

SOLUÇÃO ANALÍTICA E NUMÉRICA DO MODELO DE DIFUSÃO APLICADO À SECAGEM DE BANANAS

Marlene Rita de QUEIROZ¹, Silvia Azucena Nebra de PEREZ²

RESUMO: Neste trabalho é apresentada a solução analítica e o desenvolvimento da solução numérica baseada no método explícito de diferenças finitas da equação de difusão líquida para cilindro infinito, com coeficiente de difusão constante e condição de contorno de equilíbrio na superfície, utilizada para representar a cinética de secagem de bananas. A precisão do método numérico é avaliada, comparando-se as duas soluções. Os resultados demonstram que o método é adequado para o tratamento deste tipo de problema, considerando uma malha com 40 subdivisões no raio e passo de tempo de 0,001 hora.

PALAVRAS-CHAVE: modelo, diferenças finitas, secagem, bananas

ABSTRACT: In this work, is presented the diffusion equation analytical solution and the development of the numerical solution based on the finite difference explicit method. The diffusional model for infinite cylinder was used for representing drying kinetics of bananas, considering constant diffusion coefficient and equilibrium boundary condition on the fruit surface. The method precision is analysed by comparing both solutions. Results show that the method is adequate to this type of problem, considering a grid with 40 subdivisions on the radius and time step of 0,001 hour.

KEYWORDS: modelling, finite differences, drying, banana

INTRODUÇÃO: A utilização de modelos matemáticos na descrição dos processos de secagem, em diversas ocasiões, remete os pesquisadores à tarefa de resolver complexos sistemas de equações diferenciais parciais (EDP). Dependendo das hipóteses consideradas na descrição física dos problemas, pode-se chegar a sistemas de EDPs que não apresentam soluções analíticas e, nestes casos, deve-se buscar uma ferramenta numérica para a obtenção de tais soluções. Desta forma, torna-se importante a escolha de ferramentas adequadas à solução de determinados problemas, preferencialmente, aquelas que apresentem as características de simplicidade e estabilidade. No caso da secagem de produtos agrícolas com elevado teor de umidade inicial, como frutas e vegetais, tem sido comum a utilização da teoria de difusão líquida para a representação matemática da cinética de secagem (Yusheng e Poulsen, 1988; Mulet, Berna e Rosseló, 1989; Suarez e Viollaz, 1991; Vagenas e Marinos-Kouris, 1991). Também, a utilização de diferenças finitas para a solução numérica dos modelos difusionais, seja nos métodos explícitos, implícitos ou de volume de controle,

¹ Dr. em Engenharia Mecânica, DPPPAG, FEAGRI, UNICAMP, CP 6011, 13083-970, Campinas, SP, Fone (019) 788-2073, Fax (019) 7882090, e-mail: marlene@agr.unicamp.br

² Dr em Engenharia Mecânica, DE, FEM, UNICAMP, CP 6022, 13083-970, Campinas, SP, e-mail: sanebra@fem.unicamp.br

tem sido frequente no tratamento teórico da secagem (Husain, Chen e Clayton, 1973; Steffe e Sing, 1980; Silva e Nebra, 1988; Mulet, Berna e Rosseló, 1989; Sereno e Medeiros, 1990).

MATERIAL E MÉTODOS: A representação matemática do processo de secagem foi fundamentada nas seguintes considerações: cilindro infinito para representar a forma geométrica da banana; teor de umidade inicial (M_0) distribuído uniformemente no interior do produto; teor de umidade na superfície da fruta (M_e) constante; coeficiente de difusão constante; corpo com simetria axial; encolhimento desprezível. Com estas hipóteses, o modelo de difusão líquida foi definido e resolvido pelas soluções analíticas e numéricas. A primeira, reportada por Crank (1975), foi utilizada com os cinco primeiros termos da série para o cálculo do teor de umidade médio do produto. A segunda foi obtida pelo método explícito de diferenças finitas, que permitia o cálculo pontual do teor de umidade no raio. A integração destes valores no raio para cada passo de tempo possibilitou a comparação das duas soluções, com base na soma dos quadrados dos resíduos (SQR). Foram desenvolvidos programas na linguagem Turbo Pascal 7.0 para o cálculo dos valores numéricos e os resultados analíticos foram obtidos pelo SAS. Foi conduzido um estudo de refinamento da malha para a definição adequada do número de subdivisões do raio de acordo com o passo de tempo, de forma a proporcionar precisão na convergência dos resultados. Assim, foram testados os passos de tempo de 0,001 e 0,0005 horas e os números de subintervalos do raio de 10, 20, 30 e 40.

RESULTADOS E DISCUSSÃO: Os estudos de refinamento da malha com base na comparação das duas soluções entre si e com os resultados experimentais, permitiram concluir que uma malha com 40 subdivisões no raio com passo de tempo de 0,001 hora mostrou-se adequada às finalidades desejadas. A SQR apresentou um valor de 0,004876 entre as duas soluções e, entre estas e os dados experimentais, de 0,088580 para a solução analítica e de 0.072958 para a numérica. Portanto, observa-se uma ligeira superioridade da solução numérica sobre a analítica, quando esta última se encontra na forma de uma série truncada no quinto termo. A Figura 1 apresenta os resultados analíticos e numéricos calculados para $D=6,98 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ e $R_0=0.01545\text{m}$. A proximidade destes valores na curva comprova a precisão do método. O método de diferenças finitas aplicado à solução da equação da difusão em estudos de secagem de produtos agrícolas foi também utilizado com sucesso nos trabalhos desenvolvidos por Husain, Chen e Clayton (1973), Steffe e Singh (1980), Mulet, Berna e Rosseló (1989) e Sereno e Medeiros (1990).

CONCLUSÕES: O método numérico explícito de diferenças finitas aplicado à solução do modelo de difusão para geometrias cilíndricas, o qual foi utilizado para a descrição da cinética de secagem de bananas, apresentou bom resultado para uma malha de 40 subdivisões no raio e passo de tempo de 0,001 hora. O método é adequado para problemas de secagem de frutas, demonstrando boa precisão, quando comparado à solução analítica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

CRANK, J. **The mathematics of diffusion**. Clarendon Press, Oxford. 2nd ed., 1975.

- HUSAIN, A.; CHEN, C.S.; CLAYTON, J.T. **Simultaneous heat and mass diffusion in biological materials.** J. Agric. Eng. Res. 18, 343-354, 1973.
- MULET, A.; BERNA, A.; ROSSELÓ, C. **Drying of carrots. I. Drying models.** Drying Technol. 7 (3) 537-557, 1989.
- SERENO, A.M.; MEDEIROS, G.L. **Simplified model for the prediction of drying rates for foods.** J. Food Eng. 12 (1) 1-11, 1990.
- SILVA, M.A.; NEBRA, S.A. **The calculation of moisture distribution in a drying process. Proceedings 6th Intern. Drying Symp.,** Versailles, France, OP: 145-150, 1988.
- STEFFE, J.F.; SINGH, R.P. **Diffusivity of starchy endosperm and bran of fresh and rewetted rice.** J. Food Sci. 45 (2) 356-361, 1980.
- SUAREZ, C.; VIOLLAZ, P.E. **Shrinkage effect on drying behaviour of potato slabs.** J. Food Eng. 13 (2) 103-114, 1991.
- VAGENAS, G.K.; MARINOS-KOURIS, D. **Drying kinetics of apricots.** Drying Technol. 9 (3) 735-752, 1991.
- YUSHENG, Z.; POULSEN, K.P. **Diffusion in potato drying.** J. Food Eng. 7 (4) 249-262, 1988.

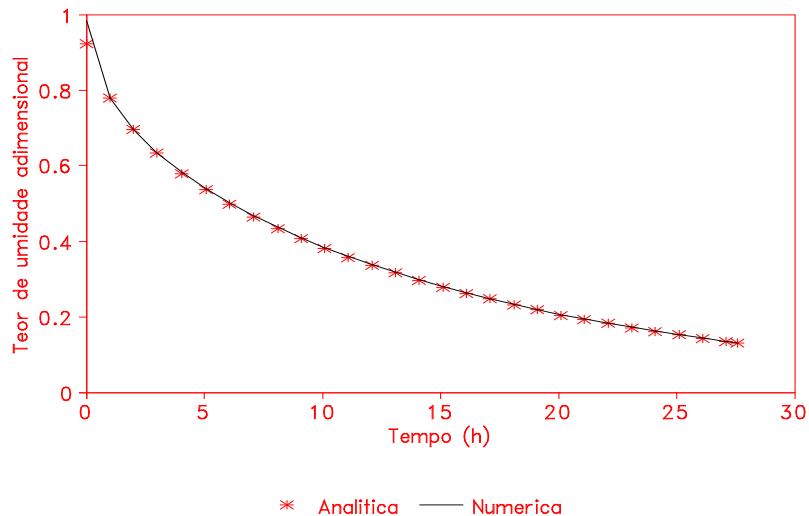


FIGURA 1 - Solução analítica e numérica da equação de difusão aplicada à secagem de bananas.