int d^3x(\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)}, \quad (\text{A.2})$$

sendo  $(\bar{\eta}, \eta)$  as fontes externas do campo de Dirac e  $Z_0$  uma constante arbitrária, tal que  $Z[0] = 1$ . Como a integral sobre o campo de calibre  $A_\mu$  é quadrática, esta pode ser resolvida exatamente com o auxílio da identidade[1]

$$\int DA_\mu e^{-\int d^3x[A_\mu D(x-y)A^\mu + J_\mu A^\mu]} = [\det D]^{-1/2} e^{\frac{1}{2} \int d^3x d^3y J_\mu D(x-y)J^\mu}. \quad (\text{A.3})$$

Assim, obtemos

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = \int D\bar{\psi}D\psi \exp\left\{-\int d^3x d^3y [\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(y)\delta^3(x-y) + \frac{e^2}{2}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(y)D(x-y)\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(y)] - \int d^3x(\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)\right\}. \quad (\text{A.4})$$

Essa quantidade fornece todas as funções de Green do férmion, calculadas sem o efeito de polarização do vácuo no propagador do campo de calibre. Isso ficará evidente na solução final dessa seção. Apesar de ser interessante, o resultado da Eq. (A.4) não é prático. Por isso, buscaremos uma forma mais simplificada para a função de Green de 2 pontos do elétron.

Primeiro, notando que a física não é modificada ao multiplicarmos o funcional gerador por uma constante  $Z_0$  porque a integral no espaço tridimensional de uma expressão que normaliza a teoria de campos resulta em um valor escalar, ou seja, integrar as funções sobre todo o espaço, obtemos um valor constante que não depende das variáveis específicas  $xey$  garante que  $Z_0$  seja uma constante, então nós fazemos  $Z[\bar{\eta}, \eta] \rightarrow Z_0 Z[\bar{\eta}, \eta]$  com

$$Z_0 = \int DB^\mu \exp\left\{-\int d^3x d^3y \frac{-e^2 D(x-y)(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(y) + B^\mu(x,y)/e^2 D(x-y))^2}{2}\right\}. \quad (\text{A.5})$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} Z[\bar{\eta}, \eta] &= \int D\bar{\psi} D\psi DB^\mu \exp\left\{-\int d^3x d^3y [\bar{\psi}(x)[(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\delta^3(x-y) - \gamma^\mu B_\mu(x,y)]\psi(y) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{B^\mu(x,y)B_\mu(x,y)}{e^2 D(x-y)}\right] - \int d^3x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)\}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Aqui, é importante notar que  $B_\mu(x,y)$  é o campo bilocal que nomeia esse método. Graças a sua inclusão, conseguimos tornar a equação no campo fermiônico quadrática e, portanto, solúvel. A identidade relevante aqui é a integral Gaussiana fermiônica, dada por [24]

$$\int D\bar{\psi} D\psi e^{-\int d^3x [\bar{\psi} K \psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta]} = [\det K] e^{-\int d^3x d^3y \bar{\eta}(x) K^{-1}(x-y)\eta(y)}. \quad (\text{A.7})$$

Usando a Eq. (A.7) na Eq. (A.6), temos

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = \int DB^\mu \exp\left\{-\int dx dy \left[\frac{1}{2} \frac{B^\mu(x,y)B_\mu(x,y)}{e^2 D(x-y)}\right]\right\} (\det G_B) \exp\left\{-\int d^3x d^3y \bar{\eta}(x) G_B^{-1}(x-y)\eta(y)\right\}, \quad (\text{A.8})$$

sendo que definimos a quantidade bilocal, relacionada ao campo  $B$ , dada por

$$G_B(x,y) = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\delta^3(x-y) - \gamma^\mu B_\mu(x,y). \quad (\text{A.9})$$

Usando que  $\det G_B = \exp\{Tr \ln G_B\}$ , encontramos

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = \int DB^\mu e^{-S[B]} \exp\left\{-\int dx dy \bar{\eta}(x) G_B^{-1}(x-y)\eta(y)\right\}, \quad (\text{A.10})$$

sendo que a ação do campo bilocal é

$$S[B] = \frac{1}{2} \frac{B^\mu(x,y)B_\mu(x,y)}{e^2 D(x-y)} - Tr \ln\{(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\delta^3(x-y) - \gamma^\mu B_\mu(x,y)\}. \quad (\text{A.11})$$

Essa equação tem interpretação interessante. Note que, essencialmente, ainda temos o mesmo funcional gerador mas agora em termos de flutuações sobre o campo bilocal  $B_\mu(x,y)$

ao invés do campo de Dirac  $\psi(x)$ . Isso não necessariamente torna o problema mais simples, entretanto, para calcular a função de Green de 2 pontos, podemos simplesmente calcular a equação de movimento do campo bilocal, como veremos a seguir e, nesse caso, teremos uma relativa simplificação do problema.

A seguir, nós calculamos a equação de movimento do campo bilocal, usando a Eq. (A.11). Assim, temos

$$\frac{\delta S[B]}{\delta B^\mu(x, y)} \Big|_{B=B_{cl}} = 0, \quad (\text{A.12})$$

sendo que  $B = B_{cl}$  significa a aproximação clássica para a teoria do campo bilocal  $B^\mu(x, y)$ . Portanto,

$$0 = \frac{B_{cl}^\mu(x, y)}{e^2 D(x-y)} - Tr \frac{e^2 \gamma^\mu}{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\delta^3(x-y) - \gamma_\mu B_{cl}^\mu(x, y)}. \quad (\text{A.13})$$

Finalmente,

$$B_{cl}^\mu(x, y) = e^2 D(x-y) Tr \frac{\gamma^\mu}{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\delta^3(x-y) - \gamma_\mu B_{cl}^\mu(x, y)}. \quad (\text{A.14})$$

A Eq. (A.14) é extremamente relevante, pois fornece uma espécie de vínculo para o campo auxiliar. Com efeito, quando usamos o campo bilocal nós, essencialmente, eliminamos uma interação tipo corrente-corrente não local. Porém, como se sabe, todo campo auxiliar deve ter uma equação vinculando o seu valor, pois este não pode ser arbitrário. A seguir, vamos apenas retornar as variáveis desejadas.

Pela amplitude  $G_B$  na Eq. (A.9), concluímos que a auto-energia do elétron  $\Sigma(p)$  é dada por

$$\Sigma(p) = \int d^3(x-y) e^{ip(x-y)} B_{cl}^\mu(x, y) \gamma_\mu. \quad (\text{A.15})$$

Por outro lado, usando a Eq. (A.14) na Eq. (A.15), temos

$$\Sigma(p) = \int d^3(x-y) e^{ip(x-y)} \gamma^\mu \langle x-y | D(x-y) \frac{1}{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\delta^3(x-y) - \gamma_\mu B_{cl}^\mu(x, y)} | x-y \rangle \gamma_\mu. \quad (\text{A.16})$$

A seguir, usamos

$$D(x-y) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{-iq(x-y)} D(q), \quad (\text{A.17})$$

sendo que  $D(q)$  é a transformada de Fourier de  $D(x-y)$ . Portanto,

$$\frac{1}{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\delta^3(x-y) - \gamma_\mu B_{cl}^\mu(x, y)} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-ik(x-y)} \frac{1}{\gamma^\nu k_\nu - \Sigma(k)}, \quad (\text{A.18})$$

Usando esses resultados na Eq. (A.16), nós encontramos uma equação integral dada por

$$\int d^3(x-y) e^{i(p-k-q)(x-y)} \langle x-y | 1 | x-y \rangle = (2\pi)^3 \delta(p-k-q), \quad (\text{A.19})$$

garantindo a conservação do momento. Definindo que  $q = p - k$ , temos

$$\Sigma(p) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^2} \gamma^\mu \frac{1}{\gamma^\nu k_\nu - \Sigma(k)} \gamma_\mu D(p-k) \quad (\text{A.20})$$

a auto-energia do elétron.

Notando que  $\Sigma(p) = S_F^{-1}(p) - S_{0F}^{-1}(p)$ , com  $S_{0F}^{-1}(p) = \gamma^\mu p_\mu$ , temos

$$S_F^{-1}(p) - S_{0F}^{-1}(p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2} \gamma^\mu S_F(k) \gamma_\mu D(p-k), \quad (\text{A.21})$$

a equação de Schwinger-Dyson para o propagador do elétron em sua forma unquenched-rainbow, ou seja, sem correção de vértice e sem correção ao propagador do campo de calibre. Além disso, note que essa equação está escrita no calibre de Feynman ao contrário do calibre de Landau, que é normalmente usado nesse regime de aproximação. Entretanto, a generalização para outro calibre é imediata e razoavelmente óbvia. Apesar dessas limitações, é bastante interessante concluir que o formalismo bilocal fornece uma equação tão relevante, usando, essencialmente, apenas integrações Gaussianas.

# APÊNDICE B – Integral Fermiônica do Formalismo Funcional

Nessa seção discutimos alguns elementos básicos sobre o formalismo funcional que são relevantes para se compreender os resultados obtidos no capítulo 3. Em particular, vamos definir com maior precisão o que é um gerador funcional, a integral fermiônica e o método de bosonização. Vamos partir de uma lagrangeana genérica para um campo fermiônico  $\psi$ , dada por

$$L_M = \bar{\psi} K \psi, \quad (\text{B.1})$$

sendo que  $K$  é um operador diferencial qualquer. Por exemplo, se  $K = i\gamma_\mu \partial^\mu$ , temos a teoria de Dirac sem massa. Note que a Eq. (B.1) representa uma ação quadrática e, por isso, esperamos que o modelo seja exatamente solúvel. Para evidenciar isso, podemos definir o funcional gerador  $Z$  do modelo dado por

$$Z = \int D\bar{\psi} D\psi e^{-\int d^3x L_M} = \int D\bar{\psi} D\psi e^{-\int d^3x \bar{\psi} K \psi}. \quad (\text{B.2})$$

Usando a tabela de integração funcional para um campo fermiônico, temos[43]

$$Z = \int D\bar{\psi} D\psi e^{-\int d^3x \bar{\psi} K \psi} = \det K = e^{\text{Tr} \ln K}, \quad (\text{B.3})$$

sendo que no último passo usamos a propriedade  $\ln \det A = \text{Tr} \ln A$  em que  $A$  é uma matriz qualquer. A Eq. (B.3) é suficiente para mostrar que o modelo quadrático é exato. Uma consequência disso é que todas as funções de Green são conhecidas, em particular, as funções de correlação corrente-corrente, por exemplo,  $\langle j_\mu \rangle$  e  $\langle j_\mu j_\nu \rangle$ . Para quantificar isso, devemos definir um funcional gerador para essas funções de correlação.

O funcional gerador para as funções de correlação corrente-corrente é dado por

$$Z_\psi[J] = \rho \int D\bar{\psi} D\psi e^{-\int d^3x \bar{\psi} K \psi + \int d^3x j_\mu J^\mu}, \quad (\text{B.4})$$

sendo  $\rho$  uma constante arbitrária definida de tal modo que  $Z[0] = 1$ . Nesse ponto devemos reescrever a corrente  $j_\mu$  em termos do campo  $\psi$ . No caso de uma teoria de Dirac, temos  $j_\mu = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$  e  $K = i\gamma_\mu\partial^\mu - m$ . Conforme visto no capítulo 3, resolvendo a integração fermiônica, temos

$$Z_\psi[J] = \rho \det[i\gamma_\mu\partial^\mu - m + e\gamma^\mu J_\mu] = \det[1 + e\gamma^\nu J_\nu(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)^{-1}], \quad (\text{B.5})$$

o que determina completamente o funcional gerador. Por outro lado, as funções de correlação são diretamente obtidas a partir das derivadas funcionais com relação a  $J_\mu$ .

Com efeito, na teoria quântica, o valor esperado de um observador  $O$  qualquer, dentro do formalismo funcional é dada por

$$\langle O \rangle = \int D\bar{\psi} D\psi e^{-\int d^3x \bar{\psi} K \psi} O. \quad (\text{B.6})$$

Portanto, por exemplo, se  $O = j_\mu j_\nu$ , temos

$$\langle j_\mu j_\nu \rangle = \int D\bar{\psi} D\psi e^{-\int d^3x \bar{\psi} K \psi} j_\mu j_\nu = \frac{1}{Z_\psi[0]} \frac{\delta^2 Z_\psi[J]}{\delta J^\mu \delta J^\nu} \Big|_{J=0}. \quad (\text{B.7})$$

Note que a divisão por  $Z_\psi[0]$  serve apenas para eliminar a constante  $\rho$ . Esse resultado mostra, novamente, que temos total conhecimento sobre um modelo fermiônico que é até quadrático em seus campos básicos, como esperado.

A ideia de bosonização consiste apenas em assumir que existe uma outra teoria quadrática, mas em um campo bosônico, que gera as mesmas funções de correlação corrente-corrente. Para isso, basta impor que  $Z_\psi[J] = Z_B[J]$ , sendo  $B$  algum campo bosônico. A bosonização em si não é relevante para nossos propósitos nessa dissertação. Vale a pena, por outro lado, ressaltar que o termo de Podolsky gerado pela expansão do tensor de polarização no limite de grandes massas é uma sinalização de que a bosonização de férmions massivos induz um termo de Podolsky.

# Referências

- 1 NASCIMENTO, L. O. do. *Electronic Interactions in Graphene*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2015. Citado 6 vezes nas páginas [13](#), [22](#), [43](#), [49](#), [53](#) e [61](#).
- 2 RIBEIRO, C. W. F. Existência de solução positiva para uma classe de problemas p&q elpticos com expoente critico enao linearidade descontinua. Citado 2 vezes nas páginas [13](#) e [49](#).
- 3 BEZERRA, V. A. Racionalidade, consistência, reticulação e coerência: o caso da renormalização na teoria quântica do campo. *Scientiae Studia*, SciELO Brasil, v. 1, p. 151–181, 2003. Citado 3 vezes nas páginas [21](#), [25](#) e [26](#).
- 4 KAKU, M.; GREENBERG, O. *Quantum field theory: a modern introduction*. [S.l.]: Oxford university press New York, 1993. v. 5. Citado 4 vezes nas páginas [21](#), [26](#), [27](#) e [29](#).
- 5 MARINO, E. C. *Quantum field theory approach to condensed matter physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. Citado 2 vezes nas páginas [21](#) e [22](#).
- 6 MARINO, E. Quantum electrodynamics of particles on a plane and the chern-simons theory. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 408, n. 3, p. 551–564, 1993. Citado 4 vezes nas páginas [22](#), [32](#), [41](#) e [42](#).
- 7 PAZ, W. S. Estudo de vacâncias em grafeno via cálculos de primeiros princípios. Citado na página [22](#).
- 8 ROBERTS, C. D.; WILLIAMS, A. G. Dyson-schwinger equations and their application to hadronic physics. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, Elsevier, v. 33, p. 477–575, 1994. Citado 4 vezes nas páginas [23](#), [32](#), [48](#) e [50](#).
- 9 MAXWELL, J. C. et al. On physical lines of force. *Philosophical Magazine: Structure And Properties Of Condensed Matter.*, v. 90, p. 11, 2010. Citado 2 vezes nas páginas [23](#) e [35](#).
- 10 HERDY, W. M. A eletrodinâmica de maxwell-proca e o fóton massivo. Citado 2 vezes nas páginas [23](#) e [24](#).
- 11 ROCHA, J. F. *Origens e evolução das idéias da física*. [S.l.]: SciELO-EDUFBA, 2002. Citado na página [24](#).
- 12 HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de física. Vol. I*. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2016. Citado na página [25](#).
- 13 NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica: Eletromagnetismo (vol. 3)*. [S.l.]: Editora Blucher, 2015. v. 3. Citado na página [25](#).
- 14 ARRUDA, S. de M.; VILLANI, A. Sobre as origens da relatividade especial: relações entre quanta e relatividade em 1905. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 13, n. 1, p. 32–46, 1996. Citado na página [25](#).

- 15 MARTINS, R. d. A. Física e história. *Ciência e Cultura*, Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, v. 57, n. 3, p. 25–29, 2005. Citado na página 25.
- 16 KINOSHITA, T. *Quantum electrodynamics*. [S.l.]: World Scientific, 1990. v. 7. Citado na página 26.
- 17 GRIFFITHS, D. et al. *Introduction to elementary particles*. [S.l.]: John Wiley e Sons, Inc., 1987. v. 1. Citado na página 27.
- 18 KITTEL, C. *Introdução À Física Do Estado Sólido*. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000. Citado na página 27.
- 19 WILCZEK, F. Quantum mechanics of fractional-spin particles. *Physical Review Letters*, APS, v. 49, n. 14, p. 957, 1982. Citado na página 28.
- 20 HUSE, D. A.; ELSER, V. Anyons in an exactly solved model and beyond. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 17, n. 5, p. L171, 1984. Citado na página 28.
- 21 MARINO, E. Quantum field theory in 2+ 1 dimensions. *Particles And Fields- Proceedings Of The Ixth Jorge Andre Swieca Summer School*, World Scientific, p. 196, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 32, 36 e 55.
- 22 SPIEGEL, M. R.; LIPSCHUTZ, S.; LIU, J. *Schaum's Outlines: Mathematical Handbook of Formulas and Tables*. [S.l.]: McGraw-Hill, 2009. v. 2. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- 23 SILVA, A. E. da. *O potencial de interação entre duas partículas carregadas na Eletrodinâmica Quântica D-dimensional e na Pseudo-Eletrodinâmica Quântica na aproximação de 1-loop*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Faculdade de Física, Belém, 2021. Citado na página 33.
- 24 PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 35, 41 e 62.
- 25 NETO, A. H. C. et al. The electronic properties of graphene. *Reviews of Modern Physics*, American Physical Society, v. 81, n. 1, p. 109–162, 2009. Citado na página 35.
- 26 SARMA, S. D. et al. Electronic transport in two-dimensional graphene. *Reviews of Modern Physics*, American Physical Society, v. 83, n. 2, p. 407–470, 2011. Citado na página 35.
- 27 BEZERRA, V. A. Maxwell, a teoria do campo e a desmecanização da física. *Scientiae Studia*, SciELO Brasil, v. 4, p. 177–220, 2006. Citado na página 35.
- 28 MAXWELL, J. C. Xxv. on physical lines of force: Part i.—the theory of molecular vortices applied to magnetic phenomena. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor & Francis, v. 21, n. 139, p. 161–175, 1861. Citado na página 35.
- 29 THIDÉ, B. *Electromagnetic field theory*. Swedish Institute of Space Physics Uppsala, Sweden, 2009. Citado na página 36.



- 30 FRAMPTON, P. H. *Gauge field theories*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. Citado na página 36.
- 31 ORTEGA, P. H. A pseudo eletrodinâmica de podolsky. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.
- 32 WEINBERG, S. *Foundations of modern physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2021. Citado na página 41.
- 33 MAGALHÃES, G. C. et al. Bosonization, mass generation, and the pseudo-cherne-simons action. *Physical Review D*, APS, v. 103, n. 11, p. 116022, 2021. Citado na página 42.
- 34 ALVES, V. S. et al. Bounded particle interactions driven by a nonlocal dual chern-simons model. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 797, p. 134860, 2019. Citado na página 42.
- 35 ZEE, A. *Quantum Field Theory in a Nutshell*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2010. Citado na página 43.
- 36 NETO, A. C. et al. The electronic properties of graphene. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 81, n. 1, p. 109, 2009. Citado na página 44.
- 37 CHHOWALLA, M. et al. The chemistry of two-dimensional layered transition metal dichalcogenide nanosheets. *Nature chemistry*, Nature Publishing Group, v. 5, n. 4, p. 263–275, 2013. Citado na página 44.
- 38 BURDEN, C. Bound states from the bethe-salpeter equation in qed3. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 387, n. 2, p. 419–446, 1992. Citado 3 vezes nas páginas 47, 48 e 61.
- 39 MARINO, E. et al. Interaction induced quantum valley hall effect in graphene. *Physical Review X*, APS, v. 5, n. 1, p. 011040, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 47, 54 e 55.
- 40 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Mecânica quântica moderna*. [S.l.]: bookman, 2013. Citado na página 47.
- 41 GOMEZ, E. C. *Simulação da equação de Dirac em eletrodinâmica quântica de cavidades*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2015. Citado na página 47.
- 42 GOMES, M. O. C. *Teoria Quântica dos Campos Vol. 39*. [S.l.]: Edusp, 2002. Citado na página 48.
- 43 ITZYKSON, C.; ZUBER, J.-B. *Quantum field theory*. [S.l.]: Courier Corporation, 2006. Citado na página 65.