

**ESTUDO SOBRE A CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO
DE UM SÓLIDO ESFÉRICO**

Ma Ming Tsong
Luiz Carlos Alvarenga
Jadir Nogueira da Silva
José Ricardo C. Saglietti

RESUMO

A concentração em um sólido esférico, em diferentes pontos do seu interior, é calculada através da expressão:

$$U = - \frac{2a}{\pi r} (U_o - U_e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi r}{a} \exp (-Dn^2\pi^2/a^2) + U_e$$

deduzida a equação da difusão em coordenadas esféricas com coeficiente de difusão constante e com as seguintes condições de contorno e iniciais.

$$U(a, t) = U_e$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{0, t} = 0$$

$$U(r, 0) = U_o$$

A precisão de U depende do número de termos da série:

$$n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi r}{a} \exp (-Dn^2\pi^2 t/a^2)$$

Este trabalho visou determinar o número de termos da série acima, para que não haja variação no valor da concentração com precisões 4, 6 e 9 casas decimais.

Para isto, seguiu-se os seguintes passos:

1. Calculou-se U para n variando de 1 até um valor no qual não houvesse variação em 4, 6 e 9 casas decimais, respectivamente. Os valores de n foram obtidos para diferentes valores Dt/a^2 conhecidos.

2. Foram ajustadas curvas, por regressão, aos pontos obtidos.

Curvas potenciais foram ajustadas aos pontos obtidos experimentalmente com coeficientes de determinação 0,989, de 0,995 e 0,997 para 4, 6 e 9 casas decimais, respectivamente.

SUMMARY

Liquid distribution at different points within a spherical solid is calculated as follows (CRANK)

$$U = - \frac{2a}{\pi r} (U_o - U_e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi r}{a} \exp (-Dn^2\pi^2 t/a^2) + U_e$$

The above expression was derived from the diffusion equation, in spherical coordinate system, together with the following boundary and initial conditions:

$$U(a, t) = U_e$$

$$U(r, 0) = U_o$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{0, t} = 0$$

The accuracy of calculated U values depends on the number of terms in the series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi r}{a} \exp(-Dn^2\pi^2 t/a^2)$$

This work determines the required number of terms in the above series such that the computed values of U will be within $\pm 10^{-4}$, $\pm 10^{-6}$ or $\pm 10^{-9}$ of the exact values.

INTRODUÇÃO

No processo de secagem ocorrem mecanismos diversos de transporte de água no interior do sólido que está secando. Dentre elas, a difusão líquida tem tido preferência, por pesquisadores, por ser um mecanismo que explica muito bem a secagem de um produto numa determinada fase de secagem; FORTES e OKOS (1978).

A segunda lei de Fick, para um corpo considerado esférico,

$$\frac{U}{t} = \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) \quad (1)$$

Para as condições iniciais e de contorno:

$$U(a, t) = U_e \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{0, t} = 0 \quad (3)$$

$$U(r, 0) = U_0 \quad (4)$$

tem, por solução, a seguinte equação, CRANK (1957):

$$U = - \frac{2a}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi r}{a} \exp - \frac{D\pi^2 n^2 t}{a^2} (U_0 - U_e) + U_e \quad (5)$$

onde:

U = Teor de umidade, base seca, decimal

a = Raio do material, cm

r = Posição no interior do material, cm

D = Coeficiente de difusão, cm^2/min

t = tempo, minuto

U_0 = Umidade inicial, base seca, decimal

U_e = Umidade de equilíbrio, base seca, decimal

Um dos problemas para o cálculo do teor de umidade em diferentes pontos

no interior de um produto considerado esférico, durante a secagem, é a escolha da variação de n no somatório da equação (5).

Este trabalho tem, por finalidade, determinar o limite superior de n para que ocorra convergência razoável da equação (5).

MÉTODO

1. Foi feito um programa para a calculadora HP 97/67, para a equação (5) com os seguintes valores obtidos de dados experimentais, referentes ao feijão, ALVARENGA (1979)

$$a = 0,7886 \text{ cm}$$

$$U_o = 0,4146 \text{ b.s.}$$

$$U_e = 0,0908 \text{ b.s.}$$

$$D = 0,0004083 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$r = 0,1a; 0,2a; 0,3a; 0,4a; 0,5a; 0,6a; 0,7a; 0,8a; 0,9a; \text{ a } t \text{ varia de 1 a 5000 minutos, em intervalos variáveis.}$$

2. Fixando t e r , foram obtidos valores de U para n variando de 1 até um valor onde U não apresentou diferença em 4, 6 e 9 casas decimais, respectivamente.

3. O procedimento anterior foi repetido para cada par (t, r) e foram obtidos valores de n para cada par (t, r) que não apresentasse diferenças de unidade com 4, 6 e 9 casas decimais, respectivamente.

4. Foram ajustadas curvas de $n = f\left(\frac{Dt}{a^2}\right)$, por regressão, para 4, 6 e 9 casas decimais.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O gráfico da Figura 1 ilustra a variação do teor de umidade, em $r = 0,1a$ com o tempo para diferentes valores de n . No gráfico, o índice de U representa o valor máximo de n para o somatório da equação (5).

Para valores de $t \geq 1000$, o valor de n não afeta o valor da umidade.

Para um dado t , à medida que n cresce, o valor da umidade converge para um valor fixo.

Os Quadros 1, 2 e 3 nos mostram valores de n para cada par (t, r) para 4, 6 e 9 casas decimais, respectivamente.

Para o ajuste das curvas, os valores de n foram escolhidos em $r = (0,1)a$ devido ao fato de que n , para um dado t , ter apresentado um maior valor em $r = (0,1)a$. Nota-se, entretanto, que não houve grandes variações de n ao longo de r exceto para $n = a$, onde $n = 1$.

As equações ajustadas, por regressão, foram as seguintes, Figura 2:

a) Para 4 casas decimais

$$n = 0,6807 \left(\frac{Dt}{a^2}\right) - 0,5535$$

$$R^2 = 98,9\%$$

b) Para 6 casas decimais

$$n = 0,9817 \left(\frac{Dt}{a^2}\right) - 0,5220$$

$$R^2 = 99,5\%$$

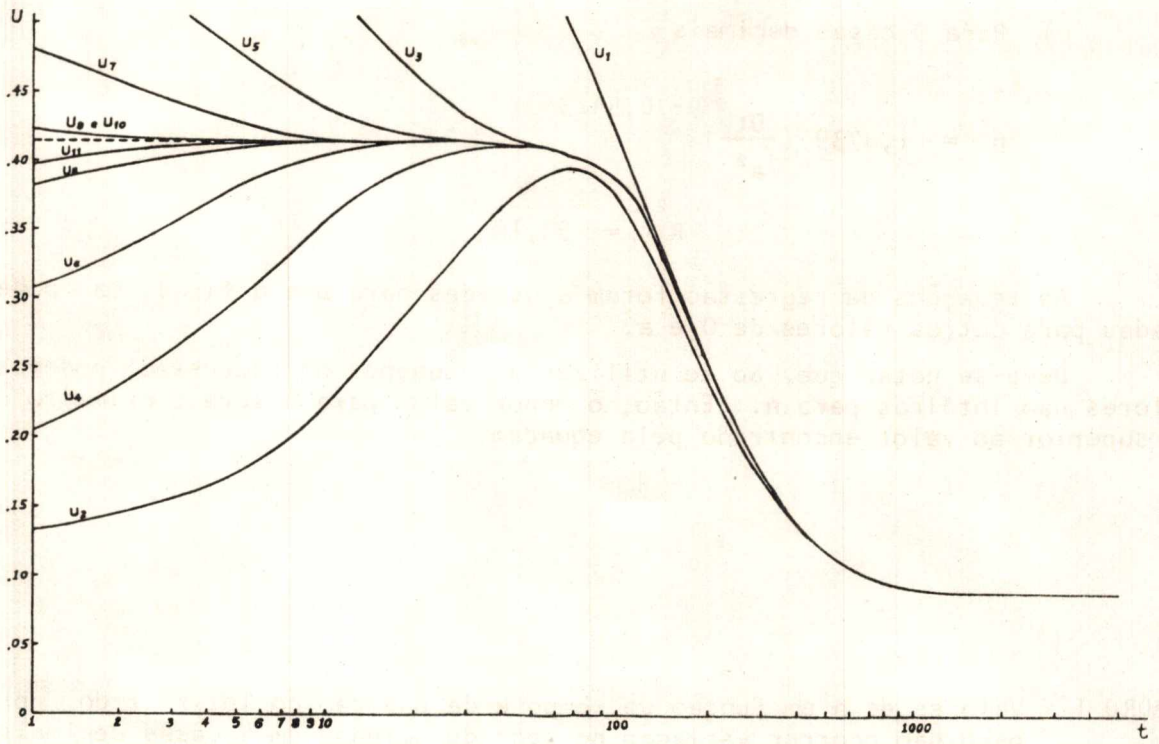


FIGURA 1 - Variação do teor de umidade, em $r = 0,1a$, com o tempo para diferentes valores de n .

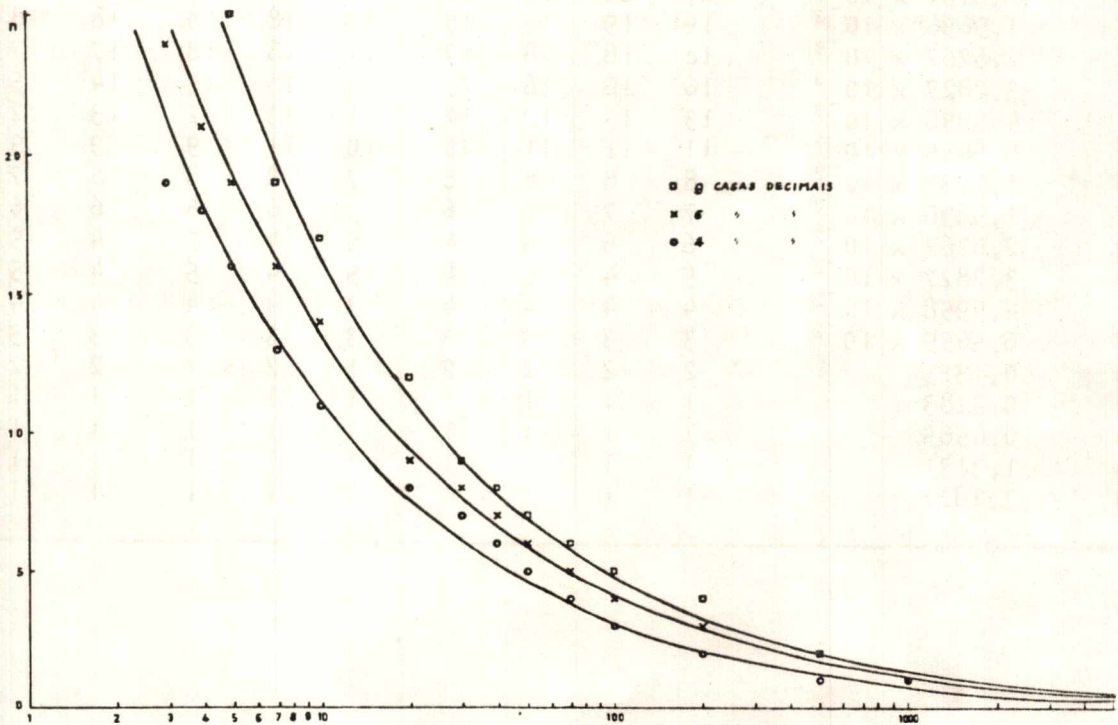


FIGURA 2 - Curvas de variação de n com o tempo.

c) Para 9 casas decimais

$$n = 1,0739 \left(\frac{Dt}{a^2} \right)^{-0,5423}$$

$$R^2 = 99,1\%$$

As equações de regressão foram ajustadas para D e a fixos, mas podem ser usadas para outros valores de D e a .

Deve-se notar que, ao se utilizar as equações de regressão, podemos ter valores não inteiros para n . Então, o menor valor para n será o primeiro inteiro superior ao valor encontrado pela equação.

QUADRO 1 - Valores de n em função do tempo e da posição no interior do produto para não ocorrer variação no teor de umidade em 4 casas decimais.

Tempo (minuto)	Dt/a^2	r/a									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1	$6,5655 \times 10^{-4}$	36	34	33	33	25	33	32	31	31	1
2	$1,3131 \times 10^{-3}$	27	26	26	26	25	26	25	25	25	1
3	$1,9696 \times 10^{-3}$	19	19	19	19	19	18	18	18	18	1
4	$2,6262 \times 10^{-3}$	18	18	18	17	17	18	18	17	17	1
5	$3,2827 \times 10^{-3}$	16	16	16	15	15	16	15	14	15	1
7	$4,5958 \times 10^{-3}$	13	13	12	12	11	13	12	13	12	1
10	$6,5655 \times 10^{-3}$	11	11	11	10	10	11	9	9	9	1
20	$1,3131 \times 10^{-2}$	8	8	8	8	7	8	8	8	7	1
30	$1,9696 \times 10^{-2}$	7	7	6	6	5	6	6	6	6	1
40	$2,6262 \times 10^{-2}$	6	6	5	4	5	4	5	4	5	1
50	$3,2827 \times 10^{-2}$	5	4	5	4	5	4	5	4	5	1
70	$4,5958 \times 10^{-2}$	4	4	4	4	3	4	4	4	4	1
100	$6,5655 \times 10^{-2}$	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1
200	0,1313	2	2	2	2	1	2	2	2	2	1
500	0,3283	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1000	0,6565	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2000	1,3131	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5000	3,2827	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

QUADRO 2 - Valores de n em função do tempo e da posição no interior do produto para não ocorrer variação no teor de umidade em 6 casas decimais.

Tempo (minuto)	Dt/a^2	r/a									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1	$6,5655 \times 10^{-4}$	45	43	43	43	41	43	43	41	41	1
2	$1,3131 \times 10^{-3}$	32	31	31	30	29	31	30	30	28	1
3	$1,9696 \times 10^{-3}$	24	24	24	24	23	24	24	23	24	1
4	$2,6262 \times 10^{-3}$	21	21	21	21	21	21	21	19	19	1
5	$3,2827 \times 10^{-3}$	19	19	19	19	19	19	19	18	18	1
7	$4,5958 \times 10^{-3}$	16	16	16	16	15	16	15	16	15	1
10	$6,5655 \times 10^{-3}$	14	14	14	14	13	13	13	13	14	1
20	$1,3131 \times 10^{-2}$	9	9	9	9	9	9	9	9	9	1
30	$1,9696 \times 10^{-2}$	8	8	8	8	7	8	8	7	7	1
40	$2,6262 \times 10^{-2}$	7	7	7	7	7	6	6	6	6	1
50	$3,2827 \times 10^{-2}$	6	6	6	6	5	6	6	6	6	1
70	$4,5858 \times 10^{-2}$	5	4	5	4	3	4	5	4	5	1
100	$6,5655 \times 10^{-2}$	4	4	4	4	3	4	4	4	4	1
200	0,1313	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1
500	0,3283	2	2	2	2	1	2	2	2	2	1
1000	0,6565	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2000	1,3131	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5000	3,2827	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

QUADRO 3 - Valores de n em função do tempo e da posição no interior do produto para não ocorrer variação no teor de umidade em 9 casas decimais

Tempo (minuto)	Dt/a^2	r/a									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1	$6,5655 \times 10^{-4}$	54	54	53	51	51	53	53	50	50	1
2	$1,3131 \times 10^{-3}$	37	37	37	26	37	36	36	36	36	1
3	$1,9696 \times 10^{-3}$	29	29	29	29	29	29	29	29	29	1
4	$2,6262 \times 10^{-3}$	27	27	26	26	26	26	26	24	26	1
5	$3,2827 \times 10^{-3}$	25	24	24	24	23	23	22	22	21	1
7	$4,5958 \times 10^{-3}$	19	19	19	19	19	19	19	19	19	1
10	$6,5655 \times 10^{-3}$	17	17	16	16	15	16	16	16	16	1
20	$1,3131 \times 10^{-2}$	12	11	11	11	11	11	11	11	11	1
30	$1,9696 \times 10^{-2}$	9	9	9	9	9	9	9	9	9	1
40	$2,6262 \times 10^{-2}$	8	8	8	8	7	8	8	8	8	1
50	$3,2827 \times 10^{-2}$	7	7	7	7	7	7	7	7	7	1
70	$4,5958 \times 10^{-2}$	6	6	6	6	5	6	6	6	6	1
100	$6,5655 \times 10^{-2}$	5	4	5	4	5	4	5	4	5	1
200	0,1313	4	4	4	4	3	3	3	3	4	1
500	0,3283	2	2	2	2	1	2	2	2	1	1
1000	0,6565	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2000	1,3131	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5000	3,2827	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

LITERATURA CITADA

- ALVARENGA, L.C.; *Transporte de água em grãos de feijão-preto sob condições de secagem e repouso*, Imprensa Universitária, Tese M.S., 1979. 72 p.
- CRANK, K.J.; *The Mathematics of diffusion*, Clarendon Press, Oxford, U.S.A., 1957, 414 p.
- FORTES, M. & OKOS.; A non-equilibrium thermodynamics approach to transport phenomena in capillary media. In: MUJUNDAR, A.S. ed., *Proceeding of the First International Symposium on Drying Sciences Press, Princeton, U.S.A. 1978.*

QUADRO 2 - Valores de n em função do tempo e da distância no feijão-preto. Para cada ponto, verificou-se teor de umidade em % com precisão de 0,1.

Tempo (min)	Distância (cm)									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
3	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
4	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
5	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
10	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
20	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
30	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
40	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
50	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
100	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
200	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
300	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
400	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
500	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
1000	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
2000	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
3000	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
4000	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
5000	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2