



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
CURSO DE BACHARELADO EM FÍSICA

Raiff Hugo Santos

# **Hamiltoniana ou energia total? A dinâmica da miçanga ao longo de uma haste**

Campina Grande, Paraíba, Brasil

23 de maio de 2024

Raiff Hugo Santos

## **Hamiltoniana ou energia total? A dinâmica da miçanga ao longo de uma haste**

Trabalho de Conclusão de Curso realizado sob orientação do Prof. Danievertton Moretti, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Professor Danievertton Moretti

Campina Grande, Paraíba, Brasil

23 de maio de 2024

S237h

Santos, Raiff Hugo.

Hamiltoniana ou energia total? a dinâmica da miçanga ao longo de uma haste / Raiff Hugo Santos – Campina Grande, 2022.

78 f. : il. color.

Monografia (Bacharelado em Física) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.

"Orientação: Prof. Dr. Danievertton Moretti".

Referências.

1. Mecânica Analítica.
2. Lagrangeana.
3. Hamiltoniana.
4. Propriedades de Simetria e Conservação da Energia. I. Moretti, Danievertton. II. Título.

CDU 531.25(043)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**CNPJ nº 05.055.128/0001-76**

COORDENACAO DE GRADUACAO EM FISICA  
Rua Aprigio Veloso, 882, - Bairro Universitario, Campina Grande/PB, CEP 58429-900  
Site: <http://cct.ufcg.edu.br> - Telefone: (83) 2101-1100

DECLARAÇÃO

Processo nº 23096.056744/2022-86

FOLHA DE APROVAÇÃO

**Raiff Hugo Santos** □

**Hamiltoniana ou energia total? A dinâmica da miçanga ao longo de uma haste**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Unidade Acadêmica de Física, da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito para obtenção do título de Bacharelado em Física.

Aprovado em 01/09/2022

**Banca Examinadora**

**Orientador(a): Prof.(a) Dr.(a) Danieverton Moretti (UAF - UFCG)**

**Avaliador(a) Interno(a): Prof.(a) Dr.(a) Lincoln Rodrigues Sampaio de Araújo (UAF - UFCG)**

**Avaliador(a) Externo(a): Prof.(a) Dr.(a) Tâmara Pereira Ribeiro de Oliveira Lima (DF - UEPB)**

**CONCEITO DA DEFESA: 9,0**



Documento assinado eletronicamente por **DANIEVERTON MORETTI, PROFESSOR 3 GRAU**, em 05/10/2022, às 20:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **LINCOLN RODRIGUES SAMPAIO DE ARAUJO, PROFESSOR(A) DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 05/10/2022, às 21:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de](#)

[2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tâmara Pereira Ribeiro de Oliveira Lima e Silva, Usuário Externo**, em 10/05/2024, às 16:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufcg.edu.br/autenticidade>, informando o código verificador **2804389** e o código CRC **38E0389D**.

**Referência:** Processo nº 23096.056744/2022-86

SEI nº 2804389

*À mãinha.*

# Agradecimentos

- Ao Prof. Danieverton Moretti, pela orientação, sugestão, estímulo e competência com que conduziu este trabalho.
- A todos os professores desta Unidade Acadêmica de Física que contribuíram com a minha formação, em especial à professora Daisy Martins de Almeida.
- À minha mãe, irmão e irmã pelo apoio, confiança e incentivo.
- A Joaquim C. de M. Segundo que fez das situações mais difíceis, as mais divertidas.
- À Amanda Freire pelas inúmeras reflexões e conversas que ocorreram nos bancos do bloco BC.
- Àquela pessoa por ter feito da minha graduação um dos períodos mais felizes da minha vida.
- Aos colegas de graduação, em especial à Ana Rafaely e José Bruno, e funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade.
- A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

*“Physics is like sex: sure, it may give some practical results, but that’s not why we do it.”*  
*(Richard P. Feynman)*

# Resumo

A mecânica newtoniana é um marco na história da física e da ciências moderna. Contudo, limitações surgem quando sistemas impostos a restrições são analisados, motivo pelo qual muitos físicos e matemáticos buscaram uma forma alternativa daquela desenvolvida por Newton. Assim, surge a mecânica analítica, sendo o formalismo lagrangeano e hamiltoniano os expoentes desta nova forma de descrever sistemas dinâmicos. Neste trabalho, analisamos a dinâmica, sob à luz da mecânica analítica, dos osciladores harmônicos (simples, amortecido e forçado) e, principalmente, dos problemas da miçanga deslizando ao longo de uma haste (haste com rotação uniforme, rotação acelerada e oscilante). Além disso, iremos estudar detalhadamente a relação entre a energia total e a hamiltoniana, descrevendo todos os casos existentes, incluindo discussões enfáticas sobre as quantidades físicas que se conservam ou não.

**Palavras-chave:** Mecânica Analítica. Lagrangeana. Hamiltoniana. Propriedades de Simetria e Conservação da Energia.

# Abstract

Newtonian mechanics is a milestone in the history of physics and modern science. However, limitations arise when constrained systems are analyzed, which is why many physicists and mathematicians sought an alternative solution developed by Newton. Thus, analytical mechanics arises, with the lagrangean and hamiltonian formalisms being the exponents of this new way of describing dynamical systems. In this work, we analyze the dynamics, under the light of analytical mechanics, of harmonic oscillators (simple, damped and forced) and, mainly, of the problems of the beads sliding along a rod (rod with uniform rotation, accelerated rotation and oscillating). Furthermore, we will study in detail the relationship between total and hamiltonian energy, describing all existing cases, including emphatic discussions about the physical quantities that are conserved or not.

**Keywords:** Analytical Mechanics. Lagrangean. Hamiltonian. Symmetry Properties and Conservation Laws.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Pêndulo Simples. . . . .	21
Figura 2 – Variação de uma curva mostrando caminhos vizinhos ao que minimiza $J$ . . . . .	23
Figura 3 – Disco vertical rolando sem deslizar em um plano horizontal. . . . .	27
Figura 4 – Pêndulo Esférico. . . . .	31
Figura 5 – Oscilador harmônico simples. Fonte: De autoria própria. . . . .	38
Figura 6 – Oscilador harmônico simples: $m = 1\text{ kg}$ ; $k = 1\text{ kg/s}^2$ ; $\omega_0 = \sqrt{3}\text{ rad/s}$ ; $x(0) = 1\text{ m}$ ; $\dot{x}(0) = 0\text{ m/s}$ . . . . .	40
Figura 7 – Oscilador harmônico simples: $m = 1\text{ kg}$ ; $k = 1\text{ kg/s}^2$ ; $\omega_0 = \sqrt{3}\text{ rad/s}$ ; $\dot{x}(0) = 0\text{ m/s}$ e diferentes valores de $x(0)$ . Devido à condição inicial da velocidade $\dot{x}(0) = 0$ , o $x(0)$ de cada curva coincide com sua própria amplitude. . . . .	40
Figura 8 – Energia total, que corresponde a hamiltoniana, cinética e potencial em função do tempo do oscilador harmônico simples: $m = 1\text{ kg}$ ; $k = 1\text{ kg/s}^2$ ; $\omega_0 = \sqrt{3}\text{ rad/s}$ ; $x(0) = 1\text{ m}$ ; $\dot{x}(0) = 0\text{ m/s}$ . . . . .	41
Figura 9 – Possíveis comportamentos do oscilador harmônico amortecido. . . . .	43
Figura 10 – Oscilador harmônico amortecido: $m = 1\text{ kg}$ ; $k = 3\text{ kg/s}^2$ ; $\omega_0 =$ $\sqrt{3}\text{ rad/s}$ ; $x(0) = 1\text{ m}$ ; $\dot{x}(0) = 0\text{ m/s}$ . . . . .	44
Figura 11 – Oscilador harmônico amortecido: $m = 1\text{ kg}$ ; $k = 3\text{ kg/s}^2$ ; $\lambda = 0,5\text{ kg/s}$ $\omega_0 = \sqrt{3}\text{ rad/s}$ ; $x(0) = 1\text{ m}$ ; $\dot{x}(0) = 0\text{ m/s}$ , onde (a) corresponde às curvas de energia total, cinética e potencial e (b) a taxa de variação da energia total em relação ao tempo. Note que o <i>zoom</i> na figura (a) é apenas uma ampliação de uma região específica. . . . .	44
Figura 12 – Constante de movimento do oscilador harmônico amortecido: $m = 1\text{ kg}$ ; $k = 3\text{ kg/s}^2$ ; $\lambda = 0,5\text{ kg/s}$ $\omega_0 = \sqrt{3}\text{ rad/s}$ ; $x(0) = 1\text{ m}$ ; $\dot{x}(0) = 0\text{ m/s}$ . . . . .	45
Figura 13 – O gráfico (a) mostra cada solução separada e o (b) a soma das soluções (solução geral), onde $m = 1\text{ kg}$ ; $k = 3\text{ kg/s}^2$ ; $\lambda = 0,5\text{ kg/s}$ ; $\omega_0 =$ $\sqrt{3}\text{ rad/s}$ ; $F_0 = 5\cos(\pi t + \pi/2)$ . . . . .	46
Figura 14 – O gráfico (a) mostra a amplitude e o (b) a amplitude da velocidade, ambos em função da frequência angular, para $m = 1\text{ kg}$ ; $k = 3\text{ kg/s}^2$ ; $\omega_0 = \sqrt{3}\text{ rad/s}$ ; $F_0 = 5\cos(\pi t)$ e diferentes valores para $\lambda$ . . . . .	47
Figura 15 – Oscilador harmônico simples sobre um bloco em movimento. Fonte: De autoria própria. . . . .	48
Figura 16 – Posição em função do tempo de um oscilador harmônico sobre um bloco em movimento para diferentes observadores inerciais, onde $m = 1\text{ kg}$ ; $k = 1\text{ kg/s}^2$ ; $\omega_0 = \sqrt{3}\text{ rad/s}$ ; $x(0) = 1\text{ m}$ ; $\dot{x}(0) = 0\text{ m/s}$ ; $v_0 = 1\text{ m/s}$ . Note que o <i>zoom</i> é apenas uma ampliação de uma região específica. . . . .	49

Figura 17 – Energia Total, que corresponde a hamiltoniana, em função do tempo de um oscilador harmônico sobre um bloco: $m = 1\text{ kg}$ ; $k = 1\text{ kg/s}^2$ ; $\omega_0 = \sqrt{3}\text{ rad/s}$ ; $x(0) = 1\text{ m}$ ; $\dot{x}(0) = 0\text{ m/s}$ ; $v_0 = 1\text{ m/s}$ . . . . .	50
Figura 18 – Miçanga deslizando ao longo de uma haste com rotação uniforme. . . . .	51
Figura 19 – Posição em função do tempo da miçanga ao longo de uma haste com rotação uniforme: $m = 0,005\text{ kg}$ ; $\omega = 1\text{ rad/s}$ ; $r(0) = 0,01\text{ m}$ e diferentes valores de $\dot{r}(0)$ . . . . .	52
Figura 20 – Posição em função do tempo da miçanga ao longo de uma haste com rotação uniforme: $m = 0,005\text{ kg}$ ; $r(0) = 0,01\text{ m}$ ; $\dot{r}(0) = 0\text{ m/s}$ e diferentes valores de $\omega$ . . . . .	53
Figura 21 – Posição em função do tempo da miçanga ao longo de uma haste com rotação uniforme: $m = 0,005\text{ kg}$ ; $\omega = 1\text{ rad/s}$ ; $r(0) = 0,05\text{ m}$ e velocidades iniciais $\dot{r}(0)$ negativas. . . . .	54
Figura 22 – Energia total em função do tempo da miçanga ao longo de uma haste com rotação uniforme: $m = 0,005\text{ kg}$ ; $\omega = 1\text{ rad/s}$ ; $r(0) = 0,01\text{ m}$ e diferentes valores de $\dot{r}(0)$ . . . . .	54
Figura 23 – Energia total e hamiltoniana em função do tempo da miçanga ao longo de uma haste com rotação uniforme: $m = 0,005\text{ kg}$ ; $\omega = 1\text{ rad/s}$ ; $r(0) = 0,01\text{ m}$ ; $\dot{r}(0) = 0\text{ m/s}$ . . . . .	55
Figura 24 – Posição em função do tempo da miçanga ao longo de uma haste com rotação uniformemente variada: $m = 0,005\text{ kg}$ ; $\omega = 0\text{ rad/s}$ ; $\alpha = (1/\pi)\text{ rad/s}^2$ ; $r(0) = 0,01\text{ m}$ e diferentes valores de $\dot{r}(0)$ . . . . .	56
Figura 25 – Posição em função do tempo da miçanga ao longo de uma haste com rotação uniformemente variada $m = 0,005\text{ kg}$ ; $\omega = 0\text{ rad/s}$ ; $\alpha = (1/\pi)\text{ rad/s}^2$ ; $r(0) = 0,05\text{ m}$ . . . . .	56
Figura 26 – Miçanga ao longo de uma haste com rotação uniformemente variada: $m = 0,005\text{ kg}$ ; $\omega = 2\text{ rad/s}$ ; $\alpha = -1/\pi\text{ rad/s}^2$ ; $r(0) = 0,05\text{ m}$ ; $\dot{r}(0) = 0\text{ m/s}$ , onde temos a posição (curva azul), velocidade (curva amarela) e aceleração (curva verde) no gráfico (a) e “as energias” do sistema no gráfico (b). . . . .	57
Figura 27 – Energia total e hamiltoniana em função do tempo da miçanga ao longo de uma haste com rotação uniformemente variada: $m = 0,005\text{ kg}$ ; $\omega = 2\text{ rad/s}$ ; $\alpha = -1/\pi\text{ rad/s}^2$ ; $r(0) = 0,05\text{ m}$ ; $\dot{r}(0) = 0\text{ m/s}$ . . . . .	58
Figura 28 – Miçanga deslizando ao longo de uma haste oscilante (vibrando). . . . .	58
Figura 29 – Miçanga ao longo de uma haste oscilante (vibrando): $m = 0,005\text{ kg}$ ; $\beta = \pi/4\text{ rad}$ ; $\delta = 1\text{ rad/s}$ ; $r(0) = 0,01\text{ m}$ e diferentes valores de $\dot{r}(0)$ , onde (a), (b) e (c) são respectivamente a posição, velocidade e aceleração da miçanga. . . . .	59

Figura 30 – Miçanga ao longo de uma haste oscilante (vibrando): $m = 0,005\text{ kg}$ ; $\beta = 2\pi\text{ rad}$ ; $\delta = 1/4\text{ rad/s}$ ; $r(0) = 0,01\text{ m}$ para o gráfico (a) e $m =$ $0,005\text{ kg}$ ; $\beta = \pi\text{ rad}$ ; $\delta = 1\text{ rad/s}$ ; $r(0) = 0,01\text{ m}$ , onde no gráfico (a) temos $\alpha > 0\text{ rad/s}^2$ e no gráfico (b) temos $\omega \neq 0\text{ rad/s}$ e $\alpha < 0\text{ rad/s}^2$ .	60
Figura 31 – Miçanga ao longo de uma haste oscilante (vibrando): $m = 0,005\text{ kg}$ ; $\beta = \pi/4\text{ rad}$ ; $\delta = 1\text{ rad/s}$ ; $r(0) = 0,05\text{ m}$ .	60
Figura 32 – Órbitas da miçanga ao longo de uma haste (a) com rotação uniforme, (b) com rotação uniformemente variada e (c) oscilante (vibrando): $m =$ $0,005\text{ kg}$ ; $\beta = \pi/4\text{ rad}$ ; $\delta = 1\text{ rad/s}$ ; $r(0) = 0,01\text{ m}$ ; $\dot{r}(0) = 0\text{ m/s}$ e diferentes valores de $\dot{r}(0)$ .	61
Figura 33 – Energia total e hamiltoniana da miçanga ao longo de uma haste oscilante (vibrando): $m = 0,005\text{ kg}$ ; $\beta = \pi/4\text{ rad}$ ; $\delta = 1\text{ rad/s}$ ; $r(0) = 0,01\text{ m}$ ; $\dot{r}(0) = 0\text{ m/s}$ .	62

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>MECÂNICA CLÁSSICA</b>	<b>16</b>
<b>2.1</b>	<b>Mecânica Newtoniana</b>	<b>16</b>
2.1.1	Leis do Movimento	17
2.1.2	Teoremas de Conservação	17
<b>2.2</b>	<b>Dinâmica Lagrangeana</b>	<b>22</b>
2.2.1	Rudimentos do Cálculo das Variações	23
2.2.2	Equação de Euler	24
2.2.3	Notação Variacional	25
2.2.4	Vínculos	26
2.2.5	Coordenadas Generalizadas	27
2.2.6	Princípio de Hamilton e Equações de Lagrange em Coordenadas Generalizadas	27
2.2.7	Função de dissipação de Rayleigh	29
<b>2.3</b>	<b>Propriedades de Simetria e Leis de Conservação</b>	<b>30</b>
2.3.1	Constantes de Movimento	31
2.3.2	Teoremas de Conservação	32
2.3.3	Conservação da Energia	33
2.3.4	Teorema de Noether	33
<b>2.4</b>	<b>Dinâmica Hamiltoniana</b>	<b>34</b>
2.4.1	Momentos Canônicos e Equações de Hamilton	35
2.4.2	Simetrias e Leis de Conservação	36
2.4.3	Hamiltoniana e Energia Total	37
<b>3</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>38</b>
<b>3.1</b>	<b>Oscilador Harmônico</b>	<b>38</b>
3.1.1	Oscilador Harmônico Simples	38
3.1.2	Oscilador Harmônico Amortecido	42
3.1.3	Oscilador Harmônico Forçado	45
3.1.4	Oscilador Harmônico Sobre um Bloco em Movimento Uniforme	48
<b>3.2</b>	<b>Miçanga Deslizando ao Longo de uma Haste</b>	<b>50</b>
3.2.1	Haste com Rotação Uniforme	51
3.2.2	Haste com Rotação Uniformemente Variada	55
3.2.3	Haste Oscilante (Vibrando)	58
<b>4</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b>	<b>63</b>

4.1	Conclusão . . . . .	63
4.2	Perspectivas . . . . .	64
	<b>APÊNDICES</b>	<b>65</b>
	<b>APÊNDICE A – CÓDIGOS E SOLUÇÕES DO MATHEMATICA</b> .	<b>66</b>
A.1	Códigos . . . . .	66
A.2	Soluções . . . . .	75
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>77</b>

# 1 Introdução

A obra prima de Joseph-Louis Lagrange, *Méchanique Analytique* (Mecânica Analítica), publicada em 1788, deu origem àquela que seria parte fundamental da mecânica clássica e da física moderna: a mecânica analítica. Até então, a mecânica clássica se resumia em grande parte à mecânica desenvolvida por Isaac Newton, que tem como fundamento suas famosas leis do movimento.

A mecânica analítica, em contraste com a mecânica newtoniana que tem uma forma vetorial e recorre a forças redundantes, se utiliza de quantidades escalares para obter as equações de movimento da maioria dos problemas relevantes da dinâmica. Essas equações são equivalentes às obtidas na mecânica newtoniana, mas os passos para obtê-las proporcionam percepções fundamentais sobre a natureza do universo. Tais percepções são tão relevantes que não é nenhum exagero afirmar que a mecânica analítica é o alicerce da física teórica [1, 2].

Há dois formalismos principais na mecânica analítica: (i) o lagrangeano que é fundamental para diversas áreas da física, como a eletrodinâmica quântica e cosmologia; (ii) e o hamiltoniano, no qual a mecânica quântica é fundamenta. Cada formalismo apresenta suas peculiaridades e vantagens, que iremos analisar ao longo deste trabalho.

Todo poder que advém da mecânica analítica pode ser derivado de um único princípio denominado *princípio de Hamilton* ou *princípio da mínima ação*, tendo sua origem no cálculo das variações. Além de ser um princípio elegante que leva a resultados surpreendentes, o princípio da mínima ação pode incitar reflexões filosóficas, uma vez que aparenta ser um princípio intrínseco ao universo e pode fomentar aqueles que tem inclinações teístas a acreditar que o universo contém um proposito inerente [3].

Uma grande consequência da mecânica analítica, talvez a maior, é a descoberta que proporcionou a conexão entre propriedades de simetria e leis de conservação de sistemas físicos. Esta conexão leva a uma compreensão direta e fundamental de sistemas dinâmicos, por mais complexos que esses sistemas possam ser. Essa conexão pode ser condensada no famoso teorema de Noether [1].

Além de descrever a dinâmica de alguns sistemas simples a partir da mecânica analítica, daremos ênfase aos problemas da miçanga ao longo de uma haste. Assim, este trabalho busca deixar claro a relação entre propriedades de simetria e a conservação da energia, principalmente no contexto da dinâmica hamiltoniana. Demonstraremos a relação entre a hamiltoniana e energia total de sistemas físicos.

Para tanto, dividiremos o trabalho da seguinte forma: no Capítulo 1, temos a

introdução. No Capítulo 2, descrevemos a teoria básica, partindo das leis de Newton, passando pelas leis de conservação, chegando na dinâmica lagrangeana — que leva a relação entre propriedades de simetria e leis de conservação — e concluindo com a descrição da dinâmica hamiltoniana e sua relação com a energia total. No Capítulo 3 discutiremos, à luz da mecânica analítica e buscando demonstrar a conexão entre a hamiltoniana e energia total, os osciladores harmônicos (simples, amortecido e forçado) e os problemas da miçanga ao longo de uma haste (rotação uniforme, rotação uniformemente variada e oscilante). Por fim, teremos o Capítulo 4, com as conclusões e perspectivas deste trabalho.

## 2 Mecânica Clássica

A busca pela compreensão da natureza vem acompanhando a humanidade no decorrer da história e, com isso, numerosas ideias foram propostas — geralmente recorrendo a deuses particularmente instáveis emocionalmente. Um bom exemplo dessas tentativas de descrever a natureza é a Astrologia, que apesar de não ser considerada uma ciência sob a ótica moderna, tem sua importância histórica e era amplamente utilizada na Antiguidade como forma de compreender eventos terrestres a partir de observações de corpos celestes. É interessante mencionar que na Antiguidade não havia distinção entre ciência e teologia, de modo que a astronomia tem sua origem na astrologia e elas tornaram-se distintas apenas durante a Revolução Científica [4].

A Revolução Científica surgiu no final do Renascimento (século XVI) e perdurou até o século XVIII. Durante esse período ocorreu o desenvolvimento de diversas áreas do conhecimento e o surgimento da ciência moderna. Grandes obras como *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (Das Revoluções das Esferas Celestes) de Nicolau Copérnico, foram publicadas durante esse período, o que provocou uma mudança de paradigma na forma que a sociedade interpreta a natureza [4].

O grande expoente da Revolução Científica foi Isaac Newton, que em sua busca em descrever a natureza, publicou em 1687 sua famosa obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Princípios Matemáticos da Filosofia Natural), dando origem à Mecânica Clássica com suas três leis do movimento.

Posteriormente novas formulações emergiram para solucionar algumas limitações que são intrínsecas à mecânica newtoniana. Dessas formulações, as desenvolvidas por Lagrange e Hamilton mostraram-se mais relevantes por sua forma e conteúdo.

Neste capítulo iremos descrever a dinâmica lagrangeana e hamiltoniana, partindo da mecânica newtoniana e suas limitações, utilizando as referências [1, 2]. Além disso, vamos demonstrar, de forma breve, a equivalência entre cada formalismo a partir do problema do pêndulo simples.

### 2.1 Mecânica Newtoniana

Como foi dito anteriormente, Newton postulou as três leis do movimento e leis por definição não podem ser demonstradas, somente enunciadas com base em observações ou experimentos.

### 2.1.1 Leis do Movimento

As leis do movimento de Newton podem ser enunciadas, segundo [1], como

**Primeira Lei:** “*Existem sistemas de referência, ditos inerciais, em relação aos quais toda partícula isolada descreve um movimento retilíneo uniforme.*”

Esta lei resulta na existência de uma quantidade infinita de referenciais inerciais e na ideia de tempo absoluto, de acordo com as transformações de Galileu.

**Segunda Lei:** “*Em qualquer referencial inercial o movimento de uma partícula é regido pela equação*

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (2.1)$$

onde  $d\mathbf{p}/dt$  é a derivada do momento linear em relação ao tempo<sup>1</sup> e  $\mathbf{F}$  a força total a que ela está sujeita.”

É interessante mencionar que existem problemas na física, como no lançamento de foguetes, que a massa pode variar com o tempo. Contudo, na maioria das situações de interesse, inclusive neste trabalho, a massa se mantém constante e a Eq. (2.1) se torna:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (2.2)$$

onde  $m$  é massa (constante) e  $\mathbf{a}$  é a aceleração da partícula.

**Terceira Lei:** “*A cada ação corresponde uma reação igual e oposta, isto é, se  $\mathbf{F}_{ij}$  é a força sobre a partícula  $i$  exercida pela partícula  $j$ , então*”

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}. \quad (2.3)$$

Pesquisas recentes indicam que pode ocorrer quebra de simetria na terceira lei de Newton — também conhecida como *lei da ação e reação* — quando fótons com massa efetiva são submetidos a determinadas situações, fazendo que a reação tenha o mesmo sentido da ação [5].

Uma das principais consequências das leis de Newton são os teoremas de conservação, que iremos abordar em seguida.

### 2.1.2 Teoremas de Conservação

Os teoremas fornecem informações fundamentais de sistemas físicos e são válidos somente em referenciais inerciais. Para discutirmos os teoremas, vamos enunciá-los segundo a referência [2].

<sup>1</sup> Ao decorrer deste trabalho iremos usar a *Notação de Newton*, onde a derivada de uma função  $f$  qualquer em relação ao tempo é escrita como  $\dot{f}$  e a derivada segunda em relação ao tempo é  $\ddot{f}$ . Portanto, se a posição de uma partícula é dada por  $r$ , a velocidade será  $\dot{r}$  e a aceleração  $\ddot{r}$ .

**Teorema da Conservação do Momento Linear:** “A quantidade de movimento linear  $\mathbf{p}$  de uma partícula é conservada quando a força total sobre ela é zero.”

O momento linear de uma partícula é definido por

$$\mathbf{p} \equiv m \dot{\mathbf{r}}, \quad (2.4)$$

então derivando o momento linear  $\mathbf{p}$  em relação ao tempo, obtemos

$$\dot{\mathbf{p}} = m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}, \quad (2.5)$$

onde  $\mathbf{F}$  é a força total (força resultante) sobre a partícula. Se  $\mathbf{F} = 0$  (partícula livre), temos

$$\dot{\mathbf{p}} = 0. \quad (2.6)$$

Integrando ambos os lados em relação ao tempo, concluímos que

$$\mathbf{p} = \text{constante}, \quad (2.7)$$

ou seja, o momento linear é constante e, portanto, se conserva.

Podemos obter o resultado em termos de um vetor constante  $\mathbf{s}$  qualquer, tal que

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{s} = 0, \quad (2.8)$$

levando a

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{s} = \text{constante}. \quad (2.9)$$

Portanto, o momento linear é constante na direção que a força é inexistente.

**Teorema da Conservação do Momento Angular:** “O momento angular de uma partícula não sujeita a qualquer torque externo é conservado.”

O momento angular de uma partícula em relação a origem definido por

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (2.10)$$

onde o  $\mathbf{r}$  é a distância até a origem. Por outro lado, o torque com respeito a origem é definido como

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (2.11)$$

Substituindo a Eq. 2.5 na equação acima, ficamos com

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}. \quad (2.12)$$

Usando a regra do produto para derivar o momento angular  $\mathbf{L}$  em relação ao tempo, obtemos

$$\dot{\mathbf{L}} = (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) + (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}), \quad (2.13)$$

deste modo

$$(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} = m(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) \equiv 0, \quad (2.14)$$

deduzimos que

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \boldsymbol{\tau}. \quad (2.15)$$

Portanto, se uma partícula não está sujeita a qualquer torque ( $\boldsymbol{\tau} = 0$ ), temos

$$\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\tau} = 0, \quad (2.16)$$

resultando em

$$\mathbf{L} = \text{constante}, \quad (2.17)$$

que implica na conservação do momento angular.

**Teorema da Conservação da Energia:** “A energia total  $E$  de uma partícula em um campo de força conservativo é constante no tempo.”

O trabalho é definido como o deslocamento de uma partícula de um ponto  $A$  para um ponto  $B$  provocado por uma força  $\mathbf{F}$ , ou seja,

$$W_{AB} \equiv \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.18)$$

Se  $\mathbf{F}$  for a força total sobre a partícula, então

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = m \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt. \quad (2.19)$$

Usando a regra do produto, temos

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) dt = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\dot{r}^2) dt = d \left( \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right), \quad (2.20)$$

onde  $\dot{\mathbf{r}}$  é a velocidade da partícula. Substituindo a Eq. 2.20 Na Eq. 2.18, podemos escrever o trabalho  $W_{AB}$  como

$$W_{AB} = \int_A^B d \left( \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right). \quad (2.21)$$

Integrando o trabalho e sabendo que energia cinética é dada por  $T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$ , obtemos

$$W_{AB} = \left( \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right) \Big|_A^B = \frac{1}{2} m (\dot{r}_B^2 - \dot{r}_A^2) = T_B - T_A. \quad (2.22)$$

Concluindo assim que o trabalho é igual a variação da energia cinética.

Em casos que a força é conservativa, ou seja, quando o trabalho para mover a partícula de um ponto a outro independe do caminho, podemos definir a energia potencial em função do trabalho:

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \equiv V_A - V_B. \quad (2.23)$$

Portanto, o trabalho realizado sobre a partícula é meramente a diferença de potencial entre dois pontos.

Sabemos que a força  $\mathbf{F}$  pode ser expressa como

$$\mathbf{F} = -\nabla V, \quad (2.24)$$

onde  $V$  é uma função escalar (condição necessária para que  $\mathbf{F}$  seja conservativa). Desta forma, podemos reescrever a Eq. 2.23 da seguinte maneira

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_A^B (\nabla V) \cdot d\mathbf{r} = - \int_A^B dV = V_A - V_B. \quad (2.25)$$

É importante esclarecer que não estamos levando em conta os casos em que a energia potencial depende da velocidade ( $V$  é uma função apenas das coordenadas e eventualmente do tempo).

Definindo a energia total  $E$  como sendo a soma da energia cinética e potencial, temos

$$E \equiv T + V, \quad (2.26)$$

sendo sua derivada total em relação ao tempo dado por

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt}. \quad (2.27)$$

Avaliando cada termo separadamente, começando pela variação da energia cinética, temos pela Eq. 2.20 que

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = d\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right) = dT. \quad (2.28)$$

Dividindo ambos os lados por  $dt$ , obtemos

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (2.29)$$

Já para a variação da energia potencial, vamos utilizar a regra do produto para múltiplas variáveis:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_i \frac{\partial V}{\partial r_i} \frac{dr_i}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (2.30)$$

então

$$\frac{dV}{dt} = \sum_i \frac{\partial V}{\partial r_i} \dot{r}_i + \frac{\partial V}{\partial t} = (\nabla V) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (2.31)$$

Substituindo as Eqs. 2.29 e 2.31 na Eq. 2.27, encontramos

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} + (\nabla V) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial V}{\partial t} = (\mathbf{F} + \nabla V) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (2.32)$$

Como  $\mathbf{F} = -\nabla V$ , então  $\mathbf{F} + \nabla V$  se anula e deduzimos que

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (2.33)$$

Portanto, se  $V$  não depende explicitamente do tempo, então  $\mathbf{F}$  é conservativa e a energia total  $E$  é conservada.

Este é um importante resultado e iremos discutir a conservação da energia total com mais detalhes no contexto da dinâmica lagrangeana e principalmente no contexto da dinâmica Hamiltoniana. No entanto, como foi mencionado no início deste capítulo, vamos apresentar e discutir brevemente o resultado de um sistema relativamente conhecido: o pêndulo simples. Vejamos logo abaixo.

**Exemplo 2.1.1** *Pêndulo simples sem atrito.*

O pêndulo simples consiste em um corpo de massa  $m$  vinculado a um suporte fixo por uma corda de massa desprezível e comprimento  $l$ , conforme mostrado na Figura 1. Tal sistema realiza oscilações periódicas devido à força gravitacional.

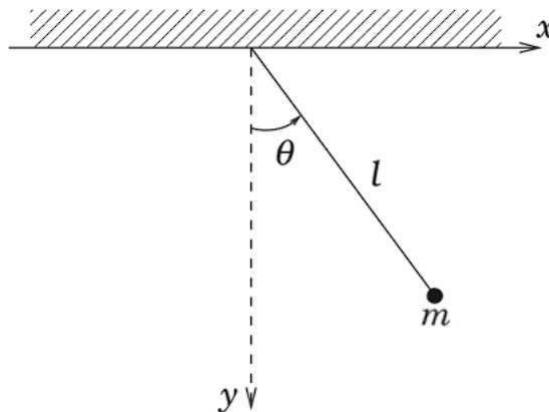


Figura 1 – Pêndulo Simples. Fonte: [1].

Partindo da segunda lei de Newton para determinar a equação de movimento do sistema, temos

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}, \quad (2.34)$$

onde  $\mathbf{a}$  é a aceleração. Como o comprimento da corda é constante, então a trajetória da massa  $m$  forma um arco; portanto, a componente tangencial da força gravitacional é a única responsável pela dinâmica do sistema:

$$m a = - m g \operatorname{sen} \theta, \quad (2.35)$$

ou

$$a = - g \operatorname{sen} \theta, \quad (2.36)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade e o sinal negativo indica que a aceleração do sistema é sempre oposta ao ângulo de oscilação  $\theta$ . Podemos determinar  $a$  pelo comprimento de arco dado por  $s$ :

$$s = l \theta. \quad (2.37)$$

Derivando  $s$  duas vezes em relação ao tempo, temos

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = l \frac{d\theta}{dt} = l \dot{\theta}, \quad \ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2} = l \frac{d^2\theta}{dt^2} = l \ddot{\theta}. \quad (2.38)$$

Como  $a = \ddot{s}$ , então a Eq 2.36 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta = 0. \quad (2.39)$$

Se definirmos  $\omega_0^2 = g/l$ , obtemos

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \operatorname{sen} \theta = 0, \quad (2.40)$$

que é a equação de movimento do pêndulo simples, sendo  $\omega_0$  a frequência natural do sistema.

Não há forças dissipativas e a única força responsável pelo movimento do pêndulo deriva da energia potencial gravitacional, dada por  $V = -mgh$  ( $h$  é a altura e o sinal negativo é devido a escolha arbitrária dos eixos). Logo, a força resultante sobre o sistema é conservativa e a energia total é conservada. Em outras palavras, esse sistema, se possuir atrito desprezível, oscila com amplitude aproximadamente constante. ■

Com as devidas discussões acerca da mecânica newtoniana que realizamos acima, podemos iniciar nosso estudo sobre a mecânica analítica, começando pela dinâmica lagrangeana.

## 2.2 Dinâmica Lagrangeana

Apesar de ser um marco revolucionário na física e na ciência como um todo, a mecânica newtoniana apresenta limitações quando se propõe a descrever sistemas impostos a restrições (vínculos). Nessas circunstâncias é necessário recorrer a variáveis obsoletas e analisar *todas* as forças atuando sobre o sistema, inclusive as forças de vínculo. Então, se o sistema apresenta restrições complexas, como no caso do pêndulo duplo, a obtenção das equações de movimento se torna uma tarefa árdua ou até impossível.

Para evitar tais limitações é necessário recorrer a um novo formalismo desenvolvido por Lagrange. Em tal formalismo partimos de uma função escalar denominada *lagrangeana* — expressa em coordenadas generalizadas (independentes entre si) — e aplicando as *equações de Lagrange*, que iremos ver mais adiante, obtemos as equações de movimento equivalente àquelas fornecidas pela mecânica newtoniana.

Há mais de uma forma de obtermos as *equações de Lagrange*, mas iremos determiná-las a partir do *princípio de Hamilton*, também conhecido como o *princípio da mínima ação*, por ser um princípio elegante e fundamental, que tem suas origem no cálculo das variações.

## 2.2.1 Rudimentos do Cálculo das Variações

Como nosso objetivo é estudar a dinâmica de sistemas físicos, então iremos focar nos elementos do cálculo das variações que levam a importantes resultados na física, sem recorrer às provas matemáticas.

O objetivo do cálculo das variações é obter extremos (máximos e mínimos) de uma função chamada *funcional*. O domínio de tal função é um espaço de funções e o problema mais elementar que podemos formular é o seguinte: dado o funcional

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx, \quad (2.41)$$

onde  $y'(x) = dy/dx$ . Então, temos como objetivo encontrar a curva, entre todas as curvas, dada por  $y = y(x)$ , que passa entre os limites de integração  $x_1$  e  $x_2$  e minimiza (extremiza)  $J$ , ou seja, dada qualquer outra função  $y$  (variando  $y$ ), a curva vizinha gerada irá percorrer um caminho maior que a gerada por  $y(x)$ . Podemos escrever todas as curvas vizinhas com a parametrização  $y = y(\epsilon, x)$ , onde  $\epsilon = 0$  implica na curva  $y = y(x)$  que minimiza  $J$ . Podemos expressar  $y = y(\epsilon, x)$  como

$$y(\epsilon, x) = y(0, x) + \epsilon\eta(x), \quad (2.42)$$

onde  $\eta(x)$  é uma função diferenciável e contínua que se anula em nos limites de integração, uma vez que  $y(\epsilon, x) = y(x)$  nos pontos  $x_1$  e  $x_2$ . A Figura 2 ilustra essa situação

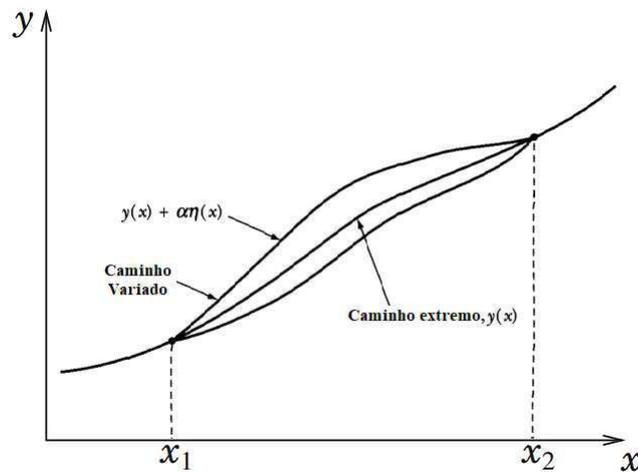


Figura 2 – Variação de uma curva mostrando caminhos vizinhos ao que minimiza  $J$ . Fonte: [2].

O funcional  $J$  dado pela Eq. 2.41 pode se tornar uma função de  $\epsilon$  se funções da forma 2.42 forem consideradas:

$$J(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(\epsilon, x), y'(\epsilon, x), x) dx. \quad (2.43)$$

Uma condição necessária, mas não suficiente, para que  $y(x)$  resulte em um extremo (ponto estacionário) é que

$$\left( \frac{dJ}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} = 0, \quad (2.44)$$

ou seja, ao longo do caminho o funcional  $J$  independe do parâmetro  $\epsilon$ . Com este resultado iremos obter a equação de Euler, que é uma peça chave para o desenvolvimento deste trabalho.

### 2.2.2 Equação de Euler

Dada a condição 2.44, então a diferenciação do funcional  $J$  expresso pela Eq. 2.41 é escrita como

$$\frac{dJ}{d\epsilon} = \frac{d}{d\epsilon} \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx, \quad (2.45)$$

mas podemos reescrever a equação acima da seguinte forma

$$\frac{dJ}{d\epsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \epsilon} \right) dx. \quad (2.46)$$

Utilizando a Eq. 2.42, obtemos

$$\frac{\partial y}{\partial \epsilon} = \eta(x); \quad \frac{\partial y'}{\partial \epsilon} = \frac{d\eta}{dx}. \quad (2.47)$$

Assim, a Eq. 2.46 se torna

$$\frac{dJ}{d\epsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} \right) dx. \quad (2.48)$$

Aplicando integração por partes no segundo termo:

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (2.49)$$

sendo

$$u = \frac{\partial f}{\partial y'}; \quad v = \eta(x), \quad (2.50)$$

obtemos, então

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} dx = \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx. \quad (2.51)$$

Sabemos que  $\eta(x)$  se anula nos pontos  $x_1$  e  $x_2$ , então

$$\frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0. \quad (2.52)$$

Portanto, a Eq. 2.46 torna-se

$$\frac{dJ}{d\epsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx. \quad (2.53)$$

Visto que  $\eta(x)$  é uma função qualquer e considerando a condição da Eq. 2.44, então a integração é eliminada:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (2.54)$$

Assim, obtemos a famosa *equação de Euler*, a qual é uma condição necessária para a existência de um extremo.

Com a equação de Euler é possível resolver vários problemas clássicos da física, como determinar a braquistócrona ou as geodésicas de uma esfera. Contudo, na mecânica é bastante comum  $f$  ser um funcional de diversas variáveis dependentes:

$$f = f(\{y_i(x), y'_i(x); x\}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.55)$$

então

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.56)$$

que é a equação de Euler para diversas variáveis dependentes.

Com os resultados obtidos acima, é possível obter as equações de Lagrange. Entretanto, é fundamental estudarmos a notação usual do cálculo de variações, uma vez que é a notação que iremos utilizar no contexto da mecânica analítica.

### 2.2.3 Notação Variacional

É bastante comum no cálculo de variações utilizar  $\delta$  como notação para representar uma variação. Assim, seja uma variação na Eq. 2.53 expressa por

$$\frac{dJ}{d\alpha} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha dx, \quad (2.57)$$

fazendo

$$\frac{dJ}{d\alpha} d\alpha = \delta J; \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha = \delta y, \quad (2.58)$$

que resulta em

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx. \quad (2.59)$$

Portanto, a Eq. 2.57 se reduz a

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} f(\{y, y'; x\}) dx = 0. \quad (2.60)$$

A variação  $\delta$  pode ir para parte de dentro da integral, já que os limites são independentes da variação, assim

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \delta f dx = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) dx, \quad (2.61)$$

entretanto

$$\delta y' = \delta \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\delta y), \quad (2.62)$$

consequentemente

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y \right) dx. \quad (2.63)$$

Integrando o segundo termo por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (2.64)$$

sendo

$$u = \frac{\partial f}{\partial y'}; \quad v = \delta y, \quad (2.65)$$

obtemos, então

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx. \quad (2.66)$$

Deste modo, a condição  $\delta J = 0$ , sendo  $\delta y$  uma variação qualquer, implica na eliminação da integral, levando a equação de Euler.

Antes de enunciar o princípio de Hamilton e obter as equações de Lagrange utilizando a notação variacional, é indispensável definirmos com clareza o conceito de vínculos e coordenadas generalizadas.

## 2.2.4 Vínculos

Vínculos são restrições de ordem *geométrica ou cinemática* aos possíveis movimentos de partículas de um sistema mecânico. É essencial o entendimento que tais limitações precedem a dinâmica do sistema.

Um importante tipo de vínculo é aquele que pode ser representado da seguinte forma:

$$f(\xi_1, \dots, \xi_n, t) = 0, \quad (2.67)$$

ou seja, que dependa apenas das coordenadas  $\xi$ 's — que são coordenadas arbitrárias — e eventualmente do tempo. Vínculos expressos deste modo são chamados de vínculos *holônomos* e, evidentemente, vínculos que não podem ser assim expressos são chamados de vínculos *não-holônomos*. Um exemplo de vínculo não-holônomo ocorre quando, por exemplo, um disco vertical rola sem deslizar em um plano horizontal (Figura 3), onde as condições de rolamento são dadas por

$$\dot{x} - R\dot{\phi} \cos \theta = 0, \quad \dot{y} - R\dot{\phi} \sin \theta = 0, \quad (2.68)$$

implicando em uma restrição que não pode ser da forma (2.67). A distinção entre vínculos holônomos e não-holônomos é pertinente, uma vez que métodos válidos para o caso holônomo não necessariamente são válidos para o caso não-holônomo [6].

Com o conceito de vínculos holônomos estabelecido, é possível obter, para alguns casos, uma quantidade mínima de coordenadas independentes que são suficientes para descrever completamente o estado de um sistema, como iremos ver adiante.

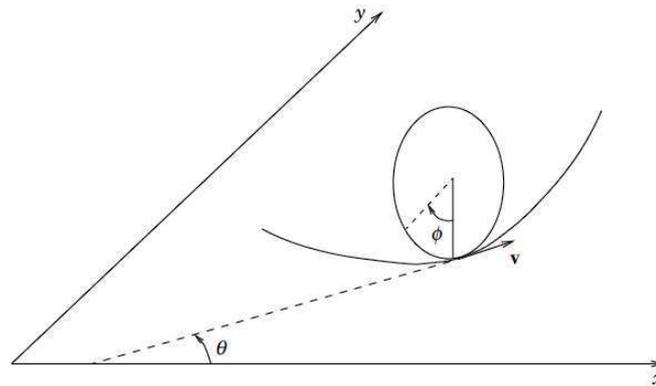


Figura 3 – Disco vertical rolando sem deslizar em um plano horizontal. Fonte: [1].

### 2.2.5 Coordenadas Generalizadas

Se a posição de cada partícula em um sistema holônomo for determinada de maneira unívoca por variáveis independentes, formuladas como  $q_1, \dots, q_n$ , e a Eq. 2.67 puder ser expressa em termos desses  $q$ 's, então nomeamos essas variáveis independentes como *coordenadas generalizadas*.

O espaço em que as posições instantâneas (expressas em coordenadas generalizadas) de todas as partículas do sistema é definido, é chamado de *espaço de configuração* do sistema.

Agora podemos obter as equações de Lagrange em Coordenadas Generalizadas.

### 2.2.6 Princípio de Hamilton e Equações de Lagrange em Coordenadas Generalizadas

Entre os anos de 1834 e 1835 William Rowan Hamilton enunciou aquele que seria um dos princípios mais importantes da física e que leva seu nome, o *princípio de Hamilton*. A partir deste princípio é possível descrever inúmeros sistemas mecânicos e obter as equações de Lagrange. O princípio de Hamilton será enunciado segundo [2]:

**Princípio de Hamilton:** “*De todos os caminhos possíveis nos quais um sistema dinâmico pode se mover de um ponto a outro em um intervalo de tempo específico (consistente com quaisquer vínculos), o caminho real seguido é aquele que minimiza a integral de tempo da diferença entre as energias cinéticas e potenciais.*”

O Princípio de Hamilton pode ser expresso como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt, \quad (2.69)$$

onde  $S$  é a ação,  $T$  a energia cinética e  $V$  a energia potencial do sistema. Utilizando a notação variacional, temos que a variação da ação é

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt. \quad (2.70)$$

Fazendo  $\delta S = 0$ , ficamos com

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0. \quad (2.71)$$

Este resultado implica em um extremo, mas não obrigatoriamente em um mínimo.

Se o sistema for holônomo e especificado por coordenadas generalizadas, (i)  $T$  será uma função meramente de  $\dot{q}_k$ ; e se as forças sobre o sistema derivam de um potencial escalar (forças conservativas), (ii)  $V$  será uma função meramente de  $q_k$ . Posto isto, e definindo uma função  $L$  chamada *lagrangeana* como

$$L \equiv T - V = L(q_k, \dot{q}_k), \quad (2.72)$$

então a Eq. 2.71 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k) dt = 0. \quad (2.73)$$

A lagrangeana  $L$  equivale a função  $f$  da Eq. 2.55, então se aplicarmos as simples transformações

$$x \rightarrow t; \quad y_i(x) \rightarrow q_k(t); \quad y'_i(x) \rightarrow \dot{q}_k(t); \quad f(y_i(x), y'_i(x), x) \rightarrow L(x_i, \dot{x}_i), \quad (2.74)$$

e seguindo os mesmos passos da Seção 2.2.2, obtemos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.75)$$

que são as *equações de Lagrange*. Uma importante propriedade das equações de Lagrange é sua invariância em relação a uma transformação geral de coordenadas, levando às mesmas equações de movimento.

É indispensável enfatizar que, embora  $L$  tenha dimensão de energia, a lagrangeana não tem significado físico, sendo “somente” uma ferramenta matemática para obtermos as equações de movimento de um sistema dinâmico. Agora, vamos abordar o problema do pêndulo simples à luz da dinâmica lagrangeana.

### Exemplo 2.2.1 Pêndulo simples sem atrito.

Temos que a energia cinética do pêndulo simples (Figura 1), em coordenadas polares, é

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2, \quad (2.76)$$

e a energia potencial

$$V = -mgl \cos \theta. \quad (2.77)$$

A lagrangeana é dada por  $L = T - V$ , logo

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta. \quad (2.78)$$

Fazendo

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta}; \quad \frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\theta}) = ml^2 \ddot{\theta}; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \operatorname{sen} \theta \quad (2.79)$$

e substituindo na equação de Lagrange (2.75), obtemos a equação de movimento do pêndulo simples:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta = 0. \quad (2.80)$$

Se definirmos  $\omega_0^2 = g/l$ , então podemos rescrever a equação acima como

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \operatorname{sen} \theta = 0, \quad (2.81)$$

onde  $\omega_0$  é a frequência natural do sistema. ■

Observamos que resultado obtido acima (Eq. 2.81) é igual ao obtido através da dinâmica newtoniana (Eq. 2.40), mostrando a equivalência entre o formalismo newtoniano e lagrangeano. Além disso, as equações de Lagrange podem abranger, por meio da função de dissipação de Rayleigh, vista a seguir, situações onde há forças dissipativas. Vejamos como.

### 2.2.7 Função de dissipação de Rayleigh

As forças generalizadas podem derivar de um potencial  $U(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$  mediante a equação

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right), \quad (2.82)$$

então a lagrangeana (2.72) torna-se:

$$L = T - U, \quad (2.83)$$

onde  $U$  é nomeado de potencial generalizado e as equações de Lagrange (2.75) permanecem as mesmas. O estudo do caso onde as forças resultam de um potencial generalizado (2.82) é importante, uma vez que existem situações na física, como no caso da força eletromagnética sobre uma partícula carregada em movimento, que comportam potenciais generalizados. Contudo, nosso interesse é na situação onde as forças generalizadas são dadas por

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) + Q'_k, \quad (2.84)$$

onde  $Q'_k$  é a componente da força generalizadas que não advém de qualquer potencial generalizado. Neste caso as equações de Lagrange resultam em

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k. \quad (2.85)$$

Um caso bastante comum onde os  $Q'_k$  descrevem forças dependentes das velocidades são os que envolve atrito viscoso (movimento de uma partícula em um fluido). As componentes dessas forças são da forma

$$F'_{ix} = -k_{ix}v_{ix}, F'_{iy} = -k_{iy}v_{iy}, F'_{iz} = -k_{iz}v_{iz}, \quad (2.86)$$

onde os  $v$ 's são as velocidades e os  $k$ 's constantes positivas. Partindo disto, Rayleigh definiu a função de dissipação como [1]

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( k_{ix}v_{ix}^2 + k_{iy}v_{iy}^2 + k_{iz}v_{iz}^2 \right), \quad (2.87)$$

onde

$$F'_{ix} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{ix}}, F'_{iy} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{iy}}, F'_{iz} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{iz}}. \quad (2.88)$$

O significado físico da função de dissipação de Rayleigh surge quando calculamos o trabalho realizado pelas forças dissipativas:

$$dW' = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}'_i \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}'_i \cdot \mathbf{v}_i dt \quad (2.89)$$

$$\frac{dW'}{dt} = -\sum_{i=1}^N \left( k_{ix}v_{ix}^2 + k_{iy}v_{iy}^2 + k_{iz}v_{iz}^2 \right) = -2\mathcal{F}, \quad (2.90)$$

onde  $2\mathcal{F}$  é a taxa de dissipação da energia do sistema.

Os  $Q'_k$  podem ser expressos como

$$Q'_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}'_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}'_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = -\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{ix}} \frac{\partial v_{ix}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{iy}} \frac{\partial v_{iy}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{iz}} \frac{\partial v_{iz}}{\partial \dot{q}_k} \right), \quad (2.91)$$

ou seja,

$$Q'_k = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k}. \quad (2.92)$$

Com o resultado acima, as equações de movimento de Lagrange para sistemas dissipativos em que os potencia dependem das velocidades tornam-se

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} = 0. \quad (2.93)$$

Podemos, assim, escrever as equações de movimento de sistemas dissipativos em coordenadas generalizadas.

Uma vez que estudamos as equações de Lagrange, vamos, agora, partir para uma das suas principais consequências: as propriedades de simetria e leis de conservação.

## 2.3 Propriedades de Simetria e Leis de Conservação

A notória conexão entre propriedades de simetria e leis de conservação é indispensável para o estudo de sistemas dinâmicos. Por conseguinte, iremos abordar essa relação ao decorrer desta sessão.

### 2.3.1 Constantes de Movimento

Constantes de movimento são quantidades invariantes em sistemas dinâmicos, ou seja, são grandezas físicas que são conservadas.

Uma grande vantagem das constantes de movimento é que elas oferecem valiosas informações sobre alguns sistemas dinâmicos sem que seja necessário resolver o problema por completo. Para isto, vamos definir uma quantidade  $p_k$  chamada *momento canônico conjugado*:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \quad (2.94)$$

Se a coordenada  $q_k$  não estiver presente na lagrangeana  $L$ , embora  $\dot{q}_k$  esteja, então nomeamos tal coordenada como *coordenada cíclica* e a equação de Lagrange (2.75) se reduz a

$$\frac{dp_k}{dt} = 0. \quad (2.95)$$

Portanto,  $p_k$  é uma constante de movimento.

Esta constante de movimento pode ser, por exemplo, o momento linear ou o momento angular de uma partícula, como iremos ver no exemplo a seguir.

#### Exemplo 2.3.1. Pêndulo esférico sem atrito.

O pêndulo esférico é semelhante ao pêndulo simples, mas apresenta um grau de liberdade a mais, representado pela coordenada generalizada  $\phi$ , ou seja, o movimento passa a ser no espaço — como se a partícula estivesse ora “entrando” e ora “saindo” da folha — como podemos observar na Figura 4.

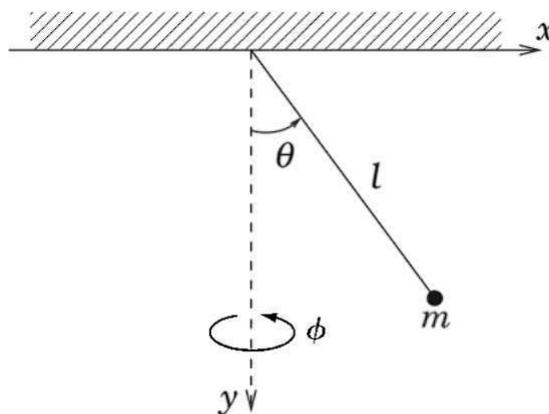


Figura 4 – Pêndulo Esférico. Fonte: [1].

A energia cinética, em coordenadas esféricas, é dada por

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta, \quad (2.96)$$

e sua energia potencial por

$$V = -mgl \cos \theta. \quad (2.97)$$

Portando, a lagrangeana é

$$L = \frac{1}{2}ml^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + mgl \cos \theta. \quad (2.98)$$

Visto que  $\phi$  é uma coordenada cíclica (não está presente na lagrangeana), então  $p_\phi$  é uma constante de movimento:

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} \sin^2 \theta = \text{constante}, \quad (2.99)$$

e conseqüentemente

$$\frac{dp_\phi}{dt} = 0. \quad (2.100)$$

Esta última equação implica que o momento angular em relação ao eixo  $y$  é conservado. ■

Podemos interpretar a falta de uma coordenada como uma propriedade de simetria, já que uma mudança no seu valor não afeta a lagrangeana do sistema.

### 2.3.2 Teoremas de Conservação

Iremos enunciar dois teoremas de conservação, segundo [1], sem recorrer a quaisquer demonstrações, já que tais demonstrações requerem a utilização dos *multiplicadores de Lagrange*<sup>2</sup>, que é um conteúdo que foge do objetivo deste trabalho.

Para enunciar os teoremas, primeiro temos que considerar um sistema representado pela lagrangeana

$$L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, t) \equiv L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (2.101)$$

onde  $\mathbf{r}_i$  e  $\mathbf{v}_i$  são transformações infinitesimais:

$$\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \delta \mathbf{r}_i; \quad \mathbf{v}_i \rightarrow \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i + \delta \mathbf{v}_i. \quad (2.102)$$

Além disso, temos que considerar que o sistema esteja submetida a  $p$  vínculos holônimos da forma

$$f_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad s = 1, \dots, p. \quad (2.103)$$

**Teorema 2.3.1:** “Suponha que um sistema mecânico seja descrito pela lagrangeana  $L = T - V$ , onde  $V$  é um potencial independente das velocidades. Se a lagrangeana e os vínculos (2.103) são invariantes sob uma translação rígida arbitrária, então o momento linear total do sistema é conservado.”

**Teorema 2.3.2:** “Seja  $V$  um potencial independente das velocidades. Se a lagrangeana  $L = T - V$  e os vínculos (2.103) são invariantes sob uma rotação rígida arbitrária, então o momento angular total do sistema é conservado.”

Estes teoremas implicam na conservação dos momentos lineares e angulares total, perante simetrias de translações e rotações, sem recorrer à terceira lei de Newton.

<sup>2</sup> Consultar Capítulo 2, Seção 2.5, Pág. 67 de [1] para mais informações.

### 2.3.3 Conservação da Energia

A dinâmica lagrangeana contém um importante teorema de conservação de energia que pode ser descrito pela lagrangeana  $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ , caso o sistema esteja submetido a vínculos holônomos. De acordo com [1]:

**Teorema 2.3.3:** “Sejam  $q_1, \dots, q_n$  coordenadas generalizadas de um sistema com lagrangeana  $L$ . Se  $L$  não depende explicitamente do tempo, a quantidade  $h$  definida por

$$h = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \quad (2.104)$$

é uma constante de movimento, frequentemente chamada de integral de Jacobi.”

Supondo que  $L = T - V$ , então se o potencial  $V$  independer das velocidades, podemos reescrever a Eq. 2.104 como

$$h = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - (T - V). \quad (2.105)$$

Ademais, se a energia cinética  $T$  é uma função homogênea de segundo grau das velocidades generalizada<sup>3</sup>, então pelo teorema de Euler das funções homogêneas<sup>4</sup>,

$$h = 2T - (T - V) = T + V = E, \quad (2.106)$$

onde integral de Jacobi  $h$  é a energia total do sistema.

Neste último resultado o potencial  $V$  e, conseqüentemente,  $L$  não dependem explicitamente do tempo. Contudo, pode ocorrer casos que  $V$  não dependa explicitamente do tempo, mas os vínculos dependam, fazendo que  $h$  não corresponda a energia total do sistema. É valioso esclarecer que as condições para que  $h$  seja uma constante de movimento independe das condições que garante que  $h$  seja a energia total, podendo ocorrer casos onde  $h$  é energia total mas não se conserva, se conserva mas não é a energia total e, evidentemente, se conserva e é a energia total. Voltaremos a discutir estes resultados no contexto da dinâmica hamiltoniana pois, como mencionado ao longo do texto, um dos focos deste TCC é investigar com razoável nível de detalhes tais situações e em diversos sistemas físicos.

### 2.3.4 Teorema de Noether

A notória matemática alemã Emmy Noether (1882 - 1935) condensou em um único teorema, que leva seu nome, a conexão entre propriedades de simetrias e leis de conservação. Todos os resultados que obtemos nesta Seção (2.3) são casos particulares do Teorema de Noether.

<sup>3</sup> Consultar Capítulo 2, Seção 2.6, Pág. 69 de [1] para mais informações.

<sup>4</sup> Consultar o Apêndice B (Funções Homogêneas e Teorema de Euler) de [1].

Para enunciar o teorema de Noether, segundo [1], temos que considerar um parâmetro  $\epsilon$  infinitesimal qualquer e duas funções conhecidas ( $X$  e  $\Psi_i$ ). Com isto podemos considerar a seguinte transformação infinitesimal

$$t \longrightarrow t' = t + \epsilon X(q(t), t); \quad q_i(t) \longrightarrow q'_i(t') = q_i(t) + \epsilon \Psi_i(q(t), t). \quad (2.107)$$

Desta forma

$$\Delta S = \int_{t'_1}^{t'_2} L\left(q'(t'), \frac{dq'(t')}{dt'}, t'\right) dt' - \int_{t_1}^{t_2} L\left(q(t), \frac{dq(t)}{dt}, t\right) dt = 0, \quad (2.108)$$

ou seja, sob a transformação (2.107), a integral de ação se mantém invariante.

**Teorema 2.3.4:** “*Dado um sistema mecânico com  $n$  graus de liberdade, se a ação é invariante sob a transformação (2.107) então a quantidade*

$$C = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_i X - \Psi_i) - LX, \quad (2.109)$$

*é constante de movimento, onde  $L(q, \dot{q}, t)$  é a lagrangeana do sistema.*”

Noether é considerada uma das maiores matemáticas da história e seu teorema como um dos mais importantes para o desenvolvimento da física moderna [7].

Chegamos ao fim do estudo do formalismo lagrangeano neste trabalho. Com isto, abordaremos, logo em seguida, o outro ramo dominante da mecânica analítica: a dinâmica hamiltoniana.

## 2.4 Dinâmica Hamiltoniana

Diferente do formalismo lagrangeano, onde  $L$  é “apenas” uma função — sem significado físico — para obtermos as  $n$  equações diferenciais de segunda ordem que definem a dinâmica de um sistema com  $n$  graus de liberdade, a dinâmica hamiltoniana apresenta uma função  $H$ , denominada *hamiltoniana*, que pode coincidir com a energia total do sistema e conduz a  $2n$  equações diferenciais de primeira ordem equivalentes às  $n$  equações do formalismo lagrangeano.

A dinâmica hamiltoniana está inserida no *espaço de fase*. Tal espaço, diferente do espaço de configurações que define apenas as posições das partículas ( $q_1, \dots, q_n$ ), determina as posições generalizadas ( $q_1, \dots, q_n$ ) e os momentos canônicos ( $p_1, \dots, p_n$ ), ou seja, determina as posições e velocidades de todas as partículas do sistema.

Por fim, é relevante mencionar que a dinâmica hamiltoniana não é, em geral, simples de se trabalhar em comparação com a dinâmica lagrangeana, mas suas consequências nos levam a resultados mais fundamentais.

### 2.4.1 Momentos Canônicos e Equações de Hamilton

Definindo o momento canônico conjugado a  $q_i$  como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (2.110)$$

e supondo o caso em que  $p_i$  pode ser resolvida para as velocidades generalizadas, então basta aplicarmos uma *transformação de Legendre*<sup>5</sup> que a lagrangeana  $L(q, \dot{q}, t)$  se torna  $H(q, p, t)$ :

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t) \quad , \quad (2.111)$$

onde  $H$  é a hamiltoniana. Podemos observar que na hamiltoniana as velocidades generalizadas foram substituídas pelos momentos canônicos.

Podemos obter alguns resultados importantes se tomarmos a diferencial de  $H$ :

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right\} \quad . \quad (2.112)$$

Utilizando a definição de momento canônico dado pela Eq. 2.110, podemos reescrever a equação acima como

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad . \quad (2.113)$$

É fácil observar por este último resultado que  $H$  depende somente das posições generalizadas e dos momentos canônicos. Em contrapartida

$$dH = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad . \quad (2.114)$$

Igualando as Eq. 2.113 e a Eq. 2.114, obtemos

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (2.115)$$

e

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad . \quad (2.116)$$

As Eqs. 2.115 são as ilustres *equações de Hamilton*. É essencial o entendimento que para a descrição completa de um sistema dinâmico, precisamos das  $2n$  Eqs. 2.115. Outro fato que requer atenção é que, diferente da lagrangeana, a escolha de diferentes coordenadas generalizadas mudam a forma e o valor da hamiltoniana.

Antes de estudarmos as propriedades de simetria e leis de conservação no contexto da dinâmica hamiltoniana, vamos abordando, novamente, o problema do pêndulo simples.

<sup>5</sup> Consultar [8] para mais informações sobre essa importante transformação que é bastante utilizada na termodinâmica.

**Exemplo 2.4.1** *Pêndulo simples sem atrito.*

O problema do pêndulo simples, ilustrado na Figura 1, tem sua lagrangeana, que já determinamos anteriormente (Eq. 2.78), dada por

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta, \quad (2.117)$$

onde o momento canônico é

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}. \quad (2.118)$$

Isolando  $\dot{\theta}$ , temos

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}. \quad (2.119)$$

Portanto, a hamiltoniana é expressa como

$$H = \dot{\theta}p_\theta - L = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta. \quad (2.120)$$

Aplicando as equações de Hamilton, ficamos com

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}; \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl \operatorname{sen} \theta. \quad (2.121)$$

Derivando  $\dot{\theta}$  em relação ao tempo

$$\ddot{\theta} - \frac{\dot{p}_\theta}{ml^2} = 0 \quad (2.122)$$

e substituindo  $\dot{p}_\theta$  pelo valor encontrado na Eq. 2.121, obtemos a equação de movimento do pêndulo simples:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta = 0. \quad (2.123)$$

Se definirmos  $\omega_0^2 = g/l$ , então podemos reescrever a equação acima como

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \operatorname{sen} \theta = 0, \quad (2.124)$$

onde  $\omega_0$  é a frequência natural do sistema. ■

Como era esperado, chegamos ao mesmo resultado no problema do pêndulo simples utilizando dinâmica newtoniana (Eq. 2.40), dinâmica lagrangeana (Eq. 2.81) e dinâmica hamiltoniana (Eq. 2.124). Assim, fica evidente a equivalência entre a mecânica newtoniana e a mecânica analítica.

## 2.4.2 Simetrias e Leis de Conservação

A conexão entre propriedades de simetria e leis de conservação também está presente na dinâmica hamiltoniana, com as devidas modificações. Como essa conexão é bastante semelhante ao apresentado no contexto da dinâmica lagrangeana (Seção 2.3),

então iremos apresentar apenas o conceito de coordenadas cíclicas para evidenciar esta semelhança.

Assim como na dinâmica lagrangeana, se uma coordenada  $q_k$  não estiver presente na hamiltoniana  $H$ , então esta coordenada será uma coordenada cíclica, tal que

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0, \quad (2.125)$$

assegurado que o momento canônico conjugado  $p_k$  é uma constante de movimento.

### 2.4.3 Hamiltoniana e Energia Total

Como uma das partes principais deste trabalho, e como um dos resultados mais elegantes da mecânica analítica, a relação entre a hamiltoniana e a energia total é um importante resultado para boa parte das situações de interesse da física.

Supondo que  $L = T - V$ , então se o potencial  $V$  independer das velocidades e se, além disso, a energia cinética  $T$  é uma função homogênea de segundo grau das velocidades generalizadas (função puramente quadrática das velocidades), então pelo teorema de Euler das funções homogêneas

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T. \quad (2.126)$$

Portanto, a hamiltoniana é a energia total:

$$H = T + V = E. \quad (2.127)$$

As condições para que hamiltoniana  $H$  seja a energia total independem das condições para que  $H$  seja uma constante de movimento — para ser uma constante de movimento basta apenas que  $H$  não dependa explicitamente do tempo ( $\partial H/\partial t = 0$ ). Consequentemente, a hamiltoniana (*i*) pode ser uma constante de movimento e coincidir com a energia total; (*ii*) não ser uma constante de movimento e ser a energia total; (*iii*) ser uma constante de movimento e não ser a energia total; (*iv*) não ser uma constante de movimento e não coincidir com a energia total do sistema.

Para o leitor que não está habituado a mecânica hamiltoniana, como um estudante da graduação em física que não ainda não frequentou ou está frequentando no presente momento a disciplina de mecânica clássica, os casos descritos acima podem parecer confusos, então no próximo capítulo, além de estudarmos a dinâmica de alguns sistemas, iremos esclarecer de forma prática esta relação entre a energia total e a hamiltoniana.

## 3 Resultados e Discussões

Neste capítulo iremos estudar a dinâmica e as propriedades de simetria de alguns sistemas. Contudo, é importante mencionar que nosso objetivo, por ora, não é buscar soluções analíticas explícitas das equações de movimento, uma vez que as expressões são relativamente complicadas para abordarmos. Assim, iremos recorrer ao *software* Mathematica para fornecer as soluções das equações de movimento e traçar os gráficos. Todos os códigos do Mathematica utilizados neste trabalho estão disponíveis no Apêndice A.1.

### 3.1 Oscilador Harmônico

O estudo do oscilador harmônico é fundamental para a física pois, em sua simplicidade, resultados de extrema importância surgem e trazem clareza para a dinâmica do universo. Muitos fenômenos físicos podem ser interpretados como um oscilador harmônico e um ótimo exemplo é o sólido de Einstein. Este modelo proposto por Albert Einstein em 1907, apesar de simples, é capaz de prever que o calor específico dos sólidos diminui com a temperatura se considerarmos que os sólidos são formados por  $n$  osciladores quânticos não-interagentes oscilando com a mesma frequência [9].

#### 3.1.1 Oscilador Harmônico Simples

O oscilador harmônico simples consiste em uma massa  $m$  acoplada a uma mola ideal de constante elástica  $k$  fixa em um suporte, conforme mostrado na Figura 5. Caso a massa seja movida do seu ponto de equilíbrio, o sistema começará a oscilar, sem atrito, em torno desse ponto devido à força restauradora da mola.

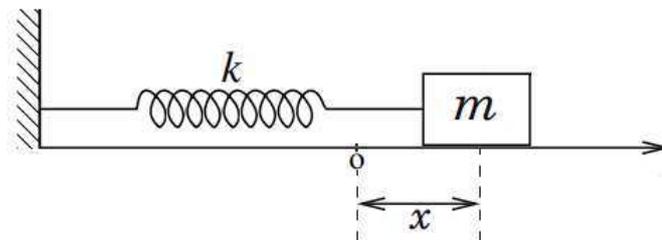


Figura 5 – Oscilador harmônico simples. Fonte: De autoria própria.

Para determinar a equação de movimento e suas possíveis constantes de movimento, vamos determinar a lagrangeana e hamiltoniana do sistema.

Sabemos que a lagrangeana é definida como

$$L = T - V, \quad (3.1)$$

onde a energia cinética do sistema é simplesmente

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (3.2)$$

e a energia potencial

$$V = \frac{1}{2}kx^2. \quad (3.3)$$

Portanto, a lagrangeana, em coordenadas generalizadas, é dada por

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2. \quad (3.4)$$

De posse da lagrangeana podemos obter facilmente a hamiltoniana:

$$H = \dot{x}p_x - L, \quad (3.5)$$

então

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2. \quad (3.6)$$

Conseqüentemente, se utilizarmos as equações de Hamilton,

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} \quad e \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (3.7)$$

obtemos a equação de movimento do oscilador harmônico simples:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x, \quad (3.8)$$

onde o sinal negativo indica que a aceleração do sistema, portanto a força, é sempre contrária ao deslocamento. Definindo  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , podemos reescrever a equação acima como

$$\ddot{x} = -\omega_0^2x, \quad (3.9)$$

que tem solução da forma

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \delta), \quad (3.10)$$

onde  $A$  é a amplitude,  $\delta$  a fase inicial e  $\omega_0$  a frequência angular do sistema.

Baseado nos resultados obtidos, observamos que o deslocamento, assim como a velocidade e aceleração, têm um comportamento senoidal, conforme a Figura 6. É possível determinar o período  $P$  sabendo que uma função seno se repete cada vez que seu ângulo aumenta  $2\pi$ :

$$P = 2\pi\omega_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (3.11)$$

A partir do período  $P$  (Eq. 3.11), podemos obter a frequência  $\nu_0$ :

$$\nu_0 = \frac{1}{P} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (3.12)$$

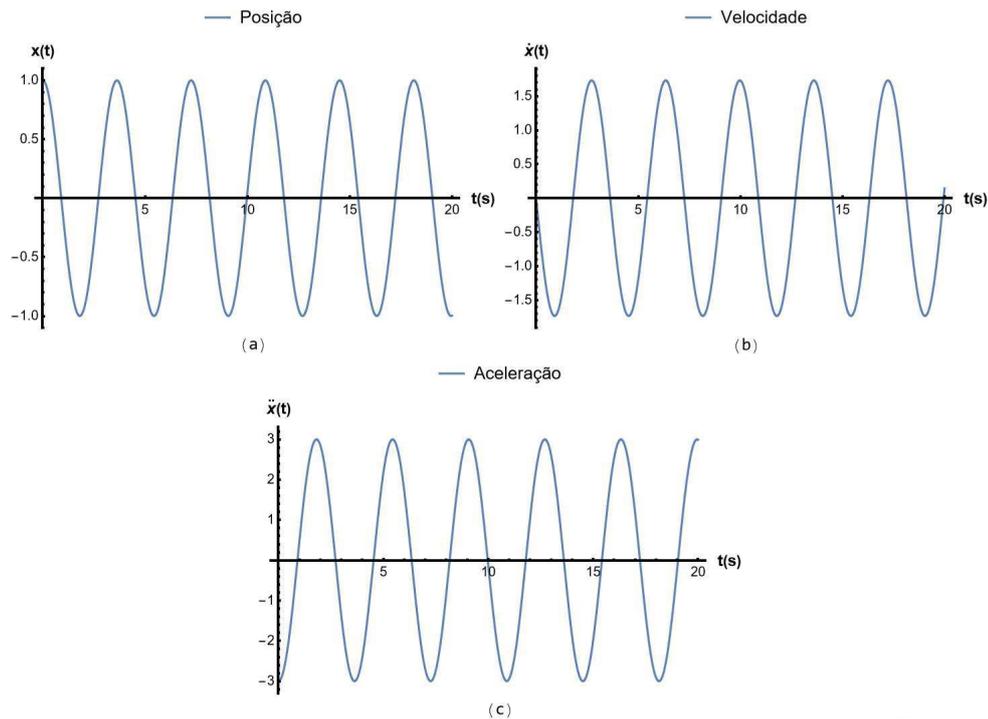


Figura 6 – Oscilador harmônico simples:  $m = 1 \text{ kg}$ ;  $k = 1 \text{ kg/s}^2$ ;  $\omega_0 = \sqrt{3} \text{ rad/s}$ ;  $x(0) = 1 \text{ m}$ ;  $\dot{x}(0) = 0 \text{ m/s}$ .

implicando que a frequência independe da amplitude, como podemos ver na Figura 7. Osciladores que apresentam esse comportamento são chamados de *isócronos* e, como também pode ser verificado com relativa facilidade, o pêndulo simples também satisfaz essa propriedade quando executa oscilações com arcos muito menores que o comprimento da haste (ou fio de suspensão).

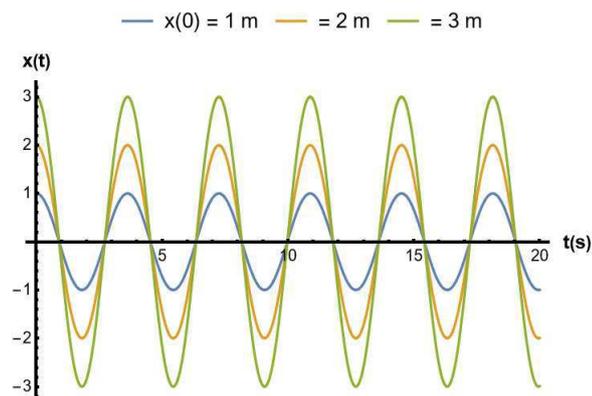


Figura 7 – Oscilador harmônico simples:  $m = 1 \text{ kg}$ ;  $k = 1 \text{ kg/s}^2$ ;  $\omega_0 = \sqrt{3} \text{ rad/s}$ ;  $\dot{x}(0) = 0 \text{ m/s}$  e diferentes valores de  $x(0)$ . Devido à condição inicial da velocidade  $\dot{x}(0) = 0$ , o  $x(0)$  de cada curva coincide com sua própria amplitude.

Outro resultado importante do oscilador harmônico simples, que está intimamente ligado ao objetivo deste trabalho, é o comportamento da energia total e a sua relação com a hamiltoniana. Como  $V$  não depende explicitamente do tempo, então a força resultante sobre o sistema é conservativa e a energia total é conservada. Podemos entender isto da

seguinte forma: à medida que a massa  $m$  se afasta do ponto de equilíbrio, a mola estica (ou comprime, dependendo do sentido do deslocamento), fazendo o sistema perder velocidade e ganhar energia potencial — de modo que a energia total seja constante — até o ponto que a velocidade será nula e a energia potencial máxima. Neste ponto a partícula irá mudar de sentido, ganhando velocidade e perdendo energia potencial, até passar novamente na origem, onde a velocidade será máxima e a energia potencial nula. A Figura 8 mostra a relação entre as energias que acabamos de discutir.

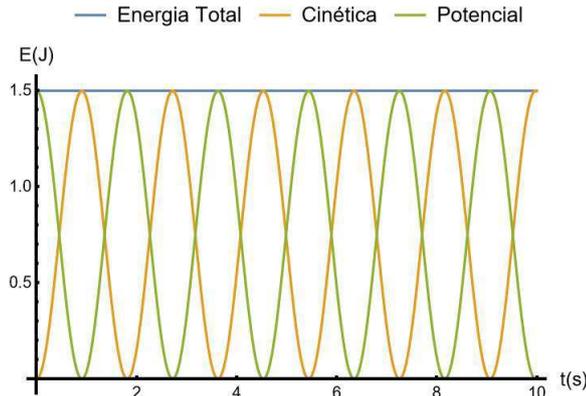


Figura 8 – Energia total, que corresponde a hamiltoniana, cinética e potencial em função do tempo do oscilador harmônico simples:  $m = 1 \text{ kg}$ ;  $k = 1 \text{ kg/s}^2$ ;  $\omega_0 = \sqrt{3} \text{ rad/s}$ ;  $x(0) = 1 \text{ m}$ ;  $\dot{x}(0) = 0 \text{ m/s}$ .

É possível demonstrar matematicamente a conservação da energia total se (i) derivarmos a solução do oscilador harmônico simples (Eq. 3.10) para obter a velocidade e substituímos na energia cinética (Eq. 3.2):

$$T = \frac{1}{2}m\omega_0^2 (A^2 - x^2), \quad (3.13)$$

onde a energia cinética será máxima em  $x = 0$  e nula em  $x = A$ . E se (ii) substituímos  $k = m\omega_0^2$  na energia potencial (Eq. 3.3):

$$V = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2, \quad (3.14)$$

onde a energia potencial será máxima em  $x = A$  e nula em  $x = 0$ . Somando  $T$  e  $V$ , obtemos a energia total:

$$E = T + V = \frac{1}{2}kA^2, \quad (3.15)$$

que é uma constante. Além disto, Como  $V$  independe das velocidades e  $T$  é uma função puramente quadrática das velocidades, então a hamiltoniana é a energia total do sistema. Para demonstrar isto, vamos reescrever a hamiltoniana (Eq. 3.6) da seguinte forma:

$$H = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2, \quad (3.16)$$

ou

$$H = T + V = \frac{1}{2}kA^2, \quad (3.17)$$

implicando que a hamiltoniana é igual energia total do sistema:

$$H = E. \quad (3.18)$$

Embora pareça trivial, é importante demonstrar explicitamente que a hamiltoniana é, de fato, uma constante no tempo, já que as condições para  $H$  ser a energia total são distintas daquelas para  $H$  ser constante. Para isto, vamos derivar parcialmente a hamiltoniana (Eq. 3.6) em relação ao tempo:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p_x^2}{2m} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} kx^2 \right) = 0, \quad (3.19)$$

ou seja,

$$H = \text{constante}. \quad (3.20)$$

Demonstrando, assim, que hamiltoniana é conservada e finalizando nosso estudo acerca do oscilador harmônico simples.

A seguir iremos abordar o oscilador harmônico amortecido utilizando a função de dissipação de Rayleigh. Contudo, para que não soe redundante e cansativo, voltaremos a analisar a relação entre energia total e a hamiltoniana apenas nos problemas da miçanga ao longo de uma haste e do oscilador harmônico sobre um bloco em movimento uniforme.

### 3.1.2 Oscilador Harmônico Amortecido

Na seção anterior estudamos o movimento harmônico simples, onde as oscilações continuam indefinidamente com amplitude máxima constante. Mas na prática o que acontece é uma diminuição (amortecimento) da amplitude — geralmente causada por forças viscosas — até que o movimento cesse.

Se o oscilador harmônico estiver inserido em algum meio viscoso, como o ar, a força dissipativa será da forma

$$\mathbf{F}_d = -\lambda \dot{\mathbf{x}}, \quad (3.21)$$

onde  $\lambda$  é uma constante positiva que depende do meio e da forma do corpo. O sinal negativo indica que a força é contrária à velocidade. Se usarmos a função de dissipação de Rayleigh  $\mathcal{F}$ , obtemos

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \lambda \dot{x}. \quad (3.22)$$

Sabemos que a lagrangeana do oscilador harmônico sem a componente de dissipação é escrita como

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2, \quad (3.23)$$

e que equações de movimento de Lagrange para sistemas dissipativos são dadas por

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad (3.24)$$

então a equação de movimento para um oscilador amortecido é

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0. \quad (3.25)$$

Definindo  $2\gamma = \lambda/m$  e  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , podemos reescrever a equação acima como

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3.26)$$

onde  $\gamma$  é o coeficiente de amortecimento e  $\omega_0$  a frequência angular na ausência de amortecimento.

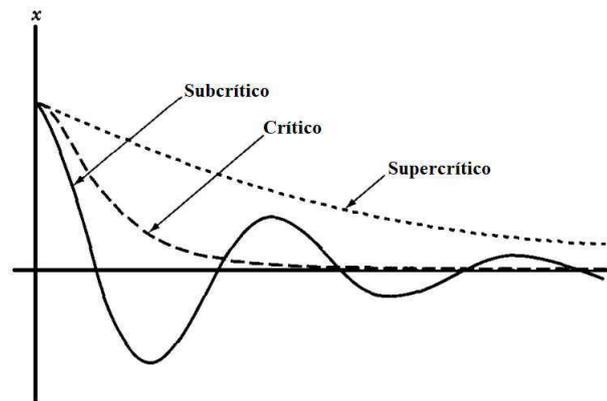


Figura 9 – Possíveis comportamentos do oscilador harmônico amortecido. Fonte: [2].

Dependendo da relação entre  $\omega_0$  e  $\gamma$ , o oscilador amortecido pode apresentar três comportamentos:

(i) Subcrítico ( $\omega_0^2 > \gamma^2$ ): O sistema realiza movimento oscilatório, mas a amplitude vai diminuindo com o tempo até chegar a zero.

(ii) Crítico ( $\omega_0^2 \approx \gamma^2$ ): O sistema não realiza movimento oscilatório e vai rapidamente ao ponto de equilíbrio.

(iii) Supercrítico ( $\omega_0^2 < \gamma^2$ ): O sistema não realiza movimento oscilatório e vai até o ponto de equilíbrio, mas de forma mais lenta que no caso crítico.

Os três casos descritos acima podem ser vistos na Figura 9.

Vamos estudar com um pouco mais de detalhe o caso subcrítico, que tem solução da forma

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \text{sen}(\omega t + \delta), \quad (3.27)$$

onde  $\omega$  é a frequência angular na presença de amortecimento. A solução acima é semelhante a do oscilador harmônico simples (Eq. 3.10), exceto pelo termo exponencial  $e^{-\gamma t}$  que é o responsável pela decaimento da amplitude  $A$ . Fisicamente isto significa que o sistema está perdendo energia para o meio e sua amplitude está diminuindo com o tempo — gráfico (a) da Figura 10. Caso o coeficiente de amortecimento seja zero, ou seja, o sistema não esteja inserido em um meio viscoso, voltamos para o caso do oscilador harmônico simples — gráfico (b) da Figura 10.

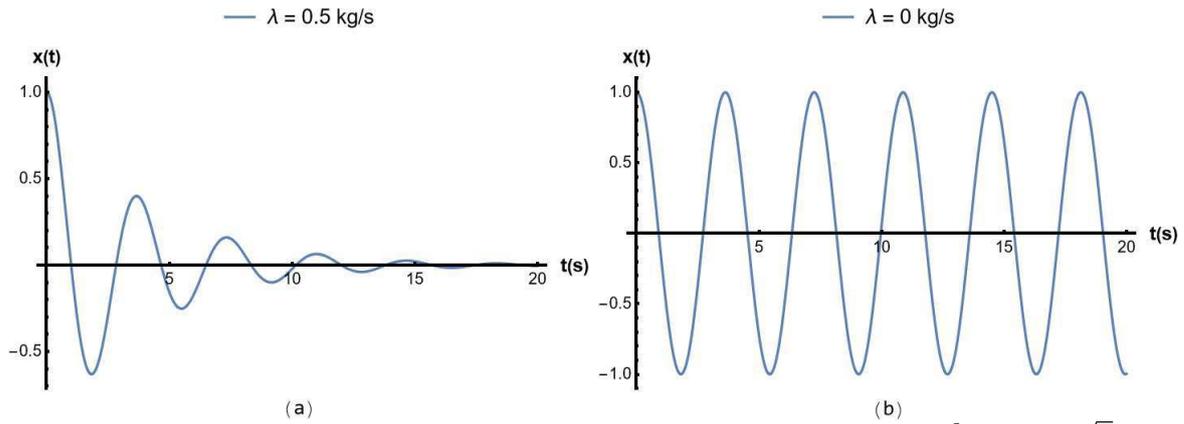


Figura 10 – Oscilador harmônico amortecido:  $m = 1\text{ kg}$ ;  $k = 3\text{ kg/s}^2$ ;  $\omega_0 = \sqrt{3}\text{ rad/s}$ ;  $x(0) = 1\text{ m}$ ;  $\dot{x}(0) = 0\text{ m/s}$ .

A energia total do caso subcrítico apresenta um comportamento interessante: a dissipação da energia não é uniforme — gráfico (b) da Figura 11 — e por breves intervalos a energia parece se manter constante, conforme o *zoom* no gráfico (a) da Figura 11. Podemos interpretar este comportamento devido às baixas velocidades em torno dos pontos onde o sistema está mudando de sentido. Nessas regiões a energia cinética é mínima e a potencial máxima, semelhante ao que foi discutido no caso do oscilador harmônico simples. Portanto, como a força dissipativa depende da velocidade, a perda de energia em torno desses pontos é mínima.

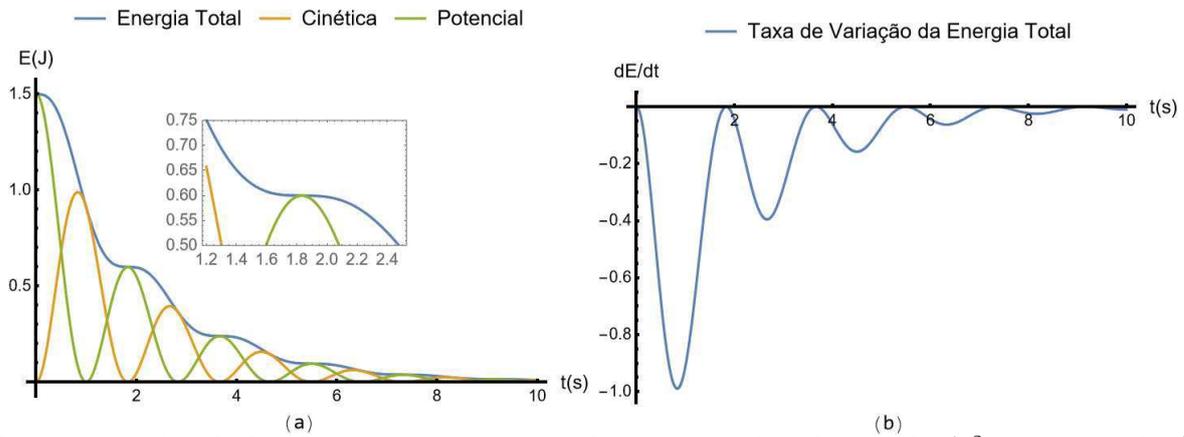


Figura 11 – Oscilador harmônico amortecido:  $m = 1\text{ kg}$ ;  $k = 3\text{ kg/s}^2$ ;  $\lambda = 0,5\text{ kg/s}$ ;  $\omega_0 = \sqrt{3}\text{ rad/s}$ ;  $x(0) = 1\text{ m}$ ;  $\dot{x}(0) = 0\text{ m/s}$ , onde (a) corresponde às curvas de energia total, cinética e potencial e (b) a taxa de variação da energia total em relação ao tempo. Note que o *zoom* na figura (a) é apenas uma ampliação de uma região específica.

Por fim, é possível obter a equação de movimento do oscilador harmônico amortecido (Eq. 3.26) a partir da lagrangeana

$$L = e^{2\gamma t} \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right), \quad (3.28)$$

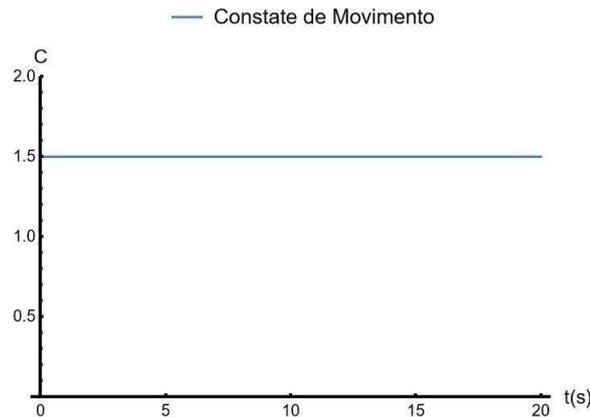


Figura 12 – Constante de movimento do oscilador harmônico amortecido:  $m = 1 \text{ kg}$ ;  $k = 3 \text{ kg/s}^2$ ;  $\lambda = 0,5 \text{ kg/s}$   $\omega_0 = \sqrt{3} \text{ rad/s}$ ;  $x(0) = 1 \text{ m}$ ;  $\dot{x}(0) = 0 \text{ m/s}$ .

que é denominada lagrangeana de Bateman [10]. Se aplicarmos a transformação finita:

$$t' = t + \alpha, \quad x'(t') = e^{-\gamma\alpha} x(t), \quad (3.29)$$

onde  $\alpha$  é uma constante qualquer. Então, pelo teorema de Noether, temos

$$C = e^{2\lambda t} \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 + m\gamma x \dot{x} \right), \quad (3.30)$$

que é uma constante de movimento, como podemos observar na Figura 12. É interessante mencionar que é igualmente possível obter a equação de movimento do oscilador harmônico amortecido (Eq. 3.26) a partir da denominada hamiltoniana de Caldirola-Kanai, que deriva da lagrangeana de Bateman [11, 12]. Além disso, a hamiltoniana de Caldirola-Kanai é útil no estudo da dinâmica do oscilador harmônico amortecido com massa variável [13]. Assim, concluímos nossa discussão acerca deste oscilador.

O próximo sistema que iremos estudar será o oscilador harmônico sujeito a uma força externa, além, é claro, de está submetido a um amortecimento.

### 3.1.3 Oscilador Harmônico Forçado

Na física é bastante comum sistemas que estão sujeitos a uma força oscilante externa, fazendo com que ocorra oscilações forçadas.

Se a força externa for da forma

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_0 \cos(\omega_f t + \alpha) \quad (3.31)$$

onde  $\omega_f$  é a frequência angular e  $\alpha$  a fase da força aplicada. Então, a equação de movimento para um oscilador harmônico forçado é

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega_f t + \alpha). \quad (3.32)$$

Definindo  $2\gamma = \lambda/m$  e  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , podemos reescrever a equação acima como

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega_f t + \alpha), \quad (3.33)$$

onde  $\gamma$  é o coeficiente de amortecimento e  $\omega_0$  a frequência natural do sistema. A solução deste tipo de equação diferencial consiste em duas partes: (i) zerar o lado direito da equação e obter a solução complementar  $x_c(t)$ ; (ii) resolver a equação considerando o lado direito da igualdade e obter a solução particular  $x_p(t)$ .

A solução complementar  $x_c(t)$  é idêntica a solução do oscilador amortecido (Eq. 3.27). Já a solução particular é

$$x_p(t) = A \text{sen}(\omega_f t - \delta), \quad (3.34)$$

onde a amplitude  $A$  é dada por

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}, \quad (3.35)$$

e a fase inicial

$$\delta = \text{arctg}\left(\frac{2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}\right) + \alpha. \quad (3.36)$$

A solução geral é a soma da solução complementar e particular:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t). \quad (3.37)$$

O significado físico deste resultado é bastante interessante. A componente  $x_c$  descreve o movimento amortecido do sistema, que diminui devido ao termo  $e^{-\gamma t}$ , por isso é chamado de efeito transitório. Já  $x_p$  é chamada solução estacionária, já que descreve o movimento oriundo da força oscilante externa, que é permanente ao decorrer do tempo. A Figura 13 ilustra a contribuição de cada solução no movimento do oscilador forçado.

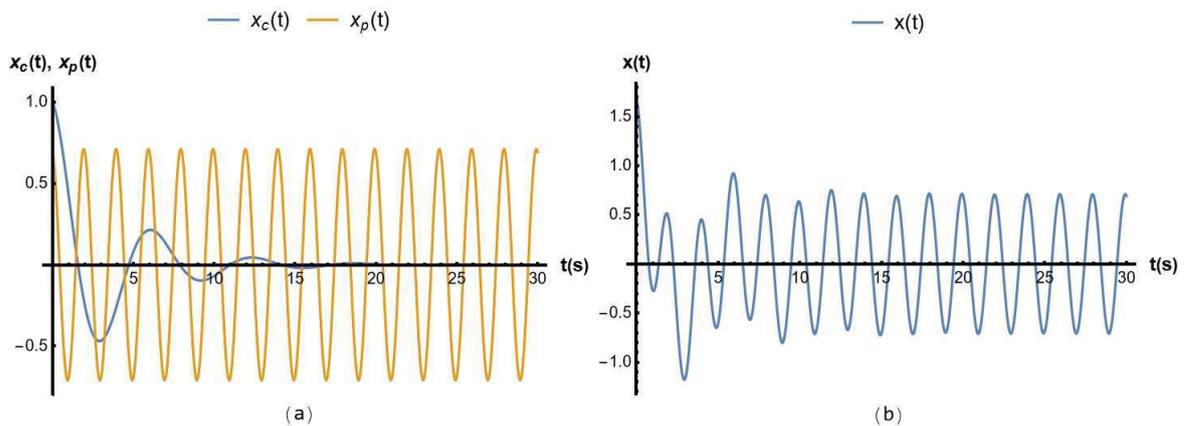


Figura 13 – O gráfico (a) mostra cada solução separada e o (b) a soma das soluções (solução geral), onde  $m = 1 \text{ kg}$ ;  $k = 3 \text{ kg/s}^2$ ;  $\lambda = 0,5 \text{ kg/s}$ ;  $\omega_0 = \sqrt{3} \text{ rad/s}$ ;  $F_0 = 5 \cos(\pi t + \pi/2)$ .

Uma importante consequência do estudo dos osciladores forçados é o fenômeno da *ressonância*, que se apresenta de duas formas [14]:

*Ressonância de Amplitude*: ocorre quando a frequência angular da força aplicada  $\omega_f$  maximiza a amplitude, ou seja, quando o denominador da Eq. 3.35 assume o valor mínimo. Para isto, temos que

$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \quad (3.38)$$

Quanto menor o amortecimento, maior será a ressonância de amplitude.

*Ressonância de Energia*: ocorre quando a frequência angular da força aplicada  $\omega_f$  maximiza a transferência de energia cinética. Para determinar o valor que  $\omega_f$  tem que assumir para que isto aconteça, vamos obter a equação da velocidade derivando a Eq. 3.34 em relação ao tempo:

$$\dot{x}_p(t) = \frac{\omega_f F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} \cos(\omega_f t - \delta) = \frac{F_0}{\sqrt{(m\omega_f - k/\omega_f)^2 + \lambda^2}} \cos(\omega_f t - \delta), \quad (3.39)$$

onde

$$A_e = \frac{F_0}{\sqrt{(m\omega_f - k/\omega_f)^2 + \lambda^2}} \quad (3.40)$$

é a amplitude da velocidade. Portanto, para que  $A_e$  assuma o valor máximo, a frequência angular tem que ser igual a frequência angular na ausência de amortecimento:

$$\omega_f = \sqrt{k/m} = \omega_0, \quad (3.41)$$

ou seja, a velocidade deve estar em fase com a força aplicada.

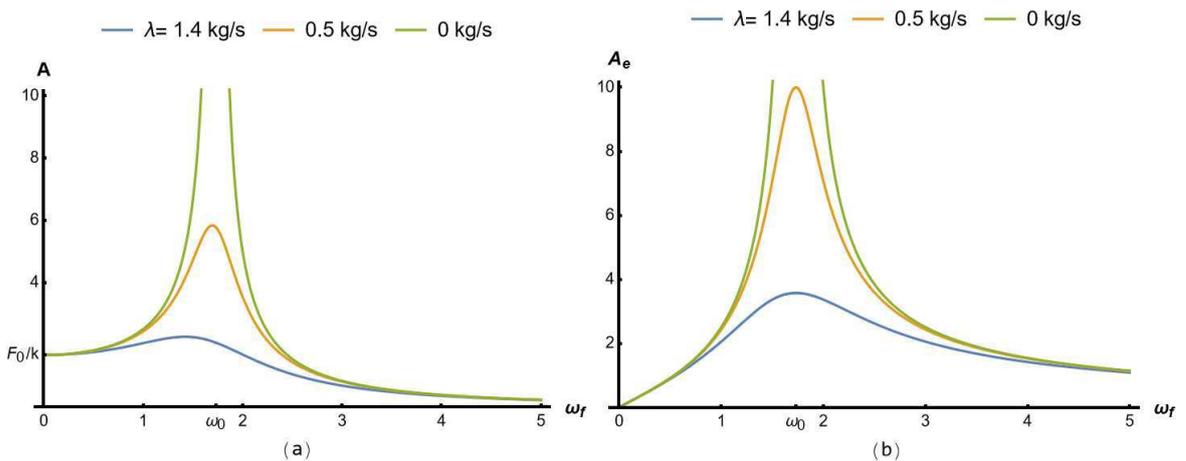


Figura 14 – O gráfico (a) mostra a amplitude e o (b) a amplitude da velocidade, ambos em função da frequência angular, para  $m = 1 \text{ kg}$ ;  $k = 3 \text{ kg/s}^2$ ;  $\omega_0 = \sqrt{3} \text{ rad/s}$ ;  $F_0 = 5 \cos(\pi t)$  e diferentes valores para  $\lambda$ .

Comparando a Eq. 3.38 com a Eq. 3.41, notamos que para pequenos amortecimentos a frequência correspondente a ressonância de amplitude se aproxima da frequência correspondente a ressonância de energia. A Figura 14 mostra graficamente este resultado.

A ressonância surge em inúmeros contextos e é amplamente utilizada em vários dispositivos. O rádio, instrumentos musicais ou a excitação de átomos sujeitos a um campo elétrico oscilante são alguns exemplos onde a ressonância está presente.

Para finalizar o estudo acerca dos osciladores harmônicos, iremos discutir, a seguir, o caso onde um oscilador harmônico está sobre um bloco em movimento uniforme.

### 3.1.4 Oscilador Harmônico Sobre um Bloco em Movimento Uniforme

Nesta seção estudaremos a dinâmica e a relação entre a energia total e a hamiltoniana de um oscilador harmônico sobre um bloco com velocidade uniforme (Figura 15), de modo que o bloco passe pela origem em  $t = 0$  s.

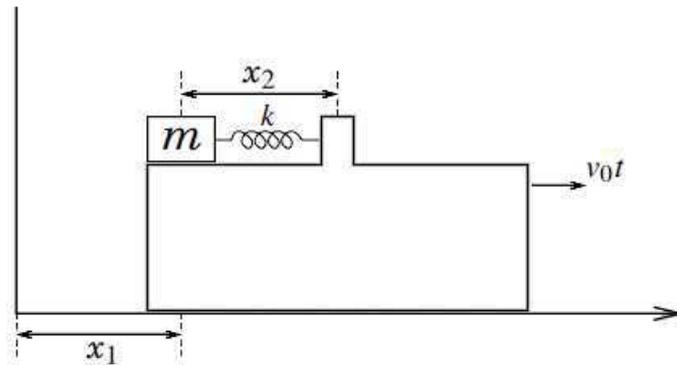


Figura 15 – Oscilador harmônico simples sobre um bloco em movimento. Fonte: De autoria própria.

A energia cinética e potencial do sistema, em coordenadas generalizadas, são dadas por

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2; \quad V = \frac{1}{2}k(x_1 - v_0t)^2, \quad (3.42)$$

então a lagrangeana é

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 - \frac{1}{2}k(x_1 - v_0t)^2. \quad (3.43)$$

De posse da lagrangeana podemos obter a hamiltoniana facilmente:

$$H = \dot{x}_1 p_{x_1} - L = \frac{p_{x_1}^2}{2m} + \frac{1}{2}k(x_1 - v_0t)^2. \quad (3.44)$$

Isto posto, se utilizarmos as equações de Hamilton,

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_{x_1}} \quad e \quad \dot{p}_{x_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \quad (3.45)$$

obtemos a equação de movimento do sistema:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{k}{m}(x_1 - v_0t), \quad (3.46)$$

ou

$$\ddot{x}_1 = -\omega_0^2(x_1 - v_0t), \quad (3.47)$$

onde  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  é a frequência angular. A equação acima é semelhante a do oscilador harmônico simples, exceto pelo termo  $v_0 t$  que surge devido ao movimento do bloco. Deste modo, para um observador localizado no bloco a equação deve se reduzir a do oscilador simples. Para demonstrar isto vamos partir da relação entre  $x_1$  e  $x_2$ :

$$x_2 = x_1 - v_0 t, \quad (3.48)$$

onde fica evidente que

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1. \quad (3.49)$$

Portanto, para um observador situado no bloco, a equação de movimento do sistema se reduz a do oscilador harmônico simples:

$$\ddot{x}_2 = -\omega_0^2 x_2, \quad (3.50)$$

como esperado.

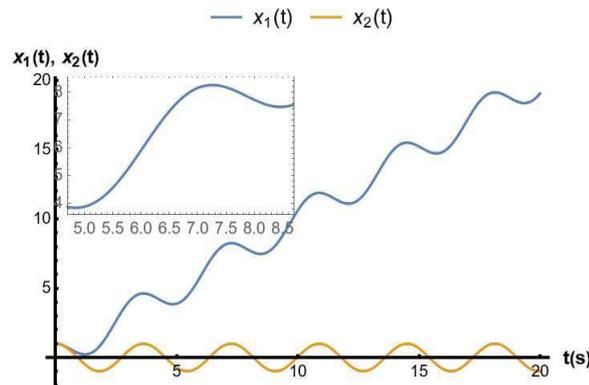


Figura 16 – Posição em função do tempo de um oscilador harmônico sobre um bloco em movimento para diferentes observadores inerciais, onde  $m = 1 \text{ kg}$ ;  $k = 1 \text{ kg/s}^2$ ;  $\omega_0 = \sqrt{3} \text{ rad/s}$ ;  $x(0) = 1 \text{ m}$ ;  $\dot{x}(0) = 0 \text{ m/s}$ ;  $v_0 = 1 \text{ m/s}$ . Note que o *zoom* é apenas uma ampliação de uma região específica.

De acordo com a Figura 16, notamos que a frequência angular independe do referencial, assim, o sistema oscila a mesma quantidade de vezes para ambos os observadores. Apesar disto, podemos observar que a oscilação para o observador que está na origem não é simétrica (o *zoom* no gráfico evidencia este comportamento). Isto se deve ao fato da massa ora está se movimento no mesmo sentido do bloco, ora no sentido oposto. Portanto, a massa percorre uma distância maior quando está no mesmo sentido do bloco e percorre uma distancia menor quando está no sentido aposto, devido a contribuição da velocidade relativa do bloco. É essencial reafirmar, mesmo que soe repetitivo e trivial, que o comportamento descrito acontece de tal forma que a frequência angular se mantém constante.

Por último, vamos estudar a energia total do sistema e sua relação com a hamiltoniana. Desta forma, iremos determinar a energia total do sistema, que é dada por

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - v_0t)^2. \quad (3.51)$$

Como  $V$  é uma função explícita do tempo, então a energia total não é conservada. De fato, para que o bloco permaneça com velocidade constante é necessário que ocorra uma variação na energia total do sistema, para, assim, compensar a reação provocada pela massa oscilante — discussão semelhante pode ser utilizada para explicar a não-conservação da energia no caso em que o bloco apresenta movimento acelerado [15]. Por outro lado, como o potencial não envolve velocidades generalizadas e a energia cinética é uma função puramente quadrática das velocidades, então a hamiltoniana (Eq. 3.44) coincide com a energia total do sistema (Figura 17):

$$H = \frac{p_{x_1}^2}{2m} + \frac{1}{2}k(x_1 - v_0t)^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - v_0t)^2 = E. \quad (3.52)$$

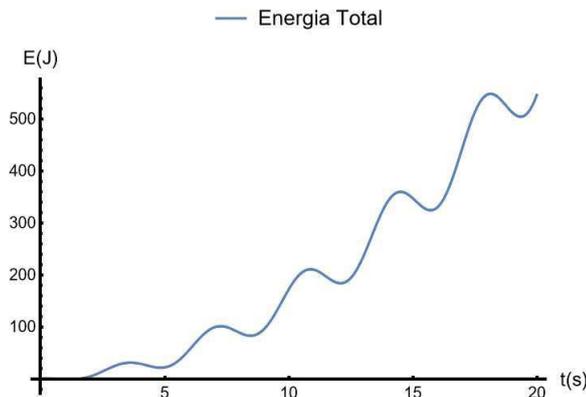


Figura 17 – Energia Total, que corresponde a hamiltoniana, em função do tempo de um oscilador harmônico sobre um bloco:  $m = 1 \text{ kg}$ ;  $k = 1 \text{ kg/s}^2$ ;  $\omega_0 = \sqrt{3} \text{ rad/s}$ ;  $x(0) = 1 \text{ m}$ ;  $\dot{x}(0) = 0 \text{ m/s}$ ;  $v_0 = 1 \text{ m/s}$ .

Embora pareça óbvio, é fundamental demonstrarmos que a hamiltoniana não é conservada, visto que as condições que garantem que  $H$  seja a energia total independem das que asseguram que  $H$  seja conservada. Como sabemos que a hamiltoniana depende explicitamente do tempo, então

$$\frac{\partial H}{\partial t} \neq 0, \quad (3.53)$$

garantindo que a hamiltoniana não é conservada. Completando, assim, nossa discussão a respeito dos osciladores harmônicos.

A próxima seção será a última deste capítulo, onde vamos discutir os problemas da miçanga ao longo de uma haste.

## 3.2 Miçanga Deslizando ao Longo de uma Haste

Como já foi mencionado, nesta seção iremos estudar, em detalhes, a dinâmica de uma miçanga ao longo de uma haste submetida a várias situações (rotação uniforme,

rotação uniformemente variada e oscilante), buscando conectar cada caso com o anterior.

Mesmo não sendo o objetivo principal deste trabalho, é interessante mencionar que o problema da miçanga ao longo de uma haste oferece informações valiosas, principalmente para estudantes que estão no começo dos cursos de Física e Engenharias, uma vez que sistemas em rotação analisados a partir de um referencial inercial contém velocidade radial mesmo sem a existência de forças radiais. Esta dificuldade de interpretação dos estudantes deriva de vários fatores, sendo alguns deles a ideia errônea de que forças fictícias são forças reais ou que a velocidade está relacionada com a força (não sua variação). Uma forma de esclarecer esse problema para os alunos é confrontar seus conhecimentos e realizar alguns cálculos, fazendo assim, o estudante perceber que a velocidade radial advém da força gerada pela haste sobre a miçanga e não de uma força fictícia fantasmagórica [16].

### 3.2.1 Haste com Rotação Uniforme

Primeiramente vamos estudar a dinâmica de uma miçanga de massa  $m$  que desliza ao longo de uma haste com rotação uniforme e sem atrito, como mostra a Figura 18.

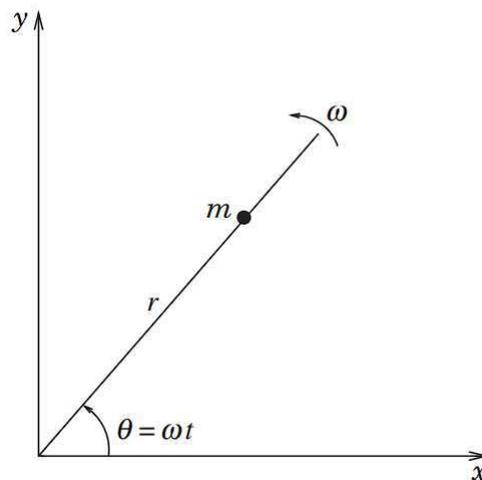


Figura 18 – Miçanga deslizando ao longo de uma haste com rotação uniforme. Fonte: [1].

Como o movimento ocorre no plano horizontal, então podemos tomar esse plano como o plano da energia potencial zero ( $V = 0$ ). Portanto, a lagrangeana se reduz a energia cinética:

$$L = T, \quad (3.54)$$

onde

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad (3.55)$$

ou em coordenadas polares

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2). \quad (3.56)$$

Utilizando o vínculo do sistema dado por  $\theta - \omega t = 0$ , onde  $\omega$  é a velocidade angular da haste, temos que  $\dot{\theta} = \omega$ . Portanto,

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2). \quad (3.57)$$

Assim, a lagrangeana do sistema em coordenadas generalizadas é

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2), \quad (3.58)$$

e sua hamiltoniana

$$H = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{2}r^2. \quad (3.59)$$

Usando as equações de Hamilton, obtemos a equação de movimento do sistema:

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0, \quad (3.60)$$

que tem solução do tipo

$$r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}, \quad (3.61)$$

onde as constantes A e B são determinadas através das condições iniciais. Se escolhermos

$$r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = 0, \quad (3.62)$$

obtemos a solução da forma

$$r(t) = \frac{r_0}{2}e^{\omega t} + \frac{r_0}{2}e^{-\omega t}. \quad (3.63)$$

Com base no que foi discutido, vamos mostrar alguns resultados gráficos simples para diferentes condições iniciais. Vale ressaltar que escolhemos a posição inicial igual a 1 cm para que nosso estudo teórico possa satisfazer possíveis tentativas de implementação experimental simples.

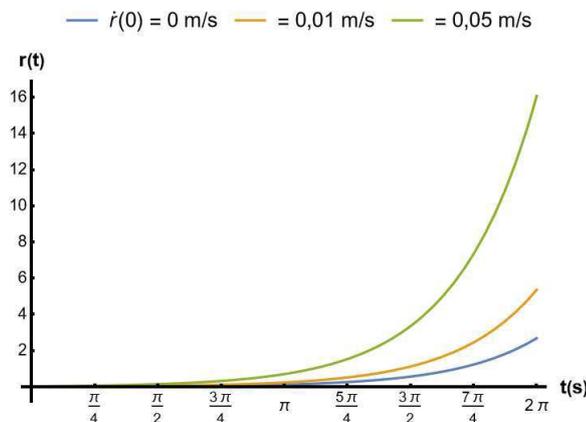


Figura 19 – Posição em função do tempo da miçanga ao longo de uma haste com rotação uniforme:  $m = 0,005 \text{ kg}$ ;  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ ;  $r(0) = 0,01 \text{ m}$  e diferentes valores de  $\dot{r}(0)$ .

Como podemos observar na Figura 19, a posição  $r(t)$  da miçanga cresce rapidamente à medida que o tempo avança. Especificamente, mesmo o caso com velocidade inicial nula, ela percorre o equivalente a  $\approx 270$  vezes sua posição inicial, demonstrando claramente o caráter divergente deste sistema idealizado (sem atrito). Discussão semelhante pode ser feita em relação aos outros resultados. Vale ressaltar que a “coincidência” numérica no eixo vertical é puramente devido à escolha de  $\omega = \text{constante} = 1 \text{ rad/s}$ .

Apenas para confirmar esse comportamento altamente divergente, o gráfico da Figura 20 mostra a posição da miçanga em função do tempo para três valores distintos de velocidade angular de rotação da haste.

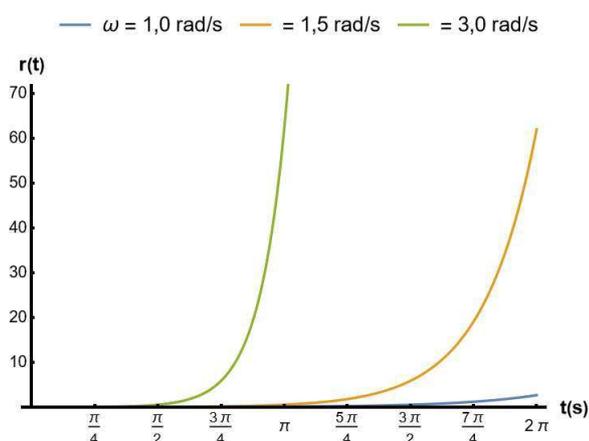


Figura 20 – Posição em função do tempo da miçanga ao longo de uma haste com rotação uniforme:  $m = 0,005 \text{ kg}$ ;  $r(0) = 0,01 \text{ m}$ ;  $\dot{r}(0) = 0 \text{ m/s}$  e diferentes valores de  $\omega$ .

Note que o resultado em azul da Figura 20 corresponde ao caso já estudado acima e, como esperado, um aumento relativamente pequeno na velocidade angular (curvas amarela e verde) resulta claramente em um crescimento substancialmente acentuado. Embora soe demasiadamente enfadonho, é importante destacar que o caso de  $\omega = 3 \text{ rad/s}$  é várias ordens de grandeza maior que o  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ .

Agora, apenas como complemento, vamos mostrar o comportamento dinâmico no caso de  $\dot{r}(0) < 0$ . Este resultado pode ser muito útil em discussões semi-quantitativas para estudantes de cursos de Física e Engenharias durante a disciplina de Física Geral I. Embora seja uma analogia, ela permite correlacionar o conceito de “ponto de retorno” no movimento unidimensional com o resultado mostrado na Figura 21 (traçamos os gráficos até  $t = 2 \text{ s}$  para enfatizar o comportamento de mínimo).

Outro resultado importante, sendo um dos objetivos deste trabalho, é o comportamento da hamiltoniana e a energia total do sistema. Como foi discutindo anteriormente, em quase todas as situações pertinentes a hamiltoniana se conserva e coincide com a energia total do sistema. Em alguns casos, contudo, a hamiltoniana pode não se conservar e ser a energia total ou se conservar e não ser a energia total do sistema.

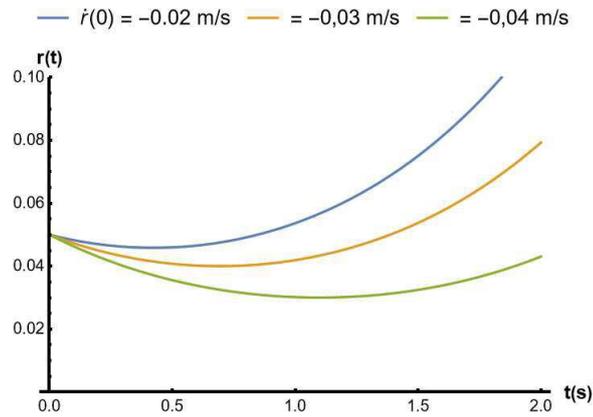


Figura 21 – Posição em função do tempo da miçanga ao longo de uma haste com rotação uniforme:  $m = 0,005 \text{ kg}$ ;  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ ;  $r(0) = 0,05 \text{ m}$  e velocidades iniciais  $\dot{r}(0)$  negativas.

Para a miçanga com rotação uniforme, a energia total  $E$  se reduz a energia cinética, que é dada pela Eq. 3.57. Desta forma, a energia total do sistema aumenta ao decorrer do tempo, já que a velocidade da miçanga tem um caráter divergente, como podemos ver na Figura 22. Este aumento na energia total pode ser interpretado como um motor que está inserindo energia continuamente no sistema, fazendo a haste girar com velocidade angular constante.

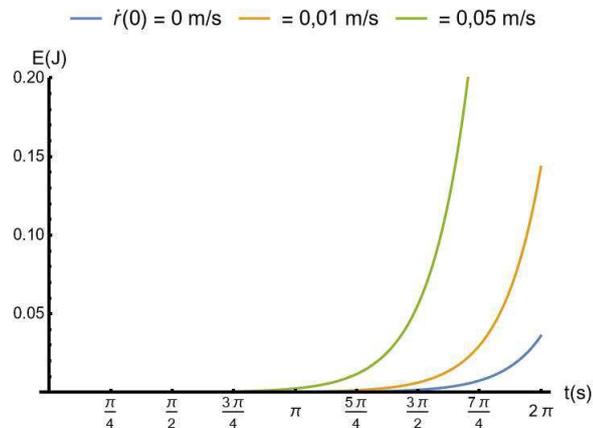


Figura 22 – Energia total em função do tempo da miçanga ao longo de uma haste com rotação uniforme:  $m = 0,005 \text{ kg}$ ;  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ ;  $r(0) = 0,01 \text{ m}$  e diferentes valores de  $\dot{r}(0)$ .

Sabendo que  $\dot{r} = p_r/m$ , podemos reescrever a hamiltoniana (Eq. 3.59) da seguinte forma:

$$H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 - r^2\omega^2). \quad (3.64)$$

Substituindo a Eq. 3.63 na hamiltoniana, temos

$$H = -\frac{mr_0^2\omega^2}{2}, \quad (3.65)$$

onde fica evidente que a hamiltoniana se conserva. Portanto, a hamiltoniana de uma miçanga que desliza ao longo de uma haste com rotação uniforme se conserva, mas não é a energia total do sistema. A Figura 23 mostra graficamente este resultado.

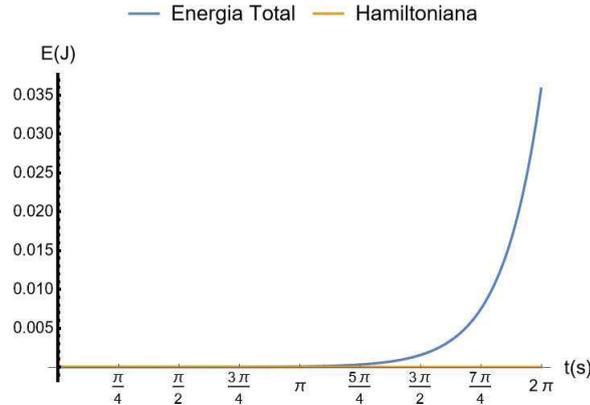


Figura 23 – Energia total e hamiltoniana em função do tempo da miçanga ao longo de uma haste com rotação uniforme:  $m = 0,005$  kg;  $\omega = 1$  rad/s;  $r(0) = 0,01$  m;  $r(0) = 0,01$  m/s;  $\dot{r}(0) = 0$  m/s.

Daqui por diante nosso estudo vai se concentrar nos casos em que a haste se movimenta com aceleração constante (movimento circular uniformemente acelerado) bem como nos casos em que ela pode oscilar em torno de um ângulo determinado.

### 3.2.2 Haste com Rotação Uniformemente Variada

Analogamente ao caso anterior, exceto pelo termo da aceleração angular  $\alpha$ , a lagrangeana se reduz a energia cinética e é dada por

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2(\omega + \alpha t)^2), \quad (3.66)$$

e sua hamiltoniana

$$H = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{m(\omega + \alpha t)^2}{2}r^2. \quad (3.67)$$

Usando as equações de Hamilton, obtemos a equação de movimento do sistema:

$$\ddot{r} - (\omega + \alpha t)^2 r = 0. \quad (3.68)$$

Para mostrar a complexidade da solução deste tipo de equação, o Apêndice A.2 contém a solução analítica obtida pelo Mathematica.

Assim como no caso da rotação uniforme, vamos mostrar alguns resultados simples que correspondem ao caso de rotação uniformemente variada para diferentes condições iniciais, ou seja, velocidades iniciais (positivas) da miçanga.

Para os resultados expressos na Figura 24 escolhemos  $\alpha = 1/\pi$  rad/s<sup>2</sup>, de modo que a velocidade média angular da haste seja exatamente igual ao caso de rotação uniforme, ou seja,  $\omega = 1$  rad/s. Além disto, após  $t = 2\pi$ s, a haste executa uma volta completa. Embora

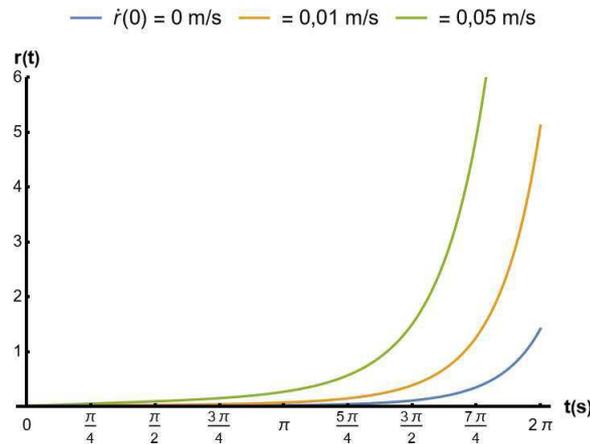


Figura 24 – Posição em função do tempo da miçanga ao longo de uma haste com rotação uniformemente variada:  $m = 0,005 \text{ kg}$ ;  $\omega = 0 \text{ rad/s}$ ;  $\alpha = (1/\pi) \text{ rad/s}^2$ ;  $r(0) = 0,01 \text{ m}$  e diferentes valores de  $\dot{r}(0)$ .

a dinâmica da miçanga neste caso seja muito semelhante ao caso de rotação uniforme, aqui temos a evidência mais clara de um “cotovelo” mais acentuado. No entanto,  $r(t = 2\pi s)$  é menor que o caso de rotação uniforme, pois a miçanga parte do repouso e a velocidade angular da haste só atinge valores maiores que  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  após  $t > \pi s$ , como esperado.

Para manter a consistência e conexão entre os resultados desta parte em relação àqueles com  $\omega = cte$ , agora vamos analisar apenas um único caso em que a miçanga possui velocidade inicial negativa. Ajustando adequadamente os parâmetros, é possível observar o “ponto de retorno” como no caso uniforme. Vejamos na Figura 25 o resultado correspondente à posição em função do tempo (traçamos os gráficos até  $t = \pi s$  para enfatizar o comportamento de mínimo):

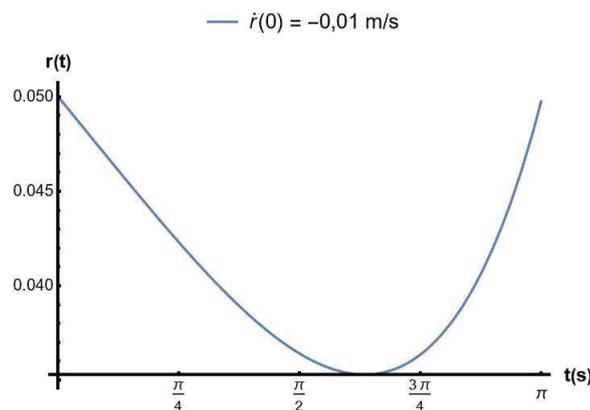


Figura 25 – Posição em função do tempo da miçanga ao longo de uma haste com rotação uniformemente variada  $m = 0,005 \text{ kg}$ ;  $\omega = 0 \text{ rad/s}$ ;  $\alpha = (1/\pi) \text{ rad/s}^2$ ;  $r(0) = 0,05 \text{ m}$ .

Agora vamos estudar uma situação particular em que a haste inicia seu movimento com  $\omega \neq 0 \text{ rad/s}$  e  $\alpha = -1/\pi \text{ rad/s}^2$ . Esta situação corresponde, dependendo do valor de  $\omega$ , como sabemos, ao caso em que a haste é desacelerada e pode retornar, eventualmente, à posição angular inicial, na qual mantivemos igual a  $0 \text{ rad}$ . Veremos, em breve, que tal

situação é importante e serve como ponto de partida para discutirmos e entendermos relativamente bem diversas características associadas à dinâmica da miçanga quando a haste é colocada para oscilar em torno de uma dada posição angular.

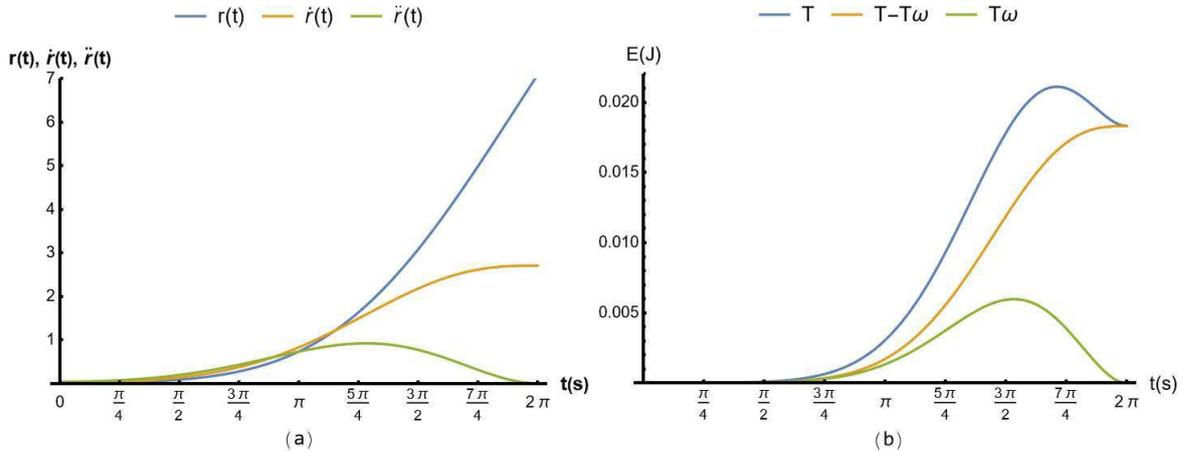


Figura 26 – Miçanga ao longo de uma haste com rotação uniformemente variada:  $m = 0,005 \text{ kg}$ ;  $\omega = 2 \text{ rad/s}$ ;  $\alpha = -1/\pi \text{ rad/s}^2$ ;  $r(0) = 0,05 \text{ m}$ ;  $\dot{r}(0) = 0 \text{ m/s}$ , onde temos a posição (curva azul), velocidade (curva amarela) e aceleração (curva verde) no gráfico (a) e “as energias” do sistema no gráfico (b).

Condizente com os parâmetros que ajustamos ( $\omega$  e  $\alpha$ ), no gráfico (a) da Figura 26 podemos observar que, no entorno de  $t = 2\pi \text{ s}$ , a velocidade  $\dot{r}$  da miçanga é aproximadamente constante, pois a haste diminui sua velocidade angular desde o início do movimento, freando no entorno desse instante. Naturalmente é fácil ver que a aceleração é nula nesse mesmo intervalo.

Para auxiliar no entendimento de que a hamiltoniana do sistema corresponde ou não a energia total é razoável que tracemos o gráfico da energia cinética para este caso. Tal curva, além de outras duas mais, são mostradas no gráfico (b) da Figura 26. Lá, separamos as duas contribuições para a energia total da miçanga, que é apenas cinética, ou seja,  $E = T$ ;  $T\omega$  corresponde à energia cinética apenas de rotação (curva verde) e, por fim, a contribuição devido ao movimento “radial” (curva amarela). Portanto, o máximo na curva da energia cinética, neste caso, pode ser entendido e relacionado diretamente com a contribuição do rápido aumento de  $r(t)$  instantes antes do repouso da haste. Entretanto, como mencionado no início deste capítulo, nosso objetivo não é encontrar soluções analíticas explícitas do instante em que tal máximo ocorre, uma vez que as expressões para  $r(t)$  e  $\dot{r}(t)$ , por exemplo, são relativamente complicadas para abordarmos até então.

Finalmente, é evidente que a energia total — que se reduz à energia cinética — aumenta ao decorrer do tempo e não se conserva. Assim como no caso da rotação uniforme, isso pode ser interpretado como um motor que está inserindo energia no sistema, fazendo a haste girar de forma uniformemente variada. Por outro lado, temos que a hamiltoniana (Eq. 3.67) depende explicitamente do tempo e não se conserva. Além disso, a energia cinética não é uma função puramente quadrática das velocidades, fazendo que a hamiltoniana

não seja a energia total do sistema. Portanto, temos o quarto e último caso, onde a hamiltoniana não se conserva e tão pouco é a energia total do sistema (Figura 27).

Finalmente, o caso que iremos ver a seguir (haste oscilante) será o último problema estudado neste trabalho, uma vez que os casos estudados até então são casos particulares da haste oscilante.

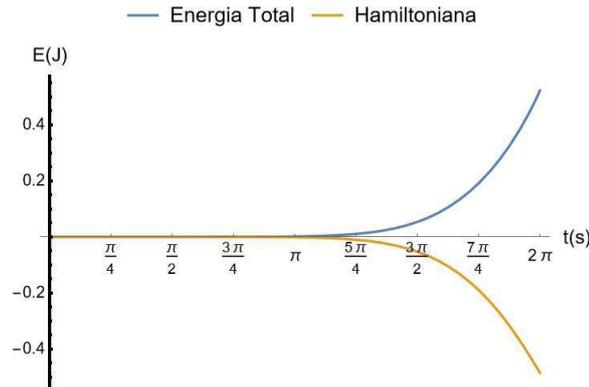


Figura 27 – Energia total e hamiltoniana em função do tempo da miçanga ao longo de uma haste com rotação uniformemente variada:  $m = 0,005 \text{ kg}$ ;  $\omega = 2 \text{ rad/s}$ ;  $\alpha = -1/\pi \text{ rad/s}^2$ ;  $r(0) = 0,05 \text{ m}$ ;  $\dot{r}(0) = 0 \text{ m/s}$ .

### 3.2.3 Haste Oscilante (Vibrando)

De forma semelhante aos últimos dois casos, vamos estudar a dinâmica de uma miçanga deslizando ao longo de uma haste oscilante (vibrando), como mostra a Figura 28.

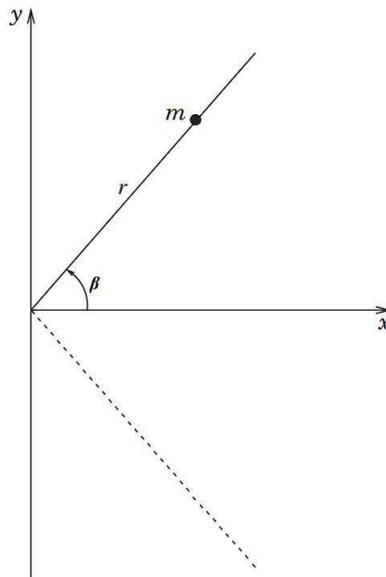


Figura 28 – Miçanga deslizando ao longo de uma haste oscilante (vibrando). Fonte: De autoria própria.

A lagrangeana de uma haste oscilante é dada por

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 (\delta\beta \text{sen}(\delta t))^2), \tag{3.69}$$

onde  $\beta$  é o ângulo máximo de oscilação e  $\delta$  a frequência angular. Logo, a hamiltoniana é

$$H = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{m}{2} (\delta\beta \operatorname{sen}(\delta t))^2 r^2. \quad (3.70)$$

Usando as equações de Hamilton, obtemos a equação de movimento do sistema:

$$\ddot{r} - (\delta\beta \operatorname{sen}(\delta t))^2 r = 0. \quad (3.71)$$

Assim como no caso da haste com rotação uniformemente variada, o Apêndice A.2 contém a solução analítica obtida pelo Mathematica.

Estudamos anteriormente o caso onde a haste desacelera e retorna a posição angular inicial, sendo que este comportamento ocorre uma única vez e posteriormente a haste se manterá indefinidamente em rotação uniformemente variada. Já no caso atual, a haste irá oscilar de forma permanente em torno de uma dada posição angular.

De acordo com os resultados da Figura 29, onde escolhemos  $\beta = \pi/4 \text{ rad}$  e  $\delta = 1 \text{ rad/s}$ , é possível observar que a haste apresenta uma oscilação periódica. De imediato percebemos que em torno de  $t = \pi \text{ s}$  a velocidade é aproximante constante, o que é esperado, visto que neste instante do tempo a aceleração é nula e indica o momento em que a haste atingiu o ângulo máximo de oscilação e está mudando de sentido.

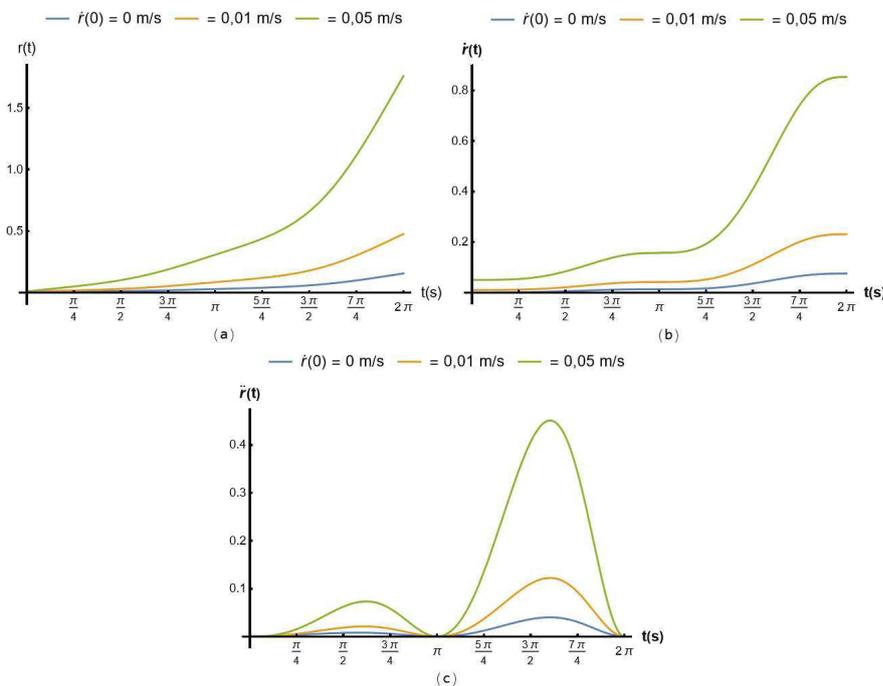


Figura 29 – Miçanga ao longo de uma haste oscilante (vibrando):  $m = 0,005 \text{ kg}$ ;  $\beta = \pi/4 \text{ rad}$ ;  $\delta = 1 \text{ rad/s}$ ;  $r(0) = 0,01 \text{ m}$  e diferentes valores de  $\dot{r}(0)$ , onde (a), (b) e (c) são respectivamente a posição, velocidade e aceleração da miçanga.

É possível reproduzir, pelo menos em um dado intervalo de tempo  $t$ , os casos da haste com rotação uniformemente variada que discutimos. Para o caso onde  $\alpha > 0 \text{ rad/s}^2$ , basta escolhermos um intervalo de tempo onde a haste está acelerando positivamente —

gráfico (a) da Figura 30. Já no caso onde a haste desacelera e retorna a posição angular inicial ( $\omega \neq 0 \text{ rad/s}$  e  $\alpha < 0 \text{ rad/s}^2$ ), basta escolhermos um intervalo equivalente ao período  $P$  do sistema — gráfico (b) da Figura 30. Fora desses intervalos de tempo, os sistemas irão apresentar comportamentos divergentes, uma vez que na haste com rotação uniformemente variada a frequência angular continuará a aumentar e na haste vibrando a frequência angular voltará a desacelera em algum momento, de acordo com o que foi mencionado no início desta subseção.

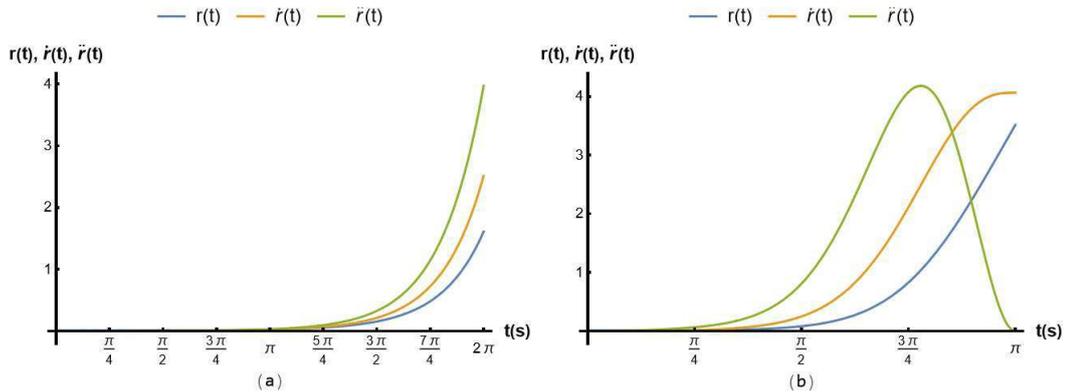


Figura 30 – Miçanga ao longo de uma haste oscilante (vibrando):  $m = 0,005 \text{ kg}$ ;  $\beta = 2\pi \text{ rad}$ ;  $\delta = 1/4 \text{ rad/s}$ ;  $r(0) = 0,01 \text{ m}$  para o gráfico (a) e  $m = 0,005 \text{ kg}$ ;  $\beta = \pi \text{ rad}$ ;  $\delta = 1 \text{ rad/s}$ ;  $r(0) = 0,01 \text{ m}$ , onde no gráfico (a) temos  $\alpha > 0 \text{ rad/s}^2$  e no gráfico (b) temos  $\omega \neq 0 \text{ rad/s}$  e  $\alpha < 0 \text{ rad/s}^2$ .

Tal como nos outros casos, a Figura 31 mostra o “ponto de retorno” que ocorre quando os parâmetros são ajustados e consideramos que a miçanga tem velocidade inicial negativa. Este resultado é outra forma de evidenciar a conexão entre os cenários estudados.

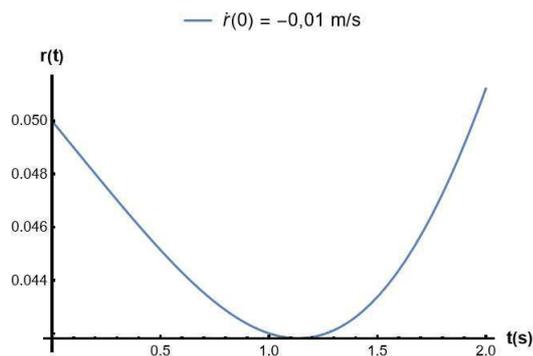


Figura 31 – Miçanga ao longo de uma haste oscilante (vibrando):  $m = 0,005 \text{ kg}$ ;  $\beta = \pi/4 \text{ rad}$ ;  $\delta = 1 \text{ rad/s}$ ;  $r(0) = 0,05 \text{ m}$ .

Diferente da haste em rotação (uniforme ou uniformemente variada), onde a trajetória da miçanga é uma espiral, a órbita da miçanga deslizando ao longo de uma haste oscilando pode soar um tanto abstrata. Pensando nisso, traçamos (Figura 32) as trajetórias da miçanga no plano  $xy$  para os três casos estudados, com diferentes condições iniciais, para devida comparação.

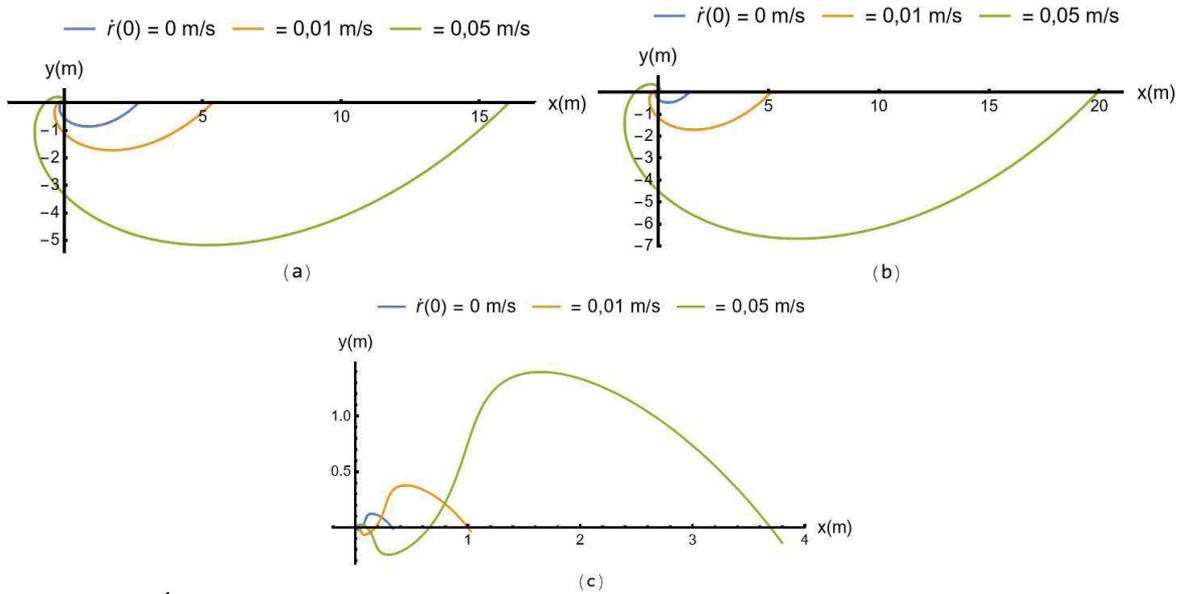


Figura 32 – Órbitas da miçanga ao longo de uma haste (a) com rotação uniforme, (b) com rotação uniformemente variada e (c) oscilante (vibrando):  $m = 0,005 \text{ kg}$ ;  $\beta = \pi/4 \text{ rad}$ ;  $\delta = 1 \text{ rad/s}$ ;  $r(0) = 0,01 \text{ m}$ ;  $\dot{r}(0) = 0 \text{ m/s}$  e diferentes valores de  $\dot{r}(0)$ .

Por fim, vamos estudar a relação de energia total do sistema com a sua hamiltoniana. A energia total do sistema se reduz a energia cinética:

$$E = T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 (\delta\beta \text{sen}(\delta t))^2). \quad (3.72)$$

onde fica evidente que a energia total não se conserva, uma vez que a energia cinética aumenta ao longo do tempo (a velocidade do sistema diverge). Por outro lado, a hamiltoniana depende explicitamente do tempo e a energia cinética não é uma função homogênea de segundo grau das velocidades generalizadas. Portanto, a hamiltoniana não se conserva e não coincide com a energia total, assim como no caso da haste com rotação uniformemente variada. Contudo, se compararmos a hamiltoniana do sistema:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{m}{2} (\delta\beta \text{sen}(\delta t))^2 r^2, \quad (3.73)$$

que pode ser escrita como

$$H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 - r^2 (\delta\beta \text{sen}(\delta t))^2), \quad (3.74)$$

com a energia total  $E$  (Eq. 3.72), podemos observar que nos pontos onde a haste atinge o ângulo máximo de oscilação ( $\delta t = n\pi$ , onde  $n$  é um número inteiro) a energia total coincide com a hamiltoniana, uma vez que  $\text{sen}(\delta t) = 0$ . Isto decorre do fato que nesses pontos a energia cinética de rotação é nula (haste em repouso) e o termo que sobra é a energia cinética radial, que é igual tanto para energia total, quanto para a hamiltoniana:

$$E = H = \frac{1}{2}m\dot{r}^2, \quad \delta t = \pi, 2\pi, \dots, n\pi. \quad (3.75)$$

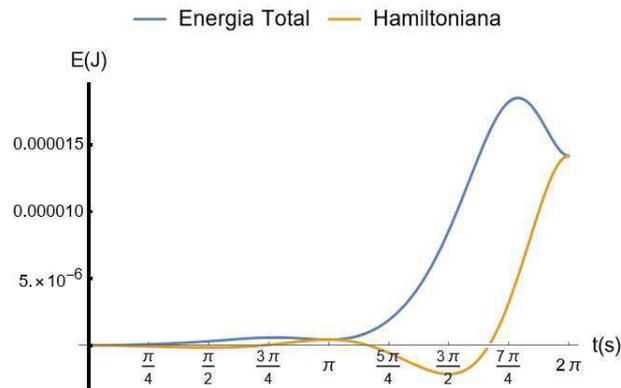


Figura 33 – Energia total e hamiltoniana da miçanga ao longo de uma haste oscilante (vibrando):  $m = 0,005 \text{ kg}$ ;  $\beta = \pi/4 \text{ rad}$ ;  $\delta = 1 \text{ rad/s}$ ;  $r(0) = 0,01 \text{ m}$ ;  $\dot{r}(0) = 0 \text{ m/s}$ .

A Figura 33 mostra este resultado, finalizando, assim, as discussões e resultados deste trabalho.

Por fim, é evidente que, ao decorrer do texto, o leitor possa confundir com certa facilidade a relação entre a energia total e hamiltoniana, uma vez que há quatro possibilidades. Então, para facilitar a visualização de cada situação estudada, a Tabela 1 simplifica os resultados obtidos, onde OHS é o oscilador harmônico simples; OHSMU é o oscilador harmônico sobre um bloco em movimento uniforme; HRU é a haste com rotação uniforme; HUV é a haste com rotação uniformemente variada;  $E$  é a energia total;  $H$  a hamiltoniana e  $cte$  é a abreviação para constante (implica em conservação).

Tabela 1 – Relação entre a energia total e hamiltoniana. Fonte: De autoria própria.

	$E = H = cte$	$E = H \neq cte$	$E \neq H = cte$	$E \neq H \neq cte$
OHS	X			
OHSMU		X		
HRU			X	
HUV				X

## 4 Conclusões e Perspectivas

### 4.1 Conclusão

Ao longo deste trabalho analisamos a dinâmica de alguns sistemas a partir da perspectiva da mecânica analítica, principalmente no contexto da dinâmica hamiltoniana, uma vez que este formalismo pode apresentar um significado físico importante: ser a energia total do sistema.

No início do Capítulo 3 estudamos os osciladores harmônicos (simples, amortecido e forçado), conectando cada caso ao anterior, onde importantes resultados foram obtidos. Alguns desses resultados foram: a equivalência entre a energia total (conservada) e a hamiltoniana no caso do oscilador simples (Figura 8); a obtenção da equação de movimento do oscilador amortecido partindo da função de dissipação de Rayleigh; o estudo do fenômeno da ressonância no caso do oscilador forçado; a equivalência entre a energia total (não conservada) e a hamiltoniana no caso do oscilador simples sobre um bloco em movimento (Figura 17).

Na parte final do Capítulo 3 estudamos, mais detalhadamente, o problema da miçanga deslizando ao longo de uma haste, conectando, também, cada caso ao anterior. O primeiro caso foi o da haste com rotação uniforme, onde estudamos a dinâmica da miçanga para várias condições iniciais distintas e concluímos que a miçanga apresenta um comportamento divergente, onde a energia total não se conserva, mas a hamiltoniana se mantém constante (Figura 23). O segundo caso foi o da haste com rotação uniformemente variada, no qual percebemos um comportamento bastante semelhante ao da haste com rotação uniforme, exceto para algumas situações onde temos aceleração negativa, fazendo a haste desacelerar e retornar a posição angular inicial (que serve de porto de partida para haste oscilante). Ainda no caso da haste com rotação acelerada, a energia total não coincide com a hamiltoniana e ambas não se conservam, sendo este o quarto e último caso da relação entre a energia total e a hamiltoniana (Figura 27). O terceiro foi o da haste oscilante (vibrando), que apresenta um comportamento oscilatório em torno de uma posição angular e que é capaz de reproduzir todos os outros casos, pelo menos em um dado intervalo de tempo, sendo então um caso geral das situações estudadas.

Um resultado interessante, que surpreendeu o autor deste trabalho, foi a relação entre a energia total e a hamiltoniana no caso da haste oscilante. Como foi mencionado, assim como no caso da haste com rotação acelerada, na haste oscilante a energia total da miçanga não coincide com a hamiltoniana e ambas não se conservam, contudo, nos pontos onde a haste atinge o ângulo máximo de oscilação, a energia total corresponde

hamiltoniana, emergindo, assim, quase que um quinto caso, onde ambas coincidem somente em alguns pontos (Figura 33).

## 4.2 Perspectivas

Seria interessante uma investigação relativamente detalhada de possíveis situações em que, fixando a energia disponível na haste em rotação, investigarmos qual situação maximizaria o  $r(t)$  da miçanga, ou seja, a miçanga iria percorrer uma distância maior no caso da rotação uniformemente acelerada ou no caso oscilante? Além disso, também seria empolgante que esse sistema fosse implementado experimentalmente, utilizando, por exemplo, tubos perfurados com intuito de simular sistemas análogos aos trilhos de ar. Assim poderíamos testar diversos casos específicos e sem atrito aqui estudados.

# Apêndices

# APÊNDICE A – Códigos e Soluções do Mathematica

Este apêndice contém todos os códigos, feitos através do *software* Mathematica [17], para obter as soluções e gerar os gráficos do Capítulo 3.

## A.1 Códigos

### *Oscilador Harmônico Simples*

(\*Condições Iniciais.\*)

$x_0 = 1; x'_0 = 0; k = 3; m = 1; \omega_0 = \text{Sqrt}[k/m];$

(\*Solução analítica da equação de movimento do oscilador harmônico simples.\*)

$s = \text{DSolve}[\{x''[t] + \omega_0^2 x[t] == 0, x[0] == x_0, x'[0] == x'_0\}, x, \{t, 0, 20\}];$

(\*Gráfico da posição em função do tempo.\*)

Labeled[Plot[Evaluate[x[t]/.s], {t, 0, 20},  
PlotRange->All,  
PlotLegends->Placed[{"Posição"}, Above],  
AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},  
AxesLabel->{Style[t(s), Black, Bold, FontSize->12],  
Style["x(t)", Black, Bold, FontSize->12]}], "(a)"]

(\*Gráfico da velocidade em função do tempo.\*)

Labeled[Plot[Evaluate[x'[t]/.s], {t, 0, 20},  
PlotRange->All,  
PlotLegends->Placed[{"Velocidade"}, Above],  
AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},  
AxesLabel->{Style[t(s), Black, Bold, FontSize->12],  
Style["x'(t)", Black, Bold, FontSize->12]}], "(b)"]

(\*Gráfico da aceleração em função do tempo.\*)

Labeled[Plot[Evaluate[x''[t]/.s], {t, 0, 20},  
PlotRange->All,  
PlotLegends->Placed[{"Aceleração"}, Above],  
AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},  
AxesLabel->{Style[t(s), Black, Bold, FontSize->12],  
Style["x''(t)", Black, Bold, FontSize->12]}], "(c)"]

(\*Gráfico de várias amplitudes.\*)

```
d = DSolve[{x''[t] + ω02x[t] == 0, x[0] == 2, x'[0] == x'0}, x, {t, 0, 20}];
p = DSolve[{x''[t] + ω02x[t] == 0, x[0] == 3, x'[0] == x'0}, x, {t, 0, 20}];
Plot[{Evaluate[x[t]/.s], Evaluate[x[t]/.d], Evaluate[x[t]/.p]}, {t, 0, 20},
PlotRange->All,
AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},
PlotLegends->Placed[{"x(0) = 1 m", "= 2 m", "= 3 m"}, Above],
AxesLabel->{Style[t(s), Black, Bold, FontSize->12],
Style["x(t)", Black, Bold, FontSize->12]}
```

(\*Gráfico das “energias”.\*)

```
T = 1/2 m Evaluate[x'[t]/.s]2;
V = 1/2 k Evaluate[x[t]/.s]2;
Et = T + V;
Plot[{Et, T, V}, {t, 0, 10},
PlotRange->All,
AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},
PlotLegends->Placed[{"Energia Total", "Cinética", "Potencial"}, Above],
AxesLabel->{Style[t(s), Black, FontSize->12], Style[E(J), Black, FontSize->12]}
```

### *Oscilador Harmônico Amortecido*

(\*Condições Iniciais.\*)

```
x0 = 1; x'0 = 0; k = 3; m = 1; λ = 0.5; ω0 = Sqrt[k/m]; γ = λ/m;
```

(\*Solução analítica da equação de movimento do oscilador harmônico amortecido.\*)

```
s = DSolve[{x''[t] + γ x'[t] + ω02x[t] == 0, x[0] == x0, x'[0] == x'0}, x, {t, 0, 20}];
d = DSolve[{x''[t] + 0 x'[t] + ω02x[t] == 0, x[0] == x0, x'[0] == x'0}, x, {t, 0, 20}];
```

(\*Gráfico da posição em função do tempo.\*)

```
Labeled[Plot[Evaluate[x[t]/.s], {t, 0, 20},
PlotRange->All,
PlotLegends->Placed[{"λ = 0.5 kg/s"}, Above],
AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},
AxesLabel->{Style[t(s), Black, Bold, FontSize->12],
Style["x(t)", Black, Bold, FontSize->12]}], "(a)"]
```

(\*Gráfico da posição em função do tempo(λ = 0).\*)

```
Labeled[Plot[Evaluate[x[t]/.d], {t, 0, 20},
PlotRange->All,
PlotLegends->Placed[{"λ = 0 kg/s"}, Above],
AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},
```

```

AxesLabel->{Style[t(s), Black, Bold, FontSize->12],
Style["x(t)", Black, Bold, FontSize->12]}, {"(b)"}

(*Gráfico das "energias".*)
T = 1/2 m Evaluate[x'[t]/.s]^2;
V = 1/2 k Evaluate[x[t]/.s]^2;
Et = T + V;
Labeled[Plot[{Et, T, V}, {t, 0, 10},
PlotRange->All,
AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},
PlotLegends->Placed[{"Energia Total", "Cinética", "Potencial"}, Above],
AxesLabel->{Style[t(s), Black, FontSize->12], Style[E(J), Black, FontSize->12]},
Epilog -> Inset[Plot[{Et, T, V}, {t, 1.2, 2.5}, PlotRange->{0.50, 0.75},
Frame -> True, Axes -> False, ImageSize -> 150], {5, 1}], {"(a)"}

(*Gráfico da taxa de variação da energia total.*)
dE = D[Et, t];
Labeled[Plot[dE, {t, 0, 10},
PlotRange->All,
AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},
PlotLegends->Placed[{"Taxa de Variação da Energia Total"}, Above],
AxesLabel->{Style[t(s), Black, FontSize->12],
Style["dE/dt", Black, FontSize->12]}, {"(b)"}

(*Gráfico da constante de movimento.*)
CM =
Exp[λ/mt] ((m/2 Evaluate[x'[t]/.s]^2) + ((mω0^2)/2 Evaluate[x[t]/.s]^2) +
((λ)/2 Evaluate[x[t]/.s] Evaluate[x'[t]/.s]));
Plot[CM, {t, 0, 20},
PlotRange->{0, 2},
AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},
PlotLegends->Placed[{"Constata de Movimento"}, Above],
AxesLabel->{Style[t(s), Black, FontSize->12], Style[C, Black, FontSize->12]}]

```

### *Oscilador Harmônico Forçado*

```

(*Condições Iniciais.*)
Ac = 1; k = 3; m = 1; ω0 = Sqrt[k/m]; γ = 0.25; ω = 1; φ = 0;
F0 = 5; ω1 = Pi; δ = ArcTan [2ω1γ / (ω02 - ω12)] ;

(*Solução analítica da equação de movimento do oscilador harmônico forçado.*)
c = Ac e-γt Sin[ωt + φ + Pi/2];

```

$$p = \left( \frac{F_0/m}{\text{Sqrt}[(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\gamma^2\omega_1^2]} \right) (\text{Sin}[\omega_1 t - \delta + \text{Pi}/2]);$$

(\*Gráfico da solução complementar e particular.\*)

```
Labeled[Plot[{c, p}, {t, 0, 30},
PlotRange->All,
PlotLegends->Placed[{"x_c(t)", "x_p(t)", "x(t)"}, Above],
AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},
AxesLabel->{Style[t(s), Black, Bold, FontSize->12],
Style[x_c(t), x_p(t), Black, Bold, FontSize->12]}], "(a)"]
```

(\*Gráfico da solução geral.\*)

```
Labeled[Plot[c + p, {t, 0, 30},
PlotRange->All,
PlotLegends->Placed[{"x(t)"}, Above],
AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},
AxesLabel->{Style[t(s), Black, Bold, FontSize->12],
Style[x(t), Black, Bold, FontSize->12]}], "(b)"]
```

(\*Gráfico da amplitude para diferentes valores de  $\lambda$ .\*)

```
A = \left( \frac{F_0/m}{\text{Sqrt}[(\omega_0^2 - t^2)^2 + 4 \cdot 0.7^2 t^2]} \right);
B = \left( \frac{F_0/m}{\text{Sqrt}[(\omega_0^2 - t^2)^2 + 4\gamma^2 t^2]} \right);
H = \left( \frac{F_0/m}{\text{Sqrt}[(\omega_0^2 - t^2)^2]} \right);
Labeled[Plot[{A, B, H}, {t, 0, 5},
PlotRange->{0, 10.2},
AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},
PlotLegends->Placed[{"\lambda = 1.4 kg/s", "0.5 kg/s", "0 kg/s"}, Above],
AxesLabel->{Style["\omega_f", Black, Bold, FontSize->12], Style[A, Black, Bold,
FontSize->12]}, Ticks->{{0, 1, {\sqrt{3}, "\omega_0"}, 2, 3, 4, 5}, {{5/3, "F_0/k"}, 4, 6, 8, 10}}],
"(a)"]
```

(\*Gráfico da amplitude de energia para diferentes valores de  $\lambda$ .\*)

```
G = \left( \frac{F_0}{\text{Sqrt}[(mt - k/t)^2 + 1.4^2]} \right);
L = \left( \frac{F_0}{\text{Sqrt}[(mt - k/t)^2 + 0.5^2]} \right);
U = \left( \frac{F_0}{\text{Sqrt}[(mt - k/t)^2]} \right);
Labeled[Plot[{G, L, U}, {t, 0, 5},
PlotRange->{0, 10.2},
AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},
PlotLegends->Placed[{"\lambda = 1.4 kg/s", "0.5 kg/s", "0 kg/s"}, Above],
AxesLabel->{Style["\omega_f", Black, Bold, FontSize->12],
Style["A_e", Black, Bold, FontSize->12]},
Ticks->{{0, 1, {\sqrt{3}, "\omega_0"}, 2, 3, 4, 5}, {2, 4, 6, 8, 10}}], "(b)"]
```

*Oscilador Harmônico Sobre um Bloco em Movimento*

(\*Condições Iniciais.\*)

$$x_0 = 1; x'_0 = 0; k = 3; m = 1; \omega_0 = \text{Sqrt}[k/m]; v = 1;$$

(\*Solução analítica da equação de movimento do oscilador harmônico simples sobre um bloco.\*)

$$s = \text{DSolve}[\{x''[t] + \omega_0^2(x[t] - vt) == 0, x[0] == x_0, x'[0] == x'_0\}, x, \{t, 0, 20\}];$$

$$d = \text{DSolve}[\{x''[t] + \omega_0^2 x[t] == 0, x[0] == x_0, x'[0] == x'_0\}, x, \{t, 0, 20\}];$$

(\*Gráfico da posição em função do tempo.\*)

$$\text{Plot}[\{\text{Evaluate}[x[t]/.s], \text{Evaluate}[x[t]/.d]\}, \{t, 0, 20\},$$

$$\text{PlotRange} \rightarrow \text{All},$$

$$\text{PlotLegends} \rightarrow \text{Placed}[\{ "x_1(t)", "x_2(t)" \}, \text{Above}],$$

$$\text{AxesStyle} \rightarrow \{\{\text{Black}, \text{Thick}\}, \{\text{Black}, \text{Thick}\}\},$$

$$\text{AxesLabel} \rightarrow \{\text{Style}[t(\text{s}), \text{Black}, \text{Bold}, \text{FontSize} \rightarrow 12],$$

$$\text{Style}[x_1(t), x_2(t), \text{Black}, \text{Bold}, \text{FontSize} \rightarrow 12]\},$$

$$\text{Epilog} \rightarrow \text{Inset}[\text{Plot}[\text{Evaluate}[x[t]/.s], \{t, 0, 20\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{\{4.7, 8.7\},$$

$$\{3.6, 8.6\}\}, \text{Frame} \rightarrow \text{True}, \text{Axes} \rightarrow \text{False}, \text{ImageSize} \rightarrow 150], \{4.9, 14.5\}]]$$

(\*Gráfico da energia total.\*)

$$Et = \frac{1}{2}m \text{Evaluate}[x'[t]/.s]^2 + \frac{1}{2}k \text{Evaluate}[x[t]/.s]^2;$$

$$\text{Labeled}[\text{Plot}[Et, \{t, 0, 20\},$$

$$\text{PlotRange} \rightarrow \text{All},$$

$$\text{PlotLegends} \rightarrow \text{Placed}[\{ "Energia Total" \}, \text{Above}],$$

$$\text{AxesStyle} \rightarrow \{\{\text{Black}, \text{Thick}\}, \{\text{Black}, \text{Thick}\}\},$$

$$\text{AxesLabel} \rightarrow \{\text{Style}[t(\text{s}), \text{Black}, \text{FontSize} \rightarrow 12], \text{Style}[E(\text{J}), \text{Black}, \text{FontSize} \rightarrow 12]\}, \{ "a" \}]$$

*Haste com Rotação Uniforme*

(\*Condições Iniciais.\*)

$$r_0 = 0.01; m = 0.005; \omega = 1;$$

(\*Solução analítica da equação de movimento da miçanga deslizando ao longo de uma haste.\*)

$$s = \text{DSolve}[\{r''[t] - \omega^2 r[t] == 0, r[0] == r_0, r'[0] == 0\}, r, \{t, 0, 2\text{Pi}\}];$$

$$d = \text{DSolve}[\{r''[t] - \omega^2 r[t] == 0, r[0] == r_0, r'[0] == 0.01\}, r, \{t, 0, 2\text{Pi}\}];$$

$$p = \text{DSolve}[\{r''[t] - \omega^2 r[t] == 0, r[0] == r_0, r'[0] == 0.05\}, r, \{t, 0, 2\text{Pi}\}];$$

(\*Gráfico da posição para algumas velocidades iniciais distintas.\*)

$$\text{Plot}[\{\text{Evaluate}[r[t]/.s], \text{Evaluate}[r[t]/.d], \text{Evaluate}[r[t]/.p]\}, \{t, 0, 2\text{Pi}\},$$

$$\text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \text{AxesStyle} \rightarrow \{\{\text{Black}, \text{Thick}\}, \{\text{Black}, \text{Thick}\}\},$$

```

AxesLabel->{Style[t(s), Black, Bold, FontSize->12], Style["r(t)", Black, Bold, FontSize->12]},
PlotLegends->Placed[{"r'(0) = 0 m/s", "= 0,01 m/s", "= 0,05 m/s"}, Above],
Ticks->{{Pi/4, Pi/2, 3Pi/4, Pi, 5Pi/4, 3Pi/2, 7Pi/4, 2Pi}, {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16}}]

```

(\*Gráfico da posição para algumas velocidades angulares distintas.\*)

```

ss = DSolve[{r''[t] - 1^2 r[t] == 0, r[0] == r0, r'[0] == 0}, r, {t, 0, 2Pi}];
dd = DSolve[{r''[t] - 1.5^2 r[t] == 0, r[0] == r0, r'[0] == 0.}, r, {t, 0, 2Pi}];
pp = DSolve[{r''[t] - 3^2 r[t] == 0, r[0] == r0, r'[0] == 0.}, r, {t, 0, 2Pi}];
Plot[{Evaluate[r[t]/.ss], Evaluate[r[t]/.dd], Evaluate[r[t]/.pp]}, {t, 0, 2Pi},
PlotRange->{0, 72}, AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},
AxesLabel->{Style[t(s), Black, Bold, FontSize->12], Style["r(t)", Black, Bold, FontSize->
12]}, PlotLegends->Placed[{"ω = 1,0 rad/s", "= 1,5 rad/s", "= 3,0 rad/s"}, Above],
Ticks->{{Pi/4, Pi/2, 3Pi/4, Pi, 5Pi/4, 3Pi/2, 7Pi/4, 2Pi}, {10, 20, 30, 40, 50, 60, 70}}]

```

(\*Gráfico da posição para algumas velocidades iniciais negativas.\*)

```

sss = DSolve[{r''[t] - ω^2 r[t] == 0, r[0] == 0.05, r'[0] == - 0.02}, r, {t, 0, 2Pi}];
ddd = DSolve[{r''[t] - ω^2 r[t] == 0, r[0] == 0.05, r'[0] == - 0.03}, r, {t, 0, 2Pi}];
ppp = DSolve[{r''[t] - ω^2 r[t] == 0, r[0] == 0.05, r'[0] == - 0.04}, r, {t, 0, 2Pi}];
Plot[{Evaluate[r[t]/.sss], Evaluate[r[t]/.ddd], Evaluate[r[t]/.ppp]}, {t, 0, 2},
PlotRange->{0, 0.10},
AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},
AxesLabel->{Style[t(s), Black, Bold, FontSize->12], Style["r(t)", Black, Bold, FontSize->
12]}, PlotLegends->Placed[{"r'(0) = -0.02 m/s", "= -0,03 m/s", "= -0,04 m/s"},
Above]]

```

(\*Gráfico da energia para algumas velocidades iniciais distintas.\*)

```

ks = m/2(Evaluate[r'[t]/.s]^2 + ω^2 Evaluate[r[t]/.s]^2);
kd = m/2(Evaluate[r'[t]/.d]^2 + ω^2 Evaluate[r[t]/.d]^2);
kp = m/2(Evaluate[r'[t]/.p]^2 + ω^2 Evaluate[r[t]/.p]^2);
Plot[{ks, kd, kp}, {t, 0, 2Pi},
AxesLabel->{Style[t(s), Black, FontSize->12], Style[E(J), Black, FontSize->12]},
AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}}, PlotRange->{0, 0.2},
PlotLegends->Placed[{"r'(0) = 0 m/s", "= 0,01 m/s", "= 0,05 m/s"}, Above],
Ticks->{{Pi/4, Pi/2, 3Pi/4, Pi, 5Pi/4, 3Pi/2, 7Pi/4, 2Pi}, Automatic]}]

```

(\*Gráfico da energia total e hamiltoniana.\*)

```

hs = m/2(Evaluate[r'[t]/.s]^2 - ω^2 Evaluate[r[t]/.s]^2);
hd = m/2(Evaluate[r'[t]/.d]^2 - ω^2 Evaluate[r[t]/.d]^2);
hp = m/2(Evaluate[r'[t]/.p]^2 - ω^2 Evaluate[r[t]/.p]^2);
Plot[{ks, hs}, {t, 0, 2Pi},
AxesLabel->{Style[t(s), Black, FontSize->12], Style[E(J), Black, FontSize->12]},
AxesStyle->{{}, {Black, Thick}},

```

```
PlotRange->All, PlotLegends->Placed[{"Energia Total", "Hamiltoniana"}, Above],
Ticks->{{Pi/4, Pi/2, 3Pi/4, Pi, 5Pi/4, 3Pi/2, 7Pi/4, 2Pi}, Automatic}]
```

### *Haste com Rotação Uniformemente Variada*

(\*Condições Iniciais.\*)

```
r0 = 0.01; m = 0.005; ω = 0; α = 1/Pi;
```

(\*Solução analítica da equação de movimento da miçanga acelerando ao longo de uma haste.\*)

```
s = DSolve[{r''[t] - (ω + αt)^2 r[t] == 0, r[0] == r0, r'[0] == 0}, r, {t, 0, 2Pi}];
```

```
d = DSolve[{r''[t] - (ω + αt)^2 r[t] == 0, r[0] == r0, r'[0] == 0.01}, r, {t, 0, 2Pi}];
```

```
p = DSolve[{r''[t] - (ω + αt)^2 r[t] == 0, r[0] == r0, r'[0] == 0.05}, r, {t, 0, 2Pi}];
```

(\*Gráfico da posição para algumas velocidades iniciais distintas.\*)

```
Plot[{Evaluate[r[t]/.s], Evaluate[r[t]/.d], Evaluate[r[t]/.p]}, {t, 0, 2Pi},
```

```
PlotRange->{0, 6},
```

```
AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},
```

```
AxesLabel->{Style[t(s), Black, Bold, FontSize->12], Style["r(t)", Black, Bold, FontSize->12]},
```

```
PlotLegends->Placed[{"r'(0) = 0 m/s", "= 0,01 m/s", "= 0,05 m/s"}, Above],
```

```
Ticks->{{0, Pi/4, Pi/2, 3Pi/4, Pi, 5Pi/4, 3Pi/2, 7Pi/4, 2Pi}, {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}}]
```

(\*Gráfico da posição para uma velocidade negativa.\*)

```
ss = DSolve[{r''[t] - (ω + αt)^2 r[t] == 0, r[0] == 0.05, r'[0] == -0.01}, r, {t, 0, Pi}];
```

```
Plot[Evaluate[r[t]/.ss], {t, 0, Pi},
```

```
PlotRange->All,
```

```
AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},
```

```
AxesLabel->{Style[t(s), Black, Bold, FontSize->12], Style["r(t)", Black, Bold, FontSize->12]},
```

```
PlotLegends->Placed[{"r'(0) = -0,01 m/s"}, Above],
```

```
Ticks->{{Pi/4, Pi/2, 3Pi/4, Pi}, Automatic}]
```

(\*Gráfico da posição, velocidade e aceleração para aceleração negativa.\*)

```
dd = NDSolve[{r''[t] - (2 - αt)^2 r[t] == 0, r[0] == r0, r'[0] == 0}, r, {t, 0, 2Pi}];
```

```
Labeled[Plot[{Evaluate[r[t]/.dd], Evaluate[r'[t]/.dd], Evaluate[r''[t]/.dd]}, {t, 0, 2Pi},
```

```
PlotRange->{0, 7},
```

```
AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},
```

```
AxesLabel->{Style[t(s), Black, Bold, FontSize->12], Style["r(t), r'(t), r''(t)",
```

```
, Black, Bold, FontSize->12]}, PlotLegends->Placed[{"r(t)", "r'(t)", "r''(t)"}, Above],
```

```
Ticks->{{0, Pi/4, Pi/2, 3Pi/4, Pi, 5Pi/4, 3Pi/2, 7Pi/4, 2Pi}, {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}},
```

```
"(a)"]
```

(\*Gráfico das "energias".\*)

```
ek = m/2(Evaluate[r'[t]/.dd]^2 + (2 - αt)^2 Evaluate[r[t]/.dd]^2);
```

```
ew = m/2((2 -  $\alpha t$ )^2 Evaluate[r[t]/.dd]^2);
er = m/2(Evaluate[r'[t]/.dd]^2);
Labeled[Plot[{ek, er, ew}, {t, 0, 2Pi}, AxesLabel->{Style[t(s), Black, FontSize->12],
Style[E(J), Black, FontSize->12]},
AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}}, PlotRange->{0, 0.022},
PlotLegends->Placed[{T, "T-T $\omega$ ", "T $\omega$ "}, Above],
Ticks->{{Pi/4, Pi/2, 3Pi/4, Pi, 5Pi/4, 3Pi/2, 7Pi/4, 2Pi}, Automatic}],
“(b)”]
```

(\*Gráfico da energia total e hamiltoniana.\*)

```
ks = m/2(Evaluate[r'[t]/.dd]^2 + ( $\omega + \alpha t$ )^2 Evaluate[r[t]/.s]^2);
hs = m/2(Evaluate[r'[t]/.dd]^2 - ( $\omega + \alpha t$ )^2 Evaluate[r[t]/.s]^2);
Plot[{ks, hs}, {t, 0, 2Pi},
PlotRange->{-0.0022, 0.0122},
AxesStyle->{{}, {Black, Thick}},
AxesLabel->{Style[t(s), Black, FontSize->12], Style[E(J), Black, FontSize->12]},
PlotLegends->Placed[{"Energia Total", "Hamiltoniana"}, Above],
Ticks->{{Pi/4, Pi/2, 3Pi/4, Pi, 5Pi/4, 3Pi/2, 7Pi/4, 2Pi}, Automatic]}
```

### Haste Oscilante (Vibrando)

(\*Condições Iniciais.\*)

```
r0 = 0.01; m = 0.005;  $\delta = 1$ ;  $\beta = \text{Pi}/4$ ;
```

(\*Solução analítica da equação de movimento da miçanga  
ao longo de uma haste oscilante.\*)

```
s = DSolve[{r''[t] - ( $\delta \beta \text{Sin}[\delta t]$ )^2 r[t] == 0, r[0] == r0, r'[0] == 0}, r, {t, 0, 2Pi}];
d = DSolve[{r''[t] - ( $\delta \beta \text{Sin}[\delta t]$ )^2 r[t] == 0, r[0] == r0, r'[0] == 0.01}, r, {t, 0, 2Pi}];
p = DSolve[{r''[t] - ( $\delta \beta \text{Sin}[\delta t]$ )^2 r[t] == 0, r[0] == r0, r'[0] == 0.05}, r, {t, 0, 2Pi}];
```

(\*Gráfico da posição para algumas velocidades iniciais distintas.\*)

```
Labeled[Plot[{Evaluate[r[t]/.s], Evaluate[r[t]/.d], Evaluate[r[t]/.p]}, {t, 0, 2Pi},
PlotRange->All, AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},
AxesLabel->{Style[t(s), Black, FontSize->12], Style["r(t)", Black, FontSize->12]},
PlotLegends->Placed[{" $\dot{r}(0) = 0$  m/s", "= 0,01 m/s", "= 0,05 m/s"}, Above],
Ticks->{{Pi/4, Pi/2, 3Pi/4, Pi, 5Pi/4, 3Pi/2, 7Pi/4, 2Pi}, Automatic}], "(a)"]
```

(\*Gráfico da velocidade para algumas velocidades iniciais distintas.\*)

```
Labeled[Plot[{Evaluate[r'[t]/.s], Evaluate[r'[t]/.d], Evaluate[r'[t]/.p]}, {t, 0, 2Pi},
PlotRange->All, AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},
AxesLabel->{Style[t(s), Black, Bold, FontSize->12], Style[" $\dot{r}(t)$ ", Black, Bold, FontSize->12]},
PlotLegends->Placed[{" $\dot{r}(0) = 0$  m/s", "= 0,01 m/s", "= 0,05 m/s"}, Above],
```

Ticks->{{Pi/4, Pi/2, 3Pi/4, Pi, 5Pi/4, 3Pi/2, 7Pi/4, 2Pi}, Automatic}], "(b)"]

(\*Gráfico da aceleração para algumas velocidades iniciais distintas.\*)

Labeled[Plot[{Evaluate[r][t]/.s], Evaluate[r][t]/.d], Evaluate[r][t]/.p}], {t, 0, 2Pi},  
 PlotRange->All, AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},  
 AxesLabel->{Style[t(s), Black, Bold, FontSize->12], Style["r̈(t)", Black, Bold, FontSize->12]},  
 PlotLegends->Placed [{"ṙ(0) = 0 m/s", "= 0,01 m/s", "= 0,05 m/s"}], Above],  
 Ticks->{{Pi/4, Pi/2, 3Pi/4, Pi, 5Pi/4, 3Pi/2, 7Pi/4, 2Pi}, Automatic}], "(c)"]

(\*Gráfico que reproduz o caso da rotação uniformemente variada (aceleração positiva).\*)

ss = DSolve[{r[t] - (2/4 Pi Sin[1/4 t])^2 r[t] == 0, r[0] == r0, r'[0] == 0}, r, {t, 0, 2Pi}];  
 Labeled[Plot[{Evaluate[r][t]/.ss], Evaluate[r'][t]/.ss], Evaluate[r][t]/.ss}], {t, 0, 2Pi},  
 PlotRange->All,  
 AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},  
 AxesLabel->{Style[t(s), Black, Bold, FontSize->12], Style["r(t), ṙ(t), r̈(t)",  
 Black, Bold, FontSize->12]}, PlotLegends->Placed [{"r(t)", "ṙ(t)", "r̈(t)"}], Above],  
 Ticks->{{0, Pi/4, Pi/2, 3Pi/4, Pi, 5Pi/4, 3Pi/2, 7Pi/4, 2Pi}, Automatic}],  
 "(a)"]

(\*Gráfico que reproduz o caso da rotação uniformemente variada (aceleração negativa).\*)

sss = DSolve[{r[t] - (Pi Sin[t])^2 r[t] == 0, r[0] == r0, r'[0] == 0}, r, {t, 0, 2Pi}];  
 Labeled[Plot[{Evaluate[r][t]/.sss], Evaluate[r'][t]/.sss], Evaluate[r][t]/.sss}], {t, 0, Pi},  
 PlotRange->All,  
 AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},  
 AxesLabel->{Style[t(s), Black, Bold, FontSize->12], Style["r(t), ṙ(t), r̈(t)",  
 Black, Bold, FontSize->12]}, PlotLegends->Placed [{"r(t)", "ṙ(t)", "r̈(t)"}], Above],  
 Ticks->{{0, Pi/4, Pi/2, 3Pi/4, Pi, 5Pi/4, 3Pi/2, 7Pi/4, 2Pi}, Automatic}],  
 "(b)"]

(\*Gráfico da posição para uma velocidade negativa.\*)

pp = DSolve[{r[t] - (delta beta Sin[delta t])^2 r[t] == 0, r[0] == 0.05, r'[0] == -0.01}, r, {t, 0, 2Pi}];  
 Plot[{Evaluate[r][t]/.pp}], {t, 0, 2},  
 PlotRange->All,  
 AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},  
 AxesLabel->{Style[t(s), Black, Bold, FontSize->12], Style["r(t)", Black, Bold,  
 FontSize->12]}, PlotLegends->Placed [{"ṙ(0) = -0,01 m/s"}], Above]]

(\*Orbita para haste com rotação uniforme.\*)

Labeled[ParametricPlot[{Evaluate[{r[t] Cos[omega t], r[t] Sin[omega t]}/.s],  
 Evaluate[{r[t] Cos[omega t], r[t] Sin[omega t]}/.d],  
 Evaluate[{r[t] Cos[omega t], r[t] Sin[omega t]}/.p}],  
 {t, 0, 2Pi},  
 PlotRange->All,

```

AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},
PlotLegends->Placed [{"r'(0) = 0 m/s", "= 0,01 m/s", "= 0,05 m/s"}, Above],
AxesLabel->{Style[x(m), Black, FontSize->12], Style[y(m), Black, FontSize->12]},
“(a)”]

```

(\*Orbita para haste com rotação uniformemente variada.\*)

```

Labeled [ParametricPlot [ { Evaluate [ { r[t] Cos [  $\frac{\alpha}{2} t^2$  ], r[t] Sin [  $\frac{\alpha}{2} t^2$  ] } /.s ],
Evaluate [ { r[t] Cos [  $\frac{\alpha}{2} t^2$  ], r[t] Sin [  $\frac{\alpha}{2} t^2$  ] } /.d ],
Evaluate [ { r[t] Cos [  $\frac{\alpha}{2} t^2$  ], r[t] Sin [  $\frac{\alpha}{2} t^2$  ] } /.p ] },
{t, 0, 2Pi},
PlotRange->All,
AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},
PlotLegends->Placed [{"r'(0) = 0 m/s", "= 0,01 m/s", "= 0,05 m/s"}, Above],
AxesLabel->{Style[x(m), Black, FontSize->12], Style[y(m), Black, FontSize->12]},
“(b)”]

```

(\*Orbita para haste oscilante.\*)

```

Labeled [ParametricPlot [ { Evaluate [ { r[t] Cos [  $\beta \text{Cos} [\delta t]$  ], r[t] Sin [  $\beta \text{Cos} [\delta t]$  ] } /.s ],
Evaluate [ { r[t] Cos [  $\beta \text{Cos} [\delta t]$  ], r[t] Sin [  $\beta \text{Cos} [\delta t]$  ] } /.d ],
Evaluate [ { r[t] Cos [  $\beta \text{Cos} [\delta t]$  ], r[t] Sin [  $\beta \text{Cos} [\delta t]$  ] } /.p ] }, {t, 0, 7.9},
PlotRange->All,
AxesStyle->{{Black, Thick}, {Black, Thick}},
PlotLegends->Placed [{"r'(0) = 0 m/s", "= 0,01 m/s", "= 0,05 m/s"}, Above],
AxesLabel->{Style[x(m), Black, FontSize->12], Style[y(m), Black, FontSize->12]},
“(c)”]

```

(\*Gráfico da energia total e hamiltoniana.\*)

```

ks = m/2(Evaluate[r'[t]/.s]^2 + ( $\delta \beta \text{Sin} [\delta t]$ )^2 Evaluate[r[t]/.s]^2);
hs = m/2(Evaluate[r'[t]/.s]^2 - ( $\delta \beta \text{Sin} [\delta t]$ )^2 Evaluate[r[t]/.s]^2);
Plot[{ks, hs}, {t, 0, 2Pi},
PlotRange->All,
AxesStyle->{{}, {Black, Thick}},
AxesLabel->{Style[t(s), Black, FontSize->12], Style[E(J), Black, FontSize->12]},
PlotLegends->Placed [{"Energia Total", "Hamiltoniana"}, Above],
Ticks->{{Pi/4, Pi/2, 3Pi/4, Pi, 5Pi/4, 3Pi/2, 7Pi/4, 2Pi}, Automatic]}]

```

## A.2 Soluções

*Solução analítica da equação de movimento da miçanga ao longo de uma haste com rotação uniformemente variada:*

$$\begin{aligned}
 & \{ \{ r \rightarrow \text{Function} [\{ t \}, \\
 & \left( -\dot{r}_\theta \text{ParabolicCylinderD} \left[ -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}\omega}{\sqrt{\alpha}} \right] \text{ParabolicCylinderD} \left[ -\frac{1}{2}, i \left( \sqrt{2}t\sqrt{\alpha} + \frac{\sqrt{2}\omega}{\sqrt{\alpha}} \right) \right] + \right. \\
 & r_{\theta\omega} \text{ParabolicCylinderD} \left[ -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}\omega}{\sqrt{\alpha}} \right] \text{ParabolicCylinderD} \left[ -\frac{1}{2}, i \left( \sqrt{2}t\sqrt{\alpha} + \frac{\sqrt{2}\omega}{\sqrt{\alpha}} \right) \right] + \\
 & \dot{r}_\theta \text{ParabolicCylinderD} \left[ -\frac{1}{2}, \frac{i\sqrt{2}\omega}{\sqrt{\alpha}} \right] \text{ParabolicCylinderD} \left[ -\frac{1}{2}, \sqrt{2}t\sqrt{\alpha} + \frac{\sqrt{2}\omega}{\sqrt{\alpha}} \right] + \\
 & r_{0\omega} \text{ParabolicCylinderD} \left[ -\frac{1}{2}, \frac{i\sqrt{2}\omega}{\sqrt{\alpha}} \right] \text{ParabolicCylinderD} \left[ -\frac{1}{2}, \sqrt{2}t\sqrt{\alpha} + \frac{\sqrt{2}\omega}{\sqrt{\alpha}} \right] + \\
 & i\sqrt{2}r_\theta\sqrt{\alpha} \text{ParabolicCylinderD} \left[ -\frac{1}{2}, \sqrt{2}t\sqrt{\alpha} + \frac{\sqrt{2}\omega}{\sqrt{\alpha}} \right] \text{ParabolicCylinderD} \left[ \frac{1}{2}, \frac{i\sqrt{2}\omega}{\sqrt{\alpha}} \right] - \\
 & \left. \sqrt{2}r_\theta\sqrt{\alpha} \text{ParabolicCylinderD} \left[ -\frac{1}{2}, i \left( \sqrt{2}t\sqrt{\alpha} + \frac{\sqrt{2}\omega}{\sqrt{\alpha}} \right) \right] \text{ParabolicCylinderD} \left[ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}\omega}{\sqrt{\alpha}} \right] \right) / \\
 & \left( 2\omega \text{ParabolicCylinderD} \left[ -\frac{1}{2}, \frac{i\sqrt{2}\omega}{\sqrt{\alpha}} \right] \text{ParabolicCylinderD} \left[ -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}\omega}{\sqrt{\alpha}} \right] + \right. \\
 & i\sqrt{2}\sqrt{\alpha} \text{ParabolicCylinderD} \left[ -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}\omega}{\sqrt{\alpha}} \right] \text{ParabolicCylinderD} \left[ \frac{1}{2}, \frac{i\sqrt{2}\omega}{\sqrt{\alpha}} \right] - \\
 & \left. \left. \left. \sqrt{2}\sqrt{\alpha} \text{ParabolicCylinderD} \left[ -\frac{1}{2}, \frac{i\sqrt{2}\omega}{\sqrt{\alpha}} \right] \text{ParabolicCylinderD} \left[ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}\omega}{\sqrt{\alpha}} \right] \right) \right) \right\} .
 \end{aligned}$$

*Solução analítica da equação de movimento da miçanga ao longo de uma haste oscilante (vibrando):*

$$\begin{aligned}
 & \{ \{ r \rightarrow \text{Function} [\{ t \}, \\
 & \left( \dot{r}_0 \text{MathieuC} \left[ -\frac{\beta^2}{2}, -\frac{\beta^2}{4}, 0 \right] \text{MathieuC} \left[ -\frac{\beta^2}{2}, -\frac{\beta^2}{4}, t\delta \right] + \right. \\
 & r_{\theta\delta} \text{MathieuC} \left[ -\frac{\beta^2}{2}, -\frac{\beta^2}{4}, t\delta \right] \text{MathieuSPRime} \left[ -\frac{\beta^2}{2}, -\frac{\beta^2}{4}, 0 \right] \left. \right) / \\
 & \left( \delta \text{MathieuC} \left[ -\frac{\beta^2}{2}, -\frac{\beta^2}{4}, 0 \right] \text{MathieuSPRime} \left[ -\frac{\beta^2}{2}, -\frac{\beta^2}{4}, 0 \right] \right) \left. \right\} .
 \end{aligned}$$

# Referências

- 1 LEMOS, N. A. *Mecânica analítica*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livraria da Física, 2007. Citado 11 vezes nas páginas 14, 16, 17, 21, 27, 30, 31, 32, 33, 34 e 51.
- 2 THORNTON S. T.; MARION, J. B. *Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas*. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011. Citado 6 vezes nas páginas 14, 16, 17, 23, 27 e 43.
- 3 YOURGRAU W.; MANDELSTAM, S. *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory*. 3. ed. New York: W. B. Saunders, 1968. Citado na página 14.
- 4 HENRY, J. *A Revolução Científica e as Origens da Ciência Moderna*. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1998. Citado na página 16.
- 5 WIMMER, M. et al. Optical diametric drive acceleration via action-reaction symmetry breaking. *Nat. Phys.*, v. 9, 2013. Citado na página 17.
- 6 LEMOS, N. Sutilezas dos vínculos não-holônomos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 25, 2003. Citado na página 26.
- 7 LEDERMAN L. M.; HILL, C. T. *Symmetry and the Beautiful Universe*. Illustrated. New York: Prometheus, 2008. Citado na página 34.
- 8 CALLEN, H. B. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. 2. ed. New York: Wiley, 1985. Citado na página 35.
- 9 SALINAS, S. R. A. *Introdução à Física Estatística*. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2005. Citado na página 38.
- 10 BATEMAN, H. On dissipative systems and related variational principles. *Physical Review*, v. 38, p. 815–819, 1931. Citado na página 45.
- 11 CALDIROLA, P. Forze non conservative nella meccanica quantistica. *Nuovo Cimento*, v. 18, p. 393–400, 1941. Citado na página 45.
- 12 KANAI, E. On the Quantization of the Dissipative Systems. *Progress of Theoretical Physics*, v. 3, p. 440–442, 1948. Citado na página 45.
- 13 AGUIAR V.; GUEDES, I. Osciladores harmônicos amortecidos dependentes do tempo. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 35, p. 1–9, 2013. Citado na página 45.
- 14 ALONSO M.; FINN, E. J. *Física: um curso universitário*. 1. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1972. Citado na página 47.
- 15 FREITAS, J. Um interessante problema de vestibular envolvendo a não-conservação da energia mecânica em um referencial acelerado. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 24, 2002. Citado na página 50.
- 16 JOSEPH, T. Bead moving on a uniformly rotating rod studied from an inertial reference frame: Common misconceptions and possible ways to address them. 2020. Citado na página 51.

---

17 WOLFRAM RESEARCH, Inc. *Working with DSolve: A User's Guide*. Disponível em: <<https://reference.wolfram.com/language/tutorial/DSolveWorkingWithDSolve.html#19420>>. Acesso em: 20 de junho de 2022. Citado na página 66.