



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



PROFMAT

Lucivaldo José de Andrade Pereira

Grafos no Ensino Básico: da compreensão de tecnologias contemporâneas ao desenvolvimento socioemocional

Campina Grande - PB

23 de agosto de 2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



PROFMAT

Lucivaldo José de Andrade Pereira

Grafos no Ensino Básico: da compreensão de tecnologias contemporâneas ao desenvolvimento socioemocional

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Marcelo Carvalho Ferreira

Campina Grande - PB
23 de agosto de 2024

P436g

Pereira, Lucivaldo José de Andrade.

Grafos no ensino básico: da compreensão de tecnologias contemporâneas ao desenvolvimento socioemocional / Lucivaldo José de Andrade Pereira. – Campina Grande, 2024.

111 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.

"Orientação: Prof. Dr. Marcelo Carvalho Ferreira".

Referências.

1. Grafos. 2. Matemática Aplicada. 3. Tecnologias. 4. Algoritmos.
5. Desenvolvimento Socioemocional. I. Ferreira, Marcelo Carvalho.
II. Título.

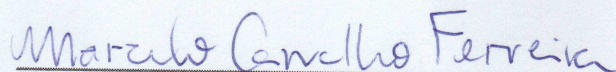
CDU 519.17(043)

Lucivaldo José de Andrade Pereira

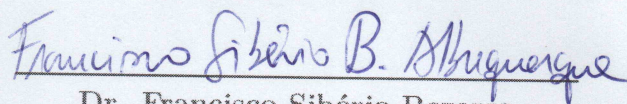
**Grafos no Ensino Básico: Uma Proposta; da
compreensão de tecnologias contemporâneas, ao
desenvolvimento socioemocional**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

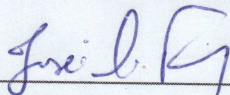
Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 23 de outubro de 2024:



Dr. Marcelo Carvalho Ferreira
Orientador - UFCG



Dr. Francisco Sibério Bezerra
Albuquerque
Membro Externo - UEPB



Dr. José de Arimatéia Fernandes
Membro Interno - UFCG

Campina Grande - PB
23 de agosto de 2024

Dedico este trabalho a minha família e amigos, pois sem estes seres colocados por Deus ao nosso lado, as conquistas não proporcionariam felicidade com sentimento de completude.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que em sua plenitude e glória nos abençoou com o dom da vida e todas as conquistas que vieram a permeiar essa vivência até aqui.

Em segundo lugar, externo minha gratidão aos professores, os quais compartilharam conhecimentos e nos conduziram na caminhada entre nosso anseio de aprender e os conhecimentos que nos eram necessários para completarmos o curso. Assim sendo, expresso minha profunda gratidão aos professores: Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho, Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho, Dr. José de Arimatéia Fernandes, Dr. José Fernando Leite Aires, Dr. Leomaques Francisco Silva Bernardo, Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros e Dr. Marcelo Carvalho Ferreira.

Fomos acolhidos de maneira singular e assistidos com muita solicitude e dedicação. Por isso, deixo meus agradecimentos ao ex-coordenador do curso, o professor Dr. Romildo Nascimento de Lima, que sempre nos acompanhou com muita prontidão, carinho e respeito. De modo totalmente análogo, estendo estes agradecimentos à atual coordenadora do programa, a professora Dra. Deise Mara Barbosa de Almeida.

Agradeço profundamente ao professor do curso e orientador, Dr. Marcelo Carvalho Ferreira, pelas muitas horas dedicadas. Apesar dos tantos afazeres e das sobrecargas geradas por este trabalho, sempre mostrou-se compreensivo, prestativo e amigável.

Meus agradecimentos aos membros da banca, Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque e Dr. José de Arimatéia Fernandes, por terem aceitado avaliar este trabalho e dar-me a oportunidade de melhorá-lo com suas valiosas contribuições.

Expresso também sincera gratidão à minha esposa, Érica Santos de Souto Andrade, mãe de nossas duas princesas, Eduarda e Luana, pelo companheirismo em todos os momentos, inclusive no transcorrer dessa etapa.

À minha mãe, Rita Gomes de Andrade Pereira, sempre presente e apoiando nas realizações de minhas aspirações.

Ao meu irmão, Luís Antônio de Andrade Pereira, primeira inspiração na família. Sempre ajudou a reconhecermos nos estudos uma forma de enfrentar algumas das difíceis situações impostas pela vida. Alguém que pude contar sempre. Além de amigo, incentivador todo o tempo. Por tudo isso, minha gratidão.

Ao meu pai, Luiz Pereira Sobrinho, que, ao seu modo, também deu o apoio que precisava para me manter e finalizar o curso.

Deixo meus profundos agradecimentos aos amigos de curso: Alexandre José, Antônia Fabrícia, Antônio Marcos, Emídio Marques, Flávia Shirley, Geovane Tavares, Mozart William, Pedro Valentim, Rejane Ângela, Renan Rodrigues, Renato Machado, Ruth Micaely, Silvana Oliveira, Thiago dos Santos e Tiago Emanuel.

Reitero meus agradecimentos aos amigos, Renato Machado e Antônio Marcos. A este, pois tive a honra de o receber em minha casa diversas vezes, de onde seguimos e desfrutamos de divertidas viagens até a universidade. A Renato, pois, pude hospedar-me em sua casa algumas vezes, onde fui tratado com muito respeito e solicitude, além disso, sempre prestado para com todos. Agradeço novamente a Geovane Tavares, sempre disposto a contribuir nos ajudando, fosse em situações relacionadas à aprendizagem, fosse em situações de áreas pessoais. Constantemente pudemos compartilhar boas conversas.

Minha gratidão também à secretária Isabela, por toda sua prestatividade nos auxiliando durante o curso.

Expresso ainda minha gratidão, na pessoa de Claudiana Albuquerque Araújo (Aninha), aos demais funcionários, pois fomos sempre recebidos com alegria e consideração.

Ao longo deste curso, pude confirmar mais uma vez que a amizade verdadeira não depende do tempo de permanência, mas da forma com a qual as pessoas demonstram ser leais e interessadas no crescimento umas das outras. Pude conviver, em viagens, com algumas pessoas que considero amigos: João Evair, Márcio Santos, Ruth Mikaely e Tiago Emanuel, aos quais direciono meus sinceros agradecimentos.

A todos os amigos que, de uma forma ou de outra, contribuíram com o apoio e incentivaram para a conclusão desta etapa.

À CAPES, pois seu apoio financeiro foi fundamental nesta conquista.

*"O Reino dos céus é semelhante a um grão de mostarda . . .
o qual é realmente a menor de todas as sementes;
mas, crescendo, é a maior das plantas e faz-se uma árvore,
de sorte que vêm as aves do céu e se aninham nos seus ramos."
(Bíblia Sagrada, Mateus 13, 31).*

Resumo

O presente trabalho tem a proposta de apresentar uma parte introdutória, mas significativamente consistente, da teoria dos grafos aos professores do Ensino Básico com finalidade de ser uma sugestão para a sala de aula de matemática, procurando acompanhar um pouco do dinamicismo imposto pelas transformações tecnológicas correntes. Com esse fim, realizamos uma pesquisa bibliográfica (livros, artigos e internet) resultante em um apanhado de conceitos introdutórios à teoria dos grafos, que consideramos suficientes para dar suporte ao desenvolvimento da sequência didática que propomos. Além do mais, exploramos a modelagem, de maneira simplificada, de alguns aplicativos e sites de redes sociais, por meio do uso de grafos, implementando com a ideia de algoritmos de recomendação. Buscamos assim promover um alerta aos estudantes, visto que, tais algoritmos cada vez mais influenciam no modo com o qual interagimos ao navegar. A ideia de tais algoritmos é introduzida a partir da apresentação de outros tipos de algoritmos, por exemplo, o Algoritmo de Dijkstra. Finalizamos com uma proposta de sequência didática, na qual alguns conceitos básicos sobre grafos são abordados e há um direcionamento para um diálogo sobre algoritmos de recomendação e navegação em aplicativos de redes sociais, o que consideramos uma tentativa de contribuição para o desenvolvimento socioemocional dos estudantes, pois, com isso, há a possibilidade do desenvolvimento da consciência crítica sobre si e os demais de seu grupo social.

Palavras-chave: Grafos. Tecnologias. Algoritmos. Desenvolvimento socioemocional.

Abstract

The present work aims to present an introductory, but significantly consistent, part of graph theory to Basic Education teachers with the purpose of being an suggestion for the mathematics classroom, trying to accomplish some of the dynamism imposed by current technological transformations. To this end, we have performed a bibliographical research (books, articles and internet) resulting in a collection of introductory concepts to graph theory, which we consider sufficient to support the development of the didactic sequence proposed. Furthermore, we have explored the modeling, in a simplified way, of some applications and social networking sites, through the use of graphs, implementing the idea of recommendation algorithms, in order to promote an alert to students, given that such algorithms influence, more and more, the way we interact when browsing. The idea of such algorithms is introduced from the study of other types of algorithms, for example, the Dijkstra Algorithm. We finished with a proposal for a didactic sequence, in which some basic concepts about graphs are addressed and there is a direction for a dialogue about recommendation algorithms and browsing in social network applications, which we consider an attempt to contribute to the socio-emotional development of students, dueto the possibility of developing critical awareness about themselves and others in their social group.

Keywords: Graphs. Technologies. Algorithms. Socio-emotional.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Königsberg do século XVI	20
Figura 2 – Esquema das sete pontes	20
Figura 3 – Leonhard Euler	21
Figura 4 – Grafo de Euler para as pontes de Königsberg	21
Figura 5 – Francis Guthrie	22
Figura 6 – Mapa colorido com 4 cores	23
Figura 7 – Grafo com 4 cores modelando a coloração do mapa	24
Figura 8 – Grafo simples	27
Figura 9 – Grafo com laços	27
Figura 10 – Multigrafo	28
Figura 11 – Grafos Isomorfos	29
Figura 12 – Grafos não isomorfos	30
Figura 13 – Grafo orientado	31
Figura 14 – Grafo simétrico completo	31
Figura 15 – Grafo não orientado	32
Figura 16 – Esquema Matriz de Adjacência	33
Figura 17 – Grafo orientado valorado	34
Figura 18 – Grafo conexo	37
Figura 19 – Grafo desconexo	37
Figura 20 – Grafos desconexos	38
Figura 21 – Grafo sf-conexo	38
Figura 22 – Grafo f-conexo	39
Figura 23 – Grafo reduzido	39
Figura 24 – Grafos k-conexos	41
Figura 25 – Grafos complementares	42
Figura 26 – Grafos complementares orientados	42
Figura 27 – Subgrafo H de G	44
Figura 28 – Subgrafo induzido	44
Figura 29 – Vizinhança grafo não orientado	45
Figura 30 – Vizinhança grafo orientado	46
Figura 31 – Grafos para sequência de graus	46
Figura 32 – Grafos regulares	47
Figura 33 – Grafo bipartido	47
Figura 34 – Grafo bipartido completo	48
Figura 35 – Grafo G bipartido e H não bipartido	49

Figura 36 – Bipartição de G	49
Figura 37 – Árvore/floresta	50
Figura 38 – Grafo euleriano	52
Figura 39 – Grafo semieuleriano	52
Figura 40 – Grafos coloridos	53
Figura 41 – Quatro cavalos	55
Figura 42 – Movimento do cavalo	56
Figura 43 – Grafo associado ao movimento de um dos cavalos	56
Figura 44 – Grafo representação do tabuleiro	57
Figura 45 – Grafo de Euler	58
Figura 46 – Árvore de possibilidades	59
Figura 47 – Rota Maps	60
Figura 48 – Grafo orientado valorado (Algoritmo de Dijkstra)	61
Figura 49 – Grafo não-orientado valorado (Algoritmo de Dijkstra)	65
Figura 50 – Árvore resultante menor caminho (Algoritmo de Dijkstra)	69
Figura 51 – Grafo completo não-orientado	70
Figura 52 – Grafos complementares (Hexágono regular/ Diagonais)	70
Figura 53 – Grafo colorido	71
Figura 54 – Cruzamento de vias	72
Figura 55 – Grafo colorido cruzamento de vias	72
Figura 56 – Algoritmo de coloração	73
Figura 57 – Símbolo de compartilhamento	74
Figura 58 – Grafo de representação de rede social	75
Figura 59 – Grafo modelo de rede social	75
Figura 60 – Grafo Semieuleriano	77
Figura 61 – Caminho semieuleriano	78
Figura 62 – GPS	79
Figura 63 – Sistemas de recomendação	81
Figura 64 – Notícia: Culpa do Algoritmo	81
Figura 65 – Notícia: Especialista alerta para ameaça dos algoritmos	82
Figura 66 – Quatro pilares da educação	83
Figura 67 – Habilidade 6º Ano BNCC	85
Figura 68 – Habilidade Ensino Médio BNCC	86
Figura 69 – Esquema quatro cidades (Sequência didática)	89
Figura 70 – Grafo para cobrir (Sequência didática)	90
Figura 71 – Grafos isomorfos (Sequência didática)	91
Figura 72 – Grafos Bipartido e Não Bipartido (Sequência didática)	92
Figura 73 – Grafos Bipartidos e Não Bipartidos (Sequência didática)	92

Figura 74 – Grafos k-regular (Sequência didática)	93
Figura 75 – Caminho mínimo polícia/loja de joias (Sequência didática)	93
Figura 76 – Caminho mínimo(Sequência didática)	94
Figura 77 – Poliedros Regulares (Sequência didática)	94
Figura 78 – Esfera em Oito Partes (Sequência didática)	95
Figura 79 – Árvore de Possibilidades (Sequência didática)	95
Figura 80 – Coloração de grafos (Sequência didática)	96
Figura 81 – Grafo Árvore (Sequência didática)	96
Figura 82 – Navegação no formulário (Sequência didática)	97
Figura 83 – Exemplo de caminho do formulário (Sequência didática)	97

Lista de tabelas

Tabela 1 – Lista de adjacência grafo 15	32
Tabela 2 – Lista de adjacência grafo orientado	33
Tabela 3 – Matriz de adjacência	34
Tabela 4 – Matriz de adjacência grafo orientado	34
Tabela 5 – Matriz de incidência	35
Tabela 6 – Matriz de incidência grafo orientado	36
Tabela 7 – Tabela de distância entre vértices figura 48 (Algoritmo de Dijkstra)	61
Tabela 8 – Matriz de Adjacência grafo algoritmo de Dijkstra	64
Tabela 9 – Matriz de Adjacência do grafo não orientado da Fig: 49.	69

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Objetivos	16
1.2	Organização	17
2	UM BREVE PASSEIO PELA HISTÓRIA DOS GRAFOS	19
2.1	Leonhard Euler e a cidade de Königsberg século XVIII	19
2.2	O problema das quatro cores	22
2.3	Grafos na atualidade	24
3	CONCEITOS BÁSICOS	25
3.1	Isomorfismo	28
3.2	Digrafos	30
3.3	Representação por Matrizes	31
3.3.1	Matriz de Adjacência	33
3.3.2	Matriz de Incidência	35
3.4	Conexidade	36
3.5	Conectividade	40
3.6	Tipos Especiais de Grafos	42
3.6.1	Grafo Complementar	42
3.6.2	Subgrafo	43
3.6.3	Vizinhança	44
3.6.4	Grafo bipartido	47
3.6.5	Árvores	49
3.7	Um Pouco de Grafos Eulerianos	50
3.8	Subconjuntos independentes	52
4	APLICAÇÃO DE GRAFOS	55
4.1	O problema dos quatro cavalos	55
4.2	Retorno ao vértice inicial: as sete pontes de Königsberg	57
4.3	Aplicação de árvores à probabilidade	58
4.4	Problemas de caminho mínimo	60
4.4.1	Algoritmo de Dijkstra	61
4.4.2	Qual o menor caminho até a escola?	65
4.5	Grafos completos e polígonos convexos	69
4.6	Aplicações de Coloração	71

4.7	Grafos em aplicativos e sites de redes sociais	73
5	PROPOSTA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	76
5.1	A teoria dos grafos	76
5.2	Algoritmos computacionais	79
5.3	Desenvolvimento socioemocional do estudante	80
6	SEQUÊNCIA DIDÁTICA	85
6.1	Aplicação e análise	85
6.2	Sequência Didática	87
6.2.1	Primeiro encontro: Introdução ao tema grafos	88
6.2.2	Segundo encontro: Desenvolvimento das noções básicas de grafos	91
6.2.3	Terceiro encontro: Desenvolvimento das noções básicas de grafos e aplicações a problemas	92
6.2.4	Quarto encontro: Aplicação do formulário e discussão sobre navegação na rede	96
6.3	Análise da aplicação da sequência	98
7	CONCLUSÕES	102
	REFERÊNCIAS	104
	APÊNDICES	105
	APÊNDICE A – APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	106
A.1	Slides utilizados na conversa-orientação	107
	APÊNDICE B – SUGESTÕES DE EXERCÍCIOS	108

1 Introdução

Nunca antes na história da humanidade, as transformações tecnológicas foram tão intensas e com influência direta no cotidiano da maioria das pessoas. Podemos afirmar que o avanço da matemática é um dos principais impulsionadores neste processo de mudanças. Desse modo, vemos o mundo contemporâneo cada vez mais dependente da matemática, que passa a relacionar-se intrinsecamente com as outras áreas do conhecimento. Isso é suficiente para que possamos aspirar por um ensino de matemática na escola básica, contextualizado e dinâmico, não apenas com aspectos teóricos, contudo, voltado à compreensão do desenvolvimento da matemática entrelaçado às necessidades humanas no decorrer da história.

Infelizmente, no Ensino Básico, pouco, ou nada, se conhece sobre a teoria dos grafos, salvo aplicação e interpretação de fluxogramas e estudo sobre diagramas de árvores, cujas habilidades são apontadas no texto da BNCC, e que, quase sempre são estudados sem o conhecimento de tratar-se de grafos.

Neste trabalho, buscamos apresentar uma breve introdução à teoria dos grafos e propor uma sequência didática como uma alternativa à qual o professor de matemática do Ensino Básico possa recorrer para utilizá-los em sua sala de aula, seja no término do Ensino Fundamental ou no início do Ensino Médio, tendo em vista tratar-se de um tema de aplicabilidade nas mais diversas áreas do conhecimento, favorecendo à interdisciplinaridade, e ainda com uma crescente exploração na atualidade.

Os grafos são amplamente utilizados para modelar problemas, situações e tecnologias cotidianas, como por exemplo, as redes sociais, ou na medicina, as redes neurais. Além disso, em diversos casos, observamos que o estudo da teoria e aplicação dos grafos pode promover condições para o desenvolvimento do raciocínio crítico matemático, sendo que, na maioria das vezes, é preferível tal desenvolvimento em detrimento à aprendizagem de regras, cálculos, fórmulas, estes tantas vezes desvinculados do cotidiano do estudante.

Outro fator importante situa-se no ponto de que os estudos da teoria de grafos nos fornecem um caminho aos algoritmos computacionais, como exemplo, o Algoritmo de Dijkstra; este, por sua vez, pela modelagem, nos ajuda a compreender, mesmo que de maneira muito simplificada, um pouco do funcionamento de aplicativos de rotas, por exemplo, o google maps.

Outro ponto que deu suporte à continuidade no desenvolvimento deste trabalho fora a notícia, culpa do algoritmo, envolvendo o suicídio, na França, de uma jovem de 15 anos e que seus pais processaram o Tik Tok, por acreditarem que o algoritmo de recomendação por trás da navegação no aplicativo teria influenciado diretamente na

decisão da filha.

O fato é que, lamentavelmente, este tipo de acontecimento não se restringe àquela localidade, pelo contrário, é um fator preocupante por ocorrer em todo o mundo, embora, esta seja a primeira vez que um processo desse tipo seja aceito para análise pela Justiça.

Vimos aqui a possibilidade de desenvolver uma proposta de sequência didática sobre grafos no intuito também de trabalhar-se a compreensão, de forma superficial, desses algoritmos relacionados a grafos para conscientizar o estudante sobre sua navegação nos aplicativos de redes sociais e internet em seu dia a dia.

Desse modo, entendemos este tipo de trabalho como uma iniciativa da escola básica para educar seus estudantes sobre as transformações bruscas que ocorrem em alguns meios tecnológicos, e em suas interações nas redes sociais por aplicativos.

Com esse fim, foi desenvolvido um capítulo introdutório com uma passagem sobre a origem do conceito de grafos com Euler, e conseqüente desenvolvimento da teoria dos grafos.

Em seguida, um capítulo para conceituação básica sobre os grafos. Segue-se com um capítulo de aplicações dos grafos a problemas, alguns do cotidiano, em que demonstra-se a impossibilidade da situação ocorrer. Estes exemplos raramente são apresentados no cotidiano escolar. Destacamos ainda neste capítulo a introdução da ideia de algoritmos, principalmente com o algoritmo de Dijkstra que descata-se por modelar problemas de rotas, muito presentes no dia a dia dos estudantes.

Além disso, faz-se uma modelagem simplificada de aplicativos de redes sociais por grafos. O trabalho segue com uma discussão sobre a proposta pedagógica de sequência didática, onde foram especificadas as motivações da escolha do tema e respectivos objetivos do trabalho, principalmente o aspecto socioemocional da proposta, em busca da autoconsciência dos estudantes para com sua navegação nas redes sociais por conta de algoritmos especiais cada vez mais comuns no cotidiano das redes, os de recomendação.

Essa discussão é introduzida com um formulário Google Forms, feito para simular uma navegação em um aplicativo de redes sociais, com vistas a alertar sobre algoritmos de recomendação, os quais atualmente estão diretamente relacionados com a navegação do usuário da rede de internet e em aplicativos e sites de redes sociais.

1.1 Objetivos

Objetivo Geral

Este trabalho tem por objetivo mostrar a importância da teoria básica dos grafos para a construção do raciocínio crítico, matemático e desenvolvimento social dos estudantes, reconhecendo a matemática como dinâmica e atuante nos processos de desenvolvimento

histórico da humanidade e seu papel indispensável no cotidiano, principalmente para lidar com certos aspectos de tecnologias atuais.

Visando alcançar nosso principal objetivo, dividimos a busca em objetivos específicos.

Objetivos específicos:

- Apresentar um pouco da construção histórica e dinâmica da matemática com o surgimento e desenvolvimento de certos conceitos aplicados a problemas em um determinado período histórico;
- Abordar conceitos da teoria dos grafos, enfatizando o desenvolvimento do raciocínio crítico-matemático e social devido sua vasta aplicação nos diversos campos de conhecimento, sem necessariamente se valer de cálculos aprofundados;
- Promover a identificação da teoria básica dos grafos como recurso matemático de grande ajuda para compreensão do funcionamento de alguns aplicativos muito presentes no cotidiano e que influenciam diretamente no dia a dia da maior parte desses estudantes, requerendo assim uma melhor compreensão na lida com tais recursos.

1.2 Organização

O corpo desse trabalho encontra-se organizado em 6 capítulos, de modo que o capítulo inicial (introdução) apresenta a dinâmica por trás da escolha do tema e consequente motivação para a progressão da escrita. Além disso, nesta parte são apresentados os objetivos geral e específicos e ainda a organização do trabalho.

No Capítulo 2 apresentamos o surgimento e desenvolvimento da teoria dos grafos por meio de uma breve abordagem sobre a história do problema das pontes de Königsberg e Leonhard Euler em 1736 e algumas das contribuições para a teoria, dadas por outros estudiosos ao redescobrirem os grafos, aplicando-os em problemas de distintas áreas de conhecimentos.

No Capítulo 3 encontram-se os conceitos básicos que consideramos suficientes para dar suporte ao professor que deseja abordar o tema com seus estudantes.

Segue-se com o Capítulo 4, dedicado à aplicação dos grafos a alguns problemas, escolhidos por uma razão específica. Eles envolvem raciocínios distintos e de certa forma inusitados, desse modo, prioriza-se o raciocínio de modo a atender os objetivos da proposta.

Damos continuidade com Capítulo 5, no qual procuramos estabelecer as relações entre os temas: grafos, algoritmos e proposta de contribuição ao desenvolvimento socioemocional do estudante.

Por último, no Capítulo 6, procuramos explicitar os objetivos relacionados à sequência didática, a própria sequência didática, aplicação e avaliação da sequência por meio dos resultados, tanto da experiência de aplicação, quanto através de autoavaliação com os dados obtidos por meio de formulário no formato google forms.

2 Um Breve Passeio Pela História dos Grafos

A História da Matemática como ferramenta de ensino carrega consigo, entre outros aspectos, a importante missão de acender uma luz sobre os fatos que acarretaram no desenvolvimento da matemática em períodos da história da humanidade, sejam estes mais recentes ou não. O ensino da história da matemática pode ainda contribuir para a possibilidade do estudante compreender a matemática como fruto de uma construção histórica do ser humano em sociedade.

A matemática também faz parte da vida das pessoas como criação humana, ao mostrar que ela tem sido desenvolvida para dar respostas às necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e aqui leva-se em conta a importância de se incorporar ao seu ensino os recursos da Tecnologia da Comunicação.(EDUCACAO-MEC, 1998, p.59).

Reiteramos este pensamento recorrendo a D'Ambrosio (2012, p.27), o qual afirma que "a história da matemática é um elemento fundamental para perceber como as teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto específico de sua época".

Neste sentido, reservamos esta seção para uma breve apresentação da história do surgimento e conseqüente desenvolvimento da teoria dos grafos até os dias atuais.

2.1 Leonhard Euler e a cidade de Königsberg século XVIII

É possível que exista algum registro histórico ao qual se possa fazer associação do uso de grafos em um determinado período histórico anterior ao que será apresentado neste trabalho, porém, a abordagem aqui feita levará em conta o surgimento da teoria dos grafos quanto à uma primeira utilização matemática de grafos relacionada à resolução de um problema cotidiano, ou seja, uma primeira aplicação matemática de um grafo em um contexto cotidiano.

Leonhard Paul Euler foi um dos matemáticos mais profícuos da história e consideramos que a teoria dos grafos teria surgido a partir de uma de suas intervenções, ao interessar-se por um determinado problema de sua época, quando esteve na cidade de Königsberg.

O primeiro registro conhecido de um problema relacionado com o que hoje em dia se chama a **teoria dos grafos**, remonta a 1736. Nesse ano Euler, grande matemático e geômetra, visitou a cidade de Königsberg, na então Prússia Oriental (atualmente ela se chama Kaliningrad e fica entre uma pequena porção da Rússia, entre a Polônia e a Lituânia). (NETTO; JURKIEWICZ, 2017, p.2).

A cidade de Königsberg possuía um aspecto geográfico no mínimo interessante. Ela era cortada pelo rio Prególia (Pregel), este dividia a cidade em quatro regiões, sendo duas delas ilhas. Os habitantes da cidade tinham construído, até meados do século XVI, sete pontes que interligavam tais regiões.

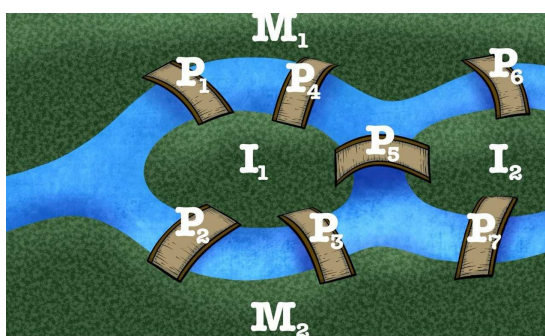
Figura 1 – Königsberg do século XVI



Fonte: Prussianhistory, 2024.

O fato é que, por causa dessas sete pontes e a forma como dividiam a cidade, ali teria surgido um problema bastante interessante e que havia se tornado de cunho cultural na época de Euler. E assim era formulado: seria possível, em um passeio pela cidade, alguém sair de qualquer uma das regiões de terra, passar uma só vez por cada ponte e retornar ao local de partida? A seguir tem-se um esquema bastante simplificado da cidade de Königsberg da época e que nos possibilita uma melhor compreensão do problema:

Figura 2 – Esquema das sete pontes



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Euler percebeu que era sempre ímpar o número de pontes que ligavam qualquer uma região às outras, ou seja, não importava a região na qual alguém estivesse, essa, por sua vez, teria um número ímpar de pontes que daria acesso às outras regiões. Concluiu então que, se alguém desejasse sair e retornar de alguma das regiões, passando uma única vez por cada ponte, tal região deveria ter um número par de pontes, visto que, para cada ponte de saída, implicaria outra de entrada. Desse modo, concluiu que o problema das sete pontes era impossível de ser realizado, dado que, nenhuma das regiões possuía número par de pontes dando acesso. Euler concluiu também que esse trajeto é sempre possível caso o número de pontes em cada região seja par.

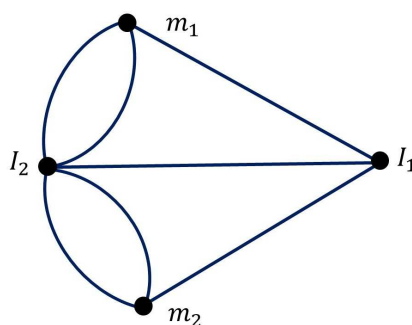
Figura 3 – Leonhard Euler



Fonte: Wikipédia, 2024.

Este fato, que encantaria qualquer pessoa adepta das belezas que surgem em torno da matemática, a Euler, que, a essa altura, já se acostumara com sua produtividade incomum em relação à matemática, não provocou grande empolgação. Assim sendo, o resultado simples e elegante foi publicado em 1736, mas não houve um aprofundamento nem desenvolvimento do material que acabara por ficar despercebido entre seu acervo de produções.

Figura 4 – Grafo de Euler para as pontes de Königsberg



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Passou-se mais de um século até que a teoria fosse redescoberta quando Gustav

Robert Kirchhoff, um físico alemão, publicou resultados sobre circuitos elétricos, em 1847, as leis de Kirchhoff. Nesses resultados foram empregados grafos, sendo que alguns desses resultados carregam bastante importância para o desenvolvimento da teoria até os dias atuais.

Por volta deste período, em 1857 mais precisamente, Arthur Cayley contribuiu com o desenvolvimento da teoria dos grafos aplicando-os em química.

Embora tenham acontecido tais contribuições para o desenvolvimento da teoria, é curioso observar que a primeira utilização do termo grafo é atribuída ao matemático britânico James Joseph Sylvester.

2.2 O problema das quatro cores

Supõe-se o surgimento desse problema com Guthrie. Em 1852, Frederick Guthrie teria apresentado um problema que supostamente havia sido conjecturado pelo irmão, Francis Guthrie, o qual afirmava que quatro cores distintas eram suficientes para colorir um mapa, de modo que regiões adjacentes recebessem cores distintas, e que isso era de senso comum aos cartógrafos da época.

Figura 5 – Francis Guthrie



Fonte: Wikipédia, 2024.

Assim como em diversos outros exemplos na Matemática, problemas de enunciados simples podem conter uma mística contraditória que resulta em árduos esforços para serem de fato provados. Este problema recebeu a atenção dos matemáticos, De Morgan, Cayley, Kempe e alguns outros de renome, inclusive com resultados falhos. Contudo, sua resolução só aconteceu em 1977 com os matemáticos Appel e Haken, todavia, com o uso extensivo de computadores, o que não provocou tanto entusiasmo na comunidade matemática da época.

Figura 6 – Mapa colorido com 4 cores



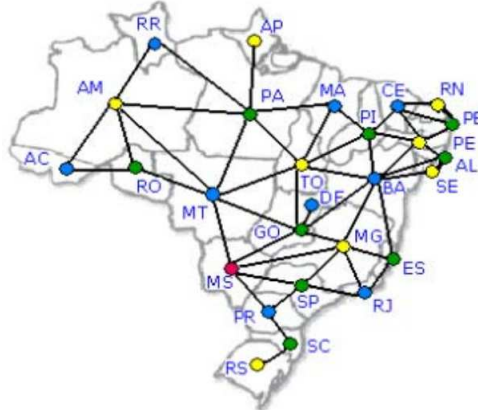
Fonte: Sheilaalmeida, 2024.

Os esforços dedicados a este e a outros problemas modelados por grafos trouxeram avanços consideráveis para a teoria dos grafos e suas aplicações, conforme Netto e Jurkiewicz quando afirmam que

Ao longo do século XX, cresceu o interesse de muitos matemáticos pelo estudo dos grafos, em geral trazido pelo estudo de problemas como estes que descrevemos e, com isso, foi sendo desenvolvido um corpo teórico que permite, atualmente, a abordagem de muitos problemas novos.(NETTO; JURKIEWICZ, 2017, p.4).

Ainda, a respeito do problema das quatro cores, encontramos em Szwarcfiter (2018, p.30) que "[...]foi formulada uma prova de que 5 o são. Conjecturou-se então que 4 cores também seriam suficientes. Esta conjectura permaneceu em aberto até 1977, quando foi provada por Appel e Haken". Este problema tornou-se bastante especial pela quantidade de provas e contraprovas publicadas sobre o próprio problema e resultados relacionados. Embora alguns destes resultados não tenham sido definitivos, os esforços nem sempre foram em vão. A prova apresentada por Appel e Haken baseia-se em uma ideia que implementa resultados publicados por outros estudiosos do tema, mas, pelos cálculos serem muito extensos, utilizou-se computadores e mais de mil horas de funcionamento destes. Os grafos tiveram um papel singular nesse processo, dado que, a coloração de um mapa pode ser perfeitamente modelada pela coloração de um grafo, e este por sua vez, pode ser analisado por computadores, pela possibilidade de inserção de estrutura de dados que o representem. Assim, basta fazer corresponder as regiões do mapa a pontos e, quando duas regiões forem adjacentes, existirá uma linha ligando-os. Este problema, apesar de demonstrado, ainda deixa possibilidades em aberto, por exemplo, de uma demonstração mais simplificada ou que não necessite de computadores para ser provada.

Figura 7 – Grafo com 4 cores modelando a coloração do mapa



Fonte: Unesp, 2024.

2.3 Grafos na atualidade

A teoria dos grafos recebeu diversas outras contribuições, com aplicações nos mais variados campos do conhecimento: Matemática, Artes, Física, Química, entre outros. Com o desenvolvimento da tecnologia computacional, foi possível o aperfeiçoamento de resultados, caso do problema das quatro cores, além de aplicações em novos ramos, possibilitados principalmente pelo avanço das redes de Internet. Apesar da teoria ser relativamente recente, tem tornado-se cada vez mais importante pela sua abrangência de áreas de aplicação e diversidade dos problemas cuja abordagem pode ser feita aplicando-se grafos na modelagem, por exemplo, em problemas referentes a redes neurais.

3 Conceitos Básicos

Esta seção tem por objetivo apresentar boa parte dos principais conceitos que formam base para uma introdução à teoria dos grafos. Com esse fim, estarão inseridos nesta parte algumas definições, representações e resultados. Aqui nossas referências principais foram Netto e Jurkiewicz (2017), Jurkiewicz (2009) e Szwarzfiter (2018).

Numa análise superficial sobre o exposto anteriormente neste trabalho, é possível concluir que os grafos são consideravelmente eficientes para a modelagem de diversos tipos de problemas, desde que tais problemas tenham elementos cujos vértices do grafo bem os representem, e alguma relação entre esses elementos tenha representação dada pelas arestas do grafo. Em certos casos, os elementos de um problema, que serão modelados pelos vértices em um grafo, necessitam de distinção, logo, uma saída de bastante utilidade pode ser o uso de rótulos nos vértices, o que torna possível a distinção requerida e, além disso, facilita a identificação das arestas que compõem o grafo. Contudo, é importante que sejam estabelecidos critérios na rotulação dos vértices.

Definição 3.1. *Um grafo $G = (V, E)$ consiste de dois conjuntos bem estabelecidos:*

- *Um conjunto $V(G) = V$ de elementos ditos vértices de G .*
- *Um conjunto $E(G) = E$ de pares de vértices (não necessariamente distintos) ditos arestas de G . No caso em que $\{v_1, v_2\} \in E$, diz-se que v_1 e v_2 estão ligados pela aresta $\{v_1, v_2\}$.*

Escrevemos $|V(G)| = n$ para o número de vértices do grafo, ao passo que, $|E(G)| = m$, para o número de arestas do grafo.

Vamos destacar dois tipos especiais de grafos:

I - *grafo completo*, onde existe uma aresta ligando quaisquer dois vértices distintos.

Observe que, neste caso,

$$m = \frac{n \cdot (n - 1)}{2}$$

II - *grafo vazio* ou *grafo nulo*, aquele em que

$$|V(G)| = 1$$

O grafo completo de n vértices será denotado K_n . Esses grafos nem sempre são particularmente interessantes por si só, todavia, podem tornar-se bastante úteis quando há necessidade de identificá-los em grafos "maiores".

Uma aresta pode ser representada por $e = \{v_i, v_k\}$ ou, simplesmente, por $v_i v_k$, onde v_i e v_k são então denominados vértices *vizinhos* ou *adjacentes*. As arestas que têm um vértice em comum igualmente são denominadas *adjacentes*.

O *grau* de um vértice v de um grafo G , denotado $d_G(v) = d(v)$, é definido pela quantidade de arestas que incidem sobre ele. Caso haja clareza a que grafo estamos nos referindo, o índice será omitido.

Teorema 3.1. *Dado um grafo G , temos*

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2 \cdot |E(G)| \quad (3.1)$$

Ou seja, a soma de todos os graus dos vértices de um grafo G sempre resulta no dobro do número de arestas desse grafo.

Demonstração. De fato, basta notar que cada aresta, digamos $v_i v_j$, é contada exatamente duas vezes: Em $d_G(v_i)$ e $d_G(v_j)$. Logo, tem-se

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2 \cdot |E(G)|$$

.

■

Corolário 3.2. *Todo grafo G possui um número par de vértices de grau ímpar.*

Demonstração. Suponha por contradição que existisse um número ímpar de vértices de grau ímpar. Mas então, independentemente do número de vértices de grau par,

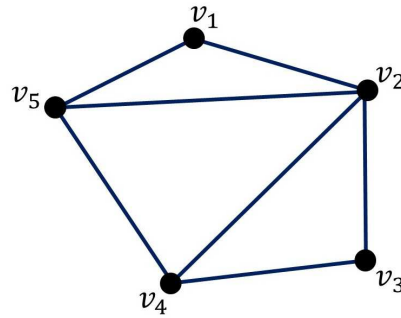
$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v)$$

seria ímpar. Um absurdo.

■

Segue-se um exemplo para fixar ideias:

Figura 8 – Grafo simples

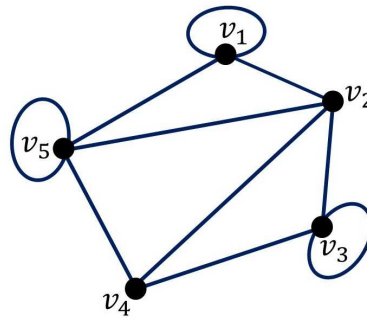


Fonte: elaborado pelo autor (2024).

No grafo da figura 8, facilmente verifica-se que $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 4$, $d(v_3) = 2$, $d(v_4) = 3$ e $d(v_5) = 3$. Tem-se ainda que $n = 5$ e $m = \frac{2+4+2+3+3}{2} = 7$.

Há casos em que é de bastante utilidade permitir, na representação do grafo, uma aresta ligando um vértice a si mesmo. Neste caso, denomina-se esta aresta como *laço* ou *loop*. Os grafos que contêm este tipo de ligação carecem de ajuste para contagem de suas arestas. Para haver coerência com os resultados já vistos, é preciso lembrar-se de que a aresta que forma o laço tem suas extremidades em um mesmo vértice, daí, tal aresta será contada duas vezes para esse vértice. Tome como exemplo o grafo apresentado na figura 9, onde tem-se $d(v_1) = 4$, $d(v_3) = 4$ e $d(v_5) = 5$.

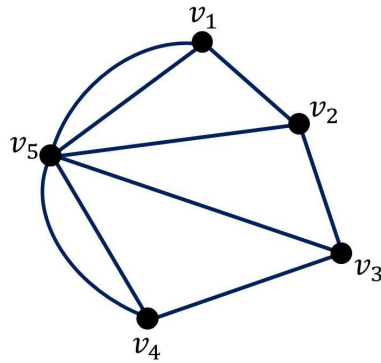
Figura 9 – Grafo com laços



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Em alguns casos, pode acontecer também que exista mais de uma aresta ligando dois vértices, o grafo em que isso ocorre é denominado *multigrafo*. Neste aspecto, grafos que não possuem laços ou arestas múltiplas são às vezes denominados *grafos simples*, para diferenciá-los dos demais. Neste texto, somente grafos simples são considerados e, por simplicidade, utilizaremos apenas o termo grafo.

Figura 10 – Multigrafo



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

O maior grau assumido por um vértice v pertencente a um grafo G é denotado $\Delta(G)$ e diz-se *grau máximo* de G . De modo análogo, o menor grau assumido por um vértice v em G é denotado $\delta(G)$ e diz-se *grau mínimo* de G .

Proposição 3.3. *Dado um grafo G , tem-se*

$$\delta(G) \leq \frac{2 \cdot m}{n} \leq \Delta(G)$$

Demonstração. Primeiramente, observe que o número m de arestas de um grafo é igual a $\frac{\sum d(v_i)}{2}$, com $1 \leq i \leq n$. Temos ainda que $\frac{n \cdot \delta(G)}{2}$ é o número mínimo de arestas que um grafo pode ter. De modo análogo, $\frac{n \cdot \Delta(G)}{2}$ é o número máximo de arestas que um grafo pode ter. Logo, $\frac{n \cdot \delta(G)}{2} \leq m \leq \frac{n \cdot \Delta(G)}{2}$. Agora, basta multiplicar os membros desta última expressão por $\frac{2}{n}$ e obtem-se o resultado. ■

3.1 Isomorfismo

Muitos problemas podem ser simplificados quando modelados por meio de grafos. A representação com este recurso, por vezes, pode gerar algumas dúvidas. É o caso, por exemplo, se pararmos para refletir sobre a seguinte questão: seria possível dois grafos, aparentemente distintos, modelarem um mesmo problema? Surge daí o conceito de isomorfismo.

Definição 3.2. *Dois grafos são isomorfos se existir uma função bijetiva entre seus conjuntos de vértices, que preserve suas relações de adjacência.*

Fica bastante claro a importância da rotulação dos vértices, pois quando indica-se que as relações de adjacência são preservadas, o que se pretende obter é, para $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ grafos isomorfos:

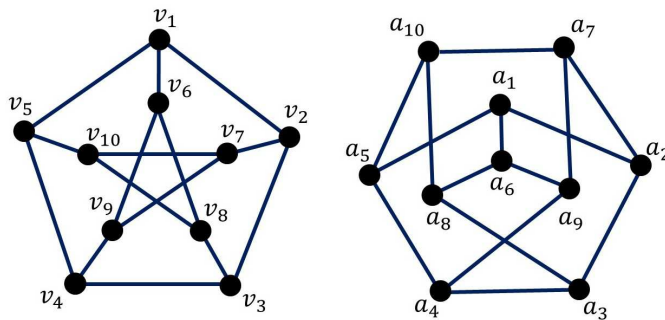
$$\{v_i, v_j\} \in E \iff \{f(v_i), f(v_j)\} \in E'$$

Escrevemos $G \sim G'$ para o grafo G isomorfo a G' .

Em muitos casos, a definição acima pode gerar alguma polêmica por deixar dúvidas de tratar-se do mesmo grafo ou não. De fato, isso não tem tanta relevância. O importante é o discernimento quanto aos grafos serem ou não isomorfos.

Considere os dois grafos da figura 11.

Figura 11 – Grafos Isomorfos



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Claramente, é possível fazer corresponder cada vértice do grafo da esquerda com um único vértice do grafo da direita de forma biunívoca, de modo que:

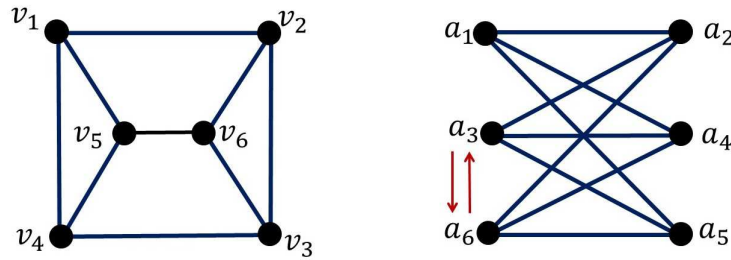
$$\begin{aligned} f : \quad v_1 &\mapsto a_1 \\ v_2 &\mapsto a_2 \\ v_3 &\mapsto a_3 \\ &\vdots \\ v_9 &\mapsto a_9 \\ v_{10} &\mapsto a_{10} \end{aligned}$$

Observe que as relações de adjacência, de um grafo para o outro, também foram mantidas, conforme era pretendido.

Quando não há possibilidade de existência de tal função entre os grafos, diz-se que tais grafos são *não isomorfos*.

Observe os grafos apresentados na figura 12.

Figura 12 – Grafos não isomorfos



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

O que se deseja, para que os grafos sejam isomorfos, é uma distribuição de vértices no grafo da direita, levando em conta a distribuição dos vértices do grafo da esquerda, de modo que $\{v_i, v_j\}$ seja equivalente a $\{a_i, a_j\}$. Desse modo, fazendo corresponder os índices dos vértices dos dois grafos, tem-se:

- I - O vértice v_1 é adjacente aos vértices v_2 , v_4 e v_5 , mas, ele não é adjacente nem a v_3 e nem a v_6 . Observe ainda que v_3 e v_6 são adjacentes.
- II - Escolhendo qualquer um dos vértices para a_1 , no grafo da direita, basta estabelecer seus adjacentes a_2 , a_4 e a_5 . Não importa qual será a distribuição para a_3 e a_6 nos vértices não adjacentes a a_1 , tem-se sempre a_3 não adjacente a a_6 .

Portanto, não há como se estabelecer correspondência entre os vértices dos dois grafos mantendo as relações de adjacência, o que torna os grafos não isomorfos.

3.2 Digrafos

O conceito de grafos orientados ou digrafos é bastante similar ao conceito de grafos, com algumas exceções. Por exemplo, quando representados por diagramas, as arestas recebem indicação de sentido e, assim sendo, deve-se levar em conta o que este sentido pode representar em relação ao problema cujo digrafo representa.

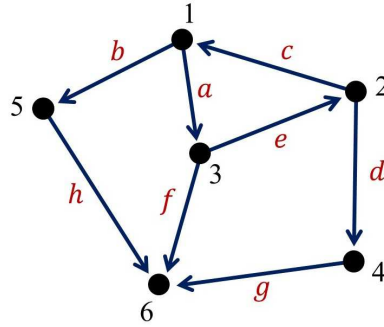
Definição 3.3. Um grafo orientado ou digrafo $G(V, E) = G$ é constituído de dois conjuntos:

- Um conjunto $V(G) = V$ de vértices de G ;
- Um conjunto $E = E(G)$ formado por arestas orientadas, isto é, $v_i, v_j \neq v_j, v_i$, se $i \neq j$. No caso em que o conjunto orientado $\{v_i, v_j\} \in E$, diz-se que v_i e v_j estão ligados pela aresta $v_i v_j$ com sentido de v_i para v_j .

Desse modo, assim como nos grafos, a representação pode ser feita através de diagramas, onde os vértices serão representados por pontos, e cada aresta $\{v_i, v_j\}$ representa

uma ligação entre os vértices v_i e v_j , todavia, a aresta irá conter uma seta indicando o sentido de v_i para v_j . Quando a seta da aresta indica o sentido de v_i para v_j , diz-se que v_i é um *vértice de saída* (*divergente*) e v_j , *vértice de entrada* (*convergente*);

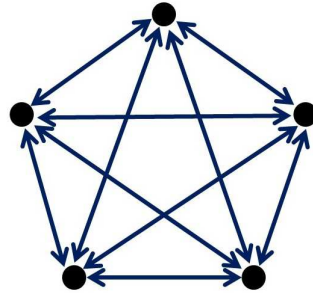
Figura 13 – Grafo orientado



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Um grafo orientado G é dito *simétrico* se, conforme exista em G uma aresta $v_i v_j$, também existirá a aresta $v_j v_i$ pertencente ao mesmo grafo.

Figura 14 – Grafo simétrico completo



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

O grafo da figura 14 tem todas as arestas de um grafo completo, caso fossem desconsideradas as indicações de sentidos das arestas, além disso, a aresta que liga os vértices v_i e v_j tem uma seta indicando o sentido de v_i para v_j e outra indicando o sentido contrário, de v_j para v_i . Esse tipo de grafo é denominado *grafo simétrico completo*.

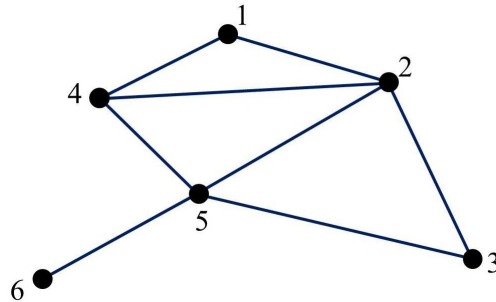
3.3 Representação por Matrizes

A representação de grafos com a utilização de matrizes é imprescindível, pois, deve-se levar em conta que computadores não reconhecem diagramas. Assim sendo, na resolução de modelos, faz-se necessário a tradução para uma linguagem a qual a máquina possa interpretar. Além disso, um só grafo pode ser representado por infinitos diagramas (grafos isomorfos), todavia, o grafo abstrato associado a todos eles é o mesmo.

Existem várias formas de se organizar os dados de um grafo para que sejam introduzidos no computador e este possa interpretá-los. Uma das mais comuns e intuitivas é apresentar um vértice e informar quais outros vértices estão ligados a este vértice dado.

Tome como exemplo o grafo da figura 15

Figura 15 – Grafo não orientado



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

A lista que temos a seguir na tabela 1 descreve os vértices e seus adjacentes do grafo que aparece na figura 15 e é denominada *lista de adjacência do grafo*.

Tabela 1 – Lista de adjacência grafo 15

Vértice	Vértices Adjacentes
1	2, 4
2	1, 3, 4, 5
3	2, 5
4	1, 2, 5
5	2, 3, 4, 6
6	5

Fonte: Netto e Jurkiewicz (2017, p.18).

A seguir, na tabela 2, tem-se a lista de adjacência do grafo orientado que aparece na figura 13.

Tabela 2 – Lista de adjacência grafo orientado

Vértice	Vértices Adjacentes
1	3, 5
2	1, 4
3	2, 6
4	6
5	6
6

Fonte: Netto e Jurkiewicz (2017, p.19).

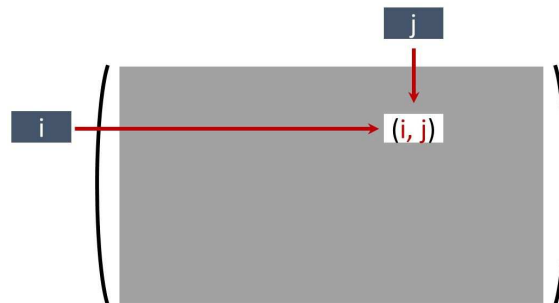
3.3.1 Matriz de Adjacência

Aproveitando os rótulos dos vértices e as arestas que ligam estes, é possível uma construção que associe tais rótulos a linhas e colunas de uma matriz quadrada, a qual é denominada *matriz de adjacência*. Neste trabalho, para representar matrizes, será utilizada a notação com letra maiúscula e destacada em negrito. Por exemplo, uma matriz de adjacência $\mathbf{A} = [a_{ij}]$.

Para a construção da matriz \mathbf{A} , serão tomados dois vértices v_i e v_j , verificando se existe ou não uma aresta ligando-os, determina-se o elemento a_{ij} na matriz. Caso exista uma aresta entre os vértices, na posição i, j registra-se, por exemplo, um x ou o número 1. Não existindo uma aresta entre os vértices tomados, na posição ij , registra-se 0 (zero). Nesse caso, fica definida a matriz de adjacência por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i v_j \in E \\ 0, & \text{se } v_i v_j \notin E \end{cases}$$

Figura 16 – Esquema Matriz de Adjacência



Fonte: autor, a partir de Netto e Jurkiewicz (2017, p.19).

Há casos em que o grafo é o modelo de uma situação que requer valor na aresta (tome como exemplo a distância entre duas cidades). Desse modo, o elemento da matriz, indicador desta ligação deve receber um valor. O grafo que recebe valores em suas arestas é denominado *grafo valorado*.

Tem-se ainda que a matriz que representa este tipo de grafo é denominada *matriz de adjacência valorada*. Assim, na lista de adjacência da matriz, o elemento a_{ij} apresenta o valor atribuído à aresta, ocorrendo simultaneamente a indicação da existência da aresta e seu respectivo valor.

O grafo apresentado na figura 15 é representado pela matriz que aparece a seguir:

Tabela 3 – Matriz de adjacência

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	1	0	1	1	1	0
3	0	1	0	0	1	0
4	1	1	0	0	1	0
5	0	1	1	1	0	1
6	0	0	0	0	1	0

Fonte: elaborado pelo autor (2024)

A matriz que aparece abaixo associa-se ao grafo valorado e orientado da figura 17.

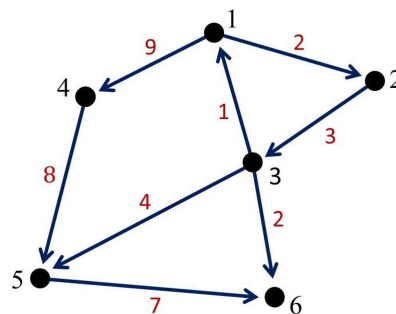
Tabela 4 – Matriz de adjacência grafo orientado

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	0	9	0	0
2	0	0	3	0	0	0
3	1	0	0	0	4	2
4	0	0	0	0	8	0
5	0	0	0	0	0	7
6	0	0	0	0	0	0

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Observe que na última linha da matriz todos os elementos estão indicados por zero, isso porque, no grafo ao qual ela associa-se, o vértice 6 é um ponto que não dá acesso a nenhum outro.

Figura 17 – Grafo orientado valorado



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Observação: a diagonal principal de matriz de adjacência pode apresentar significado sobre a representação do grafo, por exemplo, uma matriz \mathbf{A} de adjacência cujos elementos da diagonal são nulos implica em um grafo que não contém laços. Outro fator considerável é que, quando dois grafos são isomorfos, uma só matriz os representa.

3.3.2 Matriz de Incidência

Ao passo que a relação da matriz de adjacência é de vértice para vértice, a matriz de incidência relaciona vértices e arestas. O elemento da matriz irá indicar se a aresta representada pela coluna da matriz incide ou não sobre o vértice representado na linha correspondente na matriz.

Tome como exemplo a tabela a seguir representando o grafo da figura 15.

Tabela 5 – Matriz de incidência

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0	1	0	0
4	0	1	0	1	0	0	1	0
5	0	0	0	0	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	0	0	1

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Observe que, por ser um grafo não orientado, os elementos da matriz que representam os vértices recebem a marcação unitária e os demais elementos, a marcação 0 (zero). Desse modo, fica definida a matriz de incidência $n \times m$ por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a aresta } e_j \text{ é incidente em } v_i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Já quando o grafo tem orientação, pode-se atribuir o sinal positivo para o vértice divergente e o sinal negativo para o vértice convergente.

A matriz que aparece a seguir representa o grafo da figura 13. Nesta matriz, as arestas foram representadas de modo que a ordem dos pares de índices estão equivalentes à ordem alfabética, ou seja, estão organizadas seguindo a ordem lexicográfica, embora isso não seja obrigatório.

Tabela 6 – Matriz de incidência grafo orientado

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
1	+1	+1	-1	0	0	0	0	0
2	0	0	+1	+1	-1	0	0	0
3	-1	0	0	0	+1	+1	0	0
4	0	0	0	-1	0	0	+1	0
5	0	-1	0	0	0	0	0	+1
6	0	0	0	0	0	-1	-1	-1

Fonte: autor, a partir de Netto e Jurkiewicz (2017, p.20).

3.4 Conexidade

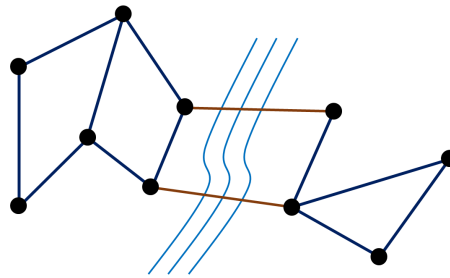
Será denominado *passeio* um "percurso" feito no grafo, levando em conta uma sequência de arestas $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{s-1}v_s$, para uma dada escolha de vértices v_0, v_1, \dots, v_s não necessariamente distintos, sendo que a quantidade s de arestas percorridas é o *comprimento* do passeio. É possível que arestas sejam percorridas diversas vezes, sendo portanto contadas em multiplicidade no comprimento do passeio. Entretanto, se todas as arestas do passeio forem distintas, tal passeio será denominado *trilha*; além disso, se $v_0 = v_s$ obtemos uma *trilha fechada*. Por outro lado, se tanto os vértices, quanto arestas forem todos distintos, então tem-se um *caminho*. Quando ocorrer de as arestas serem todas distintas e os vértices serem também distintos, exceto por $v_0 = v_s$, tais tipos de percursos serão denominados *ciclos* ou *caminhos fechados*. Denotaremos por C_n os grafos ciclos com n vértices.

Considera-se que, indo de um vértice a ele próprio, tem-se um caminho de comprimento 0. A menor quantidade possível de arestas em um caminho de um vértice v_i a um vértice v_k será denominada *distância* entre v_i e v_k .

Um grafo G é dito *conexo* quando, entre quaisquer dois vértices, houver um caminho ligando-os. Por outro lado, o grafo que não é conexo é dito *desconexo*.

Imaginemos uma cidade, na qual passa um rio, com ligações entre casas que estão em margens diferentes do rio. O grafo apresentado a seguir representa algumas destas casas.

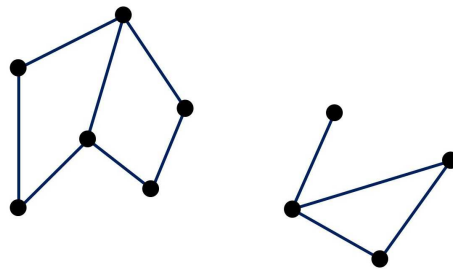
Figura 18 – Grafo conexo



Fonte: elaborado pelo autor(2024).

Suponhamos que as ligações entre algumas casas fossem desfeitas em certa ocasião, por exemplo, por uma enxurrada que destruiu as pontes que conectavam aquelas casas. Assim sendo, o grafo que aparece na figura 19 representa o que é considerado um grafo desconexo.

Figura 19 – Grafo desconexo



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

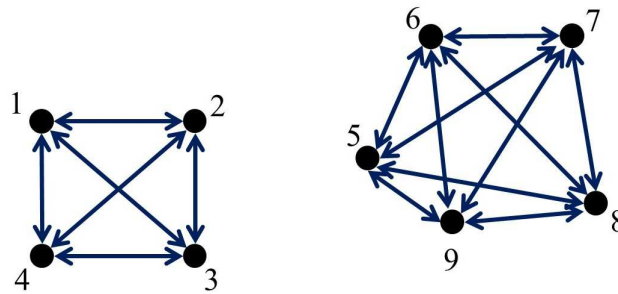
Isso remete ao pensamento de que a cidade não deixou de ser uma só, o que ocorre é que, considerando acesso entre as localidades, passou a ter partes desconectadas. Caso uma aresta seja indispensável para que a conexidade no grafo ocorra, essa aresta será denominada *ponte* do grafo G .

Em grafos orientados, para análise da conexidade, é necessário levar em conta principalmente as indicações de orientação nas arestas. Por exemplo, há grafos orientados em que alguns vértices têm sempre caminho para acessar outros vértices e para serem acessados, caso do grafo simétrico completo. Por outro lado, há grafos orientados em que alguns vértices dão acesso a mais vértices, mas não haverá caminho de retorno. Vejamos como analisar a conexidade em grafos orientados.

Observe o grafo da figura 20. Poderíamos, a princípio, entendê-los como grafos que não têm nenhuma relação entre si. Porém, a indicação nos vértices nos permite concluir que são componentes de um grafo desconexo.

Imagine, por exemplo, os dois grafos representando grupos de usuários de um determinado site de rede social, onde nenhum participante de um grupo seja também integrante do outro grupo. Desse modo, uma mensagem compartilhada em um dos

Figura 20 – Grafos desconexos



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

grupos automaticamente é entregue a todos os seus participantes, mas não será levada diretamente a nenhum integrante do outro grupo.

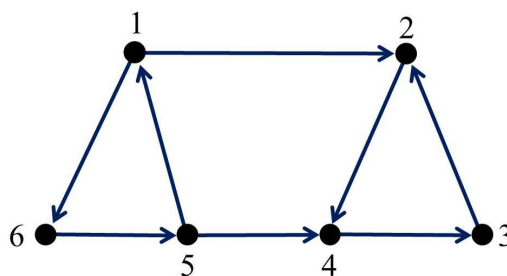
Um grafo *orientado não conexo* ou *desconexo* é um grafo em que, desconsiderando a orientação das arestas, é grafo não-orientado desconexo.

Grafo simplesmente conexo (s-conexo) é um grafo orientado em que, desconsiderando a orientação das arestas, é grafo não-orientado conexo. Entretanto, por tratar-se de um grafo orientado, pode haver vértices em que não há um caminho entre eles, o caminho passa a existir somente se desconsiderada a orientação das arestas. O grafo da figura 17 é um bom exemplo deste tipo de grafo.

O *grafo semi-fortemente conexo (sf-conexo)* leva em conta a orientação das arestas e, tem-se que, para quaisquer dois vértices v_i e v_k , haverá um caminho de v_i para v_k ou existe um caminho de v_k para v_i .

Um exemplo para este tipo de grafo vem a seguir com a figura 21:

Figura 21 – Grafo sf-conexo



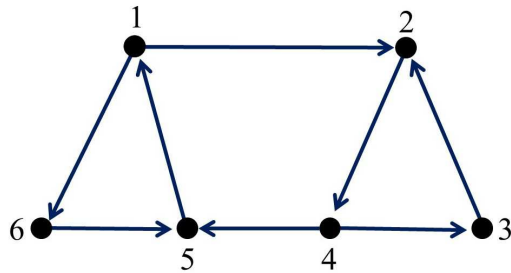
Fonte: autor, a partir de Netto e Jurkiewicz (2017, p.28).

Observe que há um caminho indo do vértice 5 para o vértice 4, porém, não há um caminho do vértice 4 para o 5.

O *grafo fortemente conexo (f-conexo)* é um grafo orientado em que, escolhidos dois quaisquer vértices v_i e v_k , haverá um caminho indo de v_i para v_k e um caminho de v_k para v_i . Assim sendo, pode-se ir de qualquer vértice a um outro vértice neste tipo de grafo.

Observe a seguir a figura 22.

Figura 22 – Grafo f-conexo



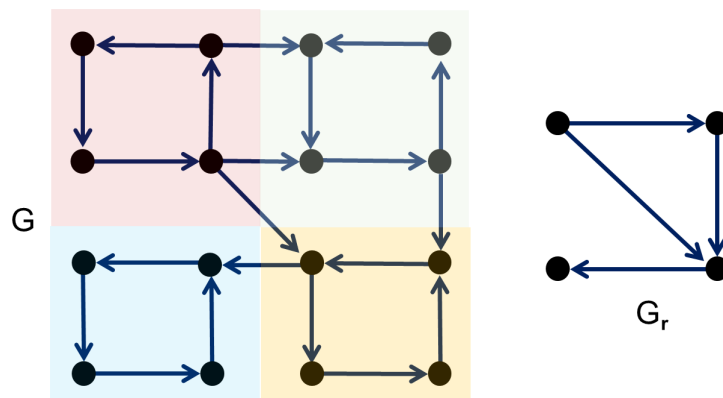
Fonte: autor, a partir de Netto e Jurkiewicz (2017, p.28).

Do grafo que aparece na figura 21 para o grafo da figura 22, o que há de diferente é apenas o sentido indicado na aresta que liga os vértices 4 e 5, mas, esta mudança é o suficiente para tornar o grafo fortemente conexo. Assim, fazendo uma analogia com as ruas de uma determinada cidade, as arestas indicam o sentido de trânsito e os veículos poderão acessar todas as ruas que o grafo estiver representando.

Quando um subgrafo f-conexo não faz parte de nenhum outro grafo também f-conexo diz-se que o primeiro é *maximal*. Em qualquer grafo orientado, é possível destacar-se subgrafos maximais. Um subgrafo maximal f-conexo é dito uma componente conexa. Um grafo f-conexo deverá possuir como componente f-conexa apenas ele próprio.

O grafo G , na figura 23, tem 4 componentes f-conexas. Como as componentes são f-conexas, atingindo qualquer um vértice v_i de uma componente, pode-se ir a qualquer vértice v_k na mesma componente. Daí, é possível a construção de um *grafo reduzido*.

Figura 23 – Grafo reduzido



Fonte: autor, a partir de Netto e Jurkiewicz (2017, p.29).

Definição 3.4. Um grafo reduzido $G_r = (V_r, E_r)$: É o grafo formado do seguinte modo:

- Para cada componente conexa, teremos um vértice de G_r ;
- Dois vértices v_i e v_k de G_r serão ligados por uma aresta se houver um caminho indo de qualquer vértice da componente f-conexa que contém v_i a qualquer vértice da componente f-conexa que contém v_k .

Na figura 22, o grafo G_r é o grafo reduzido de G .

O seguinte fato pode ser destacado: O grafo reduzido tem o mesmo tipo de conectividade do grafo original. Por exemplo, se G for sf-conexo, então G_r também o será. Caso G seja f-conexo, G_r será um ponto.

Leve em conta que determinadas situações podem ser muito bem modeladas por grafos orientados, é o caso, por exemplo, do trânsito das ruas de uma localidade, onde o grafo associado deve ser f-conexo. Caso não fosse, poderíamos ter alguma rua em que o veículo entraria mas não teria condições de retornar. Assim sendo, a conectividade nesse tipo de grafo é uma propriedade muito importante.

3.5 Conectividade

Ao menor número de vértices que podem ser removidos de um grafo $G(V, E)$ para desconectá-lo ou reduzi-lo a um único ponto denomina-se *conectividade* e denota-se $\kappa(G)$. Podemos observar que qualquer subgrafo induzido de um grafo completo é também completo, ou seja, retirando-se qualquer um dos vértices não desconectamos o grafo. Portanto, o grafo completo sempre se reduzirá a um ponto, em termos de conectividade e, assim sendo, $\kappa(K_n) = n - 1$.

Quando o grafo não for completo, será possível identificar-se dois vértices v_i e $v_k \in V$ não adjacentes, tal que, removidos todos os outros vértices, tem-se um grafo não conexo; Logo,

$$\kappa(G) \leq n - 2 \quad \forall G \neq K_n$$

O grau de um vértice $d(v)$ indica quantas ligações (arestas) tornam este vértice conexo ao grafo, logo, podemos determinar o limite superior

$$\kappa(G) \leq \delta(G)$$

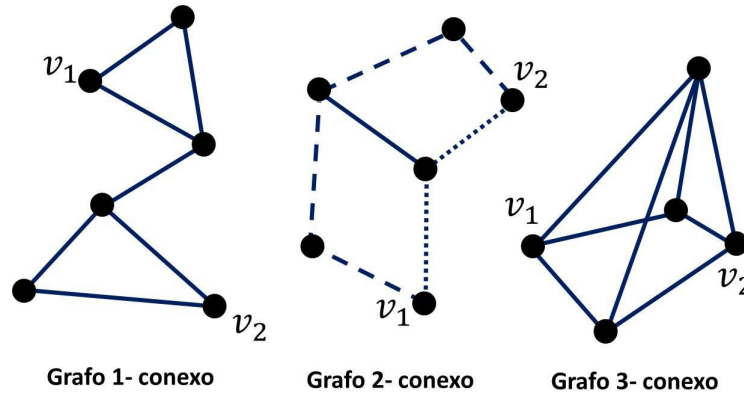
pois, $\delta(G)$ é exatamente o número mínimo de arestas que incidem sobre um vértice v , quando removidas, desconectam tal vértice v .

Diz-se que um grafo conexo é *k-conexo* se, retirando-se do grafo $k - 1$ vértices, ele ainda permanecer conexo.

É possível, também, analisar a conectividade do grafo a partir de seus *caminhos internamente disjuntos*, estes são caminhos entre os vértices v_i e v_k sem arestas em comum.

Um grafo k -conexo tem k caminhos internamente disjuntos, para quaisquer dois vértices v_i e v_k .

Figura 24 – Grafos k -conexos



Fonte: autor, a partir de Netto e Jurkiewicz (2017, p.33).

A conectividade dos grafos da figura 24 justifica-se pelo seguinte:

- Grafo 1 - conexo - possui uma ponte;
- Grafo 2 - conexo - só tem dois caminhos internamente disjuntos entre v_1 e v_2 ; um tracejado e o outro pontilhado;
- Grafo 3 - conexo - comparando o grafo com a representação de uma pirâmide de base retangular, é possível dois caminhos internamente disjuntos entre v_1 e v_2 na base e outro caminho internamente disjunto entre v_1 e v_2 , indo pelo vértice superior.

Anteriormente, vimos que duas listas de graus, representantes de grafos não isomorfos, quando organizadas, podem ser representadas por uma só lista. Como exemplo foram dadas as listas $(2, 2, 2, 3, 1)$ e $(2, 2, 3, 2, 1)$ que estão relacionadas aos grafos da figura 31. Neste caso, vamos destacar um aspecto das listas: em cada uma das listas há ao menos dois vértices com um mesmo grau. De fato, isso não ocorre por acaso, há um resultado relacionado.

Proposição 3.4. *Todo grafo conexo G com $n \geq 2$ tem pelo menos dois vértices com o mesmo grau.*

Demonstração. Considere um grafo conexo. O menor grau $\delta(G)$ que um vértice de G pode assumir é 1, enquanto que o maior grau $\Delta(G)$ possível de ser assumido por um vértice de G é $n - 1$. Logo, há $n - 1$ graus possíveis. Desse modo, devemos distribuir $n - 1$ graus em n vértices. Daí, o Princípio das Casas de Pombos nos permite concluir que ao menos dois vértices terão o mesmo grau.



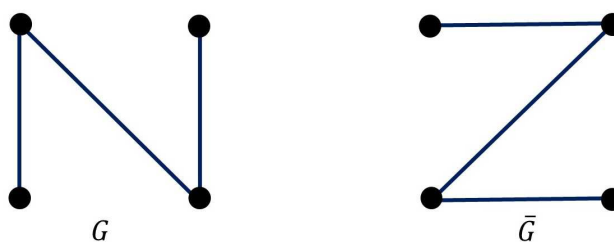
3.6 Tipos Especiais de Grafos

3.6.1 Grafo Complementar

Considere um grafo G , que seja orientado ou não. Denota-se por \bar{G} (ou G^c) o *grafo complementar* de G e é definido como sendo o grafo que contém todas as arestas que não aparecem em G . Pode-se destacar que, neste caso, a propriedade de complementaridade utilizada para conjuntos continuará valendo, pois, conforme visto inicialmente, a definição de grafo baseia-se em dois conjuntos bem definidos. Desse modo, dado o número n de vértices de um grafo, pode-se considerar o universo em relação a este grafo como sendo o grafo que contém todas as arestas possíveis em um grafo com o mesmo número de vértices, portanto um grafo completo K_n .

Observe o grafo apresentado na figura 25.

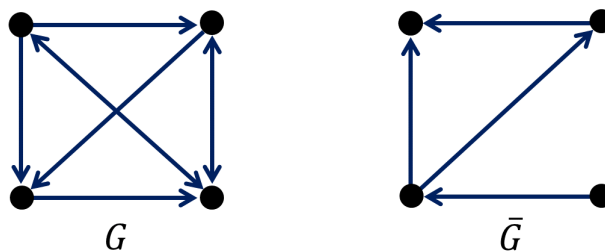
Figura 25 – Grafos complementares



Fonte: autor, a partir de Netto e Jurkiewicz (2017, p.20).

Quando tratar-se de grafos orientados, o grafo complementar de G leva em conta o conjunto de todas as arestas de sentidos indicados que não figuram em G , mas aparecem no grafo simétrico completo.

Figura 26 – Grafos complementares orientados



Fonte: autor, a partir de Netto e Jurkiewicz (2017, p.20).

O grafo apresentado na figura 25 é um caso particular de grafos complementares; trata-se de um grafo autocomplementar.

Definição 3.5. *Um grafo autocomplementar é um grafo G tal que $G \sim \bar{G}$.*

A respeito destes tipos de grafos, tem-se o seguinte resultado:

Proposição 3.5. *Seja G um grafo autocomplementar, então $n = 4k$ ou $n = 4k + 1$ para algum k inteiro.*

Demonstração. A princípio, observe que os dois grafos G e \bar{G} têm o mesmo número de arestas, pois, por definição, são isomorfos. Logo, $m_1 = m_2$, para $m_1 = |E(G)|$ e $m_2 = |E(\bar{G})|$. Observe ainda que o grafo completo correspondente tem o mesmo número n de vértices, e o número de arestas sendo dado por $m_1 + m_2$. Daí, como $m_1 = m_2$, para o número de arestas do grafo completo, tem-se

$$\frac{n(n-1)}{2} = 2m_1 .$$

$$n(n-1) = 4m_1$$

Ora, n e $n-1$ têm paridades diferentes e seu produto está resultando em $4m_1$, implicando no fato de que, ou $n = 4k$ ou $n-1 = 4k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Se o primeiro caso ocorre, $n = 4k$, não há mais o que provar. Suponhamos então que ocorra o segundo caso, então $n-1 = 4k$ e, daí, $n = 4k + 1$, para algum k inteiro. ■

3.6.2 Subgrafo

De maneira informal podemos denominar de *subgrafo* de um grafo G , um grafo de tamanho menor ou igual, ou seja, está "contido" em G .

De maneira formal, definimos um *subgrafo* $H = H(V', E')$ de $G = (V, E)$ como sendo um grafo cujo conjunto de vértices está contido no conjunto de vértices de G , e de maneira análoga, o conjunto de arestas de H também está contido no conjunto de arestas de G . Assim sendo, $V' \subset V$ e $E' \subset E$.

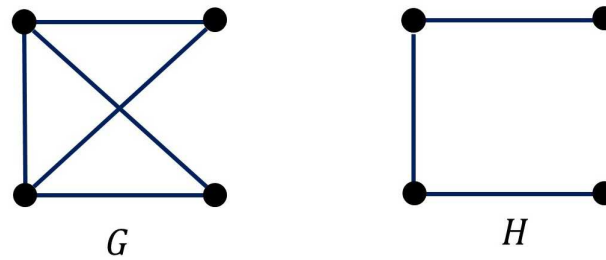
Desse modo, os subgrafos podem ser considerados conforme uma dada ordem de importância de seus elementos; sejam eles os vértices ou arestas.

Separemos dois importantes tipos de subgrafos:

I - O grafo que contém todos os vértices de outro, mas não necessariamente todas as arestas, ou seja, $V' = V$ e $E' \subsetneq E$, será denominado *subgrafo abrangente*. Tome por exemplo o grafo não orientado da figura 27 a seguir:

Claramente, observa-se que $V' = V$ e que há arestas em G , as quais não figuram em H .

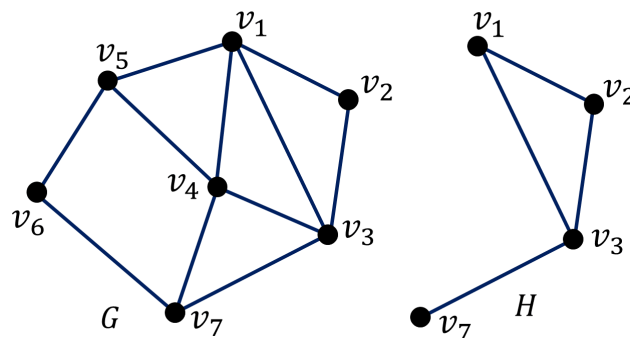
Figura 27 – Subgrafo H de G



Fonte: autor, a partir de Netto e Jurkiewicz (2017, p.21).

II - O subgrafo que possui um subconjunto próprio de vértices do grafo original e todas as arestas entre tais vértices, igualmente ao grafo original, será denominado *subgrafo induzido*. Observe o subgrafo *H* induzido pelos vértices destacados, que aparece na figura 28.

Figura 28 – Subgrafo induzido



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Evidentemente que, ao retirar-se uma das arestas do subgrafo induzido *H*, isso não fará com que o grafo obtido deixe de ser subgrafo do grafo original *G*, entretanto, este novo grafo já não será mais denominado induzido.

3.6.3 Vizinhaça

A ideia de vizinhaça está relacionada diretamente à noção de adjacência dos vértices. Ou seja, quais vértices encontram-se ligados a um dado vértice em questão. Considere, por exemplo, se estivermos em uma cidade, e interessados em saber quais localidades poderemos acessar diretamente de onde nos encontrarmos. Essa ideia, de por onde é possível "transitar" no grafo, é bastante importante.

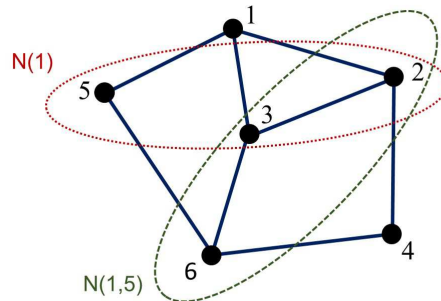
Como definido inicialmente, são considerados vizinhos v_i e v_k os vértices que apresentam uma aresta em comum. A *vizinhaça aberta*, ou simplesmente *vizinhaça* de v_i , que denotaremos $N(v_i)$, é o conjunto de vértices vizinhos de v_i em *G*.

$$N(v_i) = \{v_k \in V \mid \exists \{v_i, v_k\} \in E\}$$

E se em vez de um só vértice fosse pretendido considerar a vizinhança de um conjunto de vértices? Pois bem, definiremos a *vizinhança* $N(H)$ de um conjunto H como sendo a união de todos os conjuntos de vizinhos dos vértices pertencentes a H e retirando-se desse conjunto os vértices que pertençam a H . Desse modo, nenhum vértice pertencente à vizinhança pertencerá também ao conjunto H . Observe que isso corresponde a uma generalização do conceito de vizinhança de vértice anteriormente definido.

Considere o grafo da figura 29.

Figura 29 – Vizinhança grafo não orientado



Fonte: autor, a partir de Netto e Jurkiewicz (2017, p.22).

Conforme apresentado no grafo acima, tem-se $N(1) = \{2, 3, 5\}$ e $N(1, 5) = \{2, 3, 6\}$.

Caso seja necessário trabalhar-se com uma vizinhança fechada, toma-se uma *vizinhança fechada* por:

$$N[v_i] = N(v_i) \cup \{v_i\}$$

Ainda a respeito da noção de vizinhança, quando tratar-se de um grafo G orientado, os vértices devem ser divididos em dois subconjuntos: *antecessores* e *sucessores*. Assim sendo, escolhido um vértice v_i , quando uma aresta liga v_i a v_k e indica o sentido de v_i para v_k , o vértice v_i é um vértice de saída e fará parte do conjunto $N^-(v_k)$ dos antecessores de v_k . Por outro lado, v_k é um vértice de entrada e fará parte do conjunto $N^+(v_i)$ dos sucessores de v_i .

Desse modo, podemos definir:

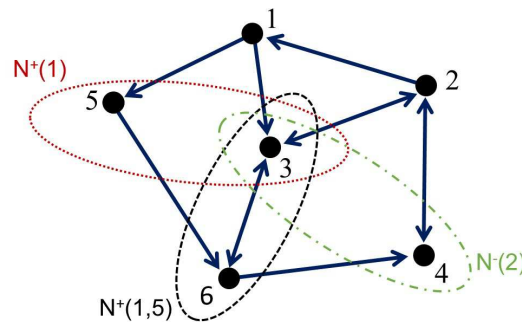
$$\text{Antecessores: } N^-(v_i) = \{v_k \mid \exists \{v_k, v_i\} \in E\}$$

$$\text{Sucessores: } N^+(v_i) = \{v_k \mid \exists \{v_i, v_k\} \in E\}$$

A seguir, tem-se um exemplo de vizinhança no grafo orientado da figura 30.

No grafo apresentado acima, observa-se que $N^+(1) = \{3, 5\}$ e que $N^+(1, 5) = \{3, 6\}$. Podemos observar ainda que incidem sobre o vértice 2 arestas vindas dos vértices 3 e

Figura 30 – Vizinhança grafo orientado



Fonte: autor, a partir de Netto e Jurkiewicz (2017, p.22).

4, ou seja, $\{v_3, v_2\}$ e $\{v_4, v_2\}$, logo, os vértices 3 e 4 são antecessores. Portanto, $N^-(2) = \{3, 4\}$.

Para grafos orientados, tem-se ainda os seguintes conceitos:

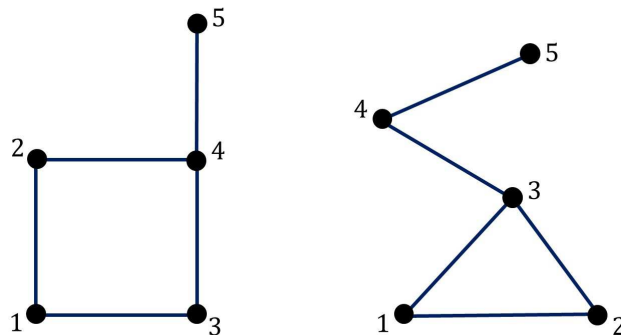
- o *semigrau exterior* de um vértice $d^+(v)$, que é o seu número de sucessores;
- o *semigrau interior* de um vértice $d^-(v)$, que é o seu número de antecessores.

Assim sendo, o grau do vértice será dado pela soma dos semigraus.

Na figura 30, tem-se que o vértice 1 tem grau 3, sendo $d^+(1) = 2$ e $d^-(1) = 1$.

É possível que uma sequência "ordenada" de graus corresponda a grafos não isomorfos. As sequências de graus $(2, 2, 2, 3, 1)$ e $(2, 2, 3, 2, 1)$ relacionam-se com os graus dos vértices dos grafos da esquerda e da direita, respectivamente, na figura 31. Observe que ambas as listas podem ser organizadas conforme a lista a seguir $(3, 2, 2, 2, 1)$. Além disso, conclui-se facilmente que os dois grafos são não isomorfos.

Figura 31 – Grafos para sequência de graus



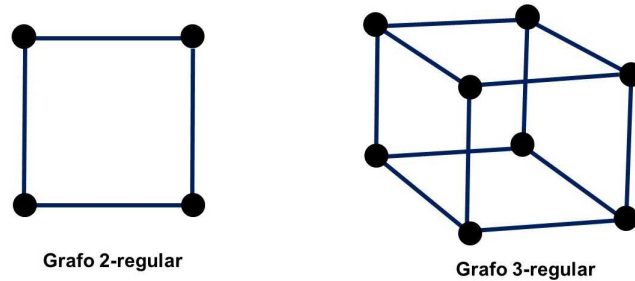
Fonte: autor, a partir de Netto e Jurkiewicz (2017, p.23).

Observa-se ainda, nas listas de ambos os grafos, $\delta(G) = 1$ e $\Delta(G) = 3$.

O grafo cujos vértices têm todos o mesmo grau k é denotado (k) -regular ou, simplesmente regular.

Observe os exemplos da figura 32.

Figura 32 – Grafos regulares



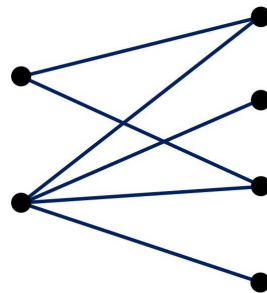
Fonte: autor, a partir de Netto e Jurkiewicz (2017, p.23) (2024).

3.6.4 Grafo bipartido

Alguns grafos podem ter seu conjunto de vértices V particionado em dois subconjuntos V_1 e V_2 disjuntos, de modo que qualquer aresta escolhida em G terá como extremidades um vértice em V_1 e outro em V_2 , ou seja, não pode haver arestas ligando vértices pertencentes ao mesmo subconjunto. Este tipo de grafo, denominado *grafo bipartido*, tem seus subconjuntos de vértices V_1 e V_2 ditos subconjuntos independentes.

Observe o exemplo da figura 33.

Figura 33 – Grafo bipartido



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

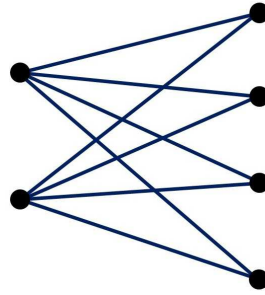
Lembre-se de que um grafo completo com n vértices é denotado K_n . Um grafo bipartido completo usualmente será denotado $K_{p,q}$, com $|V_1| = p$ e $|V_2| = q$.

O grafo apresentado anteriormente na figura 34 é denotado $K_{2,4}$.

A respeito de grafos bipartidos, tem-se o seguinte resultado:

Proposição 3.6. *Se G é um grafo bipartido com n vértices, então G tem no máximo $\frac{n^2}{4}$ arestas.*

Figura 34 – Grafo bipartido completo



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Demonstração. Seja G um grafo bipartido de n vértices, considere também os conjuntos de vértices V_1 e V_2 subconjuntos independentes de G , com $|V_1| = x$ e $|V_2| = y$. Observe que, sendo G bipartido, o número máximo de arestas m que se pode obter em G é $x \cdot y$. Tem-se ainda que $x + y = n$. Daí, da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, segue

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy} \iff \frac{(x + y)^2}{4} \geq xy$$

Ou seja,

$$\frac{n^2}{4} \geq m$$

■

Teorema 3.7. *Um grafo conexo G é bipartido se, e somente se, não contém ciclos de comprimento ímpar.*

Demonstração.

(\Rightarrow) Considere um grafo G bipartido. Se G não contém ciclos, não há o que provar. Considere, então, a existência de um ciclo em G . Tem-se que este ciclo alterna entre os vértices dos subconjuntos independentes V_1 e V_2 . Para que ocorra o ciclo, deve-se partir de um vértice e retornar ao mesmo. Como as arestas ligam vértices alternados no grafo, sair de V_1 , por exemplo, e retornar requer necessariamente um número par de arestas.

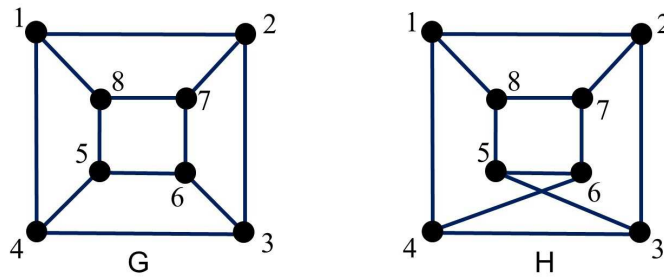
(\Leftarrow) Tomemos G um grafo conexo que não contém ciclos ímpares. Primeiramente, tomemos um vértice qualquer v_i em G . Definimos V_1 como o subconjunto de G formado por todos os vértices v_j tais que exista um comprimento par entre v_i e v_j . Definimos V_2 como o subconjunto de G formado por todos os vértices v_k tais que exista um caminho de comprimento ímpar entre v_i e v_k . Tem-se, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, caso contrário, haveria um

vértice $v_r \in V_1 \cap V_2$, isso acarretaria na existência de um caminho de comprimento par e um caminho de comprimento ímpar entre v_i e v_r . Esses dois caminhos (pares e ímpares) podem ou não ter arestas comuns, mas em qualquer caso, geram ciclos. Como o número de arestas usado nestes ciclos é ímpar (é a soma do número de arestas dos dois caminhos, pares e ímpares ou é essa soma descontada o dobro do número de arestas comuns), isso acarretará em ao menos um ciclo ímpar em G , mas isso contraria a hipótese.

■

Para fixar ideias, observemos os grafos apresentados na figura 35.

Figura 35 – Grafo G bipartido e H não bipartido

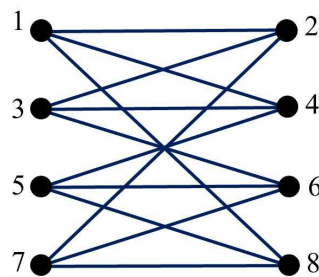


Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Não é difícil identificar que o grafo H não pode ser bipartido, basta considerar o ciclo dado por 1,4,6,5,8,1, que é de comprimento ímpar. Daí, não há como biparticionar o grafo.

No entanto, o grafo G é formado por ciclos todos de comprimento par. Logo, pode ser biparticionado, como é possível ver na figura 36.

Figura 36 – Bipartição de G



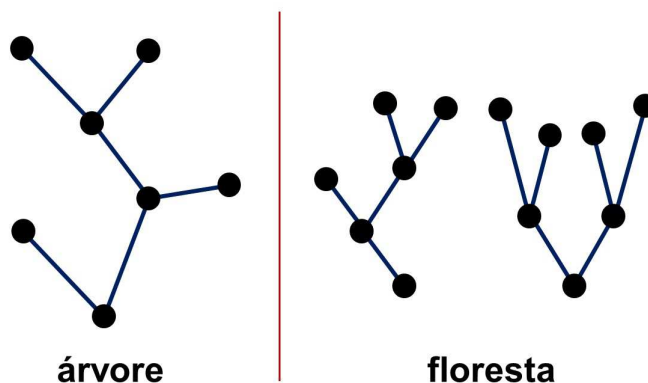
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

3.6.5 Árvores

No Ensino Básico, um dos poucos exemplos de grafos apresentados aos estudantes são as *árvores*. Desse modo, segue-se uma breve introdução sobre este tipo de grafo.

Árvore é um grafo conexo sem ciclos. Um grafo cujas componentes conexas são árvores é denominado *floresta*. Observe o exemplo da figura 37.

Figura 37 – Árvore/floresta



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Observe que, para um certo número n de vértices, uma árvore é o grafo conexo com o menor número possível de arestas. A seguir apresentamos um teorema (cuja demonstração omitimos) que reúne diversas caracterizações de árvores.

Teorema 3.8. *Seja T um grafo com n vértices. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) T é uma árvore.
- (ii) T não contém ciclos e tem $n-1$ arestas.
- (iii) T é conexo e tem $n-1$ arestas.
- (iv) T é conexo e toda aresta é uma ponte.
- (v) Todo par de vértices de T é ligado por um único caminho.
- (vi) T não contém ciclos, mas a adição de apenas uma aresta produz um único ciclo.

3.7 Um Pouco de Grafos Eulerianos

Um grafo, contendo m arestas, é dito *euleriano* quando existe uma trilha fechada de comprimento m em G . Ou seja, é possível, partindo de um de seus vértices, percorrer todas as arestas do grafo, passando por cada aresta uma só vez, e retornar ao vértice inicial. Um grafo G de m arestas que não é euleriano, todavia possui uma trilha de comprimento m é dito *semieuleriano*. Conforme Jurkiewicz (2009), o nome euleriano

"se originou com o problema das pontes de Königsberg. Ele mostrou que a resposta era negativa, estabelecendo assim uma condição necessária."(JURKIEWICZ, 2009, p.52).

O lema a seguir, apesar de simples, é imprescindível.

Lema 3.9. *Se todo vértice de um grafo (ou multigrafo) G tem grau maior ou igual a 2, então G contém um ciclo.*

Demonstração. Consideremos grafos, pois arestas múltiplas ou laços constituem ciclos automaticamente. Seja G um grafo, partindo de um vértice v_0 , inicia-se a trilha. Ao chegar-se a um vértice qualquer, este, ou estará sendo visitado pela primeira vez e, como o número de arestas incidentes sobre este vértice é igual ou maior do que dois, continuamos a trilha, ou é um vértice já visitado, constituindo um ciclo. Como o número de vértices é finito, o lema estará provado. ■

Euler propôs, em 1736, o teorema seguinte:

Teorema 3.10. *Um grafo conexo (Ou multigrafo) G é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices têm grau par.*

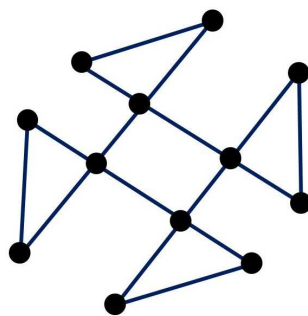
Demonstração.

(\Rightarrow) Suponhamos que G tenha uma trilha fechada de comprimento m . Cada vez que a trilha passa por um novo vértice utiliza duas novas arestas, uma de entrada e a outra de saída. Logo, o grau de cada vértice deve ser obrigatoriamente par.

(\Leftarrow) A prova se dará por indução sobre o número m de arestas do grafo. De fato, o teorema é válido para $m = 0$ por vacuidade. Suponhamos que seja válido o teorema para todos os grafos com menos do que m arestas. Sendo G conexo, todos os vértices têm grau maior do que ou igual a 2, pois os graus são pares. Desse modo, pelo lema anterior, G contém um ciclo (que é uma trilha fechada). Dentre todas as trilhas fechadas em G escolhamos uma trilha T com comprimento máximo. Se T tem um comprimento m , o teorema está provado. Caso não, consideramos o grafo H resultante da retirada das arestas de T . Como retiramos um número par de arestas de cada vértice de T , e todos os vértices do grafo têm grau par (por hipótese), pelo menos uma das componentes de H tem um vértice em comum com T e tem todos os vértices com grau par. Da hipótese de indução, H tem uma trilha fechada que passa por todos os vértices de H sendo possível formar uma trilha fechada maior concatenando T com a trilha em H . Mas isto contraria a maximalidade na escolha de T . ■

Observe o exemplo apresentado na figura 38.

Figura 38 – Grafo euleriano



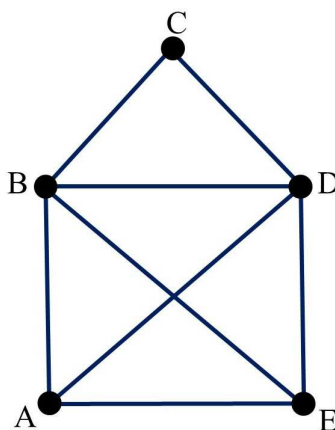
Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Corolário 3.11. *Um grafo conexo (ou multigrafo) G é semieuleriano se, e somente se, no máximo, dois vértices têm grau ímpar.*

Demonstração. Suponhamos que G tenha uma trilha aberta passando por m arestas, iniciando em v_i e terminando em v_k . Fechamos a trilha com uma nova aresta entre tais vértices e aplicamos o teorema de Euler. ■

O grafo da figura 39 é semieuleriano. Isso é caracterizado por podermos percorrer uma trilha aberta por todas as arestas, iniciando no vértice A e terminando em E .

Figura 39 – Grafo semieuleriano



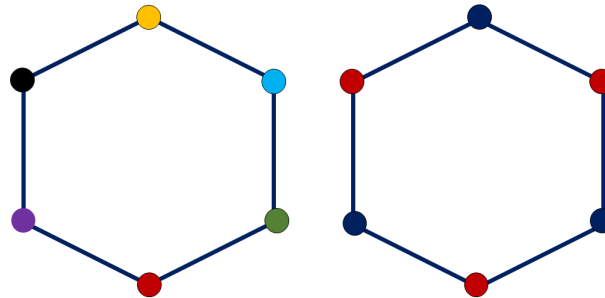
Fonte: autor, a partir de Jurkiewicz (2009).

3.8 Subconjuntos independentes

Anteriormente neste trabalho, vimos um tipo especial de grafo, bipartido, onde seus subconjuntos independentes de vértices possuem uma particularidade; vértices pertencentes a um mesmo subconjunto não mantêm ligações entre si. Os conjuntos independentes podem desempenhar um papel importante em uma modelagem.

Normalmente, os problemas de coloração estão diretamente relacionados ao menor número possível de cores que podemos utilizar para colorir um grafo G . *Colorir* os vértices de um grafo consiste em atribuir cores aos vértices de forma que vértices adjacentes tenham obrigatoriamente cores distintas. Por exemplo, vamos colorir os vértices dos grafos da figura 40.

Figura 40 – Grafos coloridos



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Observe que o grafo da esquerda tem exatamente uma cor para cada vértice, o que cumpre a tarefa de colorir o grafo sem que haja cores iguais para vértices adjacentes. Entretanto, o número de cores pode ser melhorado, isto é, reduzido, procurando-se utilizar uma cor já utilizada sempre que for possível. Isto ocorreu no grafo da direita. Notadamente, o número de seis cores foi reduzido a apenas duas.

Colorir os vértices de um grafo, buscando distribuir cores diferentes a vértices adjacentes e procurando utilizar o menor número possível de cores é um conceito que pode ser aplicado à modelagem de diversos tipos de problemas.

Ao menor número de cores utilizadas para colorir um grafo, chamamos *número cromático* de G e denotamos por $\chi(G)$. Tomando como exemplo o grafo da figura 40, tem-se $\chi(G) = 2$. Não é difícil concluir que, um grafo C_n com n par, pode ser colorido com duas cores apenas. Por outro lado, um grafo C_n com n ímpar tem $\chi(G) = 3$.

Teorema 3.12. *Em um grafo G , tem-se que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Demonstração. Colorindo vértice por vértice. Cada vértice pode ser adjacente a no máximo, $\Delta(G)$ vértices. Para o caso de vértice v com $N(v) = \Delta(G)$, os $\Delta(G)$ vértices adjacentes a este vértice podem ser coloridos com no máximo $\Delta(G)$ cores distintas entre si e distintas da cor do vértice. Portanto, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. ■

Corolário 3.13. *Em um grafo completo com n vértices, tem-se $\chi(K_n) = n$.*

Demonstração. Em um grafo K_n , qualquer um dos vértices v_i é adjacente a $n - 1$ vértices, logo são necessárias $n - 1$ cores para colorir tais vértices, e mais uma cor para

o vértice v_i . Portanto, em um grafo K_n , são necessárias n cores distintas para colorir o grafo, ou seja, $\chi(K_n) = n$. ■

Apresentamos um teorema clássico (cuja demonstração omitimos) que reduz um pouco o limite apresentado anteriormente.

Teorema 3.14. (Brooks - 1941). *Se G é um grafo conexo que não seja K_n e tal que $\Delta(G) \geq 3$, então $\chi \leq \Delta(G)$.*

Para grafos bipartidos, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.15. *Um grafo G é bipartido se, e somente se, $\chi(G) = 2$.*

Demonstração. Basta fazer corresponder a cada um dos subconjuntos independentes de G a uma cor. ■

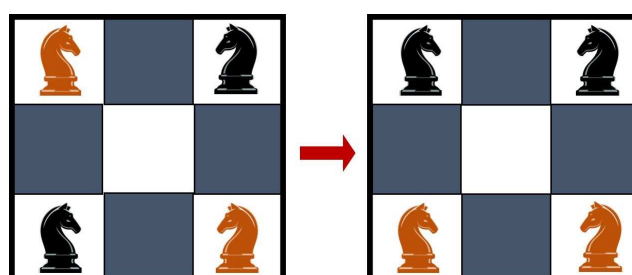
4 Aplicação de Grafos

Esta parte do trabalho está destinada à apresentação de aplicações de grafos na resolução de alguns problemas em áreas bem diversificadas, com o intuito de tentar mostrar ao leitor o quanto o uso de grafos pode ser eficaz para as soluções dos problemas propostos, visto que, em diversos casos, a resolução por esgotamento das possibilidades pode não ser uma boa alternativa e, além disso, resultar em cansaço e perda de tempo. Ademais, algumas aplicações já serão relacionadas a algoritmos, pois, a compreensão destes, nos permitirá um melhor entendimento sobre aspectos de algumas tecnologias computacionais atuais, principalmente as que dizem respeito às redes sociais.

4.1 O problema dos quatro cavalos

É bastante sabido que o jogo do xadrez se passa sob um tabuleiro quadrado de 8 x 8 e que, peças que diferem umas das outras efetuam movimentos distintos. Por exemplo, a rainha movimenta-se em diagonais, podendo percorrer o número de casas disponíveis, de forma totalmente diferente do peão, que por sua vez, deve ser movimentado casas à frente, uma por vez, exceto em capturas, que podem acontecer na diagonal. O problema que será abordado foi apresentado em 1512 pelo italiano Paolo Guarini de Forli (1464-1520). Consiste num tabuleiro reduzido de 3 x 3, com quatro cavalos distribuídos nas casas dos cantos, conforme pode ser visto na figura 41. A questão é: seria possível, respeitando o movimento do cavalo, a primeira formação adquirir o formato da segunda?

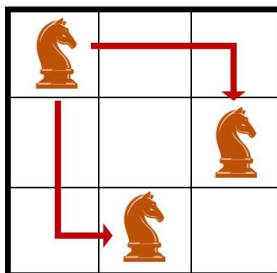
Figura 41 – Quatro cavalos



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Primeiramente, consideremos que o cavalo movimenta-se em "L" sobre o tabuleiro de xadrez. Assim, segue-se alguns movimentos possíveis para um dos cavalos do tabuleiro.

Figura 42 – Movimento do cavalo

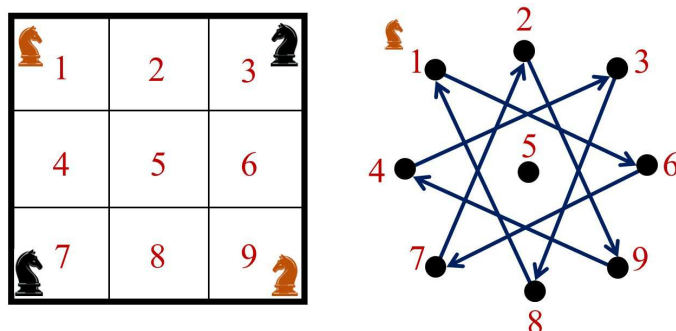


Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Abordar este problema tentando esgotar as possibilidades de movimentos das peças não é exatamente uma boa alternativa. Entretanto, recorrer aos grafos para simplificação e melhor análise do problema, parece um caminho a ser adotado.

Inicialmente, vamos enumerar as casas do tabuleiro e analisar os movimentos possíveis de uma das peças. Isso nos permitirá associar um grafo com vértices rotulados, fazendo uma modelagem do problema no intuito de visualizá-lo de modo mais simples.

Figura 43 – Grafo associado ao movimento de um dos cavalos



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

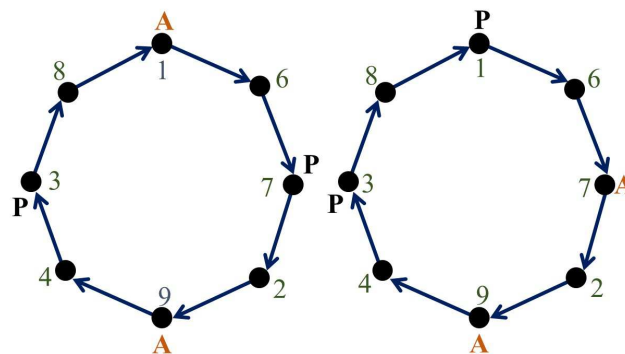
Os seguintes fatos podem ser destacados na representação da figura 43:

- No grafo, o vértice 5 nunca será atingido, pois, no tabuleiro, o cavalo que inicia na casa 1 não será colocado jamais na casa 5. Este fato se estende para as demais peças, ou seja, nenhuma das peças poderá acessar a casa 5;
- Após alguns movimentos, o cavalo da casa 1 assumirá a posição dos demais cavalos (é como se o cavalo da casa 1 iniciasse o movimento a partir da outra casa: 3, 7 ou 9). De fato, isso é bastante perceptível na representação feita pelo grafo;
- Como o grafo utilizado na representação é orientado, um vértice deve ser acessado conforme o sentido indicado na aresta. Assim, um cavalo só poderá ocupar uma

casa quando esta estiver vazia, então o vértice que representa a casa fica inacessível enquanto houver uma peça ocupando-a. Além disso, para "desocupar" um vértice, o vértice adjacente será acessado, não havendo como pular vértices ou retornar (invertendo o sentido do movimento).

Outro aspecto importante vem de o grafo associado ao problema estar bem organizado, mas é, ainda, tanto quanto confuso; isso pode ser melhorado conforme pode ser visto na representação a seguir:

Figura 44 – Grafo representação do tabuleiro



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Na figura 44, tem-se os grafos que representam as situações postas na figura 41, onde o **P** representa o **cavalo preto** e o **A** representa o cavalo **amarelo**. Observe que, passar da primeira situação para a segunda, só seria possível se o sentido de alguma das arestas fosse desrespeitado de alguma forma, ou uma peça acessasse um vértice inacessível, então **P** ultrapassaria **A** ou vice-versa. Mas isso não é possível. Logo, a sequência *APAP* nunca poderá tornar-se *PAAP*, pois, em todas as possibilidades do primeiro caso, as letras estão alternando entre A e P, ao passo que, no segundo caso, em todas as possibilidades, haverá sempre duas letras iguais juntas. Portanto, conclui-se que a situação proposta no problema é impossível de ser realizada.

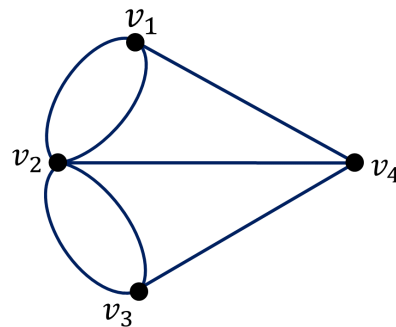
4.2 Retorno ao vértice inicial: as sete pontes de Königsberg

Aqui faremos um retorno ao problema original da teoria dos grafos, que foi visto no início do trabalho; trata-se do problema das sete pontes de Königsberg.

Agora, de posse de alguns conceitos básicos a respeito dos grafos, é possível fazer uma análise sobre o problema e concluir sua solução com argumentos bastante básicos.

Lembre-se de que o problema consistia em alguém sair de qualquer uma das regiões, passar por cada uma das sete pontes apenas uma vez e retornar ao seu ponto de partida. O grafo associado ao problema apresentado por Euler aparece a seguir na figura 45.

Figura 45 – Grafo de Euler



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Observe que, quando pretende-se sair de qualquer um dos vértices e retornar, passando uma só vez por cada aresta, é necessário um número par de arestas incidindo sobre o vértice em questão, visto que, para cada aresta de saída, deve existir outra aresta de entrada. Assim, $d(v_i) = 2k$ com $k \in \mathbb{N}$.

Quando verificamos os graus dos vértices no grafo da figura 45, extraímos as seguintes informações:

$$d(v_1) = 3$$

$$d(v_2) = 5$$

$$d(v_3) = 3$$

$$d(v_4) = 3$$

De fato, nenhum dos graus dos vértices é par. Logo, conclui-se que a situação proposta no problema não pode ser realizada. E como foi visto, tal resultado foi publicado por Euler em 1736.

4.3 Aplicação de árvores à probabilidade

O diagrama de árvore talvez seja uma das partes do estudo sobre grafos utilizada com alguma frequência dentro do Ensino Básico, embora que geralmente apresentam-se aplicações e quase nunca se faz menção de tratar-se de um tipo especial de grafo. Assim, apliquemos o conceito em um problema de complexidade moderada, problema este retirado de Morgado e Carvalho (2015, p.149).

Vejamos o problema:

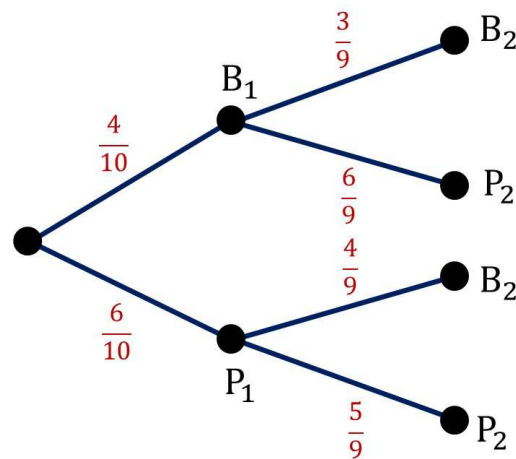
Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Sacam-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas dessa urna. Determine a probabilidade da primeira bola ser branca, sabendo que a segunda bola é branca.

Vamos organizar as probabilidades associadas às retiradas das bolas da urna:

- A probabilidade da primeira bola ser branca é $\frac{4}{10}$;
- A probabilidade da primeira bola ser preta é $\frac{6}{10}$;
- A segunda ser branca, sendo que a primeira foi branca $\frac{3}{9}$;
- A segunda ser preta, sendo que a primeira foi branca $\frac{6}{9}$;
- A segunda ser branca, sendo que a primeira foi preta $\frac{4}{9}$;
- A segunda ser preta, sendo que a primeira foi preta $\frac{5}{9}$.

Apesar das informações estarem organizadas, podemos simplificar a apresentação desses dados com uma árvore como apresentado na figura 46.

Figura 46 – Árvore de possibilidades



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Como queremos a probabilidade da segunda bola ser branca (casos possíveis), em vista da primeira ter sido branca (caso favorável), vamos mapear a probabilidade total da segunda bola ser branca; isso pode ser feito encontrando os caminhos na árvore.

- $B_1B_2 = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90}$
- $P_1B_2 = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{90}$

As duas probabilidades totalizam $\frac{36}{90}$.

O que se deseja é o caso favorável, que é justamente o caminho $B_1B_2 = \frac{12}{90}$. Montando a probabilidade, obtemos:

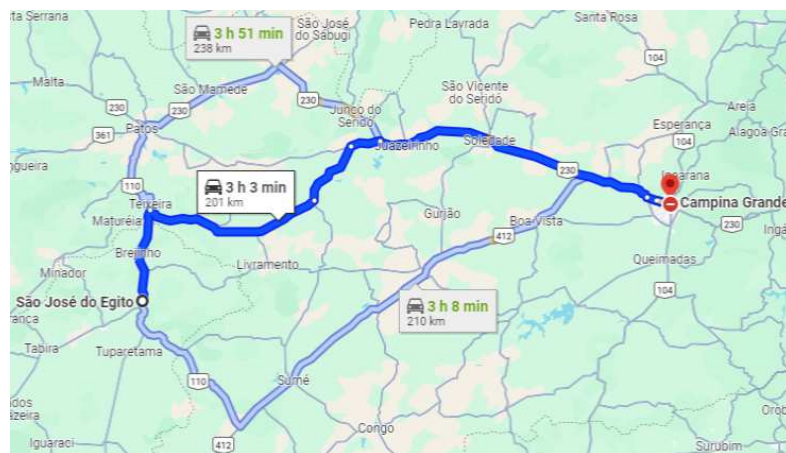
$$\frac{\frac{12}{90}}{\frac{36}{90}} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Portanto, a probabilidade de sair uma bola branca, tendo a primeira bola sido branca, é de $\frac{1}{3}$.

4.4 Problemas de caminho mínimo

Estes tipos de problema estão diretamente relacionados à procura de um percurso que seja ideal para redução de gastos, mesmo que muitas vezes seja apenas a redução de tempo (tanto a redução de tempo quanto a redução de gastos dão ideia de otimização). Atualmente, é mais do que comum procurarmos em aplicativos a melhor rota quando desejamos ir de uma cidade à outra como, por exemplo, o trecho traçado conforme a figura 47.

Figura 47 – Rota Maps



Fonte: Google Maps, 2024.

Às vezes, tendemos a ser simplistas em relação a estes tipos de problemas ao acreditar que a escolha do transporte, por exemplo, é a única decisão envolvida no processo, isso nos é alertado por Netto e Jurkiewicz (2017) quando afirmam que

De fato, nem na vida diária a questão é assim tão simples, porque deslocamentos custam dinheiro e isso nos leva imediatamente a pensar em **custos** e a desejar gastar a menor quantia possível. Além disso, se nos deslocarmos a pé em uma cidade, não teremos que nos preocupar com a "mão" das ruas, ao passo que utilizando um carro isto passa a ser obrigatório e isso, evidentemente, vai influir sobre o itinerário a ser usado. (NETTO; JURKIEWICZ, 2017, p.39).

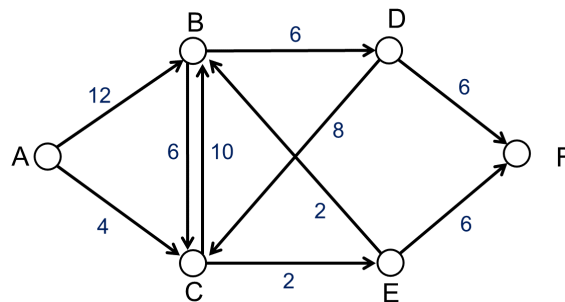
Vejamos um algoritmo desenvolvido para achar caminhos mínimos e que modela muito bem este tipo de problema.

4.4.1 Algoritmo de Dijkstra

Considere que o grafo da figura 48 representa algumas cidades de uma certa região, enquanto que as arestas com valor descrito representam o sentido que pode ser seguido e a distância (em quilômetros) entre as cidades. Tome como exemplo uma distribuidora de alimentos que pretenda instalar-se na cidade **A** e estivesse interessada em mapear os percursos possíveis entre as cidades próximas, assim como suas respectivas distâncias.

O **algoritmo de Dijkstra** é um recurso computacional bastante eficiente para este tipo de problema.

Figura 48 – Grafo orientado valorado (Algoritmo de Dijkstra)



Fonte: autor, a partir de Netto e Jurkiewicz (2017, p.40).

Iniciemos por construir uma tabela contendo as distâncias entre os vértices. A tabela apresentará, para vértices adjacentes, um valor indicando a distância correspondente. Já para os vértices não adjacentes a indicação será feita por "infinito" ou por um valor suficientemente alto. No nosso exemplo, como nenhuma das distâncias indicadas ultrapassa 15, utilizar um valor, por exemplo 1000, é suficiente para não interferir no algoritmo.

Tabela 7 – Tabela de distância entre vértices figura 48 (Algoritmo de Dijkstra)

	A	B	C	D	E	F
A	0	12	4	∞	∞	∞
B	∞	0	6	6	∞	∞
C	∞	10	0	∞	2	∞
D	∞	∞	8	0	∞	6
E	∞	2	∞	∞	0	6
F	∞	∞	∞	∞	∞	0

Fonte: Netto e Jurkiewicz (2017, p.41).

Vamos acompanhar o processo do algoritmo:

Início: A distância entre **A** e todos os outros vértices é marcada com ∞ (pode ser o valor de 1000, por exemplo). A distância entre o vértice **A** e ele próprio é marcada com 0 (a distância entre um vértice qualquer e ele próprio será sempre 0). O **A** receberá uma marcação (por exemplo, o asterisco), pois é um ponto de partida. A linha **Anterior** da matriz é preenchida com o vértice de onde se vem, por isso, sendo o **A** o ponto de partida, ela ficará sem preenchimento.

	A*	B	C	D	E	F
Distância	0	∞	∞	∞	∞	∞
Anterior	-	-	-	-	-	-

Pergunta : Quais cidades podem ser alcançadas diretamente a partir de **A**? Qual a distância de cada uma até **A**?

Resposta: **B**, com distância 12 (o que é menor do que ∞); muda-se para 12.

C, com distância 4 (o que é menor do que ∞); muda-se para 4.

Agora, essas distâncias devem ser assinaladas na tabela. Observe que a distância entre a cidade A e C (4km) não pode ser melhorada, visto que a outra alternativa seria a cidade B, cuja distância é 12 e ultrapassa a primeira.

Por esse motivo, o vértice C deve ser "**fechado**" (usaremos o asterisco *) e não voltará a ser analisado.

Estágio 1 (caminho por C)

	A*	B	C *	D	E	F
Distância	0	12	4	∞	∞	∞
Anterior	-	A	A	-	-	-

Pergunta : C atinge diretamente quais cidades? Qual a distância até tais cidades quando feito o caminho por C?

Resposta: **B**, com distância $4 + 10 = 14$ (o que é maior do que 12, ficamos então com 12); e

E, com distância $4 + 2 = 6$ (o que é menor do que ∞ , então mudaremos para 6).

Observe que a distância entre A e E será modificada, assim como também será indicado o vértice antecessor ao E. Além do mais, haverá a indicação que o vértice foi "fechado". Outro aspecto importante vem do motivo de não podermos mais melhorar a distância de A até E.

Estágio 2 (caminho por E) :

	A*	B	C*	D	E*	F
Distância	0	12	4	∞	6	∞
Anterior	-	A	A	-	C	-

Pergunta : De E podemos ir diretamente a quais cidades? Qual a distância de A até estas cidades quando feito o caminho por E?

Lembre-se de que o grafo que está sendo analisado é orientado, motivo pelo qual, às vezes, é possível atingir um vértice mas nem sempre retornar ao antecessor pelo mesmo arco.

Resposta: **B**, com distância $6 + 2 = 8$ (o que é menor do que 12, ficamos então com 8); e
F, com distância $6 + 6 = 12$ (o que é menor do que ∞ , então mudaremos para 12).

Fecharemos o vértice **B**.

Estágio 3 (caminho por B) :

	A*	B*	C*	D	E*	F
Distância	0	8	4	∞	6	12
Anterior	-	E	A	-	C	E

Pergunta : A partir de B, quais cidades podem ser atingidas diretamente? Qual a distância de A até tais cidades quando feito o caminho por B?

Resposta: **D**, com distância $12 + 6 = 18$ (o que é menor do que ∞ , ficamos então com 18); e

C. Porém, este vértice já foi fechado e portanto não será mais analisado.

Devemos fechar o vértice **F**.

Estágio 4 (caminho por F) :

	A*	B*	C*	D	E*	F*
Distância	0	8	4	14	6	12
Anterior	-	E	A	B	C	E

Observe que de **F** não há possibilidade de ir a nenhum outro vértice.

Desse modo, encerra-se o processo fechando o vértice **D** sem outras modificações na tabela.

Estágio 5 (Final) :

	A*	B*	C*	D*	E*	F*
Distância	0	8	4	14	6	12
Anterior	-	E	A	B	C	E

Esta tabela final, com todos seus vértice marcados com (*), tem a particularidade de possibilitar a recuperação das distâncias entre os vértices e os percursos com certa facilidade. Por exemplo, indo do vértice **A** ao vértice **B**, podemos verificar que o vértice **E** antecede **B** e que o vértice **C** antecede **E**. Por fim, o vértice **A** é quem antecede **C**. Daí podemos formar o caminho **A-C-E-B**.

Observações:

- Como foi visto anteriormente, o computador reconhece o grafo através de uma linguagem própria, por exemplo, um dos tipos de matrizes apresentados. Podemos construir uma matriz de adjacência para o grafo analisado anteriormente:

Tabela 8 – Matriz de Adjacência grafo algoritmo de Dijkstra

	A	B	C	D	E	F
A	0	12	4	0	0	0
B	0	0	6	6	0	0
C	0	10	0	0	2	0
D	0	0	8	0	0	6
E	0	2	0	0	0	6
F	0	0	0	0	0	0

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

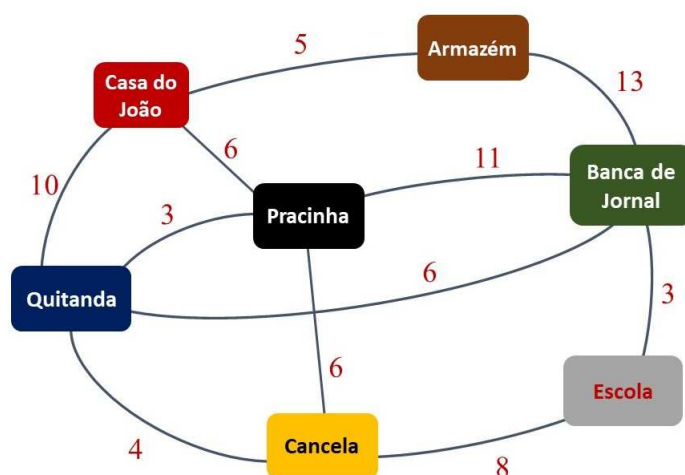
- Este algoritmo, para valores negativos das arestas, não garante um resultado correto, pois, caso haja valores de distâncias negativos, mesmo após fechado um vértice, a distância talvez ainda possa ser melhorada.
- Utilizamos o termo distância apesar de não ter sido ainda definido formalmente. Assim, tem-se que:

A distância d_{ij} do vértice v_i ao vértice v_j será *infinita* para não existência no grafo G de um caminho de i até j e é *finita* caso o caminho exista; neste caso, ela será igual ao valor do *menor caminho* entre i e j , assumindo o valor 0 caso $i = j$.

4.4.2 Qual o menor caminho até a escola?

Vejamos um problema envolvendo otimização de distância bastante conhecido, onde também utiliza-se a ideia contida no algoritmo de Dijkstra.

Figura 49 – Grafo não-orientado valorado (Algoritmo de Dijkstra)



Fonte: autor, a partir de Netto e Jurkiewicz (2017, p.32).

Primeiramente, é importante esclarecer que as arestas do grafo são valoradas e devemos levar em conta que as distâncias são um pouco diferentes do que de costume. Uma distância maior não necessariamente representa uma aresta de comprimento maior, e sim, alguma dificuldade que possa existir no trajeto que gere um custo maior.

Nosso trajeto inicia-se no ponto **Casa do João**.

Posso chegar até	Com distância	Vindo de
J *	0	...
A	∞	-
P	∞	-
Q	∞	-
B	∞	-
C	∞	-
E	∞	-

A partir deste ponto, podemos atingir diretamente os vértices:

- Armazém com distância 5;
- Pracinha com distância 6;
- Quitanda com distância 10.

A distância até o armazém não pode ser melhorada, então fecharemos o vértice.

Posso chegar até	Com distância	Vindo de
J *	0	...
A *	5	J
P	6	J
Q	10	J
B	∞	-
C	∞	-
E	∞	-

Podemos continuar analisando o caminho indo pelo armazém, que é vizinho da banca de Jornal. Observe que a distância de J a B será de $5 + 13 = 18$ (o que é menor do que ∞ , ficamos com 18).

Temos um próximo vértice a ser fechado que é a pracinha (depois do vértice A é a menor distância até J).

Posso chegar até	Com distância	Vindo de
J *	0	...
A *	5	J
P *	6	J
Q	10	J
B	18	A
C	∞	-
E	∞	-

Observe também que o vértice B (banca de jornal) ainda não foi fechado. Como a distância da pracinha não pode ser melhorada, seguimos nosso caminho a partir dela. Quais vértices podemos atingir diretamente a partir da pracinha?

- Quitanda: com distância $6 + 3 = 9$ (como é menor do que 10, ficamos com 9);
- Cancela: com distância $6 + 6 = 12$ (menor do que ∞ , ficamos com 12);
- Banca de jornal: com distância $6 + 11 = 17$ (encontramos uma distância menor do que 18, mudamos para 17 então).

Posso chegar até	Com distância	Vindo de
J *	0	...
A *	5	J
P *	6	J
Q *	9	P
B	17	P
C	12	P
E	∞	-

Nos resta analisar as distâncias a partir da quitanda.

Da quitanda, quais vértices podem ser alcançados diretamente?

- Banca de Jornal: com distância $9 + 6 = 15$ (é menor do que 17, ficamos com 15, e esta é a menor distância entre J e B);
- Cancela: com distância $9 + 4 = 13$ (maior do que 12, permanecemos com 12).

Posso chegar até	Com distância	Vindo de
J *	0	...
A *	5	J
P *	6	J
Q *	9	P
B	15	Q
C *	12	P
E	∞	-

Podemos observar na tabela anterior que o vértice C foi fechado antes do vértice B, isto significa que o fechamento dos vértices não segue necessariamente a ordem da tabela.

Vamos partir da cancela, que fechamos por último. Deste vértice, quais outros alcançamos diretamente?

- Escola: com distância acumulada de $12 + 8 = 20$ (por ser menor do que ∞ , deixamos o 20).

Posso chegar até	Com distância	Vindo de
J *	0	...
A *	5	J
P *	6	J
Q *	9	P
B *	15	Q
C *	12	P
E	20	C

Por fim, vamos analisar o último caminho possível em aberto: passando pela banca de Jornal.

Por este caminho, atingimos diretamente a escola, e com distância acumulada de $15 + 3 = 18$ (é menor do que 20, substituímos por 18).

Fecharemos também o vértice B.

Posso chegar até	Com distância	Vindo de
J *	0	...
A *	5	J
P *	6	J
Q *	9	P
B *	15	Q
C *	12	P
E *	18	B

Alguns aspectos importantes podem ser destacados:

- O algoritmo de Dijkstra encontra um menor caminho entre um vértice dado e os demais vértices, e não entre dois quaisquer vértices do grafo;
- Tanto no primeiro exemplo quanto neste, o grafo resultante é uma árvore;
- Podemos representar a situação diretamente por uma matriz (por exemplo, de adjacência).

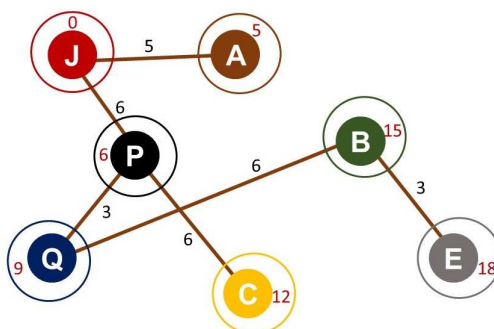
Tabela 9 – Matriz de Adjacência do grafo não orientado da Fig: 49.

	J	A	P	Q	B	C	E
J	0	5	6	10	∞	∞	∞
A	5	0	∞	∞	13	∞	∞
P	6	∞	0	3	11	6	∞
Q	10	∞	3	0	6	4	∞
B	∞	13	11	6	0	∞	3
C	∞	∞	6	4	∞	0	8
E	∞	∞	∞	∞	3	8	0

Fonte: Jurkiewicz (2009, p.43)

A árvore resultante deste exemplo aparece a seguir.

Figura 50 – Árvore resultante menor caminho (Algoritmo de Dijkstra)



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

4.5 Grafos completos e polígonos convexos

O aprofundamento no estudo dos grafos pode nos levar ao Teorema de Euler para poliedros convexos. Isto seria perfeitamente uma aplicação de grafos na geometria. Porém, o que será apresentado não consiste exatamente numa aplicação; trata-se mais de uma curiosidade da relação que pode ser feita entre grafos completos e polígonos convexos.

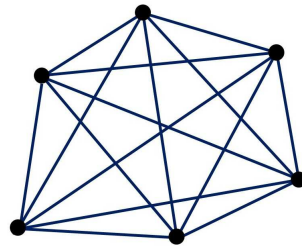
Foi visto anteriormente que um grafo G completo é um grafo onde, para quaisquer dois vértices escolhidos, existe uma aresta ligando-os. Observe que isto só será possível se, sendo m o número de arestas do grafo G e n o seu número de vértices,

$$m = \frac{n \cdot (n - 1)}{2}$$

Tome como exemplo o grafo não-orientado completo da figura 51.

O grafo tem 6 vértices, logo $m = 15$.

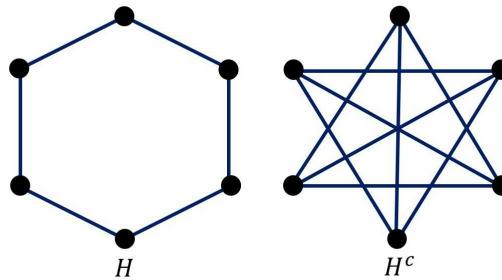
Figura 51 – Grafo completo não-orientado



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Podemos "desmembrar" o grafo da figura 51 em dois grafos: H e H^c , onde H é um ciclo contendo todos os vértices de H .

Figura 52 – Grafos complementares (Hexágono regular/ Diagonais)



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Se fizermos uma comparação com o hexágono regular (não é necessário que seja regular), temos que a quantidade de vértices de H é igual ao número de vértices do polígono, assim como o número de arestas de H corresponde a quantidade de lados do polígono. Já a quantidade de arestas de H^c é igual ao número de diagonais do hexágono regular. Ou seja, em H , $n = 6$ e $m = 6$. Já em H^c , $n = 6$ e $m = 9$.

Podemos dizer que esse fato ocorre porque:

I - O número de lados de um polígono convexo com n vértices é n ;

II - O número de diagonais de um polígono convexo de n vértices é dado por $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$.

Agora, quando somamos as expressões de I e II:

$$\begin{aligned} & n + \frac{n \cdot (n - 3)}{2} \\ &= \frac{2n + n^2 - 3n}{2} \\ &= \frac{n^2 - n}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{n \cdot (n - 1)}{2}$$

que é justamente o número de arestas de um grafo completo com n vértices.

4.6 Aplicações de Coloração

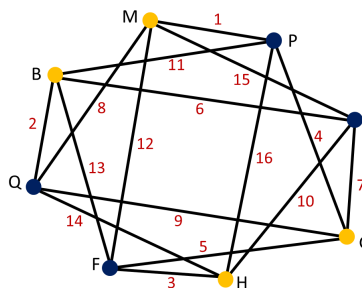
Uma aplicação clássica da coloração de grafos apresenta-se com o problema dos exames. A tabela abaixo mostra a alocação de alunos nos exames finais que eles devem prestar.

Alunos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Matemática	x							x				x			x	
Português	x			x							x					x
Inglês						x	x			x					x	
Geografia				x	x		x		x							
História			x							x				x		x
Física			x		x							x	x			
Química		x						x	x					x		
Biologia		x				x					x		x			

Duas disciplinas que têm alunos em comum para realizarem o exame não devem ter a aplicação do exame simultaneamente. Neste caso, podemos construir um grafo G associado à tabela (matriz de incidência), com $V = \{M, P, I, G, H, F, Q, B\}$; onde haverá uma aresta entre dois vértices que representem disciplinas com alunos em comum.

Duas cores foram suficientes para colorir o grafo sem que vértices adjacentes recebessem cores iguais, ou seja, $\chi(G) = 2$. Tomando uma das bipartições do grafo G , temos que, dois horários são suficientes para realização dos exames, um para $\{B, G, H, M\}$ e outro para $\{F, I, P, Q\}$.

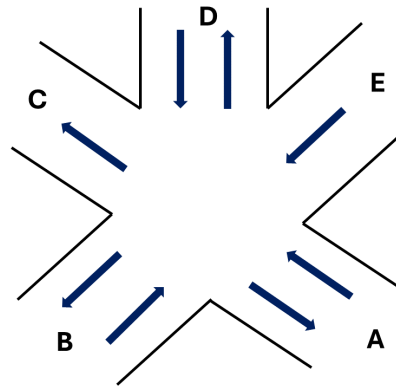
Figura 53 – Grafo colorido



Fonte: Elaborado pelo autor

Podemos encontrar uma outra aplicação da coloração de grafos em um problema de determinação de períodos para um sinal de trânsito. As setas indicam as direções que podem ser tomadas no cruzamento das vias. Observemos a figura 54:

Figura 54 – Cruzamento de vias

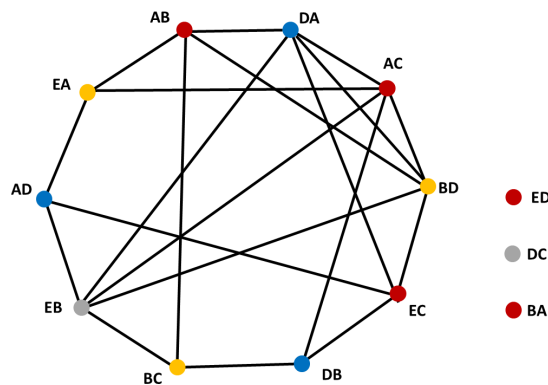


Fonte: autor, a partir de Jurkiewicz (2009, 79)

O trânsito pode ser organizado tomando-se como modelo um grafo G em que os vértices representem as possíveis direções. Desse modo, tem-se $V = \{AB, AC, AD, BA, BC, BD, DA, DB, DC, EA, EB, EC, ED\}$.

Vamos ligar os vértices que representem direções incompatíveis (as direções se cruzam caso exista um sinal de trânsito livre, por exemplo).

Figura 55 – Grafo colorido cruzamento de vias



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Observe que, por serem compatíveis com todas as direções, BA, DC e ED estão representados como vértices isolados. Uma coloração deve corresponder ao número de períodos que buscamos como solução do problema. Colorir os vértices do grafo com 13 cores diferentes, uma para cada vértice, é bastante simples, mas representa um desperdício de tempo conforme nosso problema. Por outro lado, o grafo G possui um subgrafo K_4 , quando tomamos os vértices AC, BD, DA e EB, assim, precisamos de pelo menos 4 cores. Desse modo, $\chi(G) = 4$. Logo, 4 períodos são suficientes. Isso pode ser confirmado com a partição em conjuntos independentes $\{AB, BA, AC, EC, ED\}$, $\{BC, BD, EA\}$, $\{AD, DA, DB\}$ e $\{EB, DC\}$.

Na figura a seguir, encontra-se um algoritmo computacional para coloração de gra-

fos.

Figura 56 – Algoritmo de coloração

```

início < dados: grafo  $G = (V, E)$  >;
 $C_i \leftarrow \emptyset$  ( $i = 2, \dots, n$ );  $C_1 \leftarrow \{1\}$ ;
para  $j$  de 2 a  $n$  fazer
     $k = \min \{i \mid N(j) \cap C_i = \emptyset, i = 1, \dots, n\}$ ; < a primeira classe viável é utilizada >
     $C_k \leftarrow C_k \cup \{j\}$ ; < o vértice  $j$  entra na classe  $C_k$  >
fim para;
fim.

```

Fonte: Netto e Jurkiewicz (2017, p.108), 2024.

4.7 Grafos em aplicativos e sites de redes sociais

Nos problemas de caminhos mínimos, buscamos compreender um pouco do funcionamento de um tipo de algoritmo envolvido nas buscas de otimização dos percursos, no qual vimos que os grafos estão diretamente relacionados. Seguiremos procurando compreender alguns aspectos do funcionamento dos ¹sites de redes sociais, buscando, de maneira simplificada, entender um pouco da relação com a teoria dos grafos.

Conforme Appel e Junior (2010), podemos aplicar grafos na modelagem de redes sociais.

Uma rede complexa é, normalmente, modelada como um grafo, ou seja, a rede complexa é representada através de um objeto matemático cujos nós, também chamados vértices, modelam elementos (que podem ser páginas web, pessoas, computadores) e as arestas modelam relacionamento entre os nós (APPEL; JUNIOR, 2010, p.131)

Vamos tomar como exemplo um aplicativo fictício "L" (Life). Este aplicativo é associado a um número de telefone móvel e nos permite, entre outras coisas, enviar mensagem (texto, imagens, vídeos, . . .), fazer ligação, videochamada, entre outros. Podemos imaginar que os diversos usuários desse aplicativo formam uma rede que pode ser associada a um grafo G , onde cada usuário pode ser representado por um vértice v , enquanto que a relação entre dois destes usuários pode ser representada por uma aresta e . Agora, suponha que alguns destes usuários resolveram formar um grupo, pois neste aplicativo tem-se esta possibilidade. Assim, existiria um subgrafo induzido, que por sua vez é um grafo completo. De fato, cada mensagem enviada seria levada diretamente para todos os participantes do grupo (neste caso, estamos considerando que uma mensagem enviada "esbarra" no outro vértice até ser reenviada).

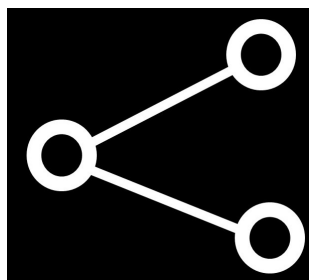
¹ Há uma diferença entre redes sociais e os sites de redes sociais propriamente ditos, mas em diversos casos, utiliza-se redes sociais para indicar ambos. As redes sociais são bem mais abrangentes e podem indicar relações tanto online quanto offline.

Diversos *sites* de redes sociais como, Facebook, Twitter, WhatsApp, Instagram, X (antigo Twitter), citando os mais conhecidos, podem ser modelados, de maneira simplificada, como feito anteriormente, por grafos. Recuero (2017) afirma que

A teoria dos grafos provê o suporte matemático de análise...O grafo é, desse modo, uma representação de dois conjuntos de variáveis (nós e conexões). Concebendo uma rede social como uma dessas representações, os nós seriam os atores sociais (compreendendo esses atores como organizações sociais, grupos ou mesmo indivíduos no conjunto analisado) e suas conexões (aqui entendidas como os elementos que serão considerados parte da estrutura social, como interações formais ou informais, conversações etc.) (RECUERO, 2017, p.21).

Observamos que, ao clicarmos em uma imagem da galeria de alguns smartphones, nos deparamos com o ícone que aparece na figura 57. Isso tem sua razão, pois o grafo que aparece neste ícone representa o compartilhamento para uma rede, que ocorrerá quando a imagem for enviada e, na maioria das vezes, é utilizado sem o conhecimento de tratar-se de um grafo.

Figura 57 – Símbolo de compartilhamento

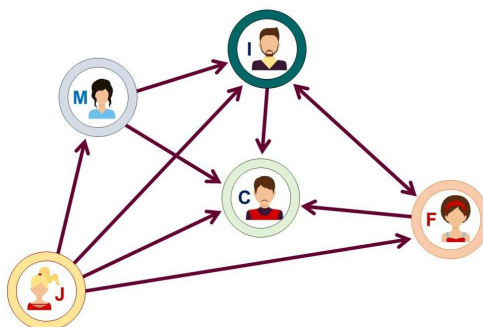


Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Suponhamos agora que Maria, Janete, Ítalo, Cosme e Fernanda fossem usuários do site de rede Instagram. Este site permite aos seus usuários uma gama de formas de interação: compartilhar mensagens (imagens, vídeos e etc.), "seguir" outros perfis, tendo a possibilidade de acompanhar suas publicações em um "feed" e nos "stories", e ainda interagir por outros meios, tais como "curtidas" e "reações".

O grafo que aparece na figura 58 é orientado, onde os sentidos das arestas indicam qual usuário segue ao outro usuário. Conforme podemos verificar no grafo, Janete segue aos demais usuários. Já Carlos é seguido por todos os outros, porém não segue a ninguém. Ao contrário do que possa parecer à primeira vista, o conteúdo publicado pelo usuário Carlos tem uma maior probabilidade de ser visto pelos demais usuários, isso porque a relação de influência, neste caso, "percorre" o sentido contrário dos indicados pelas arestas.

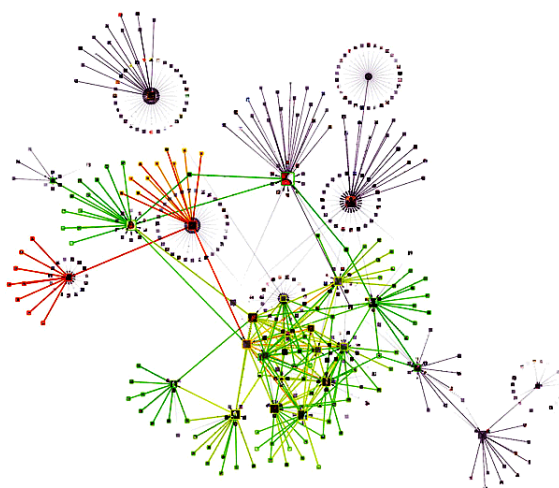
Figura 58 – Grafo de representação de rede social



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Aqui, discutimos um caso bem simplificado e de fácil compreensão, que é o nosso intuito. Contudo, na prática, as redes tornam os grafos bem mais abrangentes e complexos. Observe o grafo que aparece na figura 59 para tentar se convencer deste fato.

Figura 59 – Grafo modelo de rede social



Fonte: Researchgate, 2024.

5 Proposta da Sequência Didática

Reservamos este capítulo para tratarmos um pouco da motivação que nos conduziu a desenvolvermos a pesquisa neste tema. Assim, tentamos destacar as interações entre os seguintes pontos: estudo da teoria dos grafos, compreensão sobre alguns algoritmos, utilização dos grafos para modelar de maneira simplificada o funcionamento de aplicativos de redes sociais (em especial, depreender a existência de algoritmos de recomendação), desenvolvimento socioemocional dos estudantes. Neste intuito procuramos apresentar algumas relações que consideramos pertinentes entre tais conteúdos e, como ápice, uma proposta de sequência didática que possa contemplar de maneira dinâmica e eficaz o tema grafos em sala de aula como um conteúdo matemático que pode contribuir no desenvolvimento intelectual do aluno a partir da comunicação com diversas áreas do conhecimento. Outrossim, auxiliar na compreensão de tecnologias contemporâneas e conseqüentemente no desenvolvimento socioemocional do estudante, visto que tais tecnologias permeiam o cotidiano dos estudantes e influenciam também diretamente no modo com o qual estes relacionam-se com os demais e lidam com suas emoções.

5.1 A teoria dos grafos

Sabemos que a BNCC norteia o ensino do país, ao tratar de habilidades a serem desenvolvidas a partir das competências em que estão inseridas, relativamente a todos os conteúdos do Ensino Básico; anos iniciais e anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. A escolha do trabalho com ensino de grafos na Escola Básica encontra respaldo em algumas competências dentre as 10 competências gerais¹ dispostas na BNCC.

Primeiramente, é possível de se verificar no exposto anteriormente neste trabalho, tanto no apanhado histórico sobre os grafos quanto na conceituação e aplicações apresentados, que eles têm aplicações em diversas áreas, assim, quando levados para sala de aula, há um leque de possibilidades para interdisciplinaridade envolvendo este conteúdo. Conforme encontramos no texto da BNCC:

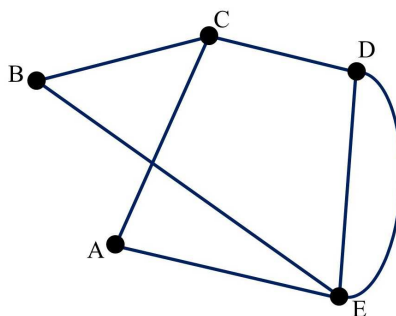
¹ Embora estejamos embasando sobre algumas competências gerais da BNCC, podemos encontrar as demais competências e o texto na íntegra em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>>

1- Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. (BRASIL, 2018, p.09)

Vimos que a teoria dos grafos tem um surgimento relativamente recente com Euler ao resolver o problema das pontes de Königsberg e uma sequência histórica envolvendo a contribuição de vários outros estudiosos, resultando no desenvolvimento da teoria, a qual foi amplificada com o desenvolvimento computacional. Além disto, o estudo de grafos permite ao estudante lidar com um conteúdo eficaz para a abordagem de problemas em que a quantidade de cálculos, por vezes, é mínima. Por outro lado, há a possibilidade de uma abordagem voltada ao desenvolvimento do raciocínio, à argumentação. Ou seja, tem-se um conteúdo que, em diversos casos, possibilita a priorização do pensamento em detrimento dos cálculos. Este fato fica bastante evidenciado nos problemas que foram abordados, cuja resolução passou pela utilização dos grafos; alguns deles são totalmente voltados à demonstração da impossibilidade da situação ocorrer, caso do problema dos quatro cavalos e o de origem com as pontes de Königsberg. Levemos em conta que problemas deste tipo quase não figuram no Ensino Básico.

Agora tomemos como exemplo o seguinte problema: No grafo da figura 60, seria possível reproduzir o "desenho", sem tirar o lápis do papel e sem passar por uma aresta mais de uma vez, saindo de um dos vértices e retornando a ele? Ou iniciando em um dos vértices e terminando em outro? Isto seria equivalente à percorrer uma trilha no grafo passando por todas as arestas, saindo de um dos vértices e retornando a ele (trilha fechada). Ou ainda, na segunda situação, passar por todas as arestas e terminar em um vértice distinto (trilha aberta).

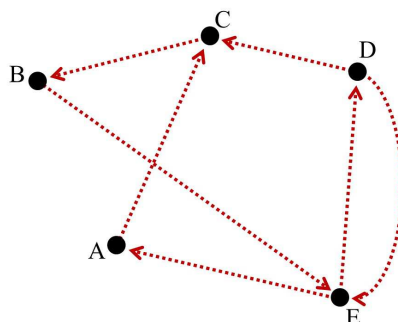
Figura 60 – Grafo Semieuleriano



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Como podemos observar, o grafo apresentado não é euleriano, contudo é semieuleriano. Assim, partindo de um dos seus vértices de grau ímpar, é possível percorrer uma trilha passando por todas as suas arestas e terminar no outro vértice também de grau ímpar. Apresentamos a seguir na figura 61 uma das possibilidades de percurso

Figura 61 – Caminho semieuleriano



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Observe a trilha aberta DCBEDEAC como sendo uma solução ao problema proposto, de acordo com a trilha no grafo da figura 61. Este problema é mesmo importante? Imaginemos um desastre ocorrido com enxurradas e que tenha deixado apenas os locais indicados pelos vértices para que os habitantes possam refugiar-se. O corpo de bombeiros local pretende levar mantimentos e fazer outros atendimentos, de maneira a dar suporte a todos, passando apenas uma vez por cada estrada para diminuir gastos.

Estes tipos de problemas trouxeram à tona a busca pela otimização de rotas e, com o surgimento dos algoritmos computacionais, isso tem se intensificado nos últimos anos.

Netto (2003), sobre os algoritmos relacionados a estes tipos de problemas, afirma o disposto a seguir:

Dentre as subestruturas de grafos que oferecem solução para problemas aplicados, os caminhos se destacam especialmente pelo potencial associado aos problemas de trânsito, transporte em geral e localização em sistemas discretos. A variedade de situações é muito grande e, conseqüentemente, os problemas podem ser mais ou menos complexos, inclusive do ponto de vista computacional. Em vista disso, há um grande número de algoritmos propostos para a determinação de caminhos nas situações as mais diversas[...] (NETTO, 2003, p.53)

Há alguns anos, quando alguém se "aventurava" por ruas, avenidas, vielas de uma cidade desconhecida ou grandes centros urbanos, existia uma opção de livro chamado "guia", o qual continha o mapa das ruas locais e auxiliava seu usuário a nortear-se naquela localidade. Atualmente, é quase certo o uso de aplicativos envolvidos com este propósito, o Google Maps é um bom exemplo disso. O que pretendemos destacar é que estas tecnologias estão cada vez mais comuns e ao alcance de nossas mãos todo o tempo através dos smartphones. Embora a melhor rota entre duas localidades talvez não seja ainda de interesse de nossos estudantes, entre eles, já é mais do que usual o compartilhamento da localização (dada por GPS) pelas redes sociais disponíveis, no intuito de se encontrarem. Ou seja, talvez ainda não tenham despertado o interesse pelo estudo do tema, embora já seja totalmente frequente sua utilização.

Figura 62 – GPS



Fonte: www.dgabc.com.br

5.2 Algoritmos computacionais

Atualmente, os algoritmos computacionais estão presentes em diversas ações corriqueiras, visto que os computadores, smartphones e outros ganharam um espaço amplo no cotidiano das pessoas. Pierro (2018) afirma que

Embora influenciem até mesmo atividades cotidianas prosaicas, como a procura de atalhos no trânsito com a ajuda de aplicativos de celular, os algoritmos costumam ser vistos como objetos intangíveis pela população em geral - que sente seus efeitos, mas não conhece nem compreende seu formato e modo de ação. (PIERRO, 2018).

Podemos considerar um algoritmo como um conjunto de etapas a serem seguidas no intuito de executar uma tarefa, e isso em um contexto bastante geral. Por exemplo, algoritmos matemáticos, tais como, o Algoritmo de Euclides, que nos permite através de passos bem determinados encontrar o MDC entre dois números inteiros. Vamos, contudo, nos restringir aos algoritmos executados por computadores. (PIERRO, 2018) descreve um algoritmo computacional da seguinte maneira:

Um algoritmo nada mais é do que uma sequência de etapas para resolver um problema ou realizar uma tarefa de forma automática, quer ele tenha apenas uma dezena de linhas de programação ou milhões delas empilhadas em uma espécie de pergaminho virtual. (PIERRO, 2018).

Sabemos que cada etapa das instruções do algoritmo executada por um computador ocorre em um intervalo de tempo limitado, e isso é importante, pois por esse motivo, há uma busca por algoritmos que possam executar a tarefa pretendida sempre no menor tempo possível. Vimos anteriormente um algoritmo desenvolvido para otimização de distâncias, o Algoritmo de Dijkstra, o qual é suficiente para iniciarmos a compreensão sobre como funcionam os aplicativos de GPS, pois, a partir deste al-

goritmo podemos modelar a busca pela menor distância² apresentada pelo GPS, haja vista esta assemelhar-se à menor rota de navegação em um tipo de grafo.

5.3 Desenvolvimento socioemocional do estudante

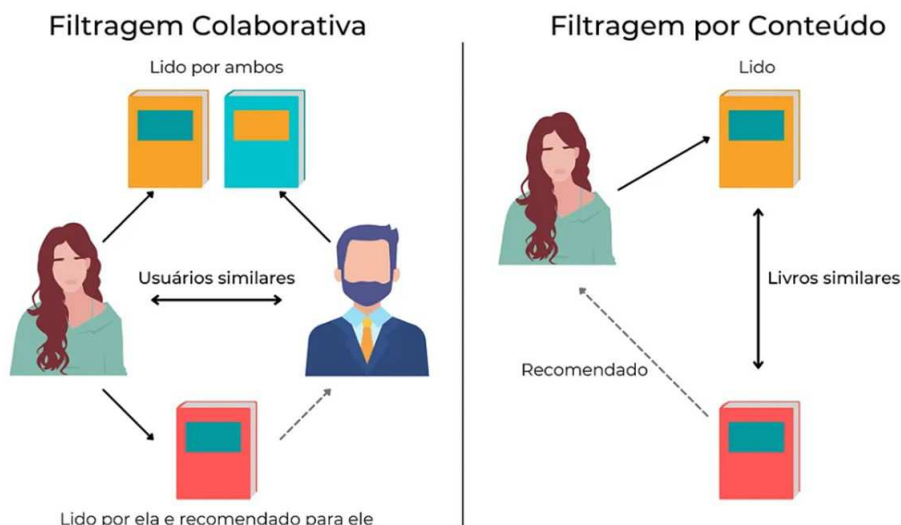
Certamente, ao navegar por uma página da internet (numa pesquisa, por exemplo), você já deve ter notado que, como que por "passe de mágica", seus acessos em outras páginas, por exemplo, nas redes sociais, passaram a receber informações relacionadas à sua pesquisa. E este fato relaciona-se em quê ao que estamos aqui debatendo? Na verdade, o que ocorre é que certos algoritmos foram sendo desenvolvidos nos últimos anos e espalhados pela internet. Em especial, estes algoritmos; os tais "algoritmos de recomendação" são responsáveis por uma grande mudança em nossa forma de interagir ao navegarmos pela internet. Basicamente, tais algoritmos buscam conduzir o usuário à experiência de navegação conforme um perfil de busca, ou seja, de acordo com o que o usuário busca naquele momento, para isto, baseiam-se em buscas recentes do usuário. Aqui temos um ponto que carece de bastante foco, é que de maneira muito despercebida alguns sites de redes sociais foram mudando sua política de trabalho na oferta de conteúdos, baseando-se não mais somente na interação entre os usuários, contudo, levando também em conta os interesses do usuário. Isso ocorre, pois algumas empresas, tais como o Facebook, atualmente dona do Instagram e do WhatsApp, ao adquirirem as empresas, incorporam a política de funcionamento destas. O facebook passou a trabalhar com o "Reels"³, maneira própria de trabalho do Instagram, e que oferta uma rede de vídeos curtos na página do usuário baseados, também, em interações e buscas anteriores feitas pelo usuário. Desse modo, pode acontecer de o conteúdo oferecido a um certo usuário do aplicativo advir de uma busca relacionada, ou seja, alguma pesquisa ou interação com um conteúdo similar, ou ainda, a oferta acontecer por ser um conteúdo cujo "interesse" é compartilhado com alguém de sua rede. Na figura 63, podemos observar uma modelagem dessas possibilidades.

Atualmente, há diversos sites especializados em indicar produtos com potencial de compra conforme interesse do usuário.

² Observe que a menor distância, neste caso, não significa obrigatoriamente a menor quilometragem. Pode ocorrer de existirem fatores que atrapalhem no percurso e isto implica aumento da distância na rota traçada pelo GPS.

³ Para obter mais informações sobre esta ferramenta de interação das redes, como surgimento e finalidade, você pode acessar: <<https://nerdweb.com.br/artigos/2022/07/o-que-e-reels-o-recurso-que-esta-mudando-a-forma-de-usar-o-instagram.html>>

Figura 63 – Sistemas de recomendação



Fonte: Thaispatricio, 2024.

Exposto tudo isto, compartilhamos e descrevemos uma preocupação com o lado do desenvolvimento socioemocional do estudante. Observe o recorte da notícia apresentado a seguir na figura 64:

Figura 64 – Notícia: Culpa do Algoritmo



Fonte: autor, a partir de G1 (2024).

Certamente o leitor, atencioso e precavido que é, irá conferir a notícia na íntegra, com esse intuito, deixamos o acesso "[notícia na íntegra 1](https://g1.globo.com/mundo/noticia/2023/09/19/culpa-do-algoritmo-pais-processam-tiktok-apos-suicidio-de-filha-vitima-de-bullying-na-franca.ghtml)"⁴ na leitura online.

⁴ Para acessar a notícia na íntegra, você pode usar o endereço: <https://g1.globo.com/mundo/noticia/2023/09/19/culpa-do-algoritmo-pais-processam-tiktok-apos-suicidio-de-filha-vitima-de-bullying-na-franca.ghtml>

Esta notícia trará também um caso semelhante ocorrido no Reino Unido, em 2017, após o suicídio de uma adolescente de 14 anos, na qual os pais afirmaram que a influência de conteúdos visitados pela filha poderia ter contribuído para o fato. A notícia traz ainda relacionado a este último caso, o relato de que, em 2022, teria ocorrido o reconhecimento da justiça britânica da influência de algoritmos no ato da jovem.

Os casos citados anteriormente, quando surgiram, foram reconhecidos em âmbito mundial, porém, casos semelhantes ocorrem por todo o mundo sem a mesma visualização. No Brasil, também não é diferente. Nossos adolescentes (nossa preocupação aumenta na faixa etária de 14 ou 15 anos) lidam com estes aplicativos de redes sociais o tempo todo, o que gera uma certa apreensão no modo com o qual os conteúdos lhes são apresentados e o quanto estão desinformados sobre a influência exercida por tais algoritmos.

A vida com a influência causada por estes algoritmos não é algo tão recente, conforme podemos observar no recorte da notícia obtida ainda na mesma plataforma em que encontramos a notícia anterior e que apresenta-se na figura 65

Figura 65 – Notícia: Especialista alerta para ameaça dos algoritmos



Fonte: Autor, a partir de G1 (2024).

Do mesmo modo que fizemos com o endereço da notícia anterior, faremos aqui com "notícia na íntegra 2" ⁵ na leitura online.

Sabemos que a educação está firmada nos quatro pilares; Aprender a Conhecer, Aprender a Fazer, Aprender a Ser e Aprender a Conviver. Acreditamos que o conteúdo

⁵ Para acessar a notícia na íntegra, você pode usar o endereço: <https://g1.globo.com/tecnologia/noticia/2011/08/especialista-alerta-para-ameaca-dos-algoritmos.html>

grafos pode nos ajudar a abrir uma discussão que permeia estes objetivos educacionais, sobretudo no campo do desenvolvimento socioemocional do estudante. Diante disso tudo, vemos a necessidade de a escola abordar um conteúdo que possibilite modelar, mesmo que de maneira simplificada, e torne compreensível ao estudante a forma com que determinados conteúdos podem surgir em suas redes de interações sociais online.

Figura 66 – Quatro pilares da educação



Fonte: Inovar, 2024.

Entendemos que, com as rápidas transformações ocorridas a respeito dos algoritmos nas redes sociais, por meio do estudo dos grafos, a escola pode contribuir com o desenvolvimento socioemocional do estudante, buscando a autoconsciência a respeito de como sua navegação nas redes sociais pode estar sendo direcionada por algoritmos computacionais, e estes não trabalham com sentimentos (são programações, portanto agem de forma "mecânica") e isso requer um grau maior de atenção. É um tema bastante atual, do cotidiano do estudante e passando por transformações inimagináveis. Logo, faz-se necessário uma intervenção da escola, pois, conforme D'Ambrosio (2012).

Estamos entrando na Era do que se costuma chamar a "sociedade do conhecimento". A escola não se justifica pela apresentação de conhecimento obsoleto e ultrapassado e muitas vezes morto. Sobre tudo ao se falar em ciências e tecnologia. Será essencial para a escola estimular a aquisição, a organização, a geração e a difusão do conhecimento vivo, integrado nos valores e nas expectativas da sociedade. Isso será impossível de atingir sem a ampla utilização de tecnologia na educação. (D'AMBROSIO, 2012, p.74).

Esta construção individual do estudante (aspecto socioemocional) pode abrir a possibilidade para a conscientização de seu papel como integrante social, antes de qualquer coisa, um pouco mais ciente de sua realidade de interação com algumas tecnologias com as quais lida todo o tempo e o quanto podem afetá-lo em sua forma de interação social.

Além disso, talvez contribuindo para diminuição de casos de "bullying", como o que gerou o acontecido que vimos na notícia da figura 64.

Portanto, com essa finalidade, procuramos apresentar no próximo capítulo uma proposta de sequência didática com o tema grafos de modo que atenda um pouco à cada objetivo: Aprender a Conhecer, Aprender a Fazer, Aprender a Ser e Aprender a Conviver, conforme etapas de aplicação. Além disso, buscamos fazer uma análise da aplicação para podermos trazer resultados de pontos altos e baixos que venham a surgir quando colocada em prática.

6 Sequência Didática

6.1 Aplicação e análise

Destinamos esta parte do trabalho à sequência didática com seu desenvolvimento, aplicação e conseqüente avaliação do trabalho por meio de análise dos resultados. Apon-
tamos como destaque esta última fase do processo, pois a avaliação nos permite um
redirecionamento do ensino conforme resultados obtidos, e isto se faz pertinente, visto
que, podem ocorrer imprevistos na aplicação. Há diversos fatores que possivelmente
acabam gerando alterações na forma como transcorre a aplicação, a exemplo disso, as
características individuais de cada turma. Para Luckesi (2023):

Em síntese, o planejamento é o ato pelo qual configuramos de ma-
neira filosófica, política, científica e operacional aquilo que desejamos
construir com nossa ação; a execução é o ato através do qual reali-
zamos as decisões previamente tomadas; e, finalmente, a avaliação é
o ato que nos possibilita a identificação da qualidade dos resultados
da ação executada, subsidiando nossas decisões, seja para acolher a
realidade com a qualidade obtida, seja para subsidiar novas decisões.
(LUCKESI, 2023, p.30).

Inicialmente, busquemos no texto da BNCC quais habilidades estão diretamente
relacionadas ao tema grafos, ou quais habilidades podemos relacionar à sequência di-
dática que estaremos propondo.

Para o 6º Ano, a BNCC apresenta a seguinte habilidade:

Figura 67 – Habilidade 6º Ano BNCC

MATEMÁTICA – 6º ANO	
UNIDADES TEMÁTICAS	HABILIDADES
Probabilidade e estatística	(EF06MA34) Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados (por exemplo, posições de cidades considerando as estradas que as unem, hierarquia dos funcionários de uma empresa etc.
OBJETOS DE CONHECIMENTO	
Diferentes tipos de representação de informações: gráficos e fluxogramas	

Fonte: autor, a partir da BNCC, p.306, (2024).

Igualmente, encontramos uma habilidade que se encaixa ao tema nas habilidades propostas para o Ensino Médio, descrita no texto da BNCC da seguinte forma:

Figura 68 – Habilidade Ensino Médio BNCC

MATEMÁTICA – ENSINO MÉDIO

HABILIDADES

(EM13MA310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

Fonte: autor, a partir da BNCC, p.537 (2024).

Como está indicado no código da habilidade, ela está relacionada com a competência 3, a qual, conforme texto da BNCC, tem-se o seguinte:

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p.535).

E que ainda será complementado no mesmo texto com o seguinte:

No caso da resolução e formulação de problemas, é importante contemplar contextos diversos (relativos tanto à própria Matemática, incluindo os oriundos do desenvolvimento tecnológico, como às outras áreas do conhecimento). Não é demais destacar que, também no Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida – por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. (BRASIL, 2018, p.535).

Percebemos que o currículo não tem muitas habilidades que mencionem os grafos, a não ser pelas habilidades expostas anteriormente. Mas isto é justamente o que tentamos propor; um conteúdo como este, pela sua importância no desenvolvimento da matemática e tecnologias contemporâneas, deveria estar amplamente presente no currículo do Ensino Básico.

Embora não tenhamos habilidades específicas para enquadrar nossa proposta, observamos que ela relaciona-se bastante com a segunda competência geral apresentada na BNCC, que em texto diz o seguinte:

Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática. (BRASIL, 2018, p.534).

Posteriormente, encontramos ressaltado no texto da BNCC que

O desenvolvimento dessa competência específica prevê ainda que os estudantes possam identificar aspectos consensuais ou não na discussão tanto dos problemas investigados como das intervenções propostas, com base em princípios solidários, éticos e sustentáveis, valorizando a diversidade de opiniões de grupos sociais e de indivíduos e sem quaisquer preconceitos. Nesse sentido, favorece a interação entre os estudantes, de forma cooperativa, para aprender e ensinar Matemática de forma significativa. (BRASIL, 2018, p.534).

Com esses pressupostos, propomos uma sequência didática que possa atender ao dinamismo necessário à apresentação do tema, inicialmente por meio de problemas e de um apanhado histórico, seguido por alguns conceitos básicos e, por fim, com aplicação do formulário e discussão sobre a importância de se conhecer os algoritmos de recomendação para uma melhor experiência com a interação na internet, ou seja, criticamente consciente das influências de tais algoritmos sobre sua navegação, sobretudo nas redes sociais. Sobre este aspecto, encontramos no texto da BNCC a oitava competência geral, dispondo o seguinte

Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas. (BRASIL, 2018, p.10).

O público alvo é de estudantes do Ensino Fundamental e Ensino Médio, situados na faixa etária de 14 e 15 anos. Iremos dividi-la em quatro etapas (quatro encontros) e sempre que possível utilizaremos problemas, soluções, demonstrações e outras informações propostos no corpo deste trabalho. Os encontros ficaram organizados do seguinte modo:

- I- apresentação do tema;
- II- abordagem dos conceitos básicos;
- III- relação com tecnologias contemporâneas;
- IV- aplicação e discussão do formulário-grafo (Google Forms).

6.2 Sequência Didática

Descrição

Título: Grafos: conhecendo a teoria, modelando tecnologias e desenvolvendo aspectos socioemocionais.

Professor: Lucivaldo José de Andrade Pereira

Público alvo: 9º ano do Ensino Fundamental ou 1º ano do Ensino Médio

Duração: 8 horas-aula

Habilidades

- Reconhecer a utilização de grafos como sendo um recurso matemático de aplicação para resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento;
- Reconhecer a importância da teoria dos grafos para o desenvolvimento de tecnologias atuais, por exemplo, redes sociais, otimização de caminhos e estudos de redes neurais;
- Identificar e classificar os principais tipos de grafos, reconhecendo seus elementos e suas representações em diagramas ou matrizes;
- Relacionar uma dada situação ou problema a um grafo e determinar caminhos para soluções com a utilização do grafo.

Recursos e Materiais

- Apostilas, caderno de rascunho, cartolina;
- Quadro branco e lápis;
- Projetor e notebook;
- Smartphones, tablets e acesso à internet.

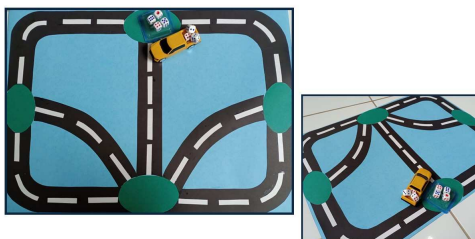
6.2.1 Primeiro encontro: Introdução ao tema grafos

Os estudantes devem estar agrupados em duplas ou em até quatro estudantes por grupo.

(Espera-se que esta etapa transcorra em 2 horas-aula)

Atividade 1 : Distribuir o esquema que representa o problema junto com os materiais (carrinho e 7 objetos, no caso, sete dados) que devem acompanhá-lo, e em seguida, propor o problema 1.

Figura 69 – Esquema quatro cidades (Sequência didática)



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Problema 6.1. *Uma empresa foi contratada para vistoriar as 7 rodovias que ligam um conjunto com quatro cidades. Para fazer o trabalho com o mínimo de gastos possível, essa empresa pretende instalar-se em qualquer uma das cidades, enviar um veículo para percorrer uma só vez cada rodovia (ao passar pela rodovia, não retornará por ela) e finalizar na cidade em que estiver instalada. A empresa conseguirá realizar essa tarefa conforme o planejado?*

Atividade 2: Observe que o problema anterior pode ser modelado por um grafo isomorfo ao grafo que representa o problema inicial das pontes de Königsberg. Daí, **utilizamos as informações contidas na seção inicial (Um breve passeio pela história dos grafos) e apresentamos um pouco da história do surgimento e desenvolvimento do tema grafos aos estudantes.**

Atividade 3: Em seguida, **propõe-se o problema 2**, retidado de Jurkiewicz (2009):

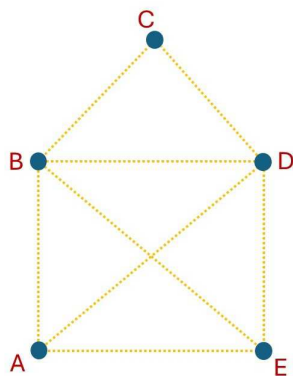
Problema 6.2. *O estudante seria capaz de desenhar a figura a seguir sem tirar o lápis do papel? É claro, indo de ponto a ponto, não sendo permitido passar por uma linha mais de uma vez.*

Alguns aspectos podem ser destacados na realização dessa tarefa:

- I - Representar as linhas do trajeto (trilha) pela sequência de letras dos vértices (rótulos);
- II - Abrir uma discussão sobre a importância desse tipo de problema. Conforme Jurkiewicz (2009):

Pensemos numa pequena cidade com pequeno orçamento. O serviço de recolhimento de lixo é feito por um pequeno caminhão. Queremos evitar o desperdício; uma boa ideia seria fazer o caminhão passar uma única vez por cada rua e retornar ao ponto de partida. (JURKIEWICZ, 2009, p.3).

Figura 70 – Grafo para cobrir (Sequência didática)



Fonte: autor, a partir de Jurkiewicz (2009) (2024).

Atividade 4: Propor aos estudantes a representação, por meio de um grafo, da seguinte situação retirada (com algumas modificações) de Jurkiewicz (2009):

Em uma escola algumas turmas resolveram realizar um torneio de vôlei. Participam do torneio as turmas 7^oA, 7^oB, 8^oA, 8^oB, 9^oA e 9^oB. Já foram realizados alguns jogos até agora:

- 7^o A - jogou com 8^o A, 8^o B, 9^o B;
- 7^o B - jogou com 8^o A, 9^o A;
- 8^o A - jogou com 7^o A, 7^o B;
- 8^o B - jogou com 7^o A, 9^oA, 9^o B;
- 9^o A - jogou com 7^o B, 8^o B, 9^oB;
- 9^o B - jogou com 7^o A, 7^o B, 8^o B, 9^o A.

Os estudantes devem ser instigados a compartilharem apresentando o grafo obtido por grupo ao restante da turma.

Atividade 5 : Propor o seguinte problema:

Problema 6.3. *Érica confecciona poliedros de acrílico para serem utilizados em aulas de matemática. Após serem montados, ela realiza um trabalho de pintura nos vértices e arestas desses sólidos, de modo que, iniciando em qualquer um dos vértices, passa por todas as arestas possíveis uma só vez, sem tirar o pincel da superfície do poliedro. Assim, sempre que possível, partindo de qualquer um dos vértices, a pintura ocorre em todas as arestas e retorna ao vértice inicial. Este trabalho é possível em um cubo, ou seja, iniciando e findando em um mesmo vértice?*

Os estudantes podem montar cubos de papel para executar tentativas, ou o problema pode ser abordado utilizando-se uma representação no aplicativo Geogebra.

6.2.2 Segundo encontro: Desenvolvimento das noções básicas de grafos

(Espera-se que esta etapa transcorra 2 horas-aula)

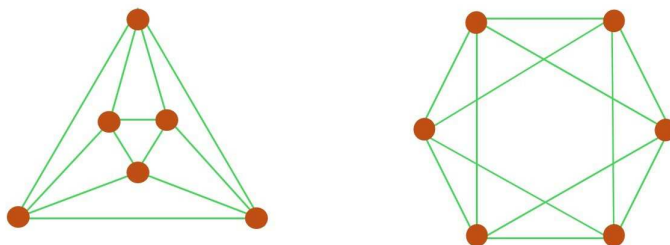
Atividade 1: Utilizando os registros da atividade 4 da Primeira parte, **apresenta-se as primeiras noções sobre grafos; o que são vértices, arestas, grau de um vértice e o primeiro resultado apresentado no corpo do trabalho e seu corolário:**

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2 \cdot |E(G)|$$

Apresenta-se em sequência **a noção de isomorfismo entre grafos** e propõe-se os seguintes exercícios:

Problema 6.4. *Mostre que os grafos da figura 71 são isomorfos.*

Figura 71 – Grafos isomorfos (Sequência didática)



Fonte: autor, a partir de Jurkiewicz (2009, p.16) (2024).

Atividade 2: Nesta etapa, **apresenta-se o tipo especial de grafo: grafo completo K_n e propõe-se os seguintes exercício e problemas (retirados de Jurkiewicz (2009, p.18)):**

Exercício 6.5. *Quantas arestas tem o grafo K_7 ? E K_{11} ? E K_n ?*

Problema 6.6. *Quantos vértices um grafo simples precisa ter para poder ter 200 arestas?*

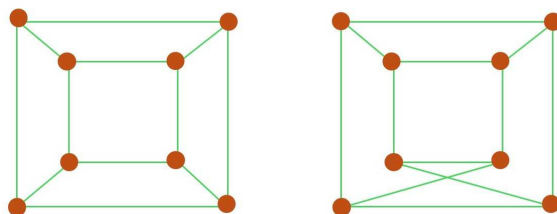
Problema 6.7. *Considerando grafos simples, mostre que as sequências $(9,8,7,6,5,5,4,3,3)$ e $(7,7,7,6,5,4,3,2)$ não correspondem a sequências de graus de nenhum grafo.*

Problema 6.8. *Mostre que uma mesma sequência pode corresponder a grafos não isomorfos.*

Atividade 3: Nesta etapa, **apresenta-se a bipartição de grafos e propõe-se o seguinte exercício:**

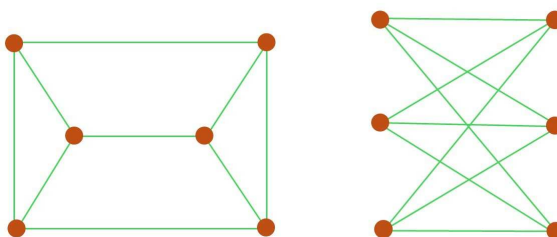
Problema 6.9. *Nos pares de grafos das figuras, mostre qual dos grafos pode ser biparticionado e qual não pode ser. (retirado de Jurkiewicz (2009)).*

Figura 72 – Grafos Bipartido e Não Bipartido (Sequência didática)



Fonte: autor, a partir de Jurkiewicz (2009, p.30) (2024).

Figura 73 – Grafos Bipartidos e Não Bipartidos (Sequência didática)



Fonte: autor, a partir de Jurkiewicz (2009, p.30) (2024).

Os estudantes devem compartilhar os caminhos percorridos para as suas soluções. Caso eles não consigam obter soluções em um tempo estipulado, o professor deve construir tais soluções envolvendo-os no processo.

Atividade 4: Após o tempo necessário para discussão de possíveis soluções do problema anterior, **propõe-se outro problema:**

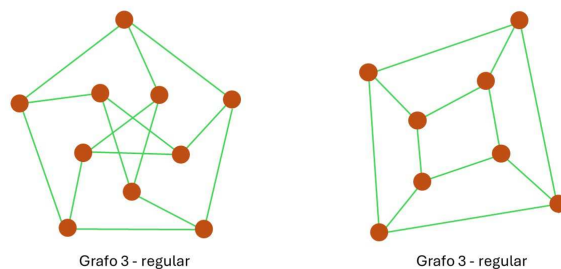
Problema 6.10. *Os grafos que aparecem a seguir são 3 – regular. Em cada um dos casos, ligue alguns de seus vértices de modo que os grafos passem a ser 4- regular.*

6.2.3 Terceiro encontro: Desenvolvimento das noções básicas de grafos e aplicações a problemas

(Espera-se que esta etapa transcorra em 2 horas-aula)

Atividade 1: Deve-se apresentar aos estudantes o problema da parte de aplicações de grafos, contida na seção 5 deste trabalho, "Problema dos quatro

Figura 74 – Grafos k-regular (Sequência didática)



Fonte: autor, a partir de Jurkiewicz (2009, p.30) (2024).

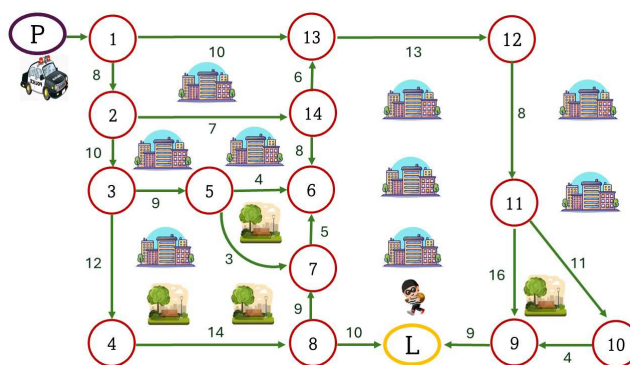
cavalos". Após um tempo de análise do problema por parte dos estudantes, **deve-se dar sequência com apresentação de uma possível solução.**

Aqui a sugestão de continuação é a abordagem do Algoritmo de Dijkstra e sua relação com os aplicativos de rotas, por exemplo, o Maps.

Atividade 2: Deve-se apresentar a noção de representação de grafos por matrizes (adjacência e incidência), visto que, é a linguagem computacional para processamento de dados dos grafos. Em seguida, propõe-se o seguinte problema:

Problema 6.11. A polícia de certa cidade recebeu um chamado com muita urgência para intervir em uma tentativa de assalto que estava ocorrendo na loja de joias da cidade. O quartel da polícia deseja saber qual trajeto a se tomar, de maneira que o tempo seja minimizado na viagem até o ponto pretendido. Usando um mapa daquela zona da cidade, representado no esquema da figura, e conhecendo os tempos médios para percorrer cada uma das ruas, utilizaram então o Algoritmo de Dijkstra para determinar esse caminho mais curto. Qual será esse trajeto?

Figura 75 – Caminho mínimo polícia/loja de joias (Sequência didática)

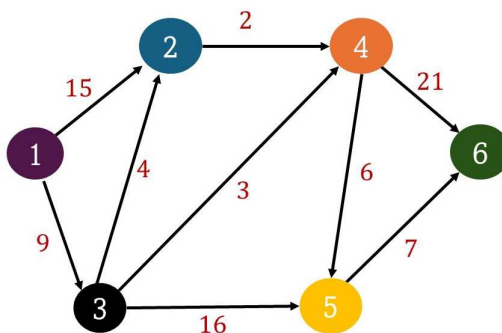


Fonte: autor, a partir de web.fe.up.pt (2024).

Atividade 3: Segue-se com a apresentação de outro problema sobre caminhos mínimos:

Problema 6.12. Considerando a seguinte rede:

Figura 76 – Caminho mínimo(Sequência didática)



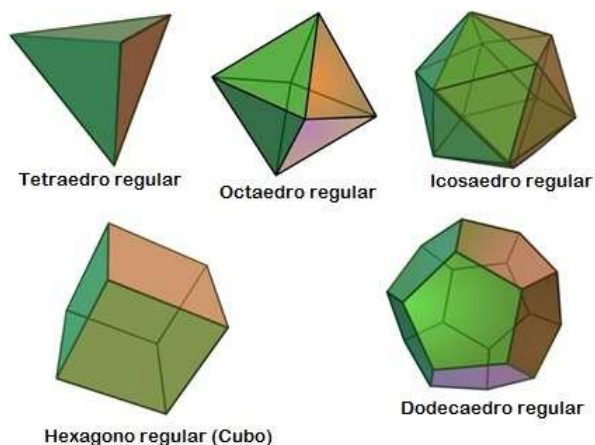
Fonte: Autor, a partir de web.fe.up.pt (2024).

Usando o algoritmo de Dijkstra, determine a distância mínima do vértice 1 ao vértice 6. Indique este caminho. Faça a árvore que representa o caminho mínimo entre o vértice 1 e os demais vértices.

Atividade 4: Nesta parte, retornamos ao problema de Érica.

Problema 6.13. Qual dos poliedros pode ser confeccionado por Érica de modo a atender à regra de pintura dos vértices e arestas, iniciando e terminando em um mesmo vértice?

Figura 77 – Poliedros Regulares (Sequência didática)

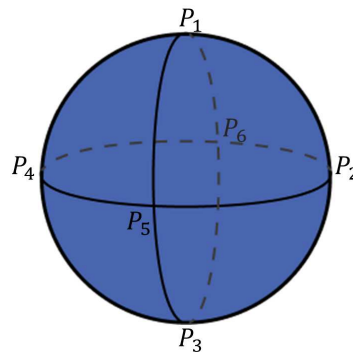


Fonte: Infoescola, 2024.

Atividade 5: Nesta parte, o seguinte problema deve ser proposto:

Problema 6.14. *Uma empresa fabrica conjuntos com 8 placas iguais, que juntas formam uma superfície esférica, conforme mostra a figura 78. Em uma das fases de montagem desses tipos de produtos, a máquina de solda percorre os encaixes das peças da seguinte forma: sempre que possível, inicia em algum dos pontos P_k de encontro de mais de duas placas (iremos chamar de polo os pontos P_k), passa por todas as linhas de encaixe uma única vez, findando a soldagem no ponto inicial do processo. Na montagem dessas esferas, será possível iniciar e terminar em um mesmo polo?*

Figura 78 – Esfera em Oito Partes (Sequência didática)



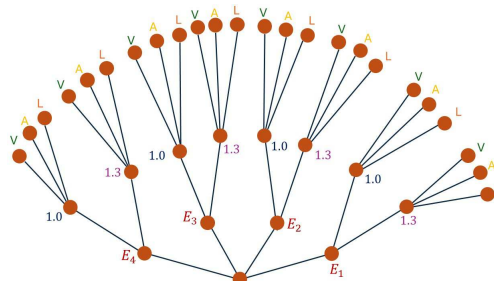
Fonte: Matematicabasica, 2024.

Atividade 6: Nesta etapa, **propõe-se o problema que aparece a seguir:**

Problema 6.15. *Uma empresa produz 4 tipos de carros esportivos; E_1 , E_2 , E_3 , e E_4 . Estes estão disponíveis em duas versões de motores turbos; 1.0 e 1.3. Tem-se ainda que cada versão pode ser ofertada em uma das três cores; verde, amarelo ou laranja. Quantos tipos diferentes de carros essa empresa oferta a um cliente interessado na compra?*

Em seguida, apresenta-se a solução utilizando diagrama de árvore da figura 79.

Figura 79 – Árvore de Possibilidades (Sequência didática)

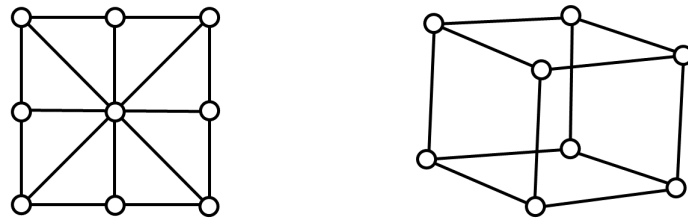


Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Atividade 7: Deve-se apresentar a **noção de coloração de grafos**. Em seguida propõe-se o problema que aparece abaixo:

Problema 6.16. *Determine o número cromático dos grafos a seguir:*

Figura 80 – Coloração de grafos (Sequência didática)



Fonte: Netto e Jurkiewicz (2017, p.115).

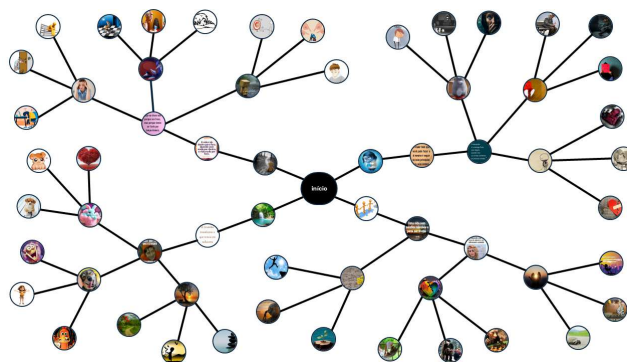
6.2.4 Quarto encontro: Aplicação do formulário e discussão sobre navegação na rede

(Espera-se que esta etapa transcorra em 2 horas-aula)

Atividade 1: Apresenta-se aos estudantes um grafo árvore contendo textos e imagens (no caso de maior número de encontros, esse grafo pode ser construído com a participação dos estudantes, os quais podem promover a escolha de textos, charges, imagens e outros na internet, além de participarem na organização do formulário Google Forms), o qual é o modelo do formulário que representará o nosso aplicativo de navegação.

O grafo árvore que foi obtido na produção do formulário, ficou com o seguinte aspecto:

Figura 81 – Grafo Árvore (Sequência didática)

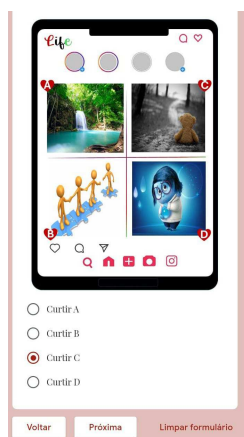


Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Neste caso, o vértice central modela a seção inicial de nosso formulário e, a distribuição dos elementos nos vértices do grafo devem corresponder exatamente à distribuição dos elementos nas respectivas seções do formulário que está sendo proposto. Assim, propõe-se aos estudantes examinarem no grafo os caminhos que desejarem percorrer no formulário. Essa tarefa é importante para que os estudantes construam a noção do caminho percorrido sendo rastreado.

Em seguida, os estudantes devem ser incitados a navegarem um pouco pelo formulário-grafo percorrendo alguns caminhos (deixamos aqui o [acesso ao formulário](#)) que puderem preestabelecer. O formulário tem um aspecto mais interessante se aberto em smartphones, contudo, pode ser explorado em outras ferramentas; notebooks, tablets e outros.

Figura 82 – Navegação no formulário (Sequência didática)

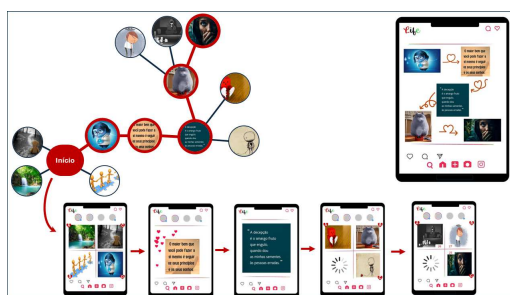


Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Este formulário simula um trajeto no grafo apresentado na figura 81. Daí, partindo de uma análise do grafo, o estudante pode estabelecer um caminho que pretenda percorrer quando estiver navegando pelo formulário. Observe que, na figura 82 (esta imagem é da seção inicial), a seção apresenta quatro itens (imagens). Isso pois, há quatro vértices ligados ao vértice inicial. Cada vértice corresponderá a uma seção do formulário. Desse modo, vamos supor que um dos estudantes estabeleça um caminho que pretenda percorrer. No formulário, ele irá fazer as escolhas marcando os itens e, na seção final, as imagens contêm um número, o qual é fornecido em um formulário seguinte e este apresenta o caminho percorrido.

Observação: A transição do formulário inicial para o formulário que retorna o caminho percorrido requer que não seja clicado em enviar, e sim, no hiperlink.

Figura 83 – Exemplo de caminho do formulário (Sequência didática)



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Deve-se promover uma discussão sobre a proposta do formulário, pois este recupera o caminho percorrido pelo estudante na navegação, ou seja, lembra, por exemplo, "cookies" de sites, utilizados para registro e rastreamento de acessos de usuários.

Na seção de anexos, deixamos informações que possam ser úteis na construção do formulário.

Atividade 2: O passeio pelo formulário abre a possibilidade de uma discussão aprofundada sobre situações relacionadas ao tema trazido pelas notícias apresentadas nas figuras 64 e 65, inclusive estas notícias são apresentadas aos estudantes.

Daí, deve-se aproveitar a forma com a qual os grafos nos ajudam a modelar estas situações de navegação pela rede, influenciada pelos algoritmos de recomendação, para promover um alerta, principalmente quando trata-se de aplicativos de redes sociais.

Este momento pode ser realizado com intervenção de outro profissional da educação, não obrigatoriamente professor, por exemplo, psicopedagogo.

Atividade 3: Para finalizar, pode-se instigar os estudantes, após uma breve análise sobre o tema, a proporem alternativas críticas e conscientes sobre o quão suas relações sociais online podem promover o bem-estar, individual e coletivo, e ainda o quanto a disseminação de informações possa ocorrer passando por "filtragens", por exemplo, investigação das fontes que geraram tal informação, tendo então a veracidade comprovada. Informações falsas, quando publicadas nas redes sociais, as "fake news", podem causar diversos males, que para serem corrigidos podem levar muito mais tempo do que transcorreu para serem gerados. Uma opção seria partir do exemplo da campanha promovida pela empresa LG, "Resgatando sorrisos nas redes sociais", que visa "driblar" um pouco os algoritmos de recomendação, buscando atrair conteúdos positivos para o Feed quando o usuário curte uma playlist disponibilizada pela empresa em uma página. Acesse aqui [Life's Good: Optimism you feed/LG Brasil](#).

6.3 Análise da aplicação da sequência

Faremos uma breve análise da aplicação, onde possamos ressaltar os pontos que levaram à alcançar objetivos e outros pontos que deixaram a desejar, de modo que possamos reorganizar a aplicação, tentando atender os objetivos em tais pontos e obtendo melhorias.

Primeiramente, a sequência foi aplicada em uma turma composta por 12 estudantes, selecionados em duas turmas de nonos anos da escola E.E.E.F.M Dr. Manoel Dantas da cidade de Teixeira, no Estado da Paraíba.

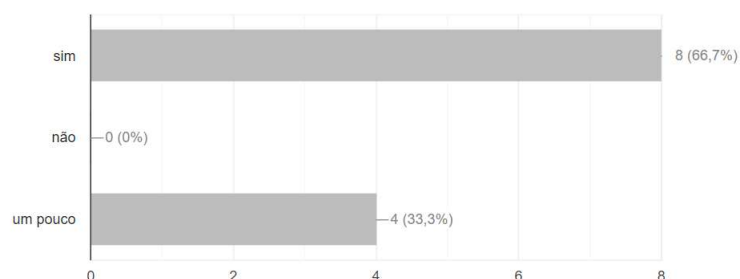
Na maior parte das atividades, os estudantes foram agrupados em duplas, salvo quando realizaram atividade em um grupo único.

Por ser turma de 9º ano, os conteúdos foram introduzidos, dentro das possibilidades, com algum aspecto de "ludicidade", uma tentativa de dinamizar as atividades, visto que, problemas e alguns exercícios envolvendo grafos favorecem tal dinamismo. Ressalta-se então, que foi um ponto bastante positivo no processo, pois, desse modo, ficou perceptível o engajamento de maneira natural por parte dos estudantes nas atividades propostas, além disso, foi evidente também que a busca pela compreensão do objeto estudado fluiu naturalmente.

Outro ponto a ser considerado positivo vem da espontaneidade de alguns estudantes em socializarem resultados que obtiveram em alguns dos problemas propostos, isso, pois, foi estabelecido no início da aplicação que eles teriam total liberdade em relação à participação, ou seja, expor suas ideias, dúvidas, contribuindo para o aprendizado do grupo de maneira construtiva.

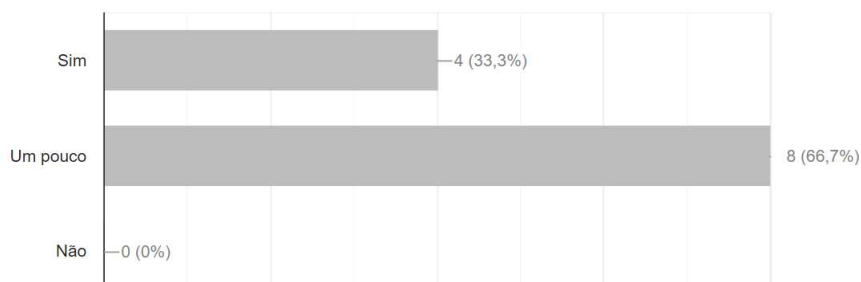
Ao término dos encontros, os estudantes foram solicitados a responderem um formulário de autoavaliação aplicado por meio de Google Forms, no qual a primeira afirmação era a seguinte:

Quando participei da aplicação da sequência didática sobre grafos, me senti à vontade para apresentar minhas ideias na resolução de problemas e exercícios propostos, tanto ao professor quanto aos colegas.

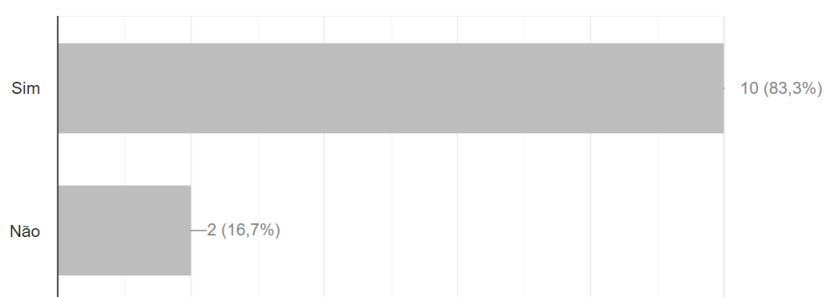


Os problemas e exercícios foram selecionados e adaptados para que pudessem estar, tanto em um nível agradável, quanto relacionados de algum modo com uma realidade mais próxima do cotidiano escolar, dentro das possibilidades.

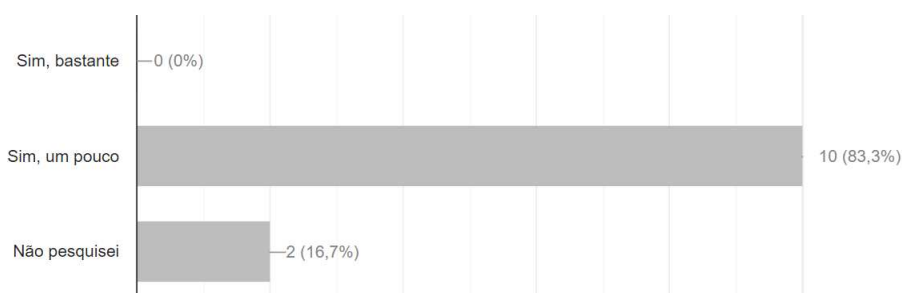
Em cada atividade transcorrida, foi dado um tempo suficiente para que o raciocínio pudesse ser desenvolvido e isso favoreceu a participação e engajamento de quase totalidade dos estudantes. Contudo, atingir objetivos de aprendizagem muitas vezes advém de uma gama de fatores. Conforme a afirmação: Consegui entender sem muita dificuldade a maior parte do que me foi apresentado durante a sequência didática sobre grafos:



A terceira afirmação do formulário autoavaliativo, era a seguinte: Procurei tirar minhas dúvidas com o professor (ou com um outro professor de matemática) quando senti alguma dificuldade na compreensão a respeito do tema grafos. Obtendo o seguinte resultado:



Outra expectativa a respeito do desenvolvimento desse trabalho encontra-se na oportunidade de apresentar-se o tema e que resultados posteriores possam surgir da curiosidade despertada nos estudantes. A quarta afirmação no questionário aplicado foi a seguinte: Tive curiosidade e pesquisei algo sobre o tema, obtendo como resultado:



O diálogo feito com a turma, direcionado para os cuidados socioemocionais com a navegação na rede e algoritmos de recomendação, foi realizado pelo Professor de pedagogia, Pedro Henrique Nunes da Silva, intitulada: Algoritmo Nossa Vida. Teve a seguinte pauta:

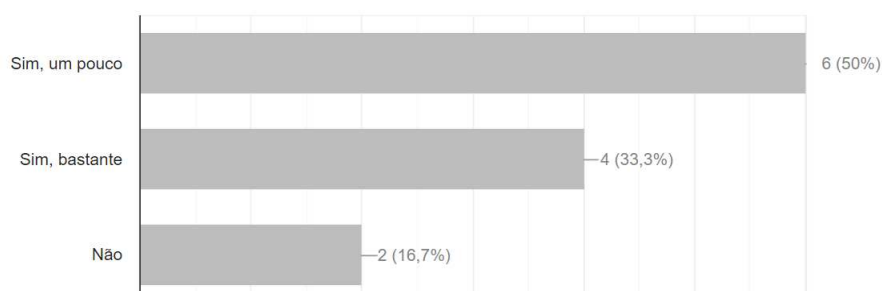
- Redes sociais (brasileiros nas redes);
- Para quê você usa suas redes sociais?
- Influência dos algoritmos;

- Perigo da internet.

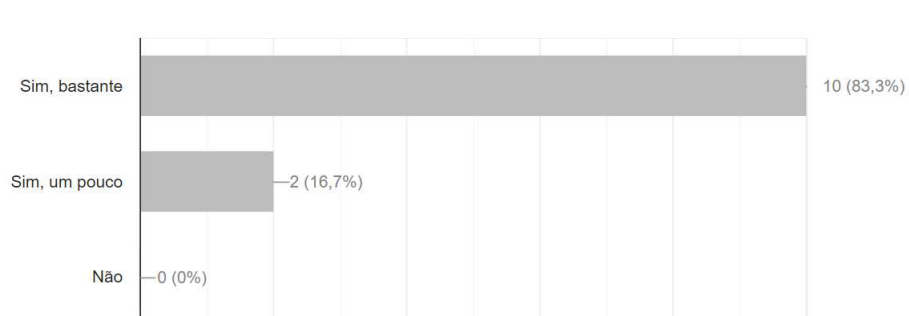
Esta conscientização aconteceu dentro das expectativas, bastante coerente com os objetivos propostos na sequência.

A afirmação no questionário era a seguinte:

Sobre a conversa/orientação realizada pelo professor, Pedro Henrique, passei a observar e ter mais atenção sobre o quanto os algoritmos podem influenciar minha navegação nas redes sociais quando entro em algum aplicativo:



Um dos principais objetivos que constituem a aplicação da sequência estão na sexta afirmativa da autoavaliação. Assim, segue-se: Ao término da aplicação da sequência sobre grafos, estou mais ciente de que há algoritmos espalhados pela rede e que estes podem determinar quais tipos de mídias (conteúdos) acabarei acessando.



Por outro lado, podemos destacar alguns pontos que foram tanto quanto desfavoráveis. A aplicação do formulário ocorreu com alguns contratemplos. De início, a proposta não ficou muito clara, mas isso foi refeito em um momento posterior, tanto com alterações no próprio formulário, quanto na forma de abordagem, o que gerou resultados mais consistentes.

A ligação entre o algoritmo visto no trabalho, Algoritmo de Dijkstra, e os algoritmos de recomendação pareceu não ser suficientemente clara, isso pode ser revisto introduzindo-se outros tipos de algoritmos para serem estudados durante a aplicação da sequência.

7 Conclusões

O ensino de matemática nos tempos atuais carece de um olhar especial para as impactantes transformações correntes nas tecnologias, visto que, muitas destas transformações advêm dos avanços da própria matemática e, conseqüentemente, dos avanços em suas vastas áreas de aplicações. Tais tecnologias permeiam o cotidiano das pessoas, tornando a matemática cada vez mais presente e indispensável.

Atualmente, cresce a discussão na educação sobre o desenvolvimento de aspectos socioemocionais dos estudantes, fazendo com que a escola repense sobre o que e como ensinar para a vida. Segundo Luckesi, "no espaço físico e cultural da sala de aula, nós professores estamos comprometidos afetiva e cognitivamente com nossos estudantes, tendo em vista sua aprendizagem e, em consequência, seu desenvolvimento cognitivo, psicológico, psicomotor e ético". (LUCKESI, 2023, p.62).

Neste trabalho buscamos apresentar a teoria dos grafos, desde seu surgimento com Euler em 1736, na solução do problema das pontes de Königsberg, até seu progressivo desenvolvimento. Seguimos pela conceituação básica, aplicações a problemas diversos de áreas distintas, e alguns algoritmos relacionados aos grafos. Assim, procuramos oferecer ao professor de matemática do Ensino Básico uma alternativa para abordagem diferenciada de um conteúdo matemático, despercebido pelos currículos, mas com grande potencial para o desenvolvimento do raciocínio crítico matemático, haja vista sua possível utilização evidenciando-se ideias em detrimento às fórmulas e cálculos, estes, por muitas vezes, abordados sem qualquer relação com o cotidiano do estudante.

Tratamos igualmente de outra das motivações principais para o desenvolvimento do trabalho que foi a notícia "Culpa do Algoritmo". A partir dela, buscamos mostrar a importância do tema grafos, pois nos leva a conhecer algoritmos, por exemplo, o Algoritmo de Dijkstra, eficiente para modelarmos, de maneira muito simples, os aplicativos de rotas, os quais têm se tornado cada vez mais comuns no cotidiano das pessoas, em especial, dos nossos estudantes. Com isso, criamos condições para desenvolvermos as discussões necessárias sobre tais tecnologias e outras como as de sites de redes sociais também modeladas por grafos. Promovemos este diálogo alertando para as navegações em aplicativos de tais redes.

Ao término da pesquisa, propomos uma sequência didática que mostrou-se eficiente, dinâmica e adequada ao público alvo. Além disso, sua aplicação transcorreu de maneira bastante prazerosa aos participantes.

Finalmente, ficou evidenciado neste trabalho que um conteúdo matemático, principalmente este, grafos, pode ser bastante útil para modelar diversos aspectos de tecnologias contemporâneas, podendo ainda ser utilizado em sala de aula visando-se o

desenvolvimento crítico e social do estudante, pois dá subsídios para geração do debate quanto à forma de se interagir com aplicativos de redes sociais, podendo desenvolver consciência a respeito de si e das demais pessoas de seu grupo social.

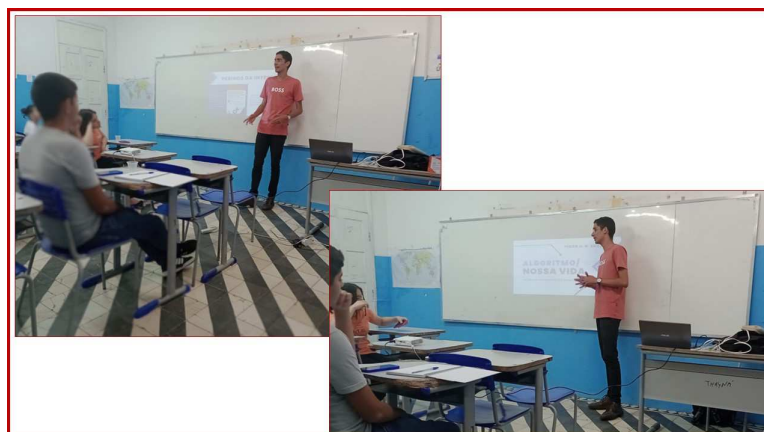
Alimentamos esperanças de que professores, não somente de matemática, possam se valer, em algum momento, desse material que deixamos e que possa vir a tornar-se um recurso para sua sala de aula.

Referências

- APPEL, A. P.; JUNIOR, E. R. H. Minerando a web por meio de grafos. *Sociedade Brasileira de Computação*, 2010. Citado na página 73.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 22 junho 2024. Citado 3 vezes nas páginas 77, 86 e 87.
- D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. [S.l.]: Papirus Editora, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 83.
- EDUCACAO-MEC, B. M. da. *Parâmetros Curriculares Nacionais PCN*. 1998. Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em: 18 fev. 2024. Citado na página 19.
- JURKIEWICZ, S. Grafos—uma introdução. *São Paulo: OBMEP*, 2009. Citado 11 vezes nas páginas 25, 50, 51, 52, 69, 72, 89, 90, 91, 92 e 93.
- LUCKESI, C. C. *O ato pedagógico: planejar, executar, avaliar*. [S.l.]: Cortez Editora, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 85 e 102.
- MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. Matemática discreta. *Rio de Janeiro: SBM*, v. 284, p. 25, 2015. Citado na página 58.
- NETTO, P. O. B. *Grafos: teoria, modelos, algoritmos*. [S.l.]: Editora Blucher, 2003. Citado na página 78.
- NETTO, P. O. B.; JURKIEWICZ, S. *Grafos: introdução e prática*. [S.l.]: Editora Blucher, 2017. Citado 19 vezes nas páginas 20, 23, 25, 32, 33, 36, 38, 39, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 60, 61, 65, 73 e 96.
- PIERRO, B. O mundo mediado por algoritmos. *Pesquisa Fapesp*, v. 19, n. 266, p. 18–25, 2018. Citado na página 79.
- RECUERO, R. Introdução à análise de redes sociais online. Edufba, 2017. Citado na página 74.
- SZWARCFITER, J. L. *Teoria computacional de grafos: Os Algoritmos*. [S.l.]: Elsevier Brasil, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.

Apêndices

APÊNDICE A – Aplicação da sequência didática





A.1 Slides utilizados na conversa-orientação

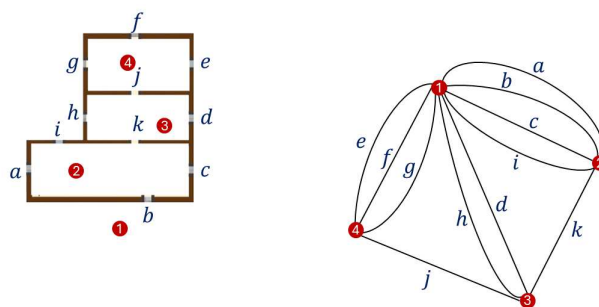


APÊNDICE B – Sugestões de exercícios

1º) (Folha de São Paulo) Marcos precisa trancar portas sem disparar alarmes. Ele deve atravessar, uma única vez, por cada uma delas; se trancada, a porta só pode ser aberta no dia seguinte.

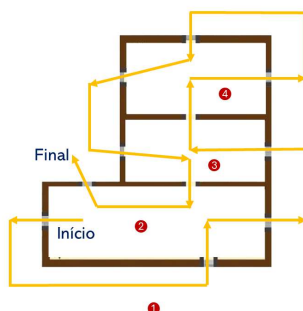


Resolução: No intuito de simplificarmos o problema em nossa abordagem, pensemos em um grafo que modele a situação dada, onde cada região será representada por um vértice, ao passo que as portas serão representadas por arestas. Neste caso, a região externa será indicada pelo vértice 1. Vejamos o esquema:



Observe que o grafo em questão é semi-euleriano, portanto, nossa trilha deve iniciar em um dos vértices de grau ímpar e terminar no outro vértice também de grau ímpar. Ora, queremos deixar o prédio trancado para abrir no dia seguinte. Ou seja, vamos começar no vértice 2 (região interna) e terminar no vértice 1 (região externa). Tem-se uma possível solução com a sequência de arestas: $a, b, c, d, j, e, f, g, h, k, e, i$.

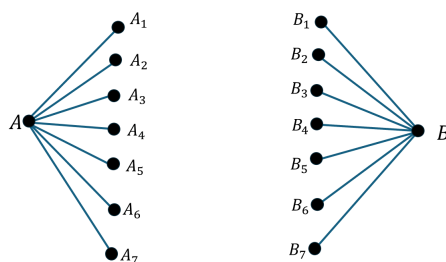
Observe o percurso:



2º) PIC(introdução à teoria dos grafos) Suponhamos que existam 15 cidades e que cada uma delas deve estar ligada a pelo menos 7 outras cidades do conjunto. Mostre que, escolhidas duas quaisquer das cidades, sempre haverá um caminho entre elas.

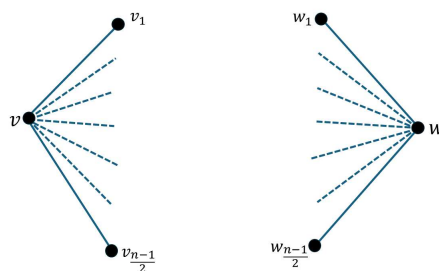
Resolução: Devemos mostrar que o grafo que representa tal situação é conexo. Assim, suponhamos duas das cidades, ligadas ao número mínimo de cidades possível e que estejam em componentes conexas de um grafo desconexo.

Observe o percurso:



Observe que, para que o grafo seja desconexo, considerando o mínimo possível de cidades conectadas às cidades A e B , que é de 7 cidades para A e também 7 cidades para B , devemos ter necessariamente 16 cidades. Mas isso contradiz a hipótese de que são 15 cidades. Portanto, podemos concluir que o grafo deve ser conexo. Logo, haverá um caminho entre duas quaisquer dessas cidades.

Observe ainda que, em um grafo G com n vértices, se $d(v_i) \geq \frac{n-1}{2}$, para $1 \leq i \leq n$, este grafo é conexo.



Com base na situação anterior, podemos supor o grafo G desconexo, com um vértice em cada componente conexa ligado a ao menos $\frac{n-1}{2}$ vértices. Daí, teríamos o número total de vértices dado por

$$\begin{aligned} & 2 \left(\frac{n-1}{2} + 1 \right) \\ &= n - 1 + 2 \\ &= n + 1 \end{aligned}$$

o que contraria a hipótese de G com n vértices.

3º) UFU- FACOM Sabendo que cada vértice tem pelo menos grau 3, qual o maior número possível de vértices em um grafo com 35 arestas?

Resolução: Vamos recordar que

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2 \cdot |E(G)|$$

Queremos obter o maior número possível de vértices, isso implica no maior número possível de graus dos vértices do grafo iguais a 3. Assim, $2 \cdot |E(G)| = x \cdot 3 + y$, com $x, y \in \mathbb{N}$. Daí, segue que

$$2 \cdot 35 = x \cdot 3 + y$$

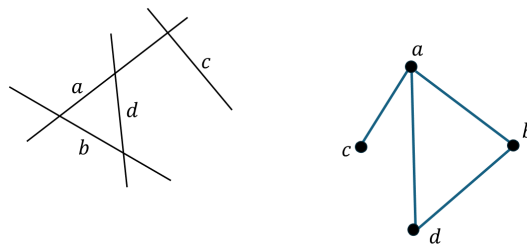
$$70 = x \cdot 3 + y$$

$$69 + 1 = 23 \cdot 3 + y$$

Portanto, $x = 23$. Logo, teremos 22 vértices com graus iguais a 3 e um vértice com grau igual a 4.

4º) PIC(introdução à teoria dos grafos) É possível desenhar 9 segmentos de reta no plano de maneira que cada segmento intersecte exatamente 3 outros?

Resolução Podemos utilizar um grafo para representar a situação, todavia, seus vértices estarão representando os segmentos de retas, à medida que as arestas devem indicar que tais segmentos intersectam-se.



Já sabemos que

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2 \cdot |E(G)|$$

Assim, com $m = |E(G)|$, devemos ter $d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_9) = 2m$. Mas, devemos ter cada segmento intersectando 3 outros, ou seja, $9 \cdot 3 = 2m$. O que não pode ocorrer, devido ao fator 2 não constar no produto $9 \cdot 3 = 3 \cdot 3 \cdot 3$. Logo, a situação proposta no

problema é impossível de acontecer.

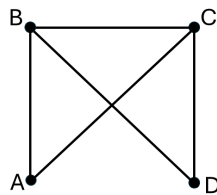
5º) PIC(introdução à teoria dos grafos) É possível construir um polígono com exatamente 30 diagonais?

Resolução Vamos recordar que um grafo completo K_n tem $m = \frac{n(n-1)}{2}$. Como queremos apenas as diagonais, vamos retirar n arestas do grafo. Assim, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{n(n-1)}{2} - n \\ &= \frac{n^2 - n - 2n}{2} \\ &= \frac{n(n-3)}{2} \end{aligned}$$

Segue que, $\frac{n(n-3)}{2} = 30$. Ou seja, $n(n-3) = 60$. Sabemos que $n \in \mathbb{N}$. Assim, para $n = 10$, $n(n-3) = 70$ e, para $n = 9$, $n(n-3) = 54$. Ora, tem-se que $70 > 60$ e $54 < 60$. Desse modo, podemos concluir que não é possível a construção do polígono proposto no problema.

6º) (Grafos: Introdução e prática, p.35) Considere o grafo abaixo:



a) Construa a matriz de incidência \mathbf{A} deste grafo.

b) Calcule o produto $A \cdot A^t$:

- O que significam os números na diagonal?

- O que significam os números fora da diagonal?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observe que os elementos da diagonal a_{ij} com $i = j$, representam os graus dos vértices, do seguinte modo: $a_{ii} = d(v_i)$. Assim, $a_{11} = d(v_1) = 2$, $a_{22} = d(v_2) = 3$, $a_{33} = d(v_3) = 3$ e $a_{44} = d(v_4) = 2$. Por outro lado, os elementos a_{ij} fora da diagonal indicam a existência de uma aresta entre os vértices v_i e v_j ; quando existe tal aresta, tem-se 1, e 0, caso contrário.