

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE
PROCESSOS**

**MODELAMENTO AVANÇADO DE FLUXO EM FRATURAS
DE MEIOS POROSOS: ANÁLISE DE PARÂMETROS
FLUIDODINÂMICOS**

Arthur Gilzeph Farias Almeida

ORIENTADOR: Prof. Dr. Severino Rodrigues de Farias Neto

Segundo Orientador: Prof. Dr. Valdecir Alves dos Santos Júnior

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE
PROCESSOS**

**MODELAMENTO AVANÇADO DE FLUXO EM FRATURAS
DE MEIOS POROSOS: ANÁLISE DE PARÂMETROS
FLUIDODINÂMICOS**

Arthur Gilzeph Farias Almeida

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Processos da Universidade Federal de Campina Grande, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia de Processos, área de concentração: Processos Térmicos e de Separação. Orientador: Prof. Dr. Severino Rodrigues de Farias Neto

A447m Almeida, Arthur Gilzeph Farias.
Modelamento avançado de fluxo em fraturas de meios porosos:
análise de parâmetros fluidodinâmicos / Arthur Gilzeph Farias Almeida.
– Campina Grande, 2024.
121 f. : il. color.

Tese (Doutorado em Engenharia de Processos) – Universidade
Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.
"Orientação: Prof. Dr. Severino Rodrigues de Farias Neto, Prof. Dr.
Valdecir Alves dos Santos Júnior".
Referências.

1. Processos Térmicos e de Separação. 2. Método GBI em Domínio
Particionado. 3. Permeabilidade de Fratura. 4. Abertura Hidráulica.
5. Fator de Atrito. I. Farias Neto, Severino Rodrigues de. II. Santos
Júnior, Valdecir Alves dos. III. Título.

CDU 66.040(043)

MODELAMENTO AVANÇADO DE FLUXO EM FRATURAS DE MEIOS POROSOS: ANÁLISE DE PARÂMETROS FLUIDODINÂMICOS

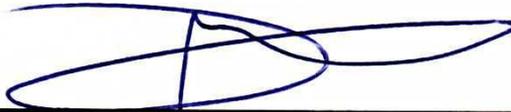
Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Processos da Universidade Federal de Campina Grande por Arthur Gilzeph Farias Almeida.

Aprovado em 21 de fevereiro de 2024

Membros da Banca:

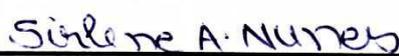

Prof. Dr. Severino Rodrigues de Farias Neto
Orientador – UFCG


Prof. Dr. Valdecir Alves dos Santos Júnior
Segundo Orientador – UEPB


Prof. Dr. Antônio Gilson Barbosa de Lima
Examinador Interno – UFCG


Prof. Dr. Vimário Simões Silva
Examinador Interno – UFCG


Profa. Dra. Ivonete Batista dos Santos
Examinadora Externa – UEPB


Profa. Dra. Sirlene Alves Nunes
Examinadora Externa – UFPB

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a Deus, que permitiu que meus objetivos pudessem ser alcançados, durante toda a minha vida.

À minha esposa e filho, por serem minhas fontes de inspiração, por todo companheirismo e amor dedicado e por compreenderem a minha ausência enquanto eu me empenhava na realização deste trabalho.

Aos meus pais, por possibilitarem que eu tivesse uma boa educação e por sempre me incentivarem a seguir pelos melhores caminhos.

Aos professores Severino e Valdecir, por terem dedicado seu tempo em minha orientação com dedicação e amizade.

À Universidade Federal de Campina Grande, essencial no meu processo de formação profissional, pela dedicação, e por tudo o que aprendi ao longo dos anos do curso.

À Universidade Federal da Paraíba que permitiu que eu me dedicasse de forma exclusiva ao doutorado.

Ao Laboratório de Métodos Computacionais (COMEL), da Universidade Estadual da Paraíba, Campus VIII, que cedeu uso remoto dos *softwares Maple e Grapher* para escrita dos códigos.

Ao colega Chaojie Cheng, sempre cordial e colaborativo, por ceder as imagens em alta definição das fraturas do seu estudo.

Aos membros da banca examinadora, pelas correções e sugestões que permitiram que este trabalho se tornasse melhor.

A todos aqueles que contribuíram, de alguma forma, para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo teórico e numérico do escoamento laminar de fluidos através de fraturas em meios porosos, obtendo resultados para parâmetros e propriedades fluidodinâmicas, como fator de atrito, permeabilidade, abertura hidráulica equivalente e transmissividade da fratura. Para cada modelo geométrico de fratura o domínio de estudo é particionado e para cada subdomínio é elaborado uma aproximação para as curvas a partir de regressão polinomial de alta ordem que, quando combinadas, representam a geometria da seção transversal da fratura. Com isso, pode-se definir um conjunto de funções base que são utilizadas para resolver a equação de quantidade de movimento, via o método GBI aplicado em cada subdomínio. Além disso, é desenvolvida uma formulação matemática para o problema de escoamento em fratura em meio poroso, resultando em equações que relacionam o produto fRe com a permeabilidade, a abertura hidráulica equivalente e a transmissividade da fratura. Nas simulações numéricas é utilizado o *software Maple* para elaboração do código que possibilita gerar as aproximações para as curvas e obter os resultados para o produto fRe , a permeabilidade, a abertura hidráulica equivalente e a transmissividade da fratura para um determinado número de partições e funções base. Estes resultados são comparados com outros resultados contidos na literatura e se mostram condizentes com a teoria, demonstrando a eficácia da metodologia matemática proposta. Por fim, foram simulados e avaliados o efeito dos parâmetros fluidodinâmicos e aspectos geométricos da fratura sobre a queda de pressão, fator de atrito e os perfis de velocidade.

Palavras-chave: Método GBI; Fratura; Permeabilidade; Abertura Hidráulica; Fator de Atrito.

ABSTRACT

This work presents a theoretical and numerical study of laminar flow of fluids through fractures in porous media, obtaining results for fluid dynamic parameters and properties such as friction factor, permeability, equivalent hydraulic aperture, and fracture transmissivity. For each geometric fracture model, the study domain is partitioned, and for each subdomain, an approximation for the curves is developed using high-order polynomial regression. When combined, these approximations represent the geometry of the fracture's cross-sectional area. Consequently, a set of basis functions is defined and used to solve the momentum equation through the GBI method applied to each subdomain. Furthermore, a mathematical formulation is developed for the fracture flow problem in porous media, resulting in equations that relate the product fRe to permeability, equivalent hydraulic aperture, and fracture transmissivity. Numerical simulations use the Maple software to create code that generates curve approximations and obtains results for the product fRe , permeability, equivalent hydraulic aperture, and fracture transmissivity for a specific number of partitions and basis functions. These results are compared with other literature findings and demonstrate consistency with the theory, validating the effectiveness of the proposed mathematical methodology. Finally, the numerical simulations assess the impact of fluid dynamic parameters and geometric aspects of the fracture on pressure drop, friction factor and velocity profiles.

Keywords: GBI Method; Fracture; Permeability; Hydraulic Aperture; Friction Factor.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2-1- Características das fraturas das amostras FFT, FFL1 e FFL2.....	24
Figura 2-2- Perfil de velocidade no desenvolvimento da camada limite no duto.	27
Figura 2-3- Duto reto com seção transversal qualquer.....	27
Figura 2-4- Placas paralelas em 2D e 3D.	31
Figura 2-5- Princípio da medida de permeabilidade.	36
Figura 2-6- Meio poroso fraturado e de baixa permeabilidade e a fratura representada como placas paralelas planas.	37
Figura 3-1- Domínio Ω e a sua seção transversal.....	45
Figura 3-2- Particionamento do Domínio em subdomínios Ω_l	46
Figura 3-3- Funções que delimitam a fronteira de Ω	48
Figura 3-4- Modelo de fratura: (a) seção transversal da fratura da face esquerda; (b) seção transversal da fratura da face direita; (c) seção transversal da fratura em posição qualquer ao longo do eixo.	54
Figura 3-5- Fratura com superfícies paralelas e planas.	58
Figura 3-6- Fratura simulada por funções circulares sem deslocamento entre as paredes.....	59
Figura 3-7- Fratura simulada por funções circulares com deslocamento entre as paredes.	59
Figura 3-8- Representação de uma fratura com variações realistas nas superfícies.....	59
Figura 3-9- Representação de uma fratura com superfícies reais.....	60
Figura 3-10- Esquema do procedimento utilizado.	61
Figura 4-1- Representação da comparação de fRe para diferentes geometrias do duto de escoamento com os trabalhos reportados na literatura.....	71
Figura 4-2- Fratura com paredes lisas e paralelas.	72
Figura 4-3- Representação das fraturas superior e inferior da amostra FFT.....	73
Figura 4-4- Representação das fraturas superior e inferior da amostra FFL1.....	73
Figura 4-5- Representação das fraturas superior e inferior da amostra FFL2.....	74
Figura 4-6- Representação da comparação dos resultados de k_f obtidos no presente trabalho para diferentes fraturas com os obtidos por Cheng <i>et al.</i> (2020).	75
Figura 4-7- Representação da comparação dos resultados de T obtidos no presente trabalho para diferentes fraturas com os obtidos por Cheng <i>et al.</i> (2020).	76
Figura 4-8- Representação da comparação dos resultados de h_H obtidos no presente trabalho para diferentes fraturas com os obtidos por Cheng <i>et al.</i> (2020).	77

Figura 4-9- Representação da variação do número de <i>Reynolds</i> com a abertura hidráulica equivalente (a) e da variação de Δp^* com o número de <i>Reynolds</i> (b).....	79
Figura 4-10- Representação da variação de Δp^* com o número de <i>Reynolds</i> para diferentes valores de velocidades u_{mf}	80
Figura 4-11- Representação do comportamento do fator de atrito de <i>Fanning</i> como função do número de <i>Reynolds</i> para diferentes tipos de fraturas.....	81
Figura 4-12- Curva de superfície da velocidade para fratura com paredes paralelas e planas.	82
Figura 4-13- Perfis de velocidade da fratura com paredes paralelas e planas.	82
Figura 4-14- Partição que contém a menor e a maior velocidade máxima local para a fratura com paredes senoidais sem deslocamento.	83
Figura 4-15- Curva de superfície da velocidade para fratura com paredes senoidais sem deslocamento.	84
Figura 4-16- Perfis de velocidade da fratura com paredes senoidais sem deslocamento.....	84
Figura 4-17- Partição que contém a menor e a maior velocidade máxima local para a fratura com paredes senoidais com deslocamento.	85
Figura 4-18- Curva de superfície da velocidade para fratura com paredes senoidais com deslocamento.	86
Figura 4-19- Perfis de velocidade da fratura com paredes senoidais com deslocamento.	86
Figura 4-20- Partições que contém a menor (I) e a maior (II) velocidade máxima local para a fratura real.	87
Figura 4-21- Curva de superfície da velocidade para a partição I da fratura real.	88
Figura 4-22- Perfis de velocidade para a partição I da fratura real.	88
Figura 4-23- Curva de superfície da velocidade para a partição II da fratura real.	89
Figura 4-24- Perfis de velocidade para a partição II da fratura real.	89
Figura A-1- Domínio particionado em n subdomínios.....	103
Figura A-2- Domínio particionado em 2 subdomínios.....	104
Figura B-1- Geometria gerada pelos polinômios de regressão e o perfil de velocidade adimensional do duto de seção transversal circular.....	106
Figura B-2- Geometria gerada pelos polinômios de regressão e o perfil de velocidade adimensional do duto de seção transversal elíptico com $a/b=1/2$	107
Figura B-3- Geometria gerada pelos polinômios de regressão e o perfil de velocidade adimensional do duto de seção transversal elíptico com $a/b=1/10$	108
Figura B-4- Geometria gerada pelos polinômios de regressão e o perfil de velocidade adimensional do duto de seção transversal quadrada.....	109

Figura B-5- Geometria gerada pelos polinômios de regressão e o perfil de velocidade adimensional do duto de seção transversal triangular equilátero.....	110
Figura B-6- Geometria gerada pelos polinômios de regressão e o perfil de velocidade adimensional do duto de seção transversal com placas paralelas.....	111
Figura B-7- Geometria gerada pelos polinômios de regressão e o perfil de velocidade adimensional do duto de seção transversal duplo seno.....	112
Figura B-8- Geometria gerada pelos polinômios de regressão para a fratura da face superior e inferior da amostra FFT.....	113
Figura B-9- Geometria gerada pelos polinômios de regressão para a fratura da face superior e inferior da amostra FFL1.....	113
Figura B-10- Geometria gerada pelos polinômios de regressão para a fratura da face superior e inferior da amostra FFL2.....	114

LISTA DE TABELAS

Tabela 2-1 – Valores para o número fRe	34
Tabela 2-2 - Estudos referentes a modificações da Lei Cúbica baseado em $h_H = \overline{h(x, y)}C_rC_t$	39
Tabela 4-1 – Resultados de fRe para diferentes números de funções base para diversas geometrias e a discrepância com os resultados de SHAH e LONDON (1978). .	68
Tabela 4-2 – Resultados do produto fRe para diferentes números de partições e geometrias e a discrepância com os resultados obtidos por SHAH e LONDON (1978).....	69
Tabela 4-3 - Resultados da permeabilidade, abertura hidráulica e transmissividade obtidos no presente trabalho, por Sarkar <i>et al.</i> (2004) e a solução analítica (Lei cúbica). ...	72
Tabela 4-4 - Resultados para fRe_1 e fRe_2 obtidos no presente trabalho.	74
Tabela 4-5 - Resultados para k_1 e k_2 obtidos no presente trabalho.	75
Tabela C-1 - Resultados da permeabilidade, abertura hidráulica e transmissividade obtidos no presente trabalho para as fraturas da amostra FFT.....	115
Tabela C-2 - Resultados da permeabilidade, abertura hidráulica e transmissividade obtidos no presente trabalho para as fraturas da amostra FFL1.....	115
Tabela C-3 - Resultados da permeabilidade, abertura hidráulica e transmissividade obtidos no presente trabalho para as fraturas da amostra FFL2.....	115
Tabela C-4 – Resultados obtidos no presente trabalho para 132 tipos de fraturas.....	116

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BEM – *Boundary Elements Method*

GBI – *Galerkin-based Integral*

REV – *Representative Elementary Volume*

NS – *Navier – Stokes*

LCL – *Lei Cúbica Local*

FPP – *Modelo de Fratura com Paredes Lisas e Paralelas*

FFT – *Amostra de Arenito Fontainebleau fraturada com corte de serra*

FFL1 – *Amostra de Arenito Flechtinger fraturado por tração e remontada com deslocamento de 0,20mm entre as superfícies.*

FFL2 – *Amostra de Arenito Flechtinger fraturado por tração e remontada sem deslocamento entre as superfícies.*

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	13
1.1 Objetivo Geral	16
1.2 Objetivos Específicos	16
CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	17
2.1 Pesquisas Relacionadas à Meios Porosos.....	17
2.2 Escoamento em Dutos	26
2.2.1 Equação da Quantidade de Movimento.....	26
2.2.2 Exemplos de Aplicações da Equação do Movimento	30
2.2.3 Números Adimensionais Importantes	33
2.3 Escoamento em Meio Poroso	34
2.3.1 O Modelo de Placas Paralelas – Lei Cúbica.....	36
2.4 O Método Integral Baseado em <i>Galerkin</i>	41
CAPÍTULO 3 - MATERIAIS E MÉTODOS	44
3.1 Formulação Matemática para Determinar o Número fRe em um Domínio Particionado via Método GBI.....	44
3.1.1 Método para Obtenção das Funções Base	47
3.2 Formulação Matemática para o Problema de Escoamento através de Fratura em Meio Poroso	53
3.3 Parâmetros Fluidodinâmicos	58
3.4 Procedimento Numérico	60
3.4.1 <i>Softwares ImageJ e Grapher</i>	61
3.4.2 <i>Software Maple</i>	63
3.4.3 Código <i>Maple</i> para o cálculo de fRe, k_f, h_H e T	64
CAPÍTULO 4 - RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	67
4.1 Escoamento em Dutos Diversos	67
4.2 Escoamento através de Fraturas em Meios Porosos.....	71
4.3 Análise de Parâmetros Fluidodinâmicos em Fraturas Aleatórias.....	78
CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	91
5.1 Conclusões.....	91

5.2 Trabalhos Futuros	92
REFERÊNCIAS	94
APÊNDICE A	103
APÊNDICE B.....	106
APÊNDICE C	115

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Compreender o processo de escoamento através de meios porosos é de grande importância, visto que o estudo dos fenômenos de transportes nesses meios tem alta gama de aplicações em diversas áreas do conhecimento e na indústria, como por exemplo: na agronomia, na engenharia civil, na engenharia química, na mineração, na biomecânica, na geomecânica, na mecânica dos solos, na indústria petroleira, na geofísica, na medicina, dentre outros (SCHEIDEGGER, 1960; SNOW, 1965; WITHERSPOON *et al.*, 1980; BEAR, 1972; ZIMMERMAN e BODVARSSON, 1996; SARKAR *et al.*, 2004; MARTINS *et al.*, 2009; GANJI e KACHAPI, 2015; SCHON, 2015; SANTOS *et al.*, 2016; DE ANNA *et al.*, 2017; SIMÕES, 2017; CHENG *et al.*, 2020; HE *et al.* 2021).

Na exploração de petróleo, por exemplo, o conhecimento prévio do corpo poroso, das propriedades das rochas, bem como dos fluidos que compõem o reservatório, é decisivo no estudo do comportamento do reservatório e, portanto, obter um melhor resultado no planejamento das estratégias para tal processo. No entanto, um reservatório, seja ele de petróleo ou um aquífero, tem muitas variações, tanto na capacidade de escoamento - permeabilidade - quanto na quantidade de espaços vazios do meio - porosidade - e isto é um dos principais problemas no estudo desses reservatórios. Tais parâmetros - permeabilidade e porosidade - de um reservatório podem ser descritos por suas propriedades de fluxo.

Segundo Zimmerman e Bodvarsson (1996), em muitas formações geológicas com baixa permeabilidade da matriz, o fluxo de fluidos ocorre predominantemente através de fraturas. Em alguns casos, a maior parte do fluxo ocorre através de uma única fratura ou falha, enquanto em outros casos, o fluxo ocorre através de uma rede de fraturas. Uma estimativa sugere que as fraturas são importantes em cerca de 60% dos reservatórios de hidrocarbonetos do mundo, embora a "negação de fraturas" não seja um fenômeno incomum na indústria do petróleo.

Geólogos e engenheiros estão cada vez mais enfrentando o desafio de avaliar o papel das fraturas para fundamentar as decisões de desenvolvimento. As fraturas apresentam tanto problemas quanto oportunidades para a exploração e produção de reservatórios de petróleo. Na

maioria dos casos, as fraturas são importantes por causa da permeabilidade, e não da porosidade. A porosidade da matriz armazena os hidrocarbonetos, e as fraturas fornecem caminhos permeáveis para o transporte dos hidrocarbonetos até os poços produtores (SARKAR *et al.*, 2004).

Assim sendo, as jazidas naturalmente ou artificialmente fraturadas se destacam como forte candidatas a exploração, visto que são as fraturas que controlam predominantemente o transporte de fluidos, pois nelas têm-se os maiores índices de permeabilidades, na maioria dos meios porosos que contém hidrocarbonetos.

Logo, compreender as variações complexas na geometria das fraturas em diferentes faces litológicas é a chave para melhorar a descrição e a exploração do reservatório e mesmo sendo crucial, ainda existem diversas restrições devido à falta de conhecimento sobre o fluxo através das fraturas, o que acarreta dificuldades na capacidade de produção. Devido ao exposto, diversos estudos têm sido publicados nos últimos anos sobre o transporte de fluidos em fraturas no intuito de compreender as características desse fenômeno e, portanto, entender o comportamento do meio poroso.

Diversas pesquisas propõem modelos e metodologias, baseadas no modelo de placas paralelas, amplamente utilizado para simular o fluxo laminar em uma fratura devido à sua formulação simples. Ele trata uma fratura como duas placas paralelas e lisas, a qual é inicialmente pensada por Snow (1965; 1969). Segundo He *et al.* (2021), com essa suposição idealizada, uma integração analítica das equações de Navier-Stokes resulta na lei cúbica, onde a taxa de fluxo volumétrico é proporcional ao cubo da abertura da fratura (BEAR, 1972; WITHERSPOON *et al.*, 1980; BROWN *et al.*, 1995; ZIMMERMAN e BODVARSSON, 1996; ZIMMERMAN e YEO, 2000; BASHA e EL-ASMAR, 2003; BRUSH e THOMSON, 2003; SARKAR *et al.*, 2004; BEAR *et al.*, 2012; XIAO *et al.*, 2013; CHENG *et al.*, 2020). A lei cúbica é amplamente utilizada na modelagem do fluxo e transporte em formações fraturadas em várias disciplinas devido à sua simplicidade e eficiência.

Porém, não é simples estudar e compreender este tipo de problema, visto que as fraturas reais frequentemente são compostas por superfícies com rugosidade anisotrópica e abertura variável (HE *et al.*, 2021), acarretando em dificuldades para se criar modelos matemáticos capazes de tratar os mesmos, não havendo uma metodologia genérica que seja capaz de lidar com todas as questões envolvidas.

Neste contexto, encontra-se na literatura diversas metodologias e modelos modificando as equações que governam o problema (LOMIZE, 1951; LOUIS, 1969; ZIMMERMAN e BODVARSSON, 1996; RASOULI e HOSSEINIAN, 2011; HE *et al.*, 2021), isto ocorre, na

maioria das vezes, devido a tentativa de sanar as dificuldades geradas pelas diferentes geometrias que as fraturas possuem e por outros parâmetros que possam afetar a permeabilidade na mesma, tais como a rugosidade, abertura hidráulica, tortuosidade, conectividade (em redes de fraturas) (TSANG e WITHERSPOON, 1981; BROWN, 1987; ZIMMERMAN *et al.*, 1991, 1992; RASOULI e HOSSEINIAN, 2011; HE *et al.*, 2021). Os estudos acima fazem uso de várias técnicas numéricas, analíticas ou experimentais para obtenção dos seus resultados.

Em 1915, Boris Grigoryevich Galerkin publicou um trabalho em que a ideia principal era um método de aproximação para equações diferenciais, em particular, para problemas de valor de contorno. Ele havia aplicado seu método para um grande número de problemas de análise de pivô e placas. Essas ideias mostraram ser muito produtivas, não apenas na mecânica estrutural, mas para a física matemática em geral (SANTOS JÚNIOR, 2018). O método integral baseado em *Galerkin* (*GBI Method*) pode ser considerado simplesmente como um meio de aproximar soluções de equações diferenciais (DUNCAN, 1937).

Assim sendo, a proposta deste trabalho é utilizar uma forma diferente do método integral baseado em *Galerkin*, baseado no particionamento do domínio discreto, para analisar o transporte através de uma fratura em meio poroso, analisando a fratura pela complexidade de sua geometria, a fim de expor dados sobre a permeabilidade da mesma.

De acordo com o estudo realizado por Santos Júnior (2018), Santos Júnior *et al.* (2020, 2021), o método GBI tem se mostrado bastante eficiente para a análise de escoamento laminar em dutos de diversas geometrias, bem como em meios porosos. Após levantamento bibliográfico realizado até então, observou-se uma ausência de trabalhos empregando tal método no estudo de escoamentos monofásicos ou multifásicos através de fraturas em meios porosos, principalmente na forma que é proposto o método neste trabalho. Neste sentido, o presente trabalho apresenta uma modelagem matemática e simulação numérica que contribui, de maneira significativa, em melhor compreender os fenômenos envolvidos no transporte de fluidos através de fratura em meio poroso e assim compreender melhor o comportamento do escoamento, bem como suas características e propriedades, com base num modelo de permeabilidade caracterizado pelo produto do fator de atrito e o número de *Reynolds*.

Ademais, no Capítulo 2 é apresentado uma revisão bibliográfica abrangente sobre pesquisas relacionadas à meios porosos e a fundamentação teórica de escoamento em dutos, escoamento através de fraturas em meio poroso e o método GBI. O Capítulo 3 consiste na apresentação das formulações matemáticas para adaptar o método GBI e aplicá-lo em um domínio particionado e das formulações matemáticas das equações que relacionam o produto do fator de atrito e o número de *Reynolds* com a permeabilidade, abertura hidráulica equivalente

e transmissividade da fratura. Além disso, são apresentadas a metodologia e o procedimento numérico para as simulações. No Capítulo 4, são apresentadas as discussões acerca dos resultados para o produto fRe , permeabilidade, abertura hidráulica e transmissividade, acerca de quatro modelos de fraturas, além disso, foram analisados parâmetros fluidodinâmicos tais como queda de pressão, fator de atrito e distribuição de velocidade em 132 tipos de fraturas diferentes. O Capítulo 5 é reservado para a apresentação das conclusões e sugestões para trabalhos futuros. Por fim, são apresentadas referências bibliográficas utilizadas e os apêndices deste trabalho.

1.1 Objetivo Geral

Avaliar o comportamento do escoamento de fluidos em fratura de meio poroso empregando o método GBI, baseado no particionamento do domínio de estudo.

1.2 Objetivos Específicos

- Propor uma metodologia de abordagem modificada para o método GBI, baseado no particionamento do domínio discretizado;
- Aplicar o método GBI em subdomínios para analisar o transporte de fluidos através de fratura de meios porosos, partindo das geometrias das seções transversais;
- Analisar e avaliar parâmetros como permeabilidade, abertura hidráulica e transmissividade no escoamento em fraturas, observando a influência destes parâmetros, propondo um modelo de permeabilidade caracterizado pelo produto fRe ;
- Simular e avaliar o efeito dos parâmetros fluidodinâmicos e aspectos geométricos da fratura sobre a queda de pressão, fator de atrito e a distribuição de velocidade;
- Comparar os resultados obtidos com os dados e/ou resultados disponibilizados na literatura.

Capítulo 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Pesquisas Relacionadas à Meios Porosos

Ao longo dos anos, vários estudos foram realizados em diversos meios porosos visando compreender, analisar e apresentar resultados satisfatórios sobre a capacidade de permeabilidade relacionada a outros fatores do meio, sendo com soluções analíticas, numéricas ou empíricas.

Para calcular a diferença de pressão em um escoamento laminar em leito granular compactado, Kozeny (1927) e Carman (1937, 1956) relacionaram as Leis de Hagen-Poiseuille e de Darcy e trataram um meio poroso como um conjunto de tubos capilares circulares paralelos. Neste estudo, observou-se certa limitação da equação proposta, pelo fato de que todas as características geométricas da amostra foram combinadas em uma única constante. Com isso, Carman (1937, 1956) introduziu o fator de forma do poro e a tortuosidade para adequar o modelo ao seu experimento.

Em sua tese de doutorado, Snow (1965), propôs um modelo de placas paralelas para descrever o escoamento de fluidos em meios porosos com fraturas, isto é, baseou-se na ideia de que as fraturas são representadas como aberturas entre duas placas planas paralelas. O modelo, também conhecido como “Lei Cúbica”, considera a interação entre o fluxo na matriz rochosa e nas fraturas, levando em conta os efeitos de pressão, permeabilidade e outras propriedades relevantes.

Noutro trabalho, Snow (1969) avaliou como a presença de fraturas em um meio influencia a permeabilidade e como essa permeabilidade pode variar em diferentes direções. A pesquisa examinou a natureza das fraturas e sua orientação em relação ao fluxo de fluidos. Snow analisou como as características das fraturas, como a densidade, a largura, o comprimento e a orientação, afetam a permeabilidade anisotrópica do meio fraturado. Os resultados do estudo

revelam que a permeabilidade de meios fraturados é fortemente influenciada pela orientação das fraturas em relação ao fluxo de fluidos. A permeabilidade pode ser significativamente maior ou menor em diferentes direções, dependendo da orientação preferencial das fraturas.

Witherspoon *et al.* (1980) discutiram se a lei cúbica, que descreve o fluxo laminar em meios porosos, também é aplicável em fraturas de rochas que podem sofrer deformação. Eles realizaram experimentos para medir a taxa de fluxo de fluido em fraturas sujeitas a diferentes níveis de deformação. Também analisaram se a lei cúbica, que estabelece uma relação entre a abertura da fratura e o gradiente de pressão, continua sendo válida mesmo quando a fratura está sujeita a deformação. Os resultados do estudo indicam que a lei cúbica não é válida para descrever com precisão o fluxo de fluidos neste tipo de fraturas. A deformação afeta significativamente o padrão e a taxa de fluxo de fluidos, alterando a relação entre a abertura da fratura e o gradiente de pressão.

Brown *et al.* (1995) versaram sobre a aplicabilidade da equação de *Reynolds* para modelar o fluxo de fluidos entre superfícies rugosas. No estudo, foram realizados experimentos e análises para avaliar o desempenho da equação de *Reynolds* na modelagem do fluxo entre superfícies rugosas. Os autores investigaram a influência da rugosidade das superfícies, bem como a pressão e o gradiente de pressão aplicados. Os resultados do estudo revelaram que a equação de *Reynolds* pode ser aplicável para modelar o fluxo entre superfícies rugosas, desde que certas condições sejam atendidas, porém a rugosidade das superfícies e as características do escoamento afetam a precisão dos resultados obtidos com a equação de *Reynolds*.

Koponen *et al.* (1996) discutem em seu artigo as possíveis definições de tortuosidade que aparecem na derivação da lei de Darcy na estrutura de modelos capilares, a qual é então generalizada para meios porosos aleatórios, e utilizando o método *Lattice-Gas Cellular*, encontram uma correlação numérica entre a tortuosidade e a porosidade de um material poroso que consiste em retângulos livremente sobrepostos, posicionados de modo aleatório.

Nos seus estudos, Zimmerman e Bodvarsson (1996), abordam a complexidade da condutividade hidráulica em fraturas de rochas, considerando a interação entre a geometria das fraturas, a rugosidade das superfícies e as propriedades hidráulicas do fluido. Os autores apresentaram um conjunto de equações e modelos teóricos para descrever e prever a condutividade hidráulica em diferentes tipos de fraturas de rochas. Além disso, discutem técnicas experimentais e computacionais utilizadas para medir e estimar a condutividade hidráulica das fraturas e destacaram a importância de combinar dados de campo, laboratório e modelagem numérica para obter estimativas mais precisas em situações reais.

Mavko e Nur (1997) incluíram o limiar de percolação na equação de Kozeny-Carman e mostraram que a dependência da terceira potência derivada da porosidade pode ser mantida, ajustando com precisão a permeabilidade observada em certos materiais bem classificados, com isso e comparando seus resultados com os medidos por outros autores, ampliaram a aplicação dessa ferramenta.

Yang e Aplin (1998) elaboraram um modelo de permeabilidade utilizando a forma do poro, o qual é formado por dois troncos de cones conectados em sua base, a distribuição do tamanho da garganta e o alinhamento dos poros como entradas principais. Além disso, apresentaram dados de tamanho de poro, área de superfície específica e tamanho de grão para onze amostras de arenito da margem norueguesa, os quais foram utilizados para calcular permeabilidades. As permeabilidades verticais, calculadas usando a equação desenvolvida, são três a setenta vezes inferiores às permeabilidades calculadas a partir da equação de Kozeny-Carman, assumindo um valor de cem para o produto entre o fator de forma e a tortuosidade na equação. Segundo os autores, as discrepâncias observadas entre as permeabilidades calculadas destacam incertezas de atribuir valores precisos de permeabilidade aos arenitos, usando parâmetros como porosidade e área específica da superfície. Além disso, a equação de Kozeny-Carman assume que os poros são tubos capilares com seções transversais idênticas, enquanto os raios da garganta dos poros nos arenitos variam, tipicamente, em duas ordens de magnitude.

Em outro artigo, Zimmerman e Yeo (2000) abordaram o fluxo de fluidos em fraturas de rochas, analisando desde as equações de Navier-Stokes até a lei cúbica. Os autores discutiram os desafios de modelar o fluxo de fluidos em fraturas de rochas devido à sua natureza complexa e heterogênea. Eles examinaram as equações de Navier-Stokes, que descrevem o comportamento do fluxo de fluidos em meios porosos, e como essas equações podem ser adaptadas e aplicadas às fraturas de rochas. Os resultados destacaram a importância de considerar a geometria e as características das fraturas ao modelar o fluxo de fluidos, e a necessidade de desenvolver abordagens mais precisas para modelar tal fenômeno, levando em consideração a heterogeneidade e a complexidade desses sistemas.

Patzek e Silin (2001) desenvolveram expressões analíticas para bissetriz de cantos aleatórios que satisfazem um determinado fator de forma, calculado a partir das imagens microscópicas do meio poroso, e obtiveram as condutâncias hidráulicas de dutos triangulares arbitrários semi analiticamente, usando mapeamento conforme, e as condutâncias dos dutos, com formato de triângulos equiláteros, retângulos e elipses, são calculadas analiticamente. Tendo o mesmo fator de forma como base e motivados por limitações de modelos mais simples, Lago e Araujo (2001), usando o método MS-P (Método de Mayer e Stowe), apresentaram uma

expressão analítica para calcular a pressão limiar de capilares generalizados com seção transversal poligonal irregular, para valor arbitrário do ângulo de contato, mostrando a dependência da pressão limiar com o fator de forma e a saturação da fase molhante.

Sarkar *et al.* (2004) utilizaram a metodologia baseada em Dinâmica dos Fluidos Computacional e investigaram os desafios associados à modelagem do fluxo em fraturas, considerando fatores como a geometria da fratura, a permeabilidade, a rugosidade das superfícies e a interação com o meio circundante. Com simulações de fluxo laminar, viscoso e em estado estacionário para um fluido newtoniano realizadas em modelos de fraturas 2D e 3D, observaram, dentre outras coisas, que para fins de caracterização hidráulica, o fluxo de fluidos em fraturas pode ser suficientemente modelado usando as equações de Stokes e Navier-Stokes.

Com o intuito de estudar as características do fluxo em fraturas e as propriedades hidráulicas que influenciam o comportamento desse fenômeno, Basha e El-Asmar (2003) derivaram uma equação que relaciona a taxa de fluxo com a abertura da fratura, a permeabilidade, a viscosidade do fluido e outras variáveis relevantes. Como resultado, forneceram uma solução perturbativa para a equação de fluxo em fraturas, permitindo uma estimativa aproximada da taxa de fluxo em diferentes condições. Essa solução perturbativa leva em consideração pequenas variações na abertura da fratura e em outras propriedades para melhorar a precisão da estimativa e foi comparada com resultados experimentais e observações de campo para validar sua eficácia.

Brush e Thomson (2003) investigaram o fluxo de fluidos em fraturas sintéticas com paredes rugosas. Foram realizadas simulações utilizando diferentes abordagens para modelar o comportamento do fluxo em fraturas rugosas. Os resultados de simulações tridimensionais de Navier-Stokes (NS) e de Stokes, e simulações bidimensionais da Lei cúbica local (LCL) de fluxo de fluido através de fraturas rugosas sintéticas individuais, mostraram que as simulações baseadas nas equações de Navier-Stokes, que consideram a viscosidade e a pressão do fluido, fornecem resultados mais precisos para o fluxo em fraturas rugosas. No entanto, as simulações baseadas nas equações de Stokes e na lei local cúbica também fornecem aproximações razoáveis em certas situações.

Partindo da abordagem clássica de Kozeny-Carman, Costa (2006) relacionou teoricamente a permeabilidade com a porosidade, baseando-se em uma suposição de geometria fractal do meio poroso e na lei empírica de Archie, sem introduzir o conceito de raio hidráulico. Para validar a equação, ela foi usada com sucesso para prever a permeabilidade de diferentes sistemas não granulares, como tapetes de fibras e rochas vesiculares.

Chen e Papathanasiou (2006) estudaram computacionalmente o fluxo em meios fibrosos, fornecendo um passo para prever a permeabilidade de formas fibrosas com geometrias complexas. No processo, realizaram extensos cálculos usando uma implementação paralela do Método dos Elementos de Contorno - BEM na sigla em inglês - e explicaram a ampla dispersão observada experimentalmente nos valores da constante de Kozeny. De modo geral, os dados numéricos concordaram, razoavelmente, bem com os dados experimentais de outros autores.

Objetivando avaliar as características físicas do sistema de poros e a permeabilidade de um determinado tipo de concreto, Neithalath *et al.* (2008), combinando a condutividade elétrica normalizada do concreto com a porosidade do material e aplicando-o em uma versão modificada da equação de Kozeny-Carman, introduziram um novo parâmetro chamado fator de conectividade hidráulico, tal fator é uma combinação de parâmetros que descrevem o volume e a geometria do espaço poroso de forma que a permeabilidade esteja relacionada à porosidade e ao fator de conectividade hidráulica. Os resultados de permeabilidade previstos por este método tiveram bom desempenho com os medidos por um permeamômetro desenvolvido para este tipo de concreto.

Representando a forma dos poros reais como estrelas regulares com n-cantos e geralmente não convexas, Helland *et al.* (2008) desenvolveram uma técnica de caracterização dessas formas em estrela, que considera o fator de forma e o raio hidráulico adimensional como parâmetros de entrada. Compararam seus resultados com a abordagem mais comum que é escolher uma geometria do poro como sendo círculo, triângulo ou quadrado com um fator de forma correspondente ao da forma real dos poros.

Xiong *et al.* (2011) apresentaram um estudo com metodologia experimental e numérica das características geométricas e hidráulicas de uma fratura simples de rocha durante o processo de cisalhamento. Foram medidas e analisadas as mudanças na geometria da fratura de rocha e no que isso refletiu nas características hidráulicas. Percebeu-se que a abertura da fratura aumenta significativamente durante o cisalhamento, enquanto a rugosidade também desempenha um papel importante na resistência ao fluxo de fluido.

Yazdchi *et al.* (2011) estudaram numericamente, usando o método de elementos finitos, a permeabilidade através de matrizes aleatórias unidirecionais de fibras em formatos cilíndricos. Os autores propuseram uma relação modificada da equação de Kozeny-Carman, em que levaram em consideração a tortuosidade e o efeito de lubrificação dos canais. Além disso, apresentaram uma constante de Kozeny, definida como o produto da tortuosidade e do fator de forma do poro, para regimes de porosidade intermediária.

Ahmadi *et al.* (2011) desenvolveram funções analíticas para a tortuosidade e permeabilidade de matrizes com esferas de mesmo tamanho, baseados em uma abordagem de média de volume e eliminando algumas ambiguidades por modificação do modelo de volume elementar representativo - REV na sigla em inglês - original. As expressões analíticas desenvolvidas foram verificadas comparando-as com funções de trabalhos anteriores com boa avaliação, e obtiveram uma concordância muito boa.

Utilizando-se de um método estatístico, Jian-Long *et al.* (2012) analisaram a tortuosidade para linhas de corrente em meios porosos que acopla os modelos de círculo e quadrado. A relação entre tortuosidade e porosidade é obtida com diferentes configurações e não inclui nenhuma constante empírica. Além disso, a dimensão fractal da tortuosidade é expressa em função da porosidade. Segundo os autores, as correlações previstas da tortuosidade e da porosidade concordam bem com os resultados experimentais e simulados existentes.

Com o objetivo de fornecer uma ferramenta de medição simples e de baixo custo para determinar a permeabilidade do ar em amostras de solo, Brown e Smith (2013) desenvolveram e aplicaram um permeâmetro de ar com fluxo transitório usando uma seringa. Eles realizaram experimentos para avaliar a precisão e a confiabilidade do permeâmetro, comparando os resultados obtidos com outros métodos de medição de permeabilidade do ar.

Baseado em Purcell (1949), e seguindo uma abordagem com Volume Elementar Representativo, Ruth *et al.* (2013) elaboraram um estudo sobre vinte e quatro amostras de um meio poroso. Neste, demonstraram que o trabalho seguido, em particular, pode ser usado para fornecer previsões primárias de permeabilidade, desde que as medidas de porosimetria por injeção de mercúrio e fator de formação estejam disponíveis, sejam idênticas ou associadas as amostras.

Ozgunus *et al.* (2014) estudaram numericamente as permeabilidades de meios porosos que contêm hastes retangulares. Neste estudo, os efeitos da porosidade e da proporção do tamanho de poros e gargantas na constante de Kozeny, além da aplicabilidade da equação de Kozeny-Carman para o meio objeto do estudo, foram investigados. Com isso, é estabelecida uma relação entre constante de Kozeny, a porosidade e proporção de tamanho de poro e garganta.

Para uma análise sensitiva da porosidade, tortuosidade, superfície específica do corpo poroso e a constante do modelo na equação de Kozeny-Carman, e da porosidade, do diâmetro das partículas e da função de esfericidade na equação de Ergun, Sobieski e Zhang (2014), seguindo um método que expressa tal sensibilidade em números, determinaram a importância e o impacto dos parâmetros em cada uma das equações.

Srisutthiyakorn e Mavko (2015) estudaram o escoamento monofásico através de dutos com diversas seções transversais, incluindo seções circular, elíptica, quadrada e triangular equilátera, e desenvolveram uma modificação para a equação de Kozeny-Carman usando o conceito de raio aparente. Ilustraram através de um tubo com um defletor fino no meio como a permeabilidade está relacionada ao raio de um tubo ou ao tamanho da garganta dos poros. Segundo os autores, embora esse método de uso ainda precise de uma correção do fator geométrico, ainda fornece uma melhor estimativa de permeabilidade em comparação à relação convencional de Kozeny-Carman. Mais tarde, Srisutthiyakorn e Mavko (2017a) determinaram a distribuição das tortuosidades e a tortuosidade média ponderada pelo fluxo, com isso perceberam que na relação clássica de Kozeny-Carman falta algumas informações geométricas importantes necessárias para prever a permeabilidade com mais precisão. Na busca dessas, estudaram várias opções, como a conectividade do meio poroso e a distribuição da garganta dos poros das linhas de fluxo, e ilustraram com exemplos de tubos sinusoidais que a distribuição da garganta dos poros captura o que está faltando na relação. Em outro trabalho, Srisutthiyakorn e Mavko (2017b), pressupõe que o escoamento em meios porosos é semelhante ao escoamento em vários dutos em série e propuseram mais uma correção na equação de Kozeny-Carman, com base na distribuição do tamanho dos poros das amostras e no raio aparente.

Um estudo de Zhou *et al.* (2018) concentrou na medição das propriedades mecânicas e análise da propagação de fraturas do xisto Longmaxi por meio de compressão uniaxial com Micro-CT. Para realizar testes de compressão uniaxial enquanto registra imagens em 3D das amostras por meio do Micro-CT, utilizaram amostras de xisto Longmaxi. Isso permitiu uma análise detalhada das propriedades mecânicas e do comportamento da fratura durante o teste de compressão. Como resultados foram identificadas as principais direções de propagação das fraturas, a formação de fraturas múltiplas e a interação entre diferentes fraturas.

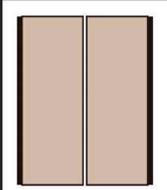
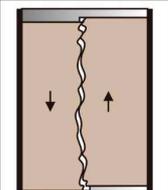
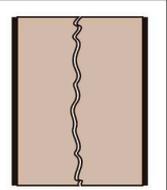
Lala (2018) sugeriu equações alternativas derivadas da equação de Kozeny-Carman, onde o tamanho do grão é substituído pelo tamanho do poro e a tortuosidade passando a ser variável. Apesar de concluir que a capacidade preditiva dessas equações é discutível, elas podem ajudar com o controle de qualidade dos dados existentes e a previsão das tendências de permeabilidade-porosidade em texturas sedimentares semelhantes.

Schulz *et al.* (2019), para estudar numericamente as relações de porosidade e permeabilidade, utilizaram a abordagem do método *upscaling* e como método de discretização, escolheram o método descontínuo de *Galerkin* em grades estruturadas. Por fim, compararam os resultados obtidos com as relações de *Kozeny-Carman* e *Verma-Pruess* e investigaram os limites da validade.

Li *et al.* (2019) apresentaram um estudo quantitativo das características geométricas e hidráulicas de uma única fratura de rocha. Neste, realizaram medições detalhadas da geometria da fratura, incluindo sua abertura, comprimento e rugosidade. Além disso, eles investigaram as propriedades hidráulicas da fratura, como a condutividade hidráulica e a resistência ao fluxo de fluido. Os principais resultados do estudo incluem a identificação de correlações entre as características geométricas da fratura e suas propriedades hidráulicas.

Objetivando investigar e comparar três diferentes métodos em escala de laboratório para determinar aberturas hidráulicas em amostras de arenito fraturado com permeabilidade desprezível da matriz, Cheng *et al.* (2020) realizaram medições diretas usando um aparelho de fluxo contínuo e um permeômetro de fluxo de ar transiente. A Figura 2-1 mostra a representação de três dessas amostras, e a classificação em relação a rugosidade e abertura das fraturas em cada uma delas.

Figura 2-1- Características das fraturas das amostras FFT, FFL1 e FFL2.

	FFT	FFL1	FFL2
Modelo da Amostra			
Rugosidade	★	★★★	★★★
Abertura	★	★★	★
Fratura Superior			
Fratura Inferior			

Fonte: Adaptado de Cheng *et al.* (2020).

No primeiro método de medição, os autores determinam a permeabilidade das amostras cilíndricas fraturadas de arenito do tipo Fontainebleau e Flechtinger, com 30mm de diâmetro e 40mm de comprimento, e utilizam a Lei cúbica para estimar a permeabilidade e a abertura

hidráulica da fratura, em diferentes pressões de confinamento. A porosidade e diâmetro médio dos poros, foram determinados por intrusão de mercúrio. A porosimetria dos arenitos de Fontainebleau e Flechtinger, é de 2,3% e $0,7\mu m$ e 9,4% e $3,8\mu m$, respectivamente. Ambas as rochas são caracterizadas por uma baixa permeabilidade da matriz na ordem de $10^{-18} m^2$.

As fraturas representadas por FFL1 e FFL2 foram induzidas por tração, usando um teste brasileiro, resultando em danos insignificantes nas bordas. As duas metades separadas foram remontadas, para FFL1 com um deslocamento de $0,20mm$ e para FFL2 as duas metades da amostra foram pareadas sem deslocamento. A amostra FFT continha uma fratura cortada por serra. Cheng *et al.* (2020) classificaram as fraturas por duas características, rugosidade e abertura, dando-lhes quantidade de estrelas (1 para menor até 3 para maior). Neste sentido, a fratura da amostra FFT, é classificada como aquela que tem a menor rugosidade e abertura, visto que o arenito de Fontainebleau tem menor porosidade e tamanho de grãos em relação ao arenito de Flechtinger, além de ter sido obtido por um corte de serra. Os resultados, mostraram que as aberturas hidráulicas provenientes das medições com fluxo estão em excelente acordo quantitativo, porém as aberturas hidráulicas calculadas a partir das aberturas mecânicas e usando equações empíricas, mostram variações maiores com os resultados derivados do fluxo.

Hu *et al.* (2020) estudaram o comportamento e a relação entre permeabilidade e parâmetros da estrutura dos poros, dimensão fractal da área porosa e dimensão fractal da tortuosidade capilar em matrizes de meios porosos compostas por partículas esféricas distribuídas aleatoriamente em duas ordens de magnitude usando o princípio fractal. Por fim, deduziram os modelos de permeabilidade dos dois modos de combinação das partículas, ao comparar com os dados experimentais e os resultados das fórmulas analíticas existentes, o modelo se mostrou preciso.

Fazendo uso do Método GBI, Santos Júnior *et al.* (2021) propuseram um método que incorpora o produto fRe na equação de Kozeny-Carman e retorna um termo de fator de forma substituto para sua contraparte original, com isso determinaram fatores de forma para seções transversais genéricas de canais de poros. A abordagem foi validada em canais capilares retos com seções transversais arbitrárias sujeitas a fluxo monofásico estacionário sob o regime laminar. Além disso, demonstraram a aplicabilidade da abordagem GBI, relatando um estudo de caso que determina fatores de forma para 19 seções de poros individuais genéricos de um experimento de laboratório envolvendo medições de taxa de fluxo em um arranjo industrial de um leito empacotado.

Após revisarem diversos métodos comumente utilizados baseados na lei cúbica, He *et al.* (2021) propuseram uma lei cúbica corrigida para o fluxo laminar incompressível de fase

única em fraturas com paredes rugosas. A lei corrigida incorpora a abertura hidráulica da fratura com base na tortuosidade do fluxo e na rugosidade local das paredes da fratura. Os autores realizaram simulações de alta resolução para as equações de Navier-Stokes em fraturas sintéticas com diferentes faixas de rugosidade superficial e aberturas. As soluções numéricas foram usadas para avaliar a precisão do modelo proposto e compará-lo com os outros métodos revisados, onde demonstraram sua superioridade em termos de precisão.

2.2 Escoamento em Dutos

Nesta seção foi revisada o conceito de escoamento laminar isotérmico em regime permanente completamente desenvolvido de um fluido newtoniano modelado pela equação do movimento. Os trabalhos de Shah e London (1978), White (2006, 2011), Çengel (2012) e Santos Júnior (2018) nos serviram de base para esta seção.

2.2.1 Equação da Quantidade de Movimento

A região do escoamento em que os efeitos da força de cisalhamento viscoso, causados pela viscosidade do fluido, são sentidos é chamada camada limite. No escoamento interno, o fluido está completamente confinado pelas superfícies do interior do duto, assim existe um limite sobre o qual a camada limite pode crescer. A velocidade do fluido em um duto muda de zero na superfície, em virtude da condição de não deslizamento, até o máximo no centro do duto. Assim, no escoamento de fluidos, é conveniente trabalhar com velocidade média, que se mantém constante para escoamento incompressível quando a área da seção transversal (A_c) é constante (ÇENGEL, 2012). Neste caso, define-se a velocidade média por:

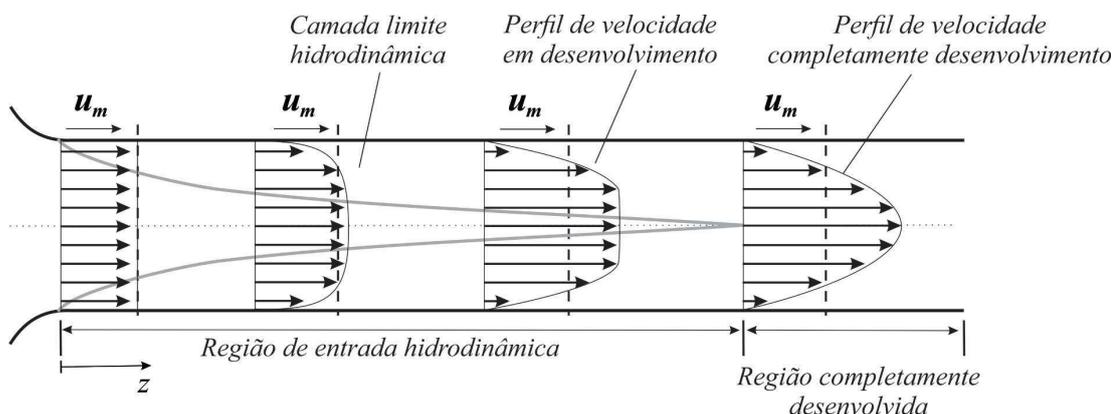
$$u_m(x, y) = \frac{1}{\rho A_c} \int_{A_c} \rho u(x, y) dA_c , \quad (2.1)$$

onde $u(x, y)$ é a velocidade local.

A região a partir da entrada do duto até o ponto onde a camada limite funde-se na parte central é chamada região de entrada hidrodinâmica. O escoamento na região de entrada é chamado escoamento em desenvolvimento hidrodinâmico ou simplesmente escoamento em desenvolvimento, dado que esta é a região em que o perfil de velocidade se desenvolve. A

região além da entrada, em que o perfil de velocidade está completamente desenvolvido, mantendo-se inalterado, é chamada região completamente desenvolvida hidrodinamicamente, ou simplesmente região completamente desenvolvida (ÇENGEL, 2012).

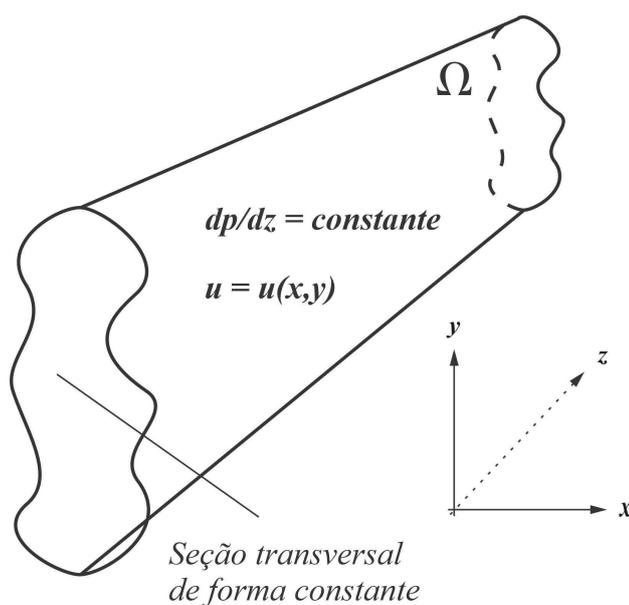
Figura 2-2- Perfil de velocidade no desenvolvimento da camada limite no duto.



Fonte: Adaptado de ÇENGEL (2012), p. 469.

Assim sendo, considere um escoamento laminar isotérmico em regime permanente completamente desenvolvido de um fluido newtoniano em um duto com seção transversal arbitrária reto, como mostra a Figura 2-3.

Figura 2-3- Duto reto com seção transversal qualquer.



Fonte: Própria do autor.

Como visto, por completamente desenvolvido, pode-se entender que a velocidade do escoamento na região estudada se torna simplesmente axial, de modo que $v = w = 0$ e $u = u(x, y)$, e neste caso a equação da continuidade é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (2.2)$$

As equações componentes da quantidade de movimento para as coordenadas cartesianas x e y , tornam-se:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

e a equação componente da quantidade de movimento para a coordenada cartesiana z , é dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}, \quad (2.4)$$

onde dp/dz é uma constante negativa, $u = u(x, y)$ é a velocidade local do fluido, p é a pressão e μ é a viscosidade do fluido, com condição de fronteira de não deslizamento nas paredes do duto, ou seja,

$$u(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega. \quad (2.5)$$

Ao se ajustar a Equação (2.4) de forma mais eficiente, isto é, realizando a adimensionalização da mesma e da sua respectiva condição de contorno. O motivo subjacente à análise dimensional é que qualquer equação dimensionalmente homogênea pode ser escrita em uma forma adimensional inteiramente equivalente, que é mais compacta (WHITE, 2011). Termos adimensionais são números que não possuem nenhuma dimensão física aplicável.

Seja d_h o diâmetro hidráulico, tal conceito é frequentemente usado quando se deseja manipular o escoamento em dutos não circulares, e é definido como (WHITE, 2006):

$$d_h = \frac{4A_c}{P}, \quad (2.6)$$

onde A_c é a área da seção transversal do duto, P é o perímetro molhado, isto é, é o comprimento da parede do duto que está em contato com o fluido. O fator 4 é introduzido para que o diâmetro hidráulico seja igual ao diâmetro do duto para uma seção circular (ÇENGEL, 2012).

Assim, considere as seguintes variáveis adimensionais:

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L},$$

$$W(X, Y) = -\frac{u(X, Y)}{L^2 \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}} \quad \text{e} \quad U = \frac{u}{u_m} = \frac{W}{W_m}, \quad (2.7)$$

onde L é o comprimento característico, u_m é a velocidade média do fluido, W e W_m são as velocidades adimensionais, local e média, respectivamente.

Note que $u = u(x, y) = u(x(X), y(Y))$ e $W = W(X, Y)$. Assim, pela Regra da Cadeia, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dX} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dX} = L \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.8)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dY} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dY} = L \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.9)$$

Consequentemente,

$$\frac{\partial W}{\partial X} = -\frac{1}{L \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}} \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial W}{\partial Y} = -\frac{1}{L \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}} \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.10)$$

Mais uma vez, pela Regra da Cadeia, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{dx}{dX} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{dy}{dX} = L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.11)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{dx}{dY} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{dy}{dY} = L \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} . \quad (2.12)$$

Desse modo, temos:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = - \frac{1}{\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad e \quad \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = - \frac{1}{\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} . \quad (2.13)$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \quad e \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} . \quad (2.14)$$

Substituindo as Equações (2.14) na Equação (2.4), esta é reescrita como:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = -1 , \quad (2.15)$$

$$W(X, Y) = 0, \forall (X, Y) \in \partial\Omega \quad (2.16)$$

ou, de forma mais compacta,

$$-\nabla^2 W = 1, \quad (2.17)$$

onde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}$ e $\partial\Omega$ denota a fronteira do domínio de estudo.

Além disso, pela definição para a velocidade média dada pela Equação (2.1), tem-se que a velocidade média adimensional é dada por:

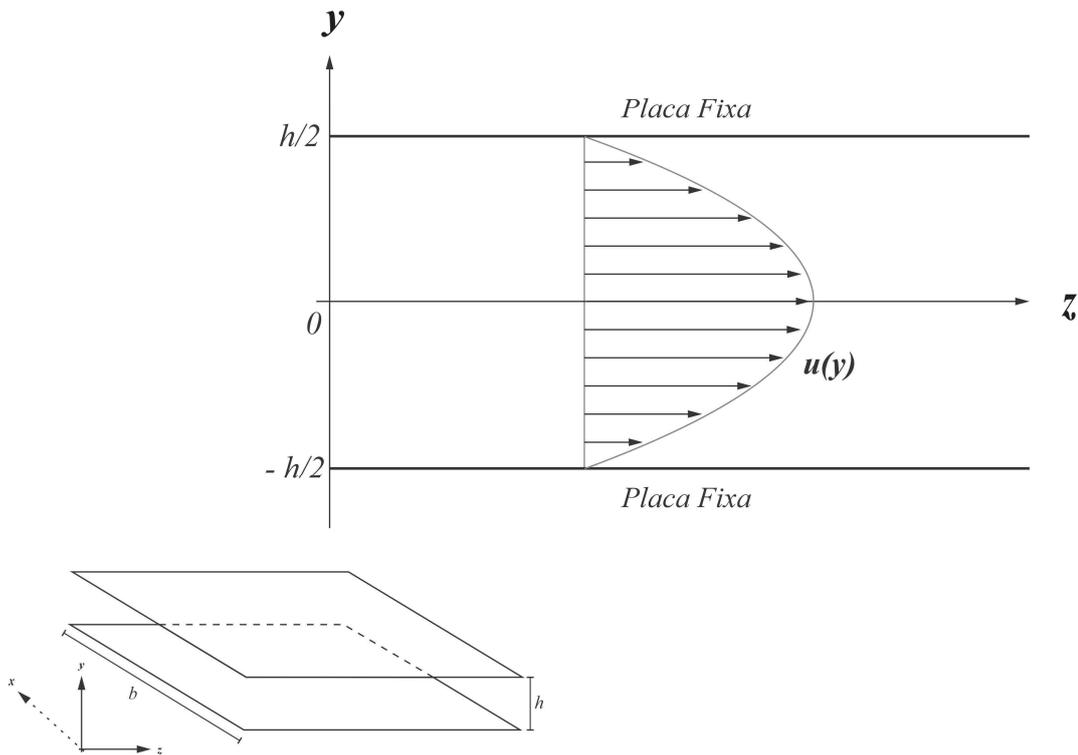
$$W_m(X, Y) = \frac{1}{A_c} \int W dA_c . \quad (2.18)$$

2.2.2 Exemplos de Aplicações da Equação do Movimento

Nesta seção, exemplificaremos a aplicação da Equação (2.15) com a condição de contorno considerada, dada pela Equação (2.16).

O primeiro caso, se trata do escoamento entre duas placas planas fixas devido um gradiente de pressão, conhecido como Escoamento de Poiseuille entre Placas Planas. Considere um sistema com duas placas planas paralelas e fixas com distância h entre elas como mostrado na Figura 2-4.

Figura 2-4- Placas paralelas em 2D e 3D.



Fonte: Própria do autor.

Seja a variável $Y = y/h$, e considere as seguintes condições de fronteira: não escorregamento nas placas, isto é, $W(Y) = 0$ para $Y = \pm 1/2$. A pressão está variando na direção do eixo z . Assim a Equação (2.17) tem como solução:

$$W = -\frac{Y^2}{2} + C_1 Y + C_2 . \tag{2.19}$$

Da condição contorno em $Y = \pm 1/2$, temos $C_1 = 0$ e $C_2 = 1/8$. Daí,

$$W = -\frac{Y^2}{2} + \frac{1}{8} , \tag{2.20}$$

ou ainda,

$$u = \frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dz} \left(\frac{y^2}{h^2} - \frac{1}{4} \right). \quad (2.21)$$

Observe que o perfil de velocidade é parabólico com o valor máximo em $y = 0$. Além disso,

$$u_m = \frac{1}{A_t} \int u dA_t = \frac{-h^2}{12\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right), \quad (2.22)$$

$$q = A_t u_m = \frac{-bh^3}{12\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right) = \frac{bh^3}{12\mu} \frac{\Delta p}{L}. \quad (2.23)$$

O segundo caso, trata-se do escoamento incompressível laminar completamente desenvolvido em um tubo circular reto de raio R , conhecido como Escoamento de *Hagen-Poiseuille*, que foi estudado experimentalmente pela primeira vez pelo físico alemão G. Hagen em 1839 e posteriormente pelo físico francês J. L. Poiseuille em 1840.

Neste caso, a única variável é $R = r/d_h$, onde $d_h = 2r_0$ é o diâmetro do tubo. E são consideradas as seguintes condições de fronteira: não escorregamento nas paredes do tubo, isto é, $W(R) = 0$ em $R = 1/2$, e o plano de simetria está alinhado com o eixo do tubo, ou seja, a velocidade é finita em $R = 0$.

O operador laplaciano se resume a:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) \quad (2.24)$$

e a Equação (2.17) tem como solução:

$$W = -\frac{1}{4} R^2 + C_1 \ln R + C_2. \quad (2.25)$$

Da condição de velocidade finita em $R = 0$, devemos ter $C_1 = 0$, para evitar uma singularidade logarítmica. Da condição de não deslizamento nas paredes, temos $C_2 = 1/16$. Daí,

$$u = \left(-\frac{dp}{dz}\right) \frac{(r_0^2 - r^2)}{4\mu}. \quad (2.26)$$

A Equação (2.26) é conhecida para o escoamento de Hagen-Poiseuille completamente desenvolvido. Observe que o perfil de velocidade é parabólico com o valor máximo em $r = 0$. Além disso,

$$u_m = \frac{1}{A_c} \int u dA_c = \left(-\frac{dp}{dz}\right) \frac{r_0^2}{8\mu}, \quad (2.27)$$

$$q = A_c u_m = \left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right) \frac{\pi r_0^4}{8\mu} = \frac{\pi r_0^4 \Delta p}{8\mu L}, \quad (2.28)$$

onde Δp é a queda de pressão ao longo do comprimento L do tubo. Dentre esses parâmetros acima, destacamos a vazão volumétrica q num tubo, conhecida como lei de *Hagen-Poiseuille*.

2.2.3 Números Adimensionais Importantes

Em 1883, Osborne Reynolds, professor de engenharia, introduzindo um filete de corante em um escoamento num tubo, mostrou que a mudança de regime laminar para turbulento dependia de um parâmetro adimensional (WHITE, 2006). Tal parâmetro é dado pela relação:

$$Re = \frac{\rho d_h u_m}{\mu}, \quad (2.29)$$

e recebe o nome de número de *Reynolds*, em sua homenagem.

Outro parâmetro adimensional importante no escoamento de fluidos é o fator de atrito de *Fanning*, f , definido como:

$$f = \frac{2\tau_w}{\rho u_m^2}, \quad (2.30)$$

onde $\tau_w = \frac{A_c}{P} \left(-\frac{dp}{dz}\right)$ é a tensão média de cisalhamento, u_m é a velocidade média e ρ é a densidade do fluido (WHITE, 2006).

Na região completamente desenvolvida, tem-se o produto dos dois parâmetros mostrados nas Relações (2.29) e (2.30), resultando em (WHITE, 2006):

$$fRe = \left(-\frac{dp}{dz}\right) \frac{d_h^2}{2\mu u_m}. \quad (2.31)$$

Shah e London (1978) apresentaram valores para o número apresentado na Equação (2.31) para escoamentos em dutos com seções transversais de geometrias diversas, dentre os quais, a Tabela 2-1 apresenta alguns dos valores.

Tabela 2-1 – Valores para o número fRe .

Forma da seção transversal	fRe
Circular	16,00
Elipse $a/b^1 = 1/2$	16,82
Elipse $a/b = 1/10$	19,31
Quadrangular	14,22
Triangular equilátero	13,33
Placas Paralelas	24,00
Duplo Seno	15,05

Fonte: SHAH e LONDON (1978).

2.3 Escoamento em Meio Poroso

Esta seção é dedicada ao tratamento dos princípios que norteiam o escoamento em meios porosos, tais meios são formados por uma infinidade de poros e redes de fraturas ou fissuras com extrema complexidade geométrica. Os poros são normalmente preenchidos com um ou mais tipos fluidos (no caso de reservatórios de petróleo, possivelmente, com água, óleo ou gás) que, segundo Bear (1993), devido, a largura das fraturas (aberturas) serem suficientemente grande em relação aos poros nos blocos que são muito pequenos, praticamente todo o fluxo ocorre pelas fraturas.

¹ a e b são, respectivamente, os comprimentos do eixo menor e eixo maior para as elipses e os comprimentos do lado menor e lado maior nos retângulos.

As propriedades de um meio poroso são de grande valia para que se possa descrever e caracterizar o comportamento do escoamento do fluido, além da capacidade volumétrica desse meio.

A seguir são apresentadas as definições de propriedades que serão necessárias ao nosso estudo. Para Tiab e Donaldson (2015), o conhecimento dessas propriedades é essencial antes de questionamentos sobre o tipo de fluido, a quantidade de fluidos, as taxas do fluxo de fluidos e estimativas de recuperação.

Inicialmente, temos a porosidade, ϕ , que é definida como a fração do volume aparente do meio que não é ocupado pela estrutura sólida, em outras palavras, é a razão entre o volume de poros e o volume total do meio, ou ainda,

$$\phi = \frac{V_t - V_{gr}}{V_t} = \frac{V_p}{V_t}, \quad (2.32)$$

onde V_{gr} é o volume da estrutura sólida, V_p o volume poroso e V_t o volume total do meio. A porosidade é uma das mais importantes propriedades das rochas na engenharia de reservatórios, já que ela mede a capacidade de armazenamento de fluidos (ROSA *et al.*, 2006).

Sobre a porosidade, vale destacar que tal propriedade pode ser dividida em porosidade absoluta (ϕ) e a porosidade efetiva (ϕ_e). O que distingue uma da outra é que a primeira, no seu cálculo, inclui todo o volume poroso, inclusive o ineficaz, ou seja, não se excluem os poros que não estão conectados e que impossibilitam o transporte do fluido no meio, por sua vez, na segunda, excluem-se os poros que não dão vazão.

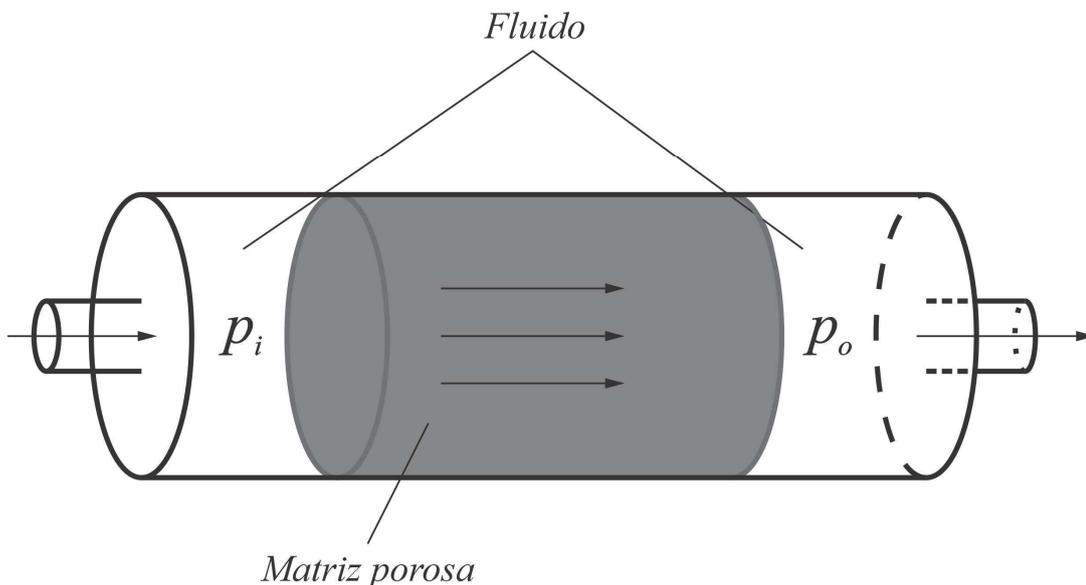
Outra propriedade importante é a capacidade que o meio tem de permitir que um fluido escoe através de seus poros interconectados ou de sua rede de fraturas, a qual dá-se o nome de permeabilidade do meio. A permeabilidade de um meio poroso é uma medida de sua capacidade de se deixar atravessar por fluidos, seja esse escoamento pela rede de poros conectados ou pela rede de fraturas. Em outras palavras, a permeabilidade é uma medida da condutividade de fluidos de um material. Por analogia com condutores elétricos, a permeabilidade representa o inverso da resistência que o material oferece ao fluxo de fluidos (ROSA *et al.*, 2006).

Assim, pode-se dizer que a permeabilidade relaciona o fluxo laminar a uma seção transversal do meio poroso, à viscosidade do fluido e ao gradiente de pressão aplicado.

Para descrever a dinâmica do escoamento em meios porosos, na maioria das vezes, é utilizada a lei de Darcy (1856) formulada para fluidos viscosos, em forma diferencial, da seguinte maneira: “A vazão através de um meio poroso é proporcional à área aberta ao fluxo e

ao diferencial de pressão, e inversamente proporcional ao comprimento e à viscosidade” (ROSA *et al.*, 2006), como ilustrado na Figura 2-5, em outros termos,

Figura 2-5- Princípio da medida de permeabilidade.



Fonte: Própria do autor.

a taxa de fluxo do fluido (cm^3/s), é dada por:

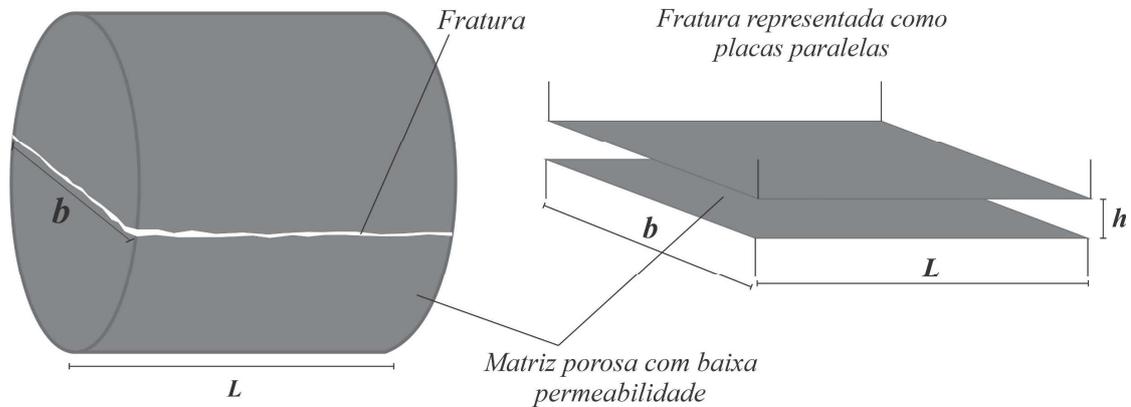
$$q = -\frac{A_t k dp}{\mu dz}, \tag{2.33}$$

onde k é a permeabilidade medida em *Darcy* (d), onde $1 d = 0,9869 \cdot 10^{-12} m^2$, A_t é a área da seção transversal da amostra porosa (cm^2), μ é viscosidade do fluido (cP), $\frac{dp}{dz}$ é o gradiente de pressão (atm/cm).

2.3.1 O Modelo de Placas Paralelas – Lei Cúbica

Considere uma amostra de meio poroso fraturado representado na Figura 2-6 e que, segundo Hofmann *et al.* (2016), é razoável supor que a quantidade total de fluxo através da amostra é igual ao fluxo através da fratura, visto que a permeabilidade da amostra é muito grande em comparação com a permeabilidade da matriz, ou seja, a matriz sólida de baixa permeabilidade é considerada impermeável.

Figura 2-6- Meio poroso fraturado e de baixa permeabilidade e a fratura representada como placas paralelas planas.



Fonte: Própria do autor.

Assumindo o modelo de placas paralelas para a fratura, e que o escoamento de um fluido incompressível viscoso numa amostra desse meio, dá-se através da fratura com abertura de largura h e comprimento b . A vazão q através dessa fratura é dada pela Equação (2.23).

Combinando, a Equação (2.23) com a lei de Darcy, Equação (2.33), tem-se:

$$-\frac{bh^3}{12\mu} \frac{dp}{dz} = -\frac{A_t k}{\mu} \frac{dp}{dz} \quad (2.34)$$

Uma vez que a área da seção transversal $A_t = L \cdot b$, pode-se concluir que a permeabilidade da fratura é identificada como:

$$k = \frac{h^2}{12} \quad (2.35)$$

Além disso, como o fluxo através da fratura é geralmente expresso em termos de uma transmissividade, T , definida por $q = -\left(\frac{T}{\mu}\right) \left(\frac{dp}{dz}\right)$. Nesse caso, leva à "Lei Cúbica" (WITHERSPOON *et al.*, 1980):

$$T = \frac{bh^3}{12} \quad (2.36)$$

A Lei Cúbica é determinada sobre a suposição de placas paralelas lisas, porém para fraturas reais dificilmente, se não impossivelmente, não são delimitadas por paredes lisas e paralelas. Segundo Sarkar *et al.* (2004), uma vez que a transmissividade é proporcional ao cubo

da abertura, o escoamento do fluido em uma fratura de abertura variável sob condições saturadas tenderá a seguir os caminhos de menor resistência, ou seja, os caminhos de maior abertura, e assim se afastar das linhas de fluxo retilíneas do modelo de placas paralelas.

Com isso, as propriedades definidas e quantificadas pelas Equações (2.35) e (2.36), frequentemente substitui-se h , pela chamada abertura hidráulica equivalente, h_H , que é definida como a abertura que resultaria na permeabilidade correta da fratura. Assim, uma forma de generalizar a Lei Cúbica, que pode ser aplicada a qualquer geometria de fratura pode ser expressa como:

$$k_f = Ch_H^2 \quad (2.37)$$

e

$$T = Cbh_H^3. \quad (2.38)$$

Segundo Zimmerman e Bodvarsson (1996), pode-se dizer que a principal previsão do modelo de placas paralelas é que $C = 1/12$.

A permeabilidade k_f é frequentemente usada como a permeabilidade equivalente da fratura. Portanto, determinando-se a abertura h_H correta da fratura, pode-se estimar a sua permeabilidade fazendo uso da Equação (2.37). Além disso, de (2.34), tem-se:

$$h_H = \sqrt[3]{\frac{12q\mu L}{b\Delta p}}. \quad (2.39)$$

A determinação correta da abertura hidráulica equivalente, h_H , requer a solução das equações de Navier-Stokes em geometrias de fraturas que incluem regiões com variação de abertura (ZIMMERMAN e BODVARSSON, 1996). Para qualquer sistema de fratura, primeiro calculamos a taxa de fluxo volumétrico q a partir de experimentos (HOFMANN *et al.*, 2016; MILSCH *et al.*, 2016; CHENG *et al.*, 2020) ou a partir da simulação computacional (SARKAR *et al.*, 2004; MILSCH *et al.*, 2016; HE *et al.*, 2021) e, em seguida, usa-se essa taxa e a Equação (2.39) para calcular a abertura hidráulica equivalente.

A Lei Cúbica foi frequentemente derivada por muitos autores para o escoamento em fraturas com paredes paralelas. Witherspoon *et al.* (1980) demonstraram a validade da lei cúbica em uma fratura onde as paredes não são paralelas, e sugeriram que o coeficiente de

proporcionalidade C fosse substituído por C/ϵ , onde ϵ é um fator característico da superfície da fratura, com $\epsilon = 1$ para paredes lisas e $\epsilon > 1$ para paredes rugosas.

Além desses, vários pesquisadores propuseram modificações para a Lei Cúbica introduzindo fatores de correção para a abertura, como observa-se na Tabela 2-2.

Tabela 2-2 - Estudos referentes a modificações da Lei Cúbica² baseado em $h_H = \overline{h(x,y)}C_r C_t$.

Referência	Modelo Baseado na Lei Cúbica	Sobre o Estudo
Lomize (1951)	$h_H = h_m \left[\frac{1}{1 + 17(2h_m/\sigma)^{-1,5}} \right]^{1/3}$	Ajuste de modelo empírico com dados experimentais usando placas revestidas com areia.
Louis (1969)	$h_H = h_m \left[\frac{1}{1 + 8,8(2h_m/\sigma)^{-1,5}} \right]^{1/3}$	Modelo empírico ajustado com dados experimentais em lajes de concreto ásperas.
Patir e Cheng (1978)	$h_H = h_m [1 - 0,9e^{-0,56h_m/\sigma}]^{1/3}$	Modelo empírico ajustado com resultados numéricos obtidos a partir da resolução da equação de <i>Reynolds</i> .
Tsang e Witherspoon (1981)	$h_H = [\langle h^3 \rangle^{1/3} / \langle 1/h^2 \rangle]^{1/3}$	Considera a variação na abertura tanto paralela quanto perpendicular ao gradiente de pressão.
Neuzil e Tracy (1981)	$h_H = \langle h^3 \rangle^{1/3}$	Aplicável quando a abertura da fratura varia apenas na direção normal ao gradiente de pressão.
Brown (1984)	$h_H = \langle h^{-3} \rangle^{-1/3}$	Derivado com base na equação de <i>Reynolds</i> unidimensional.

²Forma geral de modificação da abertura hidráulica, onde $\overline{h(x,y)}$ representa uma média da abertura mecânica; C_r e C_t são fatores de correção para a rugosidade e tortuosidade, respectivamente.

Brown (1987)	$h_H = \langle h \rangle$	Aplicável para fraturas com superfícies lisas e abertura quase homogênea.
Brown (1987)	$h_H = h_m \left[\frac{1}{\tau^2} \right]^{1/3}$	Derivado com base na analogia de tortuosidade para o fluxo de fluidos através de meios porosos.
Zimmerman <i>et al.</i> (1991)	$h_H = \sqrt{\langle h^3 \rangle^{1/3} \langle h^{-3} \rangle^{-1/3}}$	Adota a média geométrica das aberturas proposta por Neuzil e Tracy (1981) e por Brown (1984).
Zimmerman e Bodvarsson (1996)	$h_H = \langle h_m^3 \rangle^{1/3} [1 + 9(\sigma/h_m)^2]^{-1/6}$	Modelo teórico derivado com base na aproximação de campo e abordagem de perturbação.
Zimmerman e Bodvarsson (1996)	$h_H = h_m [1 - 1,5(\sigma/h_m)^2]^{1/3}$	Modelo baseado nas equações de Navier-Stokes (NS) e na técnica de perturbação.
Rasouli e Hosseini (2011)	$h_H = h_m [1 - 2,25(\sigma/h_m)^2]^{1/3}$	Modelo empírico ajustado com resultados numéricos das equações de Navier-Stokes (NS).
Li and Jiang (2013)	$h_H = \frac{h_m}{1 + Z_2^{2,25}} \quad (Re < 1)$	Modelo empírico - ajuste com resultados numéricos das equações Navier-Stokes (NS).
Xiao et al. (2013)	$h_H = h_m \left[\frac{1}{\tau^2 T_s^2 \left(1 + 5 \left(\frac{2h_m}{\sigma} \right)^{-1,5} \right)} \right]^{1/3}$	Modelo semi-empírico com coeficientes obtidos por ajuste com dados experimentais.

2.4 O Método Integral Baseado em *Galerkin*

O Método Integral Baseado em *Galerkin*, ou simplesmente método GBI, foi desenvolvido inicialmente por Boris Grigoryevich Galerkin, em um trabalho publicado no ano de 1915, onde a ideia principal era um método de aproximação para equações diferenciais, em particular, para problemas de valor de contorno. Assim com suas diversas generalizações o método GBI é utilizado em diversas áreas da engenharia e física-matemática como na mecânica, termodinâmica, hidrodinâmica, como um método de solução para equações diferenciais por aproximações em subespaços vetoriais de dimensão finita, e também para desenvolvimento de métodos numéricos como o método dos elementos finitos. (DUNCAN, 1937; COURANT e HILBERT, 1953; PETROVSKY, 1954; THOMAS, 1995; DAUTRAY e LIONS, 1998; ASSAN, 2003).

Considere H um espaço de Hilbert (espaço com produto interno que é completo com a norma induzida pelo produto interno), $\Psi: U \rightarrow H$ um operador linear definido no subespaço $U \subset H$, denso em H . Seja $g \in H$, tal que:

$$\begin{cases} \Psi[u(x)] = g(x), & x \in \Omega \\ u(\Gamma) = a \end{cases}, \quad (2.40)$$

onde Γ denota a fronteira de Ω e a é o valor da função na fronteira.

Seja $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma base de U e, para cada $n = 1, 2, 3 \dots$, seja $U_n = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$ o subespaço de U gerado pelas n primeiras funções de $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Assim, um elemento arbitrário de U_n será da forma:

$$u_n = \sum_{i=1}^n d_i \phi_i, \quad (2.41)$$

onde as $\phi_i(x)$ são chamadas de funções base que satisfazem as condições de fronteira homogêneas, as quais permitem determinar os coeficientes $d_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, n$.

O método em questão consiste na busca das funções u_n que são projeções ortogonais de $u \in U$ em um subespaço de dimensão finita $U_n \subset H$, tal que:

$$\int_{\Omega} (\Psi[u_n] - g)\phi_j d\Omega = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.42)$$

em outras palavras, tal que $\Psi[u] - g$ seja ortogonal as primeiras n funções de $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Os coeficientes d_i são determinados ao substituir a Equação (2.41) na Equação (2.42), obtendo-se:

$$\int_{\Omega} \left(\Psi \left[\sum_{i=1}^n d_i \phi_i \right] - g \right) \phi_j d\Omega = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.43)$$

Pela linearidade do operador Ψ , podemos reorganizar a Equação (2.43) e obter:

$$\sum_{i=1}^n d_i \int_{\Omega} \Psi[\phi_i] \phi_j d\Omega = \int_{\Omega} g \phi_j d\Omega, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (2.44)$$

que é um sistema de equações algébricas que em sua forma matricial é dado por:

$$AD = B, \quad (2.45)$$

onde $A = (a_{ij})_{n \times n}$ e $B = (b_j)_{n \times 1}$ com

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \Psi[\phi_i] \phi_j d\Omega, \quad (2.46)$$

e

$$b_{ij} = \int_{\Omega} g \phi_j d\Omega, \quad (2.47)$$

para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$, e $D = (d_j)_{n \times 1}$, com

$$d_j = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Com isso, a solução aproximada para uma equação diferencial parcial elíptica baseada neste método está bem definida. Na maioria dos casos, o método é capaz de lidar com equação diferencial parcial em geometrias irregulares (REZENDE, 2005; FRANCO, 2016).

Capítulo 3

MATERIAIS E MÉTODOS

A pesquisa foi realizada em parceria entre o Laboratório de Pesquisa em Fluidodinâmica e Imagem (LPFI), da Unidade Acadêmica de Engenharia Química, Centro de Ciências e Tecnologia, da Universidade Federal de Campina Grande, e o Laboratório de Métodos Computacionais (COMEL), da Universidade Estadual da Paraíba, Campus VIII.

O trabalho foi implementado sob a forma de estudos dirigidos e elaboração de trabalhos tendo em vista alcançar os objetivos propostos. Desta forma, o método GBI foi adaptado para ser aplicado em um domínio particionado, e partindo disso foi desenvolvido um modelo matemático para prever o transporte em uma fratura em meio poroso, analisando-as em suas diversas geometrias, a fim de obter informações sobre a permeabilidade.

Após revisão bibliográfica, no que segue, é detalhado o desenvolvimento matemático da adaptação no método GBI para aplicá-lo em um domínio particionado e apresentar o perfil de velocidade por meio da equação de momento linear, que é uma equação diferencial elíptica, considerando um escoamento completamente desenvolvido em fratura em meio poroso. Em seguida, foi desenvolvido um método para determinação da permeabilidade da fratura. Por fim, trataremos de detalhar os procedimentos numéricos que foram adotados.

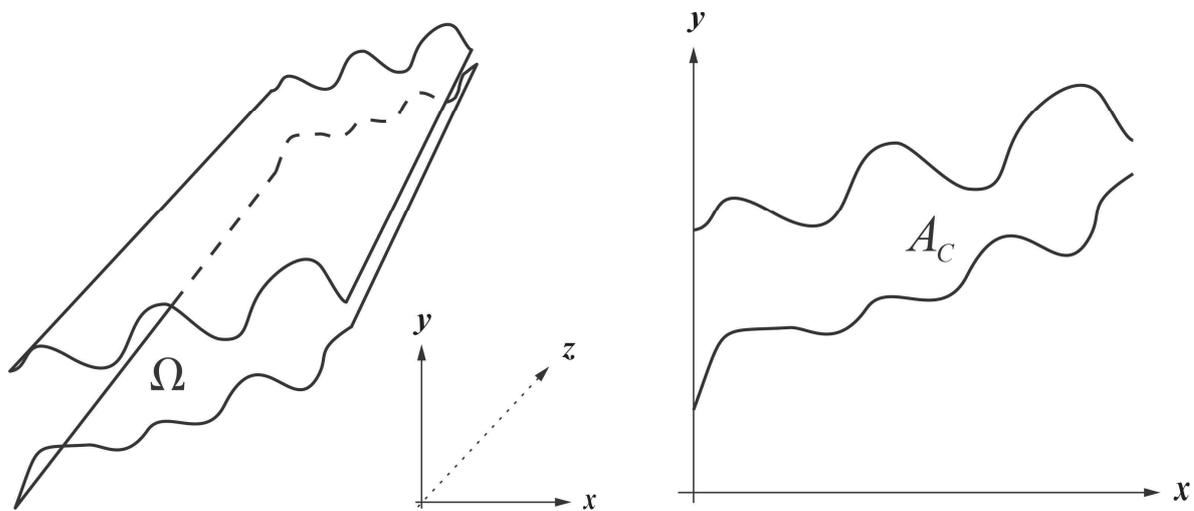
3.1 Formulação Matemática para Determinar o Número fRe em um Domínio Particionado via Método GBI

O método GBI é eficaz para solucionar equações em diversas geometrias, até mesmo as mais complexas, basta que sejam determinadas previamente as funções base adequadas para tal. Porém, para algumas geometrias, a escolha das funções base, não é simples, e mesmo quando essa escolha segue alguma estratégia que a simplifique, ao se fazer a implementação numérica, se exige um alto custo computacional, devido aos termos envolvidos. Pensando nisso,

dado um domínio reto com seção transversal arbitrária considerada inicialmente constante, o qual foi particionado em subdomínios, o método GBI foi modificado para ser aplicado para resolver a equação de quantidade de movimento nesses vários subdomínios de forma independente, onde a ideia central é usar a solução nos subdomínios para obter a solução no domínio principal, bem como números característicos do problema.

Seja o domínio Ω e sua seção transversal de área A_c como mostra a Figura 3-1.

Figura 3-1- Domínio Ω e a sua seção transversal.



Fonte: Própria do autor.

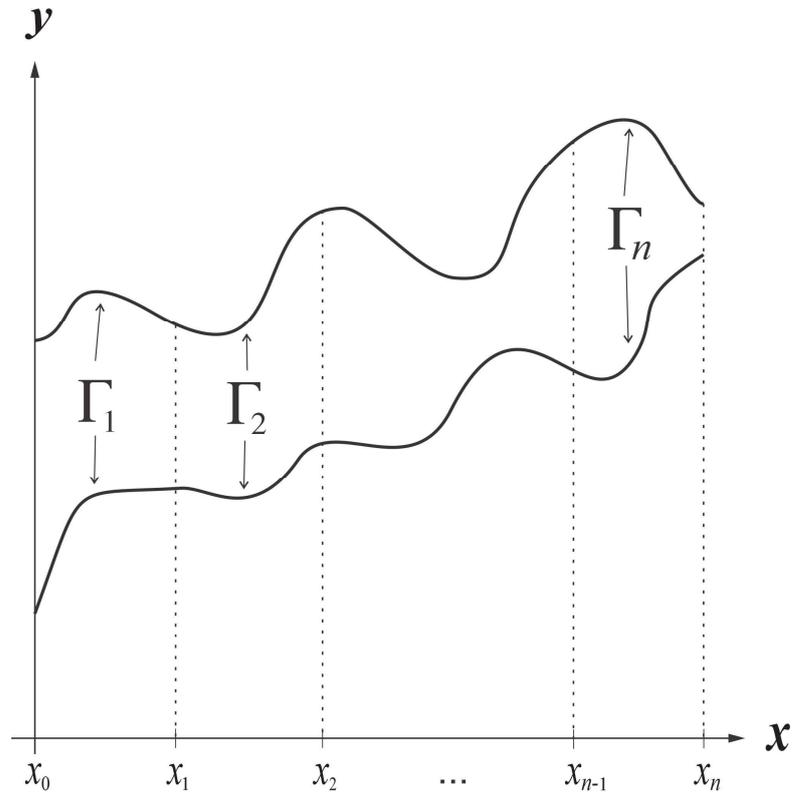
A seção transversal de Ω , foi subdividida em subdomínios individuais Ω_l como conjuntos disjuntos, com área de seção transversal A_l e fronteira denotada por Γ_l , respectivamente, como visualizado na Figura 3-2.

Considere a Equação (2.15) com a condição de contorno dada na Equação (2.16) definidas em Ω , e considere uma solução da forma:

$$W(X, Y) = \sum_{j=1}^k d_j f_j(X, Y), \tag{3.1}$$

com $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ um conjunto de funções base pré-determinadas e cada $d_j \in \mathbb{R}$ uma constante a ser determinada.

Figura 3-2- Particionamento do Domínio em subdomínios Ω_l .



Fonte: Própria do autor.

Substituindo a Equação (3.1) na Equação (2.15) chega-se a:

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\sum_{j=1}^k d_j f_j(X, Y) \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\sum_{j=1}^k d_j f_j(X, Y) \right) = -1 \quad (3.2)$$

ou ainda,

$$\sum_{j=1}^k d_j \left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} (f_j(X, Y)) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} (f_j(X, Y)) \right] = -1 \quad (3.3)$$

Multiplicando ambos os lados por $1/A_c$ e aplicando o método GBI na Equação (3.3), obtém-se:

$$\sum_{i=1}^k d_j \left[\frac{1}{A_c} \int_{A_c} \left(\frac{\partial^2 f_j(X, Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 f_j(X, Y)}{\partial Y^2} \right) f_i dA_c \right] = -\frac{1}{A_c} \int_{A_c} f_i dA_c \quad (3.4)$$

que pode ser reescrito como um sistema de equações algébricas na forma matricial, dado por:

$$AD = B, \quad (3.5)$$

onde $A = (a_{ij})_{n \times n}$ e $B = (b_i)_{n \times 1}$ com:

$$a_{ij} = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} \left(\frac{\partial^2 f_j(X, Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 f_j(X, Y)}{\partial Y^2} \right) f_i dA_c \quad (3.6)$$

e

$$b_i = -\frac{1}{A_c} \int_{A_c} f_i dA_c, \quad (3.7)$$

para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$, e $D = (d_j)_{n \times 1}$, sendo:

$$d_j = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n]^t, \quad (3.8)$$

com

$$D = A^{-1}B. \quad (3.9)$$

3.1.1 Método para Obtenção das Funções Base

O método para obtenção das funções base para domínios particionados com a condição de contorno do primeiro tipo consiste em obter as funções base que devem satisfazer as condições de contorno homogêneas, mesmo que as condições de contorno do problema sejam não homogêneas. No decorrer desta seção adaptaremos o raciocínio elaborado por HAJI-SHEIKH e LAKSHMINARAYANAN (1987) detalhado em COLE *et al.* (2010) para um domínio particionado.

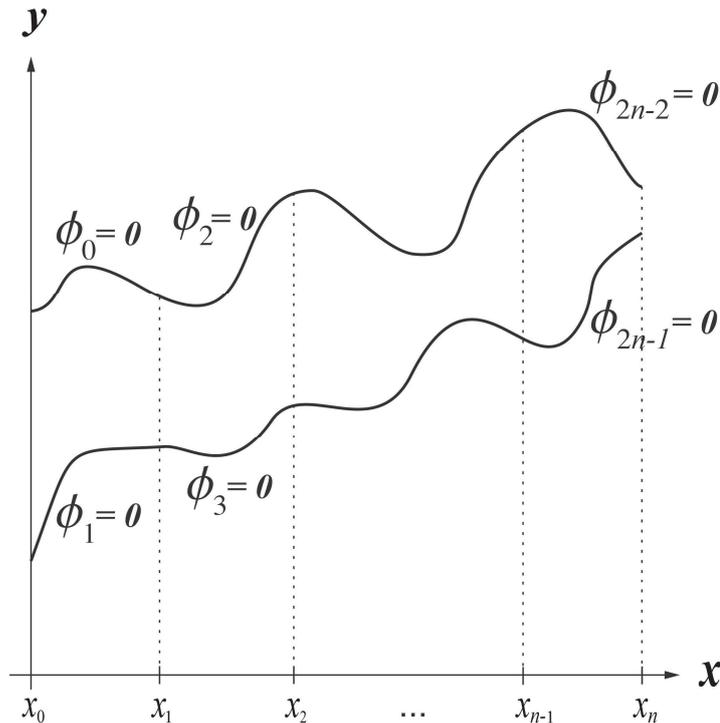
Observe que cada partição $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ do domínio tem sua seção transversal limitada pelas curvas $\{\phi_0, \phi_1\}, \{\phi_2, \phi_3\}, \dots, \{\phi_{2n-2}, \phi_{2n-1}\}$, respectivamente, com $\phi_i = 0$, para todo $i = 0, 1, \dots, 2n - 1$, como ilustrado na Figura 3-3. Assim, o primeiro elemento da base para cada partição l pode ser definido como:

$$f_1^{(l)}(X, Y) = \begin{cases} 1, & \text{se } (X, Y) \notin \bar{\Omega}_l \\ \phi_{2l-2}\phi_{2l-1}, & \text{se } (X, Y) \in \bar{\Omega}_l \end{cases} \quad (3.10)$$

Por sua vez, para o domínio Ω o primeiro elemento é definido por:

$$f_1(X, Y) = f_1^{(1)} \cdot f_1^{(2)} \dots f_1^{(n)}. \quad (3.11)$$

Figura 3-3- Funções que delimitam a fronteira de Ω .



Fonte: Própria do autor.

Cada função do conjunto $\{\phi_i\}_{i=0}^{2n-1}$ é modelada como um limite aproximado da curva original, gerado a partir de polinômios de regressão de alta ordem usando o *software Maple* para fornecer limites mais suaves.

Além disso, pela Regra do Produto, as derivadas de $f_1^{(l)}$, para cada $l = 1, 2, \dots, n$, tem-se:

$$\frac{\partial f_1^{(l)}}{\partial X}(X, Y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (X, Y) \notin \bar{\Omega}_l \\ \frac{\partial \phi_{2l-2}}{\partial X} \phi_{2l-1} + \phi_{2l-2} \frac{\partial \phi_{2l-1}}{\partial X}, & \text{se } (X, Y) \in \bar{\Omega}_l \end{cases} \quad (3.12)$$

e

$$\frac{\partial f_1^{(l)}}{\partial Y}(X, Y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (X, Y) \notin \bar{\Omega}_l \\ \frac{\partial \phi_{2l-2}}{\partial Y} \phi_{2l-1} + \phi_{2l-2} \frac{\partial \phi_{2l-1}}{\partial Y}, & \text{se } (X, Y) \in \bar{\Omega}_l \end{cases} \quad (3.13)$$

Para f_1 , tem-se:

$$\frac{\partial f_1}{\partial X} = \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial X} f_1^{(2)} \dots f_1^{(n)} + f_1^{(1)} \frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial X} f_1^{(3)} \dots f_1^{(n)} + \dots + f_1^{(1)} \dots f_1^{(n-1)} \frac{\partial f_1^{(n)}}{\partial X} \quad (3.14)$$

e

$$\frac{\partial f_1}{\partial Y} = \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial Y} f_1^{(2)} \dots f_1^{(n)} + f_1^{(1)} \frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial Y} f_1^{(3)} \dots f_1^{(n)} + \dots + f_1^{(1)} \dots f_1^{(n-1)} \frac{\partial f_1^{(n)}}{\partial Y} \quad (3.15)$$

e, mais uma vez, pela Regra do Produto, as segundas derivadas de $f_1^{(l)}$, para cada $l = 1, 2, \dots, n$, são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1^{(l)}}{\partial X^2}(X, Y) &= \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } (X, Y) \notin \bar{\Omega}_l \\ \frac{\partial^2 \phi_{2l-2}}{\partial X^2} \phi_{2l-1} + 2 \frac{\partial \phi_{2l-2}}{\partial X} \frac{\partial \phi_{2l-1}}{\partial X} + \phi_{2l-2} \frac{\partial^2 \phi_{2l-1}}{\partial X^2}, & \text{se } (X, Y) \in \bar{\Omega}_l \end{cases} \end{aligned} \quad (3.16)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1^{(l)}}{\partial Y^2}(X, Y) &= \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } (X, Y) \notin \bar{\Omega}_l \\ \frac{\partial^2 \phi_{2l-2}}{\partial Y^2} \phi_{2l-1} + 2 \frac{\partial \phi_{2l-2}}{\partial Y} \frac{\partial \phi_{2l-1}}{\partial Y} + \phi_{2l-2} \frac{\partial^2 \phi_{2l-1}}{\partial Y^2}, & \text{se } (X, Y) \in \bar{\Omega}_l \end{cases} \end{aligned} \quad (3.17)$$

E para a função f_1 , tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_1}{\partial X^2} &= \frac{\partial^2 f_1^{(1)}}{\partial X^2} f_1^{(2)} \dots f_1^{(n)} + \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial X} \frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial X} f_1^{(3)} \dots f_1^{(n)} + \dots \\
&\quad + \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial X} f_1^{(2)} \dots f_1^{(n-1)} \frac{\partial f_1^{(n)}}{\partial X} + \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial X} \frac{\partial^2 f_1^{(2)}}{\partial X^2} f_1^{(3)} \dots f_1^{(n)} + \dots \\
&\quad + f_1^{(1)} \frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial X} f_1^{(3)} \dots f_1^{(n-1)} \frac{\partial f_1^{(n)}}{\partial X} + \dots + \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial X} f_1^{(2)} \dots f_1^{(n-1)} \frac{\partial f_1^{(n)}}{\partial X} \\
&\quad + \dots + f_1^{(1)} \dots f_1^{(n-1)} \frac{\partial^2 f_1^{(n)}}{\partial X^2}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_1}{\partial Y^2} &= \frac{\partial^2 f_1^{(1)}}{\partial Y^2} f_1^{(2)} \dots f_1^{(n)} + \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial Y} \frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial Y} f_1^{(3)} \dots f_1^{(n)} + \dots \\
&\quad + \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial Y} f_1^{(2)} \dots f_1^{(n-1)} \frac{\partial f_1^{(n)}}{\partial Y} + \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial Y} \frac{\partial^2 f_1^{(2)}}{\partial Y^2} f_1^{(3)} \dots f_1^{(n)} + \dots \\
&\quad + f_1^{(1)} \frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial Y} f_1^{(3)} \dots f_1^{(n-1)} \frac{\partial f_1^{(n)}}{\partial Y} + \dots + \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial Y} f_1^{(2)} \dots f_1^{(n-1)} \frac{\partial f_1^{(n)}}{\partial Y} \\
&\quad + \dots + f_1^{(1)} \dots f_1^{(n-1)} \frac{\partial^2 f_1^{(n)}}{\partial Y^2} .
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Note que:

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial X} \right|_{\Omega_l} = \frac{\partial f_1^{(l)}}{\partial X}; \quad \left. \frac{\partial f_1}{\partial Y} \right|_{\Omega_l} = \frac{\partial f_1^{(l)}}{\partial Y}; \quad \left. \frac{\partial^2 f_1}{\partial X^2} \right|_{\Omega_l} = \frac{\partial^2 f_1^{(l)}}{\partial X^2} \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial^2 f_1}{\partial Y^2} \right|_{\Omega_l} = \frac{\partial^2 f_1^{(l)}}{\partial Y^2}, \tag{3.20}$$

para cada $l = 1, 2, \dots, n$.

Assim, cada elemento subsequente do conjunto de funções base para uma partição Ω_l é determinado multiplicando-se $f_1^{(l)}$ por um elemento de um conjunto completo, por exemplo, em sistema de coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}
f_2^{(l)} &= f_1^{(l)} X \\
f_3^{(l)} &= f_1^{(l)} Y \\
f_4^{(l)} &= f_1^{(l)} X^2 \\
f_5^{(l)} &= f_1^{(l)} XY
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$f_6^{(l)} = f_1^{(l)} Y^2$$

$$f_7^{(l)} = f_1^{(l)} X^2 Y$$

⋮

De maneira análoga, cada elemento que segue do conjunto de funções base para o domínio Ω é determinado por:

$$f_2 = f_1 X$$

$$f_3 = f_1 Y$$

$$f_4 = f_1 X^2 \tag{3.22}$$

$$f_5 = f_1 XY$$

⋮

Daí, usando o mesmo raciocínio que obtemos as igualdades em (3.20), pode-se concluir que:

$$\left. \frac{\partial f_j}{\partial X} \right|_{\Omega_l} = \frac{\partial f_j^{(l)}}{\partial X}; \quad \left. \frac{\partial f_j}{\partial Y} \right|_{\Omega_l} = \frac{\partial f_j^{(l)}}{\partial Y}; \quad \left. \frac{\partial^2 f_j}{\partial X^2} \right|_{\Omega_l} = \frac{\partial^2 f_j^{(l)}}{\partial X^2} \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial^2 f_j}{\partial Y^2} \right|_{\Omega_l} = \frac{\partial^2 f_j^{(l)}}{\partial Y^2} \tag{3.23}$$

Cada função base deve-se necessariamente anular-se apenas na fronteira. Algumas, mas não todas, podem ser nulas em algum ponto interno. Isso pode ser garantido se a primeira função base não for totalmente nula no interior da região estudada. Sempre que todas as funções base forem nulas em um ponto interior, a região pode ser subdividida em diferentes sub-regiões.

Note ainda que:

$$W|_{\Omega_l} = \sum_{j=1}^k d_j f_j^{(l)} = W^{(l)}, \tag{3.24}$$

onde $W^{(l)}$ representa a solução do problema dado pela Equação (2.15) com a condição de contorno considerada, dada pela Equação (2.16), restrito ao subdomínio Ω_l . Com isso,

subdivide-se o problema original em n “subproblemas” que requerem menos custo computacional. E a solução do problema original será dado por:

$$W(X, Y) = \begin{cases} W^{(1)}(X, Y), & \text{se } (X, Y) \in \Omega_1 \\ W^{(2)}(X, Y), & \text{se } (X, Y) \in \Omega_2 \\ \vdots \\ W^{(n)}(X, Y), & \text{se } (X, Y) \in \Omega_n \end{cases}. \quad (3.25)$$

Isto posto, observe que:

$$\begin{aligned} \int_{A_c} \left(\frac{\partial^2 f_j(X, Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 f_j(X, Y)}{\partial Y^2} \right) f_i dA_c \\ = \int_{A_1} \left(\frac{\partial^2 f_j(X, Y)}{\partial X^2} \Big|_{\Omega_1} + \frac{\partial^2 f_j(X, Y)}{\partial Y^2} \Big|_{\Omega_1} \right) f_i|_{\Omega_1} dA_1 + \dots \\ + \int_{A_n} \left(\frac{\partial^2 f_j(X, Y)}{\partial X^2} \Big|_{\Omega_n} + \frac{\partial^2 f_j(X, Y)}{\partial Y^2} \Big|_{\Omega_n} \right) f_i|_{\Omega_n} dA_n \\ = \sum_{l=1}^n \int_{A_l} \left(\frac{\partial^2 f_j^{(l)}(X, Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 f_j^{(l)}(X, Y)}{\partial Y^2} \right) f_i^{(l)} dA_l. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Da mesma forma, tem-se:

$$\int_{A_c} f_i dA_c = \sum_{l=1}^n \int_{A_l} f_i^{(l)} dA_l. \quad (3.27)$$

Assim, a Equação (3.4) toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k d_j \left[\frac{1}{A_c} \left(\sum_{l=1}^n \int_{A_l} \left(\frac{\partial^2 f_j^{(l)}(X, Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 f_j^{(l)}(X, Y)}{\partial Y^2} \right) f_i^{(l)} dA_l \right) \right] \\ = -\frac{1}{A_c} \left(\sum_{l=1}^n \int_{A_l} f_i^{(l)} dA_l \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Definindo as matrizes $A^{(l)} = (a_{ij}^{(l)})_{n \times n}$ e $B^{(l)} = (b_i^{(l)})_{n \times 1}$, onde

$$a_{ij}^{(l)} = \frac{1}{A_c} \int_{A_l} \left(\frac{\partial^2 f_j^{(l)}(X, Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 f_j^{(l)}(X, Y)}{\partial Y^2} \right) f_i^{(l)} dA_l. \quad (3.29)$$

e

$$b_i^{(l)} = -\frac{1}{A_c} \int_{A_l} f_i^{(l)} dA_l, \quad (3.30)$$

para cada $l = 1, 2, \dots, n$, e comparando as Equações (3.28), (3.29) e (3.30) com as Equações (3.4), (3.6) e (3.7), pode-se concluir que:

$$A = \sum_{l=1}^n A^{(l)} \quad \text{e} \quad B = \sum_{l=1}^n B^{(l)}. \quad (3.31)$$

Com isso, foi possível determinar a matriz D dos coeficientes.

Das Equações (2.18) e (3.25), consegue-se:

$$W_m(X, Y) = \frac{1}{A_c} \left(\sum_{l=1}^n \int_{A_l} W^{(l)} dA_l \right). \quad (3.32)$$

Desta forma a velocidade adimensional U é dada por:

$$U(X, Y) = \frac{W(X, Y)}{W_m} = \begin{cases} W^{(1)}(X, Y)/W_m, & \text{se } (X, Y) \in \Omega_1 \\ W^{(2)}(X, Y)/W_m, & \text{se } (X, Y) \in \Omega_2 \\ \vdots \\ W^{(n)}(X, Y)/W_m, & \text{se } (X, Y) \in \Omega_n \end{cases}. \quad (3.33)$$

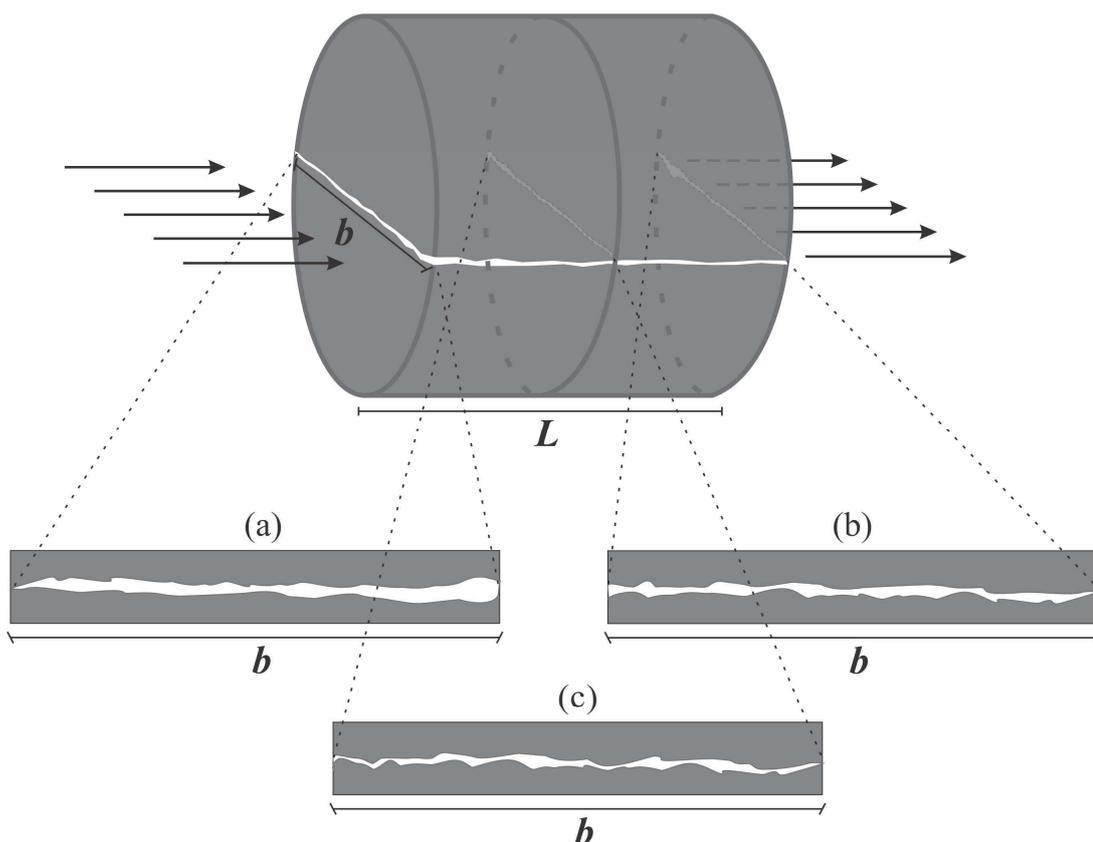
3.2 Formulação Matemática para o Problema de Escoamento através de Fratura em Meio Poroso

Esta seção é dedicada a formulação teórica matemática para o escoamento em fratura em meio poroso, utilizando-se da geometria das seções transversais da fratura, dando assim uma nova abordagem a permeabilidade da fratura em termos do produto do fator de atrito pelo número de *Reynolds*, de modo que nos possibilite a obter mais informações sobre o meio. Os trabalhos de Witherspoon *et al.* (1980) e Santos Júnior *et al.* (2021) serviram de base para esta seção.

Ademais, considera-se o escoamento em regime permanente, laminar, completamente desenvolvido de um fluido newtoniano incompressível com propriedades físico-químicas constantes através de uma fratura com área de seção transversal A_f , como mostra a Figura 3-4.

Supondo que a permeabilidade de uma amostra fraturada é muito maior do que da matriz porosa sem fratura, conforme foi assumido por Hofmann *et al.* (2016) e Cheng *et al.* (2020). Estes autores supuseram que o fluido que escoar na amostra fraturada de seção transversal A_t , se dá prioritariamente através da área de seção transversal da fratura A_f , e que o escoamento do fluido no meio poroso pode ser desconsiderado, ou seja, a quantidade total de fluido escoando em relação ao tempo (vazão volumétrica) na amostra fraturada é igual a vazão de fluido que escoar através da fratura.

Figura 3-4- Modelo de fratura: (a) seção transversal da fratura da face esquerda; (b) seção transversal da fratura da face direita; (c) seção transversal da fratura em posição qualquer ao longo do eixo.



Fonte: Própria do autor.

Neste caso, a vazão é dada por:

$$q = u_{m_f} A_f , \quad (3.34)$$

onde, u_{m_f} é a velocidade média de fluxo na fratura, q é a taxa de fluxo e A_f é a área total da seção transversal da fratura.

Como visto no Capítulo 2, o escoamento, numa visão macroscópica, obedece a Lei de Darcy, Equação (2.33), assim, combinando-a com a Equação (3.34), tem-se:

$$u_{m_f} A_f = - \frac{A_t k}{\mu} \frac{dp}{dz} . \quad (3.35)$$

Reorganizando os termos, obtém-se:

$$k = \frac{A_f}{A_t} \left(- \frac{u_{m_f}}{\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}} \right) . \quad (3.36)$$

Pelas relações em (2.7), tem-se:

$$W_m = \frac{W}{u_f} u_{m_f} = - \frac{u_{m_f}}{L^2 \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}} , \quad (3.37)$$

e, conseqüentemente:

$$L^2 W_m = - \frac{u_{m_f}}{\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}} , \quad (3.38)$$

onde u_{m_f} é a velocidade do escoamento na fratura.

Substituindo a igualdade dada na Equação (3.38) na Equação (3.36), esta pode ser reescrita como:

$$k = \frac{A_f}{A_t} L^2 W_m . \quad (3.39)$$

Por outro lado, segue da definição de fRe dada na Equação (2.31), que:

$$fRe = \frac{1}{2} \frac{d_h^2}{\frac{u_{mf}}{\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}}} . \quad (3.40)$$

Sendo o domínio particionado, como mostrado na Seção 4.1, vale observar que d_h utilizado para a definição de fRe é o diâmetro hidráulico total da seção transversal da fratura definido como $d_h = 4A_f/P_f$, não podendo ser utilizado a soma dos diâmetros hidráulicos dos subdomínios. Para maiores detalhes, ver Apêndice A.

Daí, substituindo a Equação (3.38) na Equação (3.40), obtém-se:

$$fRe = \frac{1}{2} \frac{d_h^2}{L^2 W_m} \quad (3.41)$$

ou ainda,

$$L^2 W_m = \frac{d_h^2}{2fRe} . \quad (3.42)$$

Substituindo a Equação (3.42) na Equação (3.39), e segundo Hofmann *et al.* (2016), $A_t k = A_f k_f$, obtém-se:

$$k_f = \frac{d_h^2}{2fRe} . \quad (3.43)$$

Assim, a permeabilidade local da fratura pode ser determinada usando a Equação (3.43).

Comparando a Equação (2.37) com a Equação (3.43), observa-se:

$$h_H = \sqrt{6 \frac{d_h^2}{fRe}} . \quad (3.44)$$

Introduzindo-se a transmissividade, definida como sendo $T = k_f A_f$, na Equação (3.43), mostra-se que:

$$T = A_f \frac{d_h^2}{2fRe} . \quad (3.45)$$

As Equações (3.43), (3.44) e (3.45), incorporam as características geométricas da seção transversal da fratura, porém essa seção transversal pode variar ao longo do eixo de escoamento como é mostrado na Figura 3-4, itens (a), (b) e (c). Neste sentido, toma-se, na amostra, as seções transversais de cada face i em diversos cortes da fratura ao longo do eixo de escoamento do fluido, ver Figura 3-4, de modo a determinar a permeabilidade local pela Equação (3.43), para cada uma delas, isto é, para cada seção transversal com área A_{f_i} , com $i = 1, 2, \dots, p$, tem-se:

$$k_{f_i} = \frac{d_{h_i}^2}{2fRe_i} . \quad (3.46)$$

Daí, a permeabilidade da fratura é obtida por:

$$k_f = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p k_{f_i} . \quad (3.47)$$

Além disso, a abertura hidráulica local para cada seção transversal com área A_{f_i} , com $i = 1, 2, \dots, p$, é dada por:

$$h_{H_i}^2 = 6 \frac{d_{h_i}^2}{fRe_i} . \quad (3.48)$$

Logo, a abertura hidráulica equivalente para a fratura, é determinada por:

$$h_H = \sqrt{\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p h_{H_i}^2} . \quad (3.49)$$

Por fim, a transmissividade é determinada a partir da equação:

$$T = A_f k_f , \quad (3.50)$$

onde $A_f = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p A_{f_i}$ e k_f é dado pela Equação (3.47).

3.3 Parâmetros Fluidodinâmicos

Esta seção é dedicada a metodologia abordada para analisar diferentes parâmetros fluidodinâmicos do escoamento de fluidos em fraturas, tais como fator de atrito, queda de pressão e perfis de velocidade, de modo que nos possibilite a obter mais informações sobre o escoamento em fraturas.

Em uma fratura idealizada por placas paralelas lisas $d_h = 2h_H$, assim a Equação (2.29) torna-se:

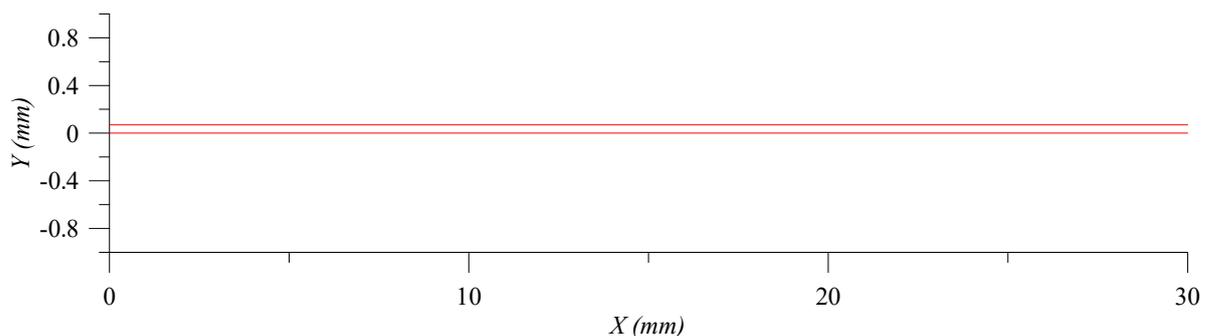
$$Re = \frac{2\rho u_{mf} h_H}{\mu} , \quad (3.51)$$

onde h_H é a abertura hidráulica equivalente da fratura.

Para assegurar o regime de escoamento laminar foi assumido o valor de $Re < 2,11$, com base no trabalho de Sarkar *et al.* (2004).

Inicialmente, foi simulado o escoamento em fraturas com superfícies paralelas e planas, incluindo o modelo FPP proposto por Sarkar *et al.* (2004), como ilustrado na Figura 3-5.

Figura 3-5- Fratura com superfícies paralelas e planas.

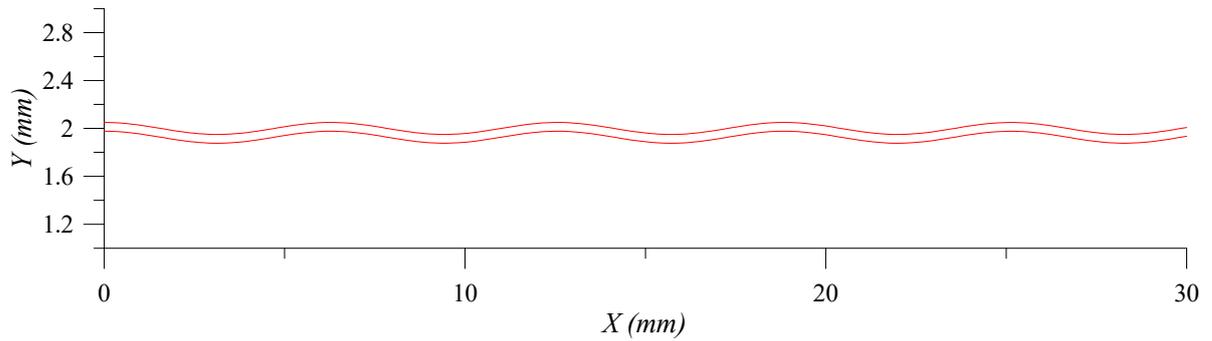


Fonte: Própria do autor.

Para estas fraturas foram determinados os valores da queda de pressão Δp_{FPP} para o modelo FPP e para suas variações obtidas modificando a área ou o perímetro.

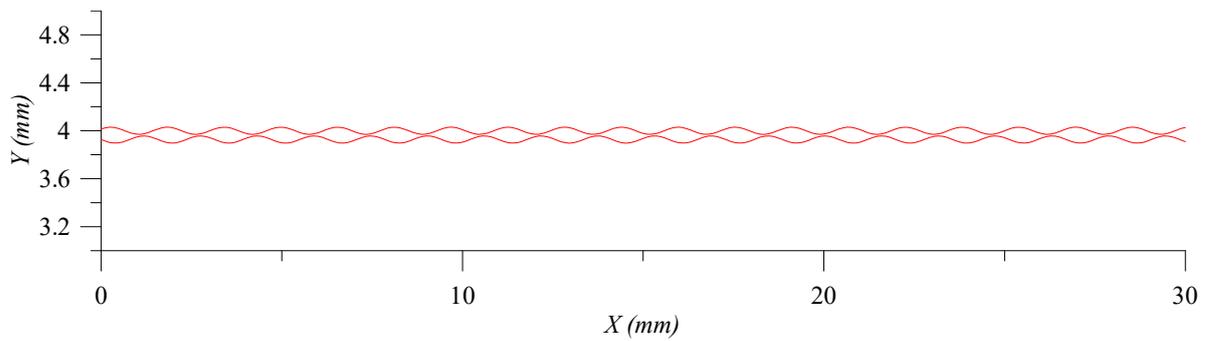
Foram igualmente simuladas outras situações para o escoamento em diferentes fraturas com diversas variações ondulatórias nas superfícies, sem e com deslocamentos entre as paredes. Nas Figuras 3-6 e 3-7 são apresentados exemplos.

Figura 3-6- Fratura simulada por funções circulares sem deslocamento entre as paredes.



Fonte: Própria do autor.

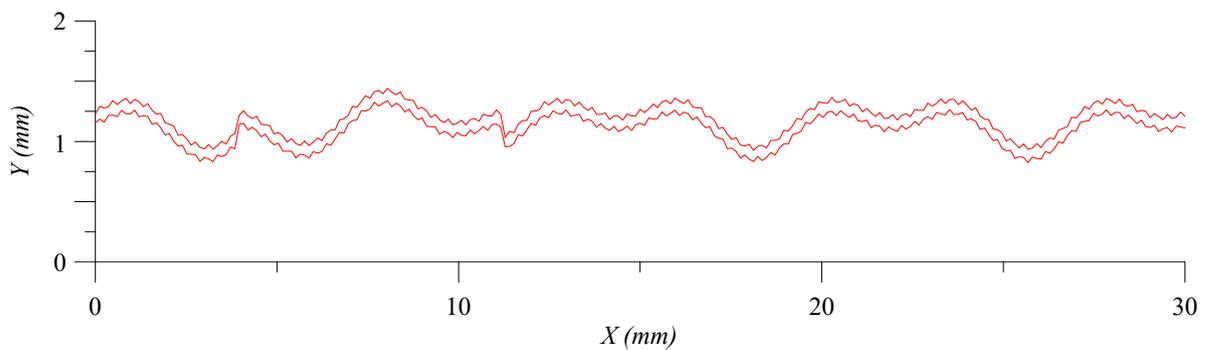
Figura 3-7- Fratura simulada por funções circulares com deslocamento entre as paredes.



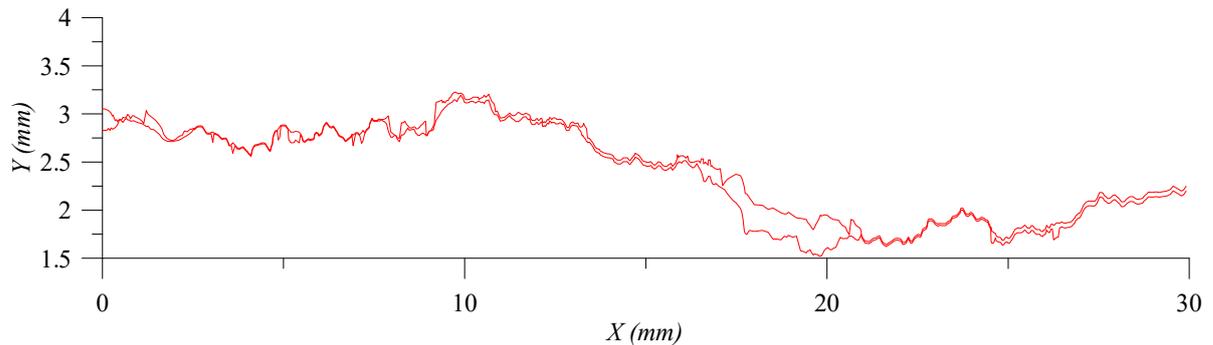
Fonte: Própria do autor.

Por fim, foram realizadas simulações em fraturas com variações mais realistas para as superfícies da fratura, como pode ser observado nas Figuras 3-8 e 3-9.

Figura 3-8- Representação de uma fratura com variações realistas nas superfícies.



Fonte: Própria do autor.

Figura 3-9- Representação de uma fratura com superfícies reais.

Fonte: Própria do autor.

Para cada tipo i de fratura que o escoamento foi simulado, foram obtidos dados para fator de atrito f_i , queda de pressão Δp_i , número de *Reynolds* Re_i , onde

$$\Delta p^* = \frac{\Delta p_i}{\Delta p_{FPP}} \quad \text{com} \quad \Delta p_i = \frac{2\mu u_{mf} f Re_i}{d_{hi}^2}, \quad (3.52)$$

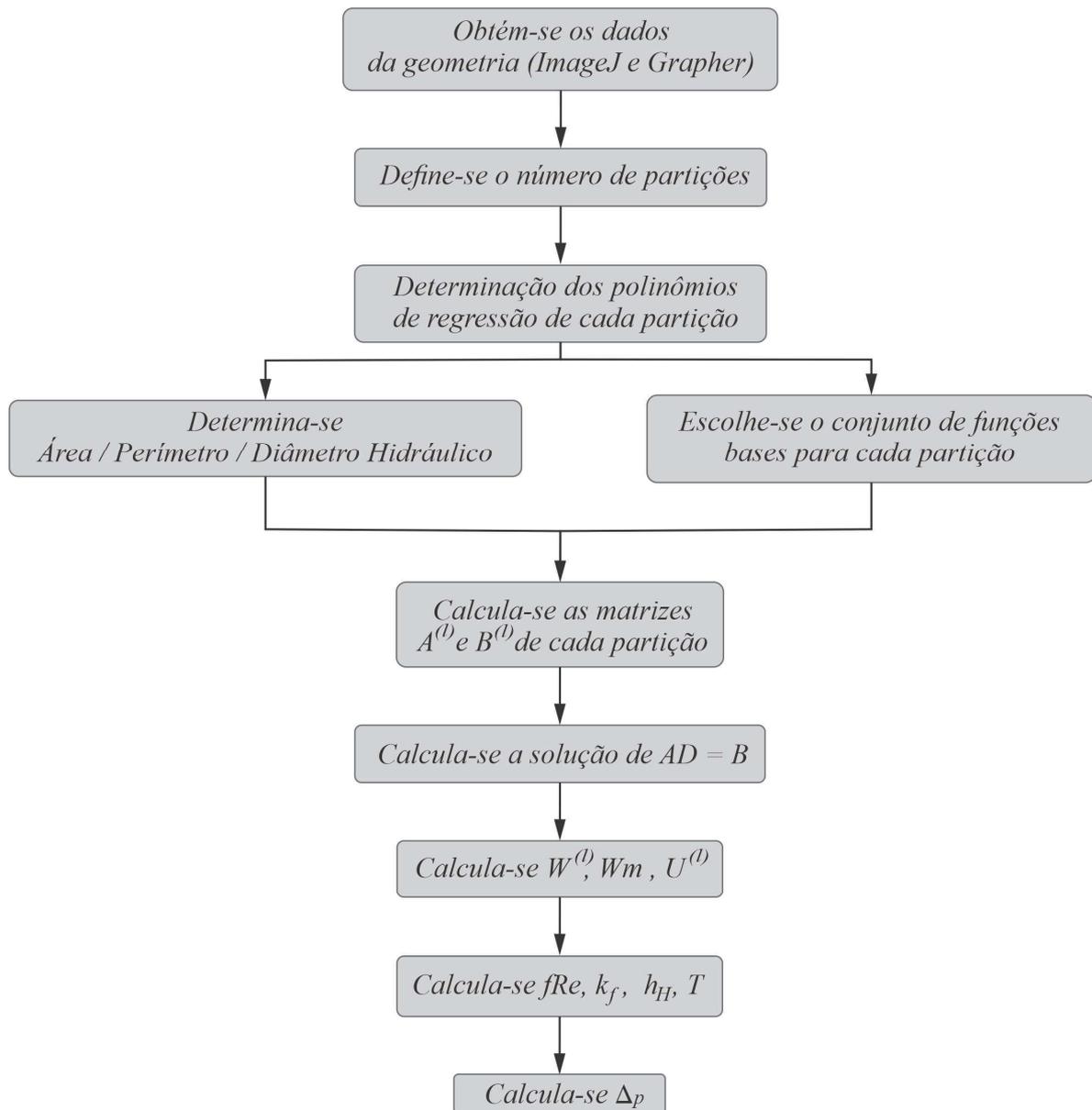
onde Δp_{FPP} é a queda de pressão para o modelo de fratura FPP, para a velocidade u_{mf} e $Re < 2,11$.

3.4 Procedimento Numérico

Nesta seção são apresentadas as ferramentas utilizadas para o desenvolvimento deste trabalho, as quais têm, cada uma, sua importância, conforme esquema mostrado na Figura 3-10. Todos os *softwares* e procedimentos apresentados foram instalados em uma máquina com as seguintes configurações:

- Processador Intel Core i5 8265U CPU@ 1,8GHz;
- Memória DDR4 2333MHz de 32GB;
- Placa de vídeo dedicada NVIDIA GeForce MX130 GDDR5 2GB;
- SSD WALRAM 512GB;
- Sistema Operacional de 64 bits, Windows 11.

Figura 3-10- Esquema do procedimento utilizado.



Fonte: Própria do autor.

3.4.1 Softwares ImageJ e Grapher

O *ImageJ* é um *software* de processamento de imagens de código aberto e multiplataforma. Ele foi desenvolvido no *National Institutes of Health*, nos Estados Unidos, e é amplamente utilizado nas diversas áreas que envolvem algum tipo de análise e processamento de imagens.

Alguns dos recursos principais incluem:

- Processamento de Imagens: possui ferramentas para realizar operações básicas de processamento de imagens, como ajuste de brilho, contraste e cores, filtragem, suavização, realce de bordas, entre outros;
- Análise de Imagens: O *software* oferece recursos avançados de análise de imagem, como medição de áreas, comprimentos, ângulos, densidade de pixels, contagem de objetos, segmentação de imagens, extração de características, entre outros;
- Ferramentas de Visualização: O *ImageJ* possui várias ferramentas de visualização para exibir e explorar imagens;
- Plugins e Extensões: por ser de código aberto existe uma comunidade dedicada a ele, sendo assim, existem muitos plugins disponíveis que podem ser instalados para atender necessidades específicas de análise e processamento de imagens;
- Macros: possui uma linguagem de programação de macros embutida que permite automatizar tarefas repetitivas e criar fluxos de trabalho personalizados.

Utilizamos o *ImageJ* 1.53t para processamento das imagens das fraturas, a fim de obter imagem mais detalhada das seções transversais das mesmas. O procedimento foi o seguinte:

- *Image*-> *Type*-> *8-bit*;
- *Image*-> *Adjust*-> *Threshold*.

Com isso, bastava ajustar o histograma de cores para obtenção da seção da fratura com mais clareza.

Por sua vez, O *Grapher* é um *software* de plotagem, visualização e manipulação de gráficos desenvolvido pela *Golden Software*. Ele é projetado para criar gráficos 2D e 3D a partir de dados numéricos fornecidos. Este oferece uma ampla gama de recursos e ferramentas para criar e personalizar gráficos. Aqui estão alguns dos recursos principais que utilizamos do *software*:

- Tipos de Gráficos: suporta vários tipos de gráficos, incluindo gráficos de dispersão, gráficos de linhas, gráficos de barras, gráficos de áreas, gráficos de superfícies 3D, gráficos de contorno, gráficos de polar, entre outros;
- Captação de pontos cartesianos: permite que dado um gráfico de terceiros, o usuário obtenha as coordenadas cartesianas, para que com isso possa avaliar e manipular os gráficos. Além disso, esses dados podem ser exportados em diferentes formatos de dados, tais como .CSV e .TXT;

- Personalização: O *software* oferece uma ampla gama de opções de personalização para os gráficos, permitindo ajustar cores, estilos de linha, marcadores, fontes, títulos, legendas;
- Importação e Exportação de Dados: permite importar dados de várias fontes, incluindo arquivos de texto, planilhas do Excel e bancos de dados. Além disso, os gráficos podem ser exportados em diferentes formatos.

Como na literatura não estava presentes dados sobre a geometria das fraturas, após o tratamento das imagens das fraturas com o *ImageJ*, utilizamos o *Grapher* 8, para obtenção das coordenadas cartesianas da geometria de cada uma delas, com o seguinte procedimento:

- *File->Import*;
- *Graph->Digitizing->Assign Coordinates*;
- *Graph->Digitizing->Digitize*;
- Copiar os dados para o *Worksheet* e salvar como CSV;
- Gerar os gráficos que representam as fraturas a partir dos arquivos CSV.

3.4.2 Software Maple

O *Maple* é um *software* de álgebra computacional desenvolvido pela empresa *Maplesoft*. Ele é projetado para auxiliar estudantes, pesquisadores e profissionais em cálculos matemáticos avançados, simulações, visualização de dados e resolução de problemas complexos.

O *Maple* oferece uma ampla gama de recursos e funcionalidades. Alguns dos recursos principais incluem:

- Cálculos matemáticos avançados: o *software* possui uma ampla biblioteca de funções matemáticas e permite realizar cálculos simbólicos e numéricos, simplificação de expressões, resolução de equações, integração, diferenciação, entre outros;
- Álgebra Matricial: nos permite utilizar de uma ampla gama de pacotes relativos à álgebra matricial, possibilitando a realização de operações básicas com matrizes, resolução de sistemas de equações lineares e cálculos de autovalores e autovetores, entre outros;
- Funções Estatísticas: oferece recursos estatísticos, permitindo calcular estatísticas básicas, ajustar curvas, realizar regressões lineares e não lineares;

- Programação: permite escrever códigos utilizando sua linguagem de programação própria, possibilitando a automação de cálculos, a criação de algoritmos personalizados e a implementação de lógica complexa;
- Visualização de dados: oferece ferramentas para visualização de dados, gráficos 2D e 3D interativos, criação de animações e criação de plotagens personalizadas para análise e apresentação visual dos resultados.

O *software* foi utilizado para escrita do código e processamento dos cálculos.

3.4.3 Código *Maple* para o cálculo de fRe , k_f , h_H e T

Os detalhes do código *Maple* utilizado neste trabalho pode ser observado a seguir.

```
>restart:with(student):with(Student[Calculus1]):with(Optimization):with(plots):with(PDEtools):with(LinearAlgebra):with(powseries):with(plottools):with(Statistics):
> Digits := 15:
> csvSuperior := "C:/Users/agilz/OneDrive/Área de
Trabalho/CodigosTese/Dados_Imagens_Cheng/Codigo_Dados_CSV/FOF4/FOF4_TOP_SUP.csv":
> csvInferior := "C:/Users/agilz/OneDrive/Área de
Trabalho/CodigosTese/Dados_Imagens_Cheng/Codigo_Dados_CSV/FOF4/FOF4_TOP_INF.csv":
> Psup := ImportMatrix(csvSuperior, source = csv): Pinf := ImportMatrix(csvInferior, source
= csv):
> n := RowDimension(Psup):
> N := 19:
> r := trunc((n-1)/N):
> xs[N] := Psup(n, 1): ys[N] := Psup(n, 2):
> for i to N do
    xs[i-1] := Psup(1+(i-1)*r, 1):
    ys[i-1] := Psup(1+(i-1)*r, 2)
end do:
> x[N] := Pinf(n, 1): y[N] := Pinf(n, 2):
> for i to N do
    x[i-1] := Pinf(1+(i-1)*r, 1):
    y[i-1] := Pinf(1+(i-1)*r, 2)
end do:
> grau := 15:
> for i to N do
    if i = N then
        curvaS[i] := unapply(PolynomialFit(grau, Psup(1+(i-1)*r .. n, 1), Psup(1+(i-1)*r ..
n, 2), X), X):
        curvaI[i] := unapply(PolynomialFit(grau, Pinf(1+(i-1)*r .. n, 1), Pinf(1+(i-1)*r ..
n, 2), X), X):
    else
```

```

    curvaS[i] := unapply(PolynomialFit(grau, Psup(1+(i-1)*r .. 1+i*r, 1), Psup(1+(i-1)*r
    .. 1+i*r, 2), X), X):
    curvaI[i] := unapply(PolynomialFit(grau, Pinf(1+(i-1)*r .. 1+i*r, 1), Pinf(1+(i-1)*r
    .. 1+i*r, 2), X), X):
end if:
S[i] := plot({curvaS[i](X)}, X = xs[i-1] .. xs[i], Y = ys[i-1] .. ys[i], Labels = ["X",
"Y"]):
CI[i] := plot({curvaI[i](X)}, X = x[i-1] .. x[i], Y = y[i-1] .. y[i], Labels = ["X",
"Y"]):
end do:
> AreaT := evalf(Pi*15^2):
> for i to N do
    Area[i] := int(curvaS[i](X), X = x[i-1] .. x[i])-(int(curvaI[i](X), X = x[i-1] ..
    x[i]))):
end do:
> for i to N do
    PerimetroS[i] := evalf(ApproximateInt(sqrt(1+(diff(curvaS[i](X), X))^2), X = x[i-1] ..
    x[i], method = newtoncotes[13])):
    PerimetroI[i] := evalf(ApproximateInt(sqrt(1+(diff(curvaI[i](X), X))^2), X = x[i-1] ..
    x[i], method = newtoncotes[13])):
end do:
> AreaF := sum('Area[v]', v = 1 .. N):
> PerimetroF := sum('PerimetroS[v]+PerimetroI[v]', v = 1 .. N):
> dh := 4*AreaF/PerimetroF:
> L := 40: K := 6:
> AreaFad := AreaF/L^2:
> PerimetroFad := PerimetroF/L:
> Dh := 4*AreaFad/PerimetroFad:
> Et := Matrix(K, 1): At := Matrix(K, K):
> for s to N do
    g[s] := unapply((curvaS[s](L*X)-L*Y)*(curvaI[s](L*X)-L*Y), X, Y):
    f[s] := [g[s](X, Y), g[s](X, Y)*Y, g[s](X, Y)*X, g[s](X, Y)*Y^2, g[s](X, Y)*X*Y,
    g[s](X, Y)*X^2, g[s](X, Y)*Y^3, g[s](X, Y)*X*Y^2, g[s](X, Y)*X^2*Y, g[s](X, Y)*X^3,
    g[s](X, Y)*Y^4, g[s](X, Y)*X*Y^3, g[s](X, Y)*X^2*Y^2, g[s](X, Y)*X^3*Y, g[s](X, Y)*X^4,
    g[s](X, Y)*Y^5, g[s](X, Y)*X*Y^4, g[s](X, Y)*X^2*Y^3, g[s](X, Y)*X^3*Y^2, g[s](X,
    Y)*X^4*Y, g[s](X, Y)*X^5, g[s](X, Y)*X*Y^5, g[s](X, Y)*X^2*Y^4, g[s](X, Y)*X^3*Y^3,
    g[s](X, Y)*X^4*Y^2, g[s](X, Y)*X^5*Y, g[s](X, Y)*X^2*Y^5, g[s](X, Y)*X^3*Y^4, g[s](X,
    Y)*X^3*Y^4, g[s](X, Y)*X^4*Y^3, g[s](X, Y)*X^5*Y^2, g[s](X, Y)*X^3*Y^5, g[s](X,
    Y)*X^4*Y^4, g[s](X, Y)*X^5*Y^3, g[s](X, Y)*X^4*Y^5, g[s](X, Y)*X^5*Y^4, g[s](X,
    Y)*X^5*Y^5]:
    Ej[s] := proc (j) options operator, arrow: -
    evalf(ApproximateInt(ApproximateInt(f[s][j], Y = curvaI[s](L*X)/L .. curvaS[s](L*X)/L,
    method = newtoncotes[13]), X = x[s-1]/L .. x[s]/L, method = newtoncotes[13]))/AreaFad
end proc:

```

```

E[s] := Matrix(K, 1, Ej[s]):
evalf(E[s]):
Aij[s] := proc (i, j) options operator, arrow: -
evalf(ApproximateInt(ApproximateInt((diff(f[s][i], X))*(diff(f[s][j],
X))+(diff(f[s][i], Y))*(diff(f[s][j], Y)), Y = curvaI[s](L*X)/L .. curvaS[s](L*X)/L,
method = newtoncotes[13]), X = x[s-1]/L .. x[s]/L, method = newtoncotes[13]))/AreaFad
end proc:
A[s] := Matrix(K, K, Aij[s]):
evalf(A[s]):
Et := Et+E[s]:
At := At+A[s]:
end do:
> evalf(Et): At := evalf(At):
> Dt := evalf(evalf(1/At).evalf(Et)):
> Lt := proc (j) options operator, arrow: evalf(Dt[j, 1]) end proc:
> for s to N do
    W[s] := unapply(sum('lt[s](v)*f[s][v]', v = 1 .. K), k): W[s](K):
    graf[s] := plot3d(W[s](K), Y = curvaI[s](L*X)/L .. curvaS[s](L*X)/L, X = x[s-1]/L ..
    x[s]/L, labelfont = ["ROMAN", 17], labels = ["Y", "X", "W(X,Y)"):
    display(graf[s]):
end do:
> Wmt := 0:
> for s to N do
    Wm[s] := evalf(ApproximateInt(ApproximateInt(W[s](K), Y = curvaI[s](L*X)/L ..
    curvaS[s](L*X)/L, method = newtoncotes[13]), X = x[s-1]/L .. x[s]/L, method =
    newtoncotes[13])/AreaFad:
    Wmt := Wmt+Wm[s]
end do:
> for s to N do
    U[s] := unapply(W[s](k)/Wmt, X, Y):
    gr[s] := plot3d(U[s](X, Y), Y = curvaI[s](L*X)/L .. curvaS[s](L*X)/L, X = x[s-1]/L ..
    x[s]/L, labelfont = ["ROMAN", 12], labels = ["Y", "X", "U(X,Y)"):
    display(gr[s]):
end do:
> fRe := Dh^2/(2*Wmt):
> Perm := evalf(dh^2/(2*fRe)):
> AHidr := evalf(sqrt(6*dh^2/(fRe))):
> Transm := evalf(AreaF*dh^2/((2*fRe))):

```

Capítulo 4

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, são apresentados os resultados das diferentes simulações numéricas considerando o escoamento laminar, newtoniano, em regime permanente, com condução axial e dissipação viscosa negligenciadas, e com a densidade ρ , e a viscosidade μ , consideradas constantes, usando uma adaptação do método GBI aplicado em um domínio particionado para solucionar a equação de momento linear, em dutos e fraturas com seção transversal arbitrária e comparamos com outros resultados disponibilizados na literatura. As funções base para as diversas geometrias foram obtidas a partir de curvas geradas por regressão polinomial com aproximação de alta ordem usando o *software Maple*.

4.1 Escoamento em Dutos Diversos

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos, com o método GBI aplicado em um domínio particionado, para o produto fRe em diversas geometrias. A validação do método é realizada comparando-se os resultados obtidos neste estudo com os resultados de Shah e London (1978) e Santos Júnior *et al.* (2021), os quais contém dados experimentais ou de simulações numéricas.

Foram realizadas simulações para todas as geometrias detalhadas com 7, 13 e 19 partições e 3, 6 e 9 funções base para cada partição. Na Tabela 4-1 está representado o comparativo dos resultados obtidos nas simulações mantendo-se o número de partições inalterado e igual a 7, variando-se o número de funções base para cada geometria abordada, com os números para fRe mostrados por Shah e London (1978).

Tabela 4-1 – Resultados de fRe para diferentes números de funções base para diversas geometrias e a discrepância com os resultados de SHAH e LONDON (1978).

Geometria	Nº de funções base para cada partição	fRe – presente trabalho	fRe - Shah e London, 1978	Discrepância
Circular	3	16,1171		0,732%
	6	16,1165	16,0000	0,728%
	9	16,1165		0,728%
Elipse ³ $a/b = 1/2$	3	16,8777		0,325%
	6	16,8775	16,8230	0,324%
	9	16,8775		0,324%
Elipse $a/b = 1/10$	3	19,3353		0,110%
	6	19,3886	19,3140	0,386%
	9	19,3887		0,387%
Quadrada	3	15,0606		5,859%
	6	14,3260	14,2271	0,695%
	9	14,3135		0,607%
Triangular Equilátero	3	14,3794		7,846%
	6	13,9622	13,3333	4,717%
	9	13,8656		3,992%
Placas Paralelas	3	23,9999		0,000%
	6	24,0000	24,0000	0,000%
	9	24,0000		0,000%
Duplo Seno $a/b = 1/2$	3	14,8042		1,633%
	6	15,2293	15,0527	1,191%
	9	15,2289		1,189%

Fonte: Própria do autor.

Os resultados da Tabela 4-1 indicam que ao se aumentar o número de funções base de 3 para 6 o produto fRe para as geometrias estudadas melhoram em um intervalo de 0% - 5,164%, exceto para a geometria elíptica ($a/b = 1/10$) onde esse valor passou a divergir cerca

³ a e b são, respectivamente, os comprimentos do eixo menor e eixo maior para as elipses e o duplo seno.

de 0,276% a mais. A maior melhora ocorreu nas geometrias quadrada e triangular equilátero, com cerca de 5,164% e 3,119% de melhora, respectivamente. Por outro lado, ao aumentar o número de funções bases de 6 para 9, não houve melhora significativa, podendo-se destacar a melhora no resultado para a geometria triangular equilátero de cerca de 0,724%.

Mesmo havendo melhora nas aproximações quanto a variação do número de funções base, ainda há, em alguns casos, cerca de 4% de discrepância para o valor de referência, o que pode ficar evidenciado com o aumento do número de partições. Na Tabela 4-2 estão representados os resultados para diferentes números de partições, para o número de funções base de cada partição igual a 6, bem como a discrepância obtida quando comparado com os resultados de Shah e London (1978).

Tabela 4-2 – Resultados do produto fRe para diferentes números de partições e geometrias e a discrepância com os resultados obtidos por SHAH e LONDON (1978).

Geometria	Nº de partições	fRe – presente trabalho	fRe - Shah e London, 1978	Discrepância
Circular	7	16,1165		0,728%
	13	16,0871	16,0000	0,545%
	19	16,0608		0,380%
Elipse $a/b = 1/2$	7	16,8775		0,324%
	13	16,8652	16,8230	0,251%
	19	16,8540		0,185%
Elipse $a/b = 1/10$	7	19,3886		0,386%
	13	19,3754	19,3140	0,318%
	19	19,3592		0,234%
Quadrada	7	14,3260		0,695%
	13	14,3259	14,2271	0,695%
	19	14,3135		0,607%
Triangulo Equilátero	7	13,9622		4,717%
	13	13,6542	13,3333	2,407%
	19	13,3333		0,000%
Placas Paralelas	7	24,0000		0,000%
	13	24,0000	24,0000	0,000%
	19	24,0000		0,000%

Duplo Seno $a/b =$	7	15,2292		1,191%
	13	15,1874	15,0527	0,913%
1/2	19	15,0769		0,179%

Fonte: Própria do autor.

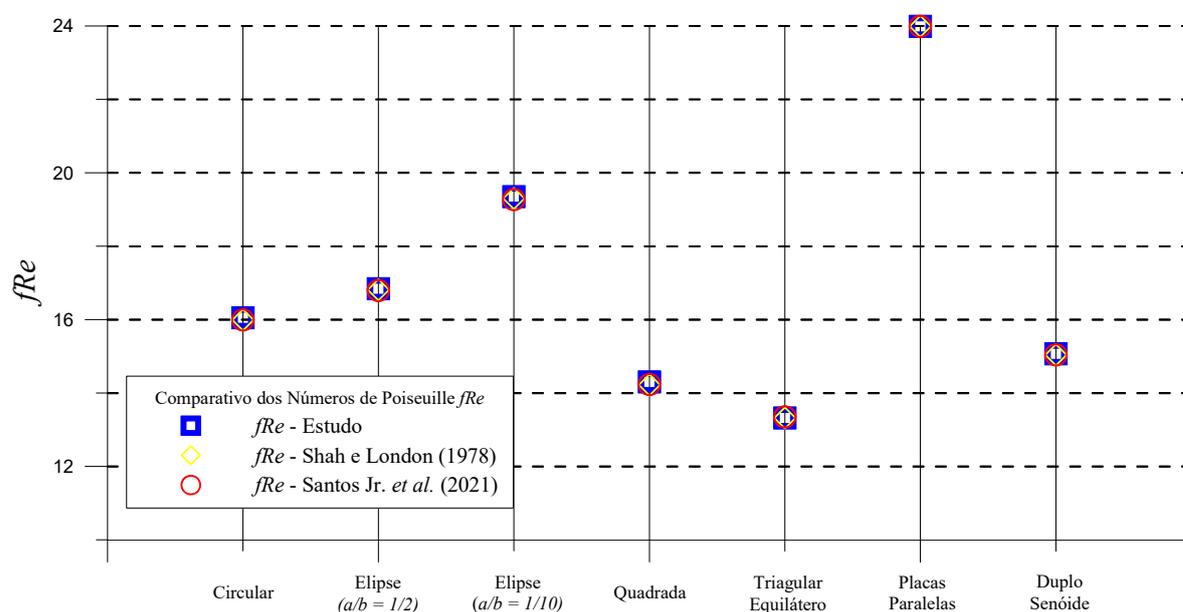
Nota-se, a partir dos resultados apresentados na Tabela 4-2, que ao se aumentar o número de partições os resultados tendem a convergir para os valores apresentados por Shah e London (1978). Vale ressaltar que para a geometria com placas paralelas não houve variações significativa em fRe , quando se aumentava o número de partições. Por outro lado, para a geometria triangular equilátero, observou-se a maior variação, mas, com 19 partições, o resultado concordou com Shah e London (1978).

No geral, ao se aumentar o número de partições, percebe-se que os valores de fRe obtidos tendem a convergir para os valores de referência, porém com pouca variação. Nos casos avaliados os resultados obtidos com 19 partições apresentaram valores mais satisfatórios se comparados com os resultados de Shah e London (1978) apresentando uma discrepância máxima de apenas 0,607%.

Na Figura 4-1 é representado um comparativo dos resultados do produto fRe para diferentes geometrias do duto de escoamento do presente trabalho em relação com os trabalhos de Shah e London (1978) e Santos Júnior *et al.* (2021). Os resultados indicam a boa concordância dos resultados deste trabalho com os obtidos por Santos Júnior *et al.* (2021) ao aplicarem o método GBI no domínio não particionado. No presente trabalho, foi realizado um particionamento no domínio estudado e o Método GBI foi aplicado em cada subdomínio, de modo a contemplar todo o domínio. Os resultados apresentam uma discrepância máxima igual a 0,491%.

A discrepância dos resultados do presente trabalho em comparação com os apresentados por Shah e London (1978) e Santos Júnior *et al.* (2021), pode ser explicado pela utilização de polinômios de regressão para parametrizar as curvas das seções transversais de cada partição, em vez de utilizar as parametrizações clássicas contidas em Santos Júnior *et al.* (2021), sendo assim, essa mínima divergência é perfeitamente aceitável.

Figura 4-1- Representação da comparação de fRe para diferentes geometrias do duto de escoamento com os trabalhos reportados na literatura.



Fonte: Própria do autor.

Nas Figuras B-1 a B-7, contidas no Apêndice B, estão representadas as geometrias geradas pelos polinômios de regressão e os perfis de velocidade adimensional obtidos sob as diferentes seções transversais do duto de escoamento (circular, elíptico, quadrada, triangular equilátero, placas paralelas e duplo seno).

A aplicação do método GBI em um domínio particionado apresentado neste trabalho mostrou-se eficaz, tendo em vista que os resultados apresentados têm mínimas discrepâncias com os resultados contidos na literatura.

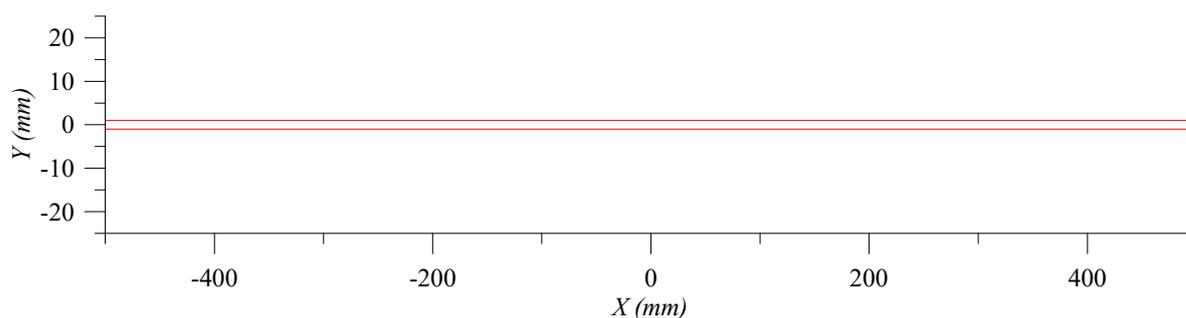
4.2 Escoamento através de Fraturas em Meios Porosos

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos usando o modelo de permeabilidade para uma fratura em meios porosos, Equação (3.47), bem como os modelos derivados para abertura hidráulica equivalente, Equação (3.49), e transmissividade, Equação (3.50). A validação do método utilizado é realizada comparando-se os resultados obtidos com os resultados de Sarkar *et al.* (2004) e Cheng *et al.* (2020), os quais contém dados experimentais ou de simulações numéricas.

Os resultados para o produto fRe , permeabilidade, abertura hidráulica equivalente e transmissividade, foram obtidos adotando o modelo de fratura com paredes lisas e paralelas (FPP), igualmente utilizado por Sarkar *et al.* (2004), com largura de 1000mm , espaçamento entre as paredes de 2mm e comprimento $L = 800\text{mm}$ como na Figura 4-2.

Os resultados obtidos no presente trabalho e os resultados apresentados por Sarkar *et al.* (2004) estão representados na Tabela 4-3.

Figura 4-2- Fratura com paredes lisas e paralelas.



Fonte: Própria do autor.

Tabela 4-3 - Resultados da permeabilidade, abertura hidráulica e transmissividade obtidos no presente trabalho, por Sarkar *et al.* (2004) e a solução analítica (Lei cúbica).

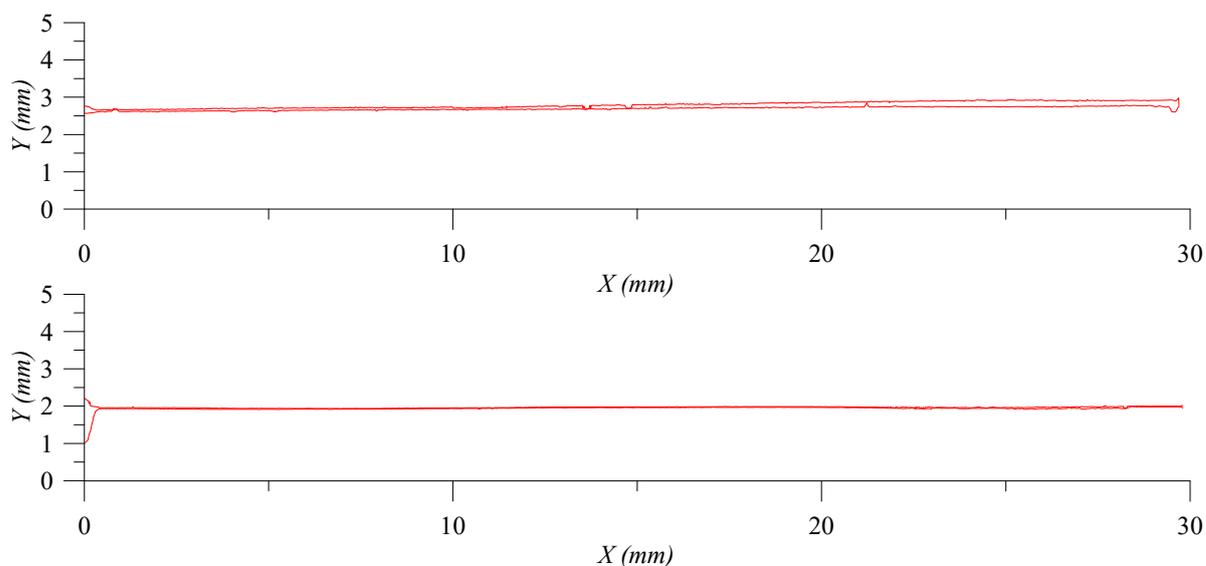
Amostra FPP	Presente trabalho	Sarkar <i>et al.</i>, 2004	Analítico – Sarkar <i>et al.</i>, 2004
$k (m^2)$ – Equação (3.47)	$3,333 \times 10^{-7}$	$3,333 \times 10^{-7}$	$3,333 \times 10^{-7}$
$h_H (mm)$ – Equação (3.49)	2,000	2,000	2,000
$T (m^4)$ – Equação (3.50)	$6,666 \times 10^{-10}$	$6,666 \times 10^{-10}$	$6,666 \times 10^{-10}$

Fonte: Própria do autor.

Os resultados do presente trabalho utilizando o modelo de fratura com paredes lisas e paralelas, concordam plenamente com os resultados da simulação e com os resultados analíticos apresentados por Sarkar *et al.* (2004), como pode ser observado na Tabela 4-3. Além disso, o valor obtido para o produto fRe para o modelo de fratura FPP foi de 24, o que está de acordo com o estudo de Shah e London (1978) para placas paralelas.

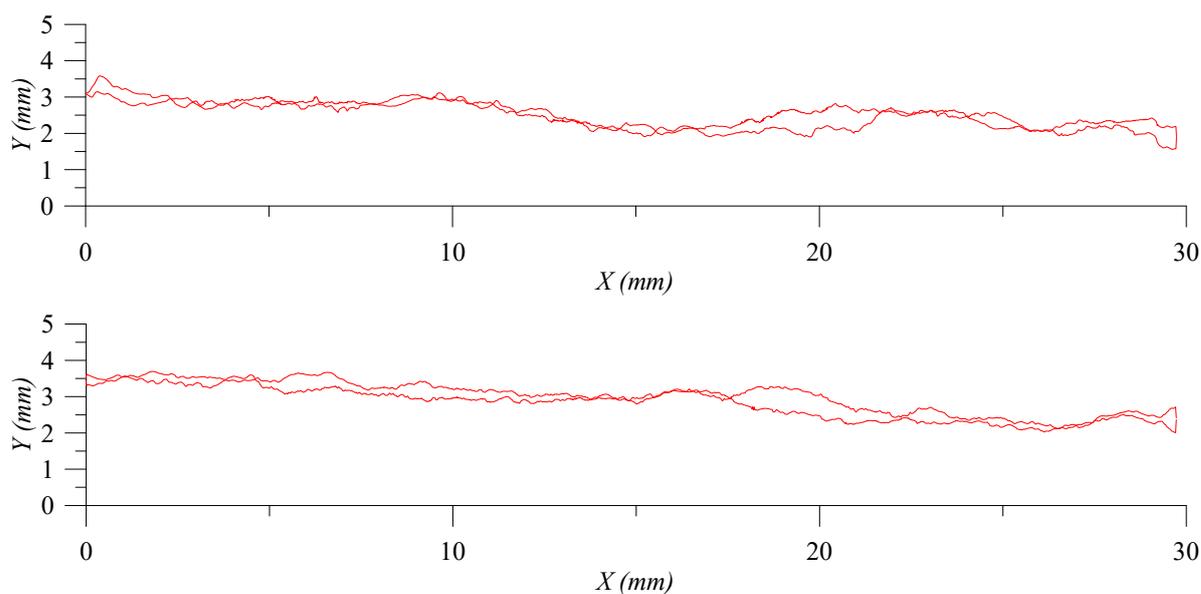
Nas Figuras 4-3 a 4-5 estão representadas as seções transversais das fraturas na face superior e inferior para cada amostra (FFT, FFL1 e FFL2) que foram utilizadas para a obtenção dos resultados.

Figura 4-3- Representação das fraturas superior e inferior da amostra FFT.

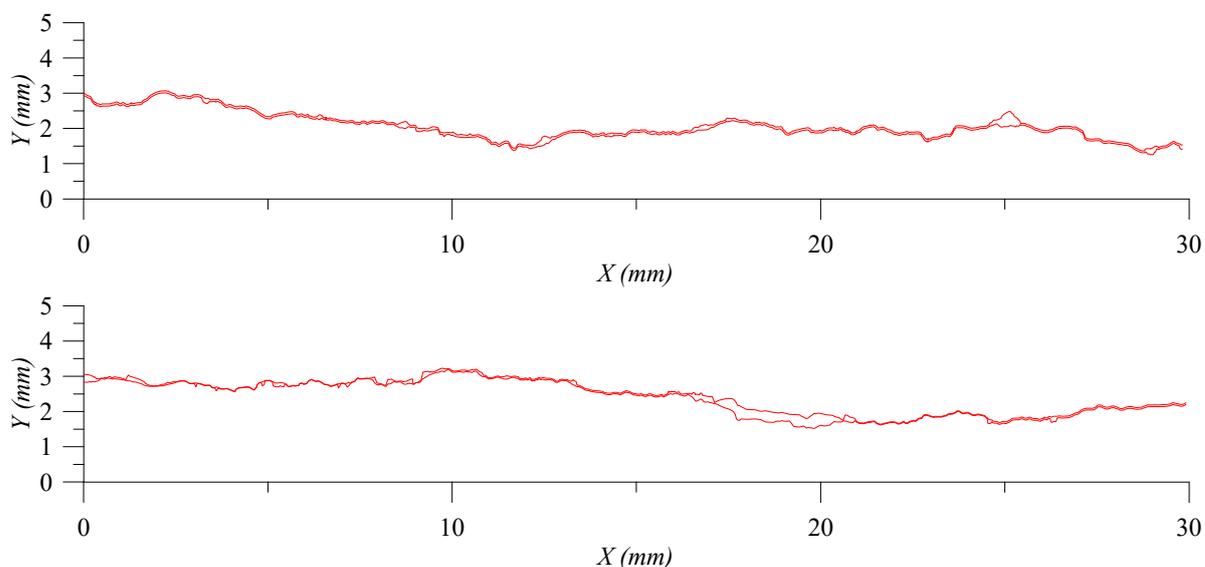


Fonte: Própria do autor.

Figura 4-4- Representação das fraturas superior e inferior da amostra FFL1.



Fonte: Própria do autor.

Figura 4-5- Representação das fraturas superior e inferior da amostra FFL2.

Fonte: Própria do autor.

Os resultados referentes ao produto fRe , a permeabilidade, a abertura hidráulica equivalente e a transmissividade, para as amostras fraturadas de arenito Fontainebleau (FFT) e arenito Flechtinger (FFL1 e FFL2), com 30mm de diâmetro e 40mm de comprimento, foram obtidos adotando a pressão de confinamento nula, condição igualmente adotada por Cheng *et al.* (2020).

Para cada seção transversal (superior e inferior) das fraturas contidas nas amostras FFT, FFL1 e FFL2, obteve-se os resultados representados na Tabela 4-4 para o produto fRe local superior e inferior, denotados por fRe_1 e fRe_2 , respectivamente. Vale salientar que, segundo Cheng *et al.* (2020), a fratura da amostra FFT, é a que tem a menor rugosidade e menor abertura dentre as três, e as fraturas das amostras FFL1 e FFL2, apresentam maior rugosidade, porém têm aberturas maior e menor para FFL1 e FFL2, respectivamente.

Tabela 4-4 - Resultados para fRe_1 e fRe_2 obtidos no presente trabalho.

Amostra	fRe_1	fRe_2
FFT	14,6564	0,9320
FFL1	2,5047	6,9411
FFL2	10,9687	3,4128

Fonte: Própria do autor.

Na Tabela 4-5 são apresentados resultados para a permeabilidade local superior e inferior, das fraturas contidas nas amostras FFT, FFL1 e FFL2, denotadas por k_1 e k_2 , respectivamente.

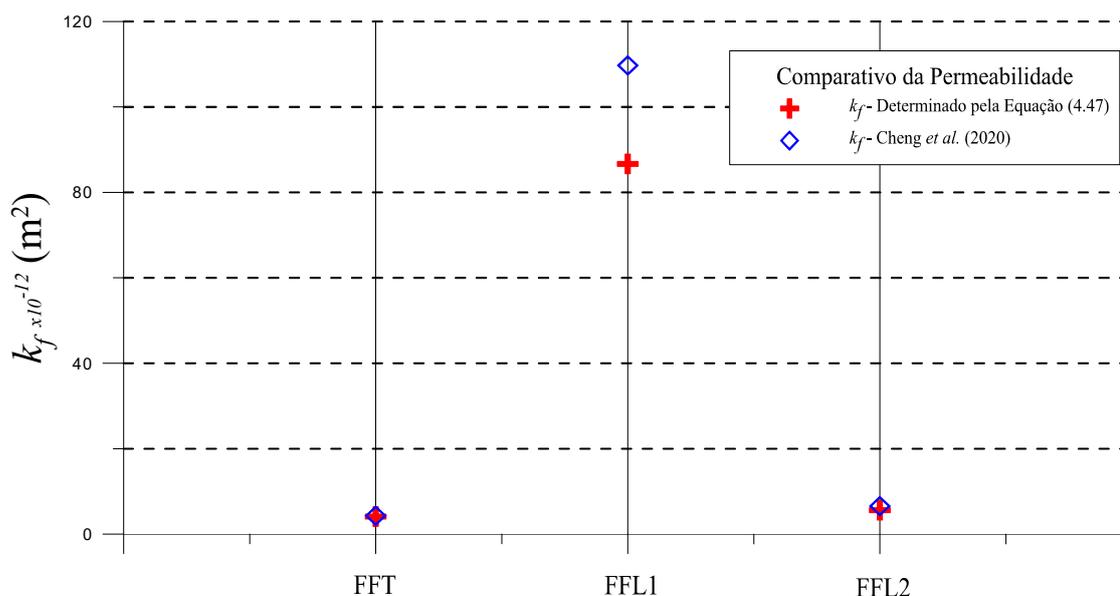
Tabela 4-5 - Resultados para k_1 e k_2 obtidos no presente trabalho.

Amostra	k_1 (m^2)	k_2 (m^2)
FFT	$5,7305 \times 10^{-12}$	$2,6292 \times 10^{-12}$
FFL1	$6,7444 \times 10^{-11}$	$1,0599 \times 10^{-10}$
FFL2	$2,3774 \times 10^{-12}$	$8,9879 \times 10^{-12}$

Fonte: Própria do autor.

Na Figura 4-6 é representado um comparativo dos resultados do presente trabalho, Equação (3.47), para k_f com os resultados obtidos com um aparelho de fluxo contínuo e a Lei cúbica, apresentados por Cheng *et al.* (2020). Observa-se uma discrepância de, aproximadamente, 4,045%, 20,999% e 14,431%, para as amostras FFT, FFL1 e FFL2, respectivamente.

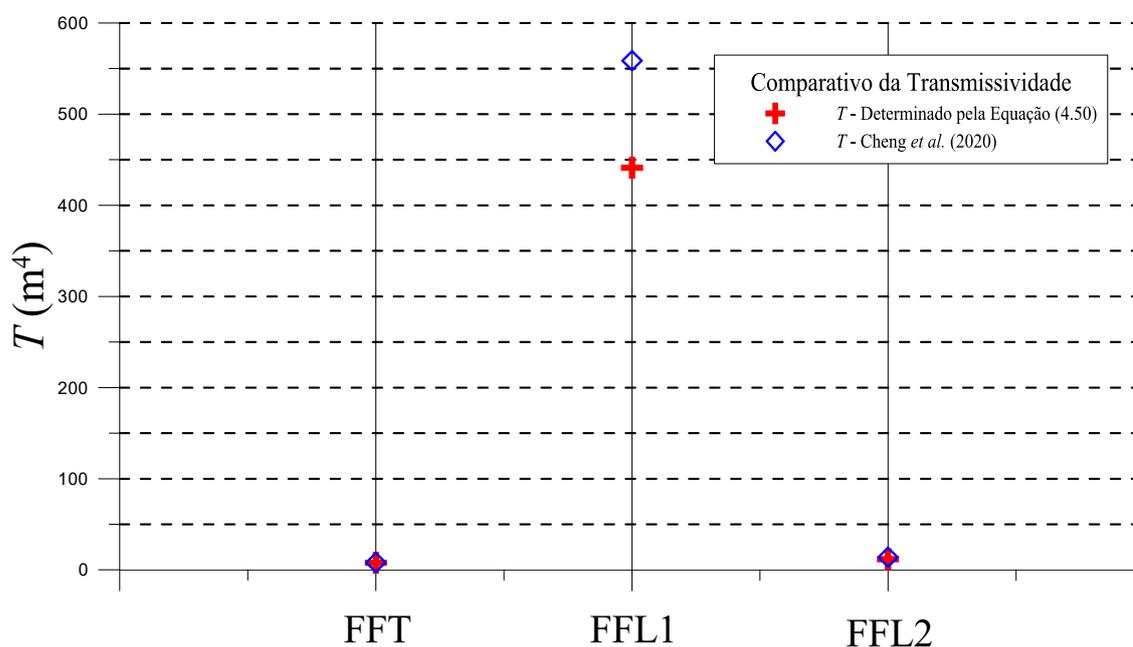
Figura 4-6- Representação da comparação dos resultados de k_f obtidos no presente trabalho para diferentes fraturas com os obtidos por Cheng *et al.* (2020).



Fonte: Própria do autor.

Na Figura 4-7 está representado os resultados do presente trabalho, obtido a partir da Equação (3.50), para a transmissividade, e os resultados obtidos com um aparelho de fluxo contínuo e a Lei cúbica, apresentados por Cheng *et al.* (2020). Estes resultados indicam uma discrepância de, aproximadamente, 4,050%, 20,999% e 14,430%, para as amostras FFT, FFL1 e FFL2, respectivamente.

Figura 4-7- Representação da comparação dos resultados de T obtidos no presente trabalho para diferentes fraturas com os obtidos por Cheng *et al.* (2020).

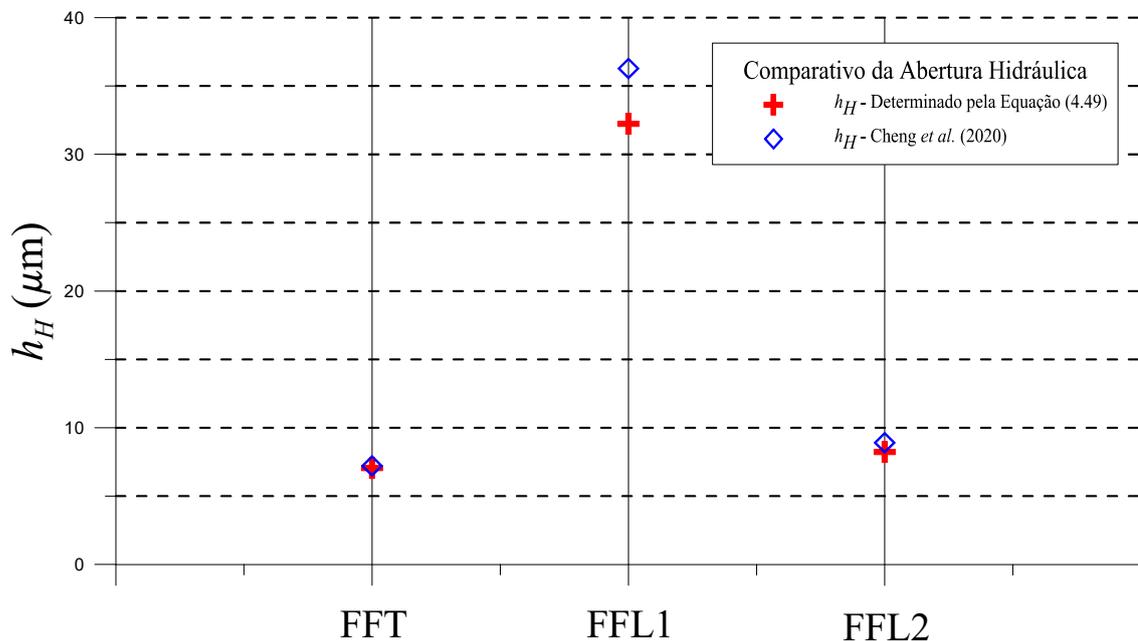


Fonte: Própria do autor.

Observe que a amostra FFL1, que tem a fratura com maior abertura, é a que tem maior permeabilidade e transmissividade. As fraturas das outras amostras que possuem abertura menor, têm menor permeabilidade e transmissividade, sendo em FFT o menor valor observado, o que está em total conformidade com a teoria.

Na Figura 4-8 é representado um comparativo entre as aberturas hidráulicas equivalentes para as fraturas das amostras FFT, FFL1 e FFL2, obtidas neste trabalho, pela Equação (3.49), e as apresentados por Cheng *et al.* (2020). Estes resultados indicam uma discrepância aproximada de 2,043%, 11,118% e 7,496%, para as amostras FFT, FFL1 e FFL2, respectivamente.

Figura 4-8- Representação da comparação dos resultados de h_H obtidos no presente trabalho para diferentes fraturas com os obtidos por Cheng *et al.* (2020).



Fonte: Própria do autor.

Dos quatro modelo/amostras de fraturas estudadas, FPP, FFT, FFL1 e FFL2, é possível destacar que FPP e FFT têm fraturas pouco rugosas, tendo FPP rugosidade igual a zero. As amostras FFL1 e FFL2 têm fraturas muito rugosas, com FFL1 tendo um deslocamento de 0,20mm na sua montagem, o que pode ocasionar mais rugosidade, ou até fechamento, na sua estrutura.

Em modelo ou amostras com fraturas menos rugosas, FPP e FFT, a discrepância observada nos resultados obtidos neste trabalho comparado com os da literatura estão entre 0% e 4% para a permeabilidade e transmissividade, e entre 0% e 2% para a abertura hidráulica equivalente, tendo os resultados observados para FPP concordando totalmente.

Por outro lado, para amostras com fraturas de rugosidade mais elevada, FFL1 e FFL2, a discrepância observada entre os resultados deste trabalho comparado com os da literatura está entre 14% e 21% para a permeabilidade e transmissividade, e entre 7% e 11% para a abertura hidráulica equivalente, sendo os resultados de FFL2 (menos rugosa comparada com FFL1) com discrepância menor.

Os valores apresentados neste trabalho para permeabilidade, transmissividade e abertura hidráulica equivalente para as fraturas das amostras FFT, FFL1 e FFL2, apresentam-se melhores, se comparados com os resultados apresentados por Cheng *et al.* (2020). Essa

melhora, se deve ao fato das Equações (3.47), (3.49) e (3.50) incorporarem as características geométricas das seções transversais da fratura, pelo produto fRe , e não utilizarem a Lei Cúbica, que negligencia, de alguma forma, a rugosidade das mesmas, como feito por Cheng *et al.* (2020). Comparando-se com os resultados de Sarkar *et al.* (2004), isto fica ainda mais evidente, visto que o modelo de Sarkar *et al.* (2004) contém paredes paralelas e lisas, com rugosidade zero.

Esse fato corrobora a ideia de que a metodologia e os modelos propostos agregam, se não totalmente, parcialmente a influência da rugosidade no escoamento em fraturas em meios porosos, mostrando-se ser robusto e eficaz, e podendo ser aplicados com confiabilidade.

4.3 Análise de Parâmetros Fluidodinâmicos em Fraturas Aleatórias

Nesta seção são apresentados resultados obtidos do escoamento laminar completamente desenvolvido em regime permanente de um fluido newtoniano em fraturas aleatórias, para mais detalhes dos resultados consultar as tabelas constantes no Apêndice C. Foram realizadas simulações em 132 tipos de fraturas diferentes, estas se diferenciam por diversos fatores como: a variação das paredes da fratura, a abertura hidráulica equivalente, o perímetro ou a área total. Valores para o fator de atrito, queda de pressão e número de *Reynolds* foram determinados usando as seguintes propriedades: $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0,005 \text{ Pa.s}$, $u_{m_f} = 2,08 \times 10^{-3} \text{ m/s}$. Os resultados são apresentados, além de um comparativo dos perfis de velocidade de uma fratura planificada, de duas fraturas aproximadas por funções circulares e uma fratura real.

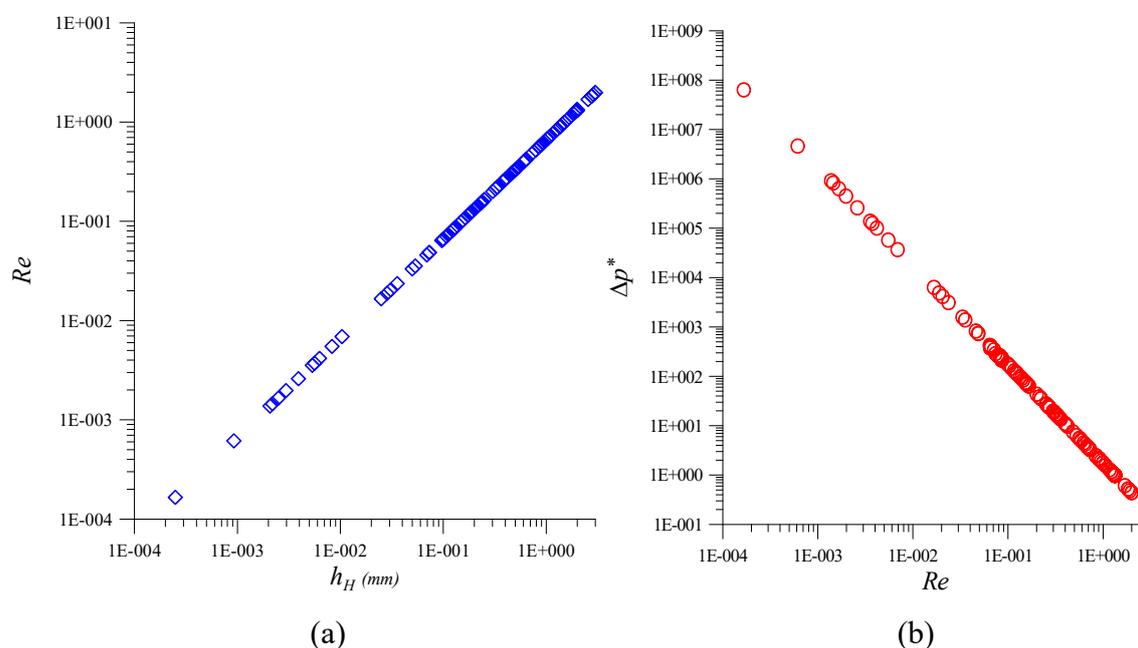
Além disso,

$$\Delta p^* = \frac{\Delta p_i}{\Delta p_{FPP}} \quad \text{e} \quad Re = \frac{2\rho u_{m_f} h_H}{\mu} \quad (4.1)$$

onde Δp_i e Δp_{FPP} são, respectivamente, a queda de pressão para a fratura aleatória i e a queda de pressão para a fratura FPP, ambas para a mesma velocidade u_{m_f} e $Re < 2,11$.

Na Figura 4-9 estão representados em gráficos log-log, o comportamento do número de *Reynolds* em função da abertura hidráulica equivalente (a) e a queda de pressão em função do número de *Reynolds* (b) para as 132 fraturas.

Figura 4-9- Representação da variação do número de *Reynolds* com a abertura hidráulica equivalente (a) e da variação de Δp^* com o número de *Reynolds* (b).



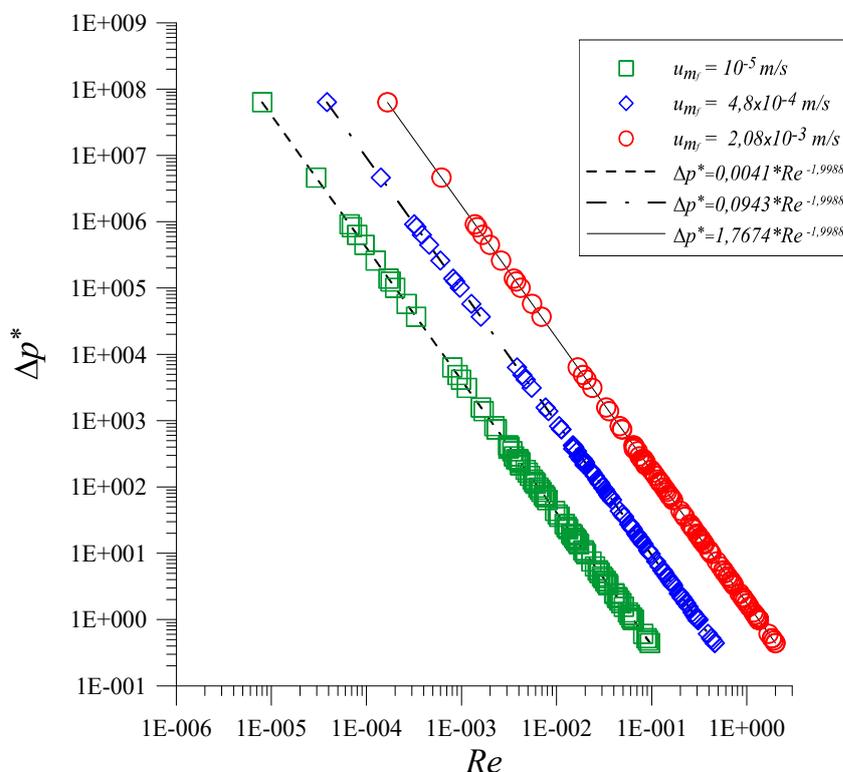
Fonte: Própria do autor.

Analisando os resultados apresentados na Figura 4-9 observa-se, ao se manter as propriedades físico-químicas e a velocidade constantes, que quanto maior a abertura hidráulica equivalente, maior o número de *Reynolds* e, conseqüentemente, quanto maior o número de *Reynolds*, menor a queda de pressão, com isso, observa-se que a relação entre a abertura hidráulica equivalente e a queda de pressão é: quanto maior abertura hidráulica equivalente, menor é a queda de pressão.

Na Figura 4-10, em gráfico log-log, estão representados os resultados da simulação do comportamento da queda de pressão em relação ao número de *Reynolds* ao variar a velocidade média na fratura, com suas respectivas regressões.

Nota-se que a queda de pressão tem o mesmo comportamento ao variar o número de *Reynolds* para os três valores de velocidade média na fratura, sendo que para um mesmo número de *Reynolds* a queda de pressão é maior quando aumentamos a velocidade u_{mf} .

Figura 4-10- Representação da variação de Δp^* com o número de *Reynolds* para diferentes valores de velocidades u_{mf} .



Fonte: Própria do autor.

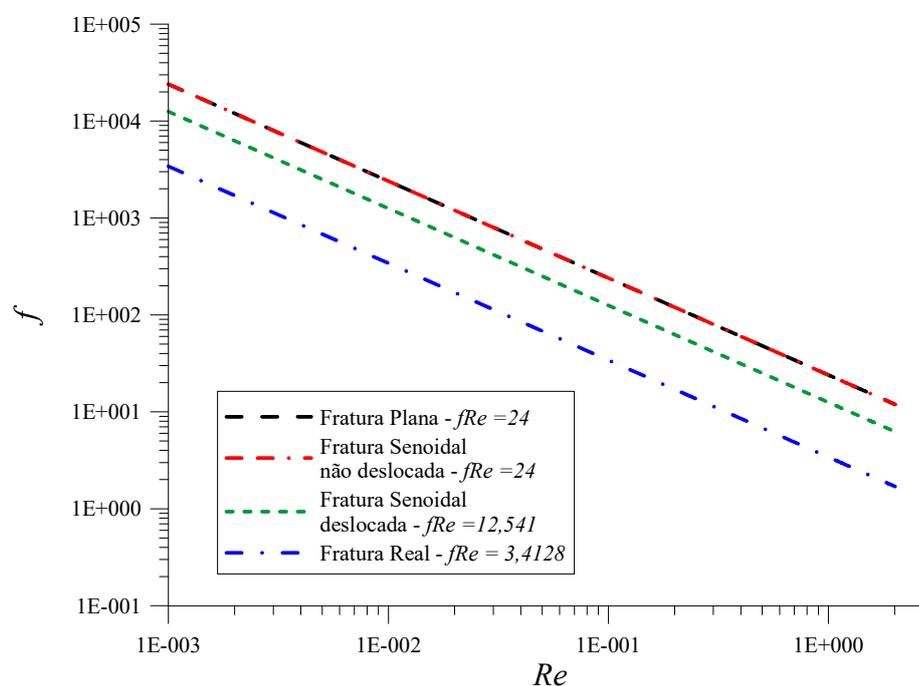
No que segue, destaca-se o comportamento do escoamento em quatro tipos de fraturas específicos, a saber: fratura com superfícies planas e paralelas, como na Figura 3-5, fraturas com superfícies senoidais sem deslocamento e com deslocamento, ver fraturas nas Figuras 3-6 e 3-7, respectivamente, e fratura com superfícies reais, ver Figura 3-9.

Na Figura 4-11 é mostrado, em gráfico log-log, o comportamento do fator de atrito de *Fanning* em função do número de *Reynolds* para os quatro tipos de fraturas estudadas, considerando todas as fraturas com mesmo diâmetro, largura e mesma área de seção transversal.

Nota-se que para os quatro tipos de fraturas estudadas, o comportamento do fator de atrito está em conformidade com a teoria para um escoamento em regime laminar.

Observa-se ainda que a curva do fator de atrito para a fratura plana e para a fratura com superfícies senoidais sem deslocamento, se sobrepõe, mesmo a fratura senoidal possuindo ondulações em sua superfície. Isto se deve ao fato que, em ambas, a distância entre as superfícies não tem variação significativas ao longo do eixo X .

Figura 4-11- Representação do comportamento do fator de atrito de *Fanning* como função do número de *Reynolds* para diferentes tipos de fraturas.



Fonte: Própria do autor.

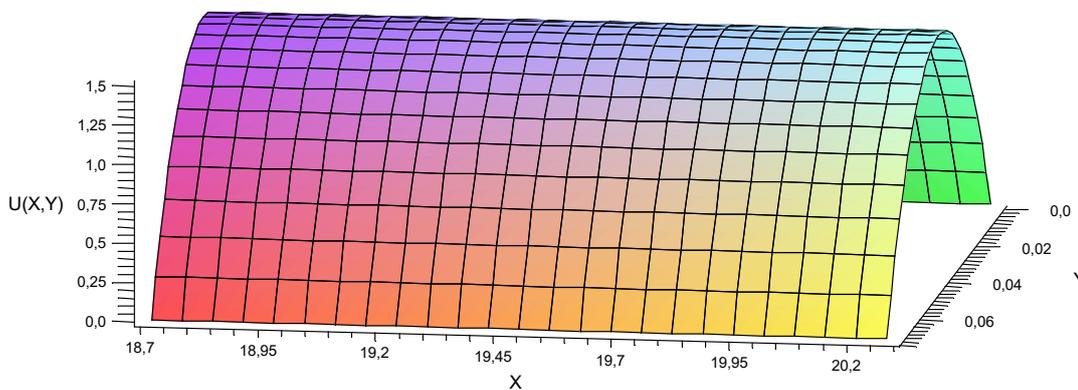
Por outro lado, as curvas do fator de atrito para a fratura com superfícies senoidais com deslocamento e para a fratura real, que possuem variação na distância entre as superfícies ao longo do eixo x , apesar de mesma inclinação, estão abaixo das curvas das fraturas anteriores, o que confirma o fato que o fator de atrito f é influenciado pela característica geométrica da seção transversal da fratura.

Nas Figuras 4-12, 4-15, 4-18, 4-21 e 4-23 estão representadas as curvas de superfície da velocidade adimensional e nas Figuras 4-13, 4-16, 4-19, 4-22 e 4-24 os perfis de velocidade adimensional para uma fratura com superfícies paralelas e planas, fraturas com superfícies senoidais, sem deslocamento (ver Figura 3-6) e com deslocamento (ver Figura 3-7), e uma fratura real, considerando todas as fraturas com mesmo diâmetro, largura e mesma área de seção transversal. Em todos os casos, foi tomado um intervalo aproximado de X que contém o menor e o maior valor máximo local da velocidade.

As Figuras 4-12 e 4-13 mostram, respectivamente, a curva de superfície que representa a velocidade adimensional e os perfis de velocidade para o modelo de fratura com superfícies paralelas e planas. A velocidade adimensional máxima observada neste caso foi de 1,5, permanecendo ao longo do eixo X . Tal modelo não apresenta irregularidades em suas paredes,

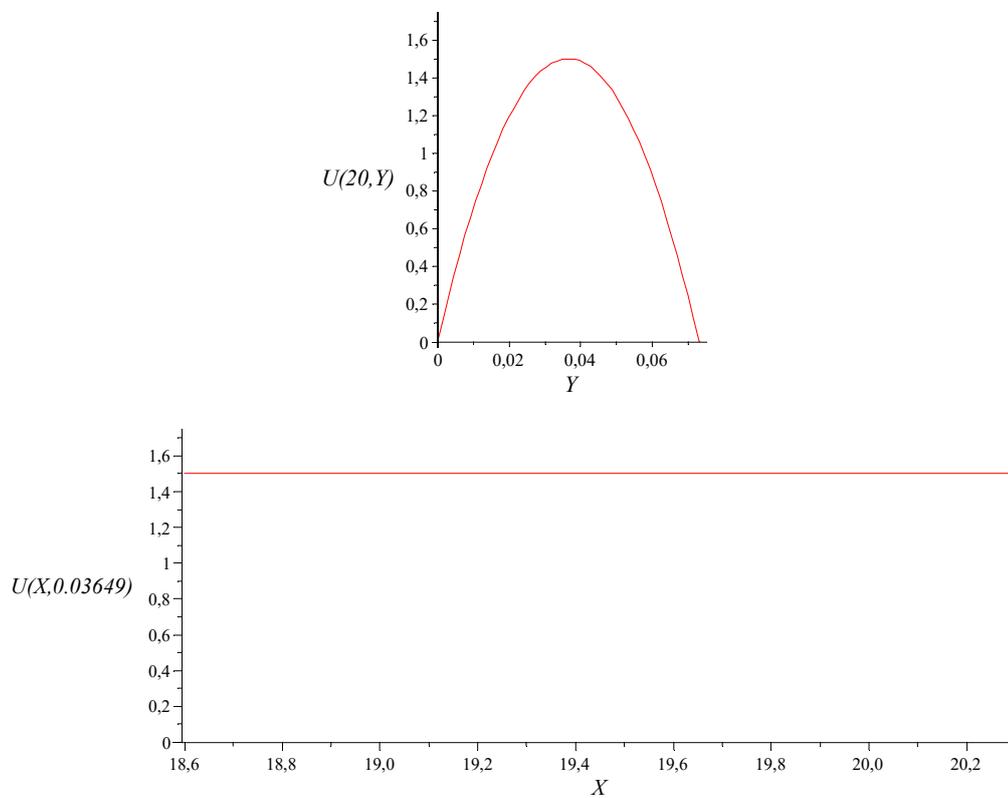
assim, é possível observar a curva de superfície e perfis de velocidades sem variações ao longo do eixo X .

Figura 4-12- Curva de superfície da velocidade para fratura com paredes paralelas e planas.



Fonte: Própria do autor.

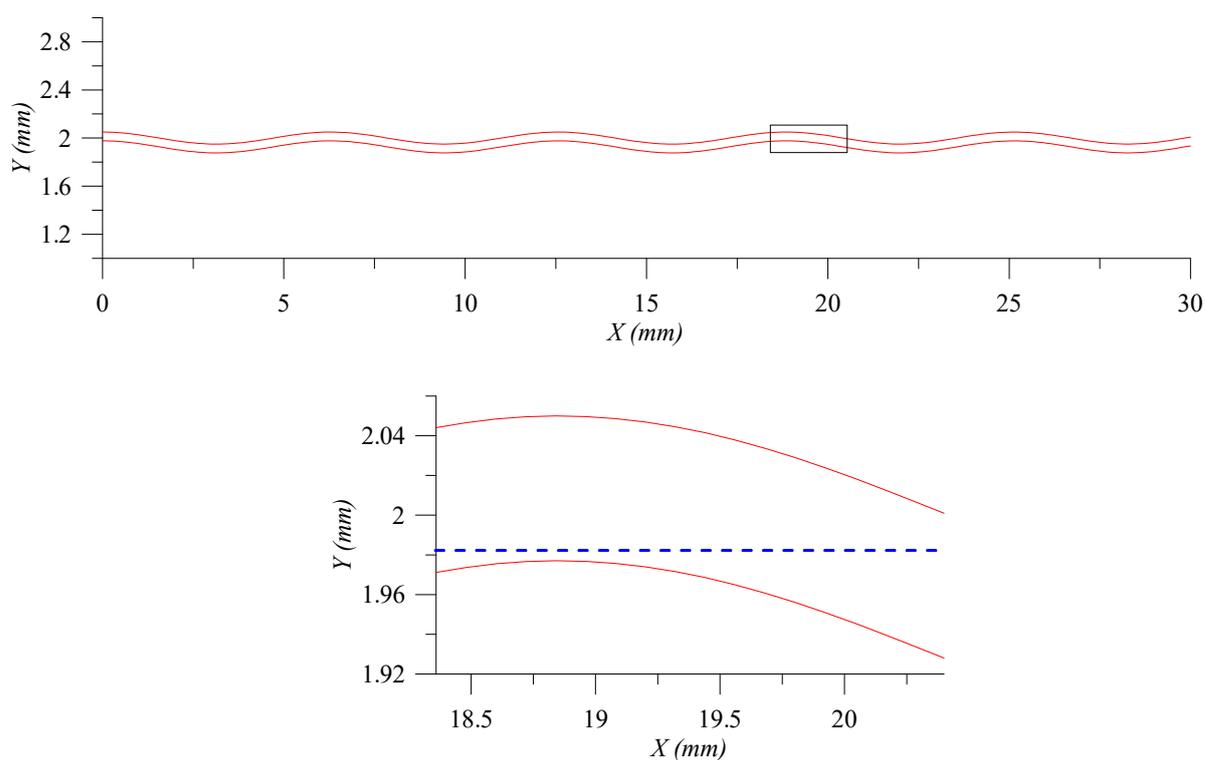
Figura 4-13- Perfis de velocidade da fratura com paredes paralelas e planas.



Fonte: Própria do autor.

Na Figura 4-14 é apresentado um recorte de uma partição do modelo de fratura com superfícies senoidais sem deslocamento, esta foi escolhida por apresentar a menor e a maior velocidade máxima local observada no escoamento através da fratura. A linha tracejada em azul representa o corte para obtenção do perfil de velocidade em função de X .

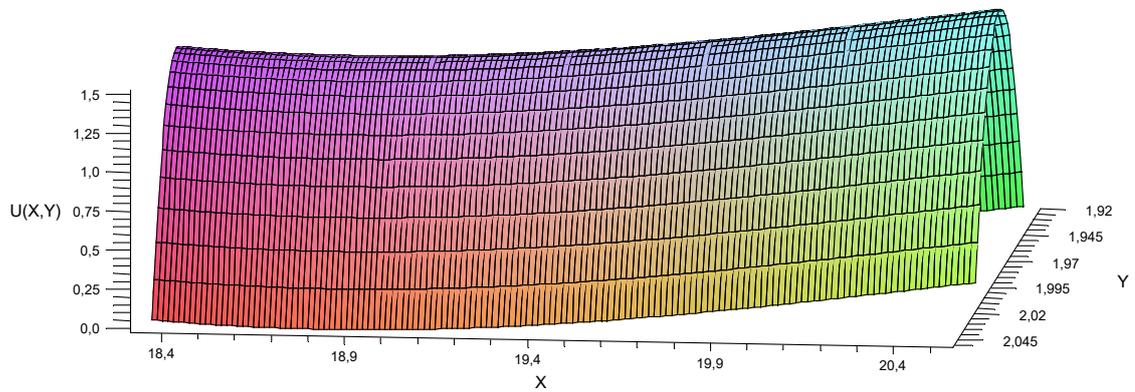
Figura 4-14- Partição que contém a menor e a maior velocidade máxima local para a fratura com paredes senoidais sem deslocamento.



Fonte: Própria do autor.

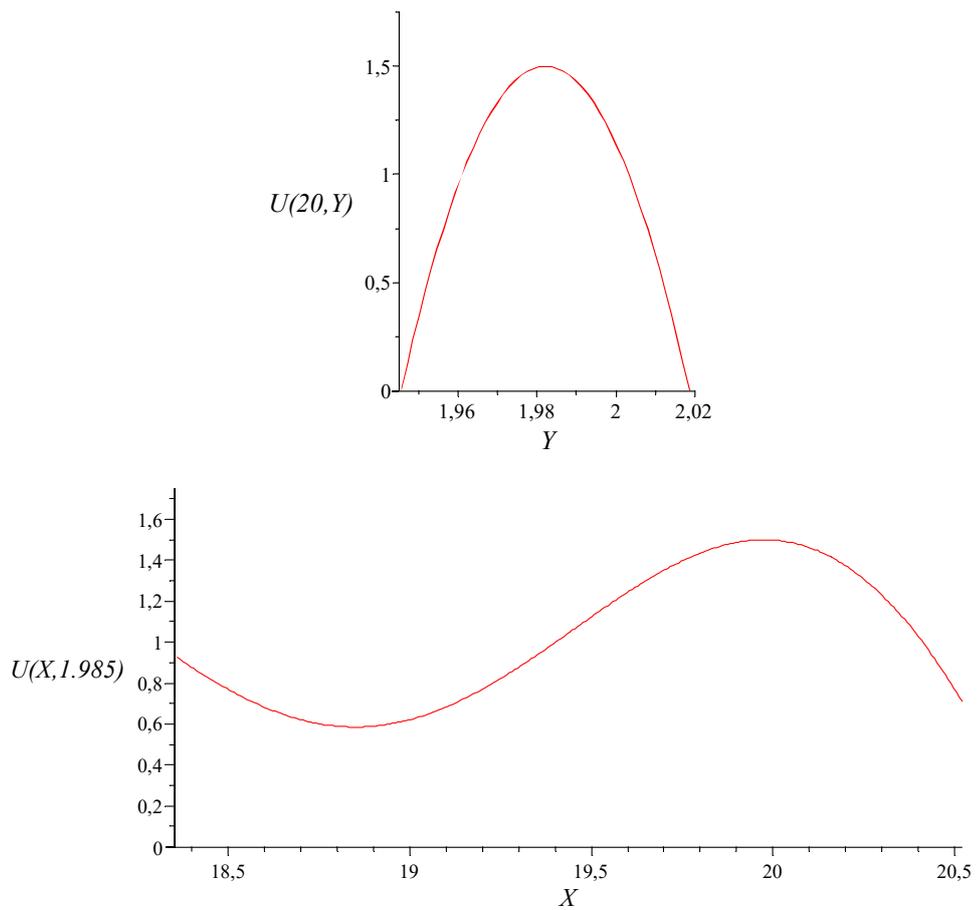
As Figuras 4-15 e 4-16 mostram, respectivamente, a curva de superfície que representa a velocidade adimensional e os perfis de velocidade para o modelo de fratura com superfícies senoidais sem deslocamento. Assim como no modelo de placas paralelas e planas, a velocidade adimensional máxima local observada, para $U(X_0, Y)$, neste caso foi de 1,5. Porém, devido a superfície com irregularidades senoidais, observa-se variação no perfil de velocidade ao longo do eixo X , como visto na Figura 4-16.

Figura 4-15- Curva de superfície da velocidade para fratura com paredes senoidais sem deslocamento.



Fonte: Própria do autor.

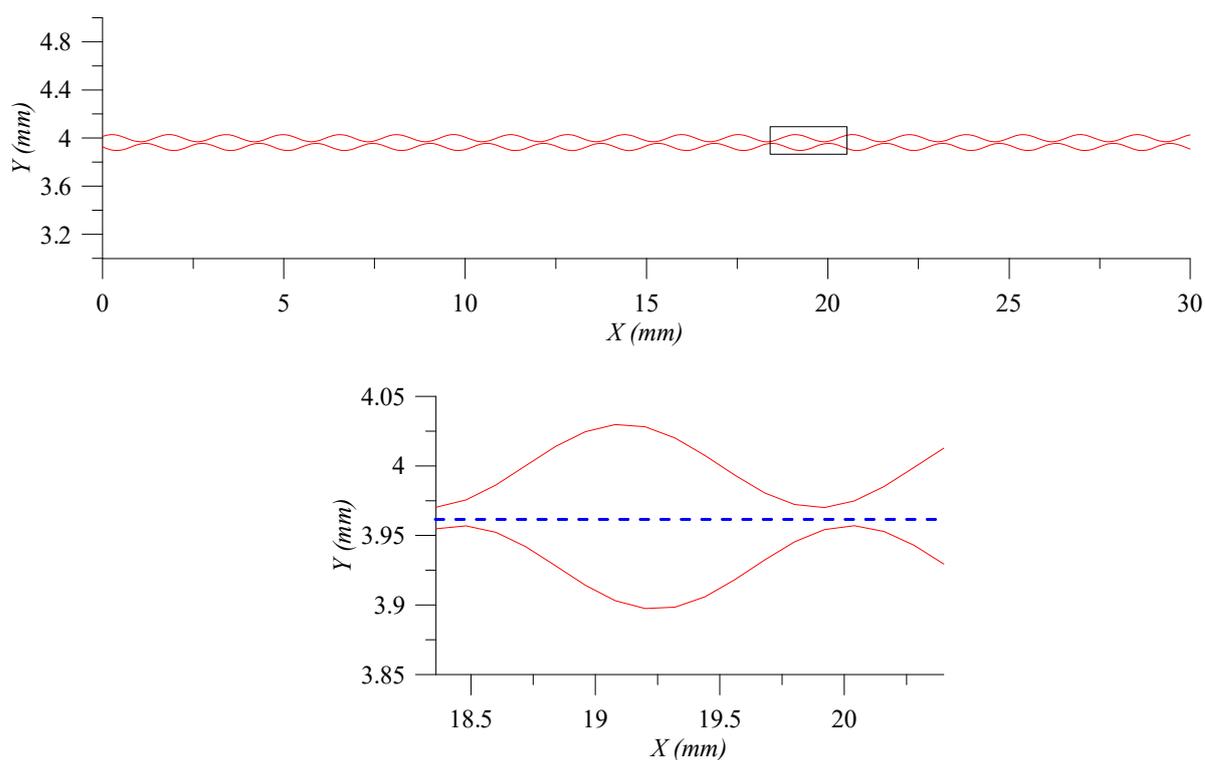
Figura 4-16- Perfis de velocidade da fratura com paredes senoidais sem deslocamento.



Fonte: Própria do autor.

Na Figura 4-17 é apresentado um recorte de uma partição do modelo de fratura com superfícies senoidais deslocadas, também escolhida devido a apresentar a menor e a maior velocidade máxima local observada no escoamento através da fratura. A linha tracejada em azul representa o corte para obtenção do perfil de velocidade em função de X .

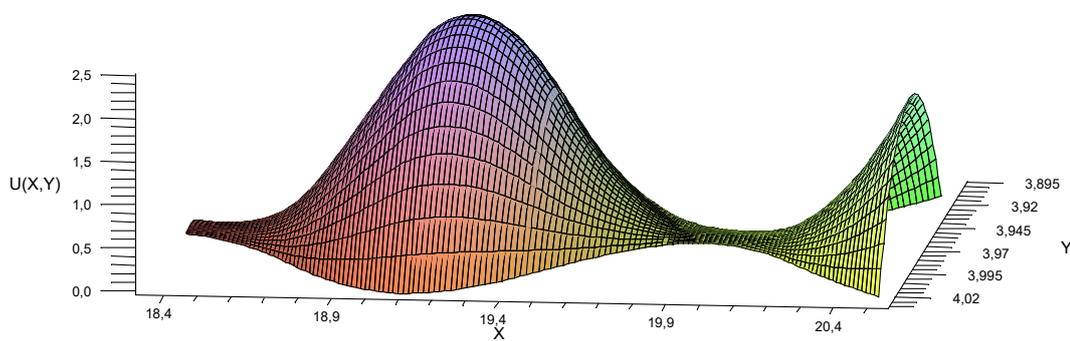
Figura 4-17- Partição que contém a menor e a maior velocidade máxima local para a fratura com paredes senoidais com deslocamento.



Fonte: Própria do autor.

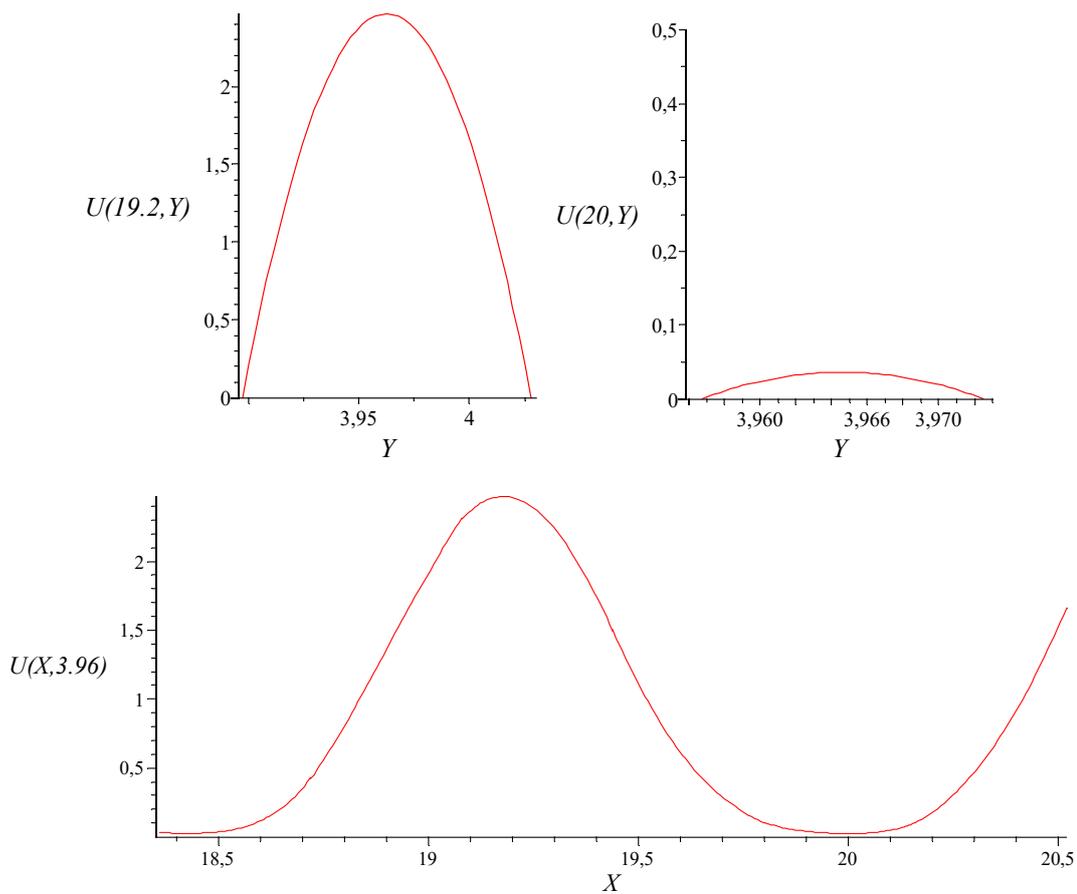
Observando as Figuras 4-18 e 4-19 que apresentam, respectivamente, a curva de superfície da velocidade adimensional e os perfis de velocidade para o modelo de fratura com superfícies senoidais deslocadas, nota-se que a velocidade adimensional máxima local observada, para $U(X_0, Y)$, variou entre 0,036 e 2,5, porém mantendo certa periodicidade ao longo do eixo X . Neste modelo, as superfícies da fratura apresentam irregularidades senoidais, assim, é possível observar a curva de superfície e perfis de velocidades com variações ao longo do eixo X .

Figura 4-18- Curva de superfície da velocidade para fratura com paredes senoidais com deslocamento.



Fonte: Própria do autor.

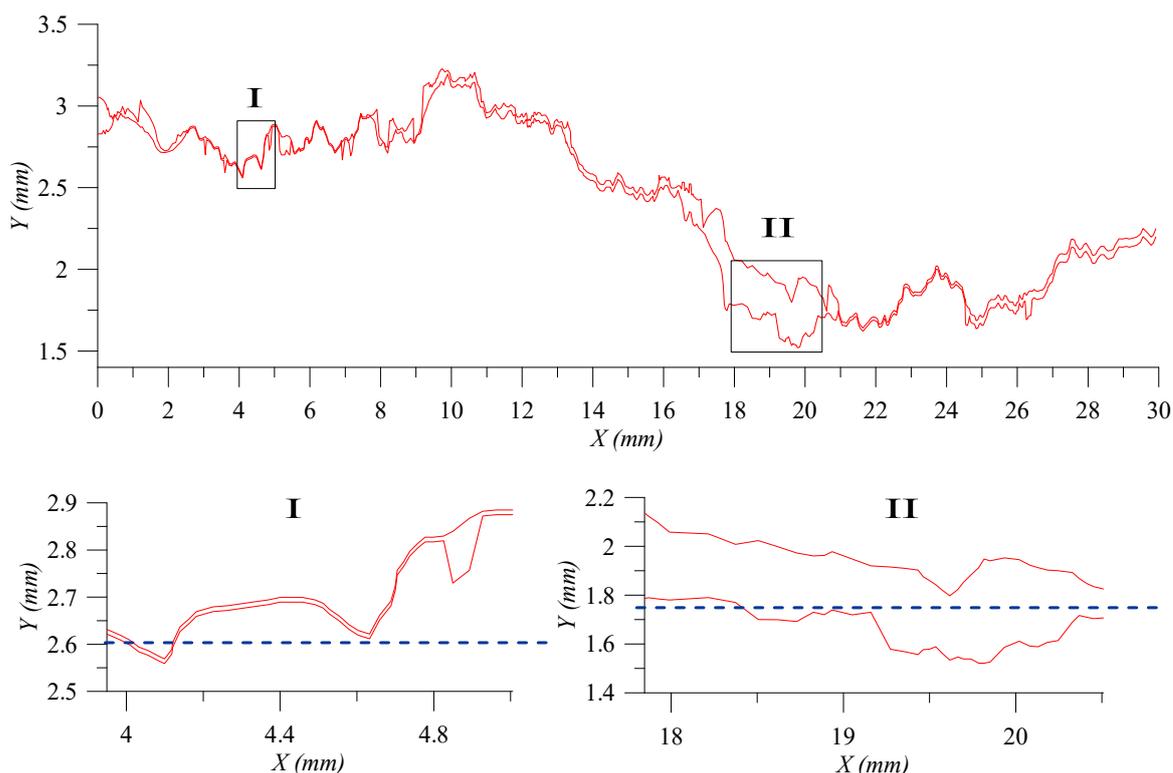
Figura 4-19- Perfis de velocidade da fratura com paredes senoidais com deslocamento.



Fonte: Própria do autor.

Na Figura 4-20 são apresentados recortes de duas partições do modelo de fratura real, as partições I e II, estas foram escolhidas por apresentarem, respectivamente, a menor e a maior velocidade máxima local observadas no escoamento através da fratura. As linhas tracejadas em azul representam os cortes para obtenção dos perfis de velocidade em relação à X .

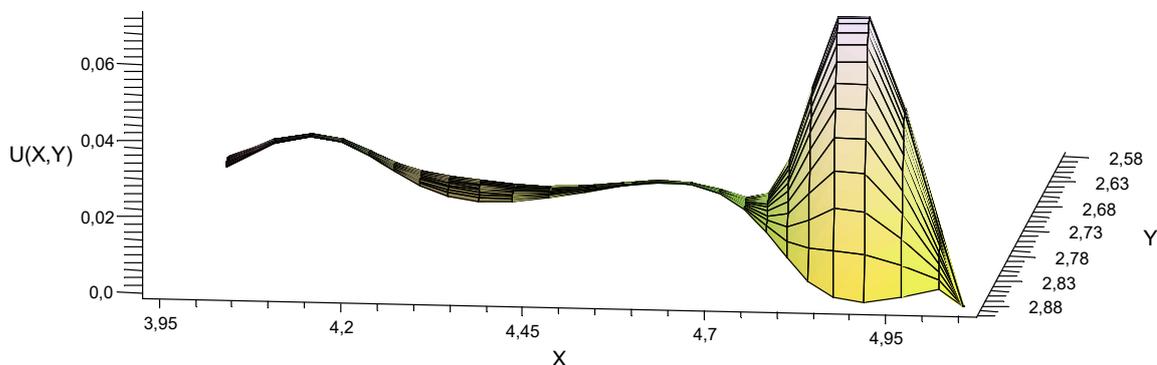
Figura 4-20- Partições que contém a menor (I) e a maior (II) velocidade máxima local para a fratura real.



Fonte: Própria do autor.

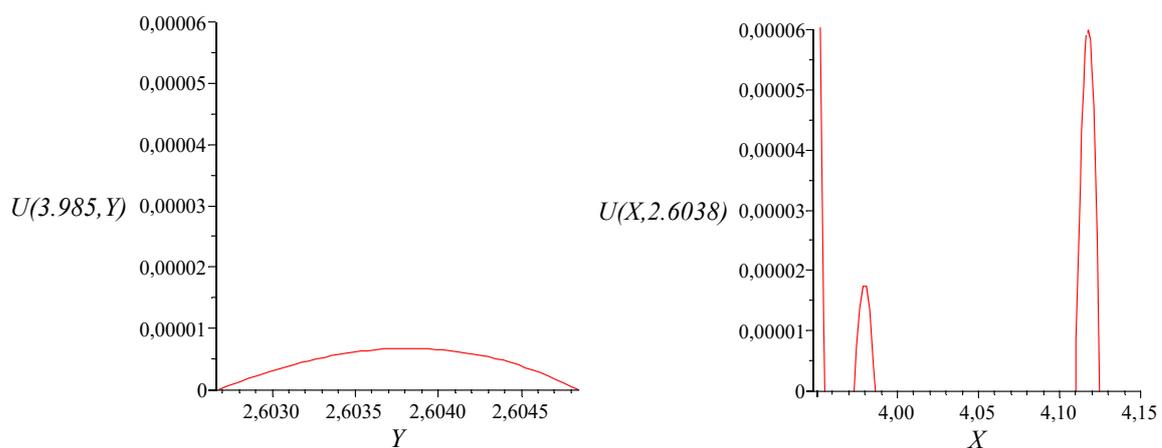
Nas Figuras 4-21 e 4-22, observa-se, respectivamente, a curva de superfície da velocidade adimensional e os perfis de velocidade para a partição que contém a menor velocidade máxima local observada no escoamento, isto é, para a partição I.

Figura 4-21- Curva de superfície da velocidade para a partição I da fratura real.



Fonte: Própria do autor.

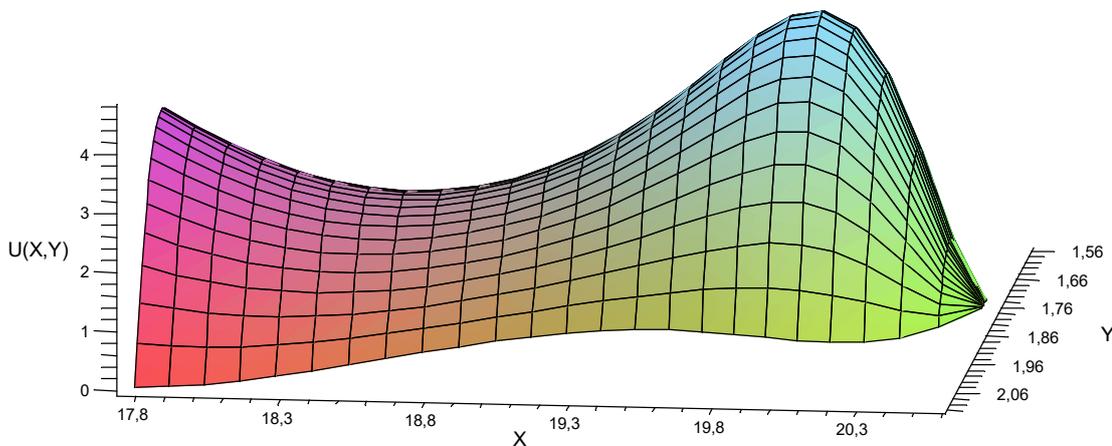
Figura 4-22- Perfis de velocidade para a partição I da fratura real.



Fonte: Própria do autor.

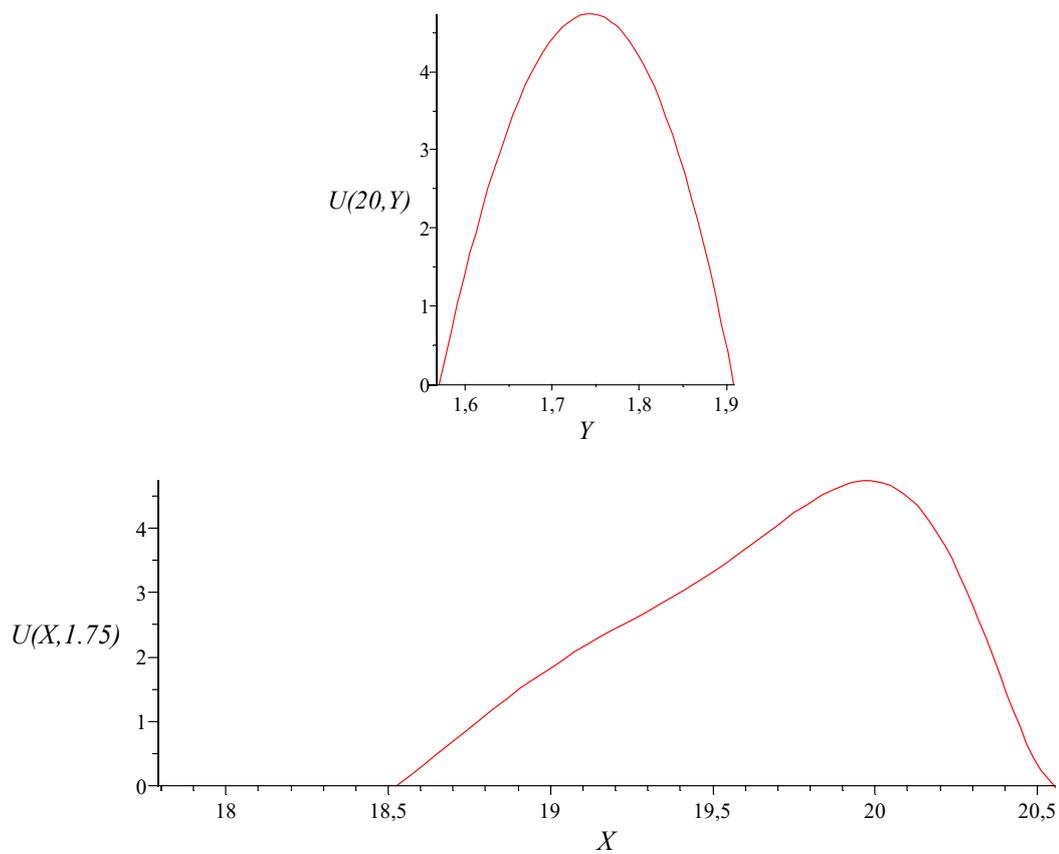
Nas Figuras 4-23 e 4-24, observa-se, respectivamente, a curva de superfície da velocidade adimensional e os perfis de velocidade para a partição que contém a maior velocidade máxima local observada no escoamento, ou seja, para a partição II.

Figura 4-23- Curva de superfície da velocidade para a partição II da fratura real.



Fonte: Própria do autor.

Figura 4-24- Perfis de velocidade para a partição II da fratura real.



Fonte: Própria do autor.

Por ser um modelo real as superfícies da fratura apresentam bastante irregularidades, com isso, é possível observar as curvas de superfície e os perfis de velocidades com variações significativas ao longo dos eixos X e Y , o que resultou em velocidades adimensionais máximas locais variando, aproximadamente, entre $6,73 \times 10^{-6}$ e 4,74.

Com a análise dos resultados obtidos neste estudo para os quatro modelos de fraturas, pode-se deduzir que ao aproximar uma fratura real por uma fratura planificada há divergências no comportamento do fator de atrito e da velocidade na fratura, visto que na fratura planificada a velocidade é uniforme, por outro lado, na fratura real há locais em que a velocidade é muito alta em comparação a outros, isto é devido a resistência ao fluxo ser menor em aberturas maiores do que em aberturas menores.

Capítulo 5

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

5.1 Conclusões

Neste trabalho, foi realizado um estudo sobre o comportamento do escoamento laminar completamente desenvolvido através de fraturas em meio poroso, no qual foi desenvolvido um modelo de que relaciona o produto fRe com a permeabilidade, abertura hidráulica equivalente e a transmissividade da fratura, adaptando e utilizando de modo inovador o método integral baseado em *Galerkin* em um domínio particionado.

A seguir, tem-se as principais conclusões deste trabalho:

- A metodologia de abordagem modificada para o método GBI, baseado no particionamento do domínio discretizado, obteve ótima concordância com resultados contidos na literatura, o que valida e garante a sua confiabilidade e a robustez.
- Foram desenvolvidos modelos matemáticos que relacionam o número fRe com a permeabilidade, a abertura hidráulica equivalente e a transmissividade de uma fratura. Isto representa importante fato, visto que agrega a essas propriedades o efeito do fator de atrito.
- Resultados para a permeabilidade, a abertura hidráulica equivalente e a transmissividade foram obtidos para fraturas, supondo que a permeabilidade da amostra fraturada é muito grande se comparada com a permeabilidade da matriz porosa.
- Os resultados das simulações realizadas indicam que a abertura hidráulica equivalente apresenta uma dependência com o número adimensional de *Reynolds*, ou seja, a abertura hidráulica aumenta com o aumento do número de *Reynolds*.

- A relação entre a abertura hidráulica equivalente e a queda de pressão indicam que quanto maior abertura hidráulica equivalente, menor é a queda de pressão.
- Foram propostas correlações empíricas a partir da aplicação de regressões não lineares, utilizando os resultados das simulações, que caracterizaram o comportamento da queda de pressão em função no número de *Reynolds* para fraturas aleatórias.
- O fator de atrito mostrou-se ser fortemente influenciado pela variação na abertura da fratura ao longo da fratura. Ou seja, quanto mais aleatória e maior for a variação na abertura da fratura, menor será o fator de atrito.
- Em fraturas com pouco ou sem variação na abertura ao longo do seu diâmetro, mesmo que estas tenham superfícies com variações, a velocidade máxima local se mantém inalterada em fraturas com mesmo diâmetro, largura e mesma área de seção transversal.
- Em fraturas com aleatoriedade maior na abertura ao longo do seu diâmetro, percebe-se que a velocidade máxima local tem significativas variações e que a velocidade máxima global é muito maior se comparada com da fratura plana com mesmo diâmetro, largura e mesma área de seção transversal.
- Os resultados mostraram que o comportamento da velocidade é influenciado diretamente pelo tipo de fratura, mesmo que estas tenham mesma área de seção transversal ou mesma abertura hidráulica.
- As simulações realizadas mostraram que, agregando ao modelo as características geométricas da seção transversal da fratura, aproximar uma fratura real por uma fratura planificada causa divergências no comportamento do fator de atrito e da velocidade na fratura.

5.2 Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros, pode-se citar:

- Avaliar a possibilidade para ampliar os resultados presentes neste trabalho para o problema de escoamento de gases.

-
- Realizar um estudo para adaptação do método integral baseado em *Galerkin*, possivelmente em conjunto com outros métodos, para solucionar as equações que governam o problema de separação com membranas.
 - Partindo da adaptação do método GBI apresentado neste trabalho e dos resultados contidos nele, realizar estudo para avaliar o escoamento de fluidos em fraturas ósseas.
 - Aplicar a adaptação do método GBI apresentado neste trabalho, para o problema de secagem (leito empacotado, cerâmicas, etc.).

REFERÊNCIAS

AHMADI, M.M.; MOHAMMADI, S. and HAYATI A.N. **Analytical derivation of tortuosity and permeability of monosized spheres: A volume averaging approach.** Physical Review E. v.83, 026312. 2011.

ASSAN, A. E. **Método dos elementos finitos: Primeiros Passos.** 2^a edição. Campinas: UNICAMP, 2003. 304 p.

BASHA, H.; EL-ASMAR, W. **The fracture flow equation and its perturbation solution.** Water Resour. Res. 39 (12). 2003.

BEAR, J. **Dynamics of Fluids in Porous Media.** Ed. Elsevier, New York, 1972.

BEAR, J. **Modeling Flow and Contaminant Transport in Fractured Rocks,** Editor(s): Jacob Bear, Chin-Fu Tsang, Ghislain de Marsily, Flow and Cont. Trans. in Fract. Rock, Academic Press, Pages 1-37, 1993.

BEAR, J.; TSANG, C.F.; and DE MARSILY, G. **Flow and contaminant transport in fractured rock.** Academic Press; 2012.

BROWN, D.M. **Stochastic analysis of flow and solute transport in a variable-aperture rock fracture.** Massachusetts Institute of Technology Ph.D. thesis. 1984.

BROWN, S.R., STOCKMAN, H.W., REEVES, S.J. **Applicability of the Reynolds equation for modeling fluid flow between rough surfaces.** Geophys. Res. Lett. 22 (18), 2537–2540, 1995.

BROWN, S.R. **Fluid flow through rock joints: the effect of surface roughness.** J Geophys Res. Solid Earth. 92(B2):1337–47, 1987.

BROWN, S. and SMITH, M. **A transient-flow syringe air permeameter**, *Geophysics*, 78, D307, 2013.

BRUSH, D.J., THOMSON, N.R. **Fluid flow in synthetic rough-walled fractures: Navier-Stokes, Stokes, and Local Cubic Law simulations**. *Water Resources Res.* 39 (4), 2003.

CARMAN, P.C. **Fluid Flow Through Granular Beds**. *Transactions of the Institution of Chemical Engineers*, v.15, p.150-166, 1937.

CARMAN, P. C., **Flow of gases through porous media**. London: Butterworths Scientific Publications. 1956.

CHEN, X. and PAPATHANASIOU, T.D. **On the variability of the Kozeny constant for saturated flow across unidirectional disordered fiber arrays**. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. v.37, 6, p. 836-846. 2006.

CHENG, C.; HALE, S.; MILSCH, H.; and BLUM, P. **Measuring hydraulic fracture apertures: a comparison of methods**. *Solid Earth*, 11, 2411–2423, 2020.

COLE, K.; BECK, J.; HAJI-SHEIKH, A. and LITKOUHI, B. **Heat conduction using Greens functions**. Taylor & Francis. 2010.

COSTA, A., **Permeability–porosity relationship: a reexamination of the Kozeny–Carman equation based on a fractal pore-space geometry assumption**, *Geophys. Res. Lett.*, vol. 33, 2006.

COURANT, R.; HILBERT, D. **Methods of mathematical physics**, vol.1, New York: Wiley - Interscience, 174 p. 1953.

ÇENGEL, Y.A.; GHAJAR, A. J. **Transferência de Calor e Massa: Uma Abordagem Prática**, 4a. Edição. Porto Alegre, RS: Editora McGrawHill, 2012.

CHENG, C.; HALE, S.; MILSCH, H.; and BLUM, P. **Measuring hydraulic fracture apertures: a comparison of methods**. *Solid Earth*, 11, 2411–2423, 2020.

DARCY, H. **Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon**. V. Dalmont, Paris. 1856.

DAUTRAY, R.; LIONS, J. L. **Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology**, Vol. 1, New York: Springer-Verlag, 715 p. 1998.

DE ANNA, P.; QUAIFE, B.; BIROS, G.; JUANES, R. **Prediction of the low-velocity distribution from the pore structure in simple porous media**. *Physical Review Fluids*, v.2, no.12, p. 1-16, 2017.

DUNCAN, W. J. **Galerkin's Method in Mechanics and Differential Equations**. No. ARC-R/M-1798. AERONAUTICAL RESEARCH COUNCIL LONDON (ENGLAND), 1937.

FRANCO, C.M.R. **Modelagem, Simulação E Experimentação Da Secagem Contínua E Intermitente De Sólidos Elipsoidais. Estudo De Caso: Secagem De Grãos De Arroz Em Casca**. Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Processos, UFCG, Campina Grande-PB, 2016.

GALERKIN B. G. **Barras e placas: As séries em algumas questões de equilíbrio elástico de barras e placas**. *Notícias dos Engenheiros*, v.1. 897-908. 1915. (em Russo, Sterzhni i plástinki. Riady v nekotorykh voprosah uprugogo ravnovesia sterzhnei iplastinok, *Vestnik ' Ingenerov*, v.1, 897-908, 1915).

GANJI, D.D.; KACHAPI, S.H.H. **Chapter 7 – Nanofluid Flow in Porous Medium. In: Application of Nonlinear Systems in Nanomechanics and Nanofluids**. Amsterdam: Elsevier, p. 271-316. 2015.

HAJI-SHEIKH, A.; LAKSHMINARAYANAN, R. **Integral Solution of Diffusion Equation: Part 2 – Boundary Conditions of Second and Third Kinds**. *Journal of Heat Transfer*, Vol. 109, n. 3, p. 557-562, 1987.

HAJI-SHEIKH, A.; MASHENA, M. **Integral Solution of Diffusion Equation: Part 1 – General Solution**. *Journal of Heat Transfer*, Vol. 109, n. 3, p. 551-556, 1987.

HE, X.; SINAN, M.; KWAK, H. and HOTEIT, H., **A corrected cubic law for single-phase laminar flow through rough-walled fractures**. *Advances in Water Resources*, 154, 2021.

HELLAND, J.O.; RYAZANOV, A.V. and van DIJKE, M. **Characterization of Pore Shapes for Pore Network Models**. 11th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, Bergen-Norway. 2008.

HOFMANN, H.; BLOCHER, G.; MILSCH, H.; BABADAGLI, T. and ZIMMERMANN, G. **Transmissivity of aligned and displaced tensile fractures in granitic rocks during cyclic loading**, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 87, 69-84, 2016.

HU, Y.; WANG, Q.; ZHAO, J.; XIE, S. and JIANG, H. **A Novel Porous Media Permeability Model Based on Fractal Theory and Ideal Particle Pore-Space Geometry**. *Assumption. Energies*, 13, 510. 2020.

JIAN-LONG, K.; XUE-MING, W.; YOU-SHENG, X. and YONG-SHENG, D. **Tortuosity for streamlines in porous media**. *Chin. Phys. B.* v.21, No.4, 044701. 2012.

KOPONEN, A.; KATAJA, M. and TIMONEN, J. **Tortuous flow in porous media**. *Physical Review E* v.54, No.1. 1996.

KOZENY, J. **Über Kapillare Leitung des Wassers im Boden (Aufstieg Versickerung und Anwendung auf die Bemässerung)**, *Sitzungsber Akad., Wiss, Wein, Math. Naturwiss.* K1 136 (IIa) 271–306. 1927.

LAGO, M. and ARAUJO, M. **Threshold Pressure in Capillaries with Polygonal Cross Section**. *Journal of Colloid and Interface Science* 243, p. 219–226. 2001.

LALA, A.M.S., **Modifications to the Kozeny–Carman model to enhance petrophysical relationships**. *Exploration Geophysics*, 49, 553-558. 2018.

LI, B. and JIANG, Y. **Quantitative estimation of fluid flow mechanism in rock fracture taking into account the influences of JRC and Reynolds number**. *J MMIJ* 129:479–484 (in Japanese). 2013.

LI, X.; JIANG, Z.; and MIN, C.; **Quantitative Study of the Geometrical and Hydraulic Characteristics of a Single Rock Fracture**. *Energies*, 12, 2796, 2019.

LOMIZE, G.M. **Water flow through jointed rock**. Gosenergoizdat, Moscow. 127, 1951.

LOUIS, C. **Groundwater flow in rock masses and its influence on stability**. *Rock Mech Res Report*. 10, 1969.

LOUIS, C. **A study of groundwater flow in jointed rock and its influence on stability of rock mass**. *Imperial College Rock Mechanics Report*. 10. 49, 1969.

MARTINS, A.A.; LARANJEIRA, P.E.; BRAGA, C.H.; MATA, T.M. **Modeling of transport phenomena in porous media using network models**. In: TIAN, K.S.; SHU, H.-J. *Progress in Porous Media Research*. Nova Science, p. 165-261. 2009.

MAVKO, G. and NUR, A. **The effect of a percolation threshold in the Kozeny-Carman relation**. *Geophysics*, v.62, no.5, p. 1480-1482. 1997.

MILSCH, H.; HOFMANN, H. and BLOCHER, G. **An experimental and numerical evaluation of continuous fracture permeability measurements during effective pressure cycles**, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 89, 109–115, 2016.

NEITHALATH, N., WEISS, J. and OLEK, J. **Predicting the Permeability of Pervious Concrete (Enhanced Porosity Concrete) from Non-Destructive Electrical Measurements**. 2008. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/228788494>>. Acesso em: 07 abril 2020.

NEUZIL, C.E. and TRACY, J.V. **Flow through fractures**. *Water Resour Res*. 17(1):191–9, 1981.

OZGUMUS, T.; MOBEDI, M. and OZKOL, U. **Determination of kozeny constant based on porosity and pore to throat size ratio in porous medium with rectangular rods**. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, v.8, No.2, p. 308–318. 2014.

PATIR, N. and CHENG, H.S. **An average flow model for determining effects of threedimensional roughness on partial hydrodynamic lubrication.** 1978.

PATZEK, T.W. and SILIN, D.B. **Shape Factor and Hydraulic Conductance in Noncircular Capillaries.** Journal of Colloid and Interface Science 236, p. 295–304. 2001.

PETROVSKY, I. G. **Lectures on partial differential equations,** New York: Interscience Publishers, 1954.

PURCELL, W.R. **Capillary Pressures – Their Measurement using Mercury and the Calculation of Permeability Therefrom,** Paper SPE-49049-G, Journal of Petroleum Technology, 1(2), 39-48. AIME Transactions, 186, 39-48. 1949.

RASOULI, V., HOSSEINIAN, A. **Correlations Developed for Estimation of Hydraulic Parameters of Rough Fractures Through the Simulation of JRC Flow Channels.** Rock Mech Rock Eng 44, 447–461, 2011.

REZENDE, V. **O método de Galerkin.** Dissertação apresentada ao departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, 2005.

ROSA, A. J., CARVALHO, R. S., XAVIER, J. A. D. **Engenharia de Reservatórios de Petróleo.** Interciência: Petrobras, Rio de Janeiro, 2006.

RUTH, D., LINDSAY, C. and ALLEN, M. **Combining Electrical Measurements and Mercury Porosimetry to Predict Permeability.** Petrophysics, v.54, no.6, 531–537. 2013.

SANTOS, A.V., VIANA, M.M., MEDEIROS, F.H.A. e MOHALLEM, N.D.S. **O Incrível Mundo dos Materiais Porosos – Características, Propriedades e Aplicações.** Química Nova, v.38, no.2, p. 4-11. 2016.

SANTOS JÚNIOR, V. A. **Escoamento de fluido em dutos de seção arbitrária utilizando o método integral baseado em Galerkin. Estudo de caso: óleo pesado.** Tese de Doutorado em Engenharia de Processos. Universidade Federal de Campina Grande, PB, 2018.

SANTOS JÚNIOR, V.A.; FARIAS NETO, S.R.; LIMA, A.G.B.; GOMES, I.F.; GALVÃO, I.B.; FRANCO, C.M.R.; CARMO, J.E.F. **Heavy Oil Laminar Flow in Corrugated Ducts: A Numerical Study Using the Galerkin-Based Integral Method**. *Energies*, 13, 1363. 2020.

SANTOS JÚNIOR, V.A.; SILVA JÚNIOR, A.F.S.; SIMÕES, T.A. OLIVEIRA, G.P. **Poiseuille-Number-Based Kozeny–Carman Model for Computation of Pore Shape Factors on Arbitrary Cross Sections**. *Transp Porous Med* 138 , 99–131 (2021).

SARKAR, S.; TOKSÖZ, M.N.; and BURNS D.R. **Fluid Flow Modeling in Fractures**. *Earth Resources Laboratory*. Massachusetts Institute of Technology, 2004.

SHAH, R. K.; LONDON, A. L. **Laminar Flow Friction and Forced Convection in Ducts. Supplement 1 to Advances in Heat Transfer**. Academic Press, Inc., New York, 1978.

SCHEIDEGGER, A.E. **The Physics of Flow Through Porous Media**. 2a. ed. London: Oxford University Press, 313p. 1960.

SCHON, J. H. **Propriedades Físicas das Rochas Aplicadas à Engenharia de Petróleo**. (Furmankiewicz, E. Tradução). 1º ed, Campus (Elsevier Ltda), Rio de Janeiro, 2015.

SCHULZ, R., RAY, N., ZECH, S. RUPP, A. and KNABNER, P. **Beyond Kozeny–Carman: Predicting the Permeability in Porous Media**. *Transport in Porous Media*. 130, 487–512. 2019.

SIMÕES, T. A. **Identificação de Zonas de Produção e Recuperação de Óleo Baseadas em Unidades de Fluxo Hidráulico e Simulações Computacionais**. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica. Universidade Federal da Paraíba, PB, 2017.

SNOW, D.T. **A parallel plate model of fractured permeable media**. Ph.D. Thesis. 1965.

SNOW, D.T. **Anisotropic permeability of fractured media**. *Water Resour. Res.* 5 (6), 1273–1289. 1969.

SOBIESKI, W. and ZHANG, Q. **Sensitivity analysis of Kozeny-Carman and Ergun Equations.** Technical Sciences 17(3), pp. 235-248, 2014.

SRISUTTHIYAKORN, N. and MAVKO, G.M. **An Improved Kozeny-Carman for Irregular Pore Geometries.** SEG Technical Program Expanded Abstracts and 85th Annual International Meeting. p.3015-3019. 2015.

SRISUTTHIYAKORN, N. and MAVKO, G.M. **What is the role of tortuosity in the Kozeny-Carman equation?** Interpretation, v.5, No.1, p.SB57–SB67. 2017.

SRISUTTHIYAKORN, N. and MAVKO, G.M. **The Revised Kozeny-Carman Equation: a practical way to improve permeability prediction in the Kozeny-Carman equation through pore-size distribution.** SEG Technical Program Expanded Abstracts and 87th Annual Meeting. p.3811-3815. 2017.

THOMAS, J. W. **Numerical partial differential equations: finite difference methods,** New York: Springer-Verlag, 437 p. 1995.

TIAB, D. e DONALDSON, E. C. **Petrophysics: Theory and Practice of Measuring Reservoir Rock and Fluid Transport Properties.** 4^o ed, GPP (Elsevier Ltda), Oxford, 2015.

TSANG, Y.W. and WITHERSPOON, P.A. **Hydromechanical behavior of a deformable rock fracture subject to normal stress.** J Geophys Res Solid Earth. 86(B10):9287–98, 1981.

WHITE, F.M. **Viscous Fluid Flow.** Third edition. McGraw Hill - International Edition. 2006.

WHITE, F.M. **Mecânica dos fluidos.** Sexta edição. McGraw Hill Brasil, 2011.

WITHERSPOON, P. A.; WANG, J. S.; IWAI, K.; and GALE, J. E. **Validity of cubic law for fluid flow in a deformable rock fracture.** Water Resour. Res., 16, 1016–1024, 1980.

XIAO, W.; XIA, C.; WEI, W. and BIAN, Y. **Combined effect of tortuosity and surface roughness on estimation of flow rate through a single rough joint.** Journal of Geophysics and Engineering. 10(4):045015, 2013.

XIONG, X.; LI, B.; JIANG, Y.; KOYAMA, T.; and ZHANG, C. **Experimental and numerical study of the geometrical and hydraulic characteristics of a single rock fracture during shear.** *Int. Journal of Rock Mech. and Mining Sciences*, 48, 8, 1292-1302, 2011.

YANG, Y. and APLIN, A.C. **Influence of lithology and compaction on the pore size distribution and modelled permeability of some mudstones from the Norwegian margin.** *Marine and Petroleum Geology*, 15, 163-I, 75. 1998.

YAZDCHI, K.; SRIVASTAVA, S. and LUDING, S. **On the validity of the carman-kozeny equation in Random fibrous media.** II Int. Conf. on Particle-based Methods – Fund. and Appl. 2011.

ZHOU, M.; ZHANG, Y.; ZHOU, R.; HAO, J. and YANG, J. **Mechanical Property Measurements and Fracture Propagation Analysis of Longmaxi Shale by Micro-CT Uniaxial Compression.** *Energies*, 11, 1409, 2018.

ZIMMERMAN, R. W.; KUMAR, S. and BODVARSSON, G. S. **Lubrication theory analysis of the permeability of rough-walled fractures,** *Int. J. Rock Mech.* 28, 325-331, 1991.

ZIMMERMAN, R.W.; CHEN, D.W. and COOK, N.G.W. **The effect of contact area on the permeability of fractures.** *J Hydrol (Amst)*. 139(1-4):79-96, 1992.

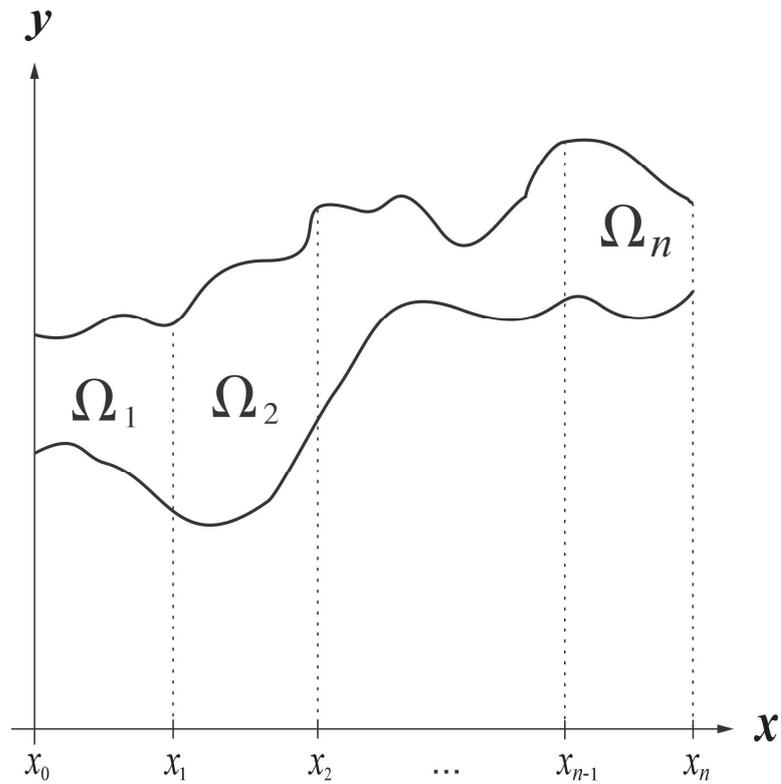
ZIMMERMAN, R.W. and BODVARSSON, G.S. **Hydraulic Conductivity of Rock Fractures.** *Transp. Porous Media* 23 (1), 1-30, 1996.

ZIMMERMAN, R.W. and YEO, I. W. **Fluid flow in rock fractures: From the Navier-Stokes equations to the cubic law.** *Geophys. Monogr.-Am. Geophys. Union* 122, 213-224, 2000.

APÊNDICE A

Para um domínio particionado $\Omega = \cup_{i=1}^n \Omega_i$, como mostra a Figura A-1, deve-se analisar cada subdomínio, para se obter a análise domínio completo.

Figura A-1- Domínio particionado em n subdomínios.



Fonte: Própria do autor.

No caso específico do diâmetro hidráulico da região Ω , que, por definição, é dado pela Equação (2.6), isto é,

$$d_{ht} = \frac{4A_t}{P_t} = \frac{4(\sum_{i=1}^n A_i)}{\sum_{i=1}^n P_i} \quad (\text{A.1})$$

onde cada A_i e P_i são, respectivamente, a área e o perímetro molhado de cada sub-região Ω_i .

Por outro lado, pode-se sugerir que o diâmetro d_{ht} de Ω seja igual à soma dos diâmetros hidráulicos de cada Ω_i , isto é,

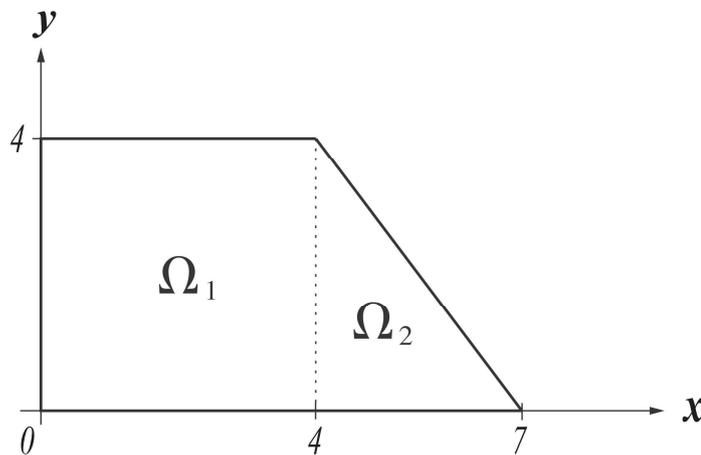
$$d_{h_t} = \sum_{i=1}^n d_{h_i} \quad (\text{A.2})$$

Porém, a Equação (A.2) diverge da Equação (A.1), visto que

$$\sum_{i=1}^n d_{h_i} = 4 \left(\frac{A_1}{P_1} + \frac{A_2}{P_2} + \dots + \frac{A_n}{P_n} \right) \neq 4 \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n} = \frac{4(\sum_{i=1}^n A_i)}{\sum_{i=1}^n P_i}$$

Como exemplo, considere o domínio particionado $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, como mostra a Figura A-2.

Figura A-2- Domínio particionado em 2 subdomínios.



Fonte: Própria do autor.

Note que para Ω_1 e Ω_2 tem-se, respectivamente, $A_1 = 16$ e $P_1 = 12$, $A_2 = 6$ e $P_2 = 8$, logo, o diâmetro hidráulico para cada Ω_i é dado por:

$$d_{h_1} = \frac{4A_1}{P_1} = \frac{64}{12} = 5,3333$$

e

(A.3)

$$d_{h_2} = \frac{4A_2}{P_2} = \frac{24}{8} = 3$$

E pela Equação (A.2) tem-se, $d_{h_t} = 8,3333$.

Por outro lado, pela Equação (A.1), tem-se

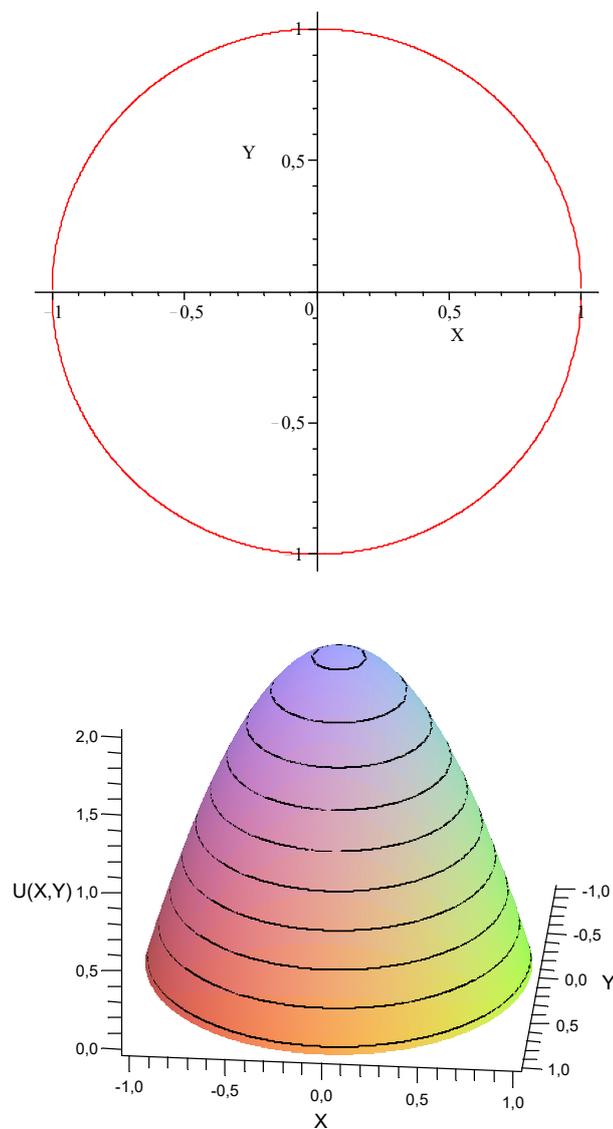
$$d_{ht} = \frac{4(A_1 + A_2)}{P_1 + P_2} = \frac{88}{20} = 4,4 \quad (\text{A.4})$$

Logo, ao se analisar subdomínios, objetivando uma análise do domínio completo, deve-se adotar a definição dada pela Relação (A.1).

APÊNDICE B

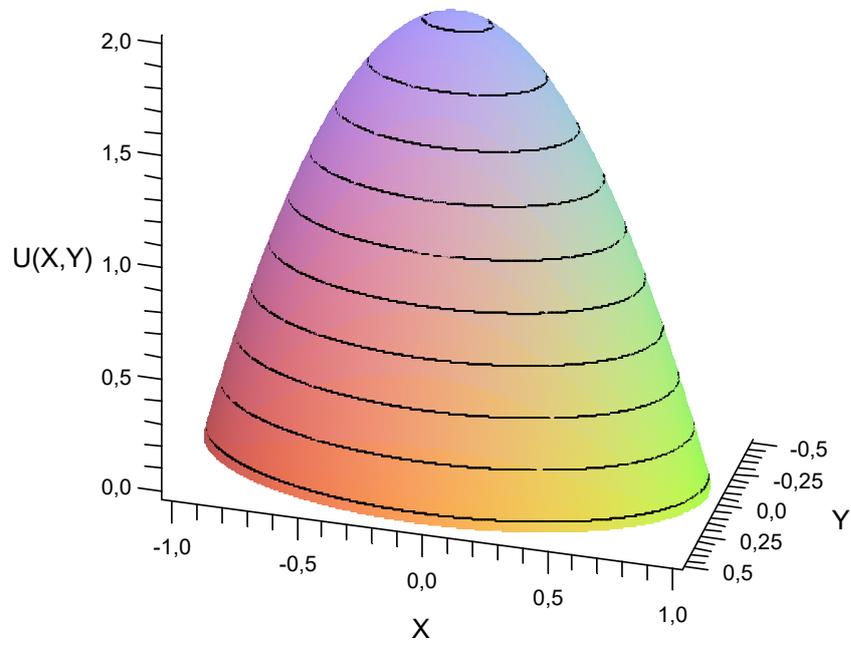
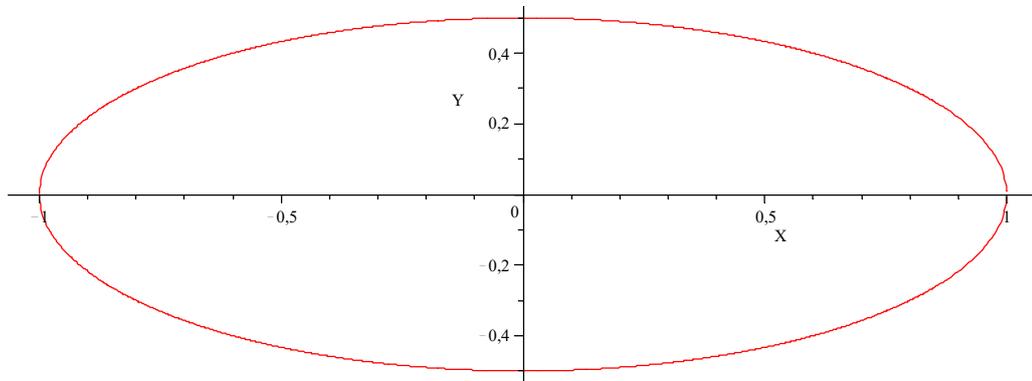
As Figuras B-1 a B-7 apresentam as geometrias geradas pelos polinômios de regressão e os respectivos perfis de velocidade para cada geometria estudada.

Figura B-1- Geometria gerada pelos polinômios de regressão e o perfil de velocidade adimensional do duto de seção transversal circular.



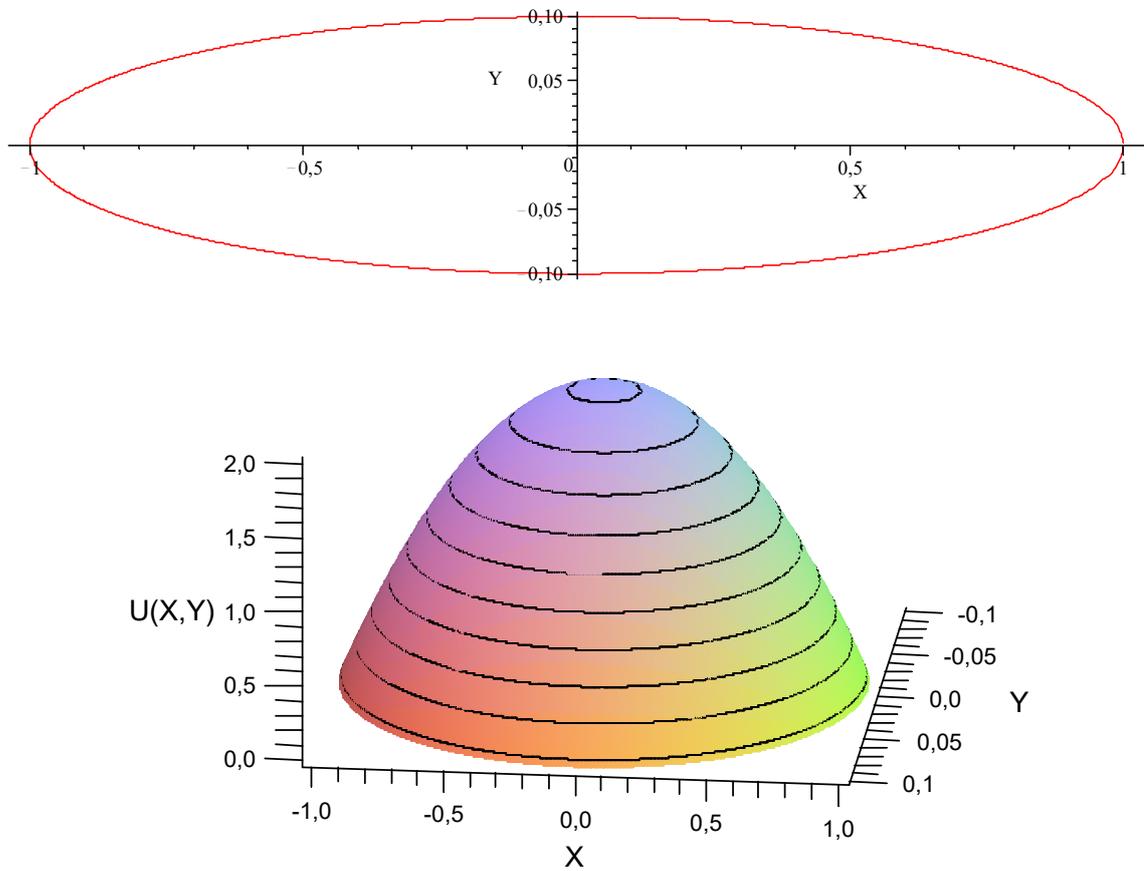
Fonte: Própria do autor.

Figura B-2- Geometria gerada pelos polinômios de regressão e o perfil de velocidade adimensional do duto de seção transversal elíptico com $a/b = 1/2$.



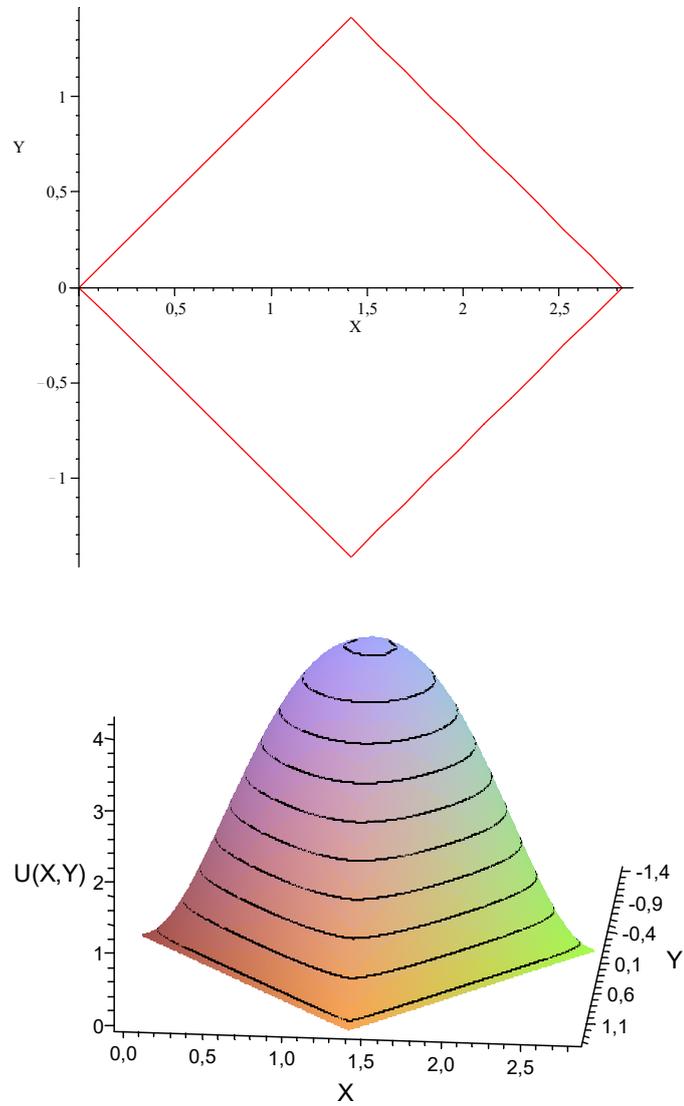
Fonte: Própria do autor.

Figura B-3- Geometria gerada pelos polinômios de regressão e o perfil de velocidade adimensional do duto de seção transversal elíptico com $a/b = 1/10$.



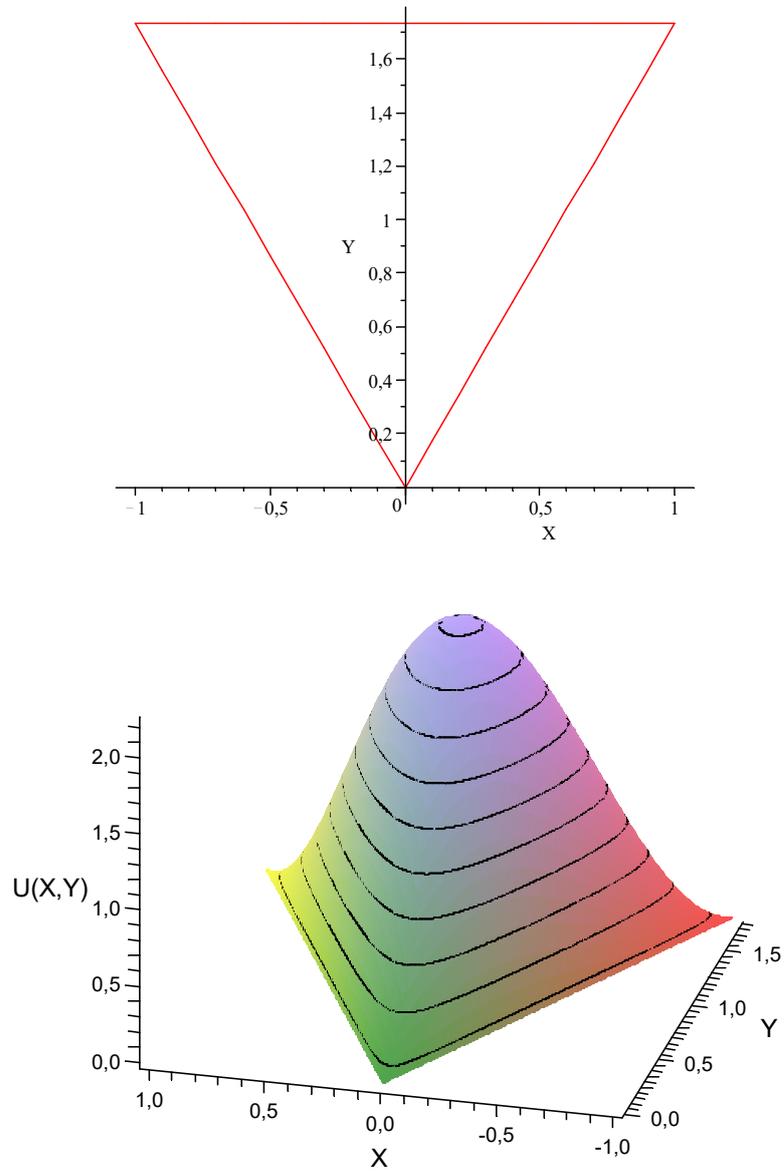
Fonte: Própria do autor.

Figura B-4- Geometria gerada pelos polinômios de regressão e o perfil de velocidade adimensional do duto de seção transversal quadrada.



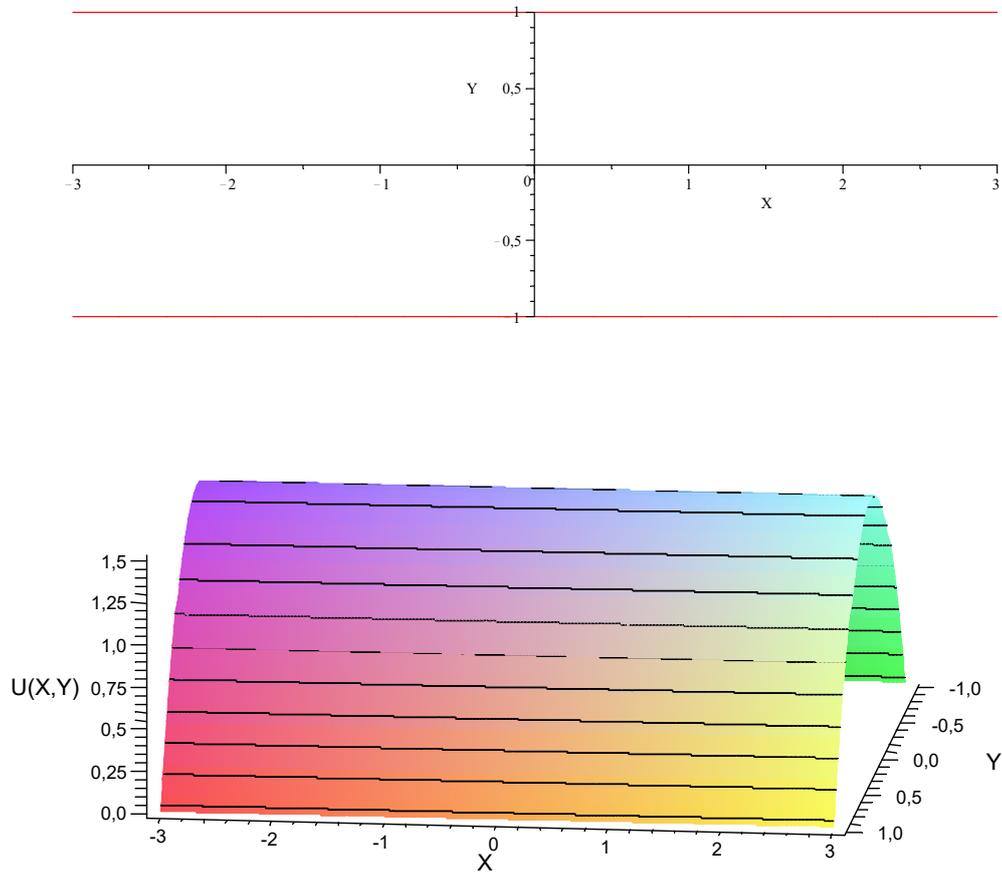
Fonte: Própria do autor.

Figura B-5- Geometria gerada pelos polinômios de regressão e o perfil de velocidade adimensional do duto de seção transversal triangular equilátero.



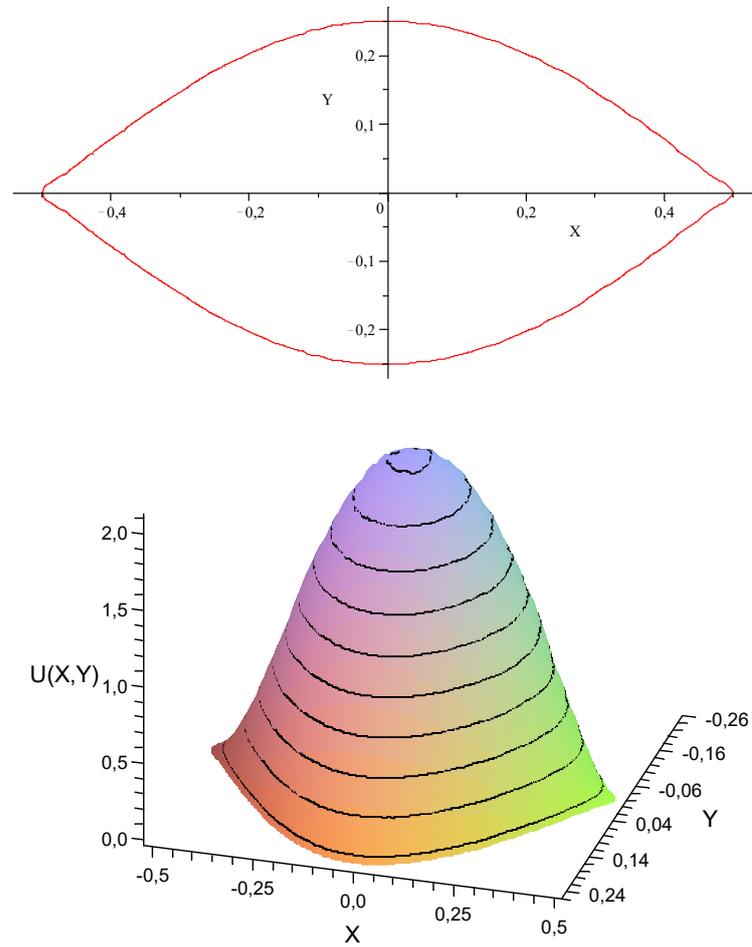
Fonte: Própria do autor.

Figura B-6- Geometria gerada pelos polinômios de regressão e o perfil de velocidade adimensional do duto de seção transversal com placas paralelas.



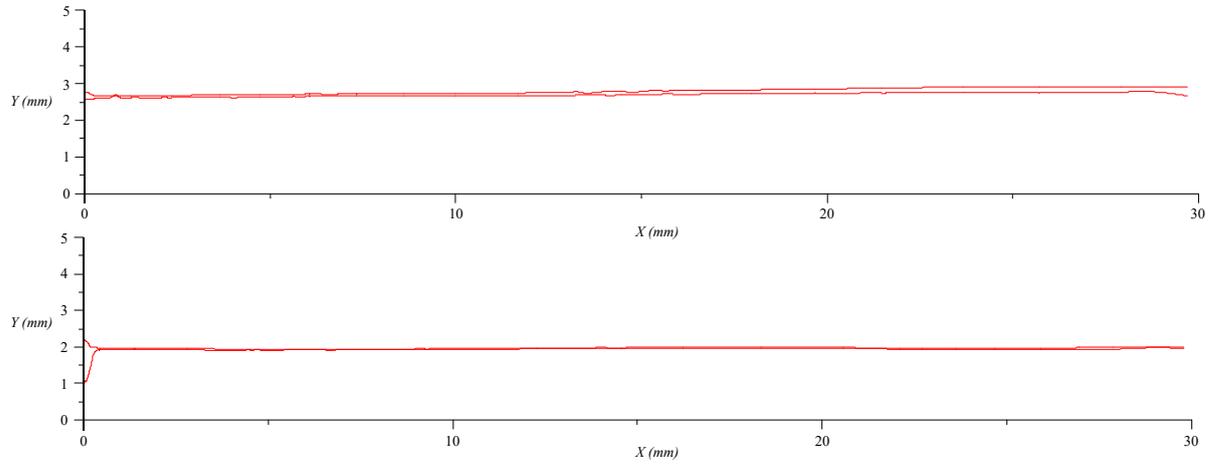
Fonte: Própria do autor.

Figura B-7- Geometria gerada pelos polinômios de regressão e o perfil de velocidade adimensional do duto de seção transversal duplo seno.



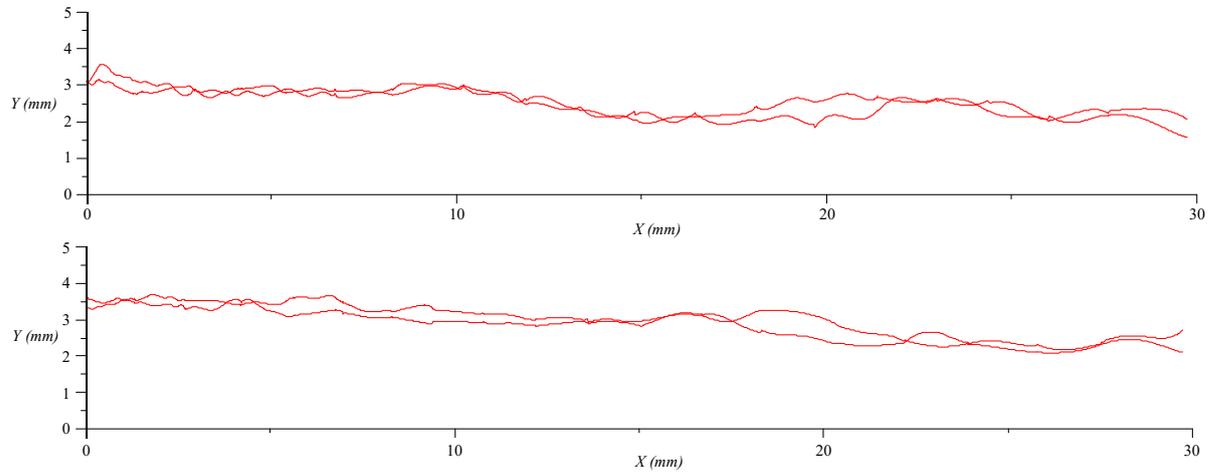
Fonte: Própria do autor.

Figura B-8- Geometria gerada pelos polinômios de regressão para a fratura da face superior e inferior da amostra FFT.



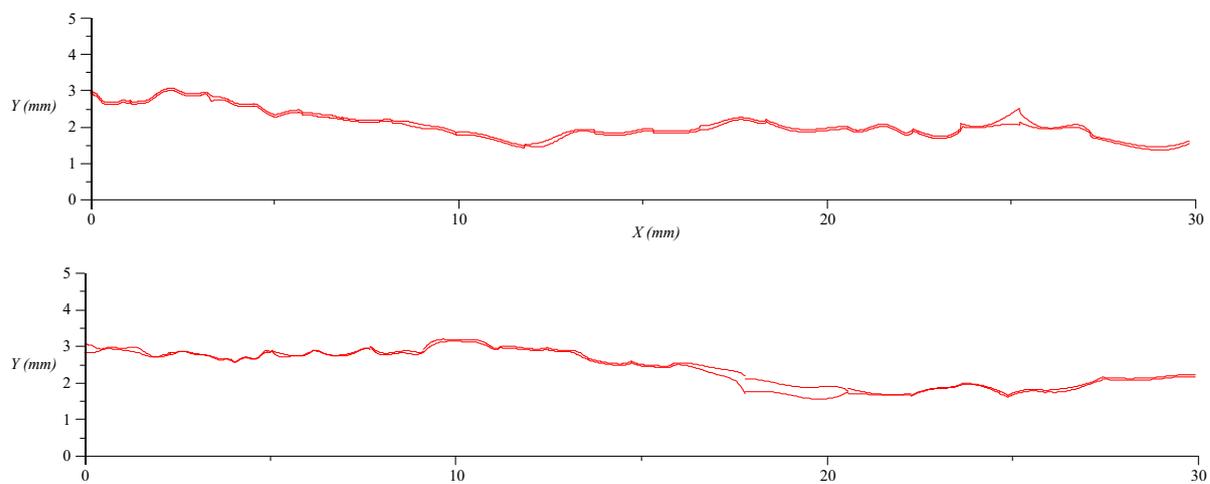
Fonte: Própria do autor.

Figura B-9- Geometria gerada pelos polinômios de regressão para a fratura da face superior e inferior da amostra FFL1.



Fonte: Própria do autor.

Figura B-10- Geometria gerada pelos polinômios de regressão para a fratura da face superior e inferior da amostra FFL2.



Fonte: Própria do autor.

APÊNDICE C

Neste apêndice constam tabelas com resultados obtidos neste estudo.

Tabela C-1 - Resultados da permeabilidade, abertura hidráulica e transmissividade obtidos no presente trabalho para as fraturas da amostra FFT.

Amostra FFT	Presente trabalho	Cheng <i>et al.</i>, 2020	Discrepância
$k_f (m^2)$ – Equação (3.47)	$4,1799 \times 10^{-12}$	$4,3561 \times 10^{-12}$	4,05%
$h_H(mm)$ – Equação (3.49)	$7,0823 \times 10^{-3}$	$7,2300 \times 10^{-3}$	2,04%
$T (m^4)$ – Equação (3.50)	$8,1481 \times 10^{-18}$	$8,4915 \times 10^{-18}$	4,05%

Fonte: Própria do autor.

Tabela C-2 - Resultados da permeabilidade, abertura hidráulica e transmissividade obtidos no presente trabalho para as fraturas da amostra FFL1.

Amostra FFL1	Presente trabalho	Cheng <i>et al.</i>, 2020	Discrepância
$k_f (m^2)$ – Equação (3.47)	$8,6718 \times 10^{-11}$	$1,0977 \times 10^{-10}$	20,99%
$h_H(mm)$ – Equação (3.49)	$3,2259 \times 10^{-2}$	$3,6294 \times 10^{-2}$	11,12%
$T (m^4)$ – Equação (3.50)	$4,4156 \times 10^{-16}$	$5,5893 \times 10^{-16}$	20,99%

Fonte: Própria do autor.

Tabela C-3 - Resultados da permeabilidade, abertura hidráulica e transmissividade obtidos no presente trabalho para as fraturas da amostra FFL2.

Amostra FFL2	Presente trabalho	Cheng <i>et al.</i>, 2020	Discrepância
$k_f (m^2)$ – Equação (3.47)	$5,6826 \times 10^{-12}$	$6,6410 \times 10^{-12}$	14,43%
$h_H(mm)$ – Equação (3.49)	$8,2578 \times 10^{-3}$	$8,9270 \times 10^{-3}$	7,50%
$T (m^4)$ – Equação (3.50)	$1,2122 \times 10^{-17}$	$1,4166 \times 10^{-17}$	14,43%

Fonte: Própria do autor.

Tabela C-4 – Resultados obtidos no presente trabalho para 132 tipos de fraturas.

Fratura	$k (m^2)$	$h_H(mm)$	fRe	Δp	Δp^*	Re
001	3,3333E-07	2,0000	24,0000	3,1200E-02	1,00	1,3312
002	1,0309E-09	0,1112	25,7865	1,0088E+01	3,23E+02	0,0740
003	5,2074E-08	0,7905	25,7424	1,9971E-01	6,40E+00	0,5262
004	1,3518E-07	1,2737	25,4349	7,6933E-02	2,47E+00	0,8477
005	2,5727E-07	1,7571	25,2803	4,0424E-02	1,30E+00	1,1695
006	7,9348E-10	0,0976	24,5241	1,3107E+01	4,20E+02	0,0649
007	1,5338E-07	1,3567	24,3927	6,7804E-02	2,17E+00	0,9030
008	9,5941E-08	1,0730	24,2942	1,0840E-01	3,47E+00	0,7142
009	7,8436E-08	0,9702	24,2457	1,3259E-01	4,25E+00	0,6457
010	1,1423E-09	0,1171	24,2247	9,1041E+00	2,92E+02	0,0779
011	3,3915E-08	0,6379	24,1895	3,0665E-01	9,83E+00	0,4246
012	6,5208E-08	0,8846	24,1535	1,5949E-01	5,11E+00	0,5888
013	6,2951E-07	2,7485	24,1186	1,6521E-02	5,30E-01	1,8294
014	1,5738E-07	1,3742	24,1186	6,6084E-02	2,12E+00	0,9147
015	1,7486E-08	0,4581	24,1186	5,9475E-01	1,91E+01	0,3049
016	4,3716E-09	0,2290	24,1186	2,3790E+00	7,63E+01	0,1524
017	2,7987E-07	1,8326	24,1105	3,7160E-02	1,19E+00	1,2198
018	6,3524E-07	2,7610	24,0889	1,6372E-02	5,25E-01	1,8377
019	1,5881E-07	1,3805	24,0889	6,5487E-02	2,10E+00	0,9188
020	1,7646E-08	0,4602	24,0889	5,8938E-01	1,89E+01	0,3063
021	4,4114E-09	0,2301	24,0889	2,3575E+00	7,56E+01	0,1531
022	6,8592E-07	2,8690	24,0238	1,5162E-02	4,86E-01	1,9096
023	1,7148E-07	1,4345	24,0238	6,0648E-02	1,94E+00	0,9548
024	1,9053E-08	0,4782	24,0237	5,4583E-01	1,75E+01	0,3183
025	4,7633E-09	0,2391	24,0237	2,1833E+00	7,00E+01	0,1591
026	2,1234E-07	1,5963	24,0219	4,8977E-02	1,57E+00	1,0625
027	2,8328E-07	1,8437	24,0083	3,6713E-02	1,18E+00	1,2272
028	3,2240E-07	1,9669	24,0042	3,2258E-02	1,03E+00	1,3092
029	1,3695E-09	0,1282	24,0027	7,5938E+00	2,43E+02	0,0853
030	1,3889E-09	0,1291	24,0010	7,4881E+00	2,40E+02	0,0859

Fonte: Própria do autor.

Tabela C-4 – Resultados obtidos no presente trabalho para 132 tipos de fraturas – Continuação.

Fratura	$k (m^2)$	$h_H(mm)$	fRe	Δp	Δp^*	Re
031	3,2800E-07	1,9839	24,0008	3,1707E-02	1,02E+00	1,3205
032	3,3050E-07	1,9915	24,0002	3,1467E-02	1,01E+00	1,3255
033	1,4105E-09	0,1301	24,0001	7,3732E+00	2,36E+02	0,0866
034	7,4715E-07	2,9943	24,0000	1,3919E-02	4,46E-01	1,9930
035	1,8679E-07	1,4972	24,0000	5,5678E-02	1,78E+00	0,9965
036	2,0754E-08	0,4991	24,0000	5,0110E-01	1,61E+01	0,3322
037	5,1886E-09	0,2495	24,0000	2,0044E+00	6,42E+01	0,1661
038	3,3207E-07	1,9962	24,0000	3,1319E-02	1,00E+00	1,3287
039	3,3197E-07	1,9959	24,0000	3,1328E-02	1,00E+00	1,3285
040	3,3273E-07	1,9982	24,0000	3,1257E-02	1,00E+00	1,3300
041	5,2083E-09	0,2500	24,0000	1,9968E+00	6,40E+01	0,1664
042	2,0833E-08	0,5000	24,0000	4,9920E-01	1,60E+01	0,3328
043	1,8750E-07	1,5000	24,0000	5,5467E-02	1,78E+00	0,9984
044	7,5000E-07	3,0000	24,0000	1,3867E-02	4,44E-01	1,9968
045	8,3333E-10	0,1000	24,0000	1,2480E+01	4,00E+02	0,0666
046	2,0833E-10	0,0500	24,0000	4,9920E+01	1,60E+03	0,0333
047	5,2083E-11	0,0250	24,0000	1,9968E+02	6,40E+03	0,0166
048	5,2083E-13	0,0025	24,0000	1,9968E+04	6,40E+05	0,0017
049	5,2083E-15	0,0003	24,0000	1,9968E+06	6,40E+07	0,0002
050	6,7443E-11	0,0284	24,0000	1,5420E+02	4,94E+03	0,0189
051	2,3774E-12	0,0053	24,0000	4,3746E+03	1,40E+05	0,0036
052	5,7305E-12	0,0083	24,0000	1,8148E+03	5,82E+04	0,0055
053	4,4902E-10	0,0734	24,0000	2,3161E+01	7,42E+02	0,0489
054	1,3117E-09	0,1255	24,0000	7,9289E+00	2,54E+02	0,0835
055	2,9757E-09	0,1890	24,0000	3,4950E+00	1,12E+02	0,1258
056	7,7926E-10	0,0967	24,0000	1,3346E+01	4,28E+02	0,0644
057	2,2426E-09	0,1640	24,0000	4,6374E+00	1,49E+02	0,1092
058	3,9200E-09	0,2169	24,0000	2,6531E+00	8,50E+01	0,1444
059	2,5469E-09	0,1748	24,0000	4,0834E+00	1,31E+02	0,1164
060	4,5600E-09	0,2339	24,0000	2,2807E+00	7,31E+01	0,1557

Fonte: Própria do autor.

Tabela C-4 – Resultados obtidos no presente trabalho para 132 tipos de fraturas – Continuação.

Fratura	$k (m^2)$	$h_H(mm)$	fRe	Δp	Δp^*	Re
061	9,2392E-09	0,3330	24,0000	1,1256E+00	3,61E+01	0,2216
062	2,3806E-10	0,0534	24,0000	4,3687E+01	1,40E+03	0,0356
063	9,5783E-10	0,1072	24,0000	1,0858E+01	3,48E+02	0,0714
064	3,3735E-09	0,2012	24,0000	3,0829E+00	9,88E+01	0,1339
065	1,8238E-09	0,1479	24,0000	5,7025E+00	1,83E+02	0,0985
066	7,5839E-09	0,3017	24,0000	1,3713E+00	4,40E+01	0,2008
067	1,9864E-08	0,4882	24,0000	5,2357E-01	1,68E+01	0,3250
068	4,6506E-09	0,2362	24,0000	2,2363E+00	7,17E+01	0,1572
069	8,5819E-09	0,3209	24,0000	1,2119E+00	3,88E+01	0,2136
070	1,4273E-08	0,4139	24,0000	7,2865E-01	2,34E+01	0,2755
071	1,4179E-09	0,1304	24,0000	7,3348E+00	2,35E+02	0,0868
072	3,9918E-10	0,0692	24,0000	2,6054E+01	8,35E+02	0,0461
073	8,1850E-10	0,0991	24,0000	1,2706E+01	4,07E+02	0,0660
074	3,6409E-09	0,2090	24,0000	2,8565E+00	9,16E+01	0,1391
075	4,4448E-10	0,0729	24,0000	2,3451E+01	7,51E+02	0,0486
076	7,9317E-11	0,0309	24,0000	1,3112E+02	4,20E+03	0,0205
077	1,2761E-12	0,0039	24,0000	8,1498E+03	2,61E+05	0,0026
078	3,5926E-13	0,0021	24,0000	2,8948E+04	9,28E+05	0,0014
079	7,3665E-13	0,0030	24,0000	1,4118E+04	4,52E+05	0,0020
080	3,2768E-12	0,0063	24,0000	3,1739E+03	1,02E+05	0,0042
081	3,9964E-13	0,0022	24,0000	2,6024E+04	8,34E+05	0,0015
082	7,1386E-14	0,0009	24,0000	1,4569E+05	4,67E+06	0,0006
083	1,0599E-10	0,0357	24,0000	9,8120E+01	3,14E+03	0,0237
084	8,9879E-12	0,0104	24,0000	1,1571E+03	3,71E+04	0,0069
085	3,3333E-07	2,0000	24,0000	3,1201E-02	1,00E+00	1,3312
086	3,3332E-07	1,9999	24,0000	3,1202E-02	1,00E+00	1,3312
087	3,3327E-07	1,9998	24,0000	3,1206E-02	1,00E+00	1,3311
088	3,3315E-07	1,9994	24,0000	3,1218E-02	1,00E+00	1,3308
089	3,3291E-07	1,9987	24,0000	3,1240E-02	1,00E+00	1,3304
090	3,3167E-07	1,9950	24,0000	3,1356E-02	1,01E+00	1,3279

Fonte: Própria do autor.

Tabela C-4 – Resultados obtidos no presente trabalho para 132 tipos de fraturas – Continuação.

Fratura	$k (m^2)$	$h_H(mm)$	fRe	Δp	Δp^*	Re
091	1,5127E-07	1,3473	23,9993	6,8749E-02	2,20E+00	0,8968
092	3,0521E-07	1,9138	23,9960	3,4075E-02	1,09E+00	1,2738
093	1,0063E-07	1,0989	23,9595	1,0335E-01	3,31E+00	0,7314
094	1,3454E-08	0,4018	23,9532	7,7301E-01	2,48E+01	0,2674
095	8,6158E-08	1,0168	23,9054	1,2071E-01	3,87E+00	0,6768
096	9,3607E-08	1,0598	23,7775	1,1110E-01	3,56E+00	0,7054
097	3,3159E-07	1,9948	23,5764	3,1364E-02	1,01E+00	1,3277
098	3,3397E-07	2,0019	23,5747	3,1140E-02	9,98E-01	1,3325
099	3,3608E-07	2,0082	23,5731	3,0945E-02	9,92E-01	1,3367
100	7,3629E-08	0,9400	23,3779	1,4125E-01	4,53E+00	0,6256
101	6,0495E-08	0,8520	22,6281	1,7192E-01	5,51E+00	0,5671
102	3,1067E-07	1,9308	22,2233	3,3476E-02	1,07E+00	1,2851
103	3,1252E-07	1,9365	22,2173	3,3278E-02	1,07E+00	1,2890
104	3,0908E-07	1,9259	22,2133	3,3649E-02	1,08E+00	1,2819
105	5,9803E-08	0,8471	22,1181	1,7390E-01	5,57E+00	0,5639
106	2,9837E-08	0,5984	21,9366	3,4856E-01	1,12E+01	0,3983
107	1,3221E-07	1,2596	21,8968	7,8664E-02	2,52E+00	0,8384
108	6,0134E-08	0,8495	21,8703	1,7295E-01	5,54E+00	0,5654
109	3,0007E-08	0,6001	21,7027	3,4659E-01	1,11E+01	0,3994
110	4,3868E-08	0,7255	21,4772	2,3708E-01	7,60E+00	0,4829
111	9,3154E-09	0,3343	20,4826	1,1164E+00	3,58E+01	0,2225
112	3,1857E-08	0,6183	18,6988	3,2646E-01	1,05E+01	0,4115
113	1,6631E-08	0,4467	17,2965	6,2533E-01	2,00E+01	0,2973
114	2,3163E-08	0,5272	17,0980	4,4900E-01	1,44E+01	0,3509
115	5,4031E-07	2,5463	14,8276	1,9248E-02	6,17E-01	1,6948
116	1,3624E-09	0,1279	14,6564	7,6336E+00	2,45E+02	0,0851
117	8,7291E-08	1,0235	14,5199	1,1914E-01	3,82E+00	0,6812
118	8,8480E-08	1,0304	14,3925	1,1754E-01	3,77E+00	0,6858
119	6,5930E-08	0,8895	13,7241	1,5774E-01	5,06E+00	0,5920
120	1,2555E-09	0,1227	12,9476	8,2833E+00	2,65E+02	0,0817

Fonte: Própria do autor.

Tabela C-4 – Resultados obtidos no presente trabalho para 132 tipos de fraturas – Continuação.

Fratura	k (m^2)	h_H (mm)	fRe	Δp	Δp^*	Re
121	1,2531E-09	0,1226	12,9443	8,2994E+00	2,66E+02	0,0816
122	8,4732E-10	0,1008	12,5409	1,2274E+01	3,93E+02	0,0671
123	1,3188E-08	0,3978	12,4886	7,8862E-01	2,53E+01	0,2648
124	2,1504E-08	0,5080	11,1978	4,8364E-01	1,55E+01	0,3381
125	8,0935E-10	0,0986	10,9687	1,2850E+01	4,12E+02	0,0656
126	2,8311E-09	0,1843	10,5806	3,6735E+00	1,18E+02	0,1227
127	2,4242E-08	0,5394	8,3960	4,2902E-01	1,38E+01	0,3590
128	1,1948E-08	0,3787	6,9411	8,7044E-01	2,79E+01	0,2520
129	2,9011E-09	0,1866	3,4128	3,5848E+00	1,15E+02	0,1242
130	2,7277E-09	0,1809	2,6657	3,8127E+00	1,22E+02	0,1204
131	1,2183E-08	0,3823	2,5047	8,5368E-01	2,74E+01	0,2545
132	2,0080E-09	0,1552	0,9320	5,1793E+00	1,66E+02	0,1033

Fonte: Própria do autor.