UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Wellington Rodrigues Faustino

SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS DE RECORRÊNCIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM COM DUAS E TRÊS VARIÁVEIS

Campina Grande - PB
Junho/2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Wellington Rodrigues Faustino

SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS DE RECORRÊNCIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM COM DUAS E TRÊS VARIÁVEIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros

Campina Grande - PB
Junho/2023

F268s Faustino, Wellington Rodrigues.

Sistemas lineares homogêneos de recorrências lineares de primeira ordem com duas e três variáveis / Wellington Rodrigues Faustino. – Campina Grande, 2023.

120 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.

"Orientação: Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros".

Referências.

1. Álgebra Linear. 2. Sistemas Lineares. 3. Recorrências Lineares. 4. Sistemas Homogêneos. I. Medeiros, Luiz Antônio da Silva. II. Título.

CDU 512.64(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

Wellington Rodrigues Faustino

SISTEMA DE RECORRÊNCIAS LINEARES HOMOGÊNEOS DE PRIMEIRA ORDEM COM DUAS E TRÊS VARIÁVEIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 09 de junho de 2023:

Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros
Orientador

Daniel Cordeiro de Morais Filho
UFCG

Emanuela Régia de Sousa Coelho
UEPB

Campina Grande - PB
Junho/2023

Ao amor mais puro e verdadeiro que existe nesse mundo, o de uma mãe para com um filho, a razão que me faz perseverar na incrível e árdua jornada da vida, minha querida e inesquecível mãe, ***Jacira Rodrigues Faustino (in memoriam)****.*

Agradecimentos

Gratidão ao meu senhor, Jesus Cristo, por ter me conduzido até aqui, me dando forças para nunca desistir quando a jornada se tornava enfadonha, fazendo-me lembrar de que o Deus que me ajudou a ingressar no PROFMAT me ajudaria a sair com o êxito da conclusão do curso.

Também gostaria de agradecer a minha tia, Maria do Socorro Rodrigues Galdino, por ser o meu pilar familiar, sendo de suma importância em todo o processo de formação de minha vida.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros, por toda dedicação e cuidado no desenvolvimento da pesquisa, sendo exemplo de profissional humano que certamente inspira orientandos e alunos em busca do constante aperfeiçoamento.

Não menos importante, gostaria de agradecer à Sociedade Brasileira de Matemática por oportunizar a realização do Mestrado Profissional em Matemática, à CAPES pelo suporte financeiro o qual, em partes, possibilitou a realização desta pesquisa.

Minha gratidão a todo o corpo docente do PROFMAT – UFCG, pela dedicação e zelo na condução desse projeto essencial à formação e qualificação dos profissionais de educação em Matemática. Além do meu orientador, agradeço especialmente ao professor Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho, que foi um exemplo de profissional durante a minha trajetória no programa, cujos ensinamentos espero levar por toda a vida.

Deixo meus reconhecimentos a todos os amigos do curso, entre eles Andreson da Silva Aquino, Benildo Virginio de Souza, Eli Carlos de Azevedo, Erivan Barbosa da Silva, Gilmar Verissimo da Silva, Gilvandro Correia de Melo Júnior, Idalice Maria Santiago Oliveira, Rafael Augusto Albuquerque Macedo, verdadeiros irmãos de luta, que por muitas vezes foram de fundamental importância em grupos de estudos liderados por José Cláudio da Silva Teodista. Destaco os momentos em conjunto com os amigos Érico Felintro de Andrade e João Evayr de Souza, em que a amizade foi transcendida por momentos de lutas em meio à preparação para o Exame Nacional de Qualificação (ENQ). Faço menção, também, a Wirander Pereira Rosa de Oliveira e Carlos Gonzaga da Silva Júnior, os quais muitas vezes me acompanharam durante as aulas.

Além desses, destaco outros amigos que, mesmo não fazendo parte do curso, foram determinantes para a realização desse sonho. São eles: meu padrinho Oscar Pacheco Freire Neto, meu amigo Genivaldo Leal da Silva e o estimado Armando Alves de Menezes, o qual se disponibilizou para dirigir ao longo dos 247,7 km de distância entre Arcoverde-PE e Campina Grande-PB a fim de me poupar a fadiga, o que me possibilitou fazer uma boa prova no Exame nacional de Acesso (ENA). Atitudes como essa me fazem lembrar que Deus, em sua infinita bondade, não me deixou sozinho na jornada; em todos os momentos Ele usou as pessoas certas para me auxiliar na caminhada. A vocês, o meu muito obrigado.

Também gostaria de mencionar o professor Ronaldo Barbosa Ramos Izidoro, que por inúmeras vezes me falou, ainda na graduação, sobre o PROFMAT, e me fez sonhar com o dia em que eu ingressaria no programa. Hoje, já finalizando, gostaria de agradecê-lo pelos ensinamentos como professor, assim como pelo direcionamento que possibilitou o início dessa conquista.

Por fim, meus agradecimentos a uma pessoa especial em minha vida: Isabela da Silva Souza, que em diversos momentos, com uma simples palavra, mudava todo o meu dia, me fazendo acreditar que vencer era possível. Em suma, muito obrigado a todos que, diretamente ou indiretamente, contribuíram para a realização desse sonho, o qual outrora me parecia tão distante, mas que agora se torna real.

O que fazemos na vida, ecoa na eternidade.
(Máximus Décimus Meridius)

Deus é Grande, Deus é forte, quando ele quer,
não tem quem não queira.
(Ayrton Senna)

Resumo

Considerando a falta de uma bibliografia adequada sobre sistemas de recorrências lineares de primeira ordem com coeficientes constantes e o uso dessa ferramenta para resolver problemas práticos, apresentamos um estudo analítico sobre o tema, seguido de aplicações práticas, considerando os casos bidimensional e tridimensional quando a matriz dos coeficientes do sistema tem autovalores reais. A abordagem utiliza a decomposição de Jordan da matriz dos coeficientes e uma mudança de variável para simplificar o sistema. Em seguida, resolve-se o sistema simplificado utilizando técnicas adequadas para recorrências lineares de primeira ordem e obtém-se a solução do sistema original.

Palavras-chave: Sistemas Lineares; Recorrências Lineares; Sistemas Homogêneos.

Abstract

Considering the lack of an adequate bibliography on first-order linear recurrence systems with constant coefficients and the use of this tool to solve practical problems, we present an analytical study on the subject, followed by practical applications, considering the two-dimensional and three-dimensional cases when the matrix of coefficients of the system has real eigenvalues. The approach makes use of the Jordan decomposition of the coefficients matrix and a change of variable to simplify the system. Then, the simplified system is solved using suitable techniques for first-order linear recurrences and the solution of the original system is obtained.

Keywords: Linear systems; Linear Recurrences; Homogeneous Systems.

Sumário

1 Introdução

Todo conhecimento científico surge como uma resposta a um questionamento, seja provocado por observações, experimentos que tentam explicar fenômenos naturais, ou a simples busca pela solução de algum problema do interesse humano. É natural do ser humano observar, conjecturar e buscar soluções que favoreçam à sua existência, principalmente quando se depara com um problema, um obstáculo a ser superado.

A história da Matemática ilustra bem essa necessidade de se obter respostas a vários impasses que colocam o homem em uma situação problematizante ou paradoxal a ser superada. Por exemplo, problemas de natureza doméstica, como a divisão ou distribuição de terras após alagamentos, a necessidade de elaboração de mapas para viagens marítimas e especulações a respeito de objetos da própria Matemática, bem como o surgimento dos números complexos, episódio no qual uma raiz inteira de um polinômio cúbico era dada como expressão envolvendo raízes negativas de números naturais. Diante desses e de outros fatos, é natural supor que aprendemos matemática para resolver problemas.

A Matemática tornou-se ciência ao responder às questões mais complexas inerentes à própria área de conhecimento. Por esse motivo, os fundamentos de matemática auxiliam o homem moderno na tomada de decisões e a resolver problemas de outras áreas do conhecimento. A Base Nacional Comum Curricular, documento formativo de elaboração dos currículos mínimos para as escolas de educação básica, reconhece a importância da Matemática para o desenvolvimento de habilidades e competências necessárias à formação de cidadãos capazes de atuar na sociedade moderna. Como *c*ompetência entende-se a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

O desenvolvimento dessas habilidades está intrinsecamente relacionado a algumas formas de organização da aprendizagem matemática, dentre elas os processos matemáticos de resoluções de problemas e investigação. Segundo a Base Nacional Comum Curricular, tais processos são fundamentais para o *letramento matemático* (raciocínio, representação, comunicação e argumentação), bem como para o desenvolvimento do pensamento computacional (BRASIL, 2018), pg. 264. Para George Polya (POLYA, 2006), uma “habilitação prática” na qual temos que observar e imitar para aprendermos a resolver problemas correlatos. Ou seja, é por meio do conhecimento e da imitação que consolidamos algumas técnicas para resolver problemas similares.

Com referência ao Ensino Fundamental - anos finais, a BNCC expõe como expectativa a de que os alunos possam resolver problemas com número naturais, inteiros e racionais, ampliando e aprofundando o desenvolvimento do pensamento numérico com situações que envolvam outras unidades temáticas, tais como Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística, além de problemas relacionados à educação financeira (BRASIL, 2018), pg. 267.

Neste trabalho, propomos estudar e apresentar problemas envolvendo contagem por meio do uso de recorrências lineares, algo que é pouco usual no Ensino Médio, mas que se apresenta como ferramenta muito poderosa para resolver inúmeros problemas de contagem.

As recorrências lineares constituem uma classe de problemas extremamente comum em análise combinatória e probabilidade. Basicamente, uma relação de recorrência linear de ordem $k, k \geq 1$ é uma equação linear envolvendo os termos de uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, na qual é possível definir um termo qualquer a partir de seus k termos anteriores. Por exemplo, a relação

$$x_{n+1} = f(x_n), n \geq 1,$$

onde f é uma função linear, define uma recorrência linear de primeira ordem. A teoria das recorrências lineares de primeira ordem está consolidada e pode ser encontrada em (CARVALHO; MORGADO, 2013), assim como em (GOMES; DINIZ; TEODORO, 2021), ou (DIAS, 2022).

Ao estudar as recorrências lineares de segunda ordem e os sistemas de recorrências lineares de primeira ordem, nos deparamos com indicações às técnicas amplamente estudadas e aplicadas em cursos de equações diferenciais para obtenção de soluções que podem ser encontradas em (BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 2020), de modo que cada problema é tratado de forma individual. Não muito usuais, sistemas de recorrências lineares modelam problemas com foco em treinamentos olímpicos relacionados à teoria dos números, geometria, probabilidade e outros temas debatidos (ANDRICA; BAGDASAR, 2020) e (ENGEL, 2008).

Um fato notável é que, após uma análise minuciosa, é bastante habitual nos depararmos com situações-problema que podem ser modeladas por meio de sequências recorrentes em exames nacionais e internacionais, como é o caso da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária (OBMU), Instituto Militar de Engenharia (IME), Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), e até mesmo a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). Além disso, é importante notar a preocupação de programas como o Polos Olímpicos Treinamento Intensivo (POTI), que dedicam parte dos seus esforços à elaboração de materiais e aulas sobre sequências recorrentes

Muitas vezes, esses problemas de contagem encontrados na literatura e nas competições não são fácies de serem resolvidos ou explicados. No entanto, ao se utilizar do pensamento recorrente, torna-se um tanto simplificada a modelagem do problema em questão, assim como a sua solução. Além disso, muitos desses problemas, em determinadas situações mais complexas de modelagens, requerem a utilização de mais de uma sequência recorrente para o sucesso da solução, sendo indispensável a definição de sequências auxiliares que resultarão em um sistema de recorrências. Ademais, pode-se transformar qualquer recorrência linear de ordem n com coeficientes constantes em um sistema de recorrências lineares de primeira ordem e resolvê-lo pelo método que será apresentado no capítulo 4 desta pesquisa.

Apesar da importância do tema, observada pelas inúmeras aplicações, não existe uma vasta bibliografia à disposição que trate dele. Essa falta de material, principalmente voltado a professores, foi a motivação para pesquisar, escrever e apresentar, de modo detalhado, as soluções para sistemas de recorrências lineares de primeira ordem com duas e três dimensões. Problemas envolvendo mais do que três dimensões podem ser analisados pelo mesmo método. Entretanto, dimensões mais altas não são tão comuns para a educação básica, tampouco são encontradas nas fontes bibliográficas que nortearam esta pesquisa, (ANDRICA; BAGDASAR, 2020), (ENGEL, 2008), (GOMES; DINIZ; TEODORO, 2021), (SANTOS; MELLO; MURARI, 2007), (OLIVEIRA; CARNEIRO, 2010).

Além de justificar as soluções encontradas nas recorrências lineares de segundas e terceiras ordens, buscam-se, na Base Nacional Curricular Comum (BNCC), temas tangíveis ao uso e estudo das sequências recorrentes de forma a auxiliar e reforçar o aprofundamento de tais temas com o uso de uma ferramenta que se mostra extremamente eficaz diante de circunstâncias desafiadoras.

Para resolver problemas, os estudantes podem, por exemplo, identificar de forma categórica os conceitos e procedimentos matemáticos que serão indispensáveis na formulação matemática do problema. Existem problemas para os quais o aluno deverá aplicar de imediato um conceito ou uma técnica, tendo em vista que a incumbência solicitada se manifesta de forma notória. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, o aluno deverá fazer algumas adaptações que serão de grande valia, antes de aplicar o conceito que foi exigido, o que o obrigará a alcançar um maior grau de interpretação e abstração. Todavia, há situações-problema cujos encargos não estão colocados de maneira explícita. Assim sendo, o aluno deverá empregar seus conhecimentos e habilidades de maneira a identificar conceitos e estabelecer um processo de resolução para tal. Em diversos desses problemas, o discente precisará identificar e construir um modelo para que possa gerar respostas adequadas, de modo que tal procedimento envolve analisar fundamentos e propriedades de modelos já preestabelecidos, levando em conta seu alcance e eficácia para o êxito em solucionar o problema em questão.

Apesar de não mencionar diretamente o estudo de recorrências, as habilidades contempladas pela BNCC trazem, de forma intrínseca, a possibilidade de usar recorrência para resolver diversos problemas, assim como explicar o raciocínio por trás de algumas relações, como, por exemplo, o uso de progressões aritméticas (PA) e progressões geo-métricas (PG), que, na verdade, são relações de recorrências e que, muitas vezes, não têm sua lógica envolvida em todo processo de construção e abordagem, seja na dedução de fórmulas ou na resolução do problema em questão. Outro exemplo que podemos citar é o problema relacionado à educação financeira, para o qual, ao invés de utilizar uma variedade de fórmulas desagradáveis, o aluno pode se servir do pensamento recorrente a fim de chegar à modelagem e à solução do problema, conforme o exemplo encontrado em (GOMES; DINIZ; TEODORO, 2021).

Problema. O salário de um trabalhador num mês n é dado pela função afim $S(n) = a + bn$. Sua renda mensal é formada pelo salário e pelos juros de suas aplicações financeiras. O trabalhador poupa a cada mês o mesmo que ele aplicou no mês anterior acrescido da fração $\frac{1}{p}$ de sua renda naquele mês e investe sua poupança a juros mensais de taxa i. Determine a renda desse trabalhador no mês n.

Solução:

Sejam S_n, x_n e y_n, o salário, a renda e o montante respectivamente no mês n. Vamos considerar $n = 0$ para o mês que o trabalhador começou a poupar. Dessa forma, no mês $n = 0$, sua renda inicial correspondente ao seu salário é $x_0 = S(0) = a$, que também corresponde ao montante inicial do trabalhador.

Como a renda mensal é composta pelo salário e pelos juros de sua aplicação financeira, segue-se que:

$$x_{n+1} = S_{n+1} + iy_n \qquad \forall\, n \geq 0, n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Além disso, como será poupado a cada mês o mesmo que foi aplicado no mês anterior com acréscimo de $\frac{1}{p}$ de sua renda no respectivo mês, segue-se que:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{p}x_n \qquad \forall\, n \geq 1, n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Decorre das equações (1.1) e (1.2) o seguinte sistema de relações de recorrências:

$$\begin{cases} x_{n+1} = S_{n+1} + iy_n & \forall\, n \geq 0, n \in \mathbb{N} \\ y_n = y_{n-1} + \frac{1}{p}x_n & \forall\, n \geq 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Substituindo (1.2) em (1.1), obtemos:

$$x_{n+1} = S_{n+1} + iy_{n-1} + \frac{i}{p}x_n \qquad \forall\, n \geq 1, n \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Além disso, observa-se também a seguinte equivalência:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= S_{n+1} + iy_n \qquad &\forall\, n \geq 0, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \\ x_n &= S_n + iy_{n-1} \qquad &\forall\, n \geq 1, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \\ y_{n-1} &= \frac{x_n - S_n}{i} \qquad &\forall\, n \geq 1, n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Substituindo (1.4) em (1.3), temos:

$$x_{n+1} = S_{n+1} - S_n + \left(1 + \frac{i}{p}\right) x_n \Leftrightarrow x_{n+1} = [a + b(n+1) - a - bn] \qquad \forall\, n \geq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{i}{p}\right) x_n + b \qquad \forall\, n \geq 0, n \in \mathbb{N}.$$

O que resulta em uma relação de recorrência linear não homogênea de primeira ordem.

Seja $\{a_n\}_{n\geq 1}$ uma solução da recorrência homogênea $x_{n+1} - \left(1 + \frac{i}{p}\right) x_n = 0$ associada, desta forma:

$$a_n = \left(1 + \frac{i}{p}\right)^n \cdot x_0 \qquad \forall\, n \geq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Fazendo uma substituição de variável $x_n = a_n w_n,\ n \geq 0$ em $x_{n+1} = \left(1 + \frac{i}{p}\right) x_n + b$, temos:

$$w_{n+1} = w_n + \frac{b}{\left(1 + \frac{i}{p}\right)^{n+1}} \qquad \forall\, n \geq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, observa-se que no mês $n = 0$ a renda é $x_0 = a$, uma vez que $S_0 = a$. Por conseguinte:

$$x_0 = a_0 w_0 \Leftrightarrow w_0 = 1.$$

Escrevendo $L = 1 + \frac{i}{p}$, temos:

$$
\begin{aligned}
w_0 &= 1 \\
w_1 &= w_0 + \frac{b}{L} \\
&\vdots \\
w_n &= w_{n-1} + \frac{b}{L^n}
\end{aligned}
$$

Por meio de uma soma telescópica, obtemos

$$w_n = 1 + b \cdot \left[\frac{(1 - L^n)}{L^n(1 - L)} \right].$$

Portanto, como $x_n = a_n w_n$ e $L = 1 + \frac{i}{p}$, concluímos que :

$$x_n = \left(1 + \frac{i}{p}\right)^n . \left(a + \frac{abp}{i}\right) - \frac{abp}{i} \qquad \forall\ n \geq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Diante do que foi apresentado, percebemos que o tema abordado nesta dissertação é relevante para a aprendizagem da educação básica, podendo ser tratado nos itinerários formativos, permitindo ao aluno aprender algumas técnicas de resolução de problemas que podem ser modeladas por relações de recorrências lineares e, consequentemente, desenvolver habilidades requeridas na BNCC, como as mencionadas anteriormente.

Portanto, com esta pesquisa, pretendemos apresentar ao leitor a importância do assunto abordado mediante vários problemas encontrados em olimpíadas nacionais ou internacionais de Matemática e problemas de concurso ou de vestibular, os quais podem ajudar a desenvolver as habilidades e competências preconizadas pela BNCC.

No tópico seguinte, sistematizamos os objetivos da pesquisa e, em seguida, apresentamos como o texto está organizado.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Produzir material em língua portuguesa sobre sistemas de recorrência lineares homogêneos de primeira ordem com duas e três variáveis, a partir da escassez de material na literatura, que seja acessível a alunos e professores do PROFMAT, assim como alunos do segmento olímpico e afins.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Fornecer uma ferramenta eficaz e direta para a solução de problemas que possam ser modelados por meio de sistemas de recorrência lineares de primeira ordem com duas e três variáveis.

- Associar com a BNCC a importância de tal ferramenta para estudo de sistemas recorrentes lineares de primeira ordem, de forma a correlacioná-los com as aplicações práticas e estratégias na solução de problemas.

- Buscar na literatura situações-problema que possam ser modeladas e resolvidas por meio da teoria proposta.

1.2 Organização

Após evidenciar a importância do estudo de sequências recorrentes e a justificativa para tal, associada à BNCC, o trabalho segue a seguinte estrutura:

- **Capítulo 1 : A Base Nacional Comum Curricular.**

  Nesse capítulo analisamos temas perceptíveis e a importância da resolução de problemas que, correlacionados com as competências e habilidades pressupostas pela Base Nacional Comum Curricular, são campos de aplicação do estudo em questão.

- **Capítulo 2 : Tópicos de Álgebra Linear.**

  Nesse capítulo trazemos alguns resultados preliminares de Álgebra Linear que serão convenientes para o desdobramento da teoria a ser apresentada nos próximos capítulos. Essencialmente, relembramos ao leitor os conceitos de autovalor e autovetor de uma matriz, o que são matrizes semelhantes, o Teorema de Jordan para matrizes reais, além de apresentarmos vários exemplos que ajudam a exemplificar a teoria.

- **Capítulo 3: Teoria.**

  Trata-se de um estudo analítico sobre sistemas de recorrências lineares de primeira ordem com duas e três variáveis, em que serão considerados os casos nos quais a matriz dos coeficientes possui autovalores reais, de forma a utilizar a decomposição de Jordan em relação à matriz dos coeficientes visando à simplificação de tais sistemas e, por fim, utilizar-se das técnicas já conhecidas e difundidas para a resolução de recorrências de primeira ordem e obtenção das soluções clássicas da teoria.

- **Capítulo 4: Aplicações.**

  Nesse capítulo serão propostas algumas situações-problema que serão resolvidas de forma meticulosa por meio da teoria proposta no Capítulo 2; tais problemas têm suas raízes bibliográficas tanto na literatura local quanto na exterior.

- **Capítulo 5: Recorrências Lineares com Coeficientes Constantes.**

  Nesse capítulo transformamos as recorrências lineares de segunda ou terceira ordem, com coeficientes constantes, em um sistema linear de recorrências de primeira ordem. A partir das mesmas técnicas estudadas no capítulo 2, obtemos as soluções explícitas para cada caso, elucidando as ideias - algumas vezes não tão claras - das sugestões encontradas na literatura de como devem ser expostas as soluções

- **Capítulo 6: Considerações Finais.**

  Finalmente, apresentamos a conclusão da pesquisa, que consiste num resumo dos objetivos alcançados, e traçamos possibilidades para novas incursões.

2 Tópicos de Álgebra Linear

Neste capítulo trazemos alguns resultados preliminares de Álgebra Linear que serão úteis para o desenvolvimento da teoria a ser apresentada. Mais especificamente, relembramos ao leitor os conceitos de autovalor e autovetor de uma matriz, o que são matrizes semelhantes, o Teorema de Jordan para matrizes reais, além de apresentarmos vários exemplos que ajudam a exemplificar a teoria. Alguns resultados mais básicos, como o conceito de matrizes invertíveis, dependência e independência linear de vetores, base de um espaço vetorial, são de amplo conhecimento, de modo que trataremos deles naturalmente sem os definir. No entanto, caso o leitor queira revisitá-los, sugerimos as leituras de (BOLDRINI et al., 1980), (POOLE, 2011), (NOBLE; DANIEL, 1988), (STEINBRUCH; WINTERLE, 2006) ou (LIMA, 2014).

2.1 Autovalor e Autovetor

Definição. Considere $A = [a_{ij}]$ uma matriz real $n \times n$. Um escalar λ é chamado de **autovalor** de A se existir um vetor não nulo $\vec{u}$ tal que $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Tal vetor é chamado de **autovetor** de A correspondente a λ.

Exemplo 1. *Mostre que* $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *é um autovetor de* $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ *e encontre o autovalor correspondente.*

Solução: *É fácil ver que,*

$$A\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 5\vec{u}.$$

Logo, $A\vec{u} = 5\vec{u}$*, de onde segue que* $\vec{u}$ *é um autovetor de* A *correspondente ao autovalor* 5.

Exemplo 2. *Mostre que* $\vec{u}$ *é um autovetor de* A *e determine o autovalor correspondente, tal que*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Solução: *De maneira análoga ao exemplo anterior, note que*

$$A\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\vec{u}.$$

Posto isso, temos que $A\vec{u} = 3\vec{u}$, ou seja, $\vec{u}$ é um autovetor da A correspondente ao autovalor 3.

Definição. Dada a matriz quadrada A de ordem n, definimos o **polinômio característico** de A ao polinômio p dado por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

A equação $p(\lambda) = 0$ será chamada de **equação característica** da matriz A.

Note que os **autovalores** de A são os escalares λ para os quais $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ possui soluções não nulas. As soluções não nulas $\vec{u}$ correspondentes são os **autovetores** de A. Portanto, λ é autovalor da matriz A se, e somente se, o sistema

$$(A - \lambda I) \cdot X = 0 \tag{2.1}$$

tiver infinitas soluções. Isto significa que λ é autovalor da matriz A se, e somente se, $det(A - \lambda I) = 0$, ou equivalentemente,

$$\lambda \text{ é autovalor de } \; A \Leftrightarrow p(\lambda) = 0.$$

Portanto, os autovalores de A são as raízes do polinômio característico de A. Os autovetores correspondentes a λ são os vetores não nulos que satisfazem (2.1).

Exemplo 3. *Determine os autovalores e autovetores correspondentes da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução:

Seja I a matriz identidade de ordem 3. *Do exposto, o polinômio característico de A é:*

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = -(\lambda - 2)^2 \cdot (\lambda - 3). \end{aligned}$$

Portanto, a equação característica de A é dada por

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 \cdot (\lambda - 3) = 0.$$

Logo, $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$ são os autovalores da matriz A. Uma vez conhecendo os autovalores, podemos encontrar os autovetores correspodentes resolvendo a equação $(A - \lambda I)\vec{u} = 0$ para os seguintes casos:

(i) *Para $\lambda = 2$, temos o seguinte sistema:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -x - y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

cujo conjunto solução é descrito por $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$. Dado que o autovetor correspondente $\vec{u}$ é uma solução não nula do sistema, então o autovetor de A correspondente a $\lambda = 2$ é da forma

$$\vec{u} = z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{tal que} \quad z \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad z \neq 0.$$

(ii) *Para $\lambda = 3$, temos o sistema associado:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = -2y$ e $z = y$. Portanto, $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2y \text{ e } y = z\}$ é o conjunto solução do sistema. Dado que o autovetor $\vec{u}$ é uma solução não nula do sistema, então o autovetor de A correspondente a $\lambda = 3$ é da forma

$$\vec{u} = y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{tal que} \quad y \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y \neq 0.$$

Exemplo 4. *Determine os autovalores e autovetores correspondentes da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução:

Seja I a matriz identidade de ordem 3. Do exposto, o polinômio característico de A é :

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda-2)^2\cdot(\lambda-3). \end{aligned}$$

Portanto, a equação característica de A é dada por

$$p(\lambda)=0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2\cdot(\lambda-3)=0.$$

Logo, $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$ são os autovalores da matriz A. Uma vez conhecendo os autovalores, podemos encontrar os autovetores correspondentes resolvendo a equação $(A-\lambda I)\vec{u}=0$, para os seguintes casos:

(i) *Para $\lambda = 2$, temos o seguinte sistema:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ -x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

cujo conjunto solução é descrito por $\mathcal{S} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y = x+z\}$. Dado que o autovetor correspondente $\vec{u}$ é uma solução não nula do sistema, então o autovetor de A correspondente a $\lambda = 2$ é da forma

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ x+z \\ z \end{bmatrix} \quad \textit{tal que} \quad x,z\in\mathbb{R} \quad \textit{e} \quad x^2+z^2\neq 0.$$

(ii) *Para $\lambda = 3$, temos o sistema associado:*

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & - & y & + & z & = & 0 \\ -x & & & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema, obtemos $y = z$ e $x = -z$. Portanto, $\mathcal{S} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x = -z \text{ e } y = z\}$ é o conjunto solução do sistema. Dado que o autovetor $\vec{u}$ é uma solução não nula do sistema, então o autovetor de A correspondente a $\lambda = 3$ é da forma

$$\vec{u} = z\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \textit{tal que} \quad z\in\mathbb{R} \quad \textit{e} \quad z\neq 0.$$

Exemplo 5. *Mostre que a matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tem autovalores, $-1,\ 1,\ 4,$ *e ache os autovalores correspondentes.*

Solução:

O polinômio característico de A é:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 4.$$

Posto isso, concluímos que os autovalores associados à matriz em questão são $\lambda = -1,\ \lambda = 1$ *e* $\lambda = 4.$

Em seguida, encontramos os autovetores correspondentes a cada um dos autovalores:

(i) *Para* $\lambda = -1$, *temos o seguinte sistema associado:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Do sistema, conclui-se que $x = -z$ *e* $y = 0$, *então*

$$\vec{u} = z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \textit{tal que} \quad z \in \mathbb{R} \quad e \quad z \neq 0.$$

(ii) *Para* $\lambda = 1$, *temos o seguinte sistema associado:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \quad + y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + y \quad = 0 \end{cases}$$

Resolvendo-o, obtemos que $x = z$ *e* $y = -2z$. *Consequentemente,*

$$\vec{u} = z \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \textit{tal que} \quad z \in \mathbb{R} \quad e \quad z \neq 0.$$

(iii) *O sistema associado a* $\lambda = 4$ *é:*

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -3x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & 0 \end{array} \right.$$

cujo conjunto solução é $\mathcal{S} = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$. *Sendo assim,*

$$\vec{u} = z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \textit{tal que} \quad z \in \mathbb{R} \quad e \quad z \neq 0.$$

A seguir apresentamos alguns resultados importantes sobre autovetores. O primeiro deles afirma que o que importa é a direção do autovetor, ou seja, que os múltiplos não nulos de um autovetor ainda é autovetor correspondente ao mesmo autovalor. O segundo, juntamente com o primeiro, caracteriza o conjunto dos autovetores correspondentes a um mesmo autovalor, acrescido do vetor nulo, como um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1. *Seja* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *uma matriz real,* λ *um autovalor de* A *com* $\vec{u}$ *sendo o autovetor corresponde a* λ, *então* $\vec{w} = k \cdot \vec{u}, k \neq 0$ *também é autovetor de* A *correspondente a* λ.

Solução: *Convém notar que, sendo* $k \neq 0$ *e* $\vec{u} \neq 0$ *tem-se* $\vec{w} \neq 0$. *Além disso,*

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{w} &= A \cdot (k \cdot \vec{u}) = k \cdot (A \cdot \vec{u}) = k \cdot (\lambda \cdot \vec{u}) \\ &= \lambda \cdot (k \cdot \vec{u}) = \lambda \cdot \vec{w}. \end{aligned}$$

Portanto, $\vec{w}$ *é autovetor de* A *correspondente ao autovalor* λ.

Teorema 2.2. *Seja* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *uma matriz real,* λ *um autovalor de* A *com* $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ *dois autovetores correspondentes a* λ. *Se*

$$\vec{w} = a \cdot \vec{u}_1 + b \cdot \vec{u}_2,$$

é não nulo, então $\vec{w}$ *é autovetor de* A, *correspondente a* λ.

Solução: *Note que, por hipótese, tem-se* $\vec{w} \neq 0$. *Além disso,*

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{w} &= A \cdot (a \cdot \vec{u}_1 + b \cdot \vec{u}_2) = a \cdot (A \cdot \vec{u}_1) + b \cdot (A \cdot \vec{u}_2) = a \cdot (\lambda \cdot \vec{u}_1) + a \cdot (\lambda \cdot \vec{u}_2) \\ &= \lambda \cdot (a \cdot \vec{u}_1 + b \cdot \vec{u}_2) = \lambda \cdot \vec{w}. \end{aligned}$$

Portanto, $\vec{w}$ *é autovetor de* A, *correspondente ao autovalor* λ.

Os Teoremas 2.1 e 2.2 asseguram que qualquer combinação linear não nula de autovetores de A *correspondentes a um mesmo autovalor* λ *ainda é um autovetor de* A *associado à* λ. *Diante do exposto, resulta que o conjunto*

$$V_\lambda = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n : A\vec{u} = \lambda\vec{u}\}$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ *chamado autoespaço associado a* λ. *Mais precisamente,* V_λ *é o conjunto de todas as combinações lineares dos autovetores de* A *correspondentes ao autovalor* λ.

O próximo resultado afirma que autovalores distintos correspondem autovetores linearmente independentes.

Teorema 2.3. *Seja* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *uma matriz real,* λ_1, λ_2 *dois autovalores distintos de* A *com autovetores correspondentes* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *respectivamente. Então, o conjunto* $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ *é linearmente independente.*

Solução: *Considere a equação*

$$x\vec{u} + y\vec{v} = 0. \tag{2.2}$$

Aplicando a matriz A *e usando o fato de* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *serem autovetores, temos*

$$x \cdot A\vec{u} + yA\vec{v} = 0.$$

Isto implica que

$$x \cdot \lambda_1\vec{u} + y \cdot \lambda_2\vec{v} = 0. \tag{2.3}$$

Multiplicando a equação (2.2) por $-\lambda_2$ *e somando a equação (2.3), conluímos que*

$$x \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{u} = 0.$$

Desde que $\lambda_1 \neq \lambda_2, \vec{u} \neq 0$, *obtemos* $x = 0$, *resultando em* $y \cdot \vec{v} = 0$. *No entanto, levando-se em conta o fato de que* $\vec{v}$ *é autovetor, portanto* $\vec{v} \neq 0$, *concluímos que* $y = 0$. *Assim, a única solução possível da equação (2.2) é a solução trivial* $x = y = 0$, *o que mostra a independência linear dos vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$.

Uma consequência imediata desse último resultado é o fato de que se λ_1, λ_2 são autovalores distintos de A, então

$$V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Ou seja, a interseção de autoespaços associados a autovalores distintos da matriz A consiste em um conjunto unitário formado pelo vetor nulo de $\mathbb{R}^n$.

Definição. *A **multiplicidade algébrica** (m_a) de um autovalor é a quantidade de vezes que ele aparece como raiz do polinômio característico.*

Considere, por exemplo, uma matriz A que tenha

$$p(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \cdot (x - \lambda_2)^{r_2} \dots (x - \lambda_\ell)^{r_\ell}$$

como seu polinômio característico, em que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell$ são suas raízes distintas. Então, tem-se para cada $i \in \{1, 2, \dots, \ell\} : \lambda_i$ é autovalor de A e r_i é a sua multiplicidade algébrica.

Nos Exemplos 3 e 4, o autovalor $\lambda = 2$ tem multiplicidade algébrica igual a 2, ou seja, 2 é uma raiz dupla do polinômio característico. Já o autovalor $\lambda = 3$ tem multiplicidade algébrica igual a 1.

Definição. *A **multiplicidade geométrica** (m_g) de um autovalor λ consiste no número de autovetores linearmente independentes correspondentes a λ. Ou equivalentemente, m_g é a dimensão do subspaço $V_\lambda = \{\vec{u} : A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}\}$ associado à λ.*

No Exemplo 3, para $\lambda = 2$, tem-se $V_{\lambda=2} = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z \cdot (0, 0, 1) : z \in \mathbb{R}\}$. Como, $V_{\lambda=2}$ consiste dos múltiplos do vetor $(0, 0, 1)$, portanto uma única direção, tem-se que sua multiplicidade geométrica (m_g) é igual a 1.

Já no Exemplo 4, para $\lambda = 2$, tem-se

$$V_{\lambda=2} = \{(x, x + z, z) : x, z \in \mathbb{R}\} = \{x \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (0, 1, 1) : x, z \in \mathbb{R}\}.$$

Nesse caso $V_{\lambda=2}$ consiste em todas as combinações lineares dos vetores $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$, portanto duas direções linearmente independentes. Segue-se que a sua multiplicidade geométrica (m_g) é igual a 2.

2.2 Semelhança e Diagonalização

Definição. *Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. Dizemos que A é **semelhante** ou **similar** a B se existir uma matriz invertível P, de modo que*

$$P^{-1}AP = B.$$

Se A é similar a B, escrevemos $A \sim B$.

Exemplo 6. *Mostre que* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ *são matrizes semelhantes.*

Solução: *Considere* $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Note que:*

(a) *$det(P) = 2 \neq 0$, tem-se que P é invertível.*

(b)

$$AP = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = PB.$$

Assim sendo, $AP = PB$, tal que P é invertível. Portanto, $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$, concluindo-se daí que $A \sim B$.

Definição. *Uma matriz quadrada A de ordem n é **diagonalizável** se existir uma matriz diagonal D tal que A seja semelhante a D, ou seja, se existir uma matriz U invertível tal que $U^{-1}AU = D$.*

Assim, afirmar que A é diagonalizável, significa dizer que existe uma matriz U invertível e uma matriz diagonal $D = [d_{i,j}]$ de modo que

$$A = U \cdot D \cdot U^{-1}.$$

Ou, equivalentemente,

$$A \cdot U = U \cdot D.$$

Particionando U por colunas, isto é, escrevendo $U = [u_1 \quad u_2 \quad \ldots \quad u_n]$, onde u_i é a i-ésima coluna da matriz U, a última igualdade implica que

$$\begin{array}{rcl} A \cdot u_1 & = & d_{1,1} \cdot u_1 \\ A \cdot u_2 & = & d_{2,2} \cdot u_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A \cdot u_n & = & d_{n,n} \cdot u_n. \end{array}$$

Uma vez que U é invertível, as colunas de U são não nulas e são linearmente independentes. Portanto, segue que os elementos $d_{i,i}$ da diagonal de D são autovalores de A e as colunas u_i de A são autovetores de A correspondentes ao autovalor $d_{i,i}$. Assim, dizer que A é diagonalizável é equivalente a dizer que o $\mathbb{R}^n$ possui uma base formada por autovetores da matriz A.

Exemplo 7. *Mostre que* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ *é diagonalizável .*

Solução: *Considere as matrizes* $U = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ *e* $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Primeiramente, observe que $det(U) = -5 \neq 0$. *Assim, U é invertível. Além disso,*

$$A \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = U \cdot D.$$

Assim, $A \cdot U = U \cdot D$. *Dado que U é invertível, é o mesmo que* $U^{-1}AU = D$. *Portanto, A é diagonalizável.*

2.3 Matriz de Jordan

Definição. *Um bloco de Jordan de ordem n é uma matriz quadrada de dimensão n na forma*

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix},$$

onde λ é um escalar qualquer.

Na Figura 1 abaixo, apresentamos exemplos de blocos de Jordan de dimensão 1, 2 e 3, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} \lambda \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Figura 1 – Exemplos de blocos de Jordan

O Teorema a seguir diz que toda matriz quadrada n-dimensional de escalares (reais ou complexos) é semelhante a uma matriz de blocos de Jordan. Esse resultado será frequentemente utilizado no desenvolvimento da teoria e nas resoluções das aplicações apresentadas nos próximos capítulos.

Teorema 2.4 (**Teorema da Decomposição de Jordan**). *Cada matriz A n-dimensional de escalares é semelhante a uma matriz J na forma*

$$\begin{bmatrix} J_{\nu_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\nu_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\nu_k} \end{bmatrix} \quad com \;\; J_\ell = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

onde cada J_ℓ é um bloco de Jordan de dimensão $n_\ell \times n_\ell$ e $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \dots \nu_k$ corresponde a soma das multiplicidades geométricas dos autovalores distintos de A.

Para ilustrar e entender o Teorema de Jordan, considere uma matriz A de ordem 3 semelhante à matriz de Jordan

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Isto significa que existe uma matriz U, invertível, tal que:

$$A = U \cdot J \cdot U^{-1},$$

ou, equivalente,

$$A \cdot U = U \cdot J.$$

Particionando U por colunas, $U = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{bmatrix}$, da última igualdade resulta que

$$A \cdot \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Comparando as colunas das matrizes resultantes de cada lado da última igualdade, temos que:

$$A\vec{u}_1 = \lambda\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{u}_1 = \vec{u}_2, \tag{2.4}$$

$$A\vec{u}_2 = \lambda\vec{u}_2 + \vec{u}_3 \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{u}_2 = \vec{u}_3, \tag{2.5}$$

$$A\vec{u}_3 = \lambda\vec{u}_3 \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{u}_3 = 0. \tag{2.6}$$

*Portanto, a terceira coluna, $\vec{u}_3$ de U, é um autovetor correspondente ao autovalor λ da matriz A, enquanto as outras duas colunas $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$, aqui denominadas **vetores generalizados** associados ao autovetor $\vec{u}_1$, são determinados pelas equações (2.4) e (2.5).*

3 Sistemas de Recorrências Lineares de Primeira Ordem com Coeficientes Constantes

Este capítulo destina-se a apresentar, de forma autocontida, a teoria das recorrências lineares de primeira ordem e dos sistemas de recorrências lineares de primeira ordem. Usaremos a teoria das recorrências lineares de primeira ordem, juntamente com o Teorema de Jordan para matrizes reais, para analisar os sistemas de recorrências lineares e explicitar suas soluções. A teoria desenvolvida neste capítulo será amplamente utilizada nas aplicações que serão apresentadas nos capítulos seguintes.

3.1 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Definição. *Dada uma sequência $(x_n)_{n\geq 1}$, uma recorrência de ordem K é uma expressão da forma $x_n = f\left(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k}, n\right)$, em que o n-ésimo termo x_n é uma função dos k termos precedentes a ele. Além do mais, dizemos que a recorrência de ordem K é linear quando existem funções $f_1, f_2, \ldots, f_k, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, chamadas de coeficientes da recorrência, tais que*

$$x_n = f_1(n)x_{n-1} + f_2(n)x_{n-2} + \cdots + f_k(n)x_{n-k} + g(n), \quad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Em particular, se $g(n) = 0$, $\forall n$, dizemos que a recorrência é homogênea, do contrário, dizemos que a recorrência é não homogênea.

Definição. *Uma recorrência de primeira ordem é uma relação que expressa x_{n+1} em função de x_n. A mesma é dita linear se, e somente se, a função que relaciona cada termo ao seu anterior é uma função linear. Ademais, uma recorrência linear de primeira ordem pode ser classificada em dois tipos:*

(1) Recorrências Lineares Homogêneas de Primeira Ordem:

$$x_{n+1} = f(n)x_n,\ n \geq 1; \quad \text{com} \ \ f(n) \ \ \text{e} \ \ x_n \ \ \text{não nulos.}$$

Ou seja, o termo x_{n+1} depende de x_n e não há termos independentes.

(2) Recorrências Lineares Não Homogêneas de Primeira Ordem:

$$x_{n+1} = f(n)x_n + g(n),\ n \geq 1; \quad com \quad f(n) \quad e \quad g(n) \quad não\ nulos.$$

Ou seja, o termo x_{n+1} depende linearmente de x_n com acréscimo de um termo independente.

Resolver uma relação ou equação de recorrência consiste em encontrar uma fórmula fechada para a recorrência, ou seja, uma expressão que forneça cada termo da sequência em função apenas de n e não dos termos anteriores. Tal expressão é denominada solução da recorrência.

3.1.1 Resolução de uma Recorrência Linear de Primeira Ordem Homogênea

Resolver uma relação de recorrência linear de primeira ordem homogênea não exige muitas dificuldades. Para exemplificar esse fato, considere $x_1 = C$, e a recorrência $x_{n+1} = f(n)\ x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Temos

$$\begin{aligned}
x_2 &= f(1)x_1 = f(1)C \\
x_3 &= f(2)x_2 = f(2)f(1)C \\
&\vdots \\
x_n &= f(n-1)x_{n-1} = Cf(n-1)f(n-2) \cdot \ldots \cdot f(2)f(1).
\end{aligned}$$

De maneira que

$$x_n = C \prod_{i=1}^{n-1} f(i), \quad \forall\ n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

Em particular, se $f(n) = \lambda$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, então:

$$x_n = C \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \lambda, \quad \forall\ n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$x_n = C \cdot \lambda^{n-1}, \quad \forall\ n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$$

com C e λ constantes.

Exemplo 1. *Resolva a seguinte relação de recorrência: $x_{n+1} = 5x_n$, $x_1 = 2$.*

***Solução**: Observe que, com a notação acima, $f(n) = 5$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ e $C = 2$. Logo,*

$$x_n = C \cdot \lambda^{n-1} = 2 \cdot 5^{n-1}, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

■

Exemplo 2. *Obtenha a solução da relação de recorrência definida por*

$$x_{n+1} = nx_n, \; x_1 = 1.$$

Solução: *Com as notações introduzidas acima, temos* $f(n) = n, \; \forall \; n \in \mathbb{N}$, *e* $C = 1$. *Logo,*

$$x_n = C \prod_{i=1}^{n-1} f(i) = C \cdot \prod_{i=1}^{n-1} i = (n-1)! \quad \forall \; n \in \mathbb{N}$$

■

3.1.2 Resolução de uma Recorrência Linear de Primeira Ordem Não Homogênea

Por outro lado, resolver uma relação de recorrência linear de primeira ordem não homogênea nem sempre é uma tarefa tão simples. No entanto, no caso em que $f(x) = 1, \; \forall \; n \in \mathbb{N}$, *uma soma telescópica na maioria das vezes resolve o problema. Com efeito, considerando a expressão* $x_{n+1} = f(n)x_n + g_n = x_n + g_n, \; \forall \; n \in \mathbb{N}$, *temos*

$$\begin{aligned} x_1 &= C \\ x_2 - x_1 &= g(1) \\ x_3 - x_2 &= g(2) \\ &\vdots \\ x_n - x_{n-1} &= g(n-1) \end{aligned}$$

Somando as equações acima e cancelando os termos (soma telescópica), temos como resultado

$$x_n = C + \sum_{i=1}^{n-1} g(i), \; \forall \; n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Em particular, se $g(n) = \lambda, \; \forall \; n \in \mathbb{N}$, *com* $\lambda \in \mathbb{R}$, *temos*

$$x_n = C + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda = C + (n-1)\lambda, \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

com C *e* λ *constantes.* ■

Exemplo 3. *Resolva a relação de recorrência dada por* $x_{n+1} = x_n + 7,\ x_1 = 3$.
Solução*: Dos dados acima, temos* $g(n) = 7,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ *e* $C = 3$. *Logo,*

$$x_n = 3 + 7(n-1), \quad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

■

Exemplo 4. *Resolva a relação de recorrência dada por* $x_{n+1} = x_n + 3^n,\ x_1 = 5$.

Solução*: Temos,* $g(n) = 3^n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ *e* $C = 5$. *Logo,*

$$x_n = 5 + \sum_{i=1}^{n-1} 3^i = 5+3+3^2+\ldots+3^{n-1} = 3\left(\frac{3^{n-1}-1}{3-1}\right)+5 = \frac{3^n+7}{2}, \quad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Em que a penúltima igualdade é resultado da soma dos termos de uma PG de razão 3. ■

Exemplo 5. *Resolva a recorrência* $x_{n+1} = x_n + (n+1),\ x_1 = 2$.

Solução*: Observe que* $C = 2$ *e* $g(n) = n+1$. *Assim,*

$$x_n = C + \sum_{i=1}^{n-1} g(i) = 2+2+3+\ldots+n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}, \quad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Em que a penúltima igualdade segue da soma dos termos de uma PA de razão 1. ■

No entanto, a princípio nem sempre uma simples soma telescópica é capaz de resolver uma recorrência linear de primeira ordem não homogênea. Um exemplo clássico é quando $x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$, *tal que* $f(n) \not\equiv 1$. *Dessa maneira, apresentamos a seguir um teorema, com o intuito de transformar qualquer recorrência linear de primeira ordem não homogênea em uma outra recorrência escrita na forma* $x_{n+1} = x_n + h(n)$. *A demonstração apresentada foi baseada em (CARVALHO; MORGADO, 2013).*

Teorema 3.1. *Se* a_n *é uma solução não nula da recorrência* $x_{n+1} = f(n)x_n$, *então a substituição* $x_n = a_n y_n$ *transforma a recorrência* $x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$ *em* $y_{n+1} = y_n + g(n)\left[f(n).a_n\right]^{-1}, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Demonstração*:*

A substituição $x_n = a_n y_n$ *transforma*

$$x_{n+1} = f(n)x_n + g(n) \quad \textit{em} \quad a_{n+1}y_{n+1} = f(n)a_n y_n + g(n).$$

No entanto, observa-se que $a_{n+1} = f(n)a_n$, *uma vez que* a_n *é solução não nula de*

$x_{n+1} = f(n)x_n$. *Por conseguinte, a equação transforma-se em*

$$f(n)a_n y_{n+1} = f(n)a_n y_n + g(n).$$

Ou seja,

$$y_{n+1} = y_n + g(n)\left[f(n).a_n\right]^{-1}.$$

Exemplo 6. *Obtenha a solução da seguinte relação de recorrências:* $x_{n+1} = 3x_n + 2,\ x_1 = 3$.

Solução:

Observe que $a_n = C \cdot 3^{n-1}$ *é uma solução não nula de* $x_{n+1} = 3x_n$. *Agora, considere a substituição* $x_n = a_n y_n$. *De maneira evidente, segue que* $y_1 = \frac{3}{C}$. *Além disso,*

$$\begin{aligned} x_{n+1} = 3x_n + 2 &\Leftrightarrow a_n y_{n+1} = 3a_n y_n + 2 \\ &\Leftrightarrow C \cdot 3^n y_{n+1} = 3C \cdot 3^{n-1} + 2 \\ &\Leftrightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{2}{C \cdot 3^n} \end{aligned}$$

Procedendo como anteriormente, por meio de uma simples soma telescópica e usando o termo geral de uma PG de razão $\frac{1}{3}$, *obtemos a solução*

$$y_n = \frac{3}{C} + \frac{2}{C.3} + \frac{2}{C.3^2} + \ldots + \frac{2}{C.3^{n-1}} = \frac{3}{C} + \frac{1}{C}\left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right).$$

Retornando a recorrência de origem, temos que:

$$x_n = a_n \cdot y_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 1, \quad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

■

Exemplo 7. *Resolva a recorrência* $x_{n+1} = 7x_n + 7^n,\ x_1 = 2$.

Solução: *Primeiramente, note que* $a_n = C \cdot 7^{n-1}$ *é uma solução não nula de* $x_{n+1} = 7x_n$. *Fazendo a substituição* $x_n = a_n y_n$, *sucede-se que*

$$\begin{aligned} x_{n+1} = 7x_n + 2^n &\Leftrightarrow a_{n+1} y_{n+1} = 7a_n y_n + 3^n \\ &\Leftrightarrow C \cdot 7^n y_{n+1} = 7 \cdot 7^{n-1} y_n + 7^n \\ &\Leftrightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{1}{C}. \end{aligned}$$

De forma explícita, $y_1 = \frac{2}{C}$, *e*

$$y_n = \frac{2}{C} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{C} \Leftrightarrow y_n = (n+1)\frac{1}{C}.$$

Por conseguinte, regressando à sequência de origem, conclui-se que

$$x_n = (n+1)\,7^{n-1}, \quad \forall\, n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

■

3.2 Introdução a Sistemas de Recorrências Lineares de primeira ordem com coeficientes constantes

Considere as sequências $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_n^\ell)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números reais. No que segue, por simplicidade na notação, vamos adotar a seguinte convenção:*

$$x_k(n) := x_n^k$$

para representar o n-ésimo termo da sequência x^k.

Um sistema de relações de recorrências lineares de $1^{\underline{a}}$ *ordem com coeficientes constantes, nas variáveis* $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_\ell(n)$ *é qualquer sistema de relações de recorrências que pode ser escrito na forma abaixo:*

$$\begin{cases} x_1(n+1) & = & a_{1,1}x_1(n) & + & a_{1,2}x_2(n) & + & \ldots & + & a_{1,\ell}x_\ell(n) & + & g_1(n) \\ x_2(n+1) & = & a_{2,1}x_1(n) & + & a_{2,2}x_2(n) & + & \ldots & + & a_{2,\ell}x_\ell(n) & + & g_2(n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_\ell(n+1) & = & a_{\ell,1}x_1(n) & + & a_{\ell,2}x_2(n) & + & \ldots & + & a_{\ell,\ell}x_\ell(n) & + & g_\ell(n) \end{cases}$$

onde $g_k(n) := g_n^k$ *é o n-ésimo termo da sequência* $(g^k)_{k\in\mathbb{N}}$, $k = 1, 2, \ldots, \ell$ *e* a_{ij} *são escalares.*

Definindo a matriz $A = [a_{ij}]_{\ell\times n}$ *de escalares* a_{ij} *e*

$$X_n = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_\ell(n) \end{bmatrix}$$

como sendo o vetor $\ell-$ *dimensional cuja k-ésima entrada é o n-ésimo termo da sequência* $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, *podemos representar o sistema acima na forma matricial equivalente, a saber:*

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ \vdots \\ x_\ell(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,\ell} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,\ell} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\ell,1} & a_{\ell,2} & \ldots & a_{\ell,\ell} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_\ell(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(n) \\ g_2(n) \\ \vdots \\ g_\ell(n) \end{bmatrix}$$

Ou simplesmente

$$X_{n+1} = A \cdot X_n + G_n. \tag{3.1}$$

Quando G_n é a recorrência vetorial identicamente nula, dizemos que o sistema (3.1) é um sistema de recorrência linear com coeficientes constantes de $1^{\underline{a}}$ ordem homogêneo dado por

$$X_{n+1} = A \cdot X_n. \tag{3.2}$$

Conhecidos os valores iniciais de $x_1(1), x_2(1), \ldots, x_n(1)$, é fácil ver que

$$X_n = A^{n-1} \cdot X_1. \tag{3.3}$$

Ou, se considerarmos a contagem a partir de $n = 0$ e conhecidos os valores iniciais de $x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)$, é fácil ver que

$$X_n = A^n \cdot X_0. \tag{3.4}$$

é a solução geral do sistema de recorrências lineares homogêneas. Portanto, encontrar uma solução de (3.2) é equivalente a obter a n-ésima potência da matriz A e multiplicar pelo vetor inicial X_0.

Para obter A^n, uma possibilidade é considerar a decomposição de Jordan da matriz A, que expressa A como um produto de matrizes na forma

$$U \cdot J \cdot U^{-1},$$

em que U é uma matriz invertível de ordem n e J é a matriz de Jordan similar à matriz A. Com isto, a solução passa a ser dada por:

$$X_n = U \cdot J^n \cdot U^{-1} \cdot X_0.$$

Uma desvantagem dessa abordagem é a necessidade de obter a expressão geral J^n, situação em que muitas vezes precisamos apelar por generalizações e o uso do Princípio de Indução para justificar a validade da expressão de J^n.

Distintamente do caso anterior, aplicamos a decomposição de Jordan no sistema (3.2) e utilizamos os resultados das recorrências lineares de primeira ordem para obter as expressões gerais da solução. Ademais, apesar de neste trabalho darmos ênfase aos sistemas de relações de recorrências lineares homogêneos de primeira ordem com coeficientes constantes, essa mesma abordagem também pode ser utilizada para obter a solução de um sistema de recorrências lineares de primeira ordem não homogêneo com coeficientes constantes. Com efeito, considere a seguinte mudança de variável $X_n = U \cdot Y_n$. Observe que, sendo U invertível,

$$Y_n = U^{-1} X_n.$$

Dessa forma, obtemos:

$$\begin{aligned} X_{n+1} = A \cdot X_n + G_n \quad &\Leftrightarrow \quad X_{n+1} = [U \cdot J \cdot U^{-1}] \cdot X_n + G_n \\ &\Leftrightarrow \quad U^{-1}X_{n+1} = U^{-1}[U \cdot J \cdot U^{-1}] \cdot X_n + U^{-1}G_n \\ &\Leftrightarrow \quad (U^{-1}X_{n+1}) = J \cdot [U^{-1} \cdot X_n] + U^{-1}G_n \\ &\Leftrightarrow \quad Y_{n+1} = J \cdot Y_n + U^{-1}G_n. \end{aligned}$$

Entretanto, o último sistema pode ser resolvido recursivamente com as técnicas usuais para obtenção de soluções de recorrências lineares de primeira ordem.

3.3 Sistemas de Recorrências Lineares Homogêneos de Primeira Ordem com Coeficientes Constantes

Nesta seção estudaremos com mais detalhes os sistemas de recorrências lineares de $1^{\underline{a}}$ *ordem homogêneo com coeficientes constantes para duas e três coordenadas. Para resolver o sistema (3.2) utilizaremos o Teorema da Decomposição de Jordan da matriz* A*, mencionado no capítulo anterior e reproduzido abaixo.*

Teorema 3.2 (**Teorema da Decomposição de Jordan**). *Cada matriz* A *n-dimensional de escalares é similar a uma matriz* J *na forma*

$$\begin{bmatrix} J_{\nu_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\nu_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\nu_k} \end{bmatrix} \quad com \quad J_\ell = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

na qual cada J_ℓ *é um bloco de Jordan de dimensão* $n_\ell \times n_\ell$ *e* $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \dots \nu_k$ *correspondente à soma das multiplicidades geométricas dos autovalores distintos de* A*.*

Ou seja, escreveremos A *na forma* $U \cdot J \cdot U^{-1}$ *em que* U *é uma matriz invertível de ordem* n *e* J *é a matriz de Jordan similar à matriz* A*. Em seguida, definimos a seguinte mudança de variável* $Y_n = U^{-1}X_n$*. Observe que, sendo* U *invertível*

$$Y_n = U^{-1}X_n \Leftrightarrow X_n = U \cdot Y_n.$$

Utilizando a decomposição de Jordan da matriz A *no sistema e a respectiva mudança de variável, obtemos:*

$$X_{n+1} = A \cdot X_n \Leftrightarrow X_{n+1} = [U \cdot J \cdot U^{-1}] \cdot X_n \Leftrightarrow (U^{-1}X_{n+1}) = J \cdot [U^{-1} \cdot X_n] \Leftrightarrow Y_{n+1} = J \cdot Y_n.$$

Logo, a solução X_n *do sistema se obtém em três passos:*

Passo 1. *Escrever A na forma $U \cdot J \cdot U^{-1}$, onde J é a matriz de Jordan semelhante à matriz A.*

Passo 2. *Resolver o sistema (considere as constantes que aparecem aqui)*

$$Y_{n+1} = J \cdot Y_n. \tag{3.5}$$

Passo 3. *Obter a solução X_n dada por*

$$X_n = U \cdot Y_n.$$

3.3.1 Sistemas de Recorrências Lineares de Primeira Ordem Homogêneo bidimensionais

Nesta seção consideramos A como sendo uma matriz de ordem 2. Segue que A é similar a uma das duas matrizes de Jordan abaixo:

$$(a) \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \quad ou \quad (b) \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

podendo ocorrer $\alpha = \beta$. Da teoria de Álgebra Linear, sabe-se que α e β são os autovalores da matriz A. No primeiro caso (a), A é diagonalizável, possuindo dois autovetores linearmente independentes, enquanto que no segundo caso (b), A possui um único autovetor linearmente independente. Vamos dividir a análise em dois casos:

Caso (a): Primeiramente, vamos considerar o caso em que a matriz dos coeficientes do sistema é diagonalizável. Neste caso, o sistema $Y_{n+1} = J \cdot Y_n$ pode ser escrito como:

$$\begin{cases} y_1(n+1) &= \alpha y_1(n) \\ y_2(n+1) &= \beta y_2(n) \end{cases}.$$

Observemos que ambas as recorrências que formam o sistema são homogêneas, sendo assim, torna-se simples resolvê-lo. Da primeira equação, temos:

$$\begin{aligned} y_1(1) &= c_1 \\ y_1(2) &= \alpha y_1(1) \\ y_1(3) &= \alpha y_1(2) \\ &\vdots \\ y_1(n) &= \alpha y_1(n-1). \end{aligned}$$

Multiplicando ambas as expressões, segue que:

$$y_1(n) = c_1\alpha^{n-1} \quad \textit{com} \quad c_1 \quad \textit{constante arbitrária e } n \in \mathbb{N}.$$

De maneira análoga, temos que:

$$y_2(n) = c_2\beta^{n-1} \quad \textit{com} \quad c_2 \quad \textit{constante} \quad \textit{e} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Escrevendo a matriz $U = [\vec{u}_1 \ \ \vec{u}_2]$, *particionada por colunas, a solução* X_n *é dada por:*

$$X_n \quad = \quad U \cdot Y_n = [\vec{u}_1 \ \ \vec{u}_2] \cdot \begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{bmatrix} = \vec{u}_1 y_1(n) + \vec{u}_2 y_2(n) = c_1\vec{u}_1\alpha^{n-1} + c_2\vec{u}_2\beta^{n-1}$$

em que c_1 *e* c_2 *são escalares e as colunas de* U *são tais que*

$$(A - \alpha I).\vec{u}_1 = 0 \quad \textit{e} \quad (A - \beta I).\vec{u}_2 = 0.$$

Exemplo. *Resolva o sistema de relações de recorrência:*

$$\begin{cases} x_{n+1} &=& 3x_n &+& 2y_n \\ y_{n+1} &=& x_n &+& 2y_n \end{cases} \qquad n \geq 0, n \in \mathbb{N}, \quad \textit{com } x_0 = -1 \textit{ e } y_0 = 2 \ .$$

Solução:

Considere o sistema $X_{n+1} = A.X_n$, *com*

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}, \ X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad \textit{e} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

onde A *é a matriz dos coeficientes.*

Segue que o polinômio característico associado à matriz dos coeficientes do sistema é

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4,$$

com raízes $\lambda_1 = 4$ *e* $\lambda_2 = 1$. *Um autovetor* $\vec{u}_1$ *associado ao autovalor* $\lambda_1 = 4$ *é tal que:*

$$(A - \lambda_1 I).\vec{u_1} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x &+& 2y &=& 0 \\ x &-& 2y &=& 0 \end{cases}$$

sendo assim,

$$x = 2y \quad e \quad \vec{u_1} = y.\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad com \quad y \neq 0.$$

De maneira análoga, um autovetor $\vec{u}_2$ *associado ao autovalor* $\lambda_2 = 1$*, satisfaz*

$$(A - \lambda_2 I).\vec{u_2} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x & + & 2y & = & 0 \\ x & + & y & = & 0 \end{cases}$$

consequentemente,

$$x = -y \quad e \quad \vec{u_2} = y.\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \; com \; y \neq 0.$$

Observa-se que a multiplicidade geométrica para $\lambda_1 = 4$ *e* λ_2*=1 é igual a 1. Sendo assim, a matriz J, similar à matriz A dos coeficientes, assume a forma*

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad com \quad \begin{cases} (A - \lambda_1 I)\vec{u_1} & = & 0 \\ (A - \lambda_2 I)\vec{u_2} & = & 0 \end{cases}.$$

À luz da teoria proposta, segue que a solução para o sistema tem o seguinte formato:

$$X_n = \vec{u}_1 y_1(n) + \vec{u}_2 y_2(n) = c_1 \vec{u}_1 \lambda_1^{n-1} + c_2 \vec{u}_2 \lambda_2^{n-1},$$

do que se conclui que

$$X_n = c_1.\vec{u_1}.4^{n-1} + c_2.\vec{u_2} \Leftrightarrow X_n = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.4^{n-1} + c_2.\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

com c_1 *e* c_2 *constantes arbitrárias. Assim, temos as sequências*

$$x_n = 2c_1 4^{n-1} - c_2 \quad e \quad y_n = c_1 4^{n-1} + c_2,$$

em que $x_0 = -1$ *e* $y_0 = 2$*, podemos escrever o seguinte sistema linear:*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}c_1 & - & c_2 & = & -1 \\ \frac{1}{4}c_1 & + & c_2 & = & 2 \end{cases},$$

onde, um cálculo simples nos mostra que $c_1 = \frac{4}{3}$ *e* $c_2 = \frac{5}{3}$*, portanto:*

$$x_n = \frac{2}{3}4^n - \frac{5}{3} \quad e \quad y_n = \frac{1}{3}4^n + \frac{5}{3}.$$

■

Caso (b): Considere, agora, o caso (b) em que a matriz A é similar à matriz

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix},$$

com $\alpha \neq 0$ (o caso $\alpha = 0$ resulta $y_1(n) = y_2(n) \equiv 0$). O sistema $Y_{n+1} = J \cdot Y_n$ pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} y_1(n+1) \\ y_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(n+1) & = & \alpha y_1(n) \\ y_2(n+1) & = & y_1(n) + \alpha y_2(n) \end{cases}$$

Observamos que a primeira recorrência é homogênea, portanto, sua solução é dada por:

$$y_1(n) = c_1\alpha^{n-1} \text{ com } c_1 \text{ constante e } n \in \mathbb{N}.$$

No entanto, observamos que a segunda equação $y_2(n+1) = y_1(n) + \alpha y_2(n)$ é não homogênea, sendo assim, podemos fazer uso do ***Teorema (2.1)****. Seja $a_n = c_1\alpha^{n-1}$ uma solução não nula da recorrência homogênea $y_2(n+1) = \alpha y_2(n)$. Em seguida, façamos a seguinte substituição, $y_2(n) = a_n z_n$, que resulta em:*

$$\begin{aligned} y_2(n+1) = y_1(n) + \alpha y_2(n) &\Leftrightarrow a_{n+1}z_{n+1} = y_1(n) + \alpha a_n z_n \\ &\Leftrightarrow z_{n+1} = y_1(n)[a_{n+1}]^{-1} + \alpha z_n a_n [a_{n+1}]^{-1} \\ &\Leftrightarrow z_{n+1} = \frac{c_1\alpha^{n-1}}{c_1\alpha^n} + z_n\frac{c_1\alpha^n}{c_1\alpha^n} \\ &\Leftrightarrow z_{n+1} = \frac{1}{\alpha} + z_n. \end{aligned}$$

Visto que $y_2(1) = c_2$, temos $z_1 = \frac{c_2}{c_1}$, podemos escrever $z_{n+1} = \frac{1}{\alpha} + z_n$, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{c_2}{c_1} \\ z_2 &= \frac{1}{\alpha} + z_2 \\ z_3 &= \frac{1}{\alpha} + z_3 \\ &\vdots \\ z_n &= \frac{1}{\alpha} + z_{n-1}, \end{aligned}$$

na qual, aplicando uma soma telescópica resulta em:

$$z_n = \frac{c_2}{c_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow z_n = \frac{c_2}{c_1} + \frac{1}{\alpha}(n-1).$$

Retornando à variável de origem, temos

$$\begin{aligned} y_2(n) = a_n z_n \Leftrightarrow y_2(n) &= \frac{c_2}{c_1} c_1 \alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha}(n-1) c_1 \alpha^{n-1} \\ \Leftrightarrow y_2(n) &= c_2 \alpha^{n-1} + c_1 (n-1) \alpha^{n-2}. \end{aligned}$$

Uma vez resolvido as recorrências lineares de primeira ordem, segue a solução

$$X_n \;=\; u_1 y_1 + u_2 y_2 = c_1 \left(\vec{u}_1 \alpha^{n-1} + \vec{u}_2 (n-1) \alpha^{n-2} \right) + c_2 \vec{u}_2 \alpha^{n-2}$$

na qual, do Teorema da Decomposição de Jordan, as colunas de U são tais que

$$(A - \alpha I).\vec{u}_1 = \vec{u}_2 \quad e \quad (A - \alpha I).\vec{u}_2 = 0.$$

Exemplo. *Resolva o sistema de relações de recorrências abaixo:*

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = -2x_n + 5y_n \end{cases} \qquad n \geq 0, n \in \mathbb{N}, \;\; com \;\; x_0 = 1 \;\; e \;\; y_0 = 2.$$

Solução:

Podemos representar o sistema acima na sua forma matricial $X_{n+1} = A.X_n$, de tal forma que:

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}, X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad e \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix},$$

onde A é a matriz dos coeficientes.

O polinômio característico associado à matriz dos coeficientes do sistema é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9,$$

cujas raízes são $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Portanto, $\lambda = 3$ é o único autovalor de A, cujo autovetor associado $\vec{u}_2$ é tal que

$$(A - 3I).\vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = . \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$\vec{u}_2 = y.\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad com \quad y \neq 0.$$

Observe que, sendo a multiplicidade geométrica para $\lambda = 3$ igual a 1, a matriz J similar à matriz A assume a forma:

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad com \quad \begin{cases} (A-3I).\vec{u}_1 & = & \vec{u}_2 \\ (A-3I).\vec{u}_2 & = & 0 \end{cases},$$

em que, $\vec{u}_1$ é um vetor generalizado, de maneira que:

$$(A-3I).\vec{u}_1 = \vec{u}_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y & = & 1 \\ -2x+2y & = & 1 \end{cases},$$

sendo assim,

$$y = \frac{1}{2} + x, \quad com \quad x \in \mathbb{R} \quad e \quad \vec{u_1} = \begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{2}+x \end{bmatrix}; \quad tomando\ x = 0,\ então \quad \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Isto posto, segue que a solução para o sistema de relações de recorrências tem o aspecto subsequente:

$$X_n = \vec{u}_1.y_1(n) + \vec{u}_2.y_2(n) = c_1.[\vec{u}_1.\alpha^{n-1} + \vec{u}_2.(n-1)\alpha^{n-2}] + c_2.\vec{u}_2.\alpha^{n-1},$$

que implica,

$$X_n = c_1[\vec{u}_1.3^{n-1} + \vec{u}_2(n-1)3^{n-2}] + c_2\vec{u}_2 3^{n-1}$$

$$= c_1\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}3^{n-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(n-1)3^{n-2}\right) + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}3^{n-1},$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias. Com isso, temos

$$x_n = c_1 \cdot (n-1)3^{n-2} + c_2 \cdot 3^{n-1} \quad e \quad y_n = \frac{1}{2}c_1 3^{n-1} + c_1 \cdot (n-1).3^{n-2} + c_2 \cdot 3^{n-1}.$$

Uma vez que $x_0 = 1$ e $y_0 = 2$, as constantes c_1 e c_2 são soluções do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} -\frac{1}{9}c_1 & + & \frac{1}{3} & = & 1 \\ \frac{1}{18}c_1 & + & \frac{1}{3}c_2 & = & 2 \end{cases}.$$

Nesse sentido, $c_1 = 6$ e $c_2 = 5$. Por conseguinte,

$$x_n = (2n+3)3^{n-1} \quad e \quad y_n = 2(n+3)3^{n-1}.$$

■

3.3.2 Sistemas de Recorrências Lineares de Primeira Ordem Homogêneo tridimensionais

Nesta seção apresentaremos as soluções do sistema de recorrências lineares de primeira ordem homogêneas quando A é uma matriz de ordem 3. Segue que A é similar a uma das matrizes de Jordan abaixo:

$$(a)\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad ou \quad (b)\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & \beta \end{bmatrix} \quad ou \quad (c)\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}$$

Pode ocorrer que $\alpha = \beta = \gamma$, com α, β e $\gamma \in \mathbb{R}$. Da teoria de Álgebra Linear, sabe-se que α, β e γ são os autovalores da matriz A. No caso (a), A é diagonalizável, possuindo três autovetores linearmente independentes, enquanto que, no caso (b), A possui apenas dois autovetores linearmente independentes. Já no último caso (c), a matriz A possui um único autovetor linearmente independente. No que segue, utilizaremos a notação $A \sim J$ para representar que J é a matriz de Jordan similar à matriz A. Vamos dividir a análise em três casos:

Caso (a): $A \sim J = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$. *O sistema $Y_{n+1} = J \cdot Y_n$ pode ser escrito como:*

$$\begin{cases} y_1(n+1) = \alpha \cdot y_1(n) \\ y_2(n+1) = \beta \cdot y_2(n) \\ y_3(n+1) = \gamma \cdot y_3(n) \end{cases}$$

Resolvendo recursivamente cada recorrência linear de primeira ordem de maneira análoga às técnicas já conhecidas, obtemos:

$$y_1(n) = c_1\alpha^{n-1}, \quad y_2(n) = c_2\beta^{n-1} \quad e \quad y_3(n) = c_3\gamma^{n-1}.$$

Escrevendo a matriz $U = [\vec{u}_1 \ \ \vec{u}_2 \ \ \vec{u}_3]$, particionada por colunas, a solução X_n pode ser expressa como:

$$X_n = c_1\vec{u}_1\alpha^{n-1} + c_2\vec{u}_2\beta^{n-1} + c_3\vec{u}_2\gamma^{n-1},$$

com c_1, c_2 e c_3 constantes e as colunas $\vec{u}_i, i = 1, 2, 3$ de U satisfazendo

$$(A - \alpha I)\vec{u}_1 = 0, \quad (A - \beta I)\vec{u}_2 = 0 \quad e \quad (A - \gamma I)\vec{u}_3 = 0.$$

Exemplo: *Resolva o sistema de relações de recorrências:*

$$\begin{cases} x_{n+1} &=& x_n &-& y_n &+& 4z_n \\ y_{n+1} &=& 3x_n &+& 2y_n &-& z_n \\ z_{n-1} &=& 2x_n &+& y_n &-& z_n \end{cases} \qquad n \geq 0, n \in \mathbb{N}, \textit{ com } x_0 = -2, y_0 = 1 \textit{ e } z_0 = 4.$$

Solução:

Seja o sistema $X_{n+1} = A.X_n$*, de tal modo que:*

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n-1} \end{bmatrix}, X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} \quad e \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

em que A *é a matriz dos coeficientes.*

Segue que o polinômio característico associado à matriz dos coeficientes do sistema é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6,$$

com raízes $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ *e* $\lambda_3 = 3$.

O autovetor $\vec{u}_1$ *associado ao autovalor* $\lambda_1 = 1$*, de tal modo que:*

$$(A - \lambda_1 I)\vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} & - & y &+& 4z &=& 0 \\ 3x &+& y &-& z &=& 0 \\ 2x &+& y &-& 2z &=& 0 \end{cases}$$

sendo assim,

$$x = -z, \; y = 4z \quad e \quad \vec{u}_1 = z. \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad com \quad z \neq 0.$$

De maneira análoga, temos

$$(A - \lambda_2 I)\vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x &-& y &+& 4z &=& 0 \\ 3x &+& 4y &-& z &=& 0 \\ 2x &+& y &+& z &=& 0 \end{cases},$$

$$(A - \lambda_3 I)\vec{u}_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x &-& y &+& 4z &=& 0 \\ 3x &-& y &-& z &=& 0 \\ 2x &+& y &-& 4z &=& 0 \end{cases}$$

em que

$$\vec{u}_2 = z \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad com \quad z \neq 0 \quad e \quad \vec{u}_3 = z \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad com \quad z \neq 0,$$

são os autovetores de A *associados respectivamente aos autovalores* $\lambda_2 = -2$ *e* $\lambda_3 = 3$.

Observe que a multiplicidade geométrica para $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ *e* $\lambda_3 = 2$, *é igual a* 1. *Logo, a matriz* J *similar à matriz* A *assume a forma:*

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad com \quad \begin{cases} (A - \lambda_1 I)\vec{u}_1 & = & 0 \\ (A - \lambda_2 I)\vec{u}_2 & = & 0 \\ (A - \lambda_3 I)\vec{u}_3 & = & 0 \end{cases}$$

Assim sendo, a solução para o sistema de recorrências tem a seguinte particularidade:

$$X_n = u_1.y_1(n) + u_2.y_2(n) + u_3.y_3(n) = c_1.u_1.\lambda_1^{n-1} + c_2.u_2.\lambda_2^{n-1} + c_3.u_3.\lambda_3^{n-1},$$

do que se segue

$$\begin{aligned} X_n &= c_1\vec{u}_1\lambda_1^{n-1} + c_2\vec{u}_2\lambda_2^{n-1} + c_3\vec{u}_3\lambda_3^{n-1} \\ &= c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} (1)^{n-1} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (-2)^{n-1} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} 3^{n-1}, \end{aligned}$$

com c_1, c_2 *e* c_3 *constantes arbitrárias. Desse modo, temos que:*

$$x_n = -c_1(1)^{n-1} - c_2(-2)^{n-1} + c_3 3^{n-1},$$

$$y_n = 4c_1(1)^{n-1} + c_2(-2)^{n-1} + 2c_3 3^{n-1},$$

$$z_n = c_1(1)^{n-1} + c_2(-2)^{n-1} + c_3 3^{n-1}.$$

Como $x_0 = -2$, $y_0 = 1$ *e* $z_0 = 4$, *é de fácil percepção que, para tais valores, as sequências formam o seguinte sistema linear:*

$$\begin{cases} -c_1 & + & \frac{1}{2}c_2 & + & \frac{1}{3}c_3 & = & -2 \\ 4c_1 & - & \frac{1}{2}c_2 & + & \frac{2}{3}c_3 & = & 1 \\ c_1 & - & \frac{1}{2}c_2 & + & \frac{1}{3}c_3 & = & 4 \end{cases}$$

em que, após encontrada a solução $c_1 = -\frac{4}{3}$, $c_2 = -\frac{26}{3}$ *e* $c_3 = 3$. *Por conseguinte:*

$$x_n = \frac{26}{3}(-2)^{n+1} + 3^n + \frac{4}{3},$$

$$y_n = -\frac{26}{3}(-2)^{n-1} + 2.3^n - \frac{16}{3},$$

$$z_n = -\frac{26}{3}(-2)^{n-1} + 3^n - \frac{4}{3}.$$

■

Caso (b): $A \sim J = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & \beta \end{bmatrix}$. *O sistema* $Y_{n+1} = J \cdot Y_n$ *pode ser escrito como:*

$$\begin{cases} y_1(n+1) &=& \alpha \cdot y_1(n) \\ y_2(n+1) &=& \beta \cdot y_2(n) \\ y_3(n+1) &=& y_2 + \beta \cdot y_3(n). \end{cases}$$

Observamos que a primeira e a segunda recorrência são homogêneas, portanto, suas soluções são, respectivamente:

$y_1(n) = c_1 \cdot \alpha^{n-1}$ *e* $y_2(n) = c_2 \cdot \beta^{n-1}$ *com* c_1, c_2 *constantes arbitrárias e* $n \in \mathbb{N}$.

Todavia, observamos que a terceira equação, ou seja, $y_3(n+1) = y_2(n) + \beta \cdot y_3(n)$ *é não homogênea. Sendo assim, façamos uso do* ***Teorema (2.1)***. *Por conseguinte, seja* $a_n = c_3 \cdot \beta^{n-1}$ *uma solução não nula da recorrência homogênea* $y_3(n+1) = \beta \cdot y_3(n)$. *Em seguida, façamos a substituição* $y_3(n) = a_n z_n$, *que resulta em*

$$\begin{aligned} y_3(n+1) = y_2(n) + \beta y_3(n) &\Leftrightarrow a_{n+1}z_{n+1} = y_2(n) + \gamma a_n z_n \\ &\Leftrightarrow z_{n+1} = y_2(n)[a_{n+1}]^{-1} + \beta z_n a_n [a_{n+1}]^{-1} \\ &\Leftrightarrow z_{n+1} = \frac{c_2\beta^{n-1}}{c_3\beta^n} + z_n \frac{c_3\beta^n}{c_3\beta^n} \\ &\Leftrightarrow z_{n+1} = \frac{c_2}{c_3\beta} + z_n. \end{aligned}$$

Considerando $y_3(1) = c_3$*, de maneira notória temos que* $z_1 = 1$*. Diante disso, podemos escrever* $z_{n+1} = \frac{c_2}{c_3\beta} + z_n$*, da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \\ z_2 &= \frac{c_2}{c_3\beta} + z_1 \\ z_3 &= \frac{c_2}{c_3\beta} + z_2 \\ &\vdots \\ z_n &= \frac{c_2}{c_3\beta} + z_{n-1}, \end{aligned}$$

onde aplicando uma soma telescópica, obtém-se o resultado:

$$z_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_2}{c_3\beta} \Leftrightarrow z_n = 1 + \frac{c_2}{c_3\beta}(n-1).$$

Retornando à variável de origem, temos

$$\begin{aligned} y_3(n) = a_n z_n \Leftrightarrow y_3(n) &= c_3\beta^{n-1} + \frac{c_2}{c_3\beta}(n-1)c_3\beta^{n-1} \\ \Leftrightarrow y_3(n) &= c_3\beta^{n-1} + c_2(n-1)\beta^{n-2}. \end{aligned}$$

À vista disso, tendo resolvido recursivamente cada recorrência linear de primeira ordem e escrevendo a matriz U *particionada por colunas* $[\vec{u}_1 \ \ \vec{u}_2 \ \ \vec{u}_3]$ *temos*

$$y_1(n) = c_1\alpha^{n-1}, \quad y_2(n) = c_2\beta^{n-1} \quad e \quad y_3(n) = c_3\beta^{n-1} + c_2(n-1)\beta^{n-2},$$

que implica

$$X_n = c_1\vec{u}_1\alpha^{n-1} + c_2\left(\vec{u}_2\beta^{n-1} + \vec{u}_3(n-1)\beta^{n-2}\right) + c_3\vec{u}_3\beta^{n-1},$$

em aue c_1, c_2 *e* c_3 *são escalares e as colunas de* U *satisfazem:*

$$(A - \alpha I)\vec{u}_1 = 0, \quad (A - \beta I)\vec{u}_2 = \vec{u}_3 \quad e \quad (A - \beta I)\vec{u}_3 = 0.$$

Exemplo: *Resolva o sistema de relações de recorrências dado por:*

$$\begin{cases} x_{n+1} &= & x_n & + & y_n & + & zn \\ y_{n+1} &= & 2x_n & + & y_n & - & z_n \\ z_{n-1} &= & & - & y_n & + & z_n \end{cases} \qquad n \geq 0, n \in \mathbb{N}, \quad com \quad x_0 = 1, \ y_0 = 2 \ \ e \ \ z_0 = 3.$$

Solução:

Seja o sistema $X_{n+1} = A.X_n$, *de sorte que:*

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n-1} \end{bmatrix}, X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} \quad e \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

em que A *é a matriz dos coeficientes.*

Segue que o polinômio característico associado à matriz dos coeficientes do sistema é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4,$$

do qual, as raízes são $\lambda_1 = -1$ *e* $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

O autovetor $\vec{u}_1$ *associado ao autovalor* $\lambda_1 = -1$ *é tal que*

$$(A - \lambda_1 I)\vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ \quad\;\; - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$x = -\frac{3}{2}z, \; y = 2z \quad e \quad \vec{u}_1 = z. \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \; com \; z \neq 0.$$

De maneira análoga, para $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, *segue que:*

$$(A - 2 \cdot I)\vec{u}_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ \quad\;\; - y - z = 0 \end{cases}$$

Logo, do sistema mencionado, obtemos:

$$x = 0, y = -z \quad e \quad \vec{u}_3 = z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad com \quad z \neq 0.$$

Observe que a multiplicidade geométrica para $\lambda_1 = -1$ *é igual a* 1, *assim como para* $\lambda = 2$ *também é* 1, *logo a matriz* J *similar à matriz* A *assume a forma:*

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \; ; \; com \; \begin{cases} (A-\lambda_1 I)\vec{u}_1 & = & 0 \\ (A-\lambda_2 I)\vec{u}_2 & = & u_3 \\ (A-\lambda_3 I)\vec{u}_3 & = & 0 \end{cases} ,$$

em que $\vec{u}_1$ *e* $\vec{u}_3$ *são autovetores e* $\vec{u}_2$ *é um vetor generalizado, de maneira que:*

$$(A-\lambda_2 I).\vec{u}_2 = \vec{u}_3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & - & z & = & -1 \\ & - & y & - & z & = & 1 \end{cases}$$

do qual segue que

$$y = 1 - z, \;\; x = -1, \;\; com \;\; z \in \mathbb{R} \;\; e \;\; \vec{u_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1-z \\ z \end{bmatrix}.$$

Em particular, tomando-se $z = 0$, *então* $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

À vista disso, segue que a solução para o sistema de recorrências assume o seguinte formato:

$$\begin{aligned} X_n &= \vec{u}_1.y_1(n) + \vec{u}_2.y_2(n) + \vec{u}_3.y_3(n) \Leftrightarrow \\ &= c_1.\vec{u}_1.\lambda_1^{n-1} + u_2.c_2.\lambda_2^{n-1} + c_3.\vec{u}_3.\lambda_2^{n-1} + c_2.\vec{u}_3.(n-1).\lambda_2^{n-2}, \end{aligned}$$

do qual segue que:

$$\begin{aligned} X_n &= c_1.\vec{u}_1.\lambda_1^{n-1} + c_2\left(\vec{u}_2.\lambda_2^{n-1} + \vec{u}_3.(n-1)\lambda_2^{n-2}\right) + c_3.\vec{u}_3.\lambda_2^{n-1} \Leftrightarrow \\ &= c_1 \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} (-1)^{n-1} + c_2 \left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} 2^{n-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} (n-1)2^{n-2} \right) + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Com $c_1,\ c_2$ *e* c_3 *constantes arbitrárias. Logo:*

$$x_n = c_1\frac{3}{2}(-1)^n - c_2 2^{n-1},$$

$$y_n = 2c_1(-1)^{n-1} + c_2\left(-2^{n-1} - (n-1).2^{n-2}\right) - c_3 2^{n-1},$$

$$z_n = c_1(-1)^{n-1} + c_2(n-1)2^{n-2} + c_3 2^{n-1}.$$

Como $x_0 = 1,\ y_0 = 2$ *e* $z_0 = 3$*, podemos conceber o sistema linear*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \frac{3}{2}c_1 & - & \frac{1}{2}c_2 & & & = & 1 \\ -2c_1 & - & \frac{1}{4}c_2 & - & \frac{1}{2}c_3 & = & 2 \\ -c_1 & - & \frac{1}{4}c_2 & + & \frac{1}{2}c_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

o qual, uma vez resolvido, temos que $c_1 = -\frac{8}{9},\ \ c_2 = -\frac{14}{3}$ *e* $c_3 = \frac{17}{9}$*. Assim sendo, as sequências resultam em:*

$$x_n = \frac{4}{3}(-1)^{n+1} + \frac{14}{3}2^{n-1},$$

$$y_n = \frac{16}{9}(-1)^n + (\frac{21n+4}{9})2^{n-1},$$

$$z_n = \frac{8}{9}(-1)^n + (\frac{38-21n}{9})2^{n-1}.$$

■

Caso (c): $A \sim J = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}$. *O sistema* $Y_{n+1} = J \cdot Y_n$ *pode ser escrito como:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1(n+1) & = & \gamma y_1(n) \\ y_2(n+1) & = & y_1(n) + \gamma y_2(n) \\ y_3(n+1) & = & y_2(n) + \gamma y_3(n) \end{array}\right.$$

Observamos que a primeira recorrência é homogênea, portanto, sua solução é:

$$y_1(n) = c_1 \cdot \gamma^{n-1} \text{ com } c_1 \text{ cosntante e } n \in \mathbb{N}.$$

No entanto, observamos que a segunda e a terceira equações, ou seja, $y_2(n+1) = y_1(n) + \gamma \cdot y_2(n)$ *e* $y_3(n+1) = y_2(n) + \gamma \cdot y_3(n)$ *não são homogêneas, sendo assim, façamos uso do* ***Teorema (2.1)****. Nesse sentido,* $a_n = c_2 \cdot \gamma^{n-1}$ *é uma solução não nula da recorrência homogênea* $y_2(n+1) = \gamma \cdot y_2(n)$*. Em seguida, façamos a seguinte substituição,* $y_2(n) = a_n z_n$*, que resulta em:*

$$\begin{aligned} y_2(n+1) = y_1(n) + \gamma y_2(n) &\Leftrightarrow a_{n+1}z_{n+1} = y_1(n) + \gamma a_n z_n \\ &\Leftrightarrow z_{n+1} = y_1(n)[a_{n+1}]^{-1} + \gamma z_n a_n [a_{n+1}]^{-1} \\ &\Leftrightarrow z_{n+1} = \frac{c_1\gamma^{n-1}}{c_2\gamma^n} + z_n \frac{c_2\gamma^n}{c_2\gamma^n} \\ &\Leftrightarrow z_{n+1} = \frac{c_1}{c_2\gamma} + z_n. \end{aligned}$$

Visto que, sendo $y_2(1) = c_2$*, temos que* $z_1 = 1$*. Posto isso, podemos escrever* $z_{n+1} = \frac{c_1}{c_2\gamma} + z_n$*, da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \\ z_2 &= \frac{c_1}{c_2\gamma} + z_1 \\ z_3 &= \frac{c_1}{c_2\gamma} + z_2 \\ &\vdots \\ z_n &= \frac{c_1}{c_2\gamma} + z_{n-1}, \end{aligned}$$

onde aplicando uma soma telescópica resulta em

$$z_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_1}{c_2\gamma} \Leftrightarrow z_n = 1 + \frac{c_1}{c_2\gamma}(n-1).$$

Retornando à variável de origem, temos:

$$\begin{aligned} y_2(n) = a_n z_n \Leftrightarrow y_2(n) &= c_2\gamma^{n-1} + \frac{c_1}{c_2\gamma}(n-1)c_2\gamma^{n-1} \\ \Leftrightarrow y_2(n) &= c_2\gamma^{n-1} + c_1(n-1)\gamma^{n-2}. \end{aligned}$$

De maneira análoga, Seja $a_n = c_3 {\cdot} \gamma^{n-1}$ *uma solução não nula da recorrência homogênea* $y_3(n+1) = \gamma \cdot y_3(n)$*. Em seguida, façamos a seguinte substituição,* $y_3(n) = a_n z_n$*, onde resulta em*

$$\begin{aligned} y_3(n+1) = y_2(n) + \gamma y_3(n) &\Leftrightarrow a_{n+1}z_{n+1} = y_2(n) + \gamma a_n z_n \\ &\Leftrightarrow z_{n+1} = y_2(n)[a_{n+1}]^{-1} + \gamma z_n a_n [a_{n+1}]^{-1} \\ &\Leftrightarrow z_{n+1} = \frac{c_2\gamma^{n-1} + c_1\gamma^{n-2}(n-1)}{c_3\gamma^n} + z_n \frac{c_3\gamma^n}{c_3\gamma^n} \\ &\Leftrightarrow z_{n+1} = \frac{c_2}{c_3\gamma} + \frac{c_1(n-1)}{c_3\gamma^2} + z_n. \end{aligned}$$

Sendo $y_3(1) = c_3$*, teremos* $z_1 = 1$*. Logo, podemos escrever* $z_{n+1} = \frac{c_2}{c_3\gamma} + \frac{c_1(n-1)}{c_3\gamma^2} + z_n$*, da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \\ z_2 &= \frac{c_2}{c_3\gamma} + z_1 \\ z_3 &= \frac{c_2}{c_3\gamma} + \frac{c_1}{c_3\gamma^2}1 + z_2 \\ z_4 &= \frac{c_2}{c_3\gamma} + \frac{c_1}{c_3\gamma^2}2 + z_3 \\ &\vdots \\ z_n &= \frac{c_2}{c_3\gamma} + \frac{c_1}{c_3\gamma^2}(n-2) + z_{n-1}, \end{aligned}$$

assim, aplicando uma soma telescópica, temos o seguinte resultado:

$$z_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_2}{c_3\gamma} + \frac{c_1}{c_3\gamma^2} \sum_{i=1}^{n-2} i \Leftrightarrow z_n = 1 + \frac{c_2}{c_3\gamma}(n-1) + \frac{c_1}{2c_3\gamma^2}(n-2)(n-1).$$

Retornando à variável de origem, temos

$$\begin{aligned} y_3(n) = a_n z_n &\Leftrightarrow y_3(n) = c_3\gamma^{n-1} + \frac{c_2}{c_3\gamma}(n-1)c_3\gamma^{n-1} + \frac{c_1}{2c_3\gamma^2}(n-2)(n-1)c_3\gamma^{n-1} \\ &\Leftrightarrow y_3(n) = c_3\gamma^{n-1} + c_2(n-1)\gamma^{n-2} + \frac{c_1}{2}(n-2)(n-1)\gamma^{n-3}. \end{aligned}$$

Consequentemente, uma vez resolvidas as recorrências lineares de primeira ordem e escrevendo a matriz U *por colunas* $[\vec{u}_1 \;\; \vec{u}_2 \;\; \vec{u}_3]$*, a solução* X_n *pode ser expressa por:*

$$
\begin{aligned}
X_n = {} & c_1\left[\vec{u}_1\gamma^{n-1} + \vec{u}_2(n-1)\gamma^{n-2} + \vec{u}_3\frac{1}{2}(n-2)(n-1)\gamma^{n-3}\right] \\
& + c_2\left[\vec{u}_2\gamma^{n-1} + \vec{u}_3(n-1)\gamma^{n-2}\right] + c_3\vec{u}_3\gamma^{n-1},
\end{aligned}
$$

em que $c_1,\ c_2$ *e* c_3 *são escalares e as colunas de* U *satisfazem:*

$$(A-\gamma I).\vec{u}_1 = \vec{u}_2, \quad (A-\gamma I).\vec{u}_2 = \vec{u}_3 \quad e \quad (A-\gamma I).\vec{u}_3 = 0.$$

Exemplo: *Resolva o sistema de relações de recorrências:*

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccc}
x_{n+1} & = & -4x_n & - & 4y_n & + & z_n \\
y_{n+1} & = & 2x_n & + & 2y_n & - & z_n \\
z_{n+1} & = & 5x_n & + & 9y_n & - & 4z_n
\end{array}
\right.
\qquad n \geq 0, \in \mathbb{N}, \quad com \;\; x_0 = 8,\ y_0 = 10 \;\; e \;\; z_0 = 12.
$$

Solução:

Seja o sistema $X_{n+1} = A.X_n$*, de tal forma que:*

$$
X_{n+1} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix},\ X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 5 & 9 & -4 \end{bmatrix}
$$

em que A *é a matriz dos coeficientes.*

O polinômio característico associado à matriz dos coeficientes do sistema é dado por

$$
p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -4 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 5 & 9 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 12\lambda - 8,
$$

com raízes $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2$.

Como $\lambda = -2$ *é o único autovalor (de multiplicidade algébrica igual a três), segue que o autovetor* $\vec{u}$ *é tal que*

$$
(A-\lambda I)\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & 9 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{
\begin{array}{ccccccc}
-2x & - & 4y & + & z & = & 0 \\
2x & + & 4y & - & z & = & 0 \\
5x & + & 9y & - & 2z & = & 0
\end{array}
\right.
$$

Considerando que $x = -\frac{1}{2}z$ *e* $y = \frac{1}{2}z$ *é a solução do sistema acima, temos*

$$\vec{u} = z\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \textit{tal que} \quad z \neq 0.$$

Devemos observar que a multiplicidade geométrica para tal autovalor é igual a 1. *Por conseguinte, a matriz de Jordan* J *similar a matriz* A *apresenta o seguinte aspecto:*

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}; \quad \textit{com} \quad \begin{cases} (A-\lambda I)\vec{u}_1 &= \vec{u}_2 \\ (A-\lambda I)\vec{u}_2 &= \vec{u}_3 \\ (A-\lambda I)\vec{u}_3 &= 0 \end{cases}$$

em que $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ *são vetores generalizados e* $\vec{u}_3 = \vec{u}$ *é o único autovetor de* A, *de tal forma que:*

$$(A-\lambda I)\vec{u}_2 = \vec{u}_3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & 9 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x & - & 4y & + & z & = & -\frac{1}{2} \\ 2x & + & 4y & - & z & = & \frac{1}{2} \\ 5x & + & 9y & - & 2z & = & 1 \end{cases}$$

Isso posto,

$$x = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}z, \ y = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z \quad e \quad z \in \mathbb{R} \quad \textit{com} \quad \vec{u_2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z \\ z \end{bmatrix};$$

Em particular, se $z = 0$, *então*

$$\vec{u_2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De maneira análoga,

$$(A-\lambda I).\vec{u_1} = \vec{u_2} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x & - & 4y & + & z & = & -\frac{1}{4} \\ 2x & + & 4y & - & z & = & \frac{1}{4} \\ 5x & + & 9y & - & 2z & = & 0 \end{cases}$$

visto que o sistema acima tem solução $x = -\frac{9}{8} - \frac{1}{2}z,\ y = \frac{5}{8} + \frac{1}{2}z$ *com* $z \in \mathbb{R}$, *então*

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{9}{8} - \frac{1}{2}z \\ \frac{5}{8} + \frac{1}{2}z \\ z \end{bmatrix}.$$

Em particular, para $z = 0$ *temos*

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{9}{8} \\ \frac{5}{8} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Em consequência disso, temos a solução do sistema com a seguinte configuração:

$$\begin{aligned} X_n &= \vec{u}_1.y_1(n) + \vec{u}_2.y_2(n) + \vec{u}_3.y_3(n) \\ &= c_1\left[\vec{u}_1\lambda^{n-1} + \vec{u}_2(n-1)\lambda^{n-2} + \vec{u}_3\frac{1}{2}(n-2)(n-1)\lambda^{n-3}\right] + \\ &+ c_2\left[\vec{u}_2\lambda^{n-1} + \vec{u}_3(n-1)\lambda^{n-2}\right] + c_3\vec{u}_3\lambda^{n-1}, \end{aligned}$$

com c_1, c_2 *e* c_3 *constantes arbitrárias. Agrupando os vetores e substituindo seus valores, obtemos*

$$X_n = c_1\left(\begin{bmatrix} -\frac{9}{8} \\ \frac{5}{8} \\ 0 \end{bmatrix}(-2)^{n-1} + (n-1)\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}(-2)^{n-2} + \frac{1}{2}(n-2)(n-1)\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}(-2)^{n-3}\right) +$$

$$+ c_2\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}(-2)^{n-1} + (n-1)\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}(-2)^{n-2}\right) + c_3\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}(-2)^{n-1}.$$

Sendo assim, destacam-se as seguintes sequências:

$$\begin{aligned} x_n = c_1&\left[-\frac{9}{8}(-2)^{n-1} - \frac{1}{4}(n-1)(-2)^{n-2} - \frac{1}{4}(n-2)(n-1)(-2)^{n-3}\right] + \\ &+ c_2\left[-\frac{1}{4}(-2)^{n-1} - \frac{1}{2}(n-1)(-2)^{n-2}\right] - \frac{1}{2}c_3(-2)^{n-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_n = c_1&\left[\frac{5}{8}(-2)^{n-1} + \frac{1}{4}(n-1)(-2)^{n-2} + \frac{1}{4}(n-2)(n-1)(-2)^{n-3}\right] + \\ &+ c_2\left[\frac{1}{4}(-2)^{n-1} + \frac{1}{2}(n-1)(-2)^{n-2}\right] + \frac{1}{2}c_3(-2)^{n-1}, \end{aligned}$$

$$z_n = \frac{1}{2}c_1(n-2)(n-1)(-2)^{n-3} + c_2(n-1)(-2)^{n-2} + c_3(-2)^{n-1}.$$

Uma vez que $x_0 = 8,\ y_0 = 10$ ***e*** $z_0 = 12$, *por meio da resolução de um simples sistema de equações lineares abaixo,*

$$\begin{cases} \frac{11}{16}c_1 & + & \frac{1}{4}c_2 & + & \frac{1}{4}c_3 & = & 8 \\ -\frac{7}{16}c_1 & - & \frac{1}{4}c_2 & - & \frac{1}{4}c_3 & = & 10 \\ -\frac{1}{8}c_1 & - & \frac{1}{4}c_2 & - & \frac{1}{2}c_3 & = & 12 \end{cases}$$

temos que $c_1 = 72,\ y = -248$ *e* $c_3 = 82$, *portanto:*

$$x_n = \frac{1}{2}\left(-9n^2 - 79n - 32\right) \cdot (-2)^{n-1},$$

$$y_n = \frac{1}{2}\left(9n^2 + 79n - 40\right) \cdot (-2)^{n-1},$$

$$z_n = \left(9n^2 + 97n - 24\right) \cdot (-2)^{n-1}.$$

■

4 Aplicações

Neste capítulo iremos aplicar as técnicas desenvolvidas anteriormente, objetivando resolver alguns problemas, cuidadosamente selecionados entre as mais variadas competições olímpicas, tanto nacionais quanto internacionais, assim como de vestibulares, a título de exemplo, Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária (OBMU), Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), Instituto Militar de Engenharia (IME)e outros problemas que julgamos pertinentes e que podem ser encontrados na literatura.

- *Os Problemas 1 e 6 encontram-se em (ANDRICA; BAGDASAR, 2020).*
- *O Problema 2 pode ser encontrado em (ENGEL, 2008).*
- *Os Problemas 3, 7 e 9 estão em (OBM-Olimpíada Brasileira de Matemática,).*
- *Os Problemas 4 e 5 acham-se em (OLIVEIRA; CARNEIRO, 2010).*
- *O Problema 8 localiza-se em (TITU; ZUMING, 2004)*
- *O problema 10 situa-se em (ANDRICA; BAGDASAR, 2020) e (CHEN; KOH; KHEE-MENG, 1992).*

Tão valoroso quanto a solução de um problema é a compreensão da mesma por parte do leitor, por isso, procuramos resolver cada um de forma minuciosa, justificando as passagens de um cálculo para outro, buscando sempre a melhor compreensão e consolidação do que se propõem esse estudo.

Problema 1 (Dorin Andrica, O97, GM-1979)

Sejam as sequências $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ *definidas por* $u_1 = 3$, $v_1 = 2$ *e*

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 4v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n \end{cases} \qquad n \geq 1,$$

Defina $x_n = u_n + v_n$, $y_n = u_n + 2v_n$, $n \geq 1$. *Prove que* $y_n = \lfloor\, x_n\sqrt{2}\,\rfloor$ *para* $n \geq 1$.

Solução:

A princípio, provaremos que $u_n, v_n \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq 1$. *Para tal, será utilizado o Principio da Indução Finita (PIF). Posto isso, ficará mostrado que* $y_n, x_n \in \mathbb{N}$, *uma vez que* $y_n = u_n + 2v_n,\ x_n = u_n + v_n \quad \forall\ n \geq 1$. *Consequentemente, segue que:*

Para $n = 1$, *temos que* $u_1 = 3$ *e* $v_1 = 2$, *portanto,* $u_1, v_1 \in \mathbb{N}$.

Suponhamos, por Hipótese de Indução (H.I.), que $u_n, v_n \in \mathbb{N}, \quad \forall\ n \geq 1$.

Mostremos que $u_{n+1}, v_{n+1} \in \mathbb{N}$. *Com efeito, por definição, temos que* $u_{n+1} = 3u_n + 4v_n$. *Desse modo, como* $u_n, v_n \in \mathbb{N}$ *segue da hipótese de indução (H.I.) que,* $u_{n+1} \in \mathbb{N}$. *De maneira análoga, temos por definição que* $v_{n+1} = 2u_n + 3v_n$. *Assim sendo, como* $u_n, v_n \in \mathbb{N}$ *por (H.I.), então* $v_{n+1} \in \mathbb{N}$.

Dessa maneira, pelo Princípio da Indução Finita (PIF) segue que u_n *e* v_n *são números naturais para todo* $n \geq 1$.

Consideremos o sistema $X_{n+1} = A.X_n$, *tal que:*

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix}, X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} \quad e \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Por meio de um cálculo simples, obtemos

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 1,$$

em que $p(\lambda)$ *é o polinômio característico de* A, *cujas raízes, são:*

$$\lambda_1 = 3 + 2\sqrt{2} \quad e \quad \lambda_2 = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Agora, passaremos a obter os autovetores associados. Para $\lambda_1 = 3 + 2\sqrt{2}$, *segue que:*

$$(A - \lambda_1 I)\vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & 4 \\ 2 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2}x + 4y &= 0 \\ 2x - 2\sqrt{2}y &= 0 \end{cases},$$

do sistema, resulta que:

$$x = \sqrt{2}y, \quad com \quad \vec{u}_1 = y \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad tal\ que \quad y \neq 0.$$

De maneira análoga, para $\lambda_2 = 3 - 2\sqrt{2}$, *temos que:*

$$(A-\lambda_2 I)\vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 4 \\ 2 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2\sqrt{2}x + 4y & = & 0 \\ 2x + 2\sqrt{2}y & = & 0 \end{array} \right.$$

Do sistema, resulta que :

$$x = -\sqrt{2}y, \quad com \ \ \vec{u}_2 = y \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad tal\ que \ \ y \neq 0.$$

Observe que as multiplicidades geométricas para ambos os autovalores, λ_1 *e* λ_2*, são, respectivamente,* $m_g(\lambda_1) = 1$ *e* $m_g(\lambda_2) = 1$*. Sendo assim, a Matriz de Jordan* J *assume a seguinte forma:*

$$J = \begin{bmatrix} 3+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3-2\sqrt{2} \end{bmatrix}; \ com \left\{ \begin{array}{rcl} (A-\lambda_1 I)\vec{u}_1 & = & 0 \\ (A-\lambda_2 I)\vec{u}_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

Logo, sabemos que a solução pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} X_n &= c_1\vec{u}_1\alpha^{n-1} + c_2\vec{u}_2\beta^{n-1} \\ &= c_1 \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} (3+2\sqrt{2})^{n-1} + c_2 \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} (3-2\sqrt{2})^{n-1}, \end{aligned}$$

com c_1 *e* c_2 *constantes arbitrárias. Consequentemente,*

$$u_n = c_1(\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^{n-1} + c_2(-\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^{n-1},$$

$$v_n = c_1(3+2\sqrt{2})^{n-1} + c_2(3-2\sqrt{2})^{n-1}.$$

Como $u_1 = 3$ *e* $v_1 = 2$*, então:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sqrt{2}c_1 - \sqrt{2}c_2 & = & 3 \\ c_1 + c_2 & = & 2 \end{array} \right.$$

resolvendo o sistema, obtemos que $c_1 = \left(\frac{4+3\sqrt{2}}{4}\right)$ *e* $c_2 = \left(\frac{4-3\sqrt{2}}{4}\right)$*, de onde segue:*

$$u_n = \left(\frac{6+4\sqrt{2}}{4}\right)(3+2\sqrt{2})^{n-1} + \left(\frac{6-4\sqrt{2}}{4}\right)(3-2\sqrt{2})^{n-1},$$

$$v_n = \left(\frac{4+3\sqrt{2}}{4}\right)(3+2\sqrt{2})^{n-1} + \left(\frac{4-3\sqrt{2}}{4}\right)(3-2\sqrt{2})^{n-1}.$$

Por definição, $x_n = u_n + v_n \quad e \quad y_n = u_n + 2v_n,$ *então:*

$$x_n = \left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4}\right)(3+2\sqrt{2})^{n-1} + \left(\frac{10-7\sqrt{2}}{4}\right)(3-2\sqrt{2})^{n-1},$$

$$y_n = \left(\frac{14+10\sqrt{2}}{4}\right)(3+2\sqrt{2})^{n-1} + \left(\frac{14-10\sqrt{2}}{4}\right)(3-2\sqrt{2})^{n-1}.$$

Observe que:

$$x_n\sqrt{2} = \left(\frac{14+10\sqrt{2}}{4}\right)(3+2\sqrt{2})^{n-1} + \left(\frac{-14+10\sqrt{2}}{4}\right)(3-2\sqrt{2})^{n-1},$$

dessa forma, temos que,

$$x_n\sqrt{2} + y_n = (7+5\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^{n-1},$$

$$x_n\sqrt{2} - y_n = -(7-5\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^{n-1}$$

sendo assim,

$$\begin{aligned}
(x_n\sqrt{2} + y_n)\cdot(x_n\sqrt{2} - y_n) &= -(7-5\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^{n-1}\cdot(7+5\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^{n-1}\\
&= -\Big[(7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})\Big]\cdot\Big[(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\Big]^{n-1}\\
&= -\Big[(49-50)\cdot(9-8)^{n-1}\Big]\\
&= -\Big[(-1)\cdot 1^{n-1}\Big]\\
&= 1, \quad \forall\ n \geq 1.
\end{aligned}$$

Uma vez que $x_n, y_n \in \mathbb{N}$, *logo*

$$x_n, y_n \geq 1,$$

portanto,

$$x_n\sqrt{2} + y_n > 1,$$

além disso, temos que $(x_n\sqrt{2} + y_n) \cdot (x_n\sqrt{2} - y_n) = 1$, *então* $0 < x_n\sqrt{2} - y_n < 1$.

Como $x_n, y_n \in \mathbb{Z}$, *segue que*

$$y_n = \lfloor\, x_n\sqrt{2}\, \rfloor, \quad \forall\; n \geq 1.$$

$\blacksquare$

Problema 2 (Problem-solving strategies/Arthur Engel)

Sejam $u_1,\;\; v_1,\;\; u_1 < v_1$. *As sequências* $u_n,\;\; v_n$ *são definidas por:*

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad e \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3},\;\; n \geq 1.$$

Prove que ambas têm o mesmo limite L, *com* $u_1 < L < v_1$.

Solução:

Inicialmente, observe que da maneira que as sequências foram definidas, temos um sistema de relações de recorrências homogêneas de duas variáveis, onde o mesmo pode ser escrito como $X_{n+1} = A.X_n,\;\; n \geq 1$, *tal que*

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix}, X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} \quad e \quad A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico associado ao sistema acima é dado por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 6\lambda^2 - 7\lambda + 1.$$

Consequentemente, obtemos os seguintes autovalores

$$\lambda_1 = 1 \quad e \quad \lambda_2 = \frac{1}{6}.$$

O autovetor $\vec{u}_1$ *associado ao autovalor* $\lambda_1 = 1$ *é tal que*

$$(A - \lambda_1 I)\vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x & + & \frac{1}{2}y & = & 0 \\ \frac{1}{3}x & - & \frac{1}{3}y & = & 0 \end{cases}$$

Do sistema, segue-se que:

$$x = y, \quad e \quad \vec{u}_1 = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad tal\ que \quad y \neq 0.$$

De maneira análoga, para $\lambda_2 = \frac{1}{6}$, *obtemos*

$$\vec{u}_2 = y \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad tal\ que \quad y \neq 0.$$

com $\vec{u}_2$ *sendo o autovetor de* A *associado a* λ_2. *Como a multiplicidade geométrica para ambos os autovetores é* $m_g(\lambda_1) = 1$ *e* $m_g(\lambda_2) = 1$, *respectivamente, então a matriz* J *de Jordan, similar à matriz* A, *assume a seguinte forma:*

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}; \quad com \quad \begin{cases} (A - \lambda_1 I)\vec{u}_1 & = & 0 \\ (A - \lambda_2 I)\vec{u}_2 & = & 0 \end{cases}$$

Desse modo, sabemos que a solução para o sistema de recorrências pode ser expresso como:

$$X_n = c_1 w_1 \alpha^{n-1} + c_2 w_2 \beta^{n-1} \Leftrightarrow X_n = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1},$$

com c_1 *e* c_2 *constantes arbitrárias. Sendo assim,*

$$u_n = c_1 - \frac{3c_2}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \quad e \quad v_n = c_1 + c_2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}.$$

Observe ainda que, para $n = 1$, *temos o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} u_1 & = & c_1 - 9c_2 \\ v_1 & = & c_1 + 6c_2 \end{cases}$$

em que, após um cálculo simples, temos como resultado $c_1 = \frac{2u_1 + 3v_1}{5}$ *e* $c_2 = \frac{v_1 - u_1}{15}$.

Uma vez calculados os limites de u_n *e* v_n, *ocorre que:*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = c_1 \quad e \quad \lim_{n\to\infty} v_n = c_1,$$

ou seja, ambos os limites são iguais a $L = c_1$, como queríamos demonstrar.

Por fim, segue que:

$$\begin{aligned} u_1 < v_1 &\Rightarrow 3u_1 < 3v_1 \quad e \quad 2v_1 > 2u_1 \\ &\Rightarrow 5u_1 < 2u_1 + 3v_1 \quad e \quad 5v_1 > 2u_1 + 3v_1 \\ &\Rightarrow u_1 < \frac{2u_1 + 3v_1}{5} \quad e \quad v_1 > \frac{2u_1 + 3v_1}{5} \\ &\Rightarrow u_1 < L \quad e \quad v_1 > L. \end{aligned}$$

Portanto, fica provado que $u_1 < L < v_1$. ■

Problema 3 (OBM - 1999)

José tem três pares de óculos, um magenta, um amarelo e um ciano. Todo dia de manhã ele escolhe um ao acaso, tendo apenas o cuidado de nunca usar o mesmo que usou no dia anterior. Se dia primeiro de agosto ele usou o magenta, qual a probabilidade de que dia 31 de agosto ele volte a usar o magenta?

Solução:

Sejam m_n, a_n e c_n as probabilidades para que, no dia n, José use os óculos magenta, amarelo e ciano, respectivamente. Sendo assim, como no dia 1 do mês de agosto, temos a certeza de que ele usou os óculos magenta, já que essa informação é fornecida por hipótese, então a probabilidade para que no dia 1 de agosto ele tenha usado os óculos da cor magenta é igual a 1. Sendo assim, a probabilidade que o mesmo tenha usado outro óculos com coloração diferente no dia 1 de agosto é 0, ou seja, $m_1 = 1, a_1 = 0$ e $c_1 = 0$.

Observe que, em cada dia do mês, José escolhe de forma aleatória uma das cores de óculos que não foi utilizada no dia anterior. Então, como no dia 1 de agosto ele escolheu o magenta, a probabilidade para a escolha de uma cor, amarelo ou ciano, no dia 2 de agosto é $\frac{1}{2}$, pois, como existe a restrição de nunca usar a mesma cor do dia anterior, as únicas cores disponíveis para a escolha, são amarelo ou ciano, ou seja, $m_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$ e $c_2 = \frac{1}{2}$. Seguindo o mesmo raciocínio, de forma geral, para o dia $(n+1)$, temos as seguintes situações:

- *Para que no $(n+1)$-ésimo dia José possa escolher os óculos da cor magenta, é necessário que no n-ésimo dia ele tenha utilizado óculos da cor amarelo ou ciano.*

No entanto, a probabilidade de usar óculos amarelo no n-ésimo dia é a_n, assim como usar ciano é c_n. Por conseguinte, a probabilidade de José usar os óculos magenta no $(n+1)$-ésimo dia é igual à probabilidade de ele usar no n-ésimo dia óculos amarelo ou ciano. Como no dia anterior ao $(n+1)$-ésimo dia - ou seja, no n-ésimo dia - José precisou escolher um dos óculos, amarelo ou ciano, com probabilidade de $\frac{1}{2}$, então segue que temos a seguinte relação:

$$m_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n$$

- *Para que no $(n+1)$-ésimo dia, José possa escolher os óculos da cor amarela, é necessário que no n-ésimo ele tenha utilizado óculos da cor magenta ou ciano. No entanto, a probabilidade de usar óculos magenta no n-ésimo dia é m_n, assim como usar ciano é c_n. Sendo assim, a probabilidade de José usar os óculos amarelos no $(n+1)$-ésimo é igual à probabilidade de ele usar no n-ésimo óculos magenta ou ciano. De onde segue-se que:*

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}m_n + \frac{1}{2}c_n.$$

- *Em última análise, para que no $(n+1)$-ésimo dia José possa escolher os óculos da cor ciano, é necessário que no n-ésimo dia ele tenha utilizado óculos da cor amarela ou magenta. No entanto, a probabilidade de usar óculos da cor amarela no n-ésimo dia é a_n, assim como usar magenta é m_n. Sendo assim, a probabilidade de José usar os óculos ciano no $(n+1)$-ésimo dia é igual à probabilidade de ele usar no n-ésimo dia óculos da cor magenta ou ciano. Como no dia anterior ao $(n+1)$-ésimo dia José precisou escolher um dos óculos, amarelo ou magenta, com probabilidade $\frac{1}{2}$, então segue que temos a seguinte relação:*

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}m_n.$$

Portanto, temos o seguinte sistema de relações de recorrências:

$$\begin{cases} m_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2}m_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}m_n \end{cases} \quad n \geq 1, n \in \mathbb{N}, \quad com \quad m_1 = 1, a_1 = 0 \quad e \quad c_1 = 0.$$

Reescrevendo o sistema na forma matricial $X_{n+1} = A.X_n$, temos que:

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} m_{n+1} \\ a_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix}, \ X_n = \begin{bmatrix} m_n \\ a_n \\ c_n \end{bmatrix} \quad e \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Um cálculo simples mostra que

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1) \cdot (2\lambda + 1)^2.$$

é o polinômio característico associado à matriz A. Portanto, os autovalores de A são:

$$\lambda_1 = 1 \quad e \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

O autovetor $\vec{u}_1$ associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ é dado por:

$$\vec{u}_1 = z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad tal\ que \quad z \neq 0.$$

O autovetor $\vec{u}$ associado à $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, é da forma:

$$\vec{u} = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad tal\ que \quad y^2 + z^2 \neq 0.$$

Escolhendo y e z de forma conveniente, segue que:

$$se \quad y = 1 \quad e \quad z = 0, \quad então \quad \vec{u_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad se \quad y = 0 \quad e \quad z = 1, \quad então \quad \vec{u_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observe que os autovalores têm multiplicidade geométrica $m_g(\lambda_1) = 1$ e $m_g(\lambda_2) = 2$, respectivamente. Portanto, a matriz J de Jordan, similar à matriz dos coeficientes A, tem o seguinte formato:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad com \quad \begin{cases} (A - \lambda_1 I).\vec{u}_1 &= 0 \\ (A - \lambda_2 I).\vec{u}_2 &= 0 \\ (A - \lambda_3 I).\vec{u}_3 &= 0 \end{cases}.$$

Dessa maneira, sabemos que a solução para o sistema de recorrências tem a seguinte configuração:

$$\begin{aligned} X_n &= c_1 u_1 \alpha^{n-1} + c_2 u_2 \beta^{n-1} + c_3 u_3 \gamma^{n-1} \\ &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

com $c_1,\ c_2$ *e* c_3 *constantes arbitrárias. Consequentemente,*

$$m_n = c_1 - c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - c_3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$a_n = c_1 + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$c_n = c_1 + c_3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Como $m_1 = 1, a_1 = 0$ ***e*** $c_0 = 0$, *temos o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} 1 & = & c_1 & - & c_2 & - & c_3 \\ 0 & = & c_1 & + & c_2 & & \\ 0 & = & c_1 & + & & & c_3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, temos que $c_1 = \frac{1}{3},\ c_2 = -\frac{1}{3}$ *e* $c_3 = -\frac{1}{3}$. *Assim,*

$$m_n = c_1 - c_2.\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - c_3.\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow m_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}.\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Finalmente, no dia 31 de agosto, a probabilidade de que ele volte a usar os óculos magenta é igual a:

$$m_{31} = \left(\frac{1+2^{-29}}{3}\right).$$

Problema 4 (IME - 2016)

Três jogadores sentam ao redor de uma mesa e jogam, alternadamente, um dado não viciado de seis faces. O primeiro jogador lança o dado, seguido pelo que está sentado à sua esquerda, continuando nesse sentido até o jogo acabar. Aquele que jogar o dado e o resultado for 6, ganha e o jogo acaba. Se um jogador obtiver o resultado 1, o jogador seguinte perderá a vez, isto é, a vez passará ao jogador sentado à direita de quem obteve 1. O jogo seguirá até que um jogador ganhe ao tirar um 6. Qual a probabilidade de vitória do primeiro jogador a jogar?

Solução:

Sejam a_n, b_n e c_n respectivamente, as probabilidades de que o primeiro, o segundo e o terceiro jogadores lancem o dado na n-ésima rodada. Como, por hipótese, temos que o primeiro jogador lança o dado na primeira rodada, então $a_1 = 1$. Ademais, o segundo jogador lança o dado na primeira rodada se, e somente se, o primeiro jogador tirar a face do dado com os seguintes valores: $2, 3, 4$ ou 5. Sendo assim, $b_1 = \frac{4}{6}$. Seguindo o raciocínio, segue que o terceiro jogador lançará o dado na primeira rodada se, e somente se, o primeiro tirar $1, 2, 3, 4,$ ou 5, enquanto o segundo jogador deverá tirar alguns dos valores $2, 3, 4$ ou 5. Sendo assim, $c_1 = \frac{22}{36}$.

De maneira geral, temos as seguintes probabilidades para o lançamento de cada jogador na $n+1$-ésima rodada:

$$a_{n+1} = \frac{1}{6}b_n + \frac{4}{6}c_n \qquad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}, \tag{4.1}$$

$$b_{n+1} = \frac{4}{6}a_{n+1} + \frac{1}{6}c_n \qquad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}, \tag{4.2}$$

$$c_{n+1} \ = \tfrac{1}{6}a_{n+1} + \tfrac{4}{6}b_{n+1} \qquad \forall\ n \geq 0, n \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Substituindo (4.1) em (4.2), temos

$$b_{n+1} = \frac{4}{36}b_n + \frac{22}{36}c_n \qquad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

Substituindo (4.1) e (4.4) em (4.3), temos

$$c_{n+1} = \frac{22}{216}b_n + \frac{112}{216}c_n \qquad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

Observe que as equações (4.1), (4.4) e (4.5) formam o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \frac{1}{6}b_n &+ \frac{4}{6}c_n \\ b_{n+1} &= \frac{4}{36}b_n &+ \frac{22}{36}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{22}{216}b_n &+ \frac{112}{216}c_n \end{cases} \qquad n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Logo, podemos escrevê-lo na forma $X_{n+1} = A.X_n$, de tal modo que:

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix}, \ X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} \ \text{e} \ \ A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \\ 0 & \frac{4}{36} & \frac{22}{36} \\ 0 & \frac{22}{216} & \frac{112}{216} \end{bmatrix}.$$

Considere a equação não linear $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$, dada em $\vec{u}$ e λ. Ou ainda,

$$(A - \lambda I).\vec{u} = 0, \quad com \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad e \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq 0.$$

O sistema tem solução não trivial se, e somente se:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \\ 0 & \left(\frac{4-36\lambda}{36}\right) & \frac{22}{36} \\ 0 & \frac{22}{216} & \left(\frac{112-216\lambda}{216}\right) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -216x^3 + 136x^2 + x = 0$$

As raízes da equação acima são:

$$\lambda_1 = 0, \;\; \lambda_2 = \left(\frac{34 + 11\sqrt{10}}{108}\right) \quad e \quad \lambda_3 = \left(\frac{34 - 11\sqrt{10}}{108}\right).$$

Para λ_k, tal que $k = 1, 2, 3$, segue que:

$$(A - \lambda_k I).\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\lambda_k & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \\ 0 & \left(\frac{4-36\lambda_k}{36}\right) & \frac{22}{36} \\ 0 & \frac{22}{216} & \left(\frac{112-216\lambda_k}{216}\right) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_k x & + & \frac{1}{6}y & + & \frac{4}{6}z & = & 0 \\ & & \left(\frac{4-36\lambda_k}{36}\right)y & + & \frac{22}{36}z & = & 0 \\ & & \frac{22}{216}y & + & \left(\frac{112-216\lambda_k}{216}\right)z & = & 0 \end{cases}.$$

Após substituir λ_k, tal que $k = 1, 2, 3$, no sistema, um cálculo simples nos mostra que:

Para $\lambda_1 = 0$,

$$y = 0 \quad e \quad z = 0, \quad com \quad \vec{u_1} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \; tal \; que \quad x \neq 0.$$

Para $\lambda_2 = \left(\frac{34+11\sqrt{10}}{108}\right)$,

$$x = (-4\sqrt{10} + 14)z, \;\; y = (\sqrt{10} - 2)z, \;\; com \; \vec{u_2} = z \begin{bmatrix} -4\sqrt{10} + 14 \\ \sqrt{10} - 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad tal \; que \quad z \neq 0.$$

Para $\lambda_3 = \left(\frac{34-11\sqrt{10}}{108}\right)$,

$$x = (4\sqrt{10}+14)z,\ \ y = (-\sqrt{10}-2)z,\ \ com\ \vec{u_3} = z\begin{bmatrix} 4\sqrt{10}+14 \\ -\sqrt{10}-2 \\ 1 \end{bmatrix};\quad tal\ que\quad z \neq 0.$$

Devemos observar que a multiplicidade geométrica para $\lambda_1,\ \lambda_2$ *e* λ_3 *é, respectivamente* $m_g(\lambda_1) = m_g(\lambda_2) = m_g(\lambda_3) = 1$. *Portanto, a matriz* J *de Jordan similar à matriz* A *assume a seguinte forma:*

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{34+11\sqrt{10}}{108}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{34-11\sqrt{10}}{108}\right) \end{bmatrix};\quad com\ \begin{cases} (A-\lambda_1 I)\vec{u_1} &= 0 \\ (A-\lambda_2 I)\vec{u_2} &= 0 \\ (A-\lambda_3 I)\vec{u_3} &= 0 \end{cases}$$

Dessa forma, a solução para o sistema de relações de recorrências pode ser expressa como:

$$X_n = c_1 u_1 \alpha^{n-1} + c_2 u_2 \beta^{n-1} + c_3 u_3 \gamma^{n-1}.$$

Substituindo os valores dos autovetores, temos:

$$X_n = c_2\begin{bmatrix} -4\sqrt{10}+14 \\ \sqrt{10}-2 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\left(\frac{34+11\sqrt{10}}{108}\right)^{n-1} + c_3\begin{bmatrix} 4\sqrt{10}+14 \\ -\sqrt{10}-2 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\left(\frac{34-11\sqrt{10}}{108}\right)^{n-1},$$

com $c_1,\ c_2$ *e* c_3 *constantes arbitrárias. Consequentemente,*

$$a_n = c_2\left(-4\sqrt{10}+14\right)\cdot\left(\frac{34+11\sqrt{10}}{108}\right)^{n-1} + c_3\left(4\sqrt{10}+14\right)\cdot\left(\frac{34-11\sqrt{10}}{108}\right)^{n-1},$$

$$b_n = c_2\left(\sqrt{10}-2\right)\cdot\left(\frac{34+11\sqrt{10}}{108}\right)^{n-1} + c_3\left(-\sqrt{10}-2\right)\cdot\left(\frac{34-11\sqrt{10}}{108}\right)^{n-1},$$

$$c_n = c_2\left(\frac{34+11\sqrt{10}}{108}\right)^{n-1} + c_3\left(\frac{34-11\sqrt{10}}{108}\right)^{n-1}.$$

Como $a_1 = 1$ *e* $b_1 = \frac{4}{6}$*, podemos formar o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} \left(-4\sqrt{10}+14\right).c_2 & + & \left(4\sqrt{10}+14\right).c_3 & = & 1 \\ \left(\sqrt{10}-2\right).c_2 & + & \left(-\sqrt{10}-2\right).c_3 & = & \frac{4}{6} \end{cases}$$

Uma vez resolvido o sistema, chegamos ao seguinte resultado:

$$c_2 = \left(\frac{17\sqrt{10}+55}{180}\right) \quad e \quad c_3 = \left(\frac{-17\sqrt{10}+55}{180}\right).$$

Dessa maneira, facilmente temos a sequência a_n*, que é justamnte a que nos interessa:*

$$a_n = \left(\frac{5+\sqrt{10}}{10}\right).\left(\frac{34+11\sqrt{10}}{108}\right)^{n-1} + \left(\frac{5-\sqrt{10}}{10}\right).\left(\frac{34-11\sqrt{10}}{108}\right)^{n-1}$$

Obeserve que a probabilidade do primeiro jogador lançar o dado na n-ésima rodada e tirar 6 é $\frac{1}{6}a_n$*. Sendo* P *a probabilidade do primeiro jogador ganhar, temos:*

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6} a_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P = \left(\frac{5+\sqrt{10}}{60}\right).\sum_{n-1}^{\infty}\left(\frac{34+11\sqrt{10}}{108}\right)^{n-1} + \left(\frac{5-\sqrt{10}}{60}\right).\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{34-11\sqrt{10}}{108}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow P = \left(\frac{5+\sqrt{10}}{60}\right).\left(\frac{108}{74-11\sqrt{10}}\right) + \left(\frac{5-\sqrt{10}}{60}\right).\left(\frac{108}{74+11\sqrt{10}}\right)$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{1}{2370}.\left[\left(5+\sqrt{10}\right).\left(74+11\sqrt{10}\right) + \left(5-\sqrt{10}\right).\left(74-11\sqrt{10}\right)\right] \Leftrightarrow P = \frac{32}{79}.$$

Portanto, a probabilidade de o primeiro jogador ganhar é $P = \frac{32}{79}$*.* ■

Problema 5 (Áustria/Polônia - 98)

Considere n pontos, $P_1, P_2, ..., P_n$*, pertencentes nessa ordem a uma reta. Deve-se pintar estes pontos de branco, vermelho, verde, azul ou amarela. Uma coloração é admissível* *se cada dois pontos consecutivos P_i, P_{i+1} $(i = 1, 2, ..., n-1)$ são da mesma cor ou ao menos um deles é branco. Determine o número de colorações admissíveis.*

Solução:

Sejam as seguintes sequências: (a_n), (b_n) e (c_n), tais que

- *(a_n): o número de maneiras de pintar, de acordo com as restrições, n pontos, de modo que o último ponto seja branco;*
- *(b_n): o número de maneiras de pintar, de acordo com as restrições, n pontos, de modo que o último ponto não seja branco;*
- *(c_n): o o número total de maneiras de pintar, de acordo com as restrições, n pontos.*

Observe que, de maneira evidente, temos $a_1 = 1$, $b_1 = 4$ e $c_1 = 5$.

Por definição, nota-se que:

- *A quantidade total de maneiras de pintar $(n+1)$ pontos é a soma de todas as maneiras de pintar $(n+1)$ pontos de acordo com os tipos de sequências definidas, ou seja, onde o último ponto é branco, e onde o último ponto não é branco:*

$$c_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} \qquad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}. \tag{4.6}$$

- *A quantidade de maneiras de pintar $(n+1)$ pontos, em que o último ponto é branco, pode ser obtida desde que sejam inseridas as tonalidades dos n pontos anteriores, de acordo com as restrições, bastando pintar o último ponto de branco:*

$$a_{n+1} = c_n \qquad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

- *A quantidade de maneiras de pintar $(n+1)$ pontos pode ser obtida de duas formas. Uma delas é quando a tonalidade dos n pontos tem por último um ponto branco, bastando acrescentar mais um ponto no final, sendo esse de qualquer uma das cinco cores disponíveis. A outra forma é quando a tonalidade dos n pontos tem por último um ponto que não é branco, de modo que é necessário acrescentar o $(n+1)$-ésimo ponto com a cor branca, ou com a cor do n-ésimo ponto, portanto:*

$$c_{n+1} = 5a_n + 2b_n \qquad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}. \tag{4.8}$$

Substituindo (4.8) e 4.7 em 4.6, obtém-se:

$$b_{n+1} = 5a_n + 2b_n - c_n \qquad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}. \tag{4.9}$$

Dessa maneira, as equações (4.7), (4.8) e (4.9) formam o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_{n+1} & = & & & & & c_n \\ b_{n+1} & = & 5a_n & + & 2b_n & - & c_n \\ c_{n+1} & = & 5a_n & + & 2b_n & & \end{cases} \qquad n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Escrevendo-o em sua forma matricial $X_{n+1} = X_n.A$, segue que:

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix},\ X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} \quad e \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico associado ao sistema é:

$$p(\lambda) \ = \ \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 5 & 2-\lambda & -1 \\ 5 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda,$$

cujas raízes são:

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 0 \quad e \quad \lambda_3 = 3.$$

Para λ_k, tal que $k = 1, 2, 3$, tem-se:

$$(A - \lambda_k I) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\lambda_k & 0 & 1 \\ 5 & (2-\lambda_k) & -1 \\ 5 & 2 & -\lambda_k \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_k x & + & & + & z & = & 0 \\ 5x & + & (2-\lambda_k)\,y & - & z & = & 0 \\ 5x & + & 2y & - & \lambda_k z & = & 0 \end{cases}$$

Em seguida, substituindo λ_k, tal que $k = 1, 2, 3$, no sistema, sem muitos cálculos tem-se:

Para $\lambda_1 = -1$,

$$x = -z,\ y = 2z, \quad com \quad \vec{u_1} = z\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad tal\ que \quad z \neq 0.$$

Para $\lambda_2 = 0$,

$$x = -\frac{2}{5}y,\ z = 0, \quad com \quad \vec{u_2} = y\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad tal\ que \quad y \neq 0.$$

Para $\lambda_3 = 3$,

$$x = \frac{1}{3}z.\ y = \frac{2}{3}z, \quad com \quad \vec{u_3} = z\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad tal\ que \quad z \neq 0.$$

De acordo com as informações, observa-se que a multiplicidade geométrica para cada um dos autovalores, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ *e* $\lambda_3 = 3$ *é igual a 1. Sendo assim, a matriz* J *de Jordan similar à matriz* A *dos coeficientes tem o seguinte formato:*

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad com \quad \begin{cases} (A - \lambda_1 I).\vec{u_1} & = & 0 \\ (A - \lambda_2 I).\vec{u_2} & = & 0 \\ (A - \lambda_3 I).\vec{u_3} & = & 0 \end{cases}.$$

Logo, temos que a solução para o sistema de recorrência configura-se da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} X_n &= c_1.u_1.\alpha^{n-1} + c_2.u_2.\beta^{n-1} + c_3.u_3.\gamma^{n-1} \\ &= c_1.\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.(-1)^{n-1} + c_3.\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.3^{n-1}; \end{aligned}$$

com c_1 *e* c_3 *cosntantes arbitrárias.*

Como $a_1 = 1$ *e* $b_1 = 4$, *temos o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} -c_1 & + & \frac{1}{3}c_3 & = & 1 \\ 2c_2 & + & \frac{2}{3}c_3 & = & 4 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, temos que $c_1 = \frac{1}{2}$ *e* $c_3 = \frac{9}{2}$*, em que se torna fácil determinar a sequência* (c_n)*, a qual, por sua vez, é quantidade de colorações admissíveis:*

$$c_n = \frac{1}{2}\left[(-1)^{n-1} + 3^{n+1}\right] \qquad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Problema 6 (Italian Mathematical Olympiad - 1996)

Dado um alfabeto com três letras a, b, c, encontre o número de palavras de n letras com um número par de a's.

Solução:

Sejam as seguintes sequências:

- (T_n)*: a quantidade de palavras de n letras com um número ímpar de a's.*
- (S_n)*: a quantidade de palavras de n letras com um número par de a's.*

Observe que, pelo princípio fundamental da contagem, o número total de palavras com n letras que podem ser formadas com esse alfabeto é:

$$T_n + S_n = 3^n \qquad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}. \tag{4.10}$$

Por definição temos que:

- *para calcularmos a quantidade de palavras de* $(n+1)$ *letras com um número ímpar de a's; basta dispor as* T_n *palavras com uma quantidade ímpar de a's e, ao lado, inserir uma das letras b ou c, ou dispor as* S_n *palavras com uma quantidade par de a's e inserir ao lado uma letra a, sendo assim:*

$$T_{n+1} = 2T_n + S_n \qquad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N} \tag{4.11}$$

- *Para calcularmos a quantidade de palavras de* $(n+1)$ *letras com um número par de a's; basta dispor as* T_n *palavras com uma quantidade ímpar de a's e, ao lado, inserir uma letra a, ou dispor as* S_n *palavras com uma quantidade par de a's e inserir, ao lado uma das letras b ou c. Sendo assim:*

$$S_{n+1} = T_n + 2S_n \qquad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N} \tag{4.12}$$

Dessa maneira, as equações (4.11) e (4.12) formam o seguinte sistema de recorrência:

$$\begin{cases} T_{n+1} & = & 2T_n & + & S_n \\ S_{n+1} & = & T_n & + & 2S_n \end{cases} \qquad n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Escrevendo o sistema em sua forma matricial $X_{n+1} = A.X_n$*, temos que:*

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} T_{n+1} \\ S_{n+1} \end{bmatrix},\ X_n = \begin{bmatrix} T_n \\ S_n \end{bmatrix} \quad e \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Seja:

$$(A - \lambda I).\vec{u} = 0 \quad tal\ que \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad e \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq 0.$$

Para termos solução além da trivial, segue que:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 1 \\ 1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

Segue que $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$ *é o polinômio característico, cujas raízes são:*

$$\lambda_1 = 1 \quad e \quad \lambda_2 = 3.$$

Para λ_k *tal que* $k \in \{1, 2\}$*, temos:*

$$\begin{aligned} (A - \lambda_k I)\vec{u} = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} (2-\lambda_k) & 1 \\ 1 & (2-\lambda_k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (2-\lambda_k)\,x & + & y & = & 0 \\ x & + & (2-\lambda_k)\,y & = & 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Para $\lambda_1 = 1$*,*

$$x = -y,\ tal\ que\ \vec{u_1} = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad com \quad y \neq 0.$$

Para $\lambda_2 = 3$*,*

$$x = y, \quad tal\ que \quad \vec{u_2} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad com \quad y \neq 0.$$

Observamos que a multiplicidade geométrica dos autovalores $\lambda_1 = -1$ *e* $\lambda_2 = 3$ *são respectivamente iguais a 1, de modo que a matriz J de Jordan tem o seguinte formato:*

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad com \ \ U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}.$$

Sendo assim a solução do sistema de recorrência tem tal configuração:

$$X_n = c_1.u_1.\alpha^{n-1} + c_2.u_2.\beta^{n-1} \Leftrightarrow X_n = c_1. \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} 1^{n-1} + c_2. \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 3^{n-1},$$

com c_1 *e* c_2 *constantes arbitrárias. Dessa maneira, temos:*

$$T_n = -c_1 + c_2 3^{n-1} \ \ e \ \ S_n = c_1 + c_2 3^{n-1}.$$

É de fácil percepção o fato de que $T_1 = 1$ *e* $S_1 = 2$*. Sendo assim,* c_1 *e* c_2 *satisfazem o sistema abaixo:*

$$\begin{cases} -c_1 & + & c_2 & = & 1 \\ c_1 & + & c_2 & = & 2. \end{cases}$$

Um cálculo simples nos mostra que $c_1 = \frac{1}{2}$ *e* $c_2 = \frac{3}{2}$*. Portanto,*

$$T_n = \frac{1}{2}(-1 + 3^n) \qquad \forall\, n \geq 1, n \in \mathbb{N} \ \ e \ \ S_n = \frac{1}{2}(1 + 3^n) \qquad \forall\, n \geq 1, n \in \mathbb{N} \tag{4.13}$$

Sendo S_n *a sequência procurada. Vale ressaltar que, se somarmos os dois valores encontrados para* T_n *e* S_n *respectivamente, temos justamente o valor da equação (4.10).*

Problema 7 (OBM - 2010)

Diamantino gosta de jogar futebol, mas se jogar dois dias seguidos ele fica com dores musculares. De quantas maneiras Diamantino pode escolher em quais de dez dias seguidos ele vai jogar bola sem ter dores musculares? Uma maneira é não jogar futebol em nenhum dos dias.

Solução:

Vamos inicialmente definir as seguintes sequências:

- G_n: *O total de sequências formadas por* n *dias, tal que no último dia Diamantino não jogará futebol.*
- F_n: *O total de sequências formadas por* n *dias, tal que no último dia Diamantino jogará futebol.*
- H_n: *O total de sequências formada por* n *dias em que o garoto escolherá quando jogará ou não futebol.*

De imediato, por definição temos:

- *O total de sequências formadas por* n *dias em que o garoto escolherá quando jogará ou não futebol é:*

$$H_n = G_n + F_n \qquad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}. \tag{4.14}$$

- *O total de sequências com* $(n+1)$ *dias em que no último dia o garoto não jogará poderá ser calculado de duas maneiras. Uma delas, dispondo as* G_n *sequências em que o garoto não jogará no n-ésimo dia, e no* $(n+1)$*-ésimo dia o garoto também não jogará. Na outra, dispor as* F_n *sequências em que o garoto jogará no n-ésimo dia, e no* $(n+1)$*-ésimo dia o garoto não jogará; ou seja:*

$$G_{n+1} = G_n + F_n \qquad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}.. \tag{4.15}$$

- *O total de sequências com* $(n+1)$ *dias em que o garoto jogará no último dia poderá ser calculado dispondo as* G_n *sequências em que no n-énesimo dia o garoto não jogará e no* $(n+1)$ *dia o garoto jogará; a saber:*

$$F_{n+1} = G_n \qquad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}. \tag{4.16}$$

Sendo assim, as equações (4.15) e (4.16) formam o seguinte sistema:

$$\begin{cases} G_{n+1} &= G_n + F_n \\ F_{n+1} &= G_n \end{cases} \qquad n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Ou ainda, escrevendo-o em sua forma matricial $X_{n+1} = A \cdot X_n$*, em que:*

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} G_{n+1} \\ F_{n+1} \end{bmatrix},\ X_n = \begin{bmatrix} G_n \\ F_n \end{bmatrix} \quad e \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Um cálculo simples mostra que

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

é o polinômio característico associado ao sistema e que:

$$\lambda_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad e \quad \lambda_2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

são as suas raízes. Para λ_k *tal que* $k \in \{1, 2\}$*, temos que:*

$$(A - \lambda_k I).\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (1-\lambda_k) & 1 \\ 1 & (-\lambda_k) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} (1-\lambda_K)\,x & + & y & = & 0 \\ x & + & (-\lambda_k)\,y & = & 0 \end{array} \right. .$$

Susbstituindo λ_k *tal que* $k \in (1, 2)$*, temos que:*

para $\lambda_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$*,*

$$x = y\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \quad e \quad \vec{u_1} = y\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad com \quad y \neq 0.$$

para $\lambda_2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$*,*

$$x = y\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \quad e \quad \vec{u_2} = y\begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad com \quad y \neq 0.$$

Por meio dessas informações, temos que a multiplicidade geométrica para λ_1 *e* λ_2 *são iguais a 1. Logo, a matriz* J *de Jordan similar a* A *possui o seguinte formato:*

$$J = \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

Sendo assim, a solução do sistema de relações de recorrências tem o seguinte formato:

$$\begin{aligned} X_n &= c_1.u_1.\alpha^{n-1} + c_2.u_2.\beta^{n-1} \\ &= c_1.\begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ 1 \end{bmatrix}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + c_2.\begin{bmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ 1 \end{bmatrix}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}, \end{aligned}$$

com c_1 *e* c_2 *constantes arbitrárias. Sendo* $G_1 = 1$ *e* $F_1 = 1$*, temos:*

$$\begin{cases} c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & + & c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & = & 1 \\ c_1 & + & c_2 & = & 1 \end{cases}.$$

Por meio de um simples cálculo chegamos ao resultado:

$$c_1 = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right) \quad e \quad c_2 = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right).$$

Dessa forma, temos que

$$G_n = \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right).\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right).\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

e

$$F_n = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right).\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right).\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

Sendo assim, com esse resultado, temos a equação (4.14), que é a que nos convém:

$$H_n = \left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right).\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right).\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

Portanto, temos que:

$$\begin{aligned} H_{10} &= \left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right).\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{9} + \left(\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right).\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{9} \\ &= \left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right).\left(38+17\sqrt{5}\right) + \left(38-17\sqrt{5}\right).\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right) \\ &= \frac{760}{5} = 144. \end{aligned}$$

Problema 8 (Romênia - 1998)

Seja A_n o conjunto de códigos de comprimento n, formado pelo uso das letras a, b e c, dos quais nenhum contêm ocorrências consecutivas de a's ou ocorrências consecutivas de b's. Seja B_n o conjunto de códigos de comprimento n formado pelo uso das letras a, b e c, dos quais nenhum contêm três letras consecutivas distintas (portanto, pelo menos duas das três letras são iguais). Prove que $|B_{n+1}| = 3|A_n|$ para todo $n \geq 1$.

Solução:

Antes de tudo, vamos definir os seguintes subconjuntos de A_n:

- *X_n: conjunto de códigos de comprimento n, formados pelas letras a, b e c, em que não ocorrem letras a's ou b's consecutivas, e termina com a letra a.*
- *Y_n: conjunto de códigos de comprimento n, formados pelas letras a, b e c, em que não ocorre letras a's ou b's consecutivas, e termina com a letra b.*
- *Z_n: conjunto de códigos de comprimento n, formados pelas letras a, b e c, em que não ocorre letras a's ou b's consecutivas, e termina com a letra c.*

Para determinar o número de códigos de comprimento $(n+1)$ formados pelas letras a, b e c, em que não ocorrem letras a's ou b's consecutivas e termina com a letra a, ou seja, $|X_{n+1}|$. Devemos inserir uma letra a ao final de cada código que termina com as letras b ou c. À vista disso:

$$|X_{n+1}| = |Y_n| + |Z_n| \quad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Para determinar o número de códigos de comprimento $(n+1)$, formados pelas letras a, b e c, em que não ocorrem letras a's ou b's consecutivas e termina com a letra b, ou seja, $|Y_{n+1}|$. Devemos inserir uma letra b ao final de cada código que termina com as letras a ou c. Sendo assim:

$$|Y_{n+1}| = |X_n| + |Z_n| \quad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Para determinar o número de códigos de comprimento $(n+1)$ formados pelas letras a, b e c, em que não ocorrem letras a's ou b's consecutivas e termina com a letra c, ou seja, $|Z_{n+1}|$. Devemos inserir uma letra c ao final de cada código que termina com as letras a, b ou c. Desta forma:

$$|Z_{n+1}| = |X_n| + |Y_n| + |Z_n| \quad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, de maneira explícita, temos que:

$$|A_n| = |X_n| + |Y_n| + |Z_n| \quad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$|A_n| = |Z_{n+1}| \quad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

De maneira análoga, vamos definir os seguintes subconjuntos:

- T_n*: o conjunto de todos os códigos em* B_n *que terminam com as letras aa, bb ou cc.*
- W_n*: o conjunto de todos os códigos em* B_n *que terminam em ab, ac, ba, bc, ca ou cb.*

Para determinar os $|T_{n+1}|$ *códigos, deve-se inserir uma letra ao final de cada um dos* $|T_n|$ *códigos, de forma que ela já está determinada, uma vez que a letra precisa ser igual à letra final de um desses* T_n *códigos, ou inserir uma letra ao final de cada um dos* $|W_n|$ *códigos, de maneira que tal letra também está determinada, havendo a necessidade de que essa seja igual à letra final do código. Sendo assim:*

$$|T_{n+1}| = |W_n| + |T_n| \quad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Para determinar os $|W_{n+1}|$ *códigos, deve-se inserir uma letra ao final de cada um dos* $|T_n|$ *códigos, em que temos duas possibilidades de escolha para tal letra, pois é necessário que as últimas letras sejam distintas ou inserir uma letra ao final de cada um dos* $|W_n|$ *códigos, de maneira que, para satisfazer as condições impostas, é necessário que essa letra seja igual à penúltima letra de cada um dos* $|W_n|$ *códigos. Assim sendo:*

$$|W_{n+1}| = |W_n| + 2|T_n| \quad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Além do que, de maneira evidente, temos:

$$|B_n| = |W_n| + |T_n| \quad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

sendo assim,

$$|B_n| = |T_{n+1}| \quad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

À vista disso, podemos formar os seguintes sistemas de recorrências lineares:

$$(S): \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} |X_{n+1}| & = & & & |Y_n| & + & |Z_n| \\ |Y_{n+1}| & = & |X_n| & & & + & |Z_n| \\ |Z_{n+1}| & = & |X_n| & + & |Y_n| & + & |Z_n| \end{array} \right. \quad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N},$$

$$(R): \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} |W_{n+1}| & = & |W_n| & + & 2|T_n| \\ |T_{n+1}| & = & |W_n| & + & |T_n| \end{array} \right. \quad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N},$$

ou simplismente, $(S): \; S_{n+1} = A.S_n$ *e* $(R): \; R_{n+1} = B.R_n$*, tal que:*

$$S_{n+1} = \begin{bmatrix} |X_{n+1}| \\ |Y_{n+1}| \\ |W_{n+1}| \end{bmatrix}, \; S_n = \begin{bmatrix} |X_n| \\ |Y_n| \\ |Z_n| \end{bmatrix} \quad e \;\; A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_{n+1} = \begin{bmatrix} |W_{n+1}| \\ |T_{n+1}| \end{bmatrix}, \; R_n = \begin{bmatrix} |W_n| \\ |T_n| \end{bmatrix} \quad e \;\; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Os polinômios característicos das matrizes associadas A *e* B *são, respectivamente,*

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda + 1 \quad e \quad P(\gamma) = \gamma^2 - 2\gamma - 1,$$

cujas raízes de multiplicidade algébrica $m_a(\lambda_1) = m_a(\lambda_2) = m_a(\lambda_3) = 1$ *e* $m_a(\gamma_1) = m_a(\gamma_2) = 1$*, são as seguintes:*

$$\lambda_1 = -1, \; \lambda_2 = 1 + \sqrt{2}, \; \lambda_3 = 1 - \sqrt{2} \quad e \quad \gamma_1 = 1 + \sqrt{2}, \; \gamma_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

À luz disso, para λ_k*, tal que* $k = 1, \; 2, \; 3$*, temos:*

$$(A - \lambda_k I).\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (-\lambda_k) & 1 & 1 \\ 1 & (-\lambda_k) & 1 \\ 1 & 1 & (1-\lambda_k) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-\lambda_k)x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & (-\lambda_k)y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & (1-\lambda_k)z & = & 0 \end{cases}.$$

Após substituir no sistema λ_k*, tal que* $k = 1, 2, 3$*, temos*

para $\lambda_1 = -1$

$$x = -y, z = 0, \quad tal\ que \;\; \vec{u_1} = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad com \;\; y \neq 0,$$

para $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$

$$x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \textit{tal que} \quad \vec{u_2} = z \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \textit{com} \quad z \neq 0,$$

para $\lambda_3 = 1 - \sqrt{2}$

$$x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \textit{tal que} \quad \vec{u_3} = z \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \textit{com} \quad z \neq 0.$$

De maneira análoga, para γ_j*, tal que,* $j = 1, 2$*, verifica-se*

$$(B - \gamma_j I)\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (1-\gamma_j) & 2 \\ 1 & (1-\gamma_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\gamma_j)w & + & 2z & = & 0 \\ w & + & (1-\gamma_j)z & = & 0 \end{cases}.$$

Posteriormente, substituindo γ_j*, tal que,* $j = 1, 2$*, no sistema, decorre que*

para $\gamma_1 = 1 + \sqrt{2}$

$$w = z\sqrt{2}, \quad \textit{tal que} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \textit{com} \quad z \neq 0,$$

para $\gamma_1 = 1 - \sqrt{2}$

$$w = z\sqrt{2}, \quad \textit{tal que} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \textit{com} \quad z \neq 0.$$

Note que a multiplicidade geométrica para cada λ_k*, tal que* $k = 1, 2, 3$ *é igual, ou seja,* $m_g(\lambda_1) = m_g(\lambda_2) = m_g(\lambda_3) = 1$*. Assim como, para cada* γ_j*, tal que* $j = 1, 2$*, verifica-se que* $m_g(\gamma_1) = m_g(\gamma_2) = 1$*. Desse modo, as matrizes de Jordan* J_A *e* J_B*,* *similares a* A *e* B, *respectivamente, têm cada uma o seguinte formato:*

$$J_A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & (1-\sqrt{2}) \end{bmatrix}; \quad com \quad \begin{cases} (A-\lambda_1 I)\vec{u_1} &= 0 \\ (A-\lambda_2 I)\vec{u_2} &= 0 \\ (A-\lambda_3 I)\vec{u_3} &= 0 \end{cases}$$

$$J_B = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{2}) \end{bmatrix}; \quad com \quad \begin{cases} (B-\gamma_1 I)\vec{v_1} &= 0 \\ (B-\gamma_2 I)\vec{v_2} &= 0 \end{cases}.$$

Posto isso, segue que a solução para os sistemas (S) *e* (V) *figuram de tal maneira:*

$$S_n = c_1\vec{u_1}\lambda_1^{n-1} + c_2\vec{u_2}\lambda_2^{n-1} + c_3\vec{u_3}\lambda_3^{n-1} \quad e \quad V_n = c_4\vec{v_1}\gamma_1^{n-1} + c_5\vec{v_2}\gamma_2^{n-1},$$

ou, simplesmente,

$$\begin{bmatrix} |X_n| \\ |Y_n| \\ |Z_n| \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} (-1)^{n-1} + c_2 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} (1+\sqrt{2})^{n-1} + c_3 \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} (1-\sqrt{2})^{n-1},$$

$$\begin{bmatrix} |W_n| \\ |T_n| \end{bmatrix} = c_4 \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} (1+\sqrt{2})^{n-1} + c_5 \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} (1-\sqrt{2})^{n-1},$$

em que, c_1, c_2, c_3, c_4 *e* c_5 *são constantes arbitrárias.*

Note que $|X_1| = |Y_1| = |Z_1| = 1$, *assim sendo, temos o sistema linear:*

$$\begin{cases} -c_1 & + & \frac{\sqrt{2}}{2}c_2 & - & \frac{\sqrt{2}}{2}c_3 & = & 1 \\ c_1 & + & \frac{\sqrt{2}}{2}c_2 & - & \frac{\sqrt{2}}{2} & = & 1 \\ & & c_2 & + & c_3 & = & 1 \end{cases}$$

sem muitos esforços temos $C_1 = 0, c_2 = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ *e* $c_3 = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$.

De maneira análoga, nota-se que $|W_2| = 6$ *e* $|T_2| = 3$, *logo:*

$$\begin{cases} (2+\sqrt{2})c_4 & + & (2-\sqrt{2})c_5 & = & 6 \\ (1+\sqrt{2})c_4 & + & (1-\sqrt{2})c_5 & = & 3 \end{cases}$$

em que $c_4 = c_5 = \frac{3}{2}$.

Uma vez que $|A_n| = |Z_{n+1}| \quad \forall\, n \geq 1, \in \mathbb{N}$ *e* $|B_n| = |T_{n+1}| \quad \forall\, n \geq 1, \in \mathbb{N}$, *as sequências que possibilitam resolver o nosso problema são:*

$$\begin{aligned} |Z_n| &= \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^n + \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^n \quad \forall\, n \geq 1, \in \mathbb{N}, \\ |T_n| &= \frac{3}{2}(1+\sqrt{2})^{n-1} + \frac{3}{2}(1-\sqrt{2})^{n-1} \quad \forall\, n \geq 1, \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

por conseguinte,

$$\begin{aligned} |A_n| &= \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right] \quad \forall\, n \geq 1, \in \mathbb{N}, \\ |B_n| &= \frac{3}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{n} + (1-\sqrt{2})^{n}\right] \quad \forall\, n \geq 1, \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

de forma direta temos:

$$\begin{aligned} 3|A_n| &= \frac{3}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right] \quad \forall\, n \geq 1, \in \mathbb{N}, \\ |B_{n+1}| &= \frac{3}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right] \quad \forall\, n \geq 1, \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Portanto, fica provado que $|B_{n+1}| = 3|A_n| \quad \forall\, n \geq 1$. ■

Problema 9 (OBMU-2001)

Um ratinho está treinando para mudar de gaiola atravessando um túnel sempre que soa um alarme. O sistema de túneis é descrito na Figura 2. Se inicialmente o ratinho se encontrar na gaiola A e cada vez que soar o alarme o ratinho escolher qualquer um dos túneis incidentes à sua gaiola com probabilidade sem ser afetado por escolhas anteriores. Qual é probabilidade de que, depois do alarme soar 23 vezes, o ratinho ocupe a gaiola B?

Solução:

De início, observamos que após um número par de vezes em que soa o alarme, o ratinho pode ocupar apenas as gaiolas A, E ou C. Em contrapartida, após um número ímpar de vezes em que o alarme soa, o ratinho pode ocupar apenas as gaiolas B, D ou F.

(ii) *Sejam as seguintes sequências:*

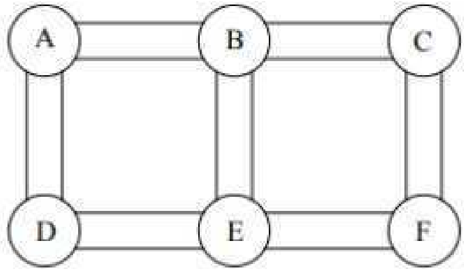

Figura 2 – Sistema de túneis.

- a_n: *A probabilidade de o ratinho ocupar, após n vezes em que o alarme soar, as gaiolas (B ou E).*

- b_n: *A probabilidade de o ratinho ocupar, após n vezes em que o alarme soar, as gaiolas (A, C, D ou F).*

Observe que:

- *Para calcular a probabilidade de o ratinho ocupar as gaiolas (B ou E) na* $(n+1)$*-ésima vez em que soar o alarme, é necessário que, caso o ratinho tenha ocupado uma das gaiolas de centro (B ou E) na n-ésima vez que soou o alarme, com probabilidade* a_n*, basta o ratinho escolher, na* $(n+1)$*-ésima vez que soar o alarme, a outra gaiola de centro, que será (B ou E), com probabilidade de* $\frac{1}{3}$ *para isso ocorrer. No entanto, se o ratinho tiver ocupado uma das gaiolas de canto (A, C, D ou F) na n-ésima vez que soou o alarme, com probabilidade* b_n*, basta o ratinho escolher na* $(n+1)$*-ésima vez que soar o alarme, uma das gaiolas de centro (B ou E) em concordância com a disponibilidade, com probabilidade de* $\frac{1}{2}$ *para que isso aconteça; assim sendo:*

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n.$$

- *Para calcular a probabilidade de o ratinho ocupar as gaiolas (A, C, D ou F) na* $(n+1)$*-ésima vez que soar o alarme, é necessário que, caso o ratinho tenha ocupado uma das gaiolas de centro (B ou E) na n-ésima vez que soou o alarme, com probabilidade* a_n*, basta o ratinho escolher, na* $(n+1)$*-ésima vez que soar o alarme, uma das duas casas de canto que se encontram disponíveis entre (A, C, D ou F), com probabilidade de* $\frac{2}{3}$ *para isso ocorrer. No entanto, se o ratinho tiver ocupado uma das gaiolas de canto (A, C, D ou F) na n-énesima vez que soou o alarme, com probabilidade* b_n*, basta o ratinho escolher, na* $(n+1)$*-ésima vez que* *soar o alarme, uma das gaiolas de canto (A, C, D ou F) em concordância com a disponibilidade, com probabilidade de* $\frac{1}{2}$ *para que isso aconteça; assim sendo:*

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n.$$

Sendo assim, temos o seguinte sistema de recorrência:

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \frac{1}{3}a_n &+ \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} &= \frac{2}{3}a_n &+ \frac{1}{2}b_n \end{cases}$$

Sendo $p(\lambda) = 6x^2 - 5x - 1$ *o polinômio característico da matriz* A *associada ao sistema acima, os autovalores associados são:*

$$\lambda_1 = 1 \quad e \quad \lambda_2 = -\frac{1}{6}.$$

Para λ_k*, tal que* $k \in \{1, 2\}$*, segue que:*

$$(A - \lambda_k I).\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3} - \lambda_k\right) & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \left(\frac{1}{2} - \lambda_k\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{3} - \lambda_k\right)x &+ \frac{1}{2}y &= 0 \\ \frac{2}{3}x &+ \left(\frac{1}{2} - \lambda_k\right)y &= 0 \end{cases}$$

Substituindo λ_k *tal* $k \in \{1, 2\}$*, segue que:*

Para $\lambda_1 = 1$*,*

$$x = \frac{3}{4}y, \quad tal\ que \quad \vec{u_1} = y \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad com \quad y \neq 0.$$

Para $\lambda_2 = -\frac{1}{6}$*,*

$$x = -y, \quad tal\ que \quad \vec{u_2} = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad com \quad y \neq 0.$$

Diante disso, temos que a multiplicidade geométrica para ambos os autovalores é igual, ou seja, $mg(\lambda_1) = mg(\lambda_2) = 1$*. Logo a matriz* J *de Jordan assume o seguinte formato:*

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad com \quad \begin{cases} (A - \lambda_1 I)\vec{u_1} &= 0 \\ (A - \lambda_2 I)\vec{u_2} &= 0 \end{cases}$$

Dessa forma, a solução do sistema de relações de recorrências possui a seguinte configuração:

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = c_1.\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix} + c_2.\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1},$$

com c_1 *e* c_2 *constantes arbitrárias.*

Atentando-se ao fato de que $a_1 = b_1 = \frac{1}{2}$*, podemos formar o seguinte sistema linear:*

$$\begin{cases} \frac{3}{4}c_1 & - & c_2 & = & \frac{1}{2} \\ c_1 & + & c_2 & = & \frac{1}{2} \end{cases}$$

Uma vez solucionado o sistema, temos que $c_1 = \frac{4}{7}$ *e* $-\frac{1}{14}$*. Com isso, chegamos à sequência pretendida:*

$$a_n = \frac{3}{7} + \frac{1}{14}.\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}.$$

Portanto, para $n = 23$*, segue que:*

$$a_{23} = \frac{3}{7} + \frac{1}{14}.\left(-\frac{1}{6}\right)^{22} \Leftrightarrow a_{23} = \frac{3}{7}.\left(1 + \frac{1}{6^{23}}\right).$$

Problema 10 (IMO-1979/6)

Sejam A e E vértices opostos de um octógono regular. Um sapo começa a pular no vértice A. De qualquer vértice do octógono, exceto E, ele pode pular para qualquer um dos dois vértices adjacentes. Quando atinge o vértice E, o sapo fica lá. Seja a_n *o número de caminhos distintos de exatamente n saltos terminando em E. Prove que*

$$a_{2n-1} = 0 \quad e \quad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(2+\sqrt{2}\right)^{n-1} - \left(2-\sqrt{2}\right)^{n-1}\right\}, \quad n = 1, 2, 3....$$

Solução:

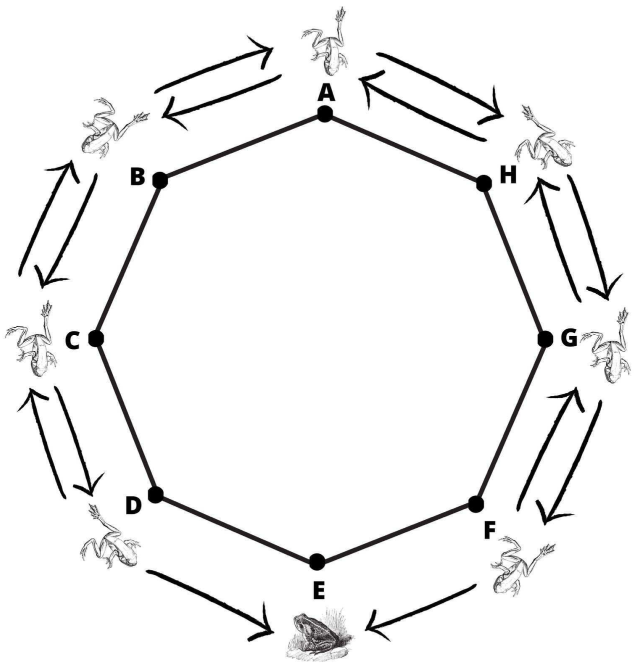

Figura 3 – Problema do salto do sapo.

Observando-se o octógono na Figura 3, pode-se constatar que o número de arestas que une os vértices A e E é sempre par, logo, torna-se impossível partir do vértice A até o E com um número ímpar de saltos, portanto $a_{2n-1} = 0 \ \ \forall \ n \geq 1$.

Para a resolução do segundo item, de início, suponhamos que o sapo comece pulando do vértice C ou G, e, em seguida, vamos definir as seguintes sequências:

- c_n: *número de caminhos distintos com exatamente n saltos, onde o sapo começa pulando do vértice C e, a partir deste, termina em E; tal que* $n \geq 1$.
- g_n: *número de caminhos distintos com exatamente n saltos, onde o sapo começa pulando do vértice G e, a partir deste, termina em E; tal que* $n \geq 1$.

De maneira explícita, observa-se pela simetria da figura que $c_n = g_n$.

Por definição, observamos que, pulando de início no vértice A, existem 4 maneiras de o sapo se mover nos dois saltos iniciais:

$$A \longrightarrow B \longrightarrow A,$$

$$A \longrightarrow H \longrightarrow A,$$

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C,$$

$$A \longrightarrow H \longrightarrow G.$$

Por outro lado, seguindo a definição, observamos que existem três maneiras de o sapo se mover nos dois saltos iniciais se começar pulando no vértice C:

$$C \longrightarrow B \longrightarrow C,$$
$$C \longrightarrow D \longrightarrow C,$$
$$C \longrightarrow B \longrightarrow A.$$

De modo análogo, se o sapo começar a pular pelo vértice G, existem três maneiras para ele se mover nos dois saltos iniciais:

$$G \longrightarrow H \longrightarrow G,$$
$$G \longrightarrow F \longrightarrow G,$$
$$G \longrightarrow H \longrightarrow A.$$

Para calcularmos a_n, *procederemos da seguinte maneira:*

- *Observemos que, para determinar* a_n, *se o sapo der os dois saltos iniciais e retornar ao ponto A, tendo em vista dois caminhos possíveis para tal, basta ele dar* a_{n-2} *saltos partindo de A até chegar ao vértice E. Por outro lado, se o sapo der os dois pulos iniciais e não voltar para o ponto A, veremos que tais sequências terminam em C, ou em G. Dessa forma, terminando em C, basta dar* c_{n-2} *saltos até chegar a E, ou se, terminando em G, proceder de forma análoga. Sendo assim:*

$$a_n = 2a_{n-2} + 2c_{n-2}, \ \forall n \geq 2.$$

Para calcularmos c_n *sucederemos da seguinte maneira:*

- *Observemos que, para determinar* c_n, *se o sapo der os dois saltos iniciais partindo de C e terminar no ponto A, basta ele dar* a_{n-2} *saltos partindo de A até chegar ao vértice E. Por outro lado, se o sapo der os dois pulos iniciais e voltar para o ponto C, tendo em vista dois caminhos possíveis para tal, basta ele dar* c_{n-2} *saltos até chegar no ponto E. Sendo assim:*

$$c_n = a_{n-2} + 2c_{n-2}, \ \forall n \geq 2.$$

Dessa forma, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_n &= 2a_{n-2} + 2c_{n-2} \\ c_n &= a_{n-2} + 2c_{n-2} \end{cases}$$

para todo $n \geq 2$.

Observemos ainda que os termos ímpares da sequência $\{a_n\}$ *são iguais a zero, logo, os termos que nos interessam são da forma:*

$$a_{2n} \;=\; 2a_{2(n-1)} + 2c_{2(n-1)}, \;\forall n \;\geq 1,$$

$$c_{2n} \;=\; a_{2(n-1)} + 2c_{2(n-1)}, \;\forall n \;\geq 1.$$

Portanto, fazendo a seguinte substituição de variáveis, $a_{2n} = W_n$ *e* $c_{2n} = L_n$, *temos:*

$$\begin{cases} a_{2n} &= 2a_{2(n-1)} + 2c_{2(n-1)} \\ c_{2n} &= a_{2(n-1)} + 2c_{2(n-1)} \end{cases} \quad \forall \; n \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} W_n &= 2W_{n-1} + 2L_{n-1} \\ L_n &= W_{n-1} + 2L_{n-1} \end{cases} \quad \forall \; n \geq 1.$$

Esse último sistema reescreveremos em sua forma matricial, $X_n = A.X_{n-1}, \; \forall n \geq 1$, *em que o mesmo é equivalente a* $X_{n+1} = A.X_n, \; \forall n \geq 0$, *tal que:*

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} W_{n+1} \\ L_{n+1} \end{bmatrix}, \; X_n = \begin{bmatrix} W_n \\ L_n \end{bmatrix} \quad e \;\; A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico da matriz associada é:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 2.$$

Como as raízes de p são os autovalores:

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{2} \quad e \quad \lambda_2 = 2 - \sqrt{2}.$$

Para λ_k, *tal que* $k = 1, 2$, *decorre que:*

$$(A - \lambda_k I).\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (2-\lambda_k) & 2 \\ 1 & (2-\lambda_k) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2-\lambda_k)\,x & + & 2y & = & 0 \\ x & + & (2-\lambda_k)\,y & = & 0 \end{cases}.$$

Substituindo λ_k *tal que* $k = 1, 2$, *de modo elementar, ocorre que:*

Para $\lambda_1 = 2 + \sqrt{2}$,

$$x = y\sqrt{2}, \quad e \ \ \vec{u}_1 = y \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad com \ \ y \neq 0.$$

Para $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}$,

$$x = -y\sqrt{2}, \quad e \ \ \vec{u}_2 = y \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad com \ \ y \neq 0.$$

À vista dessas informações, observa-se que ambos os autovalores, λ_1 *e* λ_2, *têm a mesma multiplicidade geométrica, ou seja,* $mg(\lambda_1) = mg(\lambda_2) = 1$. *Dessa forma, a matriz* J *de Jordan apresenta o seguinte aspecto:*

$$J = \begin{bmatrix} \left(2+\sqrt{2}\right) & 0 \\ 0 & \left(2-\sqrt{2}\right) \end{bmatrix} \quad com \quad \begin{cases} (A-\lambda_1 I).\vec{u}_1 & = & 0 \\ (A-\lambda_2 I).\vec{u}_2 & = & 0 \end{cases}.$$

Logo, a solução para o sistema de recorrências assume o seguinte formato:

$$X_n \;\; = \;\; c_1.u_1.\alpha^{n-1} + c_2.u_2.\beta^{n-1}.$$

Ou, equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} W_n \\ L_n \end{bmatrix} = c_1. \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}. \left(2+\sqrt{2}\right)^{n-1} + c_2. \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}. \left(2-\sqrt{2}\right)^{n-1},$$

com c_1 *e* c_2 *constantes arbitrárias.*

É de fácil percepção que $W_1 = a_2 = 0$ *e* $W_2 = a_4 = 2$, *dessa forma, segue que:*

$$\begin{cases} c_1\sqrt{2} & - & c_2\sqrt{2} & = & 0 \\ c_1\left(2\sqrt{2}+2\right) & - & c_2\left(2\sqrt{2}-2\right) & = & 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos que $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, *assim sendo:*

$$W_n = \frac{\sqrt{2}}{2}.\left(2+\sqrt{2}\right)^{n-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\left(2-\sqrt{2}\right)^{n-1},$$

consequentemente,

$$a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\left\{\left(2+\sqrt{2}\right)^{n-1} - \left(2-\sqrt{2}\right)^{n-1}\right\}.$$

■

5 Recorrências Lineares com Coeficientes Constantes.

Neste Capítulo abordaremos as relações de recorrências lineares com coeficientes constantes de segunda ordem e de terceira ordem. Para tanto, transformamos cada recorrência linear em um sistema linear de relações de recorrências lineares de primeira ordem com coeficientes constantes com duas e três incógnitas, respectivamente, e, a partir dos estudos realizados nos capítulos anteriores, estabelecemos a solução de cada uma delas.

5.1 Recorrência Linear de Segunda Ordem Homogênea

Sejam a, b *e* c *constantes reais com* $a \cdot c \neq 0$. *Considere a recorrência linear de segunda ordem, abaixo:*

$$a \cdot s_{n+2} + b \cdot s_{n+1} + c \cdot s_n = 0, \quad \textit{com} \;\; a \cdot c \neq 0 \;\; \textit{e} \;\; b^2 - 4ac \geq 0. \tag{5.1}$$

Observação: *O caso* $c = 0$ *pode ser visto como uma recorrência linear de primeira ordem. A condição* $b^2 - 4ac \geq 0$ *garante que as raízes da equação característica da recorrência linear sejam todas reais.*

Vamos transformar a recorrência linear de segunda ordem (5.1) em um sistema linear de relações de recorrências lineares de primeira ordem. Para tanto, devemos considerar a seguinte mudança de variáveis:

$$x_n = s_n, \quad y_n = s_{n+1}.$$

Observe que,

$$(S) \quad \begin{cases} x_{n+1} &= & s_{n+1} = 0 \cdot x_n + 1 \cdot y_n \\ y_{n+1} &= & s_{n+2} = \left(-\frac{c}{a}\right) x_n - \left(\frac{b}{a}\right) y_n \end{cases}$$

Ou ainda,

$$(S) \quad \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

Logo, s_n *é solução de (5.1) se, e somente se,* (x_n, y_n) *é solução do sistema (S) acima. Os autovalores da matriz A dos coeficientes do sistema (S) são as raízes do polinômio característico*

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \left(\frac{b}{a}\right) \lambda + \frac{c}{a}.$$

Logo, os autovalores satisfazem a seguinte equação do segundo grau:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \tag{5.2}$$

A equação (5.2) também é conhecida como ***equação característica*** *da recorrência linear (5.1).*

Sejam $\lambda_1 = \alpha$ *e* $\lambda_2 = \beta$ *as duas raízes reais da equação (5.2). Relembremos que* $m_a(\lambda)$ *representa a multiplicidade algébrica do autovalor* λ*, enquanto* $m_g(\lambda)$ *representa a multiplicidade geométrica do autovalor* λ*. No que segue, temos dois casos a considerar:*

1. $m_g(\alpha)+m_g(\beta) = 2$*. Neste caso, a matriz de Jordan similar à matriz* A *é diagonal, dada por*

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix},$$

e a solução do sistema (S) é dada por

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = c_1\vec{u}_1\alpha^{n-1} + c_2\vec{u}_2\beta^{n-1}$$

em que u_1, u_2 *são os autovetores associados aos autovalores* α *e* β*, respectivamente. Observando a primeira coordenada do vetor solução* X_n *deduzimos, em particular, que*

$$s_n = C_1\alpha^{n-1} + C_2\beta^{n-1}$$

2. $\alpha = \beta$ *e* $m_g(\alpha) = 1 < 2$*. Neste caso, a matriz de Jordan similar à matriz* A *é dada por*

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

e a solução do sistema (S) é dada por

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = c_1\left(u_1\alpha^{n-1} + u_2(n-1)\alpha^{n-2}\right) + c_2u_2\alpha^{n-1},$$

com

$$(A - \alpha I)u_2 = 0 \quad e \quad (A - \alpha I)u_1 = u_2.$$

Observando a primeira coordenada do vetor solução X_n *deduzimos, em particular, que*

$$s_n = C_1\alpha^{n-1} + C_2(n-1)\alpha^{n-2}$$

5.2 Recorrência Linear de Terceira Ordem Homogênea

Sejam a, b, c e d constantes reais com $a \cdot d \neq 0$. Considere a recorrência linear de terceira ordem abaixo:

$$a \cdot s_{n+3} + b \cdot s_{n+2} + c \cdot s_{n+1} + d \cdot s_n = 0. \tag{5.3}$$

Observação: *O caso $d = 0$ pode ser visto como uma recorrência linear de segunda ordem, já estudada na Seção anterior.*

Vamos transformar a recorrência linear (5.3) em um sistema linear de relações de recorrências lineares de primeira ordem. Para tanto, considere a seguinte mudança de variáveis:

$$x_n = s_n, \quad y_n = s_{n+1} \quad e \quad z_n = s_{n+2}.$$

Observe que,

$$(S) \quad \begin{cases} x_{n+1} &= s_{n+1} = 0 \cdot x_n + 1 \cdot y_n + 0 \cdot z_n \\ y_{n+1} &= s_{n+2} = 0 \cdot x_n + 0 \cdot y_n + 1 \cdot z_n \\ z_{n+1} &= s_{n+3} = -\left(\frac{d}{a}\right) x_n - \left(\frac{c}{a}\right) y_n - \left(\frac{b}{a}\right) z_n \end{cases}$$

Ou ainda,

$$(S) \quad \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{d}{a} & -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

Logo, s_n é solução de (5.1) se, e somente se, (x_n, y_n, z_n) é solução do sistema (S) acima. Os autovalores da matriz A dos coeficientes do sistema (S) são as raízes do polinômio característico

$$\begin{aligned} p(\lambda) = det(A - \lambda I) &= det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -\frac{d}{a} & -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} - \lambda \end{bmatrix} \\ &= -\left(\lambda^3 + \frac{b}{a}\lambda^2 + \frac{c}{a}\lambda + \frac{d}{a}\right). \end{aligned}$$

Logo, os autovalores satisfazem à seguinte equação do terceiro grau

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0. \tag{5.4}$$

A equação (5.4) também é conhecida como ***equação característica*** *da recorrência linear (5.3).*

Sejam $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = \beta$ e $\lambda_3 = \gamma$ as três raízes reais da equação (5.4). Relembremos que $m_a(\lambda)$ representa a multiplicidade algébrica do autovalor λ, enquanto $m_g(\lambda)$ representa a multiplicidade geométrica do autovalor λ. No que segue, temos três casos a considerar:

1. $m_g(\alpha) + m_g(\beta) + m_g(\gamma) = 3$. *Neste caso, a matriz de Jordan similar à matriz A é diagonal, dada por*

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix},$$

e a solução do sistema (S) é dada por

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = c_1 u_1 \alpha^{n-1} + c_2 u_2 \beta^{n-1} + c_3 u_3 \gamma^{n-1}$$

em que u_1, u_2, u_3 são os autovetores associados aos autovalores α, β e γ, respectivamente. Observando a primeira coordenada do vetor solução X_n deduzimos, em particular, que

$$s_n = C_1 \alpha^{n-1} + C_2 \beta^{n-1} + C_3 \gamma^{n-1}.$$

2. $\alpha = \beta$ *e* $m_g(\alpha) + m_g(\gamma) = 2 < 3$. *Neste caso, a matriz de Jordan similar à matriz A é dada por*

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

e a solução do sistema (S) é dada por

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = c_1 \left(u_1 \alpha^{n-1} + u_2 (n-1) \alpha^{n-2} \right) + c_2 u_2 \alpha^{n-1} + c_3 u_3 \gamma^{n-1},$$

com

$$(A - \alpha I) u_3 = 0, \quad (A - \alpha I) u_2 = 0 \quad e \quad (A - \alpha I) u_1 = u_2.$$

Observando a primeira coordenada do vetor solução X_n deduzimos, em particular, que

$$s_n = C_1 \alpha^{n-1} + C_2 (n-1) \alpha^{n-2} + C_3 \gamma^{n-2}.$$

3. $\alpha = \beta = \gamma$ *e* $m_g(\alpha) = 1 < 3$. *Neste caso, a matriz de Jordan similar à matriz A é dada por*

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

e a solução do sistema (S) é dada por

$$
\begin{aligned}
X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} &= c_1\left(u_1\alpha^{n-1} + u_2(n-1)\alpha^{n-2} + u_3\frac{(n-1)(n-2)}{2}\alpha^{n-3}\right) \\
&+ c_2\left(u_2\alpha^{n-1} + u_3(n-1)\alpha^{n-2}\right) + c_3u_3\alpha^{n-1},
\end{aligned}
$$

com

$$(A-\alpha I)u_3 = 0, \quad (A-\alpha I)u_2 = u_3 \quad e \quad (A-\alpha I)u_1 = u_2.$$

Observando a primeira coordenada do vetor solução X_n deduzimos, em particular, que

$$s_n = C_1\alpha^{n-1} + C_2(n-1)\alpha^{n-2} + C_3(n-1)(n-2)\alpha^{n-3}.$$

5.3 Exemplos de recorrências Lineares Homogêneas

Nesta Seção apresentamos mais exemplos dos casos tratados nas Seções anteriores desse Capítulo, a saber Seções 5.1 e 5.2.

5.3.1 Recorrência Linear de Segunda Ordem Homogênea

Exemplo 1. *Resolva a seguinte relação de recorrência:*

$$a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n, \quad para \quad n \geq 0, \; a_0 = 2 \quad e \quad a_1 = 4.$$

Solução:

De início faremos a seguinte mudança de variável $x_n = a_n$ e $y_n = a_{n+1}$. Dessa forma, temos o seguinte sistema:

$$
\begin{cases}
x_{n+1} = + y_n \\
y_{n+1} = -10x_n + 7y_n
\end{cases}
\quad \forall\, n \geq 1, n \in \mathbb{N}
$$

ou, ainda,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}}_{X_{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}}_{X_n}.$$

Um cálculo simples nos mostra que $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = 5$ *são os autovalores da matriz* A *dos coeficientes do sistema, com multiplicidade algébrica* $ma(\lambda_1) = ma(\lambda_2) = 1$, *e autovetores associados dados por:*

$$\vec{u_1} = y \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \vec{u_2} = y \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad com \quad y \neq 0.$$

Observa-se que a multiplicidade geométrica para ambos os autovalores é igual, ou seja, $mg(\lambda_1) = mg(\lambda_2) = 1$. *Assim, a matriz de Jordan similar à matriz* A *assume a forma:*

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad com \quad \begin{cases} (A - \lambda_1 I)u_1 = 0 \\ (A - \lambda_2 I)u_2 = 0 \end{cases}.$$

Portanto, a solução do sistema é dada por:

$$X_n = C_1 u_1 \lambda_1^{n-1} + C_2 u_2 \lambda_2^{n-1}.$$

Ou, ainda,

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix} 5^{n-1}.$$

Como $x_0 = 2$ *e* $x_1 = 4$, *temos que:*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}C_1 & + & \frac{1}{25}C_2 & = & 2 \\ \frac{1}{2}C_1 & + & \frac{1}{5}C_2 & = & 4 \end{cases};$$

de maneira que $C_1 = 3$ *e* $C_2 = \frac{25}{2}$. *Portanto, como* $x_n = a_n$, *temos como solução da recorrência:*

$$a_n = \frac{1}{2}5^n + \frac{3}{2} \quad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 2. (Sout Alabama) *Determine a fórmula explícita de* a_n *em função de* n*, da sequência definida por* $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$*, para* $n \geq 1$*, sendo dados* $a_1 = 5, a_2 = 5$.

Solução:

Façamos a seguinte substituição de variável, $x_n = a_n$ *e* $y_n = a_{n+1}$*, resultando no sistema de recorrência:*

$$\begin{cases} x_{n+1} &= & & & y_n \\ y_{n+1} &= & -x_n & + & 2y_n \end{cases} \quad \forall\; n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

ou, de forma matricial,

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Por meio de cálculos explícitos, temos que $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ *é o autovalor de multiplicidade algébrica igual a 2, da matriz* A *dos coeficientes do sistema, com autovetores associados dados por:*

$$\vec{u_1} = \begin{bmatrix} -1+y \\ y \end{bmatrix}; \quad com \quad y \in \mathbb{R}, \quad sendo \quad y = 1, \quad então \quad \vec{u_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad e$$

$$\vec{u_2} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad tal\ que \quad y \neq 0.$$

Observa-se que a multiplicidade geométrica para o autovalor $\lambda = 1$ *é 1, isto é:* $mg(\lambda) = 1$. *Assim, a matriz de Jordan,* J*, similar à matriz* A *possui a seguinte configuração:*

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad com \quad \begin{cases} (A - \lambda I)\vec{u}_1 &= \vec{u}_2 \\ (A - \lambda I)\vec{u}_2 &= 0 \end{cases}.$$

Diante isso, temos a solução do sistema dada da seguinte forma:

$$X_n = C_1 \left(u_1 \lambda^{n-1} + u_2 (n-1) \lambda^{n-2} \right) + C_2 u_2 \lambda^{n-1}.$$

Consequentemente,

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = C_1\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + C_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, como $x_n = a_n$, *segue que:*

$$a_n = C_1(n-1) + C_2;$$

como $a_1 = a_2 = 1$, *temos o seguinte sistema linear, de fácil resolução:*

$$\begin{cases} C_2 & = 5 \\ C_1 + C_2 & = 7 \end{cases} ; \quad onde \quad C_1 = 2 \quad e \quad C_2 = 5.$$

Portanto, a fórmula explícita é:

$$a_n = 2(n-1) + 5 \quad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 3. *Um modelo para o número de lagostas capturadas por ano é baseado no fato de que o número de lagostas capturadas num certo ano é igual à média aritmética do número de lagostas capturadas nos dois anos anteriores. Sendo* L_n *o número de lagostas capturadas no ano n, determine:*

(a) uma relação de recorrência que seja satisfeita pela sequência $(L_n)_{n\geq 1}$*;*

(b) uma fórmula explícita para L_n*, se no primeiro ano de observação foram capturadas* 10.000 *lagostas e no segundo,* 30.000 *lagostas.*

Solução:

Para o item (a), o número de lagostas capturadas num certo ano é igual à média aritmética do número de lagostas capturadas nos dois anos anteriores. Logo temos a seguinte relação de recorrência:

$$L_{n+2} = \frac{1}{2}L_{n+1} + \frac{1}{2}L_n \quad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Para o item (b), vamos utilizar o resultado do item (a), fazendo a seguinte substituição de variável, $L_n = x_n$ *e* $L_{n+1} = y_n$*, que resulta no seguinte sistema:*

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & & y_n \\ y_{n+1} & = & \frac{1}{2}x_n & + \frac{1}{2}y_n \end{cases} \qquad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N},$$

ou, simplesmente,

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Um cálculo simples nos mostra que $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ *e* $\lambda_2 = 1$ *são os autovalores da matriz* A *dos coeficientes do sistema, de multiplicidade algébrica* $ma(\lambda_1) = ma(\lambda_2) = 1$, *com autovetores associados dados por:*

$$\vec{u_1} = y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \vec{u_2} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad com \quad y \neq 0.$$

Observa-se que a multiplicidade geométrica para ambos os autovalores é igual, ou seja, $mg(\lambda_1) = mg(\lambda_2) = 1$. *Assim, a matriz de Jordan similar à matriz* A *possui a seguinte estrutura:*

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad com \quad \begin{cases} (A - \lambda I)\vec{u_1} & = & 0 \\ (A - \lambda I)\vec{u_2} & = & 0 \end{cases}$$

Sendo assim, a solução do sistema dá-se por:

$$X_n = C_1 u_1 \alpha^{n-1} + C_2 u_2 \beta^{n-1}$$

Ou, equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como $x_1 = 10.000$ *e* $y_1 = 30.000$ *segue que:*

$$\begin{cases} -2C_1 & + & C_2 = 10.000 \\ C_1 & + & C_2 = 30.000 \end{cases};$$

de maneira que $C_1 = \frac{20.000}{3}$ *e* $C_2 = \frac{70.000}{3}$. *Por conseguinte, como* $x_n = L_n$ *temos como solução da recorrência original:*

$$L_n = -\frac{40.000}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{70.000}{3} \quad \forall\, n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 4. *Sejam* $a_1 = a_2 = 1$ *e* $a_{n+2} = 2022a_{n+1} + 2023a_n$ *para* $n \geq 1$. *Determine o resto da divisão de* a_{2023} *por 7.*

Solução:

Façamos a seguinte mudança de variável $x_n = a_n$ *e* $y_n = a_{n+1}$. *Sendo assim temos o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} x_{n+1} &= & & y_n \\ y_{n+1} &= 2023x_n &+ & 2022y_n \end{cases} \qquad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N},$$

ou, diante disso,

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2023 & 2022 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Por meio de cálculos elementares, temos que $\lambda_1 = -1$ *e* $\lambda_2 = 2023$ *são os autovalores, de multiplicidade algébrica* $m_a(\lambda_1) = m_a(\lambda_2) = 1$, *da matriz* A *dos coeficientes do sistema, com autovetores associados dados por:*

$$\vec{u_1} = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \vec{u_2} = y \begin{bmatrix} \frac{1}{2023} \\ 1 \end{bmatrix} \quad com \quad y \neq 0.$$

Observa-se que a multiplicidade geométrica para ambos os autovalores é igual, ou seja, $m_g(\lambda_1) = m_g(\lambda_2) = 1$. *Assim, a matriz de Jordan similar à matriz* A *é da forma:*

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2023 \end{bmatrix} \quad com \quad \begin{cases} (A - \lambda I)\vec{u_1} &= 0 \\ (A - \lambda I)\vec{u_2} &= 0 \end{cases}.$$

Por conseguinte, a solução do sistema é dada por:

$$X_n = C_1 u_1 (-1)^{n-1} + C_2 u_2 2023^{n-1}$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} (-1)^{n-1} + C_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2023} \\ 1 \end{bmatrix} 2023^{n-1}.$$

Como $x_1 = x_2 = 1$*, ocorre que:*

$$\begin{cases} -C_1 & + & \frac{1}{2023}C_2 & = & 1 \\ C_1 & + & C_2 & = & 1 \end{cases}$$

de modo que $C_1 = -\frac{1011}{1012}$ *e* $C_2 = \frac{2023}{1012}$*. Consequentemente, como* $x_n = a_n$*, segue que:*

$$a_n = \frac{1}{1012}2023^{n-1} + \frac{1011}{1012}\left(-1\right)^{n-1} \quad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N},$$

portanto,

$$a_{2023} = \frac{2023^{2022}}{1012} + \frac{1011}{1012}$$

Observa-se que:

$$a_{2023} = \frac{2023^{2022}}{1012} + \frac{2023 - 1012}{1012} \Leftrightarrow a_{2023} = \frac{2023\left(2023^{2021} + 1\right)}{1012} - 1$$

Fazendo uso de congruência modular, segue que:

$$\begin{aligned} 2023 \equiv -1 \pmod{1012} \ &\Leftrightarrow\ 2023^{2021} \equiv -1 \pmod{1012} \\ &\Leftrightarrow\ 2023^{2021} + 1 \equiv 0 \pmod{1012}. \end{aligned}$$

Ou seja, $1012 \mid 2023^{2021} + 1$*, então existe* $k \in \mathbb{Z}$*, tal que* $2023^{2021} + 1 = 1012k$*. Dessa forma, temos*

$$a_{2023} = \frac{2023\left(1012k\right)}{1012} - 1 \Leftrightarrow a_{2023} = 7\left(289k - 1\right) + 6.$$

Portanto, o resto é 6. ■

5.3.2 Recorrência Linear de terceira Ordem Homogênea

Exemplo 1. *Resolva a seguinte relação de recorrência:*

$$a_{n+3} = 10a_{n+2} - 31a_{n+1} + 30a_n, \quad \textit{para} \;\; n \geq 0, \quad a_0 = 5, \quad a_1 = 10 \;\; \textit{e} \;\; a_2 = 15.$$

Solução:

Façamos a seguinte substituição de variável, $x_n = a_n$, $y_n = a_{n+1}$ *e* $z_n = a_{n+2}$, *isto posto, temos o sistema:*

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & & & y_n & & \\ y_{n+1} & = & & & & & z_n \\ z_{n+1} & = & 30x_n & - & 31y_n & + & 10z_n \end{cases} \qquad \forall\, n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Por meio de cálculos rudimentares, segue que $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ *e* $\lambda_3 = 5$ *são os autovalores, de multiplicidade algébrica* $ma(\lambda_1) = ma(\lambda_2) = ma(\lambda_3) = 1$, *da matriz* A *dos coeficientes do sistema, com autovetores associados dados por:*

$$\vec{u_1} = z \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u_2} = z \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \vec{u_3} = z \begin{bmatrix} \frac{1}{25} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \textit{tal que} \quad z \neq 0.$$

Verifica-se que a multiplicidade geométrica para ambos os autovalores é igual, ou seja, $mg(\lambda_1) = mg(\lambda_2) = (\lambda_3) = 1$. *Assim, a matriz de Jordan similar à matriz* A *possui a seguinte característica:*

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}; \quad com \quad \begin{cases} (A - \lambda_1 I) & = & 0 \\ (A - \lambda_2 I) & = & 0 \\ (A - \lambda_3 I) & = & 0 \end{cases}.$$

Logo, a solução do sistema de recorrência tem o seguinte formato:

$$X_n = C_1 u_1 \lambda_1^{n-1} + C_2 u_2 \lambda_2^{n-1} + C_3 u_3 \lambda_3^{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} 2^{n-1} + C_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} 3^{n-1} + C_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{25} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix} 5^{n-1}.$$

Como $x_0 = 2, \quad x_1 = 3 \quad e \quad x_2 = 5$, *temos que:*

$$\left\{\begin{array}{lllllll} \frac{1}{8}C_1 & + & \frac{1}{27}C_2 & + & \frac{1}{125}C_3 & = & 5 \\ \frac{1}{4}C_1 & + & \frac{1}{9}C_2 & + & \frac{1}{25}C_3 & = & 10 \\ \frac{1}{2}C_1 & + & \frac{1}{3}C_2 & + & \frac{1}{5}C_3 & = & 15 \end{array}\right. ; \quad onde \ C_1 = \frac{80}{3}, \quad C_2 = \frac{135}{2} \quad e \quad C_3 = -\frac{625}{6}.$$

Portanto, como $x_n = a_n$, *temos a seguinte solução para a recorrência original:*

$$a_n = \frac{5}{3}2^{n+1} + \frac{5}{2}3^n - \frac{1}{6}5^{n+1} \quad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 2. (Pan-Africana 2019) *Seja* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *uma sequência de números reais definida por:*

$$2a_{n+3} - a_{n+2} - 8a_{n+1} + 4a_n = 0; \qquad a_0 = 3, \quad a_1 = 2 \quad e \quad a_2 = 12.$$

Mostre que a_n *é sempre um inteiro positivo.*

Solução:

Transformaremos a equação de recorrência $2a_{n+3} - a_{n+2} - 8a_{n+1} + 4a_n = 0$ *em um sistema por meio da substituição de variável* $x_n = a_n, \quad y_n = a_{n+1} \quad e \quad z_n = a_{n+2}$, *do qual decorre que:*

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x_{n+1} & = & & & y_n & & \\ y_{n+1} & = & & & & & z_n \\ z_{n+1} & = & -2x_n & + & 4y_n & + & \frac{1}{2}z_n \end{array}\right. \qquad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

ou, de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}.$$

Fazendo uso de cálculos perceptíveis, segue que $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2 \quad e \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}$ *são* *os autovalores da matriz A dos coeficientes do sistema, de multiplicidades algébricas* $m_a(\lambda_1) = m_a(\lambda_2) = m_a(\lambda_3) = 1$, *com autovetores associados dados por:*

$$\vec{u_1} = z\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u_2} = z\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \vec{u_3} = z\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad tal\ que \quad z \neq 0.$$

Constata-se, sem muitas dificuldades, que a multiplicidade geométrica para ambos os autovalores é igual, ou seja, $m_g(\lambda_1) = m_g(\lambda_2) = m_g(\lambda_3) = 1$ *Logo,* $m_g(\lambda_1) + m_g(\lambda_2) + m_g(\lambda_3) = 3$. *Assim, a matriz de Jordan similiar à matriz A possui a seguinte característica:*

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad com \quad \begin{cases} (A - \lambda_1 I)\vec{u_1} &= 0 \\ (A - \lambda_2 I)\vec{u_2} &= 0 \\ (A - \lambda_3 I)\vec{u_3} &= 0 \end{cases}.$$

Diante disso, temos a solução do sistema de recorrência de tal forma:

$$X_n \quad = \quad C_1 u_1 \lambda_1^{n-1} + C_2 u_2 \lambda_2^{n-1} + C_3 u_3 \lambda_3^{n-1}.$$

Consequentemente,

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} 2^{n-1} + C_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} (-2)^{n-1} + C_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Como $x_0 = 3, \quad x_1 = 2 \quad e \quad x_2 = 12$, *sucede que:*

$$\begin{cases} \frac{1}{8}C_1 & - & \frac{1}{8}C_2 & + & 8C_3 & = & 3 \\ \frac{1}{4}C_1 & + & \frac{1}{4}C_2 & + & 4C_3 & = & 2 \\ \frac{1}{2}C_1 & - & \frac{1}{2}c_2 & + & 2c_3 & = & 12 \end{cases}; \quad onde \quad C_1 = 16, \quad C_2 = -8 \quad e \quad C_3 = 0.$$

Por conseguinte, como $x_n = a_n$, *segue que:*

$$a_n = 2^{n+1} + (-2)^n \Leftrightarrow a_n = 2^n\left[2 + (-1)^n\right] \quad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

De maneira evidente, observa-se que 2^n *e* $[2 + (-1)^n] \in \mathbb{Z}_+^*$. *Portanto fica provado que* a_n *é sempre um número inteiro positivo.*

Exemplo 3. *Seja a sequência* $(a_n)_{n\geq 1}$ *tal que:*

$$a_{n+3} = 9a_{n+2} - 24a_{n+1} + 20a_n \quad \forall \quad n \geq 1; \qquad a_1 = 5, \quad a_2 = 8, \quad a_3 = 12.$$

Determine uma fórmula explícita para a_n *em função de* n.

Solução:

Por meio de uma mudança de variável, $x_n = a_n$, $y_n = a_{n+1}$ *e* $z_n = a_{n+2}$ *transformaremos a sequência recorrente,* $a_{n+3} = 9a_{n+2} - 24a_{n+1} + 20a_n$ *no sistema subsequente*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_{n+1} & = & & & y_n & & \\ y_n & = & & & & & z_n \\ z_n & = & 20x_n & - & 24y_n & + & 9z_n \end{array}\right. \qquad n \geq 1, n \in \mathbb{N},$$

ou, da seguinte maneira,

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 20 & -24 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}.$$

Uma vez resolvidos os cálculos necessários, segue que $\lambda_1 = 5$ *e* $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ *são os autovalores da matriz* A *dos coeficientes do sistema e os autovetores associados a* λ_1 *e* λ_2 *são, respectivamente,* $\vec{u}_1$ *e* $\vec{u}_3$, *dados por:*

$$\vec{u}_1 = z \begin{bmatrix} \frac{1}{25} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \vec{u}_3 = z \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{tal que} \quad z \neq 0.$$

É de fácil percepção que a multiplicidade geométrica para $\lambda = 5$ *é igual a 1, assim como a multiplicidade geométrica para* $\lambda = 2$ *também é igual a 1. Dessa forma, a soma das multiplicidades geométricas é igual a 2. Consequentemente, a matriz de Jordan similar à matriz* A *possui a seguinte característica:*

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad com \quad \left\{\begin{array}{ccc} (A - \lambda_1 I)\vec{u_1} & = & 0 \\ (A - \lambda_2 I)\vec{u_2} & = & \vec{u_3} \\ (A - \lambda_2 I)\vec{u_3} & = & 0 \end{array}\right. .$$

Da forma de Jordan similar à matriz A, obtemos o vetor generalizado $\vec{u}_2$ associado com o autovetor $\vec{u}_3$:

$$\vec{u_2} = \begin{bmatrix} \frac{-1+z}{4} \\ \frac{-1+2z}{4} \\ z \end{bmatrix}; \quad com \quad z \in \mathbb{R}, \quad se \quad z = 0 \quad então \quad \vec{u_2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por meio dessas informações, podemos constatar que a solução para o sistema de recorrência tem o seguinte formato:

$$X_n = C_1 u_1 \lambda_1^{n-1} + C_2 \left(u_2 \lambda_2^{n-1} + u_3 (n-1) \lambda_2^{n-2} \right) + C_3 u_3 \lambda_2^{n-1},$$

ou, ainda,

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{25} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix} 5^{n-1} + C_2 \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} 2^{n-1} + (n-1) \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} 2^{n-2} \right) + C_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} 2^{n-1}.$$

Como $x_1 = 5, \ x_2 = -8 \ \ e \ \ x_3 = 12$, dá-se que:

$$\begin{cases} \frac{1}{25}C_1 & - & \frac{1}{4}C_2 & + & \frac{1}{4}C_3 & = & 5 \\ \frac{1}{5}C_1 & - & \frac{1}{4}C_2 & + & \frac{1}{2}C_3 & = & 8 \\ C_1 & & & + & C_3 & = & 12 \end{cases} ; \quad onde \quad C_1 = 0, \ C_2 = -8 \quad e \quad C_3 = 12.$$

À vista disso, como $x_n = a_n$, verifica-se que

$$a_n = (6-n)\, 2^{n-1} \qquad \forall \ n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 4. (Vietnã - 98) *Sejam a e b inteiros. Uma sequência de inteiros a_n é definida por $a_0 = a, \ a_1 = b.\ a_2 = 2b - a + 2, a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n, \quad \forall \quad n \geq 0$.*

(1) Determine o termo geral de a_n.

(2) Calcule os inteiros a e b para os quais a_n é quadrado perfeito para $n \geq 1998$.

Solução:

Para solucionar o primeiro item, utilizaremos uma substituição de variável, $x_n = a_n,\ y_n = a_{n+1}$ *e* $z_n = a_{n+2}$*, com a finalidade de transformar a recorrência*

$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n \qquad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

no seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = z_n \\ z_{n+1} = x_n - 3y_n + 3z_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} \qquad \forall\ n \geq 1.$$

Em decorrência de cálculos acessíveis, temos que $\lambda = 1$ *é o único autovalor da matriz* A*, portanto, sua multiplicidade algébrica é igual a 3, e o seu autovetor associado é dado por:*

$$\vec{u_3} = z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \textit{tal que} \quad z \neq 0.$$

Observa-se que a a multiplicidade geométrica para $\lambda = 1$ *é igual a 1. Desse modo, a matriz de Jordan, similar à matriz* A *dos coeficientes, tem um único bloco de Jordan de dimensão três, possuindo a seguinte configuração:*

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \textit{com} \quad \begin{cases} (A - \lambda I)\vec{u_1} = \vec{u_2} \\ (A - \lambda I)\vec{u_2} = \vec{u_3} \\ (A - \lambda I)\vec{u_3} = 0 \end{cases}.$$

Da matriz de Jordan J *similar à matriz* A*, obtemos os vetores generalizados* $\vec{u_1}$ *e* $\vec{u_2}$*, dados por:*

$$\vec{u_1} = \begin{bmatrix} 3+z \\ 1+z \\ z \end{bmatrix} \quad \textit{com} \quad z \in \mathbb{R}, \quad \textit{se} \quad z = 0 \quad \textit{então} \quad \vec{u_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{u_2} = \begin{bmatrix} -2+z \\ -1+z \\ z \end{bmatrix} \quad \textit{com} \quad z \in \mathbb{R}, \quad \textit{se} \quad z = 0 \quad \textit{então} \quad \vec{u_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, decorre que a solução do sistema de recorrência é expressa como:

$$X_n = C_1\left(\vec{u_1}\lambda^{n-1} + \vec{u_2}(n-1)\lambda^{n-2} + \frac{1}{2}\vec{u_3}(n-2)(n-1)\lambda^{n-3}\right) + \\ + C_2\left(\vec{u_2}\lambda^{n-1} + \vec{u_3}(n-1)\lambda^{n-2}\right) + C_3\vec{u_3}\lambda^{n-1}.$$

Portanto,

$$X_n = C_1\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(n-2)(n-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) +$$

$$+ C_2\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + C_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

sendo assim, temos $x_n = C_1\left[3 - 2(n-1) + \frac{1}{2}(n-2)(n-1)\right] + C_2\left[-2 + (n+1)\right] + C_3$. *Como* $x_n = a_n$, *então* $x_0 = a$, $x_1 = b$ *e* $x_2 = 2b - a + 2$, *logo segue que:*

$$\begin{cases} 6C_1 & - & 3C_2 & + & C_3 & = & a \\ 3C_1 & - & 2C_2 & + & C_3 & = & b \\ C_1 & - & C_2 & + & C_3 & = & 2b - a + 2 \end{cases};$$

em que $C_1 = 2$, $C_2 = -a + b + 6$ *e* $C_3 = -2b + 3b + 6$.

Dessa forma, substituindo os respectivos valores de C_1, C_2 *e* C_3 *em* x_n *e retornando à variável original, determina-se o termo geral da sequência procurada:*

$$a_n = n^2 + n(-a + b - 1) + a \quad \forall\ n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Para resolver o item (2), basta observar que:

$$n^2 + n\left(-a + b - 1\right) + a = \left(n + k\right)^2 = n^2 + 2k + k^2,$$

sendo assim,

$$a = k^2 \quad e \quad (-a + b - 1) = 2k.$$

Dessa última expressão, de maneira evidente, segue que,

$$(-a + b - 1) = 2k \Leftrightarrow b = \quad k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Portanto, $a = k^2$ *e* $b = (k+1)^2$, *tal que* $k \in \mathbb{Z}$. ■

Como o leitor pode perceber, fica fácil observar um padrão e aceitá-lo mais naturalmente. Ainda destacamos que não abordamos os casos de raízes complexas nesta dissertação, ficando o tratamento de tal tópico destinado a trabalhos futuros.

5.4 Considerações Finais

A técnica aplicada nas Seções 1 e 2 deste Capítulo podem ser facilmente adaptadas e utilizadas para transformar uma recorrência linear homogênea de ordem n *com coeficientes reais num sistema linear de primeira ordem com* n *incógnitas. Por meio da matriz de Jordan, similar à matriz dos coeficientes do sistema, e da teoria das recorrências lineares de primeira ordem, obtemos a solução geral do sistema e, em particular, quando olhamos para a primeira componente da solução vetorial, a solução* s_n *da recorrência linear de ordem* n*. Não apresentamos esses resultados nesta dissertação uma vez que eles fogem aos seus objetivos, dado que nos propomos a estudar com detalhes os casos em que* $n = 2$ *e* $n = 3$*, justamente aqueles que estudamos na disciplina de Matemática Discreta do Mestrado Profissional em Matemática, elucidando suas soluções ao mesmo tempo que sugerimos sua generalização. Entretanto, apresentaremos a ideia para o caso* $n = 4$ *e deixaremos o leitor perceber o padrão que se forma para uma recorrência linear homogênea de ordem superior a 4.*

Para tanto, considere a recorrência linear de ordem 4*, dada abaixo*

$$a_{n+4} = f(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+1}) \quad \forall \quad n \geq 1, \tag{5.5}$$

onde f *é uma função linear. Vamos considerar* s_n *a solução da recorrência linear acima. Por meio de uma mudança de variável,* $x_n = a_n,\ y_n = a_{n+1}, z_n = a_{n+2}$ *e* $t_n = a_{n+3}$ *transformaremos a sequência recorrente no sistema* $X_{n+1} = A \cdot X_n$*, onde* A *é uma matriz real de ordem* 4 *e*

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ t_n \end{bmatrix}.$$

Portanto, a solução s_n *da recorrência linear (5.5) corresponde a expressão geral e simplificada da primeira componente da solução vetorial* X_n*.*

No que segue, consideraremos que α, β, γ *e* τ *são os autovalores reais da matriz dos coeficientes do sistema* $X_{n+1} = A \cdot X_n$*. Vamos dividir a análise em quatro casos:*

1. $m_g(\alpha) + m_g(\beta) + m_g(\gamma) + m_g(\tau) = 4$*. Neste caso, a matriz de Jordan similar à matriz* A *é diagonal, dada por*

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau \end{bmatrix},$$

e a solução do sistema (S) é dada por

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ w_n \end{bmatrix} = c_1 u_1 \alpha^{n-1} + c_2 u_2 \beta^{n-1} + c_3 u_3 \gamma^{n-1} + c_4 u_3 \tau^{n-1}$$

onde u_1, u_2, u_3, u_4 *são os autovetores associados aos autovalores* α, β, γ *e* τ*, respectivamente. Observando a primeira coordenada do vetor solução* X_n *deduzimos, em particular, que*

$$s_n = C_1 \alpha^{n-1} + C_2 \beta^{n-1} + C_3 \gamma^{n-1} + C_4 \tau^{n-1}.$$

2. $\alpha = \beta, m_g(\alpha) = 1$*, com* $m_g(\alpha) + m_g(\gamma) + m_g(\tau) = 3 < 4$*. Neste caso, a matriz de Jordan similar à matriz A é dada por*

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau \end{bmatrix}$$

e a solução do sistema (S) é dada por

$$\begin{aligned} X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ w_n \end{bmatrix} &= c_1 \left(u_1 \alpha^{n-1} + u_2 (n-1) \alpha^{n-2} \right) + c_2 u_2 \alpha^{n-1} \\ &+ c_3 u_3 \gamma^{n-1} + c_4 u_4 \tau^{n-1}, \end{aligned}$$

com

$$(A - \alpha I) u_4 = 0, \quad (A - \alpha I) u_3 = 0, \quad e \ \ (A - \alpha I) u_1 = u_2, \quad (A - \alpha I) u_2 = 0.$$

Observando a primeira coordenada do vetor solução X_n *deduzimos, em particular, que*

$$s_n = C_1 \alpha^{n-1} + C_2 (n-1) \alpha^{n-2} + C_3 \gamma^{n-1} + C_4 \tau^{n-1}.$$

3. $\alpha = \beta, \gamma = \tau$ *e* $m_g(\alpha) = 1, m_g(\gamma) = 2$*. Portanto,* $m_g(\alpha) + m_g(\gamma) = 3 < 4$*. Neste caso, a matriz de Jordan similar à matriz A é dada por*

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

e a solução do sistema (S) é dada por

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ w_n \end{bmatrix} = c_1\left(u_1\alpha^{n-1} + u_2(n-1)\alpha^{n-2}\right) + c_2u_2\alpha^{n-1} + c_3u_3\gamma^{n-1} + c_4u_4\gamma^{n-1},$$

com

$$(A-\alpha I)u_4 = 0, \quad (A-\alpha I)u_3 = 0, \quad e \quad (A-\alpha I)u_1 = u_2, \quad (A-\alpha I)u_2 = 0.$$

Observando a primeira coordenada do vetor solução X_n deduzimos, em particular, que

$$s_n = C_1\alpha^{n-1} + C_2(n-1)\alpha^{n-2} + C_3\gamma^{n-1} + C_4\gamma^{n-1}.$$

4. $\alpha = \beta, \gamma = \tau$ *e* $m_g(\alpha) + m_g(\gamma) = 2 < 4$. *Neste caso, a matriz de Jordan similar à matriz A é dada por*

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}$$

e a solução do sistema (S) é dada por

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ w_n \end{bmatrix} = c_1\left(u_1\alpha^{n-1} + u_2(n-1)\alpha^{n-2}\right) + c_2u_2\alpha^{n-1} + c_3\left(u_3\gamma^{n-1} + u_4(n-1)\gamma^{n-2}\right) + c_4u_4\gamma^{n-1},$$

com

$$(A-\alpha I)u_3 = u_4, \quad (A-\alpha I)u_4 = 0 \quad e \quad (A-\alpha I)u_1 = u_2, \quad (A-\alpha I)u_2 = 0.$$

Observando a primeira coordenada do vetor solução X_n deduzimos, em particular, que

$$s_n = C_1\alpha^{n-1} + C_2(n-1)\alpha^{n-2} + C_3\gamma^{n-1} + C_4(n-1)\gamma^{n-2}.$$

5. $\alpha = \beta = \gamma$ *e* $m_g(\alpha) + m_g(\tau) = 2 < 4$. *Neste caso, a matriz de Jordan similar à matriz A é dada por*

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau \end{bmatrix}$$

e a solução do sistema (S) é dada por

$$
\begin{aligned}
X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ w_n \end{bmatrix} &= c_1\left(\vec{u}_1\alpha^{n-1} + \vec{u}_2(n-1)\alpha^{n-2} + \vec{u}_3\frac{1}{2}(n-2)(n-1)\alpha^{n-3}\right) \\
&+ c_2\left(\vec{u}_2\alpha^{n-1} + \vec{u}_3(n-1)\alpha^{n-2}\right) + c_3\vec{u}_3\alpha^{n-1} + c_4\vec{u}_4\tau^{n-1},
\end{aligned}
$$

com

$$(A-\alpha I)u_4 = 0, \quad (A-\alpha I)u_3 = 0, \quad (A-\alpha I)u_2 = u_3 \quad e \quad (A-\alpha I)u_1 = u_2.$$

Observando a primeira coordenada do vetor solução X_n deduzimos, em particular, que

$$s_n = C_1\alpha^{n-1} + C_2(n-1)\alpha^{n-2} + C_3(n-1)^2\alpha^{n-3} + C_4\tau^{n-1}.$$

6. $\alpha = \beta = \gamma = \tau$ *e* $m_g(\alpha) = 1 < 4$. *Neste caso, a matriz de Jordan similar à matriz A é dada por*

$$
\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}
$$

e a solução do sistema (S) é dada por

$$
\begin{aligned}
X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ w_n \end{bmatrix} &= c_1\left(\vec{u}_1\alpha^{n-1} + \vec{u}_2(n-1)\alpha^{n-2}\right) \\
&+ c_1\left(\vec{u}_3\frac{1}{2}(n-2)(n-1)\alpha^{n-3} + \vec{u}_4\frac{1}{6}(n-3)(n-2)(n-1)\alpha^{n-4}\right) \\
&+ c_2\left(\vec{u}_2\alpha^{n-1} + \vec{u}_3(n-1)\alpha^{n-2} + \vec{u}_4\frac{1}{2}(n-2)(n-1)\alpha^{n-3}\right) \\
&+ c_3\left(\vec{u}_3\alpha^{n-1} + \vec{u}_4(n-1)\alpha^{n-2}\right) + c_4\vec{u}_4\alpha^{n-1},
\end{aligned}
$$

com

$$(A-\alpha I)u_4 = 0, \quad (A-\alpha I)u_3 = u_4, \quad (A-\alpha I)u_2 = u_3 \quad e \quad (A-\alpha I)u_1 = u_2.$$

Observando a primeira coordenada do vetor solução X_n deduzimos, em particular, que

$$s_n = C_1\alpha^{n-1} + C_2(n-1)\alpha^{n-2} + C_3(n-1)(n-2)\alpha^{n-3} + C_4(n-1)(n-2)(n-3)\alpha^{n-4}.$$

Como se vê, por meio da forma de Jordan e da teoria elementar das recorrências lineares de primeira ordem, é possível resolver quaisquer sistemas lineares homogêneos de relações de recorrências, em particular, qualquer recorrência linear homogênea.

6 Conclusão

Ao longo do presente estudo, procuramos enfatizar a relevância das relações de recorrências para resolver problemas dos mais variados tipos, destacando aqueles relacionados à contagem, pois estão relacionados ao uso de sequências recorrentes como ferramenta de modelagem para tais situações. Além disso, buscamos ligar o uso desse instrumento diretamente com as competências da BNCC, de forma a se tornar útil na abordagem e solução das diversas situações adversas com as quais o aluno possa se deparar, especialmente as competições olímpicas, como já foi visto nos capítulos anteriores. Nesse sentido, tais esclarecimentos podem inclusive auxiliar alunos em etapas preparatórias desses concursos.

Após um estudo analítico sobre sistemas de recorrências lineares de primeira ordem, bidimensional e tridimensional, considerando os casos em que a matriz dos coeficientes do sistema tem autovalores reais, utilizando a decomposição de Jordan da matriz dos coeficientes, espera-se que esta pesquisa traga uma nova perspectiva sobre o estudo de problemas que envolvam múltiplas sequências recorrentes em sua modelagem, fornecendo não só um dispositivo direto e eficaz no que se propõe, mas servindo como material complementar na disciplina de MA-12 Matemática Discreta, além de ser usada, segundo as necessidades, tanto por alunos quanto por professores do PROFMAT. Pois, além de ter-se provado útil na resolução de sistemas de recorrências lineares, o método estudado também se mostrou eficaz na obtenção da solução de recorrências lineares de ordem qualquer. Por fim, é possível compreender, por exemplo, por quais razões surge o polinômio característico tão usual no processo de resolução de recorrências de segunda ordem, algo extremante comum no cotidiano dos alunos do Programa.

Esperamos ter atingido todos os nossos objetivos até aqui, contribuindo para tornar o estudo de sequências recorrentes um forte aliado ao se buscar estratégias para solucionar problemas que permeiam diversos campos da matemática. Assim sendo, almeja-se que nossos estudos não parem por aqui, mas que, em trabalhos futuros, possamos tratar de casos nos quais a matriz dos coeficientes do sistema tem autovalores complexos, assim como trabalhar com sistemas lineares não homogêneos, expandindo ainda mais nosso campo de aplicação diante dos desafios que venham a surgir.

Referências

ANDRICA, D.; BAGDASAR, O. RECURRENT SEQUENCES: Key Results, Applications, and Problems. *Switzerland: Springer, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 12, 13 e 59.*

BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra linear. *São Paulo: Harper & Row, 1980. Citado na página 19.*

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. *Rio de Janeiro: LTC, 2020. Citado na página 12.*

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. *Brasília: MEC: Ministério da Educação, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 12.*

CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. Matemática Discreta. *Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 34.*

CHEN, C.-C.; KOH, K. M.; KHEE-MENG, K. Principles and techniques in combinatorics. *Simgapore: World Scientific, 1992. Citado na página 59.*

DIAS, M. Os Segredos da Ágebra para IME, ITA, Olimpíadas. *Fortaleza: Vestseller, 2022. Citado na página 12.*

ENGEL, A. Problem solving strategies. *New York: Springer Science & Business Media, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 12, 13 e 59.*

GOMES, C.; DINIZ, I. C.; TEODORO, R. Matemática Discreta: conjuntos, recorrências, combinatoria e probabilidade. *São Paulo: Livraria da Física, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 12, 13 e 14.*

LIMA, E. L. Álgebra linear. *Rio de Janeiro: IMPA, 2014. Citado na página 19.*

NOBLE, B.; DANIEL, J. W. Applied Linear Algerbra. *New Jersey: Prentice-Hall, 1988. Citado na página 19.*

OBM-Olimpíada Brasileira de Matemática. PROVAS E GABARITOS. *Disponível em: https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/. Acesso em: 13 de maio 2023. Citado na página 59.*

OLIVEIRA, M. R. D.; CARNEIRO, M. L. Coleçao Elementos da Matemática, volume 3, 3a Ediçao. *Fortaleza: Editora VestSeller, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 59.*

POLYA, G. A Arte de Resolver Problemas. *Rio de Janeiro: Editora Interciências, 2006. Citado na página 11.*

POOLE, D. Álgebra linear. *São Paulo: Cengage Learning, 2011. Citado na página 19.*

SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. Introdução á análise Combinatória. *Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007. Citado na página 13.*

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Álgebra linear. *São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. Citado na página 19.*

TITU, A.; ZUMING, F. A Path to Combinatorics for Undergraduates, Counting Strategies. *Boston: Birkhauser, 2004. Citado na página 59.*