

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO

UMA SOLUÇÃO HEURÍSTICA PARA O PROBLEMA DO CARTEIRO  
CHINÊS NUM GRAFO MISTO COM APLICAÇÃO À DISTRIBUIÇÃO  
DE BENS E SERVIÇOS PÚBLICOS

ANTÔNIO DOS SANTOS

CAMPINA GRANDE - PARAÍBA

JUNHO - 1981



S237s Santos, Antonio dos  
Uma solucao heuristica para o problema do carteiro  
chines num grafo misto com aplicacao a distribuicao de bens  
e servicos publicos / Antonio dos Santos. - Campina Grande,  
1981.  
55 f. : il.

Dissertacao (Mestrado em Sistemas e Computacao) -  
Universidade Federal da Paraiba, Centro de Ciencias e  
Tecnologia.

1. Algoritmos Heuristicos 2. Metodos Heuristicos 3.  
Algoritmo (Informatica) 4. Dissertacao I. Seip, Ulrich, Dr.  
II. Universidade Federal da Paraiba - Campina Grande (PB)  
III. Título

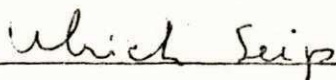
CDU 004.023(043)

UMA SOLUÇÃO HEURÍSTICA PARA O PROBLEMA DO CARTEIRO  
CHINÊS NUM GRAFO MISTO COM APLICAÇÃO À DISTRIBUIÇÃO  
DE BENS E SERVIÇOS PÚBLICOS

ANTÔNIO DOS SANTOS

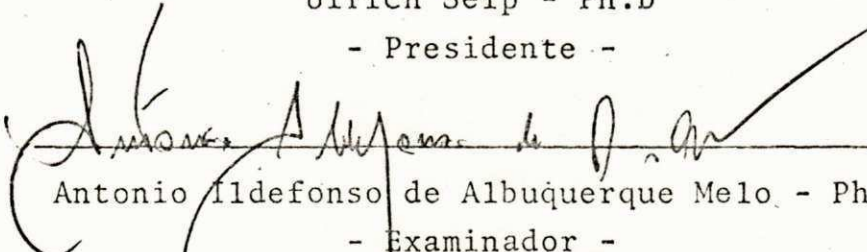
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM SISTEMAS E COMPUTAÇÃO DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada com distinção por:

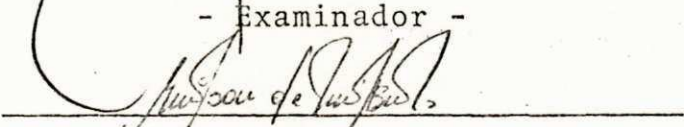


Ulrich Seip - Ph.D

- Presidente -

  
Antonio Ildefonso de Albuquerque Melo - Ph.D

- Examinador -

  
Evilson de Araújo Barros - M.Sc

- Examinador -

CAMPINA GRANDE  
ESTADO DA PARAÍBA - BRASIL  
JUNHO - 1981

i

A meus pais

A minha esposa

A minhas filhas

A meus irmãos

## RESUMO

Neste trabalho são estabelecidos variantes de algoritmos heurísticos de Edmonds e Johnson e de Frederickson, para o problema do carteiro chinês num grafo misto. Estas variantes podem ser aplicadas para o problema de encontrar rotas para distribuição de bens e serviços públicos. Como aplicação foi usada a coleta de lixo da cidade de Aracaju, Sergipe.

O mais importante resultado do trabalho é que estas variantes têm melhor desempenho com relação à aplicação em computadores que os originais de Edmonds e Johnson e de Frederickson, e que a análise do pior caso mostra que a estimação de Frederickson, isto é, que o custo de uma rota encontrada pelo uso do seu algoritmo é menor ou igual a  $5/3$  do custo de uma rota ótima, é também válida para a variante aqui apresentada.

Também pode ser esperado que em cada caso a variante estudada apresente um resultado com custo menor ou igual ao do resultado obtido pela aplicação dos algoritmos originais. Isto foi verificado em todos os exemplos usados durante o desenvolvimento deste trabalho.

## ABSTRACT

We establish variants of the heuristic algorithms of Edmonds and Johnson and of Frederickson for the chinese postman problem with respect to mixed graphs. These variants may be used to find routes for the distribution of goods and public services. We have selected the waste collection service department of the city of Aracaju, Sergipe, for test purposes.

The most important result of the work is that our variants are more suitable for applications using computers than the original algorithms of Edmonds and Johnson and of Frederickson. This, because computer time in application will be shorter and a worst case analysis shows that the estimate of Frederickson, which states that the cost of a route found by using his algorithm is less or equal to  $5/3$  - times the cost of an optimal route, is also valid for the variant given here.

It may be also expected that our variant, whenever applied, presents a result with a route cost always smaller or equal to the one obtained by applying the original algorithms. This could at least be verified with respect to all the examples used while developing this thesis.

## A G R A D E C I M E N T O S

Agradeço sinceramente a todos aqueles que direta ou indi  
retamente contribuíram para a realização deste trabalho e em particular:

Aos Professores Dr. Ulrich Seip e Dr. Peter Joachim  
Siegfried Brucker, pela orientação e pe  
las valiosas contribuições durante todo o  
desenvolvimento do trabalho.

Aos Professores Dr. Antonio Ildefonso de Albuquerque Melo  
e o Mestre Evilson de Araújo Barros pelas  
sugestões apresentadas na formulação fi  
nal do trabalho.

Aos Professores José Nogueira Fontes, Laonte Gama da Sil  
va, Jouberto Uchôa de Mendonça e José Au  
gusto Machado de Almeida, responsáveis pe  
la minha entrada no magistério.

Aos Amigos Janira Alves Lima, Alexandre Guilherme  
Aguiar Pietsch e Jorge Mota pela amizade  
e apoio demonstrados durante todo o decor  
rer do curso.

A toda equipe do Núcleo de Processamento de Dados pelo  
apoio na implementação dos algoritmos.

A Loja Maçônica Cotinguiba, principalmente aos irmãos Car  
los Satler, José Francisco da Rocha, Fran  
cisco Moura e Edvaldo Goes pela amizade e  
apoio nas horas difíceis.

## Í N D I C E

CAPÍTULO I	- INTRODUÇÃO .....	01
CAPÍTULO II	- CONCEITOS FUNDAMENTAIS SOBRE GRAFOS .....	03
	2.1 - Grafo não direcionado .....	03
	2.2 - Grafo direcionado .....	04
	2.3 - Grafo misto .....	04
	2.3.1 - Grau de um nó .....	04
	2.3.2 - Caminho, Ciclo, Rota e Cadeia ..	05
	2.3.3 - Grafo conexo .....	05
	2.3.4 - Grafo planar .....	06
	2.3.5 - Grafo valorado .....	06
	2.3.6 - Representação matricial .....	06
	2.4 - Formulação do problema .....	08
CAPÍTULO III	- ALGORITMOS AUXILIARES .....	09
	3.1 - Distância entre nós .....	09
	3.1.1 - Definições .....	09
	3.1.2 - Algoritmo de Floyd .....	10
	3.1.3 - Algoritmo de Dijkstra .....	11
	3.2 - Fluxo gerais com custos mínimos .....	11
	3.2.1 - Formulação do problema de fluxos como um problema linear .....	11
	3.2.2 - Estabelecimento do problema dual	13
	3.2.3 - Conexão entre o problema primal e o dual .....	14
	3.2.4 - Algoritmo de Ford-Fulkerson ....	19
	3.3 - Casamento num grafo completo .....	20



	3.3.1 - Formulação do problema .....	20
	3.3.2 - Algoritmo de Derigs .....	22
CAPÍTULO IV	- VARIAÇÕES EM GRAFOS MISTOS .....	24
	4.1 - Definições .....	24
	4.2 - Variação euleriana .....	25
	4.3 - Formulação do problema do carteiro chinês como uma variação .....	26
	4.4 - Algoritmo GP-variação minimal .....	26
	4.5 - Variação Grau de entrada igual a grau de saída .....	27
	4.5.1 - Definições .....	27
	4.5.2 - Algoritmo ES-variação minimal ..	29
	4.6 - Exemplos .....	30
CAPÍTULO V	- ALGORITMOS APROXIMATIVOS .....	35
	5.1 - Conceituação .....	35
	5.2 - Algoritmo MIXED 1A .....	36
	5.3 - Algoritmo MIXED 2A .....	39
	5.4 - Algoritmo MIXED A .....	42
	5.5 - Análise do pior caso do MIXED A .....	42
CAPÍTULO VI	- APLICAÇÕES .....	46
CAPÍTULO VII	- CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....	52
BIBLIOGRAFIA	.....	54

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

O problema do carteiro chinês foi proposto pela primeira vez por Mei-Ko [1], nos seguintes termos: todos os ramos num grafo conexo não direcionado deveriam estar incluídos no mínimo uma vez na rota de custo mínimo. Este problema foi resolvido de forma eficiente (polinomialmente) por Edmonds [2]. Depois, Edmonds e Johnson [3] mostraram que se num grafo direcionado existir uma rota, é também possível encontrar uma rota de custo mínimo, usando um algoritmo polinomial eficiente.

Apesar das soluções eficientes para o problema do carteiro chinês nos casos de grafos direcionados e não direcionados, este problema continua sem uma solução eficiente no caso geral de grafos mistos.

Papadimitriou [4] mostrou que o problema do carteiro chinês num grafo misto pertence a uma classe de problemas para os quais ainda não se sabe se existem ou não algoritmos polinomiais para resolvê-los. Mais precisamente, Papadimitriou mostrou que o problema do carteiro chinês num grafo misto é equivalente aos problemas do caixeiro viajante, da atribuição quadrática, da alocação, etc. A classe de equivalência definida por estes problemas é chamada a classe dos problemas NP-Complete.

Edmonds e Johnson apresentaram um algoritmo aproximativo para o problema do carteiro chinês num grafo misto, mas não

fizeram a análise do pior caso. Frederickson [5] fez esta análise e mostrou que a razão entre o custo de uma rota gerada pelo algoritmo e o custo de uma rota ótima é menor ou igual a 2. Frederickson [5] fez algumas modificações no algoritmo de Edmonds e Johnson e combinando os seus resultados com um outro algoritmo mostrou que a razão entre uma solução assim obtida e a solução ótima é menor ou igual a  $5/3$ .

O problema principal deste estudo é o estabelecimento de algoritmos modificados dos de Edmonds e Johnson e de Frederickson, para encontrar uma rota (com o menor custo possível) para a coleta de lixo urbano em cidades de médio e grande porte. Para o feito de teste dos algoritmos foram utilizados, neste trabalho, os dados referentes à cidade de Aracaju, Sergipe, tendo em vista a facilidade do autor, de acesso às informações. O problema é obviamente do tipo misto planar, onde os cruzamentos entre ruas representam os nós e os segmentos de ruas entre cruzamentos os arcos (respectivamente ramos) do grafo correspondente.

O algoritmo estabelecido neste trabalho pode ser aplicado no caso geral de grafos mistos e apresenta a mesma razão entre a solução encontrada e a solução ótima, como o algoritmo de Frederickson, isto é: no pior caso obtemos a razão  $5/3$ .

Vale salientar que a coleta de lixo em muitas das grandes cidades brasileiras não é feita de forma eficiente e barata. O sistema usado até agora é o seguinte: a área da cidade é dividida em um número de regiões de modo que cada uma dessas regiões pode ser servida por um veículo coletor e a rota para a coleta é feita empiricamente, no caso de Aracaju, fica à escolha do motorista. É claro que tal sistema só pode resultar em custos elevados.

Antes do estabelecimento dos algoritmos modificados nos capítulos 4 e 5, são definidos no capítulo 2 os elementos necessários para o desenvolvimento desses algoritmos, e no capítulo 3 são estudados e apresentados algoritmos auxiliares que são usados como subrotinas, na implementação e conseqüentemente na aplicação.

No capítulo 2, as definições foram dadas partindo do caso particular para o geral. Espera-se com isto tornar mais fácil a leitura e compreensão dos elementos ali definidos.

## CAPÍTULO II

### CONCEITOS FUNDAMENTAIS SOBRE GRAFOS

#### 2.1 - GRAFO NÃO DIRECIONADO

Define-se um grafo não direcionado  $G$  como sendo o par  $(N,E)$  com  $N = \{1, \dots, n\}$  e  $E$  um subconjunto dos pares não ordenados de elementos diferentes de  $N$ . Os elementos de  $N$  são chamados nós ou vértices e os elementos de  $E$  ramos. Usa-se a notação  $\{i,j\}$  para designar o par não ordenado formado pelos elementos  $i \in N$  e  $j \in N$ .

Um grafo não direcionado é chamado completo se cada par não orientado de nós diferentes de  $N$  representa um ramo.

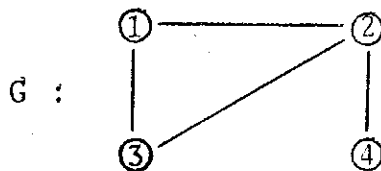
Para facilitar a noção de grafo será usado também a representação por diagramas como segue:

##### Exemplo 1

$$G = (N,E)$$

$$N = \{1,2,3,4\}$$

$$E = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{2,4\}\}$$



Espera-se que a correspondência entre o grafo  $G = (N,E)$  e a sua forma diagramática seja evidente. É claro que o grafo do exemplo não é completo.

## 2.2 - GRAFO DIRECIONADO

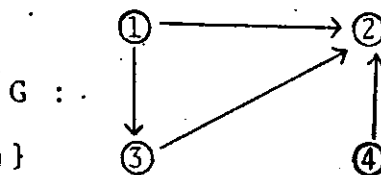
Um grafo direcionado  $G$  é um par  $(N,A)$  com  $N = \{1, \dots, n\}$  e  $A$  um subconjunto dos pares ordenados de elementos distintos de  $N$ . Os elementos de  $N$  são chamados vértices ou nós e os elementos de  $A$  arcos. Usa-se a notação  $(i,j)$  para designar o arco direcionado de  $i \in N$  para  $j \in N$  e diz-se que  $i$  é a sua origem ou seu nó inicial e  $j$  a sua extremidade ou seu nó terminal.

### Exemplo 2

$$G = (N,A)$$

$$N = \{1,2,3,4\}$$

$$A = \{(1,2), (1,3), (3,2), (4,2)\}$$



## 2.3 - GRAFO MISTO

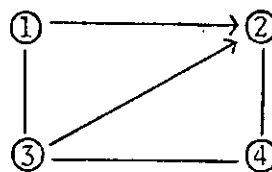
Um grafo misto  $G$  é uma tripla  $(N,E,A)$  com  $N = \{1, \dots, n\}$ ,  $E$  um subconjunto dos pares não ordenados dos elementos distintos de  $N$  e  $A$  um subconjunto dos pares ordenados dos elementos distintos de  $N$ . Como nos casos anteriores, os elementos de  $N$ ,  $E$  e  $A$  são chamados respectivamente vértices ou nós, ramos e arcos. Grafos não direcionados e grafos direcionados podem ser considerados como casos especiais de grafos mistos e por isso muitas vezes será abreviada a expressão grafo misto para a expressão grafo.

### Exemplo 3

$$G = (N,E,A)$$

$$E = \{\{1,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$$

$$A = \{(1,2), (3,2)\}$$



#### 2.3.1 - Grau de um nó

Diz-se que um ramo  $\{i,j\}$  ou um arco  $(i,j)$  é incidente com um nó  $k$ , se  $k = i$  ou  $k = j$ .

Considerando-se um grafo misto, observa-se que em cada nó  $i$  podem incidir tanto ramos como arcos. A soma entre o número de arcos e o número de ramos incidentes com o nó  $i$  é definida como o grau de  $i$  que será representado por grau  $(i)$ . O número de arcos cuja extremidade é o nó  $i$  é definido como o grau interior de

$i$  e será representado por  $\text{grau}^+(i)$ . O número de arcos cuja origem é o nó  $i$  é definido como o grau exterior de  $i$  e será representado por  $\text{grau}^-(i)$ .

Considerando-se o grafo do exemplo 3 tem-se:

$$\text{grau}(1) = 2 \qquad \text{grau}^+(1) = 0 \qquad \text{grau}^-(1) = 1 .$$

Como a soma de todos os graus interiores e a soma de todos os graus exteriores são iguais ao número de arcos, pode-se afirmar que num grafo misto  $G = (N, E, A)$  a soma dos graus interiores é igual à soma dos graus exteriores, isto é:

$$\sum_{i=1}^n \text{grau}^+(i) = \sum_{i=1}^n \text{grau}^-(i)$$

### 2.3.2 - Caminho, Ciclo, Rota e Cadeia

Num grafo misto  $G = (N, E, A)$  uma sequência finita do tipo  $S = e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{n-1}, e_n$  onde  $e_k = (i_k, i_{k+1})$  ou  $e_k = \{i_k, i_{k+1}\}$  é chamada um caminho do nó  $i_1$  para o nó  $i_n$ . Quando  $i_1 = i_{n+1}$ , este caminho recebe o nome de ciclo. Se um ciclo inclui todos os ramos e todos os arcos do grafo, diz-se que este ciclo é uma rota e escreve-se  $R = e_1, \dots, e_n$ . Interpretando uma rota de um grafo como um percurso sobre o grafo (no sentido evidente) pode-se falar de uma rota também como a rota clássica do carteiro chinês.

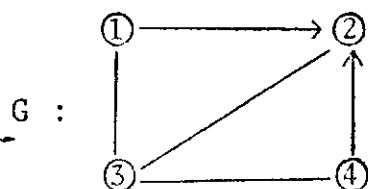
Dá-se o nome de cadeia, tanto a um caminho como a uma sequência finita  $S$  de arcos e/ou ramos onde um nó  $i$  incidente com arcos pode ter  $\text{grau}^+(i) = 0$  ou  $\text{grau}^-(i) = 0$ .

### 2.3.3 - Grafo Conexo

Um grafo misto  $G = (N, E, A)$  é dito conexo se existe uma rota em  $G$ .

#### Exemplo 4

No grafo



pode-se estabelecer:

Caminho	(1,2) , {2,3}
Ciclo	(1,2) , {2,3} , {3,1}
Rota	(1,2) , {2,3} , {3,4} , (4,2) , {2,3} , {3,1}
Cadeia	(1,2) , (4,2) , {3,4}

#### 2.3.4 - Grafo Planar

Um grafo misto é dito planar quando pode ser realizado no plano sem nenhuma intersecção, isto é, quando os seus ramos e arcos podem ser representados no plano por um conjunto de curvas que não se interceptam. A aplicação dos algoritmos que são apresentados nas secções seguintes, será feita num grafo planar.

#### 2.3.5 - Grafo Valorado

Define-se como grafo valorado  $G = (N, E, A, c)$ , um grafo  $G = (N, E, A)$  com uma função  $c: E \cup A \rightarrow R$ , isto é, a cada arco e a cada ramo está associado um número real. O valor  $c(e)$  associado a cada  $e \in E \cup A$  pode ser interpretado como a distância ou o custo de transporte entre os nós incidentes com  $e$  (onde no caso de um arco a direção precisa ser considerada).

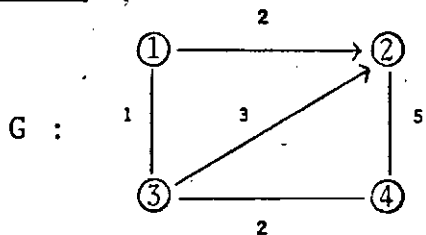
Neste trabalho, a cada ramo e a cada arco vai ser associado um número real não negativo, que representa a distância entre os nós incidentes com o ramo, respectivamente o arco.

Seja  $G = (N, E, A, c)$  um grafo valorado e seja  $X \subset E \cup A$  um subconjunto de ramos e arcos. Então definimos  $c(X) = \sum_{e \in X} c(e)$  como o custo associado ao subconjunto  $X$ . No caso de um caminho  $S = e_1, \dots, e_n$  definimos  $c(S) = \sum_{i=1}^n c(e_i)$  como o custo ou comprimento do caminho.

#### 2.3.6 - Representação Matricial

Um grafo valorado  $G = (N, E, A, c)$  com  $n$  nós pode ser representado por uma  $(n \times n)$ -matriz  $D = (d_{ij})$ , chamada matriz distância ou matriz custo, cujos elementos  $d_{ij}$  são definidos por:

$$d_{ij} = \begin{cases} c((i,j)) & \text{se } (i,j) \in A \text{ e } i \neq j \\ c(\{i,j\}) & \text{se } \{i,j\} \in E \text{ e } i \neq j \\ 0 & \text{se } i = j \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

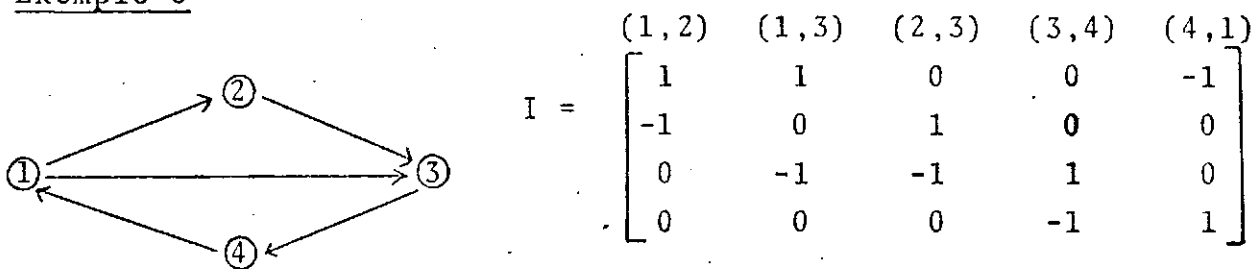
Exemplo 5

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ \infty & 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

É claro que se  $\{i,j\} \in E$  representa um ramo, então na matriz D tem-se  $d_{ij} = d_{ji}$ .

Dado um grafo direcionado  $G = (N,A)$  com  $p$  nós e  $q$  arcos, chama-se matriz incidência  $\tilde{a}$  ( $p \times q$ )-matriz  $I = (h_{ij})$ , cujos elementos  $h_{ij}$  são definidos por:

$$h_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se o arco } e_j \text{ tem o nó } i \text{ como nó terminal} \\ 1 & \text{se o arco } e_j \text{ tem o nó } i \text{ como nó inicial} \\ 0 & \text{no caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo 6

$$I = \begin{matrix} & (1,2) & (1,3) & (2,3) & (3,4) & (4,1) \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Na matriz incidência de um grafo direcionado pode-se verificar que:

- 1) - em qualquer coluna, existem apenas dois elementos não nulos que são +1 e -1;
- 2) - a soma dos elementos da linha  $i$  é a diferença entre o grau exterior e o grau interior do nó  $i$ , isto é,

$$\sum_j h_{ij} = \text{grau}^-(i) - \text{grau}^+(i)$$



#### 2.4 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema do carteiro chinês num grafo misto conexo e não negativamente valorado  $G = (N, E, A, c)$  pode ser formulado como: Encontre uma rota  $R$  de modo que  $c(R)$  seja mínimo.

## CAPÍTULO III

### ALGORITMOS AUXILIARES

#### 3.1 - DISTÂNCIA ENTRE NÓS

##### 3.1.1 - Definições

Seja  $D = (d_{ij})$  a matriz distância de um grafo  $G = (N, E, A, c)$  valorado não negativamente.

Define-se a distância do nó  $i$  para o nó  $j$  como o comprimento de um caminho de  $i$  para  $j$  de modo que este comprimento seja minimal (com respeito a todos os caminhos de  $i$  para  $j$ ). Se não existe um caminho de  $i$  para  $j$ , então a distância de  $i$  para  $j$  é definida como infinito.

Para calcular a distância entre os nós de um grafo, foram desenvolvidos diversos algoritmos. Neste trabalho, é usado o algoritmo de Floyd [6] quando se quer as distâncias entre todos os pares de nós, e o algoritmo de Dijkstra [7] quando se quer apenas a distância entre dois nós dados.

O algoritmo de Floyd se desenvolve considerando a princípio as distâncias como sendo os elementos da matriz distância e a seguir vai interpolando entre cada par de nós todos os outros nós, fazendo a substituição quando o caminho com a interpolação tem comprimento menor que o caminho anterior.

O algoritmo de Dijkstra é baseado na atribuição de

rótulos aos nós com respeito a um nó fixado  $n$ . Cada iteração constrói para cada nó  $\tilde{n}$  um caminho do nó  $n$  para este nó  $\tilde{n}$  e dá como rótulo de  $\tilde{n}$  o comprimento deste caminho (considera-se a não construção de um caminho como sendo a construção de um caminho de comprimento  $\infty$ ). Inicialmente o nó  $n$  tem o rótulo 0 (zero) e todos os outros nós têm rótulo  $\infty$ . Os rótulos dos nós diferentes de  $n$  são alterados em cada iteração de modo que os novos rótulos correspondem à construção de caminhos com comprimentos menores ou iguais aos já construídos e por conseguinte, os novos rótulos são menores ou iguais aos rótulos anteriores. Além disso, em cada iteração mais um rótulo de um dos nós  $\tilde{n}$  (bem definido) passa a ser a distância do nó  $n$  para o nó  $\tilde{n}$ .

### 3.1.2 - Algoritmo de Floyd

Entrada: a matriz distância de um grafo

$G = (N, E, A, c)$  de  $n$  nós.

Saída : a matriz das distâncias entre todos os pares de nós.

Passo 1: Faça  $k = 0$

Passo 2: Faça  $k = k + 1, i = 0$

Passo 3: Faça  $i = i + 1, j = 0$

Passo 4: Faça  $j = j + 1$

Passo 5: Se  $d_{ij} > d_{ik} + d_{kj}$  faça:

$$d_{ij} = d_{ik} + d_{kj}$$

Passo 6: Se  $j < n$  vá para passo 4

Passo 7: Se  $i < n$  vá para passo 3

Passo 8: Se  $k < n$  vá para passo 2

Passo 9: Pare

Na matriz resultante, o elemento  $d_{ij}$  representa a menor distância do nó  $i$  para o nó  $j$ .

Se além da distância mínima entre os pares de nós precisa-se dos caminhos que dão estas distâncias, basta introduzir no passo 1 a igualdade  $CA_{ij} = i$  para  $i, j = 1, \dots, n$  e introduzir no passo 5 a igualdade  $CA_{ij} = k$ . A igualdade  $CA_{ij} = k$  indica que o caminho  $(i, k), (k, j)$  tem comprimento menor que o caminho  $(i, j)$ .

O algoritmo de Floyd precisa de um tempo polinomial de ordem  $n^3$  [6].

### 3.1.3 - Algoritmo de Dijkstra

Entrada: a matriz distância de um grafo

$G = (N, E, A, c)$  de  $n$  nós.

Saída : a distância entre dois nós fixados

Passo 1: Sendo  $s$  e  $t$  os vértices entre os quais se quer calcular a distância, faça:

$L(s) = 0$  e considere  $L(s)$  como rótulo permanente;

$L(x) = \infty$  para todos os nós  $x \neq s$  e considere  $L(x)$  como temporário;

$p = s$

Passo 2: Faça  $T(p) = \{x \mid (p, x) \in E \cup A\}$

Passo 3: Para todos os nós  $x \in T(p)$  e que tenham rótulos temporários faça

$L(x) = \min\{L(x), L(p) + d_{px}\}$

Passo 4: Dentre todos os nós com rótulos temporários encontre  $\bar{x}$  de modo que  $L(\bar{x}) = \min\{L(x)\}$ .

Passo 5: Faça  $p = \bar{x}$  e considere  $L(\bar{x})$  como permanente

Passo 6: Se  $p = t$ ,  $L(p)$  é a distância entre  $s$  e  $t$ .

Caso contrário vá para passo 2.

Se além da distância do nó  $s$  para o nó  $t$  precisa-se do caminho que dá esta distância, basta introduzir no passo 1 a igualdade  $APONT(i) = 0$  para  $i = 1, \dots, n$  e introduzir no passo 4 a igualdade  $APCNT(i) = p$ . Para encontrar o caminho cujo comprimento é a distância mínima entre  $s$  e  $t$ , basta recuperar todos os  $APONT(i) \neq 0$ , para  $i = n, \dots, 1$ .

O algoritmo de Dijkstra precisa de tempo polinomial de ordem  $n^2$  [7].

## 3.2 - FLUXOS GERAIS COM CUSTOS MÍNIMOS

### 3.2.1 - Formulação do problema de fluxos como um problema linear

O algoritmo que será apresentado no item seguinte tem como finalidade principal o equilíbrio dos nós, isto é, transformar o grafo de modo que cada nó tenha o grau de entrada igual ao grau de saída. Para fazer este equilíbrio, será usado o problema de fluxos gerais com custos mínimos.

O problema de fluxos gerais pode ser interpretado como um problema de transportes.

Num grafo dirigido, pode-se descrever o problema como sendo a necessidade de transportar certas quantidades de determinados nós para outros também determinados nós.

Para o transporte de uma certa quantidade  $\alpha$  de um nó para outro nó, deve-se levar em consideração o custo unitário sobre cada arco e a capacidade máxima de cada arco. Descrito deste modo, o problema de fluxos gerais resulta num problema de otimização cujo objetivo é minimizar os custos totais do transporte, sob condição das capacidades dos arcos e das quantidades prescritas.

Seja  $D = (N, A, b, C, d)$  um grafo dirigido com  $p$  nós enumerados por  $i = 1, \dots, p$  e  $q$  arcos enumerados por  $a_j, j = 1, \dots, q$  com duas valorizações  $b, C: A \rightarrow R$  sobre os arcos e uma função de peso  $d: N \rightarrow R$  sobre os nós. Então serão introduzidos relativamente à enumeração dada aos nós e aos arcos os vetores de linha

$b = (b_1, \dots, b_q), C = (c_1, \dots, c_q)$  e  $d = (d_1, \dots, d_p)$  onde  $b_j = b(a_j), c_j = c(a_j)$  e  $d_i = d(v_i)$ . Usando agora a matriz incidência  $I$  pode-se escrever o problema de fluxo correspondente na forma

$IX^t = d^t$  com  $0 \leq X \leq b$ . Aqui, o índice  $t$  designa o vetor coluna transposto do vetor linha correspondente. Cada vetor  $X$  que satisfaz  $IX^t = d^t$  e  $0 \leq X \leq b$  é chamado solução admissível do problema.

Cada solução admissível  $X$  tem custo  $C(X) = \sum_{j=1}^q c_j x_j = CX^t$ .

Então uma solução admissível  $X$  é chamada ótima se  $C(X)$  é mínimo com respeito a todas as soluções admissíveis. Neste caso a solução  $X$  transporta as quantidades prescritas com custos  $\sum_{j=1}^q c_j x_j$  mínimos.

Com as considerações feitas no parágrafo anterior, o problema pode ser formulado matematicamente por:

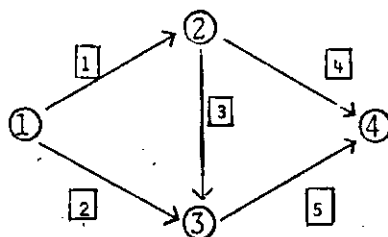
$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } CX^t && \text{relativamente a} \\ & IX^t = d^t \\ & 0 \leq X \leq b \end{aligned}$$

que é um problema linear de otimização.

Para melhor entendimento do exposto será formulado um problema como exemplo.

Exemplo:

Considerando que no grafo dirigido



onde os números associados aos círculos designam uma enumeração dos nós e os números associados aos quadrados designam uma enumeração dos arcos, os custos e as capacidades máximas são dadas pelos vetores  $C = (2, 4, 1, 6, 2)$  e  $b = (9, 6, 3, 6, 4)$ , relativamente à enumeração dada, e deseja-se transportar 10 unidades do nó 1, sendo 4 unidades para o nó 3 e 6 unidades para o nó 4.

No exemplo, a matriz incidência  $I$  e o vetor de pesos sobre os nós  $d$ , são dados por:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad d = (10, 0, -4, -6)$$

logo tem-se a seguinte formulação matemática para o problema de fluxo máximo com custo mínimo correspondente:

Minimizar  $(2x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 + 2x_5)$  relativamente

a

$$x_1 + x_2 = 10$$

$$-x_1 + x_3 + x_4 = 0$$

$$-x_2 - x_3 - x_5 = -4$$

$$-x_4 - x_5 = -6$$

$$0 \leq x_i \leq b_i$$

### 3.2.2 - Estabelecimento do Problema Dual

Para resolver tais problemas existem diversos algoritmos, porém, usa-se neste trabalho um algoritmo do tipo primal.

mal-dual [8] que parte da observação trivial que o transporte de nenhum bem é ótimo se não é preciso transportar bens. A quantidade de bens transportados é, em cada aplicação do algoritmo, aumentada sob condição da otimalidade, até finalmente ter alcançado uma solução admissível do problema; e esta solução é por conseguinte ótima, pois o algoritmo sempre passa de um transporte ótimo para outro transporte ótimo mais volumoso.

Como o método a ser usado é do tipo primal-dual, precisa-se também estabelecer o problema dual para o problema de fluxo com custo mínimo. Para melhor clareza são formulados a seguir ambos os problemas:

Problema Primal

$$\begin{aligned} & \text{minimize } CX^t \\ & \text{relat. } IX^t = d^t \text{ e } 0 \leq X \leq b \end{aligned}$$

Problema Dual

$$\begin{aligned} & \text{maximize } Vd^t - Ub^t \\ & \text{relat. } 0 \leq C + U - VI \text{ e } 0 \leq U \end{aligned}$$

### 3.2.3.- Conexão entre o Problema Primal e o Dual

Diz-se que  $X$  é solução admissível do problema primal se  $IX^t = d^t$  e  $0 \leq X \leq b$ , e que  $(U, V)$  é solução admissível do problema dual se  $0 \leq U + C - VI$  e  $0 \leq U$ . Portanto, pode-se estabelecer a conexão entre o problema primal e seu dual por:

#### Teorema 1

Se  $X$  e  $(U, V)$  são respectivamente soluções admissíveis do problema primal e do seu dual, então  $Vd^t - Ub^t \leq CX^t$ .

#### Demonstração

Sendo  $X$  solução admissível do primal tem-se que  $IX^t = d^t$ . Logo  $Vd^t - Ub^t = VIX^t - Ub^t$ .

Sendo  $(U, V)$  solução admissível do dual tem-se que  $VI \leq C + U$ . Logo  $VIX^t - Ub^t \leq (C+U)X^t - Ub^t = CX^t + U(X-b)^t$ .

Como  $X - b \leq 0$  e  $U \geq 0$  tem-se que  $CX^t + U(X-b)^t \leq CX^t$ .

Portanto  $Vd^t - Ub^t \leq CX^t$ .

#### Corolário

Se  $X$  e  $(U, V)$  são respectivamente soluções admissíveis do primal e do dual e se  $Vd^t - Ub^t = CX^t$  então  $X$  e  $(U, V)$  são soluções ótimas.

Teorema 2

Se  $X$  e  $(U, V)$  são soluções admissíveis do primal e do dual, então a igualdade  $CX^t = Vd^t - Ub^t$  é equivalente à validade simultânea das condições  $U(b-X)^t = 0$  e  $c_j + u_j = y_j$  se  $0 < x_j$ , onde  $y_j$  representa a  $j$ -ésima coordenada do vetor  $Y = VI$ .

Demonstração

Sendo  $X$  e  $(U, V)$  soluções admissíveis tem-se  $0 \leq U(b-X)^t = Ub^t - UX^t$ . Como  $Ub^t = Vd^t - CX^t$  obtém-se  $0 \leq U(b-X)^t = Ub^t - UX^t = Vd^t - CX^t - UX^t$ . Usando mais uma vez que  $X$  é solução admissível para o primal obtém-se  $0 \leq U(b-X)^t = Ub^t - UX^t = Vd^t - CX^t - UX^t = VIX^t - CX^t - UX^t = (VI-C-U)X^t$ . Usando mais uma vez que  $(U, V)$  é solução admissível do dual tem-se que  $VI - C - U \leq 0$ . Donde usando o fato que  $X \geq 0$  obtém-se  $(VI-C-U)X^t \leq 0$ . Portanto  $0 \leq U(b-X)^t = (VI-C-U)X^t \leq 0$  que implica  $(VI-C-U)X^t = U(b-X)^t = 0$ .

Como  $(VI-C-U)X^t = 0$ ,  $C + U - VI \geq 0$  e  $X \geq 0$ , então para  $x_j > 0$  segue que  $(c+u-v)_j = 0$ . Donde pode-se concluir que  $c_j + u_j = y_j$  para  $x_j > 0$ .

Sendo  $X$  e  $(U, V)$  soluções admissíveis tem-se que  $0 \leq X \leq b$  e  $C + U - VI \geq 0$  e por conseguinte  $(C+U-VI)X^t \geq 0$  com cada somando maior ou igual a 0. É evidente que para  $x_j = 0$  tem-se o lado esquerdo igual a 0, e, como por hipótese o lado esquerdo é zero para  $x_j > 0$ , então  $(C+U-VI)X^t = 0$ . Como  $U(b-X)^t = 0$  implica  $Ub^t = UX^t$  segue que  $0 = (C+U-VI)X^t = CX^t + UX^t - Vd^t = CX^t + Ub^t - Vd^t$ . Donde conclui-se que  $Vd^t - Ub^t = CX^t$ .

Teorema 3

Se  $X$  e  $(U, V)$  são soluções admissíveis do primal e do dual de modo que  $U(b-X)^t = 0$  e  $c_j + u_j = y_j$  para  $0 < x_j$ , onde  $y_j$  designa a  $j$ -ésima coordenada do vetor  $Y = VI$ , então:

- i)  $c_j - y_j \geq 0$  para  $x_j < b_j$
- ii)  $c_j - y_j \leq 0$  para  $0 < x_j$



Demonstração

- i) Seja  $x_j < b_j$ . Então  $b_j - x_j > 0$ , e como por hipótese  $U(b-X)^t = 0$ , obtêm-se  $u_j = 0$ . Como  $(U,V)$  é solução admissível temos  $0 \leq c_j + u_j - y_j$ , e como  $u_j = 0$  obtêm-se  $0 \leq c_j + 0 - y_j = c_j - y_j$ .
- ii) Para  $0 < x_j$  tem-se, por hipótese  $c_j - y_j = -u_j$  e, como  $(U,V)$  é solução admissível do dual, tem-se também por hipótese.  $u_j \geq 0$ . Logo  $c_j - y_j \leq 0$ .

Teorema 4

Dados  $I, b > 0, 0 \leq X \leq b$  e  $V$ , de modo que  $c_j - y_j \geq 0$  para  $x_j < b_j$  e  $c_j - y_j \leq 0$  para  $0 < x_j$ , então existe um  $U \geq 0$  de modo que:

- i)  $U(b-X)^t = 0$
- ii)  $c_j + u_j = y_j$  para  $0 < x_j$
- iii)  $0 \leq C + U - VI$

Demonstração

Definindo  $U$  por  $u_j = 0$  se  $x_j < b_j$  e  $u_j = y_j - c_j$  se  $x_j = b_j$ . Então tem-se  $U \geq 0$ , pois por hipótese  $u_j = y_j - c_j \geq 0$  para  $x_j = b_j$ .

- i) Com  $U$  definido como acima tem-se  $U(b-X)^t = 0$  por construção;
- ii) Se  $0 < x_j < b_j$  tem-se  $c_j - y_j \leq 0$  e  $c_j - y_j \geq 0$  por hipótese e  $u_j = 0$  por definição. Donde obtêm-se  $u_j = y_j - c_j$ . Se  $x_j = b_j$  tem-se  $u_j = y_j - c_j$  por definição. Por conseguinte obtêm-se  $y_j = c_j + u_j$  para  $0 < x_j$ .
- iii) Se  $0 < x_j$  tem-se de (ii) que  $c_j + u_j - y_j \geq 0$  e se  $x_j < b_j$  tem-se  $c_j - y_j \geq 0$  por hipótese e  $u_j = 0$  por definição.

Por conseguinte sempre vale que  $c_j + u_j - y_j \geq 0$ .

Donde conclui-se que  $0 \leq C + U - VI$ .

Corolário

Dados  $I, b > 0, 0 \leq X \leq b, V$  de modo que  $c_j - y_j \geq 0$  para  $x_j < b_j$  e  $c_j - y_j \leq 0$  para  $0 < x_j$ , então existe  $U \geq 0$  de modo que  $0 \leq C + U - VI$  e  $VI X^t - Ub^t = CX^t$ .

A demonstração desse corolário é trivial, pois basta usar o  $U$  construído no teorema 4 e a equivalência do teorema 2.

Corolário

Dados  $I, b > 0, 0 \leq X \leq b, V$  de modo que  $c_j - y_j \geq 0$  para  $x_j < b_j$  e  $c_j - y_j \leq 0$  para  $0 < x_j$ , então  $X$  é ótimo com respeito ao problema primal de minimizar  $CX^t$  relativamente a  $IX^t = d^t$  e  $0 \leq X \leq b$ .

O último corolário deixa claro que a condição  $IX^t = d^t$  não é necessariamente satisfeita pelo  $X$  das hipóteses dos dois últimos corolários. Para obter um  $X$  que também satisfaz  $IX^t = d^t$  constroem-se duas sequências  $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(n)} = X$  e  $V^{(0)}, V^{(1)}, \dots, V^{(n)} = V$  de modo que  $X^{(i)}$  e  $V^{(i)}$  sempre satisfazem as hipóteses dos referidos corolários e o último  $X^{(n)} = X$  também satisfaz a igualdade  $IX^t = d^t$ .

A formulação dada no teorema 4 tem a vantagem que os vetores  $U$  e  $d$  não aparecem explicitamente.

As condições que formam a hipótese do teorema 4 são chamadas condições da otimalidade.

Suposto que os vetores  $X = (x_1, \dots, x_q)$  e  $V = (v_1, \dots, v_p)$  são dados e que satisfazem as condições de otimalidade, isto é:

$$1) c_j - y_j \geq 0 \quad \text{se } x_j < b_j$$

$$2) c_j - y_j < 0 \quad \text{se } 0 < x_j$$

onde  $y_j$  é definido por  $y_j = v_{in(j)} - v_{ter(j)}$  com  $in(j)$  designando o nó inicial e  $ter(j)$  designando o nó terminal do arco  $j$ . Agora construindo o grafo dirigido  $D(X) = (N, A(X))$  com  $A(X) = A'(X) \cup A''(X)$  e  $A'(X) = \{j \in A / x_j < b_j\}$  e  $A''(X) = \{-j / j \in A \text{ e } 0 < x_j\}$ , pode-se valorar este dígrafo com custos não negativos da seguinte maneira: os arcos  $j$  têm custos  $c_j - y_j$  e os arcos  $-j$  têm os custos  $-(c_j - y_j)$ .

Neste grafo de aumento, para os arcos que tem direção "original" (os arcos de  $A'(X)$ ) a carga pode ser aumentada e para os arcos que tem direção "inversa à original" (os arcos de  $A''(X)$ ) a carga dos correspondentes arcos originais pode ser diminuída.

Com  $X$  dado pode-se calcular  $d - XI^t$  e dos teoremas sabe-se que  $X$  é admissível e ótimo sse  $d - XI^t = 0$ . No caso contrário, define-se o nó  $i$  como sendo do tipo 1 ou do tipo 2 conforme o valor da  $i$ -ésima coordenada de  $d - XI^t$  seja positivo ou negativo. Quando este valor é zero, diz-se que o nó  $i$  é equilibrado.

Definindo  $V^+(X) = \{i / i \text{ é do tipo 1}\}$  e  $V^-(X) = \{i / i \text{ é do tipo 2}\}$  verifica-se que  $V^+(X) = \emptyset$  sse  $V^-(X) = \emptyset$  sse  $d - XI^t = 0$  sse  $X$  é solução admissível e por conseguinte ótimo, do problema. Portanto se foi obtida uma solução que não é admissível mas que satisfaz as condições de otimalidade, tem-se que  $V^+(X) \neq \emptyset$ . Neste caso escolhe-se um nó  $i_0 \in V^+(X)$  e constrói-se no grafo valorado  $D(X)$  o vetor das distâncias  $\hat{V} = (\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_p)$  saindo do nó  $i_0$  para todos os outros nós. Como também  $V^-(X) \neq \emptyset$ , escolhe-se um nó  $i_1 \in V^-(X)$  e determina-se um caminho elementar de comprimento mínimo de  $i_0$  para  $i_1$ , no grafo valorado  $D(X)$ .

Sobre a cadeia correspondente a este caminho em  $D(X)$ , pode-se agora aumentar a carga total de transporte, o que resulta num novo vetor  $X$  que, relativamente ao novo vetor  $V$  (calculado por  $V - \hat{V}$ ) também satisfaz às condições de otimalidade.

Este processo é repetido até que uma solução ótima para o problema é encontrada (caso exista uma solução).

Finalizando as explicações sobre o assunto, verifica-se que faltam valores iniciais para os vetores  $X$  e  $V$  que satisfaçam às condições de otimalidade. Mas, como  $X = 0$  e  $V = 0$  satisfazem às condições de otimalidade, inicia-se o processo com estes vetores.

## 3.2.4 - Algoritmo de Ford-Fulkerson

Passo 1: Defina  $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \text{in}(j) = i \\ -1 & \text{se } \text{ter}(j) = i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Faça  $-A = \{-1, \dots, -q\}$

$x_j = 0$  para  $j = 1, \dots, q$ ;  $v_i = 0$  para  $i = 1, \dots, p$

$V^+ = \{i / d_i > 0\}$  e  $V^- = \{i / d_i < 0\}$

AUX = 0

Defina  $\text{in}: -A \rightarrow N$  por  $\text{in}(-j) = \text{ter}(j)$  e

$\text{ter}: -A \rightarrow N$  por  $\text{ter}(-j) = \text{in}(j)$

Passo 2: Faça:  $\bar{c}_j = c_j + v_{\text{ter}(j)} - v_{\text{in}(j)}$  para  $j \in A$

$A' = \{j \in A / x_j < b_j\}$

$A'' = \{-j \in -A / 0 < x_j\}$

$\bar{c}_j = \bar{c}_j$  para  $j \in A'$

$\bar{c}_{-j} = -\bar{c}_j$  para  $-j \in A''$

Passo 3: Se  $V^+ = \emptyset$  (pare. X é ótimo)

Se  $V^+ \neq \emptyset$  escolha  $i_0 \in V^+$

Passo 4: Aplique o algoritmo das distâncias mínimas ao dí grafo  $\bar{D} = (N, A' \cup A'', \bar{c}: A' \cup A'' \rightarrow R)$  e determine o vetor  $\hat{V} = (\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_p)$ , onde  $\hat{v}_i$  designa a dis tância mínima de  $i_0$  para  $i$ , sendo  $\hat{v}_i = \infty$  quando não existe um caminho de  $i_0$  para  $i$ .

Passo 5: Faça:  $\bar{N} = \{i / \hat{v}_i < \infty\}$ ;  $\bar{v} = \max \{\hat{v}_i / i \in \bar{N}\}$

$$v_i = \begin{cases} v_i - \hat{v}_i & \text{para } i \in \bar{N} \\ v_i - \bar{v} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Passo 6: Se  $V^- \cap \bar{N} = \emptyset$  (pare (o problema não tem solução admissível)).

Se  $V^- \cap \bar{N} \neq \emptyset$  escolha  $i_1 \in V^- \cap \bar{N}$  e escolha um caminho mínimo W de  $i_0$  para  $i_1$  em  $\bar{D}$ .

Se AUX = 0 faça  $m = d_{i_0}$  e  $n = d_{i_1}$

Passo 7: Faça:  $\epsilon_j = b_j - x_j$  para  $j \in W$

$$\epsilon_j = x_j \text{ para } -j \in W$$

$$\epsilon = \min \{ \epsilon_j / j \in W \text{ ou } -j \in W, m, n \}$$

Passo 8: Defina  $Z: A \rightarrow R$  por

$$x_j = \begin{cases} x_j + \epsilon & \text{se } j \in W \\ x_j - \epsilon & \text{se } -j \in W \\ x_j & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Passo 9: Faça:  $m = d_{i_0} - \sum_{j=1}^p a_{i_0 j} x_j$

$$n = -d_{i_1} + \sum_{j=1}^q a_{i_1 j} x_j$$

Passo 10: Se  $m = 0$  faça  $V^+ = V^+ \setminus \{i_0\}$

Se  $n = 0$  faça  $V^- = V^- \setminus \{i_1\}$

AUX = 1

Vá para passo 2

### 3.3 - CASAMENTO NUM GRAFO COMPLETO

#### 3.3.1 - Formulação do Problema

Uma das partes principais deste trabalho é a transformação de um grafo misto, de modo que todos os nós tenham grau par. Esta transformação fornece um novo grafo misto com os mesmos nós, porém com mais ramos ou arcos, sob condição que só um número minimal de novos ramos ou arcos é adicionado. Para fazer esta transformação, deve-se em primeiro lugar identificar todos os nós de grau ímpar e em seguida combinar estes nós entre si de modo que a soma dos pesos dos arcos e ramos repetidos seja mínima.

Num grafo não direcionado, este problema é conhecido como o problema da soma do casamento e pode ser formulado do seguinte modo:

Seja  $G = (N, E)$  um grafo completo com um conjunto  $N$  de nós e um conjunto  $E$  de ramos. Um subconjunto  $M \subset E$  é chamado um casamento (matching) se não existem dois ramos de  $M$  que são incidentes com um mesmo nó. O conjunto de todos os casamentos de  $G$  será denotado por  $\bar{M}$ . Quando um casamento  $M$  contém o maior número pos

sível de ramos, diz-se que  $M$  é um casamento de cardinalidade máxima (m.c. casamento). Um m.c-casamento é dito perfeito se cada nó é incidente com um ramo do casamento. O conjunto de todos os casamentos perfeitos será aqui denotado por  $\bar{M}_p$ .

Se o grafo  $G = (N, E, c: E \rightarrow R)$  é valorado não negativamente e se  $c_{ij}$  representa o custo sobre o ramo  $\{i, j\}$ , pode-se associar a cada  $M \in \bar{M}$  o custo,

$$c(M) = \sum_{\{i, j\} \in M} c_{ij}$$

Agora, seja  $C = e_1, \dots, e_n$  onde  $e_k = \{i_k, i_{k+1}\}$ , um caminho num grafo  $G = (N, E)$ . Diz-se que o caminho é elementar se todos os nós  $i_1, \dots, i_{n+1}$  são dois a dois distintos. Então observa-se que um caminho desse tipo fornece dois casamentos de nós de  $G$  como segue:

- a) todos os ramos  $e_j$  do caminho  $C$  com  $j$  par
- b) todos os ramos  $e_j$  do caminho  $C$  com  $j$  ímpar.

Esta observação é usada agora para aumentar um casamento  $M$  dado, para um casamento maximal como segue: um caminho elementar  $C$  é dito alternativo se os seus ramos estão alternativamente em  $M$ . Se além disso  $C$  junta dois nós não incidentes com os ramos de  $M$ , diz-se que  $C$  é um caminho alternativo aumentando. É claro que um caminho alternativo aumentando sempre tem um número ímpar de ramos e se  $C = e_1, \dots, e_{2n+1}$ , então todos os ramos  $e_j$  com  $j$  par pertencem a  $M$  e todos os ramos  $e_j$  com  $j$  ímpar não pertencem a  $M$ . Mas os ramos  $e_j$  com  $j$  ímpar juntamente com todos os ramos de  $M$  que não pertencem a  $C$  formam um casamento que tem um número de ramos igual ao número de ramos de  $M$  mais 1. O novo casamento obtido desta maneira será denotado por  $M_c$  e a sua cardinalidade por  $|M_c|$ , que conforme foi observado é igual a  $|M| + 1$ .

Denotando por  $\mathcal{L}(M)$  o conjunto de todos os caminhos alternativos aumentando com respeito ao casamento  $M$ , associe-se, no caso de um grafo valorado o custo  $c(M_c)$  para o casamento correspondente  $M_c$  com  $c(M_c)$  definido por

$$c(M_c) = \sum_{\{i, j\} \in M \setminus C} c_{ij} + \sum_{\{i, j\} \in C \setminus M} c_{ij}$$

Portanto, o seguinte algoritmo tem como objetivo a construção de um casamento maximal com custo mínimo.

### 3.3.2 - Algoritmo de Derigs

Passo 1: Faça  $M = \emptyset$

Passo 2: Se  $M \in \bar{M}_p$  : pare,  $M$  é otimal

Passo 3: Determine  $\bar{C}$  e  $\mathcal{L}(M)$  de modo que para  $M_{\bar{C}}$   
 $c(M_{\bar{C}}) \leq c(M_C)$  para todo  $C \in \mathcal{L}(M)$

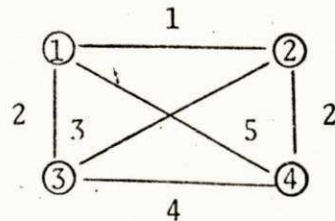
Passo 4: Faça  $M = M_{\bar{C}}$   
 vá para passo 2

Na implementação desse algoritmo, o caminho  $\bar{C}$  que implica o menor custo do casamento correspondente  $M_{\bar{C}}$  é calculado adaptando um procedimento de classificação e contração, desenvolvido por Edmonds e Johnson [3]; A validade deste procedimento é mostrada por Derigs [9].

Para melhor esclarecimento de como procede o algoritmo do casamento, é estabelecido o seguinte exemplo.

#### Exemplo

Considerando o grafo  $G$  :

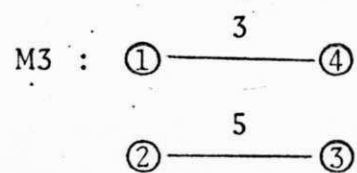
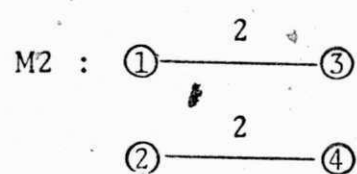
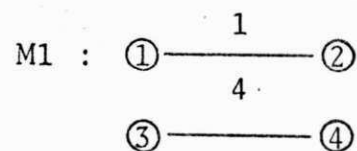
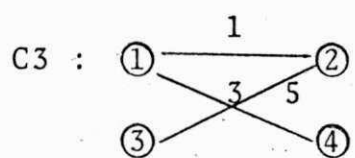
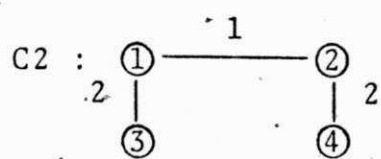
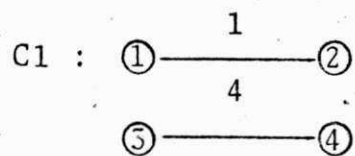


pode-se estabelecer o casamento  $M = \{1,2\}$  com  $c(M) = 1$ . É claro que o caminho  $C = \{3,1\}$ ,  $\{1,2\}$ ,  $\{2,4\}$  é um caminho aumentando, pois os seus ramos estão alternativamente em  $M$  e além disso tem dois nós que não são incidentes com os ramos de  $M$ .

Como o caminho aumentando construído é minimal com relação à valoração do grafo dado, pode-se formar o novo casamento  $M_C = \{1,3\}$ ,  $\{2,4\}$ . É fácil verificar que este novo casamento é maximal, e que tem custo  $c(M_C) = 4$  minimal, conforme é mostrado pelos grafos abaixo:

Casamento M : ① —<sup>1</sup>— ②

Caminhos alternativos aumentando e respectivos casamentos





## CAPÍTULO IV

### VARIAÇÕES EM GRAFOS MISTOS

#### 4.1 - DEFINIÇÕES

Neste capítulo serão introduzidos alguns novos conceitos que terão grande utilidade no estudo dos problemas do carteiro chinês. Porém, antes da introdução destes conceitos, será feita uma generalização do conceito de grafo misto, passando a considerar grafos que admitem ramos e arcos paralelos. Nesta generalização usa-se a notação  $e$  para indicar tanto um arco como um ramo.

Um grafo misto (generalizado)  $G = (N, E, A, \alpha, \beta)$  consiste de um conjunto finito de nós  $N = \{1, \dots, n\}$ , um conjunto finito de ramos  $E$ , um conjunto finito de arcos  $A$ , sendo  $E$  e  $A$  disjuntos, e duas funções  $\alpha, \beta : E \cup A \rightarrow N$ . Para cada  $e \in E$ ,  $\alpha(e)$  e  $\beta(e)$  podem ser interpretados como os nós incidentes com o ramo  $e$  e para cada  $e \in A$ ,  $\alpha(e)$  designa o nó inicial e  $\beta(e)$  o nó terminal do arco  $e$ .

Um ramo  $e$  é dito paralelo a  $e' \in E \cup A$  se  $\{\alpha(e), \beta(e)\} = \{\alpha(e'), \beta(e')\}$ . Dois arcos  $e$  e  $e'$  são ditos paralelos se  $\alpha(e) = \alpha(e')$  e  $\beta(e) = \beta(e')$ . Uma rota  $R = e_1, \dots, e_n$  é dita euleriana se cada  $e \in E \cup A$  aparece em  $R$  exatamente uma vez. Se num grafo misto  $G$  existe uma rota euleriana diz-se que  $G$  é um grafo misto euleriano.

Diz-se que um grafo misto  $G' = (N, E', A', \alpha', \beta')$  é uma variação do grafo misto  $G = (N, E, A, \alpha, \beta)$  se  $G'$  é construído pela

transformação de alguns ramos em arcos e/ou pela repetição de ramos e/ou arcos (incluindo as repetições dos novos arcos criados). Se o grafo  $G$  for valorado por  $c : E \cup A \rightarrow R$ ,  $G'$  tem a valorização correspondente  $c : (E' \cup A') \rightarrow R$ .

As demais definições dadas anteriormente para grafos mistos, podem ser adaptadas para o caso de grafos mistos generalizados de forma evidente.

#### 4.2 - VARIAÇÃO EULERIANA

Uma variação  $G'$  de um grafo misto  $G$  é chamada eul<sup>er</sup>iana se existe uma rota eul<sup>er</sup>iana em  $G'$ . É óbvio que o custo desta rota eul<sup>er</sup>iana é igual ao custo da variação. Portanto, fica evidente a validade do seguinte teorema:

##### Teorema 1

Seja  $G = (N, E, A, \alpha, \beta)$  um grafo misto (generalizado). Então são equivalentes:

- i)  $G$  é conexo
- ii) existe uma variação eul<sup>er</sup>iana de  $G$

É também evidente que uma variação eul<sup>er</sup>iana  $G' = (N, E', A', \alpha', \beta')$  de um grafo misto  $G = (N, E, A, \alpha, \beta)$  tem grau<sup>+</sup>( $i$ ) par para todo  $i \in N$ . Como pode-se construir num grafo misto eul<sup>er</sup>iano uma rota eul<sup>er</sup>iana, segue trivialmente que uma variação eul<sup>er</sup>iana sempre pode ser transformada (só transformando ramos em arcos) numa outra variação que também satisfaz grau<sup>+</sup>( $i$ ) = grau<sup>-</sup>( $i$ ) para todo  $i \in N$ . Como um grafo misto que satisfaz grau( $i$ ) par para todo  $i \in N$  e grau<sup>+</sup>( $i$ ) = grau<sup>-</sup>( $i$ ) para todo  $i \in N$  é obviamente conexo, é evidente a validade do seguinte teorema:

##### Teorema 2

Para um grafo misto  $G = (N, E, A, \alpha, \beta)$  são equivalentes:

- i)  $G$  é conexo
- ii) existe uma variação eul<sup>er</sup>iana de  $G$
- iii) existe uma variação  $G' = (N, E', A', \alpha', \beta')$  de  $G$  de modo que
  - 1) grau( $i$ ) é par para todo  $i \in N$
  - 2) grau<sup>+</sup>( $i$ ) = grau<sup>-</sup>( $i$ ) para todo  $i \in N$ .

#### 4.3 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DO CARTEIRO CHINÊS COMO UMA VARIAÇÃO

O teorema 2 é a base fundamental dos algoritmos heurísticos de Edmonds e Johnson e de Frederickson, para resolver o problema do Carteiro Chinês num grafo misto. Como os algoritmos que serão apresentados neste trabalho são variantes destes, é claro, que este teorema também será a base fundamental destas variantes. Portanto, pode-se afirmar que encontrar uma rota com custo mínimo para o Carteiro Chinês num grafo misto conexo é equivalente à construção de uma variação do tipo (iii) do teorema, com custo mínimo.

Uma variação de um grafo misto conexo que satisfaz  $\text{grau}(i)$  é par para todo  $i \in N$ , será denominada uma GP-variação. Uma variação que satisfaz  $\text{grau}^+(i) = \text{grau}^-(i)$  para todo  $i \in N$ , será denominada uma ES-variação (Entrada=Saída-variação). Então, o problema de encontrar uma rota num grafo misto conexo pode ser resolvido pelos seguintes métodos:

Método 1 : primeiro construa uma GP-variação e a seguir uma ES-variação;

Método 2 : primeiro construa uma ES-variação e a seguir uma GP-variação.

Em ambos os casos resulta um grafo misto que satisfaz (iii) do teorema e a rota correspondente pode ser simplesmente construída.

No caso de um grafo misto valorado, os processos de GP-e de ES-variações podem ser efetuados sob consideração de minimizar o custo correspondente.

Os algoritmos correspondentes de GP-e de ES-variações minimais formam a base dos algoritmos heurísticos que são usados para encontrar uma rota para o Carteiro Chinês no caso de um grafo misto conexo não negativamente valorado, com um custo que é menor ou igual a  $5/3$  do custo de uma rota ótima.

#### 4.4 - ALGORITMO GP-VARIAÇÃO MINIMAL

Entrada: um grafo misto conexo generalizado

Saída : um grafo misto conexo generalizado com  $\text{grau}(i)$  par para todo nó  $i \in N$ .

Passo 1: Identifique o conjunto  $\bar{N} \subset N$  de nós de grau ímpar em  $G$

Passo 2: Para todo  $i, j \in \bar{N}$  encontre a cadeia minimal que liga  $i$  e  $j$  e considere a distância entre  $i$  e  $j$  como sendo o comprimento desta cadeia.

Passo 3: Usando como entrada o conjunto de nós  $\bar{N}$  e as distâncias encontradas no passo 2, chame o algoritmo do casamento.

Passo 4: Duplique em  $G$  os ramos e arcos, de acordo com a saída do passo 3 (pare).

Após a aplicação deste algoritmo o grau de cada vértice  $i \in \bar{N}$  é incrementado por um número ímpar, e, por conseguinte todos os nós do grafo resultante  $G'$  têm grau par. Por outro lado, como a GP-variação se baseia num casamento máximo com custo mínimo, pode-se concluir que esta GP-variação é mínima.

Para grafos mistos onde  $\text{grau}^+(i) = \text{grau}^-(i)$  para todo  $i \in N$  é possível aplicar a GP-variação minimal com respeito ao grafo parcial de  $G$  consistindo apenas dos ramos de  $G$ . Após uma aplicação da GP-variação minimal desse tipo obtém-se uma GP-variação de  $G$  que não é necessariamente minimal, mas que mantém a igualdade entre os graus de entrada e saída dos nós.

#### 4.5 - VARIACÃO GRAU DE ENTRADA IGUAL A GRAU DE SAÍDA

##### 4.5.1 - Definições

Antes de apresentar o algoritmo para obter uma ES-variação minimal serão definidos alguns conceitos necessários para o entendimento do mesmo.

Para cada nó  $i \in N$  de um grafo misto define-se o déficit de  $i$  por  $\text{def}(i) = \text{grau}^+(i) - \text{grau}^-(i)$  e, denota-se por  $\text{SAI}(i)$  o conjunto de todos os arcos  $e$  tal que  $\beta(e) = i$  e por  $\text{ENT}(i)$  o conjunto de todos os arcos  $e$  tal que  $\alpha(e) = i$ .

Seja agora  $G = (N, E, A, c: E \cup A \rightarrow R)$  um grafo misto (generalizado) não negativamente valorado. Além disso seja  $u: A \rightarrow R$  definida por  $u(e) = \infty$  para todo  $e \in A$  e seja  $D = A \cup B$  um novo conjunto de arcos, onde  $A$  é o conjunto dos arcos de  $G$  e  $B$  é definido como segue: para cada ramo  $e = \{i, j\} \in E$  os pares ordenados correspondentes  $(i, j)$  e  $(j, i)$  pertencem a  $B$  e adicionalmente um destes pares ordenados, denotado por  $e'$ , também pertence a  $B$  como arco paralelo. Então, cada ramo  $e = \{i, j\} \in E$  corresponde exatamente a três arcos em  $B$  que vão ser denotados por  $\vec{e}$ ,  $\overleftarrow{e}$ , e  $e'$ .

É claro que o conjunto de nós  $N$  de  $G$  e o conjunto de arcos  $D$  formam um grafo direcionado e generalizado que será denotado por  $\bar{G} = (N, D)$ . A este grafo  $\bar{G}$  associa-se duas valorizações  $\bar{c}, \bar{u}: D \rightarrow R$  definidas por:

$$i) \bar{c} : D \rightarrow R$$

$$\bar{c}(e) = c(e) \quad \text{se } e \in A$$

$$\bar{c}(\vec{e}) = c(e) = \bar{c}(\overleftarrow{e}) \quad \text{e } \bar{c}(e') = 0 \quad \text{se } e \in E$$

$$ii) \bar{u} : D \rightarrow R$$

$$\bar{u}(e) = u(e) \quad \text{se } e \in A$$

$$\bar{u}(\vec{e}) = \infty = \bar{u}(\overleftarrow{e}) \quad \text{e } \bar{u}(e') = 2 \quad \text{se } e \in E$$

Será usada também a notação  $\bar{G}$  para indicar o grafo (generalizado) direcionado e bivalorado  $\bar{G} = (N, D, \bar{c}, \bar{u})$ . Com respeito a este grafo bivalorado  $\bar{G}$  pode-se associar o seguinte problema de fluxo:

$$\text{Min } \sum_{e \in D} c(e)X(e) \quad \text{relativamente a}$$

$$\sum_{e \in \text{SAI}(i)} X(e) - \sum_{e \in \text{ENT}(i)} X(e) = \text{def}(i) \quad \text{para todo } i \in N \quad (\text{em } \bar{G})$$

$$X(e) \in N.$$

A uma solução ótima deste problema de fluxo associa-se uma ES-variação do grafo valorado original  $G = (N, E, A, c: E \cup A \rightarrow R)$ , do seguinte modo:

- i) se  $e \in A$ , então substitui-se o arco  $e$  por  $X(e) + 1$  arcos paralelos ao arco  $e$ ;
- ii) se  $e \in E$ , então:
  - 1) Se  $X(e') = 0$ , o ramo  $e$  é substituído pelo arco ( $\vec{e}$  ou  $\overleftarrow{e}$ ) que tem direção oposta à direção de  $e'$ ;
  - 2) Se  $X(e') = 1$ , o ramo  $e$  é mantido;
  - 3) Se  $X(e') = 2$ , o ramo  $e$  é substituído pelo arco ( $\vec{e}$  ou  $\overleftarrow{e}$ ) que tem mesma direção de  $e'$ ;
  - 4) adicione  $X(\vec{e})$  cópias paralelas a  $\vec{e}$ ;
  - 5) adicione  $X(\overleftarrow{e})$  cópias paralelas a  $\overleftarrow{e}$ .

Pode ser mostrado que as soluções ótimas do problema de fluxo em  $\bar{G}$ , descrito acima, definem exatamente as ES-variações ótimas (minimais) para o grafo original  $G$ .

## 4.5.2 - Algoritmo ES-variação Minimal

Entrada: um grafo misto conexo generalizado

Saída : um grafo misto conexo generalizado com  
 $\text{grau}^+(i) = \text{grau}^-(i)$  para todo nó  $i$ .

Passo 1: Associe a cada arco  $e \in A$  a capacidade  $u(e) = \infty$  e faça o custo  $c(e)$  igual ao custo original.

Passo 2: Substitua cada ramo  $e = \{i, j\} \in E$  por um arco  $\vec{e}$  de direção arbitrária (sugestão: faça  $\vec{e} = (i, j)$  para  $i < j$ ).

Passo 3: Calcule o déficit de cada vértice.

Passo 4: Se  $\text{def}(i) = 0$  para todo  $i \in N$ , pare,  $\text{grau}^+(i) = \text{grau}^-(i)$  para todo  $i \in N$ .

Passo 5: Para cada arco  $\vec{e} = (i, j)$  criado no passo 2, construa dois novos arcos  $\overleftarrow{e} = (j, i)$  e  $e' = (j, i)$ .

Faça:

$$\begin{aligned} c(\vec{e}) &= c(e) = c(\overleftarrow{e}), \quad c(e') = 0 \\ u(\vec{e}) &= \infty = u(\overleftarrow{e}) \quad \text{e} \quad u(e') = 2 \end{aligned}$$

Passo 6: Crie um nó fonte  $F$  e um nó sumidouro  $S$ . Crie arcos do nó fonte para os nós  $i \in N$  que têm  $\text{def}(i) > 0$  e faça  $c(F, i) = 0$ ,  $u(F, i) = \text{def}(i)$  e  $D1 = \sum \text{def}(i)$ . Crie arcos dos nós  $i \in N$  que têm  $\text{def}(i) < 0$  para o nó sumidouro e faça  $c(i, S) = 0$  e  $u(i, S) = -\text{def}(i)$ .

Passo 7: Aplique o algoritmo do fluxo para transportar  $D1$  unidades do nó  $F$  para o nó  $S$ .

Passo 8: Substitua cada arco  $e \in A$  por  $X(e) + 1$  arcos paralelos a  $e$ .

Passo 9: Para cada ramo  $e \in E$  faça:

Se  $X(e') = 0$  substitua  $e$  por um arco paralelo a  $\vec{e}$ ;

Se  $X(e') = 1$  mantenha o ramo  $e$ ;

Se  $X(e') = 2$  substitua  $e$  por um arco paralelo a  $\overleftarrow{e}$ .

Passo 10: Adicione  $X(\vec{e})$  cópias paralelas a  $\vec{e}$  e  $X(\overleftarrow{e})$  cópias paralelas a  $\overleftarrow{e}$ .

Após a aplicação deste algoritmo todos os nós do grafo resultante  $\bar{G}$  têm os graus de entrada iguais aos correspondentes graus de saída. Por outro lado, como a ES-variação se baseia num problema de fluxo máximo com custo mínimo, pode-se concluir que esta ES-variação é mínima.

(\*) -  $D1$  é calculado no passo 6 apenas para os  $\text{def}(i) > 0$ .

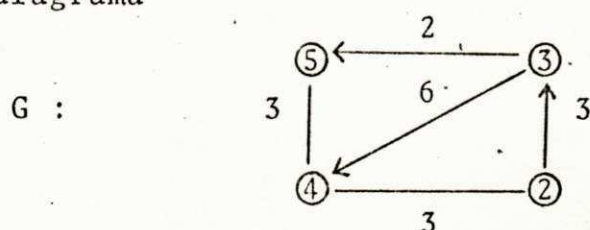
Para grafos mistos onde  $\text{grau}(i)$  é par para todo  $i \in N$ , a ES-variação produz um grafo que mantém par os graus, de todos os nós  $i \in N$ .

A seguir dá-se três exemplos para esclarecer o funcionamento dos algoritmos GP-e ES-variação.

#### 4.6 - EXEMPLOS

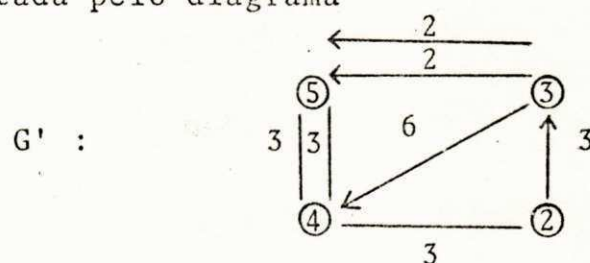
##### Exemplo 1

Dado o grafo valorado com custo 17, representado pelo diagrama



a) Construção da GP-variação minimal correspondente:

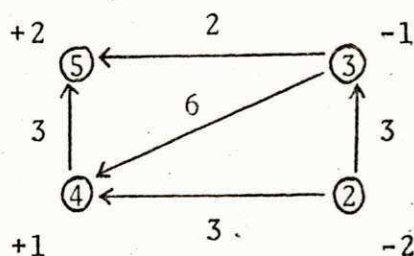
No grafo dado G, os nós 3 e 4 têm graus ímpares. Portanto, para construir uma GP-variação minimal de G devemos encontrar uma cadeia de custo mínimo entre os nós 3 e 4. Esta cadeia é  $(3,5), \{5,4\}$ , com custo 5. Logo, a GP-variação minimal  $G'$  é representada pelo diagrama



e tem custo 22.

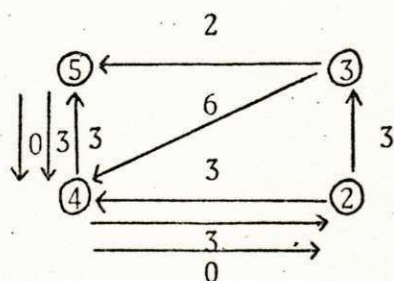
b) Construção da ES-variação minimal correspondente:

No grafo dado G, existem dois ramos  $\{2,4\}$  e  $\{4,5\}$ . Em primeiro lugar orienta-se estes ramos arbitrariamente. Orientando do nó menor para o maior obtém-se o grafo

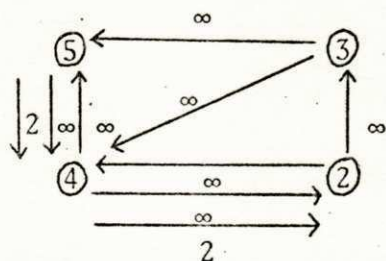


onde os números associados aos nós designam os déficits desses nós.

Para aplicar o algoritmo do fluxo, são acrescentados os arcos  $\vec{e}$  e  $\vec{e}'$ , paralelos e com direção inversa à cada  $\vec{e}$  obtido pela orientação de um ramo. Como  $\vec{e}'$  tem custo 0 e  $\vec{e}$  tem custo  $\underline{i}$  igual ao custo de  $e$ , obtém-se o seguinte grafo valorado



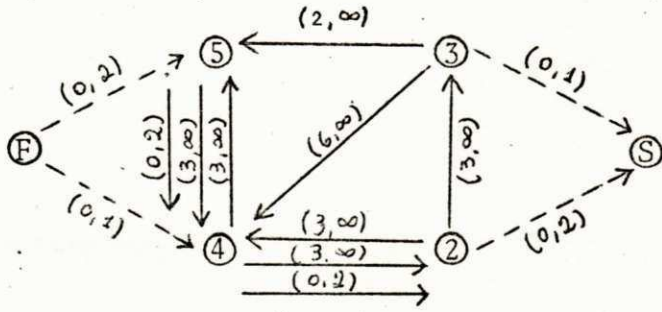
Este grafo obtém agora uma segunda valorização correspondente à função  $u : D = A \cup B \rightarrow R$ , como segue:



Interpretando a primeira valorização como custo, a segunda como capacidade maximal e o déficit associado com cada nó como peso do nó, precisa-se agora resolver o problema de fluxo com custo mínimo de quantidades correspondentes aos pesos dos nós. Isto é: precisa-se transportar com custo mínimo, 1 unidade do nó 4 e 2 unidades do nó 5 para os nós 2 e 3, de modo que 2 unidades cheguem no nó 2 e 1 unidade no nó 3.

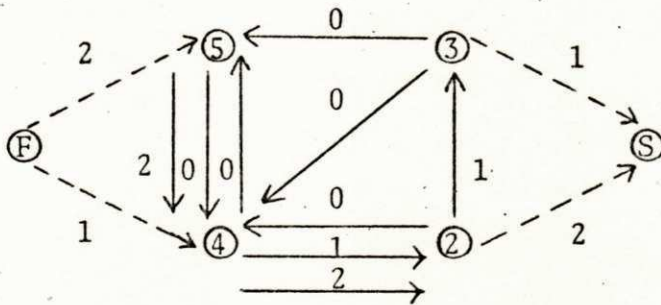
Para resolver este problema, são introduzidos dois novos nós denominados F (fonte) e S (sumidouro), com arcos correspondentes, conforme a descrição no algoritmo. Após isto obtém-se:



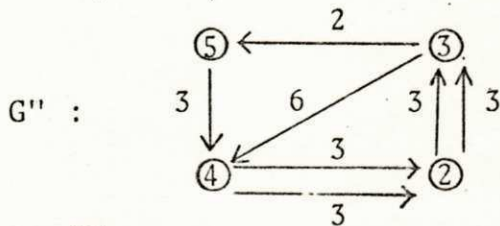


onde os novos arcos têm custo zero e capacidades correspondentes aos valores absolutos dos déficits dos nós do grafo original. Então este grafo tem bivalorização como descrito no diagrama, onde a primeira coordenada representa o custo e a segunda a capacidade.

Com esta interpretação do problema será preciso aplicar o algoritmo do fluxo para transportar 3 unidades do nó F para o nó S com custo mínimo, que nos dá a seguinte solução, onde os números nos arcos representam o fluxo



Esta solução define agora, conforme o algoritmo, uma variação  $G''$  do grafo misto original de modo que o grafo resultante tem os graus de entrada iguais aos correspondentes graus de saída. Logo, a ES-variação minimal  $G''$  é representada pelo diagrama

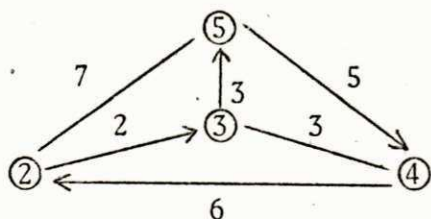


e tem custo 23.

Exemplo 2

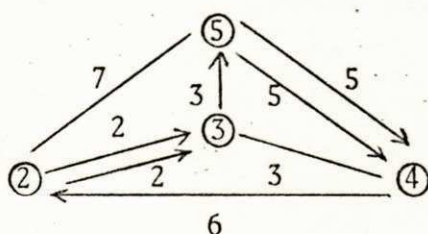
Dado o grafo valorado com custo 26, representado pelo diagrama

G :



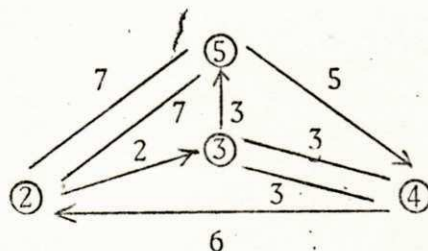
Como cada nó de G tem grau de entrada igual ao grau de saída, pode-se construir a GP-variação minimal completa ou a GP-variação com respeito ao grafo parcial de G consistindo apenas dos ramos de G.

a) Considerando a GP-variação minimal completa, obtém-se a variação representada por:



com custo igual a 33.

b) Considerando apenas a GP-variação minimal com respeito ao grafo parcial consistindo só dos ramos de G, obtém-se a variação representada por:

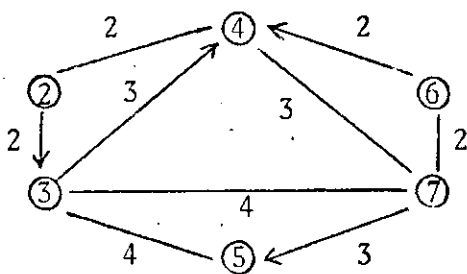


com custo igual a 36.

Comparando os dois resultados vê-se que o item (a) apresenta menor custo que o item (b). Porém, a segunda solução apresenta a particularidade de manter iguais os graus de entrada e saída de cada nó.

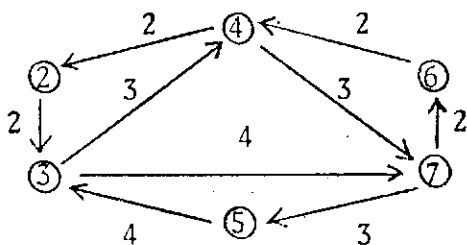
Exemplo 3

Dado o grafo valorado com custo 26, representado pelo diagrama



Observa-se que cada nó de  $G$  tem grau par .

Aplicando a ES-variação minimal com respeito a este grafo obtêm-se o seguinte grafo:



com custo 26. Observa-se que neste grafo todos os nós têm grau par.

Vale salientar que se o grafo tem todos os nós com grau par, a ES-variação não altera esta propriedade. Portanto, pode-se concluir que se o grafo original não tem ramos nem arcos paralelos e o grau de cada nó é par, a ES-variação mínima produz uma variação euleriana mínima e conseqüentemente qualquer rota desta variação é ótima.

## CAPÍTULO V

### ALGORÍTMOS APROXIMATIVOS

#### 5.1 - CONCEITUAÇÃO

O problema de encontrar uma rota com custo mínimo para o Carteiro Chinês num grafo misto ainda não foi resolvido de forma eficiente. Mas, para grafos direcionados e para grafos não direcionados, o problema foi resolvido de forma eficiente e polinomialmente por Edmonds e Johnson. Como no caso de grafos não direcionados precisa-se uma variação minimal de modo que todos os nós tenham grau par, e no caso de grafos direcionados precisa-se de uma variação minimal de modo que para cada nó o grau de entrada seja igual ao grau de saída, os algoritmos de Edmonds e Johnson são do tipo GP-variação minimal no caso não direcionado e ES-variação minimal no caso direcionado. Conforme foi observado, estes algoritmos básicos de Edmonds e Johnson podem ser aplicados de forma eficiente também para grafos mistos, mas claramente sem obter geralmente uma rota. Mas, o que precisa também ser observado é que a aplicação em sequência de algoritmos do tipo GP-e ES-variação definem uma rota. Estas rotas (dependendo da ordem da aplicação escolhida) geralmente não têm custo minimal, mas podem ser usadas como soluções heurísticas. No caso de um algoritmo do tipo GP-variação seguido de um do tipo ES-variação, isto foi observado também por Edmonds e Johnson, e no caso de um algoritmo do tipo ES-variação seguido de um do tipo GP-variação foi observado, por Frederickson.

O processo usado por Edmonds e Johnson resulta num algoritmo chamado MIXED 1, e o processo de Frederickson num algoritmo chamado MIXED 2.

Como os algoritmos aqui apresentados não coincidem totalmente com MIXED 1 e MIXED 2 (mas baseiam-se também nas suas idéias), serão designados por MIXED 1A e MIXED 2A. Nos exemplos dados por Frederickson estas variantes apresentam resultados melhores.

Como algoritmos heurísticos precisam de um estudo particular do pior caso, isto também é necessário para os algoritmos do tipo MIXED. Isto foi feito por Frederickson, com os seguintes resultados: ambos os algoritmos MIXED 1 e MIXED 2 chegam em rotas cujos custos são menores ou iguais ao dobro do custo de uma rota ótima. Se adicionalmente a rota melhor (com respeito ao custo) entre as encontradas por MIXED 1 e MIXED 2 é escolhida, então o custo desta rota é menor ou igual a  $5/3$  de uma rota ótima. Pode-se assegurar que as estimações de Frederickson são também válidas no caso das variantes dos algoritmos MIXED 1 e MIXED 2, aqui apresentadas.

Agora são dados os algoritmos MIXED 1A e MIXED 2A acompanhados por exemplos.

## 5.2 - ALGORITMO MIXED 1A

Entrada: Um grafo misto conexo valorado  $G = (N, E, A, c)$

Saída : Uma rota contendo todos os ramos e arcos de  $G$ .

Passo 1: Aplique o algoritmo GP-variação minimal ao grafo  $G$  com saída  $G'$ .

Passo 2: Aplique o algoritmo ES-variação minimal ao grafo  $G'$  com saída  $G''$ .

Passo 3: Construa uma rota em  $G$  correspondente a uma rota euleriana em  $G''$ .

O algoritmo MIXED 1A a princípio faz o casamento dos nós de grau ímpar, repetindo tantos arcos como ramos, necessários à transformação do grafo  $G$  em  $G'$ . A seguir é construída uma ES-variação minimal  $G''$  de  $G'$ , que mantém par o grau de cada nó. É claro que  $G''$  é uma variação euleriana de  $G$  e por conseguinte o passo 3 pode ser executado.

É fácil verificar que após o passo 2 o grafo resul

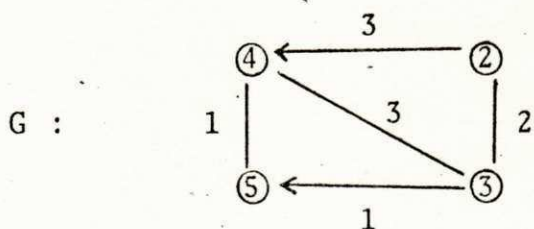
tante mantêm par o grau de cada nó, pois após o passo 1 cada nó tem grau par e como o passo 2 inicia orientando todos os ramos de  $G'$ , vemos que o déficit de cada nó é um número par. Como as capacidades dos arcos são sempre 2 ou  $\infty$  (na realidade são 2 ou a soma dos déficits positivos), verifica-se que o número de arcos que são adicionados é sempre um número par.

A diferença básica entre o MIXED 1 de Edmonds e Johnson e o MIXED 1A aqui apresentado está no fato que o MIXED 1A garante que também após igualar os graus de entrada e saída os graus dos nós permanecem par, o que não necessariamente é o caso no algoritmo MIXED 1 que geralmente precisa a aplicação de um algoritmo suplementar para finalmente obter uma variação euleriana.

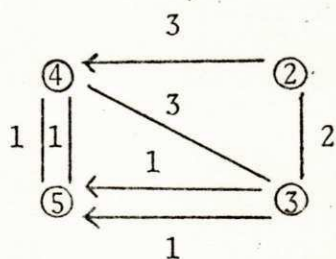
Para tornar mais claro o funcionamento do MIXED 1A dá-se o seguinte exemplo:

#### Exemplo

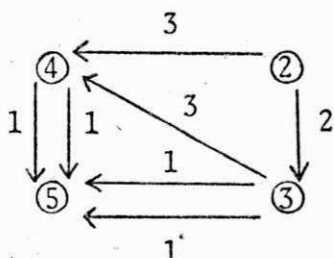
Seja  $G$  o grafo misto conexo valorado representado pelo seguinte diagrama



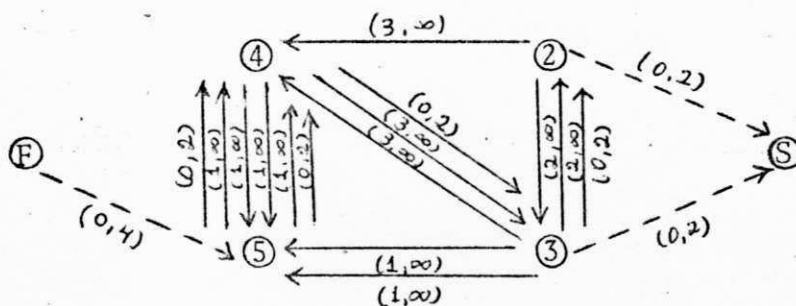
No passo 1 são primeiramente identificados os nós de grau ímpar. Aqui estes nós são 3 e 4. A seguir um casamento de custo mínimo entre os nós com grau ímpar é construído. No exemplo este casamento deve ser feito repetindo o arco  $(3,5)$  e o ramo  $\{5,4\}$ , resultando na seguinte GP-variação minimal  $G'$  do grafo  $G$ , representada por:



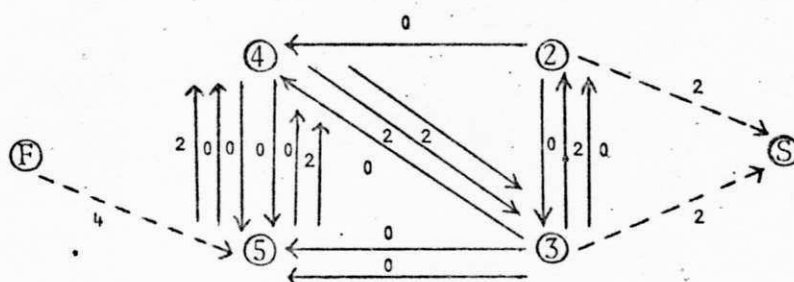
Agora, aplicando o passo 2 sobre o grafo valorado  $G'$ , primeiramente todos os ramos são orientados arbitrariamente. Suposto que no exemplo a orientação é escolhida como segue:



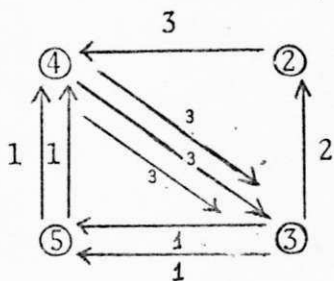
temos  $def(2) = -2$ ,  $def(3) = -2$ ,  $def(4) = 0$  e  $def(5) = 4$ . Para calcular o fluxo ótimo, o algoritmo usa um grafo que podemos representar (neste exemplo) por:



Deste grafo resulta o seguinte fluxo ótimo:



que define a variação euleriana  $G''$  correspondente, representada no exemplo por:



O custo de  $G''$  é 18 e uma rota em  $G$  correspondente a uma rota euleriana em  $G''$  é dada por:

Rota:  $(2,4)$ ,  $(4,3)$ ,  $(3,5)$ ,  $(5,4)$ ,  $(4,3)$ ,  $(3,5)$ ,  $(5,4)$ ,  $(4,3)$ ,  $(3,2)$

## 5.3 - ALGORITMO MIXED 2A

Entrada: Um grafo misto conexo valorado  $G = (N, E, A, c)$

Saída : Uma rota contendo todos os ramos e arcos de  $G$

Passo 1: Aplique o algoritmo ES-variação minimal ao grafo  $G$ , com saída  $G'$ .

Passo 2: Aplique o algoritmo GP-variação minimal ao grafo  $G = (N, E)$  com saída  $G''$ .

Passo 3: Construa uma rota em  $G$  correspondente a uma rota euleriana em  $G''$ .

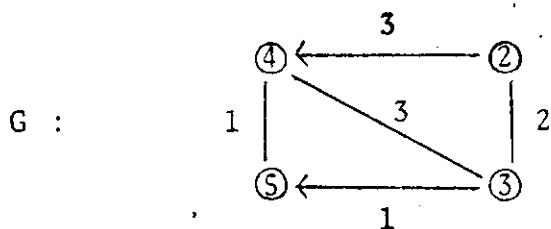
O algoritmo MIXED 2A a princípio faz uma ES-variação minimal. A seguir é construída uma GP-variação minimal  $G''$  de  $G'$ , usando apenas os ramos do grafo inicial. É claro que  $G''$  é uma variação euleriana de  $G$  e por conseguinte o passo 3 pode ser executado.

A diferença básica entre o MIXED 2A e o correspondente MIXED 2 de Frederickson está no fato do MIXED 2A orientar os ramos antes de calcular o déficit de cada no, o que não ocorre com o MIXED 2, que calcula o déficit sem orientar os ramos. O MIXED 2A pode ser encerrado apenas com a orientação dos ramos, se  $\text{def}(i) = 0$  para todo no  $i$ .

Para tornar mais claro o funcionamento do algoritmo MIXED 2A será dado o mesmo exemplo que no caso MIXED 1A.

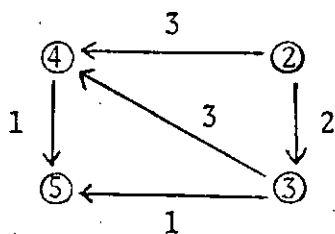
Exemplo

Seja  $G$  o grafo misto conexo valorado representado pelo seguinte diagrama



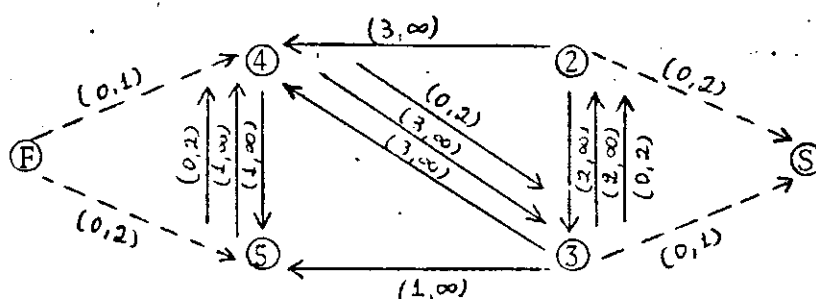
No passo 1 primeiramente todos os ramos são orientados arbitrariamente. Suposto que no exemplo a orientação é escolhida como segue:



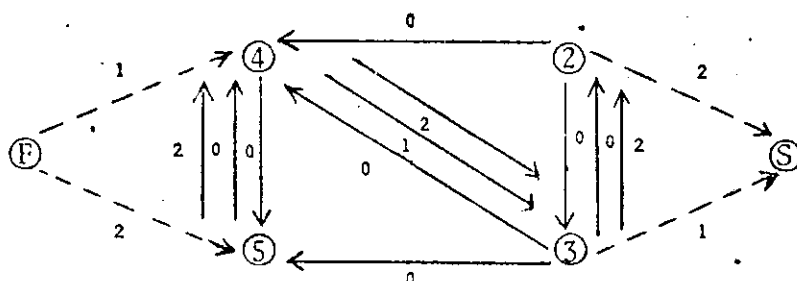


temos  $def(2) = -2$ ,  $def(3) = -1$ ,  $def(4) = 1$ ,  $def(5) = 2$ .

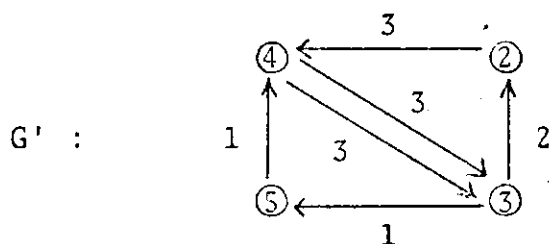
Para calcular o fluxo ótimo, o algoritmo usa um grafo que pode-se representar (neste exemplo) por:



Deste grafo resulta o seguinte fluxo ótimo:

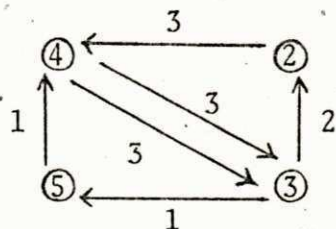


que define a ES-variação minimal  $G'$  correspondente, representada no exemplo por:



Agora, aplicando o passo 2 sobre o grafo valorado  $G'$ , verifica-se que todos os nós de  $G'$  já têm grau par. Logo, o casamento entre os nós de grau ímpar é vazio. Por conseguinte resulta após a aplicação do passo 2 do algoritmo o grafo  $G''$  igual a  $G'$ :

$G''$  :



O custo de  $G''$  é 13 e uma rota em  $G$  correspondente a uma rota euleriana em  $G''$  é dada por:

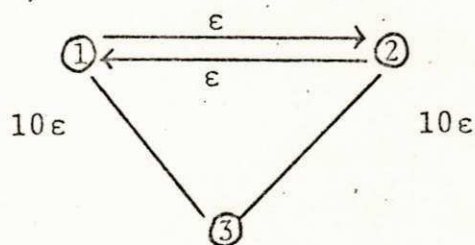
Rota:  $(2,4)$ ,  $\{4,3\}$ ,  $(3,5)$ ,  $\{5,4\}$ ,  $\{4,3\}$ ,  $\{3,2\}$

Nos exemplos acima considerados para a aplicação dos algoritmos MIXED 1A e MIXED 2A partiu-se do mesmo grafo inicial  $G$ . As rotas correspondentes encontradas tiveram custo 18 no caso MIXED 1A e 13 no caso MIXED 2A e por conseguinte a rota encontrada usando o MIXED 2A deve ser a escolhida.

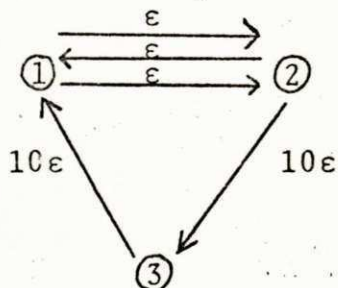
Para mostrar que também pode acontecer que o algoritmo MIXED 1A produz uma rota melhor (com custo menor) que o algoritmo MIXED 2A será dado o seguinte exemplo (os detalhes são deixados ao leitor):

#### Exemplo

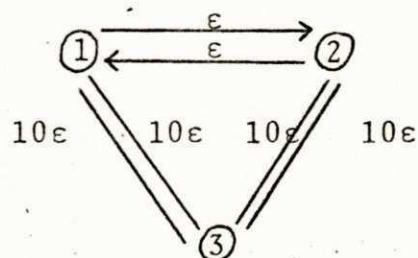
Seja  $G$  o grafo misto conexo valorado representado pelo seguinte diagrama



Os algoritmos MIXED 1A e MIXED 2A produzem as variações eulerianas representadas pelos seguintes grafos:



Solução MIXED 1A



Solução MIXED 2A

Como não existe uma regra para estabelecer em quais casos um dos algoritmos apresenta melhor solução que o outro, será introduzido a seguir um algoritmo que escolhe como solução a rota de menor custo entre as geradas pelo MIXED 1A e MIXED 2A.

#### 5.4 - ALGORITMO MIXED A

Entrada: Um grafo misto conexo valorado  $G = (N, E, A, c)$

Saída : Uma rota contendo todos os ramos e arcos de  $G$

Passo 1: Aplique o algoritmo MIXED 1A ao grafo  $G$ .

Passo 2: Aplique o algoritmo MIXED 2A ao grafo  $G$ .

Passo 3: Escolha a rota de menor custo.

#### 5.5 - ANÁLISE DO PIOR CASO DO MIXED A

Para fazer a análise teórica dos resultados dos algoritmos aqui apresentados, será mostrado que a razão entre o custo da rota encontrada pelo algoritmo MIXED A e o custo de uma rota ótima é menor ou igual a  $5/3$ . Para isto, serão dados alguns lemas e proposições.

Para abreviar as demonstrações dos lemas que serão enunciados, precisa-se introduzir as seguintes notações: dado um grafo misto conexo não negativamente valorado  $G = (N, E, A, c)$ , deno

ta-se por  $G_{GPm} = (N, E_{GPm}, A_{GPm}, c_{GPm})$  uma GP-variação minimal de  $G$ , por  $G_{ESm} = (N, E_{ESm}, A_{ESm}, c_{ESm})$  uma ES-variação minimal de  $G$ , por  $G_{ESm \circ GPm} = (N, E_{ESm \circ GPm}, A_{ESm \circ GPm}, c_{ESm \circ GPm})$  a variação euleriana de  $G$  obtida pelo algoritmo MIXED 1A e por  $G_{GPm \circ ESm} = (N, E_{GPm \circ ESm}, A_{GPm \circ ESm}, c_{GPm \circ ESm})$  a variação euleriana de  $G$  obtida pelo algoritmo MIXED 2A. Finalmente define-se por  $C(E)$ ,  $C(A)$  e  $C(G)$  as respectivas somas dos custos de todos os ramos, todos os arcos e todos os ramos e todos os arcos de  $G$ , (o que fornece a igualdade  $C(G) = C(E) + C(A)$ ) e denota-se por  $\hat{C}$  o custo da rota encontrada pelo algoritmo MIXED A, isto é,  $\hat{C} = \min\{C(G_{ESm \circ GPm}), C(G_{GPm \circ ESm})\}$  e por  $C^*$  o custo de uma rota ótima.

### Lema 1

Se  $G = (N, E, A, c)$  é um grafo misto conexo não negativamente valorado e  $G_{GPm} = (N, E_{GPm}, A_{GPm}, c_{GPm})$  uma GP-variação minimal de  $G$ , cada ramo e cada arco de  $G$  é no máximo duplicado em  $G_{GPm}$ .

### Demonstração

Como a GP-variação minimal de  $G$  só tem como objetivo tornar par o grau de cada nó de  $G$ , a direção dos arcos não é considerada quando é feito o casamento dos nós de graus ímpares e por conseguinte pode-se substituir os arcos por ramos e considerar  $G$  como um grafo não direcionado. É claro que uma rota com custo mínimo num grafo não direcionado e não negativamente valorado não usa um ramo mais que duas vezes. Mas esta rota define um casamento e este casamento corresponde ao casamento mínimo que define a GP-variação minimal  $G_{GPm}$ .

### Lema 2

Num grafo misto conexo não negativamente valorado  $G = (N, E, A, c)$  tem-se  $C(G_{ESm \circ GPm}) \leq C^* + 2C(A_{ESm})$ . Isto é: o custo de uma rota gerada pelo algoritmo MIXED 1A é menor ou igual à soma entre o custo de uma rota ótima e o dobro do custo de todos os arcos de uma ES-variação minimal do grafo  $G$ .

Demonstração

Seja  $\bar{A}_{ESm}$  uma cópia disjunta de  $A_{ESm}$ . Define-se os nós incidentes para os elementos de  $\bar{A}_{ESm}$  como para os correspondentes arcos em  $A_{ESm}$  e interpreta-se os elementos de  $\bar{A}_{ESm}$  também como arcos. Com isto define-se um novo grafo misto conexo não negativamente valorado  $\bar{G} = (N, E, \bar{A}, \bar{c})$  por:  $\bar{E} = E_{GPm}$ ,  $\bar{A} = A_{ESm} \cup \bar{A}_{ESm}$ ,  $\bar{c} = c_{ESm}$  sobre  $A_{ESm}$ ,  $\bar{c} = c_{GPm}$  e  $\bar{c}(\bar{a}) = c_{ESm}(a)$  para  $\bar{a} \in \bar{A}_{ESm}$  onde  $a$  é o arco em  $A_{ESm}$  correspondente ao arco  $\bar{a}$ . É claro que  $\bar{G}$  é uma ES-variação de  $G_{GPm}$ , pois de acordo com o lema 1,  $\bar{G}$  tem no mínimo tantos arcos entre dois nós como  $G_{GPm}$  e por conseguinte pode-se interpretar  $A_{GPm}$  como um subconjunto de  $\bar{A}$ , e como  $A_{ESm}$  e  $\bar{A}_{ESm}$  satisfazem grau de entrada igual a grau de saída para todos os nós de  $N$ . Portanto,  $C(G_{ESm GPm}) \leq C(\bar{G}) = C(E_{GPm}) + 2c(A_{ESm})$ . Como  $C(E_{GPm}) \leq C^*$  pois uma rota ótima precisa da existência de uma GP-variação do grafo original  $G$ , pode-se concluir que  $C(G_{ESm GPm}) \leq C^* + 2C(A_{ESm})$

Lema 3

Num grafo misto conexo não negativamente valorado  $G = (N, E, A, c)$  tem-se  $C(G_{GPm ESm}) \leq 2C^* - C(A_{ESm})$ . Isto é: o custo de uma rota gerada pelo algoritmo MIXED 2A é menor ou igual à diferença entre o dobro do custo de uma rota ótima e a soma dos custos de todos os arcos de uma ES-variação minimal do grafo original  $G$ .

Demonstração

Como na segunda parte do algoritmo MIXED 2A só podem ser adicionados ramos e no máximo os ramos podem ser duplicados, obtém-se que  $C(A_{GPm \circ ESm}) = C(A_{ESm})$  e  $C(E_{GPm \circ ESm}) \leq 2C(E_{ESm})$ . É claro que  $C(G_{ESm}) = C(E_{ESm}) + C(A_{ESm}) \leq C^*$ , como uma rota ótima precisa que os graus de entrada sejam iguais aos graus de saída para todos os nós de  $N$ , e por conseguinte precisa de uma ES-variação do grafo original  $G$ . Donde segue:

$$\begin{aligned}
 C(G_{G_{Pm} \circ E_{Sm}}) &= C(E_{G_{Pm} \circ E_{Sm}}) + C(A_{G_{Pm} \circ E_{Sm}}) \leq 2C(E_{E_{Sm}}) + C(A_{E_{Sm}}) = \\
 &= 2(C(E_{E_{Sm}}) + C(A_{E_{Sm}}) - C(A_{E_{Sm}})) \leq 2C^* - C(A_{E_{Sm}}) .
 \end{aligned}$$

### Teorema

Dado um grafo misto conexo não negativamente valorado  $G = (N, E, A, c)$ . Se  $\hat{C} = \min\{C(G_{E_{Sm} \circ G_{Pm}}), C(G_{G_{Pm} \circ E_{Sm}})\}$  e  $C^*$  é o custo de uma rota ótima, então  $\hat{C} \leq (5/3)C^*$ . Isto é: o custo da rota encontrada pelo algoritmo MIXED A que corresponde ao menor dos custos das rotas geradas pelos algoritmos MIXED 1A e MIXED 2A, é menor ou igual a 5/3 do custo de uma rota ótima.

### Demonstração

A demonstração é feita em duas partes: a primeira parte considera o caso  $C(A_{E_{Sm}}) \leq (1/3)C^*$  e a segunda considera o caso  $C(A_{E_{Sm}}) > (1/3)C^*$ .

Parte 1 : usando o lema 2 obtém-se

$$\hat{C} \leq C(G_{E_{Sm} \circ G_{Pm}}) \leq C^* + 2C(A_{E_{Sm}}) \leq (5/3)C^*$$

Parte 2 : usando o lema 3 obtém-se

$$\hat{C} \leq C(G_{G_{Pm} \circ E_{Sm}}) \leq 2C^* - C(A_{E_{Sm}}) \leq (5/3)C^* .$$

## CAPÍTULO VI

### APLICAÇÕES

Na aplicação dos algoritmos MIXED 1A e MIXED 2A, as GP-e ES-variações são implementadas como programas distintos e em ambos os casos a rota foi construída manualmente. É claro que existem algoritmos para calcular a rota, porém, como não era este o objetivo do trabalho e como as restrições que aparecem na prática são de tal ordem que provavelmente a construção de uma rota que satisfaça a todas elas pode ser assunto de uma nova dissertação, neste trabalho optou-se pela já citada construção manual.

No capítulo anterior, foi visto que a condição necessária e suficiente para a existência de uma rota euleriana num grafo misto conexo, é que todos os nós tenham o grau par e além disso tenham o grau de entrada igual ao grau de saída. Portanto, pode-se afirmar que uma rota ótima é ao mesmo tempo uma GP-variação e uma ES-variação, e o custo de uma rota ótima é maior ou igual tanto ao custo de uma GP-variação minimal como ao de uma ES-variação minimal, no grafo original. Devido à impossibilidade de calcular o custo de uma rota ótima nos exemplos práticos, as comparações foram feitas entre o custo da rota gerada pelo MIXED A e o maior dos custos dentre os das GP-e ES-variações. É claro que na verdade as razões aqui encontradas são maiores ou iguais às razões reais.

As aplicações do algoritmo MIXED A foram feitas em grafos mistos conexos não negativamente valorado, que representam

distritos da cidade de Aracaju, conforme foi descrito na introdução. Estes distritos foram limitados pela empresa encarregada da coleta do lixo urbano, mas não foi possível comparar os resultados com os daquela empresa, pois a mesma não dispõe de nenhum meio (até o momento) de estabelecer a rota de cada um dos distritos.

Apresenta-se aqui os resultados obtidos em um desses distritos.

A maneira como se obteve estes resultados é mostrada no documento nº 01 que se encontra na Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Sistemas e Computação da Universidade Federal da Paraíba - Campus II.

Neste exemplo, o distrito usado foi uma parte do centro da cidade, onde as distâncias entre os cruzamentos (nós) são constantes e iguais a 100 metros, sendo que no caso de ruas fechadas ao trânsito os cruzamentos foram eliminados e os correspondentes trechos passaram a medir 200 metros.

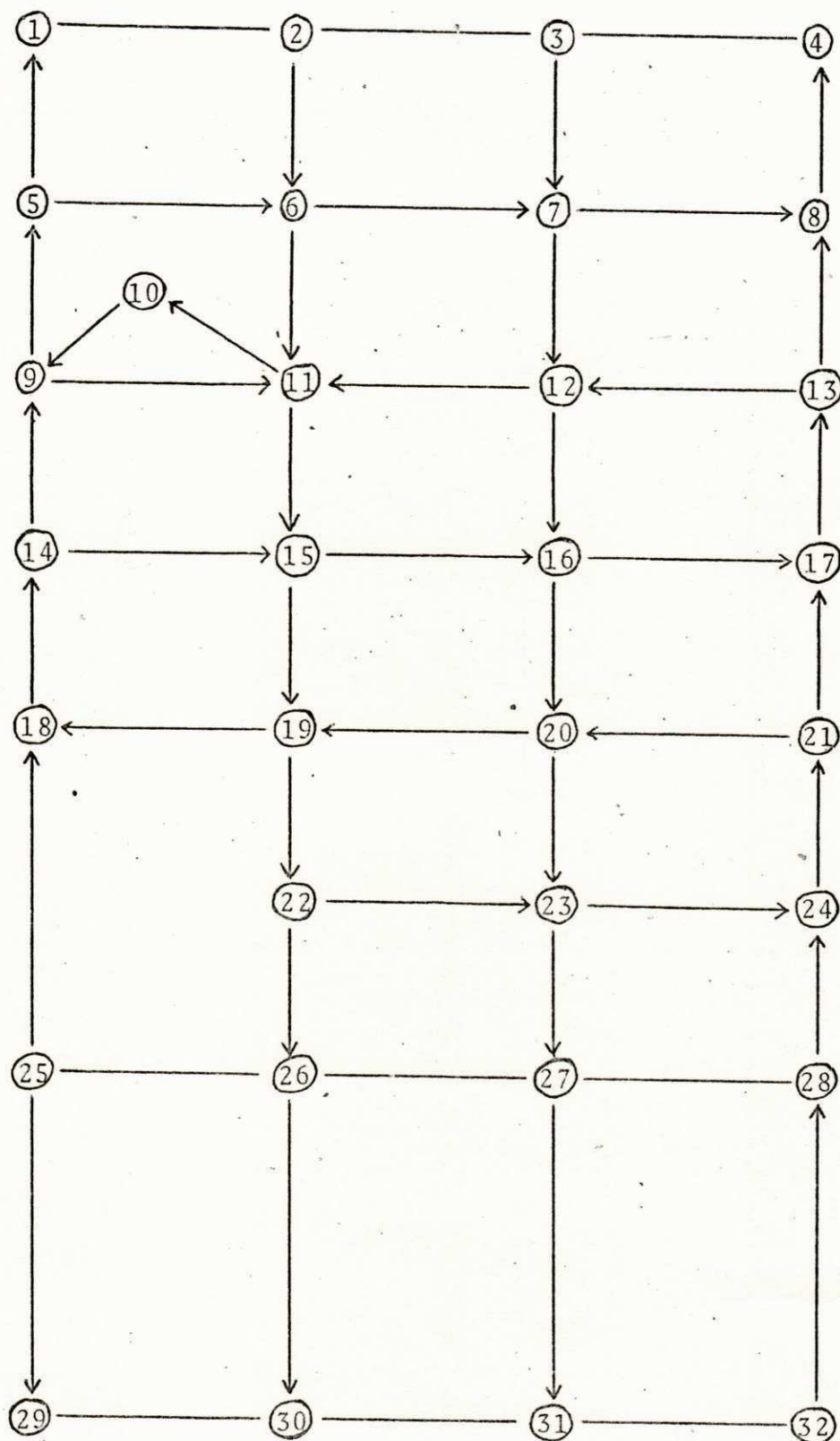
Neste exemplo, após a aplicação do MIXED 1A verifica-se que o grafo resultante apresenta um custo adicional igual a 3,8 Km. Na aplicação do MIXED 2A, verifica-se que após a construção da ES-variação minimal o grafo resultante apresenta um custo adicional igual a 2,2 Km e todos os seus nós têm grau par, sendo portanto um grafo euleriano, o que implica na não aplicação do segundo passo e na afirmação que a rota encontrada pelo MIXED 2A é uma rota ótima, pois o custo adicional da GP-variação minimal é zero.

Em todos os exemplos testados durante o desenvolvimento deste trabalho, o MIXED 2A apresentou soluções melhores que as do MIXED 1A. Porém, vale salientar que isto não é uma regra geral, conforme foi mostrado em exemplos anteriores.

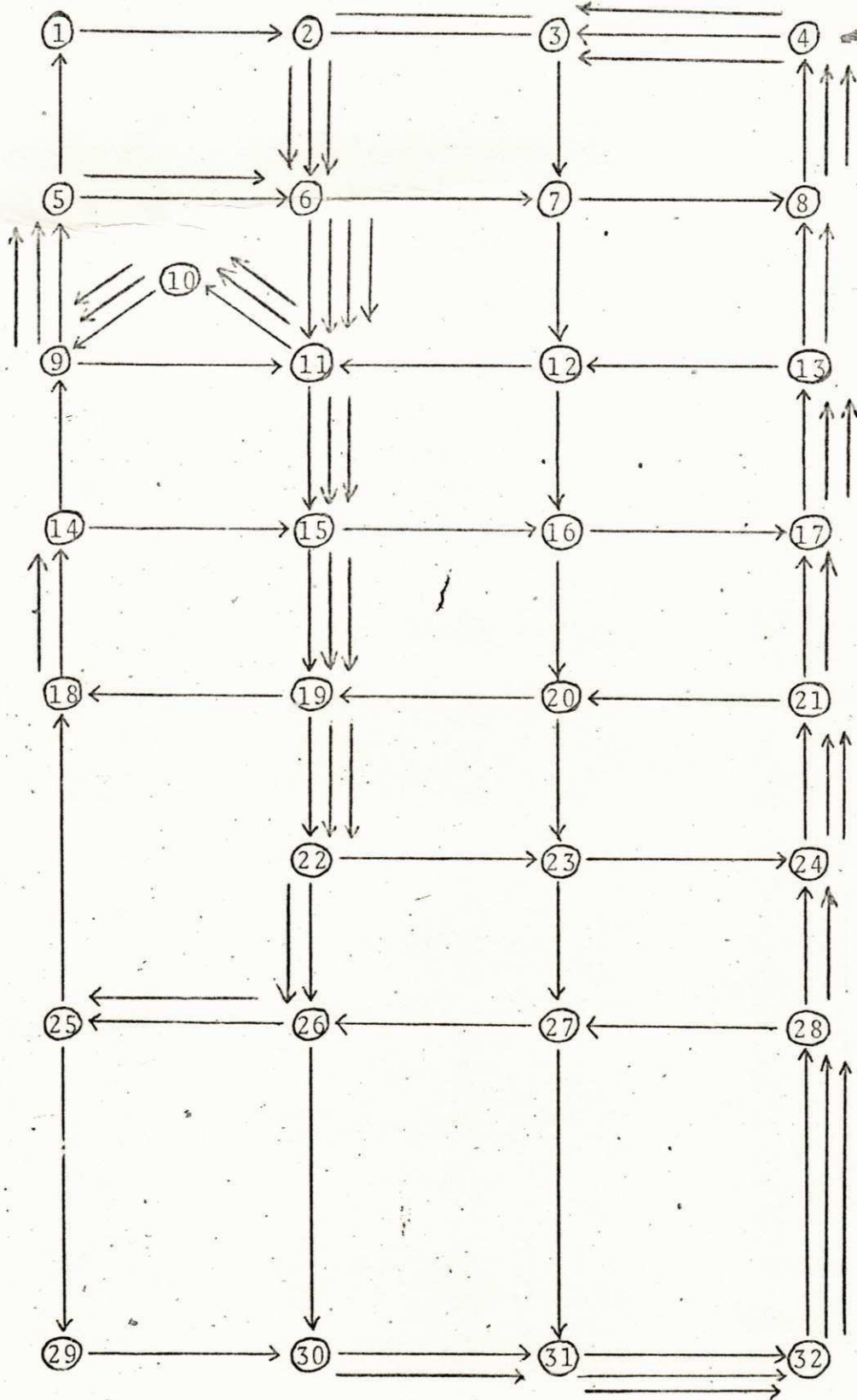


Exemplo:

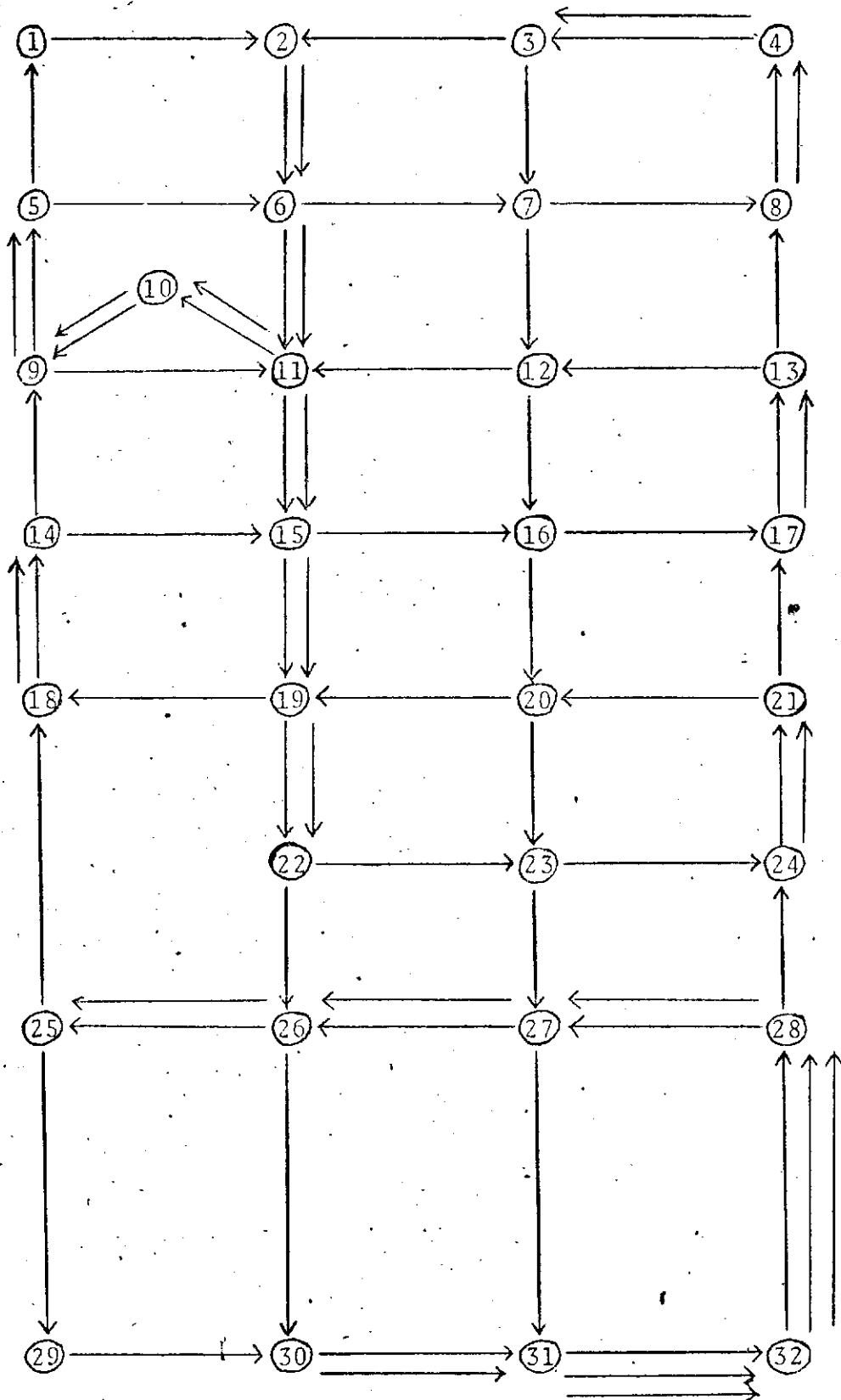
Grafo G representativo do distrito onde foi aplicado o algoritmo MIXED A.



Grafo resultante da aplicação do MIXED 1A.



Grafo resultante da aplicação do MIXED 2A.



Rota gerada pelo algoritmo MIXED A

(1,2) (2,6) (6,7) (7,8) (8,4) (4,3) (3,2) (2,6) (6,11) (11,10) (10,9)  
(9,5) (5,6) (6,11) (11,10) (10,9) (9,11) (11,15) (15,16) (16,17) (17,13)  
(13,12) (12,11) (11,15) (15,19) (19,18) (19,14) (14,15) (15,19) (19,22)  
(22,23) (23,24) (24,21) (21,20) (20,19) (19,22) (22,26) (26,25) (25,29)  
(29,30) (30,31) (31,32) (32,28) (28,27) (27,26) (26,30) (30,31) (31,32)  
(32,28) (28,27) (27,31) (31,32) (32,28) (28,24) (24,21) (21,17) (17,13)  
(13,8) (8,4) (4,3) (3,7) (7,12) (12,16) (16,20) (20,23) (23,27) (27,26)  
(26,25) (25,18) (18,14) (14,9) (9,5) (5,1) .

É claro que esta é uma rota ótima .

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

A partir dos resultados obtidos nas aplicações das variantes apresentadas neste trabalho, bem como dos resultados mostrados nos capítulos anteriores, pode-se concluir que:

- 1 - apesar do algoritmo apresentado por Frederickson apresentar a mesma razão entre o custo de uma rota heurística e o custo de uma rota ótima, que o algoritmo apresentado neste trabalho, ficou claro que os algoritmos GP-e ES-variações têm melhor desenvolvimento que os correspondentes de Edmonds e Johnson, pois tanto a GP-variação como a ES-variação conservam os resultados obtidos pela outra, o que não ocorre com os originais.
- 2 - pode-se obter programas mais eficientes, que os apresentados na documentação, tanto com respeito ao tempo de processamento como com respeito à memória de máquina, desde que se faça uma análise mais apurada da estrutura de dados a ser usada.
- 3 - a aplicação do algoritmo fornece uma rota com custo minimizado para o caso de coleta de lixo urbano, conforme foi comprovado no exemplo, usando os dados da cidade de Aracaju.

Este trabalho não tem a pretensão de esgotar o assunto sobre o problema do carteiro chinês num grafo misto, pois como

foi visto, alguns pontos ficaram em aberto, o que permite recomendar que no caso de construção de rotas, sejam levados em consideração, dentre outros, os seguintes pontos:

- 1 - as condições de trânsito de cada rua, bem como as condições de coleta.
- 2 - as restrições em cruzamento, isto é, quando o carro está em um cruzamento, quais são as opções de saída ?
- 3 - seja feita uma análise mais apurada da estrutura de dados a ser utilizada, a fim de, que a conexão entre os programas da GP-variação e da ES-variação seja possível. Isto é, estes programas sejam usados como subrotinas de um programa principal.
- 4 - o estudo comparativo da rota gerada por processos computacionais e a rota gerada manualmente no grafo resultante do MIXED A .

## BIBLIOGRAFIA

01. - MEI-KO, K. - Graphic programming using odd or even points. Chinese Mathematics 1(1962), 273 - 277.
02. - EDMONDS, J. - The Chinese postman problem. Oper. Res. 13, Suppl. 1(1965), B73 - B77.
03. - EDMONDS, J., and JOHNSON, E.L. - Matching, Euler tours and the Chinese postman. Math. Programming 5(1973), 88 - 124.
04. - PAPADIMITRIOU, C.H. - On the complexity of edge traversing. J. ACM 23, 3 (july 1976), 544 - 554.
05. - FREDERICKSON, G.N. - Approximation Algorithms for Some Postman Problems. J. ACM 26, 3 (july 1979), 538 - 554.
06. - FLOYD, R. Algorithm 97: Shortest path. Comm ACM 5(1962), 345.
07. - DIJKSTRA, E. W. - A note on two problems in connection with graphs. Numer. Math. 1(1959), 269 - 271.
08. - L.R. FORD, D.R. FULKERSON - Flows in networks, Princenton University Press. Princenton (1962).
09. - DERIGS, U. - A Shortest augmenting path method for solving minimal perfect matching problems, Report 79-06, Mathematisches Institut der Universitat zu Koln, (1979).
10. - ITAI, A. RODEH, M., TANIMOTO, L.S. - Some Matching Problems for Bipartite Graphs. J. ACM 25, 4 (october 1978) 517 - 525.

11. - MINIEKA, E. - The Chinese Postman Problem for MIXED Networks, Management Science, 25, 7 (july 1979) 643 - 648.
12. - ROSENKRANTZ, D. J., STEARNS, R. E., LEWIS, P. M. - An Analysis of Several heuristic for the traveling Salesman problem, Siam J. Comput. 6, 3 (september 1977) 563 - 581.