

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Estimação de Harmônicos e Inter-Harmônicos em Sistemas Elétricos

Fabiano Fragoso Costa

Tese de Doutorado submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande como requisito para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de Conhecimento: Processamento da Energia

Orientadores:
Edson Guedes da Costa
Sreeramulu Raghuram Naidu

Campina Grande, Paraíba, Brasil

©Fabiano Fragoso Costa, Setembro de 2005

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

C837e Costa, Fabiano Fragoso
2005 Estimação de harmônicos e inter-harmônicos em sistemas elétricos / Fabiano
Fragoso Costa — Campina Grande, 2005.
126f. il.

Inclui bibliografia
Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal de Campina
Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.
Orientadores: Edson Guedes da Costa e Sreeramulu Raghuram Naidu.

1— Processamento de sinais 2— Qualidade de energia 3— Estimadores
paramétricos I— Título

CDU 621.391:531-142.38

UFCG - BIBLIOTECA - CAMPINA GRANDE	
029	08-02-06

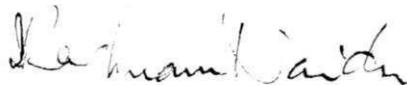
ESTIMAÇÃO DE HARMÔNICOS E INTER-HARMÔNICOS EM SISTEMAS
ELÉTRICOS

FABIANO FRAGOSO COSTA

Tese Aprovada em 31.10.2005

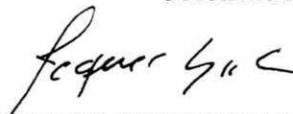
EDSON GUEDES DA COSTA, D.Sc., UFCG

Orientador



SREERAMULU RAGHURAM NAIDU, Ph.D., UFCG

Orientador



JACQUES SZCZUPAK, Ph.D., PUC-RJ

Componente da Banca

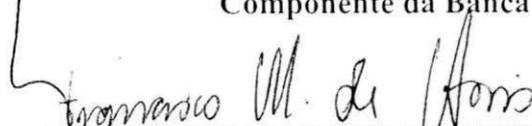


LUIZ ALBERTO LUZ DE ALMEIDA, D.Sc., UFBA

Componente da Banca

ANTONIO MARCUS NOGUEIRA LIMA, Dr., UFCG

Componente da Banca



FRANCISCO MARCOS DE ASSIS, Dr., UFCG

Componente da Banca

CAMPINA GRANDE – PB

Outubro - 2005

*Dedico este trabalho a minha mãe, meu pai, meu irmão e
toda minha família*

As convicções são cárceres
Friedrich Nietzsche

AGRADECIMENTOS

- Agradeço a dedicada orientação dos professores Edson Guedes da Costa e S.R. Naidu.
- Agradeço a fundamental colaboração do amigo Darlan Fernandes.
- Agradeço os conselhos e a generosidade do Prof. Luiz Alberto que sempre iluminaram meu trabalho.
- Agradeço ao Prof. Antônio Marcus e aos professores do DEE pelo apoio acadêmico durante a realização deste trabalho.
- Agradeço aos amigos e companheiros de trabalho do GSE que sempre colaboraram com o meu trabalho.
- Agradeço aos funcionários do GSE e da COPELE.
- Agradeço à Sociedade Anônima de Eletrificação da Paraíba (Saelpa) pelo suporte técnico e material através do contrato ANEEL0377-005/2004.

RESUMO

Neste trabalho, propõe-se uma metodologia de análise de harmônicos e inter-harmônicos de sinais de corrente e de tensão adquiridos em sistemas elétricos. Para tanto, foi desenvolvido um estimador de frequências, denominado método de Prony Modificado, que foi combinado a um estimador linear, implementado através de um filtro de Kalman. O método de Prony modificado é um estimador não linear inspirado no método de Prony clássico. Na metodologia proposta, as amplitudes das senóides presentes nos sinais analisados são estimadas pelo filtro de Kalman. Os regressores do filtro são construídos a partir das frequências fornecidas pelo método de Prony Modificado. Também é proposta uma técnica de filtragem FIR que minimiza a sensibilidade do método de Prony modificado à presença de ruídos. Além disso é proposto um critério, denominado de critério da Norma Mínima, para a estimação da ordem do modelo do sinal de dados. Finalmente, realizou-se um estudo comparativo entre a filtragem de Kalman e o método de mínimos quadrados recursivo ponderado. As técnicas propostas foram aplicadas em sinais sintéticos e em sinais oriundos da rede de distribuição elétrica.

ABSTRACT

This work is intended to propose a methodology for harmonic and inter-harmonic analysis. For this purpose, it has been developed a novel frequency estimator, namely Modified Prony's method, which has been matched to a Kalman filter. The Modified Prony's method has been inspired upon the classic Prony's method. In the proposed methodology, the sinusoids amplitudes of data signals are estimated by the Kalman filter. The filter regressors are built through the frequencies estimated by the Modified Prony's method. It has also been proposed a FIR filtering technique which minimize the Modified Prony's method noise sensibility. Besides, it has been proposed a criterion for estimating the model order of data signals. Finally, a comparative study between the Kalman filter and the weighted least-squares algorithm has also been accomplished. The proposed techniques have been applied to both synthetical and experimental signals.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Símbolos	xiv
Glossário	xvi
Capítulo 1– Introdução	1
1.1 Impacto dos harmônicos e inter-harmônicos	3
1.2 Motivação	4
1.3 Objetivos do trabalho	7
Capítulo 2– Revisão Bibliográfica	11
2.1 Aplicação da transformada de Fourier em sinais senoidais	11
2.1.1 Amostragem e Transformada Discreta de Fourier (DFT)	13
2.1.2 Aproximação de espectros de sinais senoidais pela DFT	17
2.2 Análise de sinais da rede elétrica	21
Capítulo 3– Rastreamento de Harmônicos e Inter-harmônicos	30
3.1 Mínimos Quadrados Recursivo Ponderado - MQRP	31
3.2 Filtro de Kalman	35

3.3	Diferenças entre os algoritmos de Kalman e o algoritmo de Mínimos Quadrados Recursivo Ponderado	40
3.4	Aplicação de Algoritmos Recursivos para o Rastreamento de Amplitudes de Senóides	42
3.4.1	Filtro de Kalman	42
3.4.2	MQRP	43
3.4.3	Seleção dos parâmetros de simulação	44
3.5	Simulações	45
Capítulo 4– Novo Estimador de Frequências		51
4.1	Método de Prony	51
4.1.1	Método de Prony Básico	52
4.1.2	Método de Prony por Mínimos Quadrados	54
4.1.3	Método de Prony para senóides não amortecidas	55
4.2	Propriedades de Filtragem do Método de Prony	58
4.3	Método de Prony Modificado	60
4.4	Aperfeiçoamentos para o método de Prony Modificado	64
4.4.1	Filtragem iterativa do sinal de dados	64
4.4.2	Estimação de ordem adequada para o modelo	68
Capítulo 5– Metodologia		70
5.1	Sistema de aquisição de sinais	71
5.2	Metodologia de análise de harmônicos e inter-harmônicos dos sinais da rede elétrica	72
5.2.1	Armazenamento dos dados adquiridos	72
5.2.2	Processamento dos sinais	73
5.2.3	Verificação de conformidade com as normas	79
Capítulo 6– Resultados e discussões		81
6.1	Verificação dos algoritmos em sinais sintéticos	81

6.1.1	Caso 1	81
6.1.2	Caso 2	83
6.1.3	Caso 3	85
6.1.4	Caso 4	86
6.1.5	Caso 5	89
6.1.6	Caso 6	92
6.1.7	Caso 7	95
6.2	Técnicas para aperfeiçoamento do método de Prony Modificado	96
6.3	Aplicação da metodologia de análise de harmônicos	100
6.3.1	Caso 8	101
6.3.2	Caso 9	103
6.4	Comentários	106
Capítulo 7– Conclusões e Trabalhos Futuros		108
7.1	Trabalhos Futuros	110
Referências Bibliográficas		111
Apêndice A– MQR - Demonstração		117
Apêndice B– Propriedades de Filtragem do Método de Prony		119
Apêndice C– Descrição Matemática de Sinais Aleatórios		123

LISTA DE FIGURAS

1.1	Diagrama unifilar de um sistema de distribuição.	2
1.2	Variação do pico de tensão devido ao inter-harmônico.	5
1.3	Mudança de frequência fundamental causada por componente interharmônico . .	8
1.4	Onda com distorção harmônica.	9
2.1	Gráfico do módulo da transformada de Fourier de um co-seno.	13
2.2	Amostragem por um trem de impulsos.	14
2.3	Efeito da amostragem no domínio da frequência.	15
2.4	<i>Aliasing</i> no domínio da frequência.	16
2.5	Módulo da transformada de Fourier para um co-seno discreto.	18
2.6	Módulo da transformada de Fourier para uma janela retangular.	20
2.7	Superposição de funções janelas - janelamento correspondente a um período do sinal.	21
2.8	Superposição de funções janelas - janelamento correspondente a um período e meio do sinal.	21
2.9	Superfície de busca para um modelo contendo duas senóides.	26
3.1	Estimativa da evolução das amplitudes para os estimadores FK e MQRP - 1 ^o simulação	46
3.2	Estimativa da evolução das amplitudes para os estimadores MQRP e FK - 2 ^o simulação.	48
3.3	Evolução de $P(1, 1)$ para os estimadores MQRP e FK.	48
3.4	Evolução de $P(14, 14)$ para os estimadores MQRP e FK.	49
3.5	Estimação das amplitudes com regressores estimados equivocadamente.	50
4.1	Aceleração da convergência do método de Newton	63

5.1	Esquema de medição dos sinais de tensão e corrente da rede elétrica.	71
5.2	Diagrama de blocos simplificado da análise dos sinais adquiridos da rede elétrica.	74
5.3	Fluxograma detalhando a aplicação do método de Prony modificado.	75
5.4	Fluxograma detalhando a aplicação do filtro de Kalman.	76
6.1	Sinal composto por três senóides.	82
6.2	Fourier do sinal composto por três senóides - janela curta.	83
6.3	Fourier do sinal composto por três senóides - IEC.	84
6.4	Sinal composto por seis senóides - Caso 3.	86
6.5	Fourier do sinal do caso 3.	86
6.6	Componentes de Prony: (a) 40 Hz; (b) 200 Hz; (c) 280 Hz.	88
6.7	Componentes dominantes para o sinal composto por 6 senóides: (a) 760 Hz; (b) 1000 Hz; (c) 1800 Hz.	88
6.8	Reconstrução do sinal de 6 senóides através da soma dos componentes de Prony.	89
6.9	Circuito retificador de tensão.	90
6.10	Sinal de corrente no circuito retificador de tensão.	91
6.11	FFT do sinal de corrente do retificador - norma IEC.	91
6.12	Janela do sinal contendo 10 senóides.	93
6.13	FFT do sinal contendo 10 senóides.	94
6.14	Sinal composto por três senóides.	96
6.15	Variação do índice de Akaike em função da ordem para o sinal formado por seis senóides.	98
6.16	Variação da norma do resíduo em função da ordem para o sinal formado por seis senóides.	99
6.17	Adição de ruído ao sinal com seis senóides: (a) Sinal sem ruído; (b) Ruído adicionado ao sinal; (c) Sinal com ruído	99
6.18	Esquema de medição para a Planta Industrial 1.	101
6.19	Evolução da DHT da tensão na fase A - Planta Industrial 1.	102
6.20	Evolução da amplitude do quinto harmônico da tensão na fase A - Planta Industrial 1.	102

6.21	Evolução da DHT da corrente na fase A - Planta Industrial 1.	103
6.22	Esquema de medição para a Planta Industrial 2.	104
6.23	Evolução da DHT da tensão na fase A - Planta Industrial 2.	104
6.24	Evolução da amplitude do quinto harmônico da tensão na fase A - Planta Industrial 2.	105
6.25	Evolução do DHT da tensão na fase A - Planta Industrial 2 e escala em minutos.	106
6.26	Evolução do DHT da tensão na fase A - Planta Industrial 2 e escala em minutos.	107
C.1	Função densidade de probabilidade gaussiana.	125
C.2	Função densidade de probabilidade conjunta.	126

LISTA DE TABELAS

3.1	Diferenças entre os estimadores MGRP e FK	42
5.1	Limites de distorção harmônica para a tensão (IEEE 519).	79
5.2	Limites de distorção harmônica para a corrente (IEEE 519).	80
6.1	Estimação das frequências e das amplitudes para o Caso 1.	82
6.2	Estimação das frequências e das amplitudes para o Caso 2 - ordem 3.	84
6.3	Estimação das frequências e das amplitudes para o Caso 2 - ordem 27.	84
6.4	Estimação das frequências e das amplitudes para o Caso 3 - ordem 6.	85
6.5	Estimação das frequências e das amplitudes para o Caso 4 - ordem 6.	87
6.6	Estimação das frequências e das amplitudes para o Caso 4 - ordem 31.	87
6.7	Estimação das frequências e das amplitudes para o Caso 5.	90
6.8	Estimação das frequências e das amplitudes para o Caso 4 - $dt=3,6$ ms.	93
6.9	Estimação das frequências e das amplitudes para a FFT no Caso 4 - norma IEC.	94
6.10	Estimação das frequências e amplitudes - $dt=1,2$ ms.	95
6.11	Estimação das frequências e das amplitudes para o Caso 7.	95
6.12	Ordem obtida pelo critério de Akaike e pela Norma Mínima - $dt=0,2$ ms.	97
6.13	Ordem obtida pelo critério de Akaike e pela Norma Mínima - $dt=0,1$ ms.	97
6.14	Estimação de frequências com filtragem FIR.	98

LISTA DE SÍMBOLOS

- $\delta(t)$ - Função delta de Dirac.
- $y(t)$ - Sinal analisado no domínio do tempo contínuo
- $Y(\omega)$ - Transformada de Fourier do sinal $y(t)$
- $y[n]$ - Sinal analisado no domínio do tempo discreto.
- $Y[k]$ - Transformada rápida de Fourier do sinal $y[n]$.
- $\hat{y}[n]$ - Sinal estimado obtido através de um modelo discreto.
- p - Ordem do modelo.
- N - Número de amostras do sinal
- ω_i - i - Freqüência em radianos, do i -ésimo componente senoidal do sinal analisado.
- f_i - Freqüência em Hz, do i -ésimo componente senoidal do sinal analisado.
- A_i - Amplitude do i -ésimo componente senoidal do sinal analisado.
- θ_i - Fase do i -ésimo componente de freqüência do sinal analisado.
- A_{ci} - $A_i \cos(\theta_i)$.
- A_{si} - $-A_i \sin(\theta_i)$.
- K** - Ganho de Kalman.
- P** - Matriz de covariância.
- $E(x)$ - Esperança matemática de uma variável aleatória x .
- $E(\mathbf{xx}^T)$ - Matriz de covariância do vetor \mathbf{x} composto por elementos aleatórios.
- ΔT - Intervalo de amostragem dos sinais analisados
- e^0 - Erro a priori de modelagem do sinal de dados

- e - Erro a posteriori de modelagem do sinal de dados
- $v[N]$ - Erro quadrático de um modelo para N amostras

GLOSSÁRIO

- DHT - Distorção Harmônica Total
- FFT - Fast Fourier Transform - Transformada rápida de Fourier.
- DFT - Discrete Fourier Transform - Transformada discreta de Fourier.
- SAELPA - Sociedade Anônima de Eletrificação da Paraíba.
- MQR - Mínimos Quadrados Recursivo
- MQRP - Mínimos Quadrados Recursivo Ponderado
- FK - Filtro de Kalman
- PM - Prony Modificado
- SRW - Simple Random Walk
- NM - Norma Mínima
- FIR - Finite Impulse Response
- SNR - Signal to Noise Ratio
- AR - Modelo Auto Regressivo AR

INTRODUÇÃO

A confiabilidade e a qualidade no fornecimento de energia elétrica são duas das principais metas pesquisadas pelas concessionárias de energia na atualidade. Um sistema elétrico é dito confiável se é capaz de prover o fornecimento da energia ininterruptamente. O termo qualidade de energia é relacionado à capacidade do sistema fornecer uma tensão perfeitamente senoidal no barramento de todos os seus consumidores. Contudo, tais condições não são encontradas em sistemas elétricos reais. Além de problemas como interrupção de energia, sobretensões, ou desbalanceamento de fases, as formas de ondas de tensão geralmente possuem distorções harmônicas e inter-harmônicas.

Idealmente, a forma de onda de tensão fornecida pela concessionária aos seus consumidores é uma senóide cuja frequência, dita frequência fundamental, vale 60 Hz. Os harmônicos são componentes senoidais de frequências múltiplas da frequência fundamental. Os inter-harmônicos são componentes senoidais cujas frequências não são múltiplas da fundamental. Tanto os harmônicos como os inter-harmônicos são causados por elementos não lineares do sistema elétrico. Por elementos não lineares, entendem-se as cargas em que a relação entre os valores de tensão e de corrente não é linear, ou seja, não obedecem à lei de Ohm.

As fontes geradoras de harmônicos são diversas. Equipamentos utilizados pelas concessionárias, como geradores e transformadores, podem gerar distorções harmônicas em pequena escala. Porém as maiores fontes de harmônicos são equipamentos utilizados em plantas industriais, como retificadores de tensão, conversores, inversores, fornos de indução e fornos a arco. Estes equipamentos produzem na rede elétrica, correntes senoidais de frequências múltiplas da fundamental. As cargas residenciais também podem gerar um nível significativo de harmônicos. Apesar de, individualmente possuírem potências nominais baixas, o número de cargas residen-

ciais é muito alto e seus efeitos somados podem ser relevantes. Os inter-harmônicos podem ser observados em um número crescente de tipos de cargas, que incluem conversores estáticos de frequência, conversores sub-síncronos em cascata, cicloconversores, acionamentos de velocidade ajustável para motores de indução ou motores síncronos e fornos a arco. Qualquer carga em que ocorrem comutações não sincronizadas com a frequência fundamental da rede, também é fonte de inter-harmônicos.

Se uma carga, em um determinado barramento, injeta correntes harmônicas ou inter-harmônicas no sistema, o suprimento de tensão nos barramentos vizinhos também será corrompido. Considere o sistema mostrado na Figura 1.1 em que três cargas são alimentadas por uma única fonte. Caso a carga 2 esteja injetando correntes harmônicas, a queda de tensão nos alimentadores 1 e 2 resultará em tensões distorcidas nos barramentos 2 e 3, e as correntes injetadas nas cargas 1 e 3 também serão distorcidas, mesmo se elas forem cargas lineares.

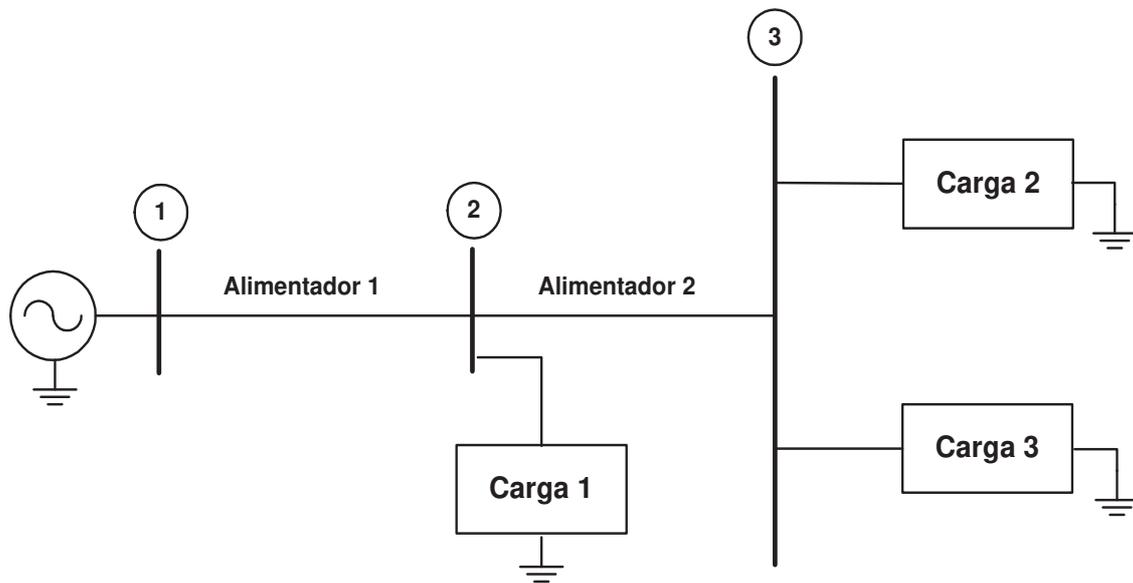


Figura 1.1. Diagrama unifilar de um sistema de distribuição.

1.1 IMPACTO DOS HARMÔNICOS E INTER-HARMÔNICOS

Harmônicos e inter-harmônicos são a origem de muitos efeitos indesejados no sistema elétrico. Podem causar interferências em sistemas de comunicação, provocar perdas adicionais por efeito Joule na rede elétrica e em motores, causar mau funcionamento de dispositivos de estado sólido e provocar ressonância em bancos de capacitores.

O acoplamento magnético entre os circuitos da rede elétrica e os circuitos de comunicação pode causar problemas de interferências nos últimos. Uma corrente fluindo no circuito da rede elétrica produz um campo magnético que induz outra corrente nos condutores de comunicação circunvizinhos. O nível de interferência depende das magnitudes e frequências das correntes induzidas e da blindagem dos condutores de comunicação (BELLARMINI; ASGILL; LEE, 2000).

As perdas por efeito Joule são expressas pelo produto do quadrado da corrente pela resistência que ela atravessa. Quando existem harmônicos ou inter-harmônicos nas formas de onda de corrente, perdas adicionais surgirão. As perdas podem ser expressas por:

$$I^2R = I_{60Hz}^2 R_{60Hz} + I_{300Hz}^2 R_{300Hz} + I_{420Hz}^2 R_{420Hz} + \dots$$

Distorções nas tensões que alimentam motores podem criar correntes harmônicas significativas que não resultam em torque e geram perdas adicionais que aumentam a temperatura interna dos motores. O aumento da temperatura pode causar a redução da vida útil do motor. Alguns equipamentos de controle partem do pressuposto que a tensão fornecida pela rede elétrica é perfeitamente senoidal. O cruzamento de zero dessa tensão é utilizado como referência temporal. Se a tensão da rede contiver distorções harmônicas, o tempo entre dois cruzamentos pode variar e desse modo, o sistema de controle não funcionará adequadamente.

Correntes harmônicas também podem causar problemas de ressonância em circuitos capacitivos e indutivos. Em redes elétricas que utilizam bancos de capacitores para correção de fator de potência, tanto a ressonância em paralelo como a ressonância em série podem ocorrer. Na ressonância em série, as impedâncias dos indutores e capacitores se anulam e correntes de amplitudes elevadas surgirão na frequência de ressonância. Na ressonância em paralelo, a impedância é teoricamente infinita na frequência de ressonância, originando sobretensões de

amplitude elevada.

Um dos efeitos mais conhecidos dos inter-harmônicos é a oscilação da intensidade da luz elétrica (GUNTHER, 2002), que pode ser perceptível pelos seres humanos. O fenômeno é conhecido por *flicker*. Inter-harmônicos também podem causar interferências nas transmissões em baixa frequência de equipamentos que utilizam tecnologia de portadoras por linha de energia (PLC-Power Line Carrier), e podem prejudicar o desempenho de filtros aplicados para limitar harmônicos de baixa frequência (GUNTHER, 2002). Inter-harmônicos também afetam de maneira significativa a operação de equipamentos eletrônicos conectados ao sistema elétrico. A interface destes equipamentos com o sistema elétrico é realizada por fontes CC compostas de retificadores, capacitores e reguladores de tensão. Quando as ondas de tensão da rede elétrica são compostas apenas pela fundamental e seus harmônicos, os seus picos ocorrem sempre nas mesmas posições angulares do ciclo de onda e sempre com a mesma amplitude. Isto garante que o regulador de tensão corrija a flutuação de tensão nos terminais do capacitor (HENICHE; BOURLES; HOURLY, 1995). Já quando as ondas de tensão da rede possuem inter-harmônicos, os picos de tensão ocorrem de maneira irregular, como é mostrado na Figura 1.2. Na Figura 1.2(a) é mostrado o gráfico da componente fundamental do sinal. Na Figura 1.2(b) é mostrado um componente inter-harmônico presente na onda. Da Figura 1.2(c), percebe-se claramente que os picos de tensão do sinal resultante não são constantes.

1.2 MOTIVAÇÃO

O mercado de energia elétrica vem experimentando um processo de desregulamentação nos últimos anos. É previsto que no futuro isso gere um ambiente de competição entre as empresas do setor.

O avanço da tecnologia tem conduzido à instalação de cargas mais sensíveis a distorções da rede elétrica, por outro lado, fiscalizações rigorosas e com níveis de exigência maiores são adotadas pelas agências reguladoras sobre as concessionárias de energia. Assim, é natural que as normas ou recomendações que tratam de questões sobre qualidade de energia se tornem

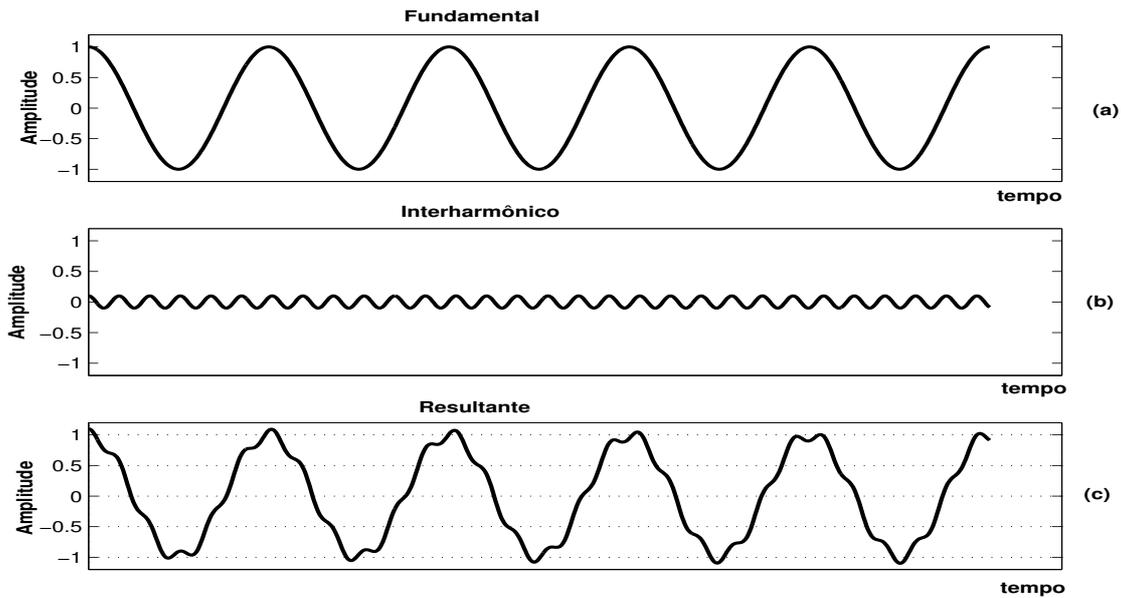


Figura 1.2. Variação do pico de tensão devido ao inter-harmônico.

gradativamente mais importantes para as concessionárias.

As normas vigentes, como a IEEE 519 (1992), ou a IEC 61000-3-2 (1998) recomendam limites tanto para as distorções harmônicas da tensão fornecida pela concessionária, quanto para as injeções de correntes harmônicas e inter-harmônicas provenientes dos clientes que utilizam cargas não lineares.

A correta estimação dos níveis de harmônicos e inter-harmônicos do sistema elétrico é de extrema importância tanto para a concessionária quanto para os seus clientes. A identificação de fontes de harmônicos no sistema elétrico depende da estimação do espectro das formas de onda de tensão e corrente em seus barramentos (MA; GIRGIS, 1996). Procedimentos que tentam repartir a responsabilidade da concessionária e de seus clientes sobre as distorções harmônicas, também necessitam da estimação dos harmônicos (SRINIVASAN, 1996), (XU; LIU; LIU, 2003).

O conhecimento dos harmônicos e inter-harmônicos no sistema elétrico também permite que as concessionárias elaborem políticas que incentivem seus clientes a limitarem a geração de correntes harmônicas. Meachern, Grady e Moncrief (1995) realizaram um estudo sobre várias possibilidades de estruturação tarifárias que penalizam economicamente os consumidores que geram distorções nas formas de onda de corrente e de tensão. Por outro lado, os consumidores

necessitam que o espectro das formas de onda de corrente geradas por seus equipamentos seja conhecido. Dessa forma, filtros mais eficazes podem ser projetados.

Em relação aos inter-harmônicos, é sabido que suas frequências e amplitudes são variantes no tempo, dificultando ainda mais a análise dos sinais (ZHEZHELENKO; SAYENKO, 2000). O desempenho de filtros passivos na presença de inter-harmônicos é limitado (BASIC; RAMSDEN; MUTIK, 2000). A atuação desses filtros é efetiva em uma faixa fixa do espectro dos sinais. Uma solução é a utilização de filtros ativos. Eles geram e injetam no sistema sinais de correntes iguais em amplitude e frequência, mas de fases opostas, a aqueles componentes que se deseja filtrar. Sistemas de monitoramento de equipamentos também são baseados na estimação do espectro dos seus sinais. (COSTA, 2004).

Tradicionalmente, a transformada rápida de Fourier (FFT - Fast Fourier Transform) é a ferramenta mais utilizada na análise de sinais da rede elétrica. Contudo, a correta aplicação da FFT parte das seguintes premissas (GIRGIS; HAM, 1980; GIRGIS; CHANG; MAKRAM, 1991):

1. O sinal a ser analisado deve ser periódico.
2. A frequência de amostragem deve ser maior que duas vezes a maior frequência do sinal.
3. A frequência de amostragem deve ser igual ao número de amostras multiplicado pela frequência fundamental assumida previamente no algoritmo.
4. Cada frequência contida no sinal deve ser um múltiplo inteiro da frequência fundamental assumida previamente no algoritmo.

As premissas citadas acima podem ser traduzidas da seguinte maneira: Para que a FFT possa ser aplicada corretamente é necessário que o produto entre o número de amostras (pontos) e o período de amostragem corresponda a um número inteiro de ciclos do sinal. Além disso, o teorema de Nyquist deve ser respeitado.

Em relação aos sinais oriundos da rede elétrica, duas dificuldades surgem na aplicação da transformada rápida de Fourier. Primeiramente, as amplitudes dos componentes harmônicos e inter-harmônicos presentes no sinal analisado podem ser variantes no tempo. Assim, o sinal

analisado não seria estacionário e a FFT não poderia ser aplicada corretamente (BAGHZOUZ, 1998). Além disso, o período fundamental do sinal nem sempre corresponde ao componente fundamental de 60 Hz, e a obtenção de uma janela de tempo que corresponda a um número inteiro de ciclos não pode ser realizada.

O período fundamental pode ser alterado pelo desequilíbrio entre a geração e o consumo de energia no sistema elétrico. Isto causa pequenos desvios na frequência fundamental de 60 Hz fornecida no sistema. Além disso, a injeção de correntes inter-harmônicas na rede elétrica pode alterar significativamente o período fundamental dos sinais oriundos da rede elétrica. Se por exemplo, a um sinal de frequência fundamental 60 Hz for adicionado um inter-harmônico de 40 Hz, o período fundamental do sinal resultante será de 50 ms, correspondente a 20 Hz, que é o máximo divisor comum de 60 e 40, como é ilustrado na Figura 1.3. Na Figura 1.3(a) é mostrado um sinal de frequência 60 Hz. A este sinal é adicionado um componente inter-harmônico de frequência 40 Hz, mostrado na Figura 1.3(b). O sinal resultante é mostrado na Figura 1.3(c) e possui um período fundamental de 50 ms. Se o sinal contivesse somente componentes harmônicos, isso não ocorreria, como é mostrado na Figura 1.4. Na Figura 1.4, pode-se ver um sinal formado pela fundamental de 60 Hz mais um componente de quinto harmônico (300 Hz) e um de sétimo harmônico (420 Hz). Percebe-se que o sinal resultante na Figura 1.4(d) possui o mesmo período da onda fundamental na Figura 1.4(a). Em outras palavras, os harmônicos não alteram o período da fundamental.

As dificuldades na aplicação da transformada rápida de Fourier sugerem a busca e desenvolvimento de novas técnicas que permitam uma análise acurada dos sinais de tensão e corrente da rede elétrica. As técnicas devem permitir que tanto as concessionárias quanto seus consumidores tenham informações confiáveis sobre o conteúdo espectral dos sinais da rede.

1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO

Esta Tese propõem um novo procedimento de análise espectral de sinais de tensão e corrente em sistemas elétricos. A análise deve fornecer a evolução das amplitudes dos harmônicos e

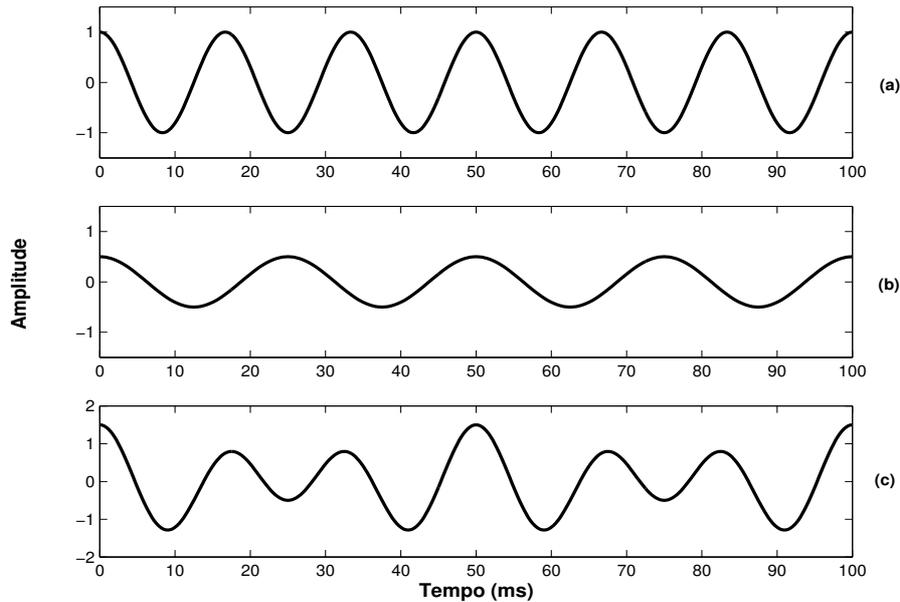


Figura 1.3. Mudança de frequência fundamental causada por componente inter-harmônico

inter-harmônicos presentes nos sinais analisados. Neste contexto, o termo evolução significa rastreamento das variações das amplitudes das senóides no decorrer do tempo. Para tanto, os sinais são coletados através de transformadores de corrente e de potência instalados nas subestações de entrada de plantas industriais ou em subestações de proteção e medição da concessionária elétrica.

As amplitudes harmônicas e inter-harmônicas são estimadas através de um filtro de Kalman que é um estimador linear capaz de rastrear de maneira eficiente mudanças nos parâmetros monitorados. No entanto, é necessário que as frequências contidas no sinal analisado sejam previamente estimadas.

A estimação de frequências é um problema complexo, pois é uma otimização extremamente não linear. Nesta Tese, desenvolveu-se uma nova técnica de estimação de frequências baseada no método de Prony e denominada método de Prony Modificado. No método de Prony, estimam-se as frequências através da solução de um sistema linear sobredeterminado e mais a solução de uma equação polinomial. Já no método de Prony modificado, as frequências são diretamente estimadas por meio de um algoritmo de otimização de Newton. Apesar da nova técnica se mostrar mais robusta do que o método de Prony, níveis mais elevados de ruídos também de-

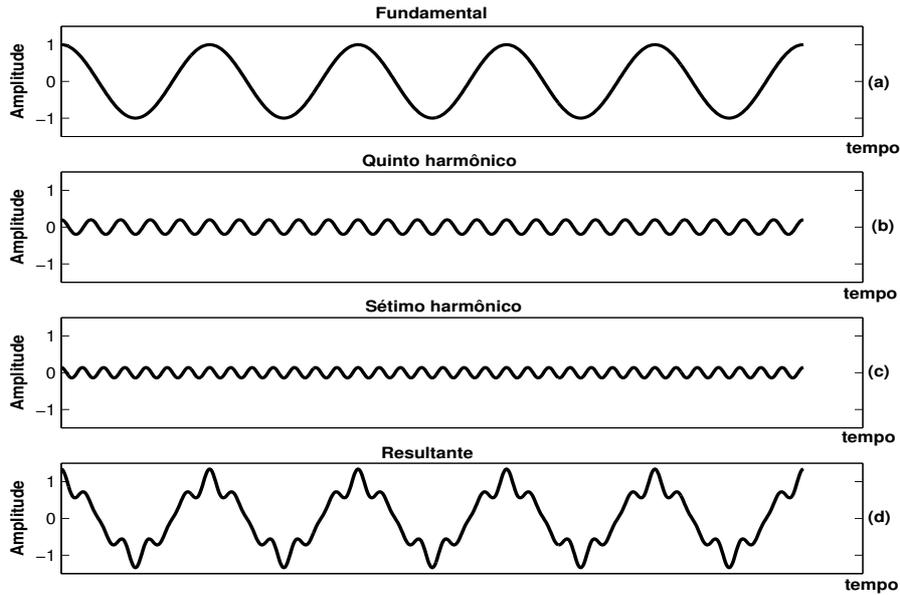


Figura 1.4. Onda com distorção harmônica.

geram sua estimativa. Por isso, nesta Tese, também é proposta uma técnica que minimiza o efeito degenerativo dos ruído. A técnica é baseada na filtragem do sinal a ser analisado por um filtro FIR (Finite Impulse Response). O filtro é estimado iterativamente por meio das amostras do sinal analisado. Um problema comum a todos estimadores paramétricos é a determinação de uma ordem adequada para o modelo do sinal de dados. Finalmente, neste trabalho também é proposto um novo critério, denominado critério da Norma Mínima, para a estimação da ordem.

Para alcançar o objetivo proposto acima, organizou-se este trabalho de acordo com os seguintes capítulos:

- No capítulo 2 é realizada uma revisão bibliográfica sobre os métodos de análise espectral de sinais da rede elétrica e particularmente sobre os métodos de estimação de frequências. Também se discorrerá sobre a transformada rápida de Fourier e sobre suas principais limitações.
- No capítulo 3 é descrita a implementação do filtro de Kalman utilizado na estimação das amplitudes harmônicas e inter-harmônicas. Também é realizada uma comparação entre o estimador de Kalman e o estimador de mínimos quadrados recursivo ponderado

com fator de esquecimento. A comparação é relevante porque apesar dos dois estimadores serem largamente utilizados, estudos comparativos que enfatizam suas diferenças e semelhanças não são encontrados facilmente na literatura.

- No capítulo 4, apresenta-se o método de Prony clássico. Também é proposto o método de Prony Modificado. Além disso, são apresentados o critério da Norma Mínima e a técnica de filtragem FIR.
- No capítulo 5, descreve-se a metodologia empregada para a análise dos sinais da rede elétrica.
- No capítulo 6, os resultados são apresentados. As técnicas propostas são testadas tanto em sinais sintéticos como em sinais adquiridos na rede elétrica.
- No capítulo 7, são apresentadas as conclusões do trabalho e as propostas para trabalhos futuros.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O objetivo deste capítulo é caracterizar o problema da estimação espectral em sinais da rede elétrica. Será apresentada uma revisão bibliográfica sobre as principais metodologias de análise dos sinais. Devido à transformada rápida de Fourier ser a base da maioria das metodologias tradicionalmente empregadas, resolveu-se iniciar o capítulo com uma breve fundamentação teórica da FFT e de suas limitações.

2.1 APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE FOURIER EM SINAIS SENOIDAIS

O estudo da FFT deve ser iniciado pela investigação da transformada contínua de Fourier e da sua aplicação em sinais periódicos, compostos pela soma de senóides. A transformada contínua de Fourier é aplicada em sinais contínuos no domínio do tempo. Neste texto, ela será designada apenas por transformada de Fourier (FT). A transformada de Fourier $Y(\omega)$ de um sinal contínuo $y(t)$ é definida por:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (2.1)$$

e sua inversa é fornecida por:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.2)$$

Para a melhor compreensão da aplicação da transformada de Fourier em sinais periódicos, é necessário o conceito da função impulso ou delta de Dirac, definida pelo seguinte par de relações:

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0, \quad (2.3)$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.4)$$

Uma das propriedades da função impulso, chamada de propriedade do peneiramento (sifting property), facilita a análise da integral de Fourier em sinais periódicos. Matematicamente, essa propriedade é expressa por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\delta(t - t_0)dt = y(t_0). \quad (2.5)$$

Assim, considere que a transformada de Fourier de um sinal $y(t)$ é descrita por:

$$Y(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0). \quad (2.6)$$

Aplicando a equação (2.2) e utilizando a propriedade do peneiramento da função impulso, o sinal $y(t)$ é obtido por:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t}d\omega = e^{j\omega_0 t}. \quad (2.7)$$

No caso em que a transformada de Fourier se expressar por:

$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0), \quad (2.8)$$

e se utilizando a linearidade da transformada de Fourier (OPPENHEIM; SCHAFER, 1989), então o sinal $y(t)$ é descrito por:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}. \quad (2.9)$$

Considerando que um sinal co-senoidal pode ser descrito como:

$$y(t) = \frac{A}{2} (e^{j\theta} e^{j\omega_0 t} + e^{-j\theta} e^{-j\omega_0 t}), \quad (2.10)$$

em que A , θ e ω_0 , são a amplitude, fase e frequência da co-senoidal, então pode-se comparar as equações (2.10) e (2.9) e perceber que os coeficientes que multiplicam as exponenciais em (2.9) são fornecidos por:

$$a_{-1} = \frac{A}{2} e^{-j\theta} \text{ e } a_1 = \frac{A}{2} e^{j\theta}. \quad (2.11)$$

Deste modo, considerando a equação (2.8), o gráfico do módulo da transformada de Fourier *versus* frequência de um sinal co-senoidal apresenta o aspecto mostrado na Figura 2.1.

Expandindo-se o raciocínio para um sinal composto por n co-senos, percebe-se que sua transformada de Fourier fornece um gráfico formado por n pares impulsos, onde cada par é

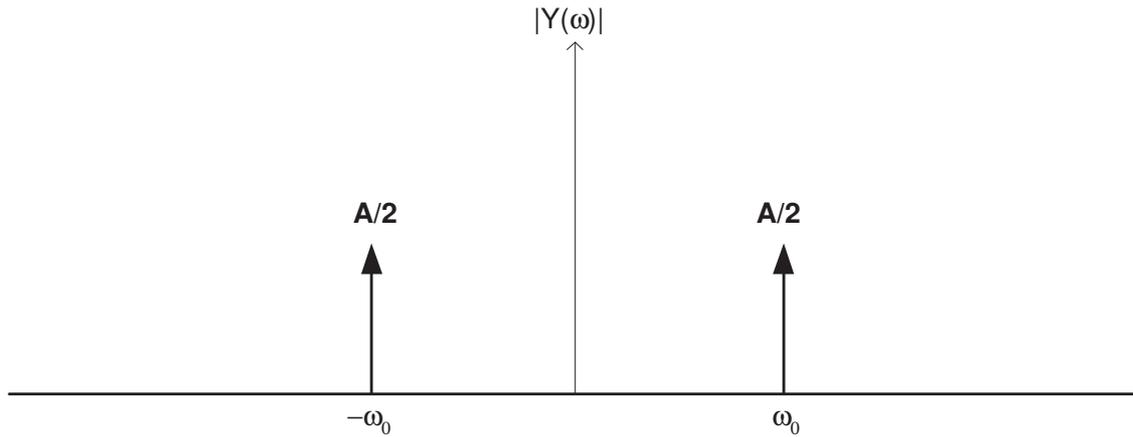


Figura 2.1. Gráfico do módulo da transformada de Fourier de um co-seno.

composto por raias simetricamente localizadas em relação a frequência zero. Assim, constata-se que a transformada de Fourier é uma ferramenta eficiente na caracterização de sinais senoidais. Contudo, sua aplicação prática é bastante restrita, pois ela somente poder ser aplicada em sinais contínuos. Na próxima seção se explicará a relação entre a transformada discreta de Fourier e a transformada de Fourier. O interesse na transformada discreta de Fourier provém essencialmente de dois fatos:

1. A transformada discreta de Fourier é uma aproximação apropriada da transformada de Fourier sob certas condições que serão mostradas nas duas próximas seções. Por aproximação apropriada, entende-se uma aproximação da transformada discreta de Fourier que mantenha a forma do espectro gerado pela transformada de Fourier.
2. Algoritmos computacionalmente eficientes para calcular a transformada discreta de Fourier existem e são largamente difundidos na literatura. Estes algoritmos são designados por algoritmos de transformada rápida de Fourier (FFT).

2.1.1 Amostragem e Transformada Discreta de Fourier (DFT)

O objetivo desta seção é definir a transformada discreta de Fourier e relacionar seu espectro ao espectro obtido pela transformada de Fourier. A transformada discreta de Fourier é

realizada em sinais discretos. Um sinal discreto $y(n\Delta T)$, que pode ser representado por $y[n]$, corresponde às amostras de $y(t)$ em múltiplos inteiros de um intervalo de amostragem ΔT . A amostragem pode ser representada matematicamente em dois estágios mostrados na Figura 2.2(a). O primeiro estágio consiste na modulação do sinal por um trem de pulsos $s(t)$. A modulação está representada na Figura 2.2(b) em que o sinal contínuo $y_c(t)$, é multiplicado por um trem de impulsos $s(t)$, resultando no sinal modulado $y_s(t)$. O segundo estágio é representado pela transformação do trem de pulsos resultante, em uma seqüência discreta. A seqüência $y[n]$, mostrada na Figura 2.2(c), está indexada em relação à variável natural n .

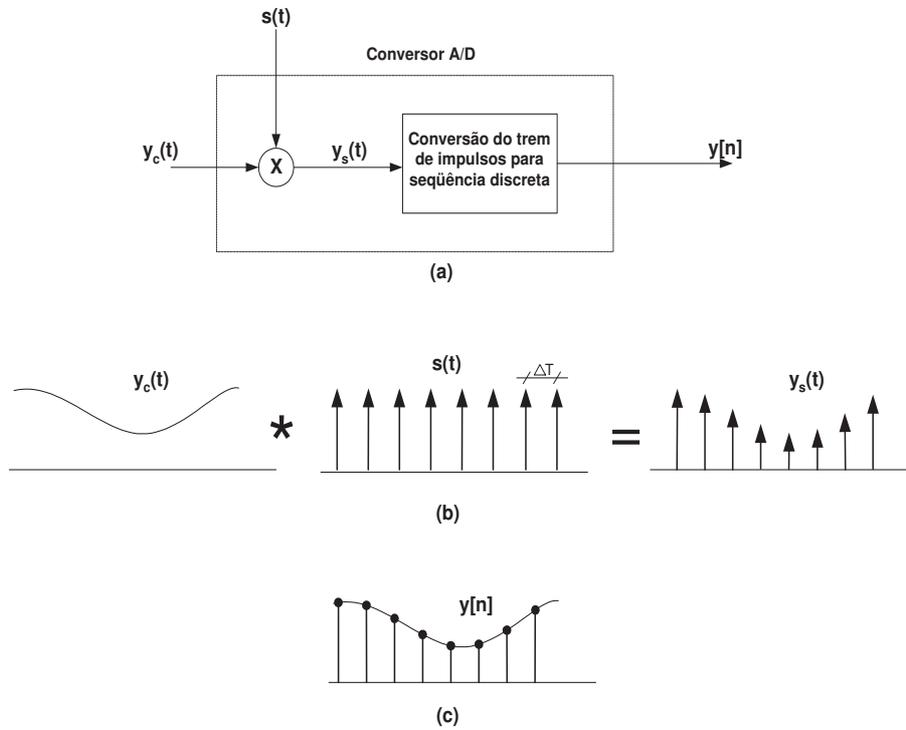


Figura 2.2. Amostragem por um trem de impulsos.

O sinal $s(t)$ é descrito pela equação:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T), \tag{2.12}$$

e o sinal $y_s(t)$ é descrito por:

$$y_s(t) = y_c(t)s(t) = y_c(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T). \tag{2.13}$$

Utilizando a propriedade do peneiramento, o sinal $y_s(t)$ também pode ser expresso por:

$$y_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_c(n\Delta T)\delta(t - n\Delta T). \quad (2.14)$$

A transformada de Fourier de $s(t)$ é fornecida por (OPPENHEIM; SCHAFER, 1989):

$$S(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s), \quad (2.15)$$

em que $\omega_s = 2\pi/\Delta T$ é a frequência de amostragem em radianos/segundo. Como a transformada de Fourier de $y_s(t)$ é fornecida pela convolução entre $Y_c(\omega)$ e $S(\omega)$, pode-se expressá-la por:

$$Y_s(\omega) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_c(\omega - k\omega_s). \quad (2.16)$$

A equação (2.16) é muito importante pois relaciona o espectro do sinal modulado $y_s(t)$ com o espectro do sinal $y_c(t)$. Observa-se que o espectro de $y_s(t)$ é apenas uma replicação periódica do espectro do sinal de entrada. Além disso, o espectro de $y_c(t)$ é normalizado por um fator de $1/\Delta T$. Na Figura 2.3, ilustra-se o significado da equação (2.16). Mostra-se que o espectro do sinal $y_c(t)$ é limitado em uma banda de frequência de tamanho $2W$. Nota-se que se a frequência de amostragem, $2\pi/\Delta T$, do sinal for menor do que $2W$ haverá uma superposição de espectros. Esta possibilidade é mostrada na Figura 2.4. O fenômeno da superposição de espectros é conhecido como recobrimento ou *aliasing*.

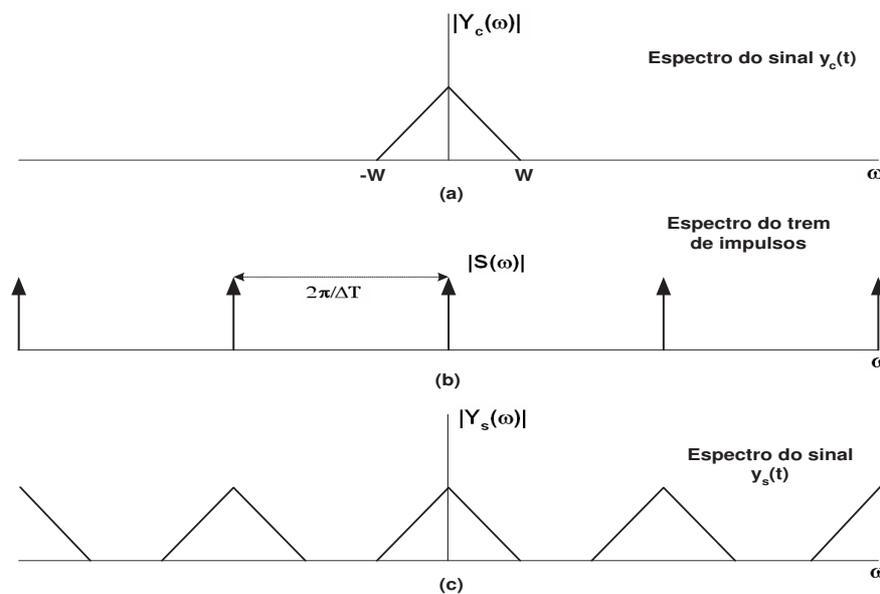


Figura 2.3. Efeito da amostragem no domínio da frequência.

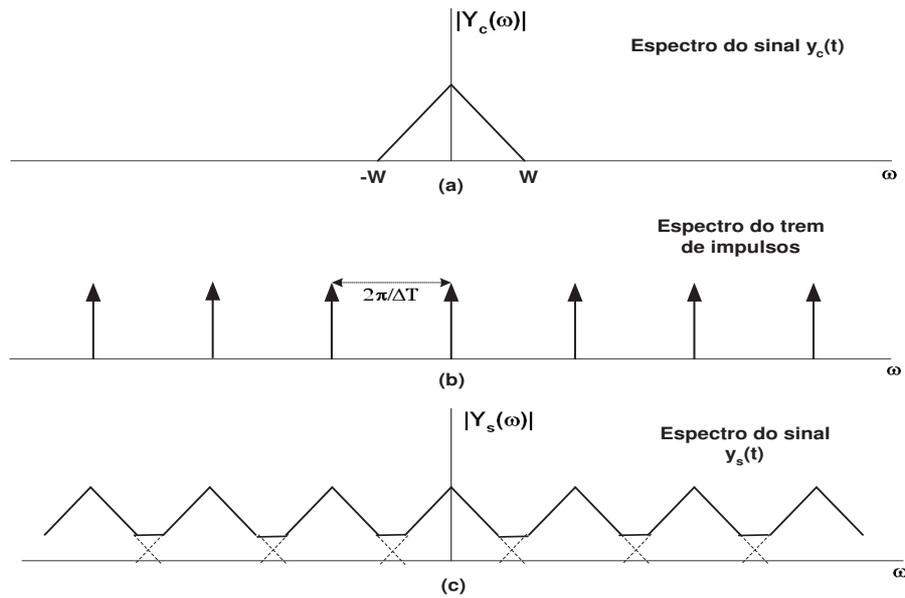


Figura 2.4. *Aliasing* no domínio da frequência.

O objetivo desta seção é expressar a transformada discreta de Fourier (DFT) do sinal $y[n]$ em termos de $Y_c(\omega)$. Assim, aplicando-se a transformada de Fourier na equação (2.14), obtém-se:

$$Y_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_c(n\Delta T)e^{-j\omega\Delta Tn}, \quad (2.17)$$

e, lembrando que:

$$y[n] = y_c(n\Delta T), \quad (2.18)$$

a equação (2.17) pode ser reescrita como:

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-j\Omega n}. \quad (2.19)$$

$Y(\Omega)$ é a transformada de Fourier do sinal discreto $y[n]$. Na literatura de processamento digital de sinais (HAYKIN; VEEN, 2001) é conhecida como DTFT - (*Discrete-Time Fourier Transform*).

A variável Ω é uma frequência normalizada cuja a dimensão é expressa em radianos. Sua relação com a frequência ω é fornecida por:

$$\Omega = \omega\Delta T. \quad (2.20)$$

Das equações (2.19) e (2.17), observa-se que:

$$Y_s(\omega) = Y(\Omega)|_{\Omega=\omega\Delta T}, \quad (2.21)$$

e substituindo $\omega = \Omega/\Delta T$ na equação (2.16), obtém-se:

$$Y(\Omega) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_c \left(\frac{\Omega}{\Delta T} - \frac{2\pi}{\Delta T} k \right). \quad (2.22)$$

É importante notar que a transformada de Fourier do sinal discreto $y[n]$, descrita pela equação (2.22), é uma função contínua em Ω com período igual a 2π . A transformada discreta de Fourier (DFT) na realidade é apenas uma amostragem de N pontos da DTFT nas frequências múltiplas de $2\pi/N$, em que N é o número de amostras do sinal discreto $y[n]$. Desta forma, tomando como base a equação (2.19), define-se a DFT $Y[k]$ de um sinal discreto $y[n]$ por:

$$Y(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}. \quad (2.23)$$

A avaliação direta do somatório descrito em (2.23) requer um número de operações (multiplicações e adições) proporcional à N^2 . Alguns algoritmos exploram certas simetrias e periodicidades do somatório, de tal modo que o número de operações é proporcional a $N \log N$ (OPPENHEIM; SCHAFER, 1989). Coletivamente, estes algoritmos são chamados de algoritmos de transformada rápida de Fourier. Portanto, pode-se afirmar que a transformada rápida de Fourier é somente uma maneira eficiente de se calcular o somatório da equação (2.23) e assim, a transformada rápida de Fourier herda as mesmas limitações da DFT na análise de sinais periódicos. Estas limitações serão abordadas na próxima seção.

2.1.2 Aproximação de espectros de sinais senoidais pela DFT

O processo de aplicação da DFT pode ser dividido em três etapas: a amostragem temporal do sinal, o janelamento das amostras e a amostragem do espectro. Como já foi mencionado, a amostragem temporal se traduz como uma replicação periódica do espectro original do sinal. Por sua vez, o janelamento se traduz em uma convolução entre o espectro da função janela e o espectro replicado. A DFT é apenas uma amostragem do resultado da convolução. No caso de sinais senoidais, a convolução resulta em um espectro contínuo e com picos localizados nas frequências das senóides presentes no sinal analisado. Para que a amostragem desse espectro aproxime corretamente o espectro original é necessário que os picos do espectro replicado se-

jam amostrados. Mostram-se, aqui, as condições necessárias para que o espectro oriundo da convolução seja amostrado corretamente.

Considere, então, um sinal senoidal $y(t)$ de frequência discreta Ω_0 cujo o espectro, gerado pela transformada de Fourier, é fornecido pelo gráfico mostrado na Figura 2.1. Na seção anterior, mostrou-se que o processo de amostragem é equivalente, no domínio da frequência, à replicação periódica do espectro contínuo em um período de 2π e ponderado por um fator de $1/\Delta T$. Desse modo, o gráfico do módulo de $Y(\Omega)$ é mostrado na Figura 2.5. O janelamento do

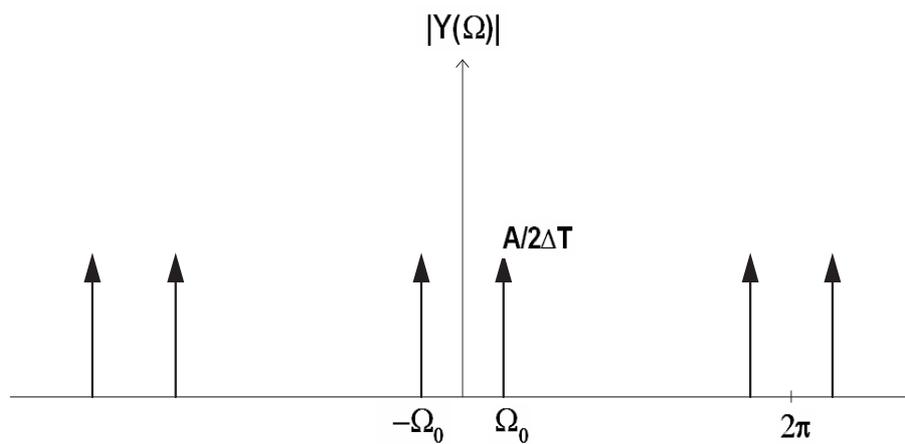


Figura 2.5. Módulo da transformada de Fourier para um co-seno discreto.

sinal é, em geral, realizado ao se multiplicar o sinal $y[n]$ pelo sinal $w[n]$, definido por:

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.24)$$

Neste ponto, é importante salientar que a função w definida na equação 2.24 é uma janela retangular que não deforma o sinal no tempo. Outros tipos de janela também podem ser utilizados, contudo a função janela retangular é a mais utilizada nos trabalhos que aplicam a FFT. A transformada de Fourier da janela $w[n]$ é descrita por:

$$W(\Omega) = e^{j\Omega/2} \frac{\sin(\Omega N/2)}{\sin(\Omega/2)}, \quad (2.25)$$

e o seu gráfico é mostrado na Figura 2.6. A multiplicação entre o sinal discreto $y[n]$ e $w[n]$ gera uma co-senóide discreta, $v[n]$, de tamanho N . Essa multiplicação no domínio da frequência

corresponde a uma convolução cíclica entre $Y(\Omega)$ e $W(\Omega)$ (OPPENHEIM; SCHAFER, 1989), ou seja:

$$V(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\theta)W(\Omega - \theta)d\theta, \quad (2.26)$$

em que, $V(\Omega)$ é a transformada de Fourier do sinal discreto, $v[n]$ de tamanho N . A solução da convolução descrita na equação (2.26) pode ser obtida através da propriedade do deslocamento da frequência (OPPENHEIM; SCHAFER, 1989). Assim, $V(\Omega)$ é fornecido por:

$$V(\Omega) = \frac{A}{2}e^{j\theta}W(\Omega - \Omega_0) + \frac{A}{2}e^{j\theta}W(\Omega + \Omega_0), \quad (2.27)$$

em que θ é a fase da co-senóide. A DFT de $y[n]$, como já foi abordado na seção anterior, é uma amostragem do espectro fornecido por $V(\Omega)$. Matematicamente, a amostragem do espectro pode ser representada pela equação:

$$V[k] = V(\Omega) |_{\Omega=2\pi k/N}, \quad (2.28)$$

então, a DFT de $v[n]$ pode ser escrita como:

$$V[k] = \frac{A}{2}e^{j\theta}W\left(\frac{2\pi k}{N} - \Omega_0\right) + \frac{A}{2}e^{j\theta}W\left(\frac{2\pi k}{N} + \Omega_0\right). \quad (2.29)$$

Para a DFT aproximar corretamente a transformada de Fourier da senóide $y(t)$, $V[k]$ deve apresentar valores diferentes de zero para apenas dois valores de k , correspondentes as frequências $\pm\Omega_0$ (ou correspondentes as frequências $\pm\omega_0$ no domínio contínuo). A condição necessária para que isso ocorra é que a superposição das funções $W(\Omega - \Omega_0)$ e $W(\Omega + \Omega_0)$ não altere as localizações originais dos cruzamentos de zero de cada uma delas, ou seja a frequência Ω_0 deve ser múltipla de $2\pi/N$. Pode-se demonstrar que essa última condição só é verificada se a co-senóide discreta for janelada em um número inteiro de ciclos do sinal (BRIGHAM, 1974). A Figura 2.7 ilustra essa situação. A linha sólida representa o espectro oriundo da situação em que o janelamento do sinal corresponde a um ciclo e, portanto, a frequência Ω_0 corresponde à $2\pi/N$. Na Figura 2.7 as linhas tracejadas representam as funções $W(\Omega - \Omega_0)$ e $W(\Omega + \Omega_0)$. Observa-se que, devido a amostragem se realizar em múltiplos de $2\pi/N$, a função $V[k]$ só possui valores diferentes de zero nas posições $-\Omega_0$ e Ω_0 . Se o janelamento não contiver um número inteiro de ciclos, a superposição das funções $W(\Omega - \Omega_0)$ e $W(\Omega + \Omega_0)$ resultará em um espectro

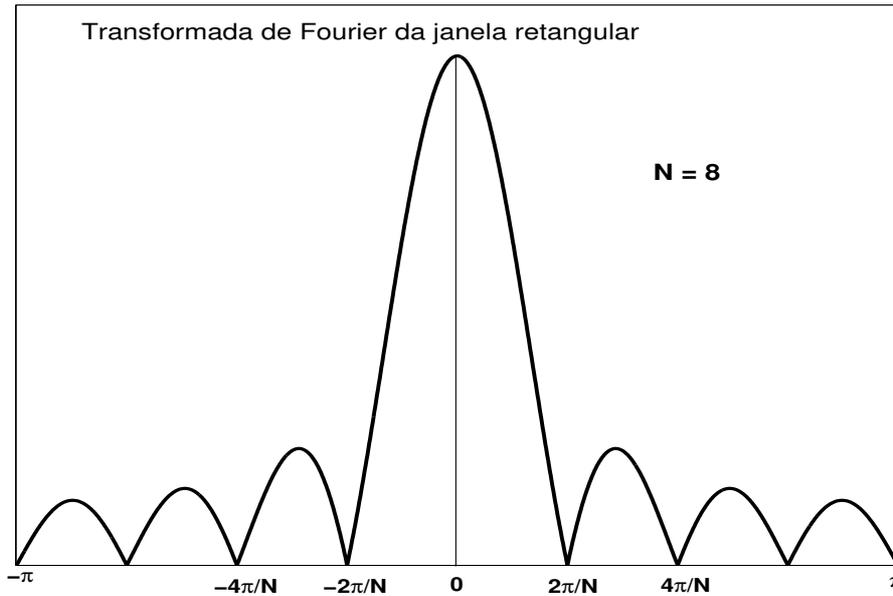


Figura 2.6. Módulo da transformada de Fourier para uma janela retangular.

distorcido pois Ω_0 não corresponde mais à $2\pi/N$. A Figura 2.8 ilustra a situação em que o janelamento corresponde a um período e meio da senóide. Na Figura 2.8(a), observa-se que o espectro $V(\Omega)$ (linha sólida), possui zeros em posições diferentes das posições de $W(\Omega - \Omega_0)$ e $W(\Omega + \Omega_0)$. Assim, o espectro $V(\Omega)$ é amostrado, surgem muitas raias diferentes de zero, como mostra a Figura 2.8(b).

Pelo exposto, pode-se dizer que duas condições são necessárias para a correta aplicação da DFT em sinais senoidais. Primeiramente a condição de Nyquist deve ser observada. E, posteriormente, o sinal deve ser janelado em um número inteiro de ciclos. Garantir essas condições não é simples por dois motivos: primeiramente, não se conhece *a priori* as frequências das senóides que compõem o sinal a ser analisado. Portanto, não se pode garantir que o sinal seja janelado corretamente. Em segundo lugar, mesmo que houvesse esta informação, um sistema de aquisição de sinais, teria de ser suficientemente flexível para disponibilizar uma frequência de amostragem apropriada para a coleta do sinal, o que nem sempre ocorre. Também é importante ressaltar que a transformada de Fourier foi concebida para ser aplicada em sinais estacionários. Porém, em sinais oriundos de sistemas de potência essa condição nem sempre é verificada.

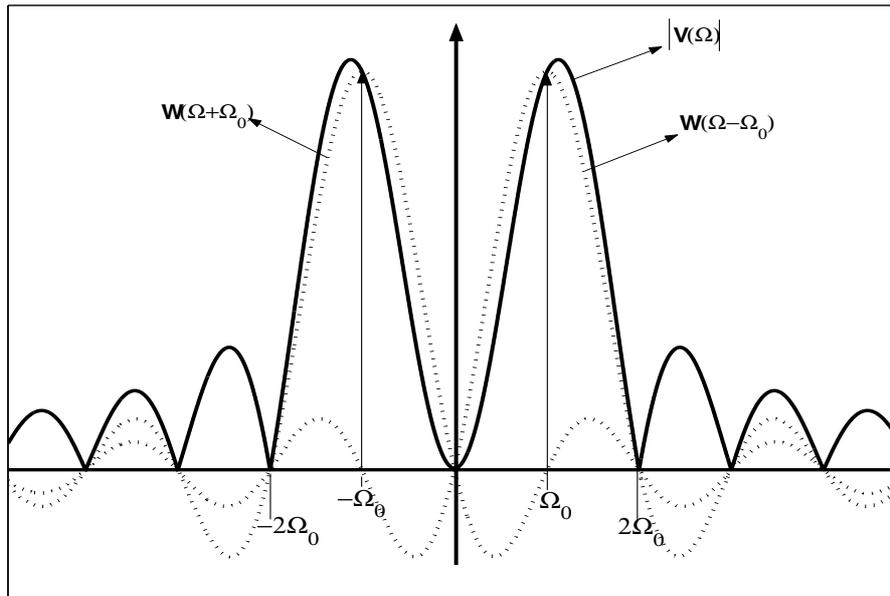


Figura 2.7. Superposição de funções janelas - janelamento correspondente a um período do sinal.

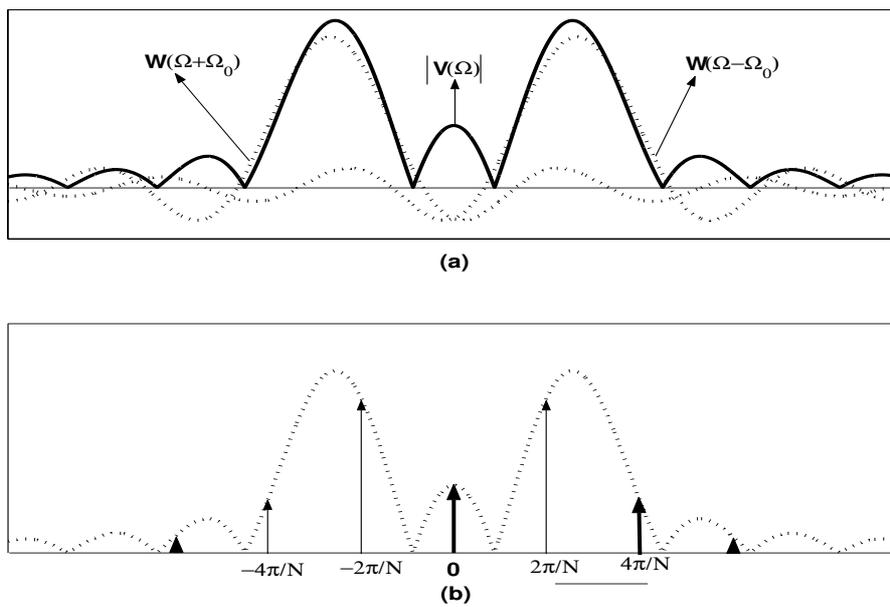


Figura 2.8. Superposição de funções janelas - janelamento correspondente a um período e meio do sinal.

2.2 ANÁLISE DE SINAIS DA REDE ELÉTRICA

Dentre as diversas estratégias para a estimação de harmônicos e inter-harmônicos na rede elétrica, pode-se, primeiramente, destacar as que são baseadas na transformada rápida de

Fourier. Estas estratégias utilizam procedimentos que são adicionados à aplicação da FFT contornando suas limitações.

Quando o objetivo do trabalho é simplesmente caracterizar o sinal em relação à Distorção Harmônica Total (DHT), uma das técnicas que podem ser utilizadas é o agrupamento de raias harmônicas. Se o sinal for estacionário e truncado corretamente, sua energia, no domínio da frequência, concentra-se somente nas raias verdadeiramente presentes no sinal. No caso em que a FFT é aplicada a sinais não estacionários, ou aplicada em sinais truncados em um número não inteiro de ciclos, raias espúrias, não condizentes com os verdadeiros componentes senoidais, podem surgir no espectro estimado. A energia do sinal é dividida entre essas raias. A idéia do procedimento de agrupamento de raias é tornar o índice de DHT mais representativo em relação à energia do sinal. Moo, Chang e Mok (1995) sugerem um agrupamento das raias espectrais obtidas pela FFT, localizadas em torno da frequência fundamental e das frequências harmônicas. Assim, por exemplo, a amplitude do quinto harmônico, I_{300Hz} , seria redefinida e fornecida por:

$$I'_{300Hz} = \sqrt{I_{294Hz}^2 + I_{296Hz}^2 + I_{298Hz}^2 + I_{300Hz}^2 + I_{302Hz}^2 + I_{304Hz}^2 + I_{306Hz}^2}, \quad (2.30)$$

em que a resolução da transformada rápida de Fourier é de 2 Hz e são agrupadas sete raias na frequência 300 Hz. Os autores, no trabalho, mostram que se a distorção harmônica total definida por:

$$DHT = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} I_n^2}{I_1} \times 100\%, \quad (2.31)$$

em que I_n é a amplitude do n-ésimo harmônico, for redefinida, utilizando-se as amplitudes obtidas pelos agrupamentos, ela seria um índice de qualidade de energia mais confiável, pois uma maior parte da energia de cada harmônico estaria contida na definição da nova DHT. A norma IEC 1000-2-1 (1990) também recomenda o agrupamento de raias espectrais calculadas pela transformada rápida de Fourier.

Por outro lado, pode-se atribuir duas desvantagens ao procedimento de agrupamento de raias. Primeiramente, o espectro de sinais senoidais de amplitudes variantes no tempo é contínuo e infinito. Assim, a transformada rápida de Fourier, que é apenas uma amostragem deste

espectro, não pode representar toda a energia do sinal. Além disso, o agrupamento de raias não é eficaz para sinais contendo componentes inter-harmônicos cujas frequências estão distantes das frequências harmônicas, pois tais componentes podem não ser contemplados.

A aplicação de janelas especiais aos sinais analisados pela transformada rápida de Fourier é sugerida em alguns trabalhos. A idéia é reduzir o truncamento abrupto causado pela janela retangular. Recentemente, Testa, Gallo e Langella (2004) estudaram a aplicação da janela de Hanning aos sinais analisados pela FFT. Os autores concluíram que, na aplicação da janela de Hanning, os erros na estimação dos harmônicos e inter-harmônicos são reduzidos de uma ordem de grandeza em relação à aplicação da janela retangular. Porém, os erros na estimação de componentes sub-harmônicos (inter-harmônicos de frequências menores que a fundamental) ainda são significativos. Além desta limitação, deve-se considerar que a aplicação de janelas especiais aos sinais analisados, só é eficaz quando eles são estacionários e ainda assim, em alguns casos, elas podem causar os seguintes efeitos:

1. A resolução espectral é reduzida, pois qualquer janela utilizada possui um lóbulo central mais largo do que o lóbulo da janela retangular.
2. Um componente de frequência nula pode surgir se o sinal analisado não possuir simetria ímpar em relação ao centro da janela.

David e Szczupak (1996) propuseram uma técnica na qual o espectro real do sinal é obtido através de um procedimento iterativo baseado na análise do vazamento espectral e na determinação das frequências através da rotação de fases provocada pela aplicação da DFT em janelas do sinal deslocadas de um determinado tempo. O método faz uso de uma matriz para corrigir um espectro aparente a cada laço principal do algoritmo. Esta matriz pode se tornar mal condicionada para componentes de baixa frequência quando a frequência de amostragem é muito elevada. Segundo os autores do trabalho, o problema pode ser solucionado ao se dividir o espectro do sinal em sub-bandas e cada sub-banda pode ser decimada para separar os componentes do espectro.

A aplicação de filtros é outra possibilidade para analisar distorções em sinais da rede elétrica.

Sun, Allen e Cain (1996) utilizaram um banco de filtros ativos que é capaz rastrear o componente fundamental e seus harmônicos em tempo real. O filtro também é capaz de rastrear a frequência fundamental do sinal. Contudo, o banco de filtros parte do pressuposto que não existem inter-harmônicos no sinal analisado.

A aplicação de técnicas paramétricas de identificação na análise de harmônicos e inter-harmônicos é uma alternativa interessante em relação às técnicas baseadas na FFT. Além de não necessitarem de um janelamento correspondente um número inteiro de períodos, podem ser adaptadas ao rastreamento de harmônicos e inter-harmônicos de amplitudes variantes.

Os trabalhos dedicados ao estudo de harmônicos e inter-harmônicos que utilizam técnicas paramétricas podem ser classificados de acordo com o modelo utilizado. Destacam-se, aqui, dois tipos de modelos: no primeiro modelo, o sinal é descrito por uma soma de senóides; no segundo, o sinal é descrito por um processo autoregressivo. No primeiro modelo, descreve-se um sinal y , através da equação:

$$\hat{y}[n] = \hat{y}(\Delta T n) = \sum_{i=1}^p A_i \cos(\omega_i \Delta T n + \theta_i), \quad (2.32)$$

sendo, ΔT o período de amostragem, θ_i as suas fases iniciais, A_i as amplitudes de cada de cada componente senoidal e $\omega_i = 2\pi f_i$, em que f_i são as frequências de cada senóide. A equação (2.32) também pode ser reescrita como:

$$\hat{y}[n] = \sum_{i=1}^p [A_{ci} \cos(\theta_i) \cos(\omega_i \Delta T n) - A_{si} \sin(\theta_i) \sin(\omega_i \Delta T n)]. \quad (2.33)$$

O objetivo primordial dos trabalhos é estimar os valores de A_i , θ_i e ω_i . Alguns trabalhos partem do pressuposto que o sinal é composto apenas por componentes harmônicos e que a frequência fundamental é conhecida. Desse modo, o objetivo é reduzido à estimação das amplitudes A_i e das fases iniciais θ_i .

Jianze (1998) descreveram um método cujo as amplitudes A_i são decompostas pela transformada wavelet Haar. No trabalho, os coeficientes da decomposição são estimados por mínimos quadrados. Assim, com a obtenção dos coeficientes é possível reconstruir as funções que representam as amplitudes e assim rastrear suas variações no domínio do tempo. Um procedimento direto de rastreamento das amplitudes e fases das senóides é a utilização do filtro de Kalman.

Girgis, Chang e Makram (1991) implementaram um filtro de Kalman linear e o compararam com a FFT. Os autores mostraram que o filtro de Kalman pode ser utilizado na análise em tempo real de harmônicos variantes devido a sua eficiência computacional. Já a FFT é inadequada para análise dos mesmos harmônicos.

Em alguns trabalhos, além da estimação das amplitudes e fases, a variação da frequência fundamental, em torno de um valor conhecido, também é monitorada. Lai (1999) utilizaram um método de estimação de harmônicos em que o erro quadrático entre o sinal de dados e seu modelo, formado pela soma do componente fundamental mais seus componentes harmônicos, é minimizado por uma técnica de gradiente onde uma rede neural é capaz de rastrear pequenos desvios da frequência fundamental. Outra abordagem para o problema do rastreamento da frequência fundamental é a utilização de um filtro de Kalman estendido. Girgis e Peterson (1990) desenvolveram um algoritmo de dois estágios formado por um filtro de Kalman estendido em série com um filtro de Kalman linear. O filtro estendido fornece frequência fundamental que é utilizada como entrada pelo filtro linear.

Todos os trabalhos citados acima padecem de duas limitações básicas: não podem ser aplicados a sinais que contenham componentes inter-harmônicos ou necessitam que pelo menos a frequência fundamental seja conhecida previamente. Na prática, os sinais da rede elétrica podem ser compostos por senóides de frequências harmônicas ou inter-harmônicas que ocorrem de maneira intermitente. Se na análise dos sinais, as frequências fossem previamente conhecidas, a análise dos harmônicos e inter-harmônicos seria facilitada sobremaneira, pois a estimação das amplitudes e fases se torna um problema linear.

A estimação de frequências é um problema não linear pois o modelo descrito na equação (2.33) não depende linearmente das frequências. Para se entender a dificuldade da estimação das frequências contidas em um dado sinal, considere, por exemplo, a estimação das frequências de um sinal modelado pela soma de duas senóides. Além disso, também considere que o sinal de dados é gerado pela soma de componentes senoidais cujas frequências valem 60 e 80 rad/s e que as amplitudes e fases das senóides são conhecidas. Uma das maneiras para se estimar as frequências é minimizar a soma v_N dos erros quadráticos gerados pelas diferenças entre o sinal

de dados $y[n]$ e seu modelo $\hat{y}[n]$. Assim, deve-se minimizar a função:

$$v_N = \sum_{i=1}^N (y[n] - \hat{y}[n])^2, \quad (2.34)$$

sendo N o número de amostras do sinal. Se o sinal analisado $y[n]$ não contiver ruídos, a superfície de busca possui o aspecto mostrado na Figura 2.9. A superfície de busca é formada pelo conjunto de valores obtidos de v_N ao serem variadas as frequências f_1 e f_2 do modelo. Observa-se que nas proximidades do ótimo global (60,80), a superfície é extremamente ondulada, dificultando a estimação das frequências.

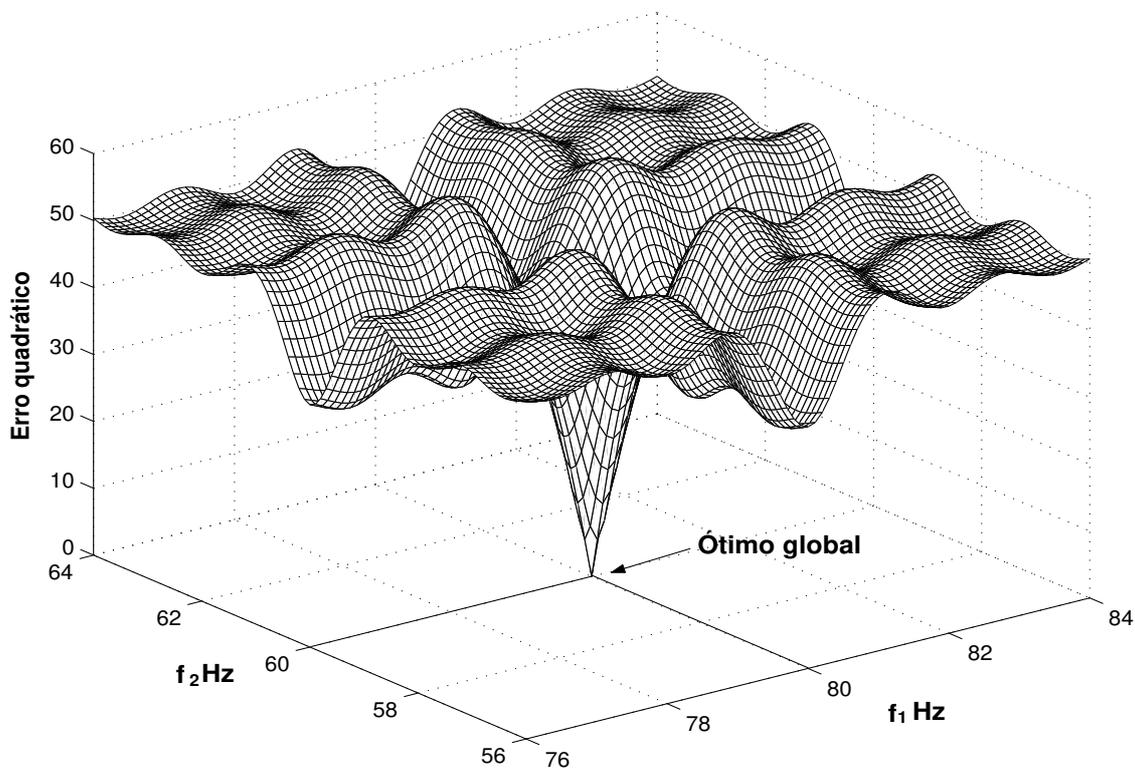


Figura 2.9. Superfície de busca para um modelo contendo duas senóides.

A minimização do erro descrito na equação (2.34) pode ser realizada por algoritmos iterativos como procedimentos que utilizam o cálculo de gradientes descendentes, ou baseados no método de Newton (MACDONOUGH; HUGGINS, 1968). Contudo, estes algoritmos são onerosos computacionalmente, requerendo inversões de matrizes de dimensão equivalentes ao número de amostras a cada iteração (MARPLE, 1987). Além disso, podem convergir para ótimos locais.

Uma outra possibilidade de minimização da função v_N é a utilização de algoritmos genéticos. Algoritmos genéticos são técnicas de otimização que não necessitam do cálculo de derivadas durante a busca do ponto ótimo. São ferramentas matemáticas indicadas para encontrar ótimos globais em espaços de busca onde existem muitos ótimos locais, como mostrado na Figura 2.9. Ao contrário das técnicas baseadas no cálculo de gradientes, dispõem de recursos para “escaparem” de regiões de mínimos locais (GOLDBERG, 1986). Costa (2003) implementaram uma técnica baseada em algoritmos genéticos e mínimos quadrados. A técnica foi desenvolvida para a estimação de espectro de sinais de correntes estatóricas em motores de indução. Contudo, segundo os autores, a convergência do estimador genético é lenta.

Como já foi mencionado anteriormente, as técnicas paramétricas de estimação espectral podem ser baseadas na descrição do sinal de dados por processos autoregressivos. A modelagem autoregressiva oferece uma maneira sub-ótima de estimação das frequências. O termo sub-ótimo, neste contexto, significa que a minimização é realizada considerando-se apenas um subconjunto das amostras do sinal de dados. O conceito deste termo será melhor esclarecido no capítulo 4. Dentre os estimadores autoregressivos de frequências, destaca-se o método de Prony. Outros estimadores podem ser interpretados como extensões do método de Prony.

O método de Prony é uma ferramenta matemática baseada em uma estimação sub-ótima que transforma a estimação não linear das frequências na solução de um sistema linear sobre-determinado seguida da solução de uma equação polinomial (KAY, 1988). O método tem sua origem no trabalho do matemático francês Gaspard Riche de Prony, em 1795. Originalmente, no método proposto, $2p$ amostras do sinal analisado são perfeitamente ajustáveis à p exponenciais complexas. No método, o modelo autoregressivo (AR) do sinal é ajustado às amostras do sinal, por meio da solução de um sistema linear determinado. Em seguida, constrói-se um polinômio com os coeficientes do modelo AR. As frequências procuradas podem ser, então, diretamente relacionadas com as fases das raízes desse polinômio. Na versão moderna do método, as p exponenciais são ajustadas a um número maior do que $2p$ amostras, substituindo a solução do sistema linear por um procedimento de mínimos quadrados. O método de Prony é facilmente adaptado para ajustar as amostras a sinais puramente senoidais (HILDEBRAND, 1956).

A aplicação do método de Prony é escassa e relativamente recente em estudos aplicados a sistemas de potência. O trabalho pioneiro foi de Hauer, Demeure e Scharf (1990). Os autores aplicaram o método na análise e caracterização de sinais transitórios oriundos de simulações de programas de estabilidade. Em outro trabalho, Leonowicz, Lobos e Rezmer (2003) compararam o método de Prony com a transformada rápida de Fourier. Os algoritmos foram aplicados a sinais de corrente oriundos da simulação de conversores de frequência em programas do tipo EMTP-ATP. No entanto, as janelas dos sinais analisados são muito curtas, entre 20 a 40 ms. Os autores constataram que o método de Prony estima de maneira precisa as frequências contidas no sinal, mesmo com estas janelas. Estudos comparativos entre o método de Prony e a transformada rápida de Fourier também foram realizados por Costa, Fernandes e Almeida (2005a) e por Costa, Fernandes e Almeida (2005b). Uma versão recursiva do método foi apresentada por Costa (2005)

O ponto crítico do método de Prony é a sensibilidade aos ruídos presentes no sinal de dados. Isso ocorre devido à polarização do estimador de mínimos quadrados. Na literatura, encontram-se algumas estratégias para diminuir o efeito degenerativo que os ruídos exercem na estimativa das frequências. Uma das possibilidades de redução de polarização de um estimador de mínimos quadrados é a utilização de variáveis instrumentais. Essa técnica foi experimentada por (CHAN; LAVOIE; PLANT, 1981). O estimador de variáveis experimentais evita a polarização assintoticamente, ou seja a polarização decresce à medida que o número de observações N cresce. Porém a escolha das variáveis instrumentais não é uma tarefa trivial, pois depende de considerações estatísticas sobre o ruído. Além disso, o estimador obtido é assintoticamente não polarizado, em vez de ser não polarizado em um sentido geral. Outra alternativa para evitar a polarização do estimador de mínimos quadrados é a utilização do estimador de mínimos quadrados totais, utilizado por Rahman (1987). O método, que também utiliza a técnica de SVD (Single Value Decomposition), mostrou-se eficiente apenas na situação em que a ordem do modelo autoregressivo era baixa.

Naidu e Costa (2005) propuseram um método de estimação de frequências que evita o estimador de mínimos quadrados e por isso é mais robusto aos ruídos do que o método de Prony.

No método, estima-se um conjunto de parâmetros que podem ser diretamente relacionados com as frequências contidas no sinal. Os parâmetros são estimados por um método de Newton e portanto não existe a necessidade da resolução de uma equação polinomial. O método foi desenvolvido após manipulações algébricas nas equações do método de Prony, e por isso foi denominado de método de Prony modificado. Ele foi aplicado na análise de sinais de vibração de um motor de indução.

Nesta Tese, sugere-se uma metodologia de análise de harmônicos e inter-harmônicos que combine um estimador linear, para as amplitudes e fases, e um estimador não linear, para as frequências. O filtro de Kalman pode ser utilizado como o estimador linear e o método de Prony modificado como estimador não linear. Como o estimador de Kalman necessita que as frequências sejam previamente conhecidas, é possível então imaginar um esquema em que as frequências sejam estimadas pelo método de Prony modificado e sejam fornecidas em intervalos regulares para o estimador de Kalman.

A filtragem de Kalman possui grandes semelhanças teóricas com o método de mínimos quadrados recursivo ponderado. No próximo capítulo esses dois métodos serão fundamentados teoricamente e serão testados na análise de sinais sintéticos com amplitudes variantes. Este estudo comparativo foi realizado por Costa, Naidu e Costa (2004).

RASTREAMENTO DE HARMÔNICOS E INTER-HARMÔNICOS

As amplitudes dos harmônicos e inter-harmônicos em sistema de potência, em geral, variam no decorrer do tempo. Rastrear as variações é um problema matemático que, como mencionado no capítulo anterior, pode ser abordado por diferentes métodos. Entre os métodos, destaca-se a filtragem de Kalman. O estimador de Kalman possui grande semelhança com o estimador de mínimos quadrados recursivo ponderado. Assim, neste capítulo, os dois estimadores serão comparados e testados na análise de um sinal sintético. Antes porém, é necessário explicar o conceito de estimação recursiva, já que os dois estimadores são recursivos.

Para entender o significado de uma estimação recursiva, considere o seguinte exemplo: deseja-se estimar a média de um sinal a partir de suas amostras $y[1], y[2], \dots, y[N]$, seqüencialmente disponibilizadas. A cada nova amostra disponibilizada a estimativa deve ser renovada. Um algoritmo plausível seguiria os passos:

1. Primeira amostra $y[1]$: armazene $y[1]$ e estime a média como:

$$\hat{m}_1 = y[1]$$

2. Segunda amostra $y[2]$: armazene $y[2]$ ao lado de $y[1]$ e estime a média como:

$$\hat{m}_2 = \frac{y[1] + y[2]}{2}$$

3. Terceira amostra $y[3]$: armazene $y[3]$ ao lado de $y[1]$ e de $y[2]$ e estime a média como:

$$\hat{m}_3 = \frac{y[1] + y[2] + y[3]}{3}$$

4. Continue com o mesmo procedimento.

Apesar do algoritmo acima resultar em uma estimação correta, ele apresenta dois inconvenientes: primeiramente, a cada nova medida disponibilizada, o requerimento de memória por parte do algoritmo aumenta. Em segundo lugar, o número de operações aritméticas aumenta a cada passo. Recursivamente, o problema proposto seria solucionado da seguinte maneira:

1. Primeira amostra $y[1]$: armazene $y[1]$ e estime a média como:

$$\hat{m}_1 = y[1].$$

Armazene \hat{m}_1 e descarte $y[1]$.

2. Segunda amostra $y[2]$: calcule a estimativa como a soma ponderada da estimativa prévia e da amostra atual $y[2]$:

$$\hat{m}_2 = \frac{1}{2}\hat{m}_1 + \frac{1}{2}y[2].$$

Armazene \hat{m}_2 e descarte $y[2]$ e \hat{m}_1 .

3. Terceira amostra $y[3]$: calcule a estimativa como a soma ponderada de \hat{m}_2 e de $y[3]$:

$$\hat{m}_3 = \frac{2}{3}\hat{m}_2 + \frac{1}{3}y[3].$$

Armazene \hat{m}_3 e descarte $y[3]$.

4. E assim por diante. A i -ésima estimativa é calculada como:

$$\hat{m}_i = \left(\frac{i-1}{i} \right) \hat{m}_{i-1} + \frac{1}{i}y[i].$$

O último algoritmo é mais vantajoso que o primeiro. Ele requer menos memória. Além disso, o número de multiplicações permanece constante a cada passo, pois o algoritmo aproveita os cálculos realizados no passo anterior. A idéia fundamental é expressar a estimativa em um tempo discreto n em função da estimativa no tempo $(n-1)$.

3.1 MÍNIMOS QUADRADOS RECURSIVO PONDERADO - MQRP

O algoritmo de mínimos quadrados é uma técnica de estimação paramétrica utilizada para resolver o seguinte problema: deseja-se ajustar uma função modelo \hat{y} a um conjunto de N

amostras de uma grandeza y qualquer. Assim, o ajuste deve minimizar a soma dos erros quadráticos das diferenças entre os valores das amostras e da função modelo. Se o ajuste resultar da estimação de parâmetros nos quais a função depende linearmente, o algoritmo de mínimos quadrados é dito linear.

Suponha que um sinal $y[n]$, $n = 1, 2, \dots, N$, é modelado por:

$$\hat{y}[n] = \varphi_1[n]\alpha_1 + \varphi_2[n]\alpha_2 + \dots + \varphi_p[n]\alpha_p, \quad (3.1)$$

em que as funções $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ são os regressores do modelo dependente de p parâmetros: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$. Para a compactação das equações, é conveniente expressar os regressores e os parâmetros por:

$$\boldsymbol{\varphi}_n = [\varphi_1[n] \ \varphi_2[n] \ \dots \ \varphi_p[n]]^T, \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_p]^T. \quad (3.3)$$

Como foi mencionado acima, no método de mínimos quadrados, os parâmetros são estimados de forma a minimizarem o erro quadrático v fornecido por:

$$v[N] = \sum_{i=1}^N (\hat{y}[i] - y[i])^2. \quad (3.4)$$

A solução da minimização é muito bem conhecida e é fornecida por (AGUIRRE, 2000):

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{y}, \quad (3.5)$$

em que \mathbf{y} é o vetor cujo os elementos são as amostras do sinal y e a matriz dos regressores \mathbf{M} é fornecida por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \varphi_1[1] & \varphi_2[1] & \dots & \varphi_p[1] \\ \varphi_1[2] & \varphi_2[2] & \dots & \varphi_p[2] \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \varphi_1[n] & \varphi_2[n] & \dots & \varphi_p[n] \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

O produto $(\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T$ é chamado de pseudoinversa. A estimação fornecida na equação (3.5) é dita solução em batelada pois utiliza de uma única vez todas as amostras do sinal analisado. A grande desvantagem desta estimação é o esforço computacional requerido para calcular a pseudoinversa, principalmente quando a ordem da matriz M é elevada. Para aplicações em que se deseja atualizar a estimativa a cada nova leitura de uma amostra, algoritmos em batelada, em

geral, não são uma boa alternativa. Isso motivou a busca de um algoritmo que recursivamente atualize a solução descrita em (3.5).

O primeiro passo do algoritmo de mínimos quadrados recursivo é estimar no tempo inicial, um conjunto de parâmetros para a função modelo \hat{y} . A estimação inicial gera o chamado erro *a priori* ou de predição, descrito como:

$$e^0[n+1] = y[n+1] - \hat{y}^0[n+1]. \quad (3.7)$$

O sobrescrito em $\hat{y}[n+1]$ na equação (3.7) indica que sua predição é realizada utilizando o vetor de parâmetros conhecido no instante anterior, ou seja, no instante discreto n . Assim, a predição para o sinal de dados y no tempo $n+1$, é fornecida por:

$$\hat{y}^0[n+1] = \boldsymbol{\alpha}_n^T \boldsymbol{\varphi}_n, \quad (3.8)$$

O erro *a priori* é utilizado para que o algoritmo de mínimos quadrados melhore a estimativa dos parâmetros procurados. Através de uma combinação linear dos parâmetros estimados no tempo discreto n e do erro *a priori*, projeta-se a estimativa dos parâmetros:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{n+1} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_n + \mathbf{K}_n e^0[n+1], \quad (3.9)$$

em que o ganho \mathbf{K}_n é fornecido (ver apêndice A) por:

$$\mathbf{K}_n = \frac{\mathbf{P}_n \boldsymbol{\varphi}_n}{\boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{P}_n \boldsymbol{\varphi}_n + 1}, \quad (3.10)$$

sendo \mathbf{P} é uma matriz de dimensão $p \times p$, chamada matriz de covariância. Antes do início do algoritmo, a matriz \mathbf{P} deve ser estimada. Sua projeção para o tempo $n+1$ ocorre de acordo com a equação (ver apêndice A):

$$\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_n - \frac{\mathbf{P}_n \boldsymbol{\varphi}_n \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{P}_n}{1 + \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{P}_n \boldsymbol{\varphi}_n}. \quad (3.11)$$

As equações (3.7), (3.9), (3.10) e (3.11) devem ser utilizadas no laço principal do algoritmo de mínimos quadrados. O algoritmo é iniciado com a estimativa do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\alpha}$ e da matriz de covariância \mathbf{P} . Chamando o valor inicial do vetor estimado de $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0$, a predição para o

primeiro valor de y é:

$$\begin{aligned}
 \hat{y}[1] &= \boldsymbol{\varphi}_0^T \hat{\boldsymbol{\alpha}}_1 \\
 &= \boldsymbol{\varphi}_0^T [\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0 + \mathbf{K}_0 (y[1] - \boldsymbol{\varphi}_0^T \hat{\boldsymbol{\alpha}}_0)] \\
 &= \boldsymbol{\varphi}_0^T \left[\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0 + \frac{\mathbf{P}_0 \boldsymbol{\varphi}_0}{\boldsymbol{\varphi}_0^T \mathbf{P}_0 \boldsymbol{\varphi}_0 + 1} (y[1] - \boldsymbol{\varphi}_0^T \hat{\boldsymbol{\alpha}}_0) \right].
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Se \mathbf{P} for uma matriz com valores elevados, então $\boldsymbol{\varphi}_0^T \mathbf{P}_0 \boldsymbol{\varphi}_0 \gg 1$. Deste modo, a última igualdade em (3.12) pode ser aproximada por:

$$\begin{aligned}
 \hat{y}_1 &\approx \boldsymbol{\varphi}_0^T \hat{\boldsymbol{\alpha}}_0 + \boldsymbol{\varphi}_0^T \mathbf{P}_0 \boldsymbol{\varphi}_0 (\boldsymbol{\varphi}_0^T \mathbf{P}_0 \boldsymbol{\varphi}_0)^{-1} y[1] - \boldsymbol{\varphi}_0^T \mathbf{P}_0 \boldsymbol{\varphi}_0 (\boldsymbol{\varphi}_0^T \mathbf{P}_0 \boldsymbol{\varphi}_0)^{-1} \boldsymbol{\varphi}_0^T \hat{\boldsymbol{\alpha}}_0 \\
 &\approx y[1].
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Portanto, fixando-se valores elevados para os elementos de \mathbf{P} , a primeira estimativa do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\alpha}$, praticamente não afeta o valor estimado para y .

Em situações em que os parâmetros a serem estimados variem no decorrer do tempo, o método dos mínimos quadrados recursivo não é adequado. Como pode ser observado na equação (3.4), o estimador de mínimos quadrados pondera de forma idêntica os erros cometidos pelo modelo em todos os tempos. Em outras palavras, em um conjunto de N pontos, a primeira observação possui o mesmo peso da milésima. Ao se estimar parâmetros variantes no decorrer do tempo, é conveniente que as observações mais recentes exerçam mais influência no cálculo do erro total, pois elas contêm informação mais atualizada. Para tanto, deve-se ponderar a soma v dos erros quadráticos da seguinte maneira:

$$v(N) = \sum_{i=1}^N \lambda^{N-i} (\hat{y}[i] - y[i])^2, \tag{3.14}$$

em que λ é o chamado fator de esquecimento e deve pertencer ao intervalo: $0 < \lambda < 1$. Ele modifica as expressões de atualização para o ganho \mathbf{K} e para a matriz de covariância \mathbf{P} da seguinte maneira (AGUIRRE, 2000):

$$\mathbf{K}_n = \frac{\mathbf{P}_n \boldsymbol{\varphi}_n}{\boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{P}_n \boldsymbol{\varphi}_n + \lambda}, \tag{3.15}$$

$$\mathbf{P}_{n+1} = \frac{1}{\lambda} \left(\mathbf{P}_n - \frac{\mathbf{P}_n \boldsymbol{\varphi}_n \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{P}_n}{1 + \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{P}_n \boldsymbol{\varphi}_n} \right). \tag{3.16}$$

Assim, o estimador de mínimos quadrados recursivo ponderado (MQRP) é resumido no seguinte conjunto de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_n = \frac{\mathbf{P}_n \boldsymbol{\varphi}_n}{\boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{P}_n \boldsymbol{\varphi}_n + \lambda} \\ e^0[n+1] = y[n+1] - \hat{y}^0[n+1] \\ \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{n+1} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_n + \mathbf{K}_n e^0[n+1] \\ \mathbf{P}_{n+1} = \frac{1}{\lambda} \left(\mathbf{P}_n - \frac{\mathbf{P}_n \boldsymbol{\varphi}_n \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{P}_n}{1 + \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{P}_n \boldsymbol{\varphi}_n} \right). \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Deve-se notar que o algoritmo descrito em (3.17) é determinístico. Não se faz nenhuma consideração estatística sobre os ruídos que eventualmente o sinal de dados contenha, ou sobre a matriz de covariância \mathbf{P} . Ao contrário desta abordagem, o algoritmo de Kalman, a ser apresentado na próxima seção, possui em sua estrutura, a descrição estatística dos ruídos associados ao sinal de dados, e também fornece uma interpretação estatística da matriz de covariância \mathbf{P} .

3.2 FILTRO DE KALMAN

A filtragem de Kalman tem suas origens nos anos 40 com os trabalhos de Wiener e Kolmogorov. Estes pesquisadores investigaram o seguinte problema: Fornecida as características espectrais de uma combinação aditiva de um sinal e seu ruído associado, qual é a operação linear (filtro) que melhor separa o sinal do ruído. O “melhor” filtro, no contexto daqueles trabalhos, era aquele que minimizava a esperança do erro quadrático entre o sinal na saída do filtro e o sinal sem o ruído. As soluções propostas por Wiener e Kolmogorov são limitadas somente para sinais estacionários (sinais em que os parâmetros do modelo são constantes) e para o caso de Wiener, somente modelos contínuos são considerados.

No início dos anos 60, R. E. Kalman propôs uma solução que generalizava a solução proposta de Wiener para sinais não estacionários e que era conveniente para a utilização de modelos discretos (KALMAN, 1960). Kalman optou por descrever o sinal $y[n]$ através de um modelo que explicita a variação de seus parâmetros, ou alternativamente a variação de seus estados. Dessa forma, Kalman parte do seguinte modelo:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \Phi_n \mathbf{x}_n + \mathbf{w}_n, \quad (3.18)$$

$$y[n] = \mathbf{h}_n \mathbf{x}_n + \eta[n]. \quad (3.19)$$

A equação (3.18) é chamada equação de estados e a equação (3.19) é chamada equação de saída. O significado dos vetores e matrizes envolvidos nas duas equações acima são destacados a seguir:

\mathbf{x}_n = vetor de estados ($p \times 1$) que contém os parâmetros a serem determinados. É equivalente ao vetor $\boldsymbol{\alpha}$ da descrição do algoritmo de mínimos quadrados na seção anterior.

Φ_n = matriz de transição ($p \times p$) relacionando \mathbf{x}_n a \mathbf{x}_{n+1} na ausência de uma função de entrada.

\mathbf{w}_n = vetor ($p \times 1$) cujo os elementos são não correlacionados em um sentido temporal, ou seja, permite-se que em um dado instante k , os elementos de \mathbf{w}_k sejam correlacionados entre si. No entanto, os elementos de \mathbf{w}_k não são correlacionados com os elementos de \mathbf{w}_i , quando $i \neq k$.

\mathbf{h}_n = vetor ($1 \times p$) que fornece a conexão ideal entre a medição $y[n]$ e o vetor de estados no tempo t .

$\eta[n]$ = ruído branco com matriz de covariância conhecida. Representa o erro de observação do processo $y[n]$.

A matriz de covariância do vetor \mathbf{w} é descrita como:

$$E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_i^T] = \begin{cases} \mathbf{Q}_k & i = k \\ \mathbf{0} & i \neq k, \end{cases} \quad (3.20)$$

em que \mathbf{Q} é uma matriz de dimensão $p \times p$. A variância do erro de medição $\eta[n]$ é descrita por:

$$E[\eta[k] \eta[i]] = \begin{cases} r[k] & i = k \\ 0 & i \neq k, \end{cases} \quad (3.21)$$

em que E é o operador esperança. O algoritmo de Kalman é iniciado com uma estimativa a priori \mathbf{x}_i^0 para as variáveis de estado. A estimativa *a priori* define o erro *a priori*, descrito como:

$$\boldsymbol{\xi}_n^0 = \mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n^0. \quad (3.22)$$

A matriz de covariância associada ao erro no tempo n , é descrita como:

$$\mathbf{P}_i^0 = E \left[\boldsymbol{\xi}_i^0 (\boldsymbol{\xi}_i^0)^T \right]. \quad (3.23)$$

A exemplo do algoritmo de mínimos quadrados, a filtragem de Kalman procura melhorar sua estimativa inicial, por meio de uma combinação linear da estimativa *a priori* das variáveis de estado e do erro de predição da grandeza y , descrito como:

$$e^0[n] = y[n] - \hat{y}^0[n] = y[n] - \mathbf{h}_n \hat{\mathbf{x}}_n^0. \quad (3.24)$$

A equação recursiva para a atualização das variáveis de estado é descrita por:

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}_n^0 + \mathbf{K}_n e^0[n]. \quad (3.25)$$

O problema agora é encontrar um ganho \mathbf{K}_n que torne a atualização descrita em (3.25) ótima. Para a filtragem de Kalman, a atualização é ótima quando os elementos da diagonal principal da matriz de covariância \mathbf{P} são minimizados. Como pode ser observado na equação (3.23), tais elementos representam a esperança dos erros de predição para as variáveis de estado contidas no vetor \mathbf{x} . Para encontrar o ganho \mathbf{K}_n , deve-se inseri-lo na expressão de \mathbf{P} . Assim, pode-se reescrever a expressão da matriz \mathbf{P} como:

$$\mathbf{P}_n = E \left[\boldsymbol{\xi}_n \boldsymbol{\xi}_n^0 \right] = E \left[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n) (\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T \right]. \quad (3.26)$$

Em seguida, substituindo a equação (3.19) em (3.25) e então substituindo o resultado da expressão de \mathbf{x}_n na equação (3.26), resulta em:

$$\mathbf{P}_n = E \left\{ \left[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n^0) - \mathbf{K}_n (\mathbf{h}_n \mathbf{x}_n + \eta[n] - \mathbf{h}_n \hat{\mathbf{x}}_n^0) \right] [\bullet]^T \right\}, \quad (3.27)$$

em que $[\bullet]$ repete a expressão do colchete anterior. Desenvolvendo a expressão (3.27) e observando que $(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^0)$ é o erro *a priori*, não correlacionado com o erro de medição $\eta[n]$, obtém-se:

$$\mathbf{P}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_n \mathbf{h}_n) \mathbf{P}_n^0 (\mathbf{I} - \mathbf{K}_n \mathbf{h}_n)^T + \mathbf{K}_n r[n] \mathbf{K}_n^T, \quad (3.28)$$

sendo \mathbf{I} a matriz identidade e \mathbf{P}_n^0 a matriz de covariância do erro *a priori*. É importante notar que a equação (3.28) é uma expressão de atualização da matriz de covariância para qualquer

valor de \mathbf{K}_n , ótimo ou não. A equação (3.28) pode ser expandida e reagrupada para se obter a uma expressão quadrática em \mathbf{K}_n :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^0 - \underbrace{\mathbf{K}\mathbf{h}\mathbf{P}^0 - \mathbf{P}^0\mathbf{h}^T\mathbf{K}^T}_{\text{Linear em } \mathbf{K}} + \underbrace{\mathbf{K}(\mathbf{h}\mathbf{P}^0\mathbf{h}^T + r)\mathbf{K}^T}_{\text{Quadrática em } \mathbf{K}}, \quad (3.29)$$

sendo que a notação referente ao tempo indexado n foi suprimida para facilitar a leitura das expressões. A expressão, $\mathbf{h}\mathbf{P}^0\mathbf{h}^T + r$ pode ser fatorada na forma $\mathbf{S}\mathbf{S}^T$, ou seja:

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^T \triangleq \mathbf{h}\mathbf{P}^0\mathbf{h}^T + r, \quad (3.30)$$

assim que a expressão para \mathbf{P} pode ser reescrita como:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^0 - \mathbf{K}\mathbf{h}\mathbf{P}^0 - \mathbf{P}^0\mathbf{h}^T\mathbf{K}^T + \mathbf{K}\mathbf{S}\mathbf{S}^T\mathbf{K}^T. \quad (3.31)$$

Suponha agora, que a matriz \mathbf{P} seja expressa por:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^0 + (\mathbf{K}\mathbf{S} - \mathbf{A})(\mathbf{K}\mathbf{S} - \mathbf{A})^T - \mathbf{A}\mathbf{A}^T, \quad (3.32)$$

em que \mathbf{A} não depende de \mathbf{K} . Se a equação (3.32) for expandida e comparada termo a termo com a equação (3.31), verifica-se a seguinte igualdade:

$$\mathbf{K}\mathbf{S}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{S}^T\mathbf{K}^T = \mathbf{K}\mathbf{h}\mathbf{P}^0 + \mathbf{P}^0\mathbf{h}^T\mathbf{K}^T. \quad (3.33)$$

Se a matriz \mathbf{A} for expressa por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^0\mathbf{h}^T (\mathbf{S}^T)^{-1}, \quad (3.34)$$

então a igualdade na equação (3.33) é satisfeita e as equações (3.31) e (3.32) são equivalentes.

Nota-se que só a segunda parcela em (3.32) depende de \mathbf{K} . A segunda parcela é o produto de uma matriz com sua transposta. Portanto, isso assegura que todos os elementos da sua diagonal principal sejam sempre não negativos. Como já mencionado, objetivo é encontrar uma expressão para \mathbf{K} que minimize os elementos da diagonal principal de \mathbf{P} , pois estes elementos representam a variância do erro para as variáveis de estado (ou parâmetros procurados). Assim, zerando-se a segunda parcela da equação (3.32), através de:

$$\mathbf{K}\mathbf{S} = \mathbf{A}, \quad (3.35)$$

garante-se que os valores da diagonal principal de \mathbf{P} serão mínimos. Substituindo-se a expressão de \mathbf{A} em (3.34) na equação (3.35), obtém-se:

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}^0 \mathbf{h}^T (\mathbf{S}\mathbf{S}^T)^{-1}, \quad (3.36)$$

e substituindo-se a expressão de $\mathbf{S}\mathbf{S}^T$ de (3.30) na equação (3.36), obtém-se o chamado *ganho de Kalman* (com a notação do tempo indexado n reinserida):

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{P}_n^0 \mathbf{h}_n^T (\mathbf{h}_n \mathbf{P}_n^0 \mathbf{h}_n^T + r[n])^{-1}. \quad (3.37)$$

Substituindo-se o ganho de Kalman, na equação (3.28), obtém-se a expressão para a atualização ótima de \mathbf{P}_n :

$$\mathbf{P}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_n \mathbf{h}_n) \mathbf{P}_n^0. \quad (3.38)$$

Com a expressão do ganho de Kalman, é possível atualizar a estimativa para as variáveis de estado na equação (3.25). A projeção das variáveis para o tempo $n+1$ é realizada apenas com a utilização da matriz de transição Φ_n . A parcela correspondente ao vetor \mathbf{w}_n não é considerada, pois sua média é nula. Assim:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1}^0 = \Phi_n \hat{\mathbf{x}}_n. \quad (3.39)$$

Para a projeção da matriz de covariância \mathbf{P} , deve-se, primeiramente, formar a expressão para o erro a priori:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_{n+1}^0 &= \mathbf{x}_{n+1} - \hat{\mathbf{x}}_{n+1}^0 \\ &= (\Phi_n \mathbf{x}_n + \mathbf{w}_n) - \Phi_n \hat{\mathbf{x}}_n \\ &= \Phi_n \boldsymbol{\xi}_n + \mathbf{w}_n \end{aligned} \quad (3.40)$$

Considerando a premissa de que \mathbf{w}_n e $\boldsymbol{\xi}_n$ são não correlacionados, a expressão para \mathbf{P}_{n+1}^0 pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n+1}^0 &= E \left[\boldsymbol{\xi}_{n+1}^0 (\boldsymbol{\xi}_{n+1}^0)^T \right] = E \left[(\Phi_n \boldsymbol{\xi}_n + \mathbf{w}_n) (\Phi_n \boldsymbol{\xi}_n + \mathbf{w}_n)^T \right] \\ &= \Phi_n \mathbf{P}_n \Phi_n^T + \mathbf{Q}_n. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Pelo exposto, o estimador de Kalman pode ser resumido no conjunto das seguintes equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_n = \mathbf{P}_n^0 \mathbf{h}_n^T (\mathbf{h}_n \mathbf{P}_n^0 \mathbf{h}_n^T + r[n])^{-1} \\ e^0[n] = y[n] - \hat{y}^0[n] \\ \hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}_n^0 + \mathbf{K}_n e^0[n] \\ \mathbf{P}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_n \mathbf{h}_n) \mathbf{P}_n^0 \\ \hat{\mathbf{x}}_{n+1}^0 = \Phi_n \hat{\mathbf{x}}_n \\ \mathbf{P}_{n+1}^0 = \Phi_n \mathbf{P}_n \Phi_n^T + \mathbf{Q}_n \end{array} \right. \quad (3.42)$$

Antes da finalização desta seção, uma observação deve ser feita em relação a equação de estados descrita em (3.18). Sua forma mais geral é expressa por:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \Phi_n \mathbf{x}_n + \Gamma \mathbf{w}_n \quad (3.43)$$

em que Γ é uma matriz $p \times p$ conhecida. Esta nova versão da equação de estados pouco altera a dedução do algoritmo de Kalman. A única equação a ser modificada no algoritmo (3.42) é a última. Sua forma mais geral é expressa por:

$$\mathbf{P}_{n+1}^0 = \Phi_n \mathbf{P}_n \Phi_n^T + \Gamma \mathbf{Q}_n \Gamma^T \quad (3.44)$$

3.3 DIFERENÇAS ENTRE OS ALGORITMOS DE KALMAN E O ALGORITMO DE MÍNIMOS QUADRADOS RECURSIVO PONDERADO

Formalmente, o filtro de Kalman pertence a classe dos estimadores bayesianos lineares. Seu critério de otimalidade é a minimização da esperança do erro quadrático da estimativa dos parâmetros procurados. A estimação bayesiana pressupõe que sejam disponíveis modelos estatísticos (matrizes de covariância) tanto para o sinal $y[n]$, que é considerado um processo estocástico, quanto para os parâmetros a serem estimados. Através da matriz de covariância inicial \mathbf{P}_0 , é possível incorporar ao estimador o conhecimento prévio que se possui em relação aos parâmetros. Outra característica importante do estimador de Kalman é a descrição explícita da variação dos parâmetros através da equação de estados. No algoritmo em si, isso se traduz

na regulação da matriz de covariância \mathbf{P} através da matriz \mathbf{Q} , que modela estatisticamente a maneira pela qual os parâmetros mudam a cada passo de tempo. É interessante notar que os parâmetros são considerados como estados do processo y . Isso pode ser um reflexo da teoria de controle que na época de Kalman estava direcionada para estudos sobre a estimação de estados, enquanto que na época de Wiener a teoria de controle ainda era mais baseada em modelos do tipo entrada-saída (GELB, 1974).

Formalmente, o algoritmo MQRP pertence a família dos estimadores clássicos onde os parâmetros procurados são considerados determinísticos. Não existem considerações estatísticas sobre o sinal y . O critério de otimalidade da versão em batelada é perdido na versão recursiva dos mínimos quadrados porque não existem considerações estatísticas sobre a determinação da matriz de covariância inicial \mathbf{P}_0 , que é selecionada de maneira arbitrária. Além disso, sua evolução é regulada pelo fator de esquecimento λ que é também selecionado arbitrariamente. É importante observar que sem a presença do fator de esquecimento no estimador MQRP e sem a presença da matriz \mathbf{Q} no filtro de Kalman, os elementos da diagonal principal da matriz de covariância \mathbf{P} diminuem a cada iteração e assim, a característica de adaptabilidade é perdida pelos dois estimadores. No entanto, em comparação com a matriz \mathbf{Q} , o fator de esquecimento λ não regula a variação da matriz \mathbf{P} tão eficientemente. Isso pode ser melhor entendido ao se observar que λ exerce a mesma influência para todos os elementos da diagonal principal da matriz \mathbf{P} , que armazenam a informação de como os parâmetros mudam a cada iteração. Desse modo, se houver uma situação em que um parâmetro varia mais rapidamente do que outro, não se pode considerá-la adequadamente com o fator de esquecimento λ . Já em relação a matriz \mathbf{Q} , pode-se selecionar os elementos de sua diagonal principal, de tal modo que exerçam diferentes efeitos na evolução dos elementos da diagonal principal da matriz \mathbf{P} , e assim contemplar adequadamente, situações em que alguns parâmetros variem mais rapidamente do que outros.

As diferenças fundamentais entre os algoritmos MQRP e de FK estão resumidas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1. Diferenças entre os estimadores MQRP e FK

	FK	MQRP
Classificação	Estimação bayesiana linear	Estimação clássica linear
Critério de otimalidade	$\min (E(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^2)$	Não possui
Descrição do sinal	Modelo estocástico linear	Modelo determinístico linear
Descrição dos parâmetros	Equação de estados	Não possui
Matriz \mathbf{P}	Regulação pela matriz \mathbf{Q}	Regulação por λ

3.4 APLICAÇÃO DE ALGORITMOS RECURSIVOS PARA O RASTREAMENTO DE AMPLITUDES DE SENÓIDES

O rastreamento de amplitudes de senóides de tensão ou corrente oriundas de sistemas elétricos pode ser realizado pelos estimadores de Kalman e MQRP, desde que as frequências das senóides sejam previamente conhecidas.

3.4.1 Filtro de Kalman

Para a aplicação do filtro de Kalman na estimação das amplitudes é conveniente escrever cada componente senoidal através da soma de duas parcelas. Assim, por meio da identidade trigonométrica descrita por:

$$A \cos(\omega \Delta T n + \theta) = A \cos(\theta) \cos(\omega \Delta T n) - A \sin(\theta) \sin(\omega \Delta T n), \quad (3.45)$$

é possível definir os seguintes estados para o processo $y[n]$:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= A_1[n] \cos(\theta_1) & x_2[n] &= A_1[n] \sin(\theta_1) \\ x_3[n] &= A_2[n] \cos(\theta_2) & x_4[n] &= A_2[n] \sin(\theta_2) \\ &\vdots & &\vdots \\ x_{2p-1}[n] &= A_p[n] \cos(\theta_p) & x_{2p}[n] &= A_p[n] \sin(\theta_p) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Note que as amplitudes e fases do i -ésimo componente podem ser recuperadas por meio das relações:

$$\begin{cases} A_i = \sqrt{x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2} \\ \theta_i = \arctan\left(\frac{x_{2i}}{x_{2i-1}}\right). \end{cases} \quad (3.47)$$

Uma maneira simples e flexível de modelar a dinâmica das variáveis de estado é através de um modelo de passeio aleatório simples SRW (Simple Random Walk) (NORTON, 1988) fornecido por:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{w}_i \quad (3.48)$$

em que \mathbf{w} é independente de \mathbf{x} . O modelo SRW é apenas um caso particular do modelo evolução de estados descrito pela equação (3.43). Assim, a equação que descreve a variação dos estados do processo y é expressa matricialmente por:

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \\ \vdots \\ x_{2p-1}[n+1] \\ x_{2p}[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ \vdots \\ x_{2p-1}[n] \\ x_{2p}[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1[n] \\ w_2[n] \\ \vdots \\ w_{2p-1}[n] \\ w_{2p}[n] \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

O processo y , que representa o sinal de dados, depende linearmente dos estados através da equação:

$$y[n] = [h_1[n] \ h_2[n] \ \cdots \ h_{2p-1}[n] \ h_{2p}[n]] \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ \vdots \\ x_{2p-1}[n] \\ x_{2p}[n] \end{bmatrix} + v[n] \quad (3.50)$$

sendo que,

$$\begin{aligned} h_i[n] &= \cos(\omega_i \Delta T n) & i &= 1, 3, 5, \dots, 2p-1 \text{ e} \\ h_i[n] &= -\sin(\omega_i \Delta T n) & i &= 2, 4, 6, \dots, 2p. \end{aligned} \quad (3.51)$$

3.4.2 MQRP

A aplicação do algoritmo de mínimos quadrados para o problema de estimação de amplitudes de senóides é mais simples pois não se modela a dinâmica dos parâmetros procurados. O vetor

dos regressores φ é igual ao transposto do vetor \mathbf{h} e o sinal de dados depende linearmente dos parâmetros α_i através do modelo:

$$y[n] = \alpha_1 \cos(\omega_1 \Delta T n) + \alpha_2 \sin(\omega_1 \Delta T n) + \alpha_3 \cos(\omega_2 \Delta T n) + \alpha_4 \sin(\omega_2 \Delta T n) + \dots \\ \dots + \alpha_{2p-1} \cos(\omega_p \Delta T n) + \alpha_{2p} \sin(\omega_p \Delta T n). \quad (3.52)$$

As amplitudes e fases de cada componente senoidal são obtidas através das relações:

$$\begin{cases} A_i = \sqrt{\alpha_{2i-1}^2 + \alpha_{2i}^2} \\ \theta_i = \arctan\left(\frac{\alpha_{2i}}{\alpha_{2i-1}}\right). \end{cases} \quad (3.53)$$

3.4.3 Seleção dos parâmetros de simulação

Para aplicar o estimador de Kalman é necessário realizar a seleção da matriz de covariância inicial \mathbf{P}_0 , a seleção da matriz \mathbf{Q} , a seleção do escalar r , e a seleção do vetor inicial de estados \mathbf{x}_0 . Teoricamente, a seleção da matriz \mathbf{P}_0 obedece a motivações estatísticas e os elementos de sua diagonal principal devem representar a esperança do erro quadrático para o estado inicial do processo. Se nada se conhece sobre os estados iniciais do processo é comum fixar os elementos da diagonal principal de \mathbf{P}_0 em valores elevados. A seleção dos estados iniciais obviamente depende do processo considerado. A seleção da matriz \mathbf{Q} é baseada no conhecimento sobre o grau de variação de cada estado do processo. Se é esperado que um dos estados varie mais do que outros, então o elemento da diagonal principal de \mathbf{Q} correspondente a este estado deve ser fixado em um valor maior do que os outros elementos da diagonal. Na seleção do escalar r , geralmente, estima-se qual é a variância do ruído de fundo no local de aquisição do processo analisado.

A aplicação do estimador MQRP necessita que sejam selecionados a matriz de covariância inicial \mathbf{P}_0 , o fator de esquecimento λ e os parâmetros iniciais. Aqui, a seleção de \mathbf{P}_0 não possui as motivações estatísticas do estimador de Kalman. Na prática é usual fixar os elementos de sua diagonal principal em valores elevados pois isso assegura, como já mencionado, que a estimativa para a primeira amostra do sinal y seja pouco afetada por uma estimativa inicial errônea dos parâmetros. O fator de esquecimento λ é geralmente fixado entre 0,95 e 0,99 (AGUIRRE, 2000).

É fundamental observar que o estimador MQRP, na prática, pode incorporar um conhecimento prévio sobre os parâmetros através da matriz de covariância \mathbf{P} . Porém, a informação de como os parâmetros variam no decorrer do tempo, só pode ser incorporada de maneira eficiente pelo estimador de Kalman.

3.5 SIMULAÇÕES

Nesta seção os estimadores de Kalman (FK) e de mínimos quadrados recursivo ponderado (MQRP) serão comparados. A implementação dos algoritmos foi realizada em ambiente MATLAB. Os dois algoritmos serão testados em um sinal sintético composto por sete senóides. Nas simulações, a amplitude da senóide de frequência 60 Hz varia no decorrer do tempo, enquanto os outros componentes possuem amplitudes constantes. O sinal é descrito por:

$$\begin{aligned}
 y[n] = & A_1[n] \cos\left(\omega\Delta Tn + \frac{\pi}{18}\right) + A_2[n] \cos\left(3\omega\Delta Tn + \frac{\pi}{18}\right) + A_3[n] \cos\left(5\omega\Delta Tn + \frac{\pi}{6}\right) + \\
 & A_4[n] \cos\left(7\omega\Delta Tn + \frac{2\pi}{9}\right) + A_5[n] \cos\left(11\omega\Delta Tn + \frac{5\pi}{18}\right) + A_6[n] \cos\left(13\omega\Delta Tn + \frac{\pi}{3}\right) + \\
 & A_7[n] \cos\left(19\omega\Delta Tn + \frac{7\pi}{18}\right), \tag{3.54}
 \end{aligned}$$

sendo $\omega = 2\pi 60$ radianos/s e a frequência de amostragem 3840 Hz.

Na primeira simulação realizada, os estimadores FK e MQRP são utilizados para o rastreamento da amplitude da senóide de 60 Hz. Não é adicionado ruído ao sinal. Tanto para o algoritmo MRQP quanto para o FK, as estimativas iniciais das amplitudes são fixadas em zero e não é acrescentado ruído ao sinal. Para o caso do estimador MRQP, a matriz de covariância \mathbf{P}_0 é selecionada para ser diagonal com todos os elementos da diagonal principal iguais a 1000 e o fator de esquecimento é fixado em 0,95. Para a filtragem de Kalman a matriz de covariância também é escolhida para ser diagonal, sendo seus elementos iguais 1000. A variância r é fixada em 0,25. A matriz \mathbf{Q} possui todos os elementos iguais a zero a exceção dos dois primeiros elementos da diagonal principal que serão iguais a 0,05. A seleção destes parâmetros é heurística.

Na Figura 3.1(a), mostra-se o gráfico da evolução da amplitude do componente de 60 Hz

para os estimadores de FK e MQRP. Também é mostrada a evolução que efetivamente ocorreu para a amplitude. Na Figura 3.1(b), as mesmas informações são mostradas em uma escala maior. Observa-se que a filtragem de Kalman possui um desempenho superior ao método dos mínimos quadrados ponderado para esta simulação.

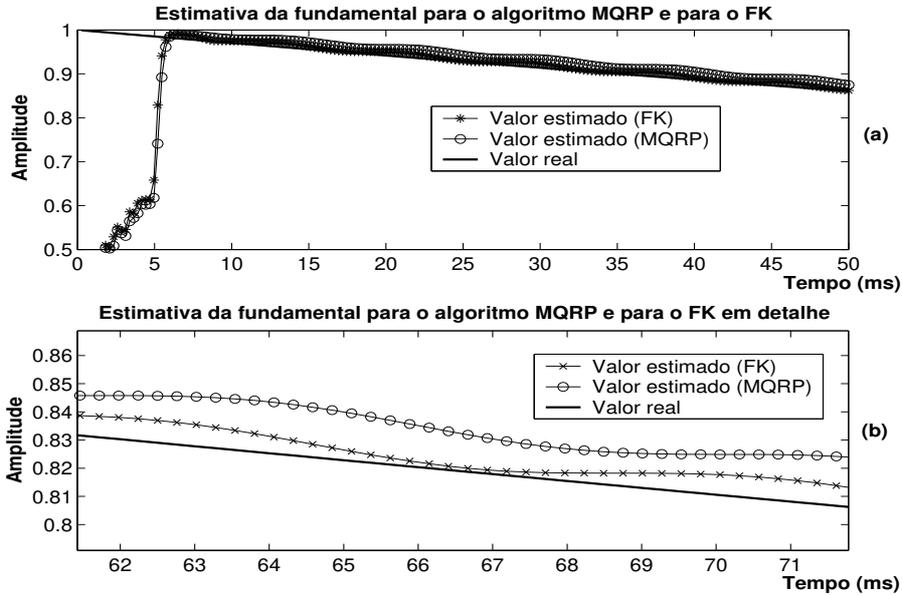


Figura 3.1. Estimativa da evolução das amplitudes para os estimadores FK e MQRP - 1ª simulação

Na segunda simulação, realizaram-se as estimações da amplitude da fundamental e da décima nona harmônica. Ao sinal é acrescentado um ruído com variância 0,25. As estimativas iniciais das amplitudes são todas fixadas no valor zero. O fator de esquecimento λ , para este caso, é fixado em 0,99. A matriz \mathbf{Q} possui todos os elementos iguais a zero, a exceção dos dois primeiros elementos da diagonal principal que são iguais a $(0,05)^4$, ou seja:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} (0,05)^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (0,05)^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Na Figura 3.2(a) fica evidente que ao se ajustar o fator de esquecimento para 0,99 o desempenho do estimador MQRP é equivalente ao FK. No entanto, o rastreamento para a amplitude da décima nona harmônica, realizado pelo MQRP, continua inferior ao rastreamento do algoritmo

FK, como se mostra na Figura 3.2(b). Isto se explica pela maior flexibilidade de ajuste dos parâmetros de simulação que a filtragem de Kalman oferece. Como já mencionado, a matriz \mathbf{Q} desempenha um papel análogo ao fator de esquecimento do algoritmo MQRP. Observando-se a equação (3.19), percebe-se que a evolução das variáveis de estado dependem da matriz de transição $\Phi_{\mathbf{n}}$ e do vetor $\mathbf{w}_{\mathbf{n}}$. No modelamento SRW, escolhido para representar a dinâmica dos estados, a matriz $\Phi_{\mathbf{n}}$ é igual a matriz identidade e portanto não afeta a evolução dos estados. Assim, a evolução da estimação das amplitudes está relacionada somente ao vetor $\mathbf{w}_{\mathbf{n}}$. O vetor $\mathbf{w}_{\mathbf{n}}$, por sua vez, é descrito estatisticamente pela matriz de covariância \mathbf{Q} . Se por exemplo, o modelo considerado possuir duas variáveis de estado, a matriz \mathbf{Q} é descrita por:

$$\mathbf{Q}_n = \begin{bmatrix} E(w_1^2[n]) & E(w_1[n]w_2[n]) \\ E(w_2[n]w_1[n]) & E(w_2^2[n]) \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

e observa-se que os elementos da diagonal principal da matriz \mathbf{Q} são diretamente relacionados as amplitudes das variações dos elementos do vetor \mathbf{w} . Portanto, fixar o primeiro elemento da diagonal principal da matriz \mathbf{Q} em um valor maior que os outros elementos da diagonal, significa assumir que o primeiro elemento do vetor das variáveis de estado pode variar mais que os outros. Na Figura 3.3, mostra-se a evolução do elemento $P(1, 1)$ para os estimadores MQRP e FK. Observa-se que o comportamento do elemento $P(1, 1)$ é oscilante para o estimador MQRP enquanto que para o estimador FK, a evolução do elemento $P(1, 1)$ se estabiliza em um valor inferior. Na Figura 3.4, mostra-se a evolução do elemento $P(14, 14)$ para os estimadores MQRP e FK. Novamente se percebe que o comportamento de $P(14, 14)$ é oscilante para o caso em que o estimador utilizado é o MQRP. Essas oscilações acarretam em um desempenho inferior do estimador MQRP em relação ao FK.

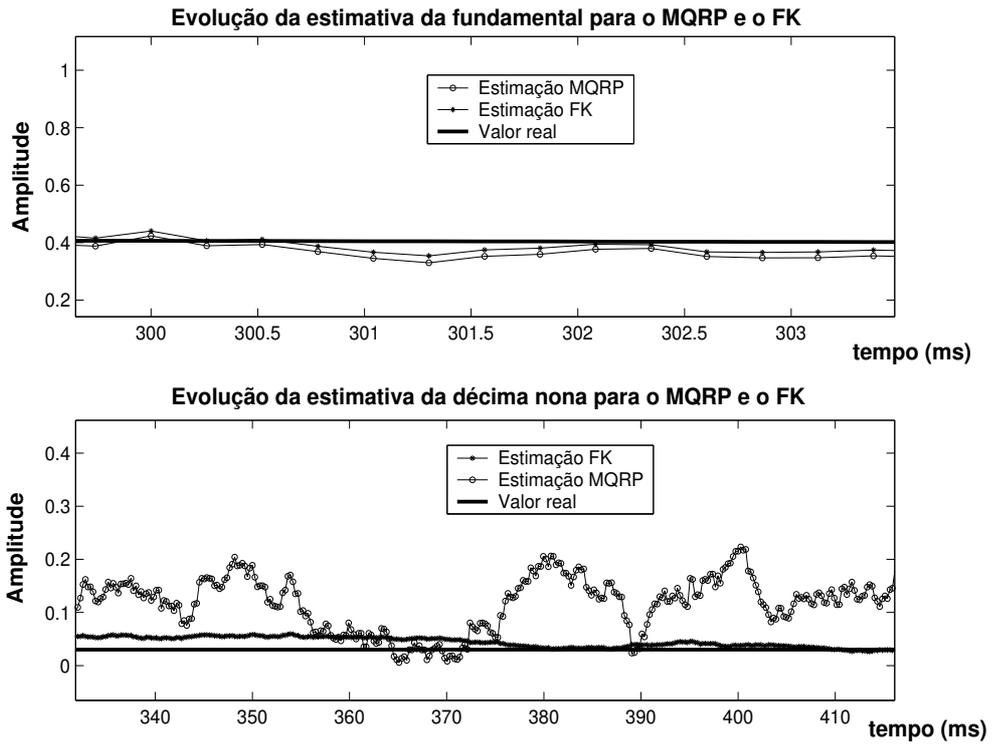


Figura 3.2. Estimativa da evolução das amplitudes para os estimadores MQRP e FK - 2^o simulação.

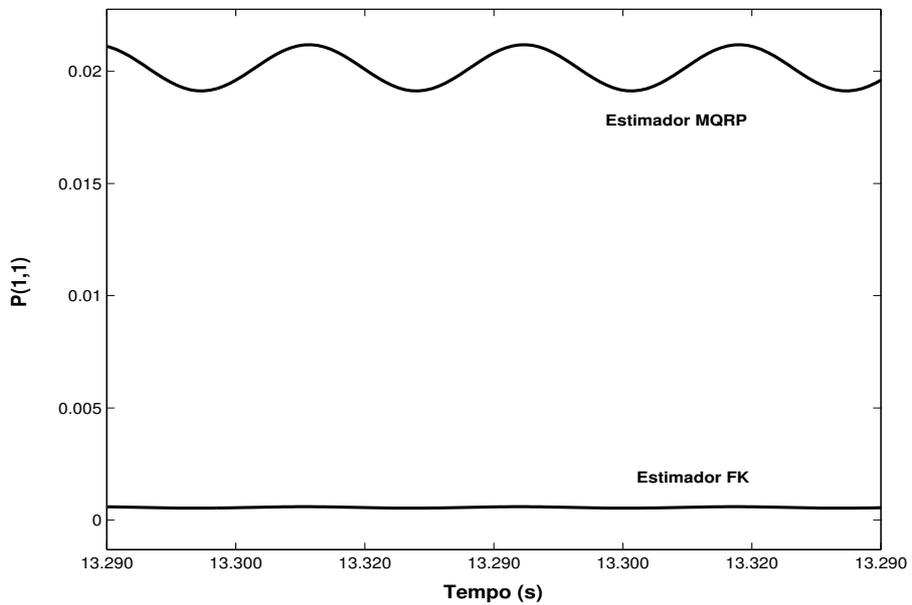


Figura 3.3. Evolução de $P(1,1)$ para os estimadores MQRP e FK.

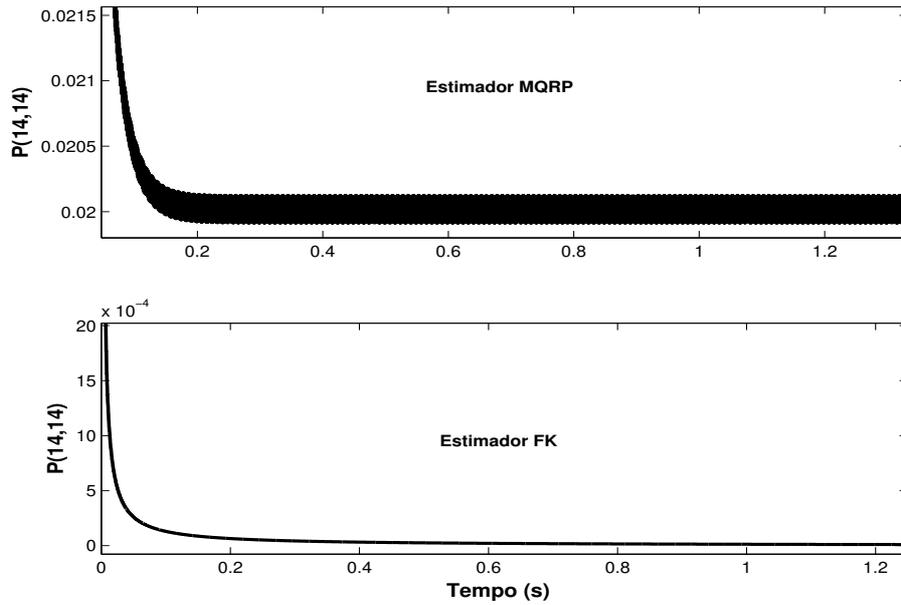


Figura 3.4. Evolução de $P(14, 14)$ para os estimadores MQRP e FK.

A terceira simulação desta seção demonstra o efeito de se supor erroneamente os regressores do modelo do sinal nas estimações realizadas pelo MQRP e pelo FK. No resultado apresentado na Figura 3.5, o vetor de regressores φ e o vetor \mathbf{h} são construídos assumindo, erroneamente, uma frequência fundamental de 61 Hz. Observa-se que tanto a estimação da amplitude da senóide fundamental, mostrada na Figura 3.5(a), como a estimação da amplitude da décima nona harmônica, mostrada na Figura 3.5(b), são afetadas. Porém, o erro na estimativa da última é maior.

Também se comparou o esforço computacional dos algoritmos FK e MQRP. A descrição do problema por variáveis de estado na filtragem de Kalman proporciona economia de multiplicações realizadas no laço principal dos programas implementados. Isso ocorre porque a matriz Φ da equação (3.49) é a matriz identidade na aplicação escolhida. Além disso, a projeção da matriz de covariância \mathbf{P} só possui duas multiplicações matriciais e a soma da matriz invariante \mathbf{Q} . Existem $(8p^2 + p)$ multiplicações realizadas no laço principal de Kalman contra $(9p^2 + 3p)$ do laço do MQRP, em que p é o número de parâmetros a serem determinados.

Considerando o estudo realizado neste capítulo, decidiu-se adotar o filtro de Kalman como o estimador de amplitudes para a metodologia de análise de harmônicos e inter-harmônicos

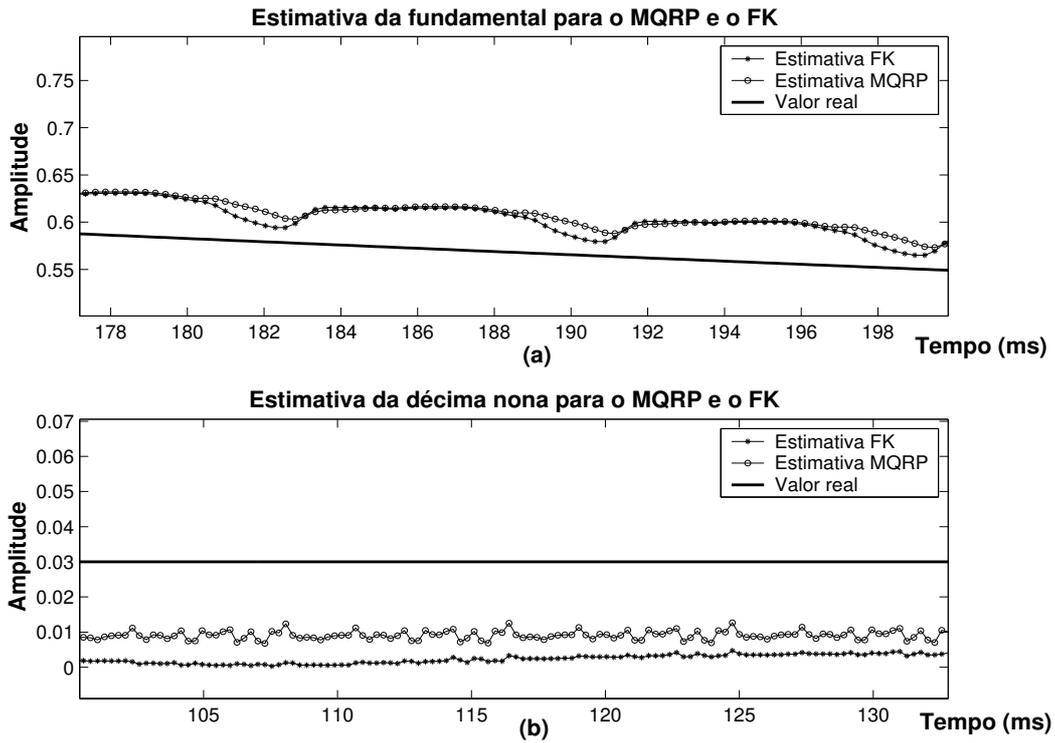


Figura 3.5. Estimação das amplitudes com regressores estimados equivocadamente.

proposta no trabalho de Tese. Reitera-se que a aplicação do filtro de Kalman pressupõem que as frequências dos componentes senoidais do sinal analisado sejam previamente conhecidas.

No próximo capítulo o problema da estimação de frequências será apresentado.

NOVO ESTIMADOR DE FREQUÊNCIAS

Um novo método de estimação de frequências denominado método de Prony Modificado é proposto neste capítulo. O novo método é inspirado no conhecido método de Prony. No entanto, diferentemente de Prony, o novo método fornece diretamente, através de um método de Newton, a estimativa das frequências, pois não é necessário a solução de um sistema linear e nem a solução de uma equação polinomial. A compreensão do novo método depende da fundamentação teórica do método de Prony que será apresentada na próxima seção.

4.1 MÉTODO DE PRONY

O método de Prony é uma técnica de estimação paramétrica que é capaz de ajustar senóides exponencialmente amortecidas a um conjunto de amostras de um sinal de dados. O método de Prony parte do seguinte modelo para o sinal de dados $y[n]$:

$$\hat{y}[n] = \sum_{k=1}^p h_k z_k^{n-1}, \quad (4.1)$$

em que h_k e z_k são definidos como:

$$h_k = A_k \exp(j\theta_k). \quad (4.2)$$

$$z_k = e^{[(\alpha_k + j2\pi f_k)\Delta T]}. \quad (4.3)$$

Na equação (4.2), θ_k representa a fase inicial da senóide de frequência f_k e A_k sua amplitude e na equação (4.3), α_k representa o amortecimento da senóide de frequência f_k e ΔT é o período de amostragem do sinal analisado. O acento circunflexo de y em (4.1) indica que a variável é uma estimativa do sinal amostrado $y[n]$. A variável p representa a ordem do modelo e as variáveis z_k são chamadas de pólos ou modos do modelo.

4.1.1 Método de Prony Básico

O método de Prony foi desenvolvido em 1795 pelo francês Gaspard Riche de Prony para ajustar p exponenciais a um conjunto de $2p$ amostras do sinal analisado (KAY; MARPLE, 1981). Para cada exponencial amortecida, dois parâmetros devem ser determinados: a amplitude complexa h_i e o polo z_i . Deste modo, substituindo-se as $2p$ amostras $y[n]$ no modelo (4.1), a seguinte equação matricial é obtida:

$$\begin{bmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \cdots & z_p^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \cdots & z_p^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{2p-1} & z_2^{2p-1} & \cdots & z_p^{2p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[2p] \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

que pode ser escrita compactamente como:

$$\mathbf{Z}\mathbf{h} = \mathbf{y} \quad (4.5)$$

A contribuição efetiva de Prony foi descobrir um método eficiente para a determinação dos pólos z_i . Para tanto, define-se um polinômio $\phi(z)$ cujo as raízes são os parâmetros z_1, z_2, \dots, z_p :

$$\phi(z) = \prod_{k=1}^p a_0(z - z_k). \quad (4.6)$$

O polinômio definido na equação (4.6), na sua forma expandida é reescrito como:

$$\phi(z) = \sum_{m=0}^p a_m z^{p-m}. \quad (4.7)$$

É comum se impor que a_0 seja unitário. Definindo-se um vetor \mathbf{a} ($1 \times 2p$) como:

$$\mathbf{a} = [a_p \ a_{p-1} \ \cdots \ a_1 \ 1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]. \quad (4.8)$$

Multiplicando-se a equação (4.5) nos dois lados por \mathbf{a} , obtém-se:

$$\mathbf{a}\mathbf{Z}\mathbf{h} = \mathbf{a}\mathbf{y} = 0, \quad (4.9)$$

pois, o produto entre o vetor \mathbf{a} e a matriz \mathbf{Z} resulta em um vetor linha nulo. Observe, por exemplo, que o produto entre \mathbf{a} e a primeira coluna de \mathbf{Z} resulta em:

$$a_p + a_{p-1}z_1 + \cdots + a_1z_1^{2p-1} = 0, \quad (4.10)$$

pois a_i são os coeficientes do polinômio cujo as raízes são os valores z_i . Sucessivos vetores linha podem ser formados, deslocando-se os elementos de \mathbf{a} para a direita e movendo seu último elemento para a primeira posição. Por exemplo, o próximo vetor \mathbf{a}' construído seria:

$$\mathbf{a}' = [0 \ a_p \ a_{p-1} \ \cdots \ a_1 \ 1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]. \quad (4.11)$$

Assim, multiplicando cada um destes vetores nos dois lados da equação (4.5), o seguinte sistema de equações é formado:

$$\begin{aligned} a_p y[1] + a_{p-1} y[2] + \cdots + a_1 y[p] + y[p+1] &= 0 \\ a_p y[2] + a_{p-1} y[3] + \cdots + a_1 y[p+1] + y[p+2] &= 0 \\ \vdots & \\ a_p y[n-2p] + a_{p-1} y[n-2p+1] + \cdots + a_1 y[2p-1] + y[2p] &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

As equações do sistema (4.12) podem ser rearranjadas e colocadas na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y[p] & y[p-1] & \cdots & y[1] \\ y[p+1] & y[p] & \cdots & y[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y[2p-1] & y[2p-2] & \cdots & y[p] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} y[p+1] \\ y[p+2] \\ \vdots \\ y[2p] \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

A matriz no lado esquerdo da equação acima é chamada matriz de dados. A solução do sistema (4.13) permite que se construa o polinômio descrito em (4.7). As raízes deste polinômio são utilizadas na estimação dos coeficientes de amortecimento α_i e das frequências f_i do sinal, pelas equações:

$$\alpha_i = \ln |z_i| / \Delta T \quad (4.14)$$

e

$$f_i = \frac{\tan^{-1} \left[\frac{\Im(z_i)}{\Re(z_i)} \right]}{2\pi \Delta T}. \quad (4.15)$$

Conhecendo-se os pólos z_i , pode-se calcular os valores de h_i através do sistema de equações descrito em (4.4). E finalmente, a partir dos valores de h_i é possível determinar os valores das amplitudes A_i e das fases iniciais θ_i :

$$A_i = |h_i| \quad (4.16)$$

e

$$\theta_i = \tan^{-1} \left[\frac{\Im(h_i)}{\Re(h_i)} \right] \quad (4.17)$$

4.1.2 Método de Prony por Mínimos Quadrados

Na seção anterior, considerou-se que eram disponíveis $2p$ amostras do sinal analisado, em outras palavras, considerou-se que a ordem adequada para modelar o sinal, era conhecida previamente. No entanto, em geral, o número de amostras é muito maior do que a ordem p do modelo. Assim, a dedução do método de Prony é levemente modificada. Primeiramente, a equação matricial (4.4), agora é definida para N valores do sinal $y[n]$, em que $N \gg 2p$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \cdots & z_p^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \cdots & z_p^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_p^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[N] \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

O vetor \mathbf{a} , primeiramente definido em (4.8), possui a mesma estrutura, porém sua dimensão é $(1 \times N)$, ou seja, só é acrescentada uma quantidade maior de zeros após o coeficiente a_1 . O procedimento para se obter a equação matricial correspondente a (4.13) é exatamente o mesmo da seção anterior, o que resulta em:

$$\begin{bmatrix} y[p] & y[p-1] & \cdots & y[1] \\ y[p+1] & y[p] & \cdots & y[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y[N-1] & y[N-2] & \cdots & y[N-p] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} y[p+1] \\ y[p+2] \\ \vdots \\ y[N] \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

É importante notar que o sistema descrito em (4.19) é sobredeterminado pois possui $N - p$ equações com $N - p \gg p$. A estimação dos coeficientes a_i , portanto, é realizada por um algoritmo de mínimos quadrados. A estimação dos coeficientes permite que se construa o polinômio descrito na equação (4.7) e os zeros deste polinômio são os polos ou modos do sinal analisado. Os amortecimentos e as frequências contidas no sinal são calculados de acordo com as equações (4.14) e (4.15), respectivamente. As amplitudes complexas h_i , associadas a cada polo do modelo, são estimadas por meio de um algoritmo de mínimos quadrados aplicado ao sistema sobredeterminado:

$$\begin{bmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \cdots & z_p^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \cdots & z_p^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_p^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[N] \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

As amplitudes e fases são calculadas pelas equações (4.16) e (4.17), respectivamente.

O método de Prony por mínimos quadrados é uma solução sub-ótima para o problema de ajuste de modelos não exponenciais (MARPLE, 1987). A solução é sub-ótima porque não se está minimizando o erro quadrático v definido por:

$$v = \sum_{n=1}^N e^2[n] = \sum_{n=1}^N (y[n] - \hat{y}[n])^2. \quad (4.21)$$

e sim, o erro v_{sub} , definido por:

$$v_{sub} = \sum_{n=p+1}^N (e^0)^2[n], \quad (4.22)$$

em que $e^0[n]$ é o erro de predição linear, definido por:

$$e^0[n] = y[n] - \hat{y}^0[n], \quad (4.23)$$

sendo $\hat{y}^0[n]$ a predição linear do modelo autoregressivo fornecido por:

$$\hat{y}^0[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \dots + a_p y[n-p], \quad p+1 \leq n \leq N. \quad (4.24)$$

Deve-se observar que minimizar o erro descrito na equação (4.22) é equivalente a solucionar o sistema sobredeterminado descrito em (4.19).

4.1.3 Método de Prony para senóides não amortecidas

O método de Prony, apresentado nas duas últimas seções, pode ser facilmente adaptado para estimação dos parâmetros de senóides não amortecidas. A primeira consideração que deve ser realizada é sobre a ordem do modelo. Se a princípio, o sinal a ser analisado é composto só de senóides, a ordem do modelo da equação (4.1) deve ser par, pois um sinal senoidal é representado pela soma de duas exponenciais complexas conjugadas. Então a ordem do sistema é usualmente indicada por $2p$ (MARPLE, 1987; HILDEBRAND, 1956). Assim, o modelo do sinal pode ser descrito por:

$$\hat{y}[n] = \sum_{k=1}^p h_k z_k^{n-1} + \sum_{k=1}^p h_k^* (z_k^{n-1})^*, \quad (4.25)$$

em que h_k e z_k são dados por:

$$h_k = A_k \exp(j\theta_k) \quad (4.26)$$

$$z_k = \exp[(j2\pi f_k)\Delta T], \quad (4.27)$$

e o sobrescrito (*) denota complexo conjugado. Matricialmente a equação (4.25) é descrita por:

$$\begin{bmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \cdots & z_p^0 & z_1^{-1} & z_2^{-1} & \cdots & z_p^{-1} \\ z_1^1 & z_2^1 & \cdots & z_p^1 & z_1^{-2} & z_2^{-2} & \cdots & z_p^{-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_p^{N-1} & z_1^{-N+1} & z_2^{-N+1} & \cdots & z_p^{-N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_p \\ h_1^* \\ h_2^* \\ \vdots \\ h_p^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[N] \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

que pode ser escrita compactamente como:

$$\mathbf{Z}\mathbf{h} = \mathbf{y} \quad (4.29)$$

Deve-se também considerar a estrutura do polinômio definido, primeiramente, na equação (4.6). Para o caso de sinais senoidais, as raízes do polinômio devem ocorrer em complexos conjugados e devem ser unitárias. Isto implica que se z_i é raiz, então $1/z_i$ também o é. Por sua vez, isto implica que os coeficientes devem ser simétricos em relação a a_p . Desta maneira, define-se um novo polinômio, descrito por:

$$z^{2p} + a_1 z^{2p-1} + \cdots + a_{p-1} z^{p+1} + a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \cdots + a_1 z + 1 = 0, \quad (4.30)$$

e um novo vetor \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} = [1 \ a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_{p-1} \ a_p \ a_{p-1} \ \cdots \ a_1 \ 1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]. \quad (4.31)$$

Obviamente, a equação:

$$\mathbf{a}\mathbf{Z}\mathbf{y} = \mathbf{a}\mathbf{y} = 0, \quad (4.32)$$

é verdadeira. Com o mesmo procedimento realizado nas últimas duas seções, sucessivos vetores \mathbf{a} são construídos, deslocando seus elementos para a direita e movendo seu último elemento para a primeira posição. Multiplicando cada um destes vetores pelos dois lados de (4.32), obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} & y[n] + a_1 y[n+1] + a_2 y[n+2] + \cdots + a_p y[n+p] + a_{p-1} y[n+p+1] + \cdots \\ & \cdots + a_2 y[n+2p-2] + a_1 y[n+2p-1] + y(n+2p) = 0 \\ & n = 1, 2, \cdots, N-2p \end{aligned} \quad (4.33)$$

e através do sistema descrito em (4.33) é possível estimar os coeficientes do polinômio.

Como o sistema descrito em (4.33) é sobredeterminado, um algoritmo de mínimos quadrados deve ser utilizado para se estimar uma solução que fornece os valores dos coeficientes do polinômio. Com os valores dos coeficientes, constrói-se o polinômio cujo as raízes são os polos ou modos do modelo. As frequências associadas a estes polos são calculadas de acordo com a equação (4.15). Para se calcular as amplitudes e fases associadas a cada componente senoidal é necessário a utilização de outro algoritmo de mínimos quadrados.

Resumidamente, o método de Prony é composto pelas seguintes etapas:

1. Suponha um valor adequado para a ordem $2p$ do modelo do sinal a ser analisado, e calcule os coeficientes do polinômio de grau $2p$. Esta etapa consiste em resolver o sistema sobredeterminado descrito em (4.33).
2. Calcule as raízes do polinômio e calcule através dos valores das raízes, as frequências contidas no sinal
3. Calcule as amplitudes e fases iniciais associadas a cada frequência através de outro algoritmo de mínimos quadrados.

A solução do sistema sobredeterminado através do método de mínimos quadrados é crítica, pois qualquer ruído aditivo presente no sinal de dados é ajustado por exponenciais. Isso ocorre porque no modelo descrito na equação (4.1) não existe separação entre o sinal e um eventual processo ruidoso. Um modelo de exponenciais incorporando um ruído aditivo branco possui a seguinte forma:

$$\hat{y}[n] = \sum_{k=1}^p h_k z_k^{n-1} + \eta[n], \quad (4.34)$$

em que $\eta[n]$ representa o ruído branco. Se $y[n] - \eta[n]$ for utilizado no lugar de $y[n]$ na análise realizada na seção 4.1.2, então a equação matricial (4.19) deve ser reescrita como:

$$y[n] = \sum_{n=1}^p a_m y[n-m] + \sum_{k=0}^p a_m \eta[n-m], \quad (4.35)$$

com $1 \leq m \leq p$ e $p+1 \leq n \leq N$. A equação (4.35) é um processo ARMA (AutoRegressive Moving Average). A segunda parcela da equação (4.35) não é mais um ruído branco. A solução

por mínimos quadrados do sistema descrito pela equação (4.19) é adequada para um processo AR adicionado de um ruído branco. Se o ruído não for branco a solução de mínimos quadrados é polarizada (AGUIRRE, 2000) e a estimação dos coeficientes será incorreta.

Nas próximas seções será apresentada a formulação de um novo estimador de frequências que fornece diretamente as frequências por um método de Newton. O novo estimador foi desenvolvido neste trabalho de Tese e, por evitar o algoritmo de mínimos quadrados, é menos sensível aos ruídos.

4.2 PROPRIEDADES DE FILTRAGEM DO MÉTODO DE PRONY

Uma análise mais cuidadosa do método de Prony fornece subsídios para o desenvolvimento do método de Prony Modificado. Para tanto, considere, inicialmente, que o método de Prony é aplicado em um sinal composto por uma única senóide. Desse modo, igualando-se suas amostras a um modelo de ordem $2p = 2$, obtém-se:

$$y[n] = h_1 z_1^{n-1} + h_1^* z_1^{*-n+1} = A_{c1} \cos[(n-1)\omega_1 \Delta T] + A_{s1} \sin[(n-1)\omega_1 \Delta T], \quad (4.36)$$

em que $n = 1, \dots, N$; e o polo z_1 é expresso por:

$$z_1 = e^{j\omega_1 \Delta T} = \cos(\omega_1 \Delta T) + j \sin(\omega_1 \Delta T). \quad (4.37)$$

Os polos z_1 e z_1^{-1} são as raízes do polinômio:

$$z^2 + b_1 z + 1 = 0, \quad (4.38)$$

sendo $b_1 = \cos(\omega_1 \Delta T)$. Para o caso de um modelo de ordem 2, o sistema de equações descrito por (4.33) é reduzido somente para uma equação:

$$y[n-1] + b_1 y[n] + y[n+1] = 0, \quad n = 2, \dots, N-1. \quad (4.39)$$

Assim, pode-se interpretar a equação (4.39) como a aplicação de um filtro digital \mathbf{f}_1 ao sinal, que pode ser representado pelo vetor:

$$\mathbf{f}_1 = [1 \ b_1 \ 1]^T, \quad (4.40)$$

Agora, considere que o método de Prony é aplicado a um sinal com duas frequências:

$$y[n] = h_1 z_1^{n-1} + h_1^* z_1^{n-1} + h_2 z_2^{n-1} + h_2^* z_2^{n-1}. \quad (4.41)$$

Faça $b_1 = \cos(\omega_1 \Delta T)$ e se o sinal $y[n]$ for processado de acordo com a seguinte equação:

$$y_2[n] = y[n-1] + b_1 y[n] + y[n+1] \quad n = 2, 3, \dots, N-1, \quad (4.42)$$

então, substituindo b_1 e $y[n]$ na equação (4.42) e definindo $b_2 = \cos(\omega_2 \Delta T)$, obtém-se (ver apêndice B):

$$\frac{y_2[n]}{(b_1 - b_2)} = A_{c2} \cos[(n-1)\omega_2 \Delta T] + A_{s2} \sin[(n-1)\omega_2 \Delta T], \quad n = 2, 1, \dots, N-1. \quad (4.43)$$

O processamento digital descrito na equação (4.42) filtra o componente de frequência ω_1 do sinal original. O sinal resultante da filtragem possui somente o componente de frequência ω_2 . Porém, a sua amplitude é modificada por um fator $(b_1 - b_2)$. Similarmente, se a filtragem fosse realizada utilizando b_2 :

$$\tilde{y}_2[n] = y[n-1] + b_2 y[n] + y[n+1], \quad n = 2, 3, \dots, N-1, \quad (4.44)$$

obter-se-ia:

$$\frac{\tilde{y}_2[n]}{(b_2 - b_1)} = A_{c1} \cos[(n-1)\omega_1 \Delta T] + A_{s1} \sin[(n-1)\omega_1 \Delta T], \quad n = 2, 1, \dots, N-1. \quad (4.45)$$

Desta maneira, se um sinal contivesse p modos, a sucessiva aplicação de $p-1$ filtros digitais da forma:

$$\mathbf{f}_i = [1 \ b_i \ 1]^T, \quad b_i = \cos(\omega_i \Delta T), \quad i = 1, 2, \dots, p-1, \quad (4.46)$$

isolaria um componente do sinal. Este componente seria modificado pela produto de $p-1$ fatores e poderia ser descrito por (ver apêndice B):

$$y_p = \prod_{k=1}^{p-1} (b_k - b_p) [A_{cp} \cos(\omega_p \Delta T) + A_{sp} \sin(\omega_p \Delta T)]. \quad (4.47)$$

Se mais uma filtragem fosse realizada com o filtro $[1 \ b_p \ 1]$, o sinal resultante seria nulo. Baseado, nesta afirmativa, o presente trabalho propõe uma nova técnica de estimação de frequências. A idéia é determinar os parâmetros b_i associados aos filtros \mathbf{f}_i que aplicados sucessivamente ao

sinal analisado $y[n]$ geram um sinal resíduo nulo se a ordem for selecionada corretamente e se não houver ruído no sinal. A técnica é baseada no método de Newton e será descrita na próxima seção.

4.3 MÉTODO DE PRONY MODIFICADO

Para o desenvolvimento do método de Prony Modificado, deve-se assumir, aqui, que o sinal $y[n]$ é constituído por p componentes senoidais. O sinal é processado de acordo com o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned}
 y_1[n] &= y[n], & n &= 1, 2, \dots, N, \\
 y_2[n] &= y_1[n-1] + b_1 y_1[n] + y_1[n+1], & n &= 2, \dots, (N-1), \\
 y_3[n] &= y_2[n-1] + b_2 y_2[n] + y_2[n+1], & n &= 3, \dots, (N-2), \\
 &\vdots \\
 y_{p+1}[n] &= y_p[n-1] + b_p y_p[n] + y_p[n+1], & n &= p+1, \dots, (N-p+1), \quad (4.48)
 \end{aligned}$$

O vetor \mathbf{y}_{p+1} representa um sinal residual. Se realmente o sinal $y[n]$ contiver até p componentes senoidais sem a presença de ruídos, $\mathbf{y}_{p+1}[n]$ é um vetor nulo para um conjunto de coeficientes b_i selecionados adequadamente. Se estas premissas não ocorrerem, o vetor de resíduos não será nulo, mas será mínimo. Assim, o processo de filtragem descrito em (4.48), pode ser expresso compactamente por:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{B}_1 \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{B}_p \mathbf{y}_p, \quad (4.49)$$

em que cada \mathbf{B}_k é uma matriz triangular retangular $(N-2k) \times (N-2k+2)$, cujas três diagonais são fornecidas por:

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{B}_k[i, i] &= 1 \\
 \mathbf{B}_k[i, i+1] &= b_k \\
 \mathbf{B}_k[i, i+2] &= 1
 \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, (N-2k). \quad (4.50)$$

O objetivo é encontrar b_1, b_2, \dots, b_p tal que \mathbf{y}_{p+1} seja um vetor nulo. Para tanto, considere que ϵ_j é o j -ésimo elemento do vetor de resíduos \mathbf{y}_{p+1} , isto é:

$$\epsilon_j = \mathbf{y}_{p+1}^T \cdot \mathbf{l}_{p+1}, \quad (4.51)$$

em que,

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{l}_{p+1}[k] = 1 \quad \text{para } k = j \\ \mathbf{l}_{p+1}[k] = 0 \quad \text{para } k \neq j \end{array} \right\} \quad k = 1, 2, \dots, N - 2p + 1. \quad (4.52)$$

Os parâmetros b_1, b_2, \dots, b_p devem ser encontrados de tal maneira que ϵ_j sejam nulos e que as equações de restrições:

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 = \bar{\mathbf{0}}, \mathbf{B}_2 \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_3 = \bar{\mathbf{0}}, \dots, \mathbf{B}_p \mathbf{y}_p - \mathbf{y}_{p+1} = \bar{\mathbf{0}}, \quad (4.53)$$

sejam obedecidas. As equações de restrições podem ser incorporadas a função objetivo ϵ_j , construindo-se uma nova função objetivo (lagrangiano) ε_j :

$$\varepsilon_j = \epsilon_j + \lambda_1^T (\mathbf{B}_1 \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) + \dots + \lambda_p^T (\mathbf{B}_p \mathbf{y}_p - \mathbf{y}_{p+1}), \quad (4.54)$$

em que λ_i são os multiplicadores de Lagrange. Para utilizar o método de Newton, é necessário encontrar a matriz Jacobiana \mathbf{J} referente à nova função objetivo ε_j . Então, pode-se reescrever a equação (4.54), como:

$$\varepsilon_j = \mathbf{y}_{p+1}^T \mathbf{l}_{p+1} + \lambda_1^T (\mathbf{B}_1 \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) + \dots + \lambda_p^T (\mathbf{B}_p \mathbf{y}_p - \mathbf{y}_{p+1}). \quad (4.55)$$

Os diferenciais das parcelas do tipo $\lambda_i^T \mathbf{B}_i \mathbf{y}_i$, são descritos por:

$$\delta \lambda_i^T \mathbf{B}_i \mathbf{y}_i = \delta \mathbf{y}_i^T \mathbf{B}_i^T \lambda_i + \mathbf{y}_i^T \delta \mathbf{B}_i^T \lambda_i \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (4.56)$$

em que,

$$\delta \mathbf{B}_i^T = \frac{\partial \mathbf{B}_i^T}{\partial b_i} \delta b_i \quad (4.57)$$

o diferencial de ε_j é fornecido por:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_j &= \delta \mathbf{y}_{p+1}^T \mathbf{l}_{p+1} + \delta \mathbf{y}_1^T \mathbf{B}_1^T \lambda_1 + \dots + \delta \mathbf{y}_p^T \mathbf{B}_p^T \lambda_p - \delta \mathbf{y}_2^T \lambda_1 - \dots - \delta \mathbf{y}_{p+1}^T \lambda_p + \\ & \quad (\mathbf{y}_1^T \frac{\partial \mathbf{B}_1^T}{\partial b_1} \lambda_1) \delta b_1 + (\mathbf{y}_2^T \frac{\partial \mathbf{B}_2^T}{\partial b_2} \lambda_2) \delta b_2 + \dots + (\mathbf{y}_p^T \frac{\partial \mathbf{B}_p^T}{\partial b_p} \lambda_p) \delta b_p. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Os multiplicadores de Lagrange podem ser escolhidos convenientemente, de modo que a expressão do diferencial descrito em (4.58) seja simplificada. Desse modo, fazendo-se:

$$\begin{aligned} \lambda_p &= \mathbf{l}_{p+1} \\ \lambda_{p+1} &= \mathbf{B}_p^T \lambda_p \\ &\vdots \\ \lambda_1 &= \mathbf{B}_2^T \lambda_2, \end{aligned} \quad (4.59)$$

o diferencial $\delta\varepsilon_j$ pode ser descrito como:

$$\delta\varepsilon_j = \left[(\mathbf{y}_1^T \frac{\partial \mathbf{B}_1^T}{\partial b_1} \lambda_1) (\mathbf{y}_2^T \frac{\partial \mathbf{B}_2^T}{\partial b_2} \lambda_2) \cdots (\mathbf{y}_p^T \frac{\partial \mathbf{B}_p^T}{\partial b_p} \lambda_p) \right] \begin{bmatrix} \delta b_1 \\ \delta b_2 \\ \vdots \\ \delta b_p \end{bmatrix}. \quad (4.60)$$

A equação (4.60) pode ser compactamente escrita como:

$$\delta\varepsilon_j = \mathbf{v}_j \delta \mathbf{b}, \quad (4.61)$$

em que \mathbf{v}_j é a j -ésima linha da matriz Jacobiana \mathbf{J} . A matriz \mathbf{J} é formada calculando-se \mathbf{v}_j para $j = 1, 2, \dots, N$. O método para se encontrar os parâmetros b_j é resumidamente, descrito nos seguintes passos:

1. Escolha um vetor inicial \mathbf{b}^0 , calcule \mathbf{y}_{p+1} e a matriz jacobiana \mathbf{J} .
2. Corrija o vetor \mathbf{b}^0 , utilizando:

$$\mathbf{b}^1 = \mathbf{b}^0 - \mu \mathbf{J}^{-1} \mathbf{y}_{p+1}. \quad (4.62)$$

3. Repita (1) e (2), até a norma quadrática de \mathbf{y}_{p+1} ficar abaixo de uma determinada tolerância.

Para auxiliar a convergência no método de Newton, um escalar μ foi inserido na equação (4.62). Ele é determinado a cada iteração através do método da seção dourada (PRESS, 1992). Com o auxílio da Figura 4.1 é possível ilustrar o que ocorreria se não houvesse a presença do μ na equação (4.62). Considere que o vetor \mathbf{b} é um escalar e que na i -ésima iteração o valor de b seja b_i , correspondendo a um valor da função objetivo ε de ε^i . Se o valor de μ fosse unitário, a aplicação da equação (4.62) levaria a encontrar o valor bn , que de acordo com a Figura 4.1, não é o ótimo. Porém, a determinação do valor ótimo para μ , garante que o método de Newton, convirja para um valor de b que minimiza a função objetivo ε .

É importante notar que a partir do vetor de parâmetros \mathbf{b} , obtidos pelo método proposto, as frequências contidas no sinal são diretamente calculadas, já que:

$$b_k = \cos(\omega_k \Delta T), \quad (4.63)$$

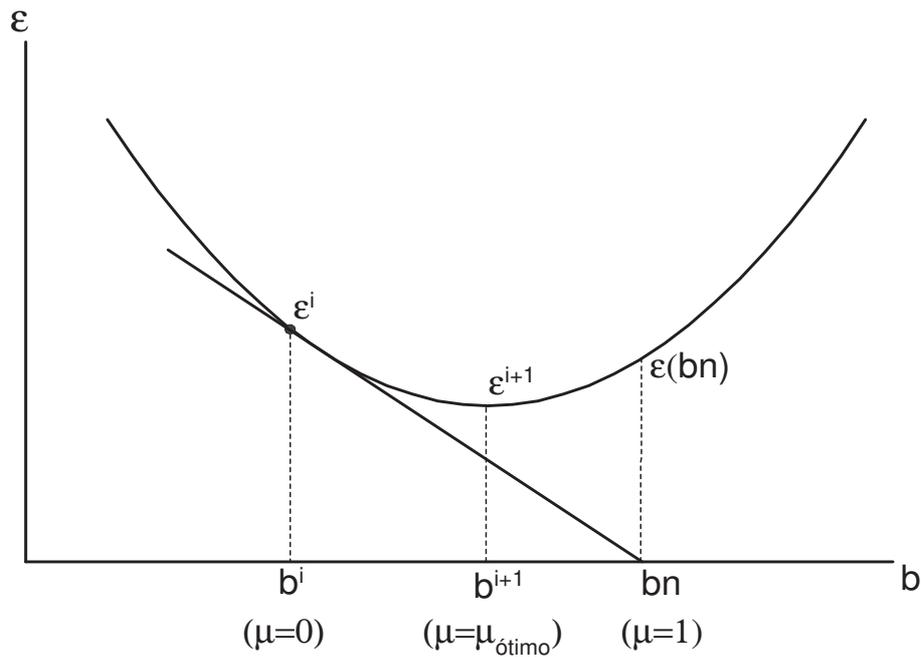


Figura 4.1. Aceleração da convergência do método de Newton

portanto, não existe mais a necessidade de se calcular as raízes de um polinômio, diferentemente do método de Prony. Outra vantagem do algoritmo proposto é a facilidade proporcionada na determinação dos componentes do sinal analisado desde que se possua o conjunto dos parâmetros $\{b_1, b_2, \dots, b_p\}$. Para este propósito, o sinal amostrado deve ser filtrado de acordo com as equações descritas em (4.48). Assim, como o sinal y_p , resultante do processo de filtragem é multiplicado por $(p - 1)$ fatores da forma $(b_p - b_k)$, de acordo com a equação (4.47), deve-se compensar as multiplicações. Desse modo o componente do sinal, referente à frequência ω_p , deve ser obtido por:

$$y_{cp} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{p-1} (b_k - b_p)} y_p(k). \quad (4.64)$$

Assim, construindo-se um novo conjunto dos parâmetros $\{b_p, b_1, b_2, \dots, b_{-1}\}$ e repetindo-se o processo de filtragem descrito acima, o componente referente a b_{p-1} é obtido. Todos os outros componentes são obtidos desta maneira. O número de cálculos necessários para se obter todos os componentes de Prony é da ordem de Np . No método de Prony clássico, para se obter os componentes do sinal amostrado, é necessário utilizar um algoritmo de mínimos quadrados para se encontrar as amplitudes e fases iniciais dos componentes. De maneira eficiente, isso se

resolveria com um número de cálculos da ordem de N^3 (PRESS, 1992).

4.4 APERFEIÇOAMENTOS PARA O MÉTODO DE PRONY MODIFICADO

Nesta seção serão investigados três procedimentos auxiliares que objetivam melhorar a estimação das frequências do método de Prony Modificado. Os procedimentos podem ser incorporados ao método e são motivados pelos seguintes fatos:

- A estimação das frequências depende do nível de ruído no sinal de dados.
- A estimação das frequências depende da ordem do modelo selecionada na representação do sinal de dados.

O primeiro procedimento investigado neste capítulo está baseado na filtragem do sinal de dados por meio de um filtro FIR (Finite Impulse Response). A idéia é aumentar a energia dos componentes senoidais do sinal em relação a energia do ruído.

4.4.1 Filtragem iterativa do sinal de dados

Um desenvolvimento alternativo para o método de Prony sugere a aplicação de um filtro ao sinal de dados, como um meio para tornar mais robusto o método de Pron Modificado (KAY, 1984), (). O desenvolvimento é apresentado a seguir.

Considere novamente, o sinal discreto $y[n]$, descrito por:

$$y[n] = \sum_{k=1}^p h_k z_k^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (4.65)$$

sendo h_k descrito pela equação (4.2) e z_k descrito por:

$$z_k = e^{j2\pi f_k \Delta T}. \quad (4.66)$$

A transformada Z de $y[n]$ é fornecida por:

$$Y(z) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^p h_k z_k^{n-1} z^{-n}, \quad (4.67)$$

e invertendo-se a posição dos somatórios, obtém-se:

$$Y(z) = \sum_{k=1}^p \sum_{n=1}^N h_k z_k^{n-1} z^{-n}. \quad (4.68)$$

Observando-se que o segundo somatório engloba uma progressão geométrica, obtém-se:

$$Y(z) = \sum_{k=1}^p h_k \frac{z^{-1} - z_k^N z^{-(N+1)}}{1 - z_k z^{-1}}. \quad (4.69)$$

A equação (4.69) pode ser reescrita como:

$$Y(z) = \frac{h_1 (z^{-1} - z_1^N z^{-(N+1)})}{1 - z_1 z^{-1}} + \frac{h_2 (z^{-1} - z_2^N z^{-(N+1)})}{1 - z_2 z^{-1}} + \dots + \frac{h_p (z^{-1} - z_p^N z^{-(N+1)})}{1 - z_p z^{-1}}, \quad (4.70)$$

e desse modo:

$$Y(z) = \frac{\sum_{k=1}^p \left[h_k (z^{-1} - z_k^N z^{-(N+1)}) \prod_{j=1, j \neq k}^p (1 - z_j z^{-1}) \right]}{\prod_{k=1}^p (1 - z_k z^{-1})}. \quad (4.71)$$

De maneira compacta $Y(z)$ pode ser expresso por:

$$Y(z) = \frac{C(z)}{A(z)}. \quad (4.72)$$

Comparando as equações (4.71) e (4.72), observa-se que $A(z)$ é um polinômio de grau p com raízes $e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2}, \dots, e^{j2\pi f_3}$. $C(z)$ é um polinômio de grau $N + p - 1$ e pode ser expresso por:

$$C(z) = \sum_{k=1}^p c_k z^{-k} + \sum_{k=1}^p c_{k+N} z^{-(N+k)}, \quad (4.73)$$

e assim a inversa de $C(z)$ pode ser descrita por um vetor \mathbf{c} :

$$\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_p \ c_{N+1} \ c_1 \ \dots \ c_{N+p}]^T. \quad (4.74)$$

em que:

$$c_{p+1} = c_{p+2} = \dots = c_N = 0. \quad (4.75)$$

Da equação (4.72), tem-se:

$$Y(z)A(z) = C(z). \quad (4.76)$$

Aplicando-se a transformada Z inversa nos dois lados da equação (4.76) e utilizando a propriedade da convolução de seqüências (OPPENHEIM; SCHAFER, 1989), obtém-se:

$$y[n] * \mathbf{a} = \mathbf{c}. \quad (4.77)$$

Considerando os c_n nulos, pode-se reescrever a equação (4.77) como:

$$\sum_{k=0}^p y[n-k]a_k = 0, \quad n = p, p+1, \dots, N. \quad (4.78)$$

A equação (4.78) é praticamente equivalente ao sistema descrito na equação (4.19). Porém, aqui não está explícito o valor unitário de a_0 . Para se estimar as frequências basta solucionar a equação (4.78) para os valores a_k e solucionar a equação polinomial $A(z) = 0$.

A idéia da filtragem é aumentar a energia do sinal em regiões no domínio da frequência onde seus componentes principais estejam presentes. Para se construir um filtro que exerce tal efeito no sinal de dados, deve-se observar que no método de Prony clássico, os coeficientes a_k tendem a anular o sinal de dados $y[n]$, através da convolução descrita em (4.77). Em outras palavras, $A(z)$ tende a possuir nulos perto de regiões onde existe concentração de energia do sinal, ou seja em regiões onde estão localizados os componentes principais do sinal analisado. Dessa maneira, $1/A(z)$ tende a possuir picos nessas regiões. Assim, pode-se selecionar um filtro $W(z)$, tal que:

$$A(z)W(z) = 1 + E(z), \quad (4.79)$$

em que, $E(z)$ é a transformada Z de uma seqüência $e[n]$. No domínio do tempo, a equação (4.79), pode ser escrita como:

$$\mathbf{a} * \mathbf{w} = \delta[n] + e[n]. \quad (4.80)$$

Considerando que \mathbf{w} é um vetor de tamanho q e \mathbf{a} outro vetor de tamanho $p+1$, então o vetor que armazena o resultado da convolução mostrada na última equação possui tamanho $p+q$. Portanto, a construção de \mathbf{w} deve garantir a minimização da função $v[n]$, descrita por:

$$v[n] = \sum_{n=1}^{p+q} e^2[n], \quad (4.81)$$

por sua vez, minimizar a função $v[n]$ é equivalente a resolver o sistema gerado por:

$$\mathbf{a} * \mathbf{w} = \delta[n]. \quad (4.82)$$

A convolução acima, origina um sistema linear com restrições. Se, por exemplo, o vetor \mathbf{a} tiver tamanho 5, ou seja:

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5]^T, \quad (4.83)$$

e \mathbf{w} tiver tamanho 3, a equação (4.82) resulta no sistema abaixo:

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \\ l_7 \end{bmatrix}, \quad (4.84)$$

com $l_1 = 1$ e $l_2 = l_3 = \dots = l_7 = 0$. Este sistema pode ser compactamente reescrito como:

$$\mathbf{M}\mathbf{w} = \boldsymbol{\delta}. \quad (4.85)$$

Assim, deve-se determinar w_0, w_1, \dots, w_7 tal que $l_1 = 1$ e $l_2 = l_3 = \dots = l_7 = 0$, isto é, deve-se minimizar a função objetivo S , descrita por:

$$S = (l_1 - 1)^2 + (l_2)^2 + \dots + (l_7)^2, \quad (4.86)$$

e com as seguintes restrições:

$$w_3 = w_4 = \dots = w_5 = 0. \quad (4.87)$$

As variáveis l_i são relacionáveis com o vetor \mathbf{w} , através da seguinte equação:

$$\mathbf{M}_i\mathbf{w} = l_i. \quad (4.88)$$

em que, \mathbf{M}_i é o vetor linha representando a i -ésima linha da matriz \mathbf{M} . Para o presente trabalho, a implementação desta minimização foi realizada com o auxílio da função intrínseca do MATLAB, *lsqlin*.

Na incorporação da técnica de filtragem iterativa ao método de Prony Modificado é necessário relacionar os coeficientes a_k , do método de Prony clássico com os coeficientes b_k do método de Prony Modificado. Assim, deve-se observar o sistema de equações (4.48) e perceber que as equações podem ser interpretadas como sucessivas convoluções do sinal com os vetores \mathbf{f} 's expressos por:

$$\mathbf{f}_i = [1 \ b_i \ 1]. \quad (4.89)$$

No conjunto, o resultado das sucessivas convoluções é equivalente a convolução do vetor \mathbf{a} , expresso por:

$$\mathbf{a} = \mathbf{f}_p * \mathbf{f}_{p-1} * \dots * \mathbf{f}_2 * \mathbf{f}_1, \quad (4.90)$$

com o sinal $y[n]$. Assim, as equações (4.90) e (4.89) fornecem a relação entre os coeficientes a_k e b_k .

Considerando o que foi exposto acima, sugere-se que a técnica de pré-filtragem seja incorporada ao método de Prony Modificado por meio do seguinte algoritmo:

1. Fixe um contador em zero;
2. Estime os coeficientes b_k , através do método de Prony Modificado;
3. Determine os coeficientes a_k do método de Prony clássico através da equação (4.90);
4. Determine os coeficientes do filtro \mathbf{w} de tamanho q , pela minimização da função S na equação (4.86);
5. Realize a convolução entre o filtro e o sinal de dados. O vetor que armazenava o sinal de dados original deve receber o resultado da convolução;
6. Incremente o contador;
7. Retorne ao passo 2 até não ocorrer mudança significativa nos coeficientes b_k ou o contador atingir um valor pré-determinado;

É importante ressaltar que no segundo passo do algoritmo, para ruídos muito elevados, as frequências estimadas podem estar muito distantes dos valores corretos. Assim, os coeficientes do filtro w não irão produzir o efeito desejado de aumentar a energia do sinal nas regiões espectrais onde, estão localizadas as senóides do sinal analisado. Desse modo, o algoritmo pode não convergir.

4.4.2 Estimação de ordem adequada para o modelo

A estimação das frequências depende da escolha de uma ordem adequada para o modelo do sinal. O entendimento do que seja uma ordem adequada é relativo. Por ordem adequada, pode-se entender, a princípio, aquela em que o número verdadeiro de senóides contidas no sinal

analisado é fornecido. Porém, pode-se argumentar que a ordem é mais adequada quando, por meio dela, obtém-se uma correta estimativa das frequências contidas no sinal analisado. Neste trabalho, a ordem adequada é aquela que promove a melhor estimativa para as frequências.

Dois critérios para a seleção da ordem do modelo são apresentados a seguir. O primeiro é chamado critério da informação de Akaike (AKAIKE, 1974) e é matematicamente descrito por:

$$AIC[p] = N \ln(\sigma^2) + 2p, \quad (4.91)$$

sendo N , o número de amostras e σ^2 é a variância do erro de modelagem quando a ordem do modelo é fixada em p . A medida que a ordem p aumenta, o número de graus de liberdade também aumenta e assim o ajuste entre o sinal e o modelo tende a melhorar. Assim, a variância σ^2 tende a diminuir. Mas é claro que em um certo ponto o acréscimo na ordem p , não provoca mais variação significativa em σ^2 e o acréscimo indevido é penalizado pela segunda parcela. O índice AIC , descrito em (4.91), deve atingir um mínimo para um valor ótimo da ordem p .

O método de Prony modificado oferece um critério de aplicação direta para a seleção de uma ordem adequada para o modelo. Para tanto, deve-se considerar que o vetor de resíduos \mathbf{y}_{p+1} , como pode ser observado no sistema de equações (4.48), tem seu módulo minimizado durante o processo de estimação das frequências, um caminho natural para a escolha da ordem do modelo é selecioná-la de tal maneira que a norma de \mathbf{y}_{p+1} seja mínima. No entanto, ainda é necessário considerar que o aumento da ordem do modelo acarreta uma redução do número de elementos de vetor \mathbf{y}_{p+1} . Portanto propõe-se um critério para a seleção da ordem, denominado critério da Norma Mínima (NM) que, matematicamente, pode ser expresso por:

$$CNM = \frac{\mathbf{y}_{p+1}}{\sqrt{L}}, \quad (4.92)$$

em que L é igual ao número de elementos do vetor \mathbf{y}_{p+1} . O fator $1/\sqrt{L}$ deve ser inserido para a normalização do critério.

É importante observar que o critério da Norma Mínima é mais facilmente aplicável que o critério de Akaike pois no último existe a necessidade de avaliação da variância do erro de modelagem para cada estimativa.

METODOLOGIA

O presente trabalho está relacionado a um projeto de pesquisa e desenvolvimento (P&D) apoiado pela Sociedade Anônima de Eletrificação da Paraíba (Saelpa) que objetiva a estimação de harmônicos e/ou inter-harmônicos no sistema de distribuição. Os sinais de tensão e corrente a serem apresentados no próximo capítulo foram obtidos por meio de um sistema de aquisição de dados capaz de armazenar as formas de onda brutas na memória de um computador pessoal. Os sinais foram captados por meio de transformadores de potencial e de corrente localizados em subestações de medição e de proteção do sistema Saelpa ou em subestações de entrada de plantas industriais.

Neste capítulo além de uma breve descrição do sistema de aquisição de dados, é apresentada a metodologia de análise dos sinais captados. A metodologia aborda basicamente os seguintes aspectos:

- Armazenamento dos sinais.
- Processamento dos sinais.
- Verificação de conformidade com as normas.

Sobre o armazenamento dos sinais, ressalta-se o problema da seleção do tempo adequado para as medições, do intervalo de amostragem dos sinais, da duração das janelas de aquisição e do intervalo entre cada janela. Sobre o processamento de sinais, descreve-se a maneira pela qual o método de Prony modificado (método PM) e a filtragem de Kalman foram combinados. Já em relação à verificação de conformidade, descreve-se quais informações podem ser relevantes para a concessionário de energia elétrica e para seus clientes.

5.1 SISTEMA DE AQUISIÇÃO DE SINAIS

Um sistema de aquisição de dados da National InstrumentsTM foi adquirido através do projeto de P&D. Basicamente, o sistema é composto por um módulo condicionador de sinais e por uma placa de aquisição que é fixada internamente em um computador pessoal do tipo *laptop*. A placa de aquisição possui 8 canais. A largura da banda de passagem do sistema é de 22,5 kHz. A frequência de amostragem pode ser fixada em até $500/c$ kHz, em que c é o número de canais. As amostras são digitalizadas em palavras de 12 bits. As medições foram realizadas conforme o esquema mostrado na Figura 5.1. Os sensores de corrente funcionam por efeito hall como transdutores de corrente para tensão. A relação de transdução é de 100 mV/A. Os atenuadores de tensão possuem uma relação de transformação de 100 para 1. O condicionador de sinais é constituído por buffers e amplificadores que proporcionam um nível de tensão adequado para a placa de aquisição.

O sistema de aquisição da National InstrumentsTM também inclui o programa *Labview* versão 7. O programa permite uma aquisição temporizada dos sinais da rede. Essa possibilidade permite que janelas de duração fixas sejam adquiridas em intervalos regulares. Este tipo de aquisição será utilizada na metodologia de análise dos sinais.

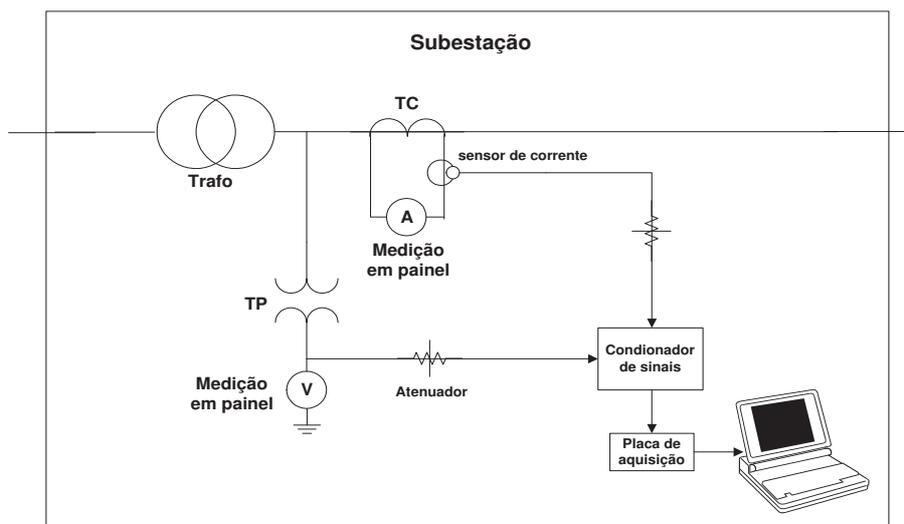


Figura 5.1. Esquema de medição dos sinais de tensão e corrente da rede elétrica.

5.2 METODOLOGIA DE ANÁLISE DE HARMÔNICOS E INTER-HARMÔNICOS DOS SINAIS DA REDE ELÉTRICA

A metodologia de análise de harmônicos e inter-harmônicos será explicada, destacando-se três de seus aspectos: armazenamento dos dados, processamento digital dos sinais adquiridos e verificação de conformidade.

5.2.1 Armazenamento dos dados adquiridos

Como já foi mencionado no primeiro capítulo, a caracterização de harmônicos e inter-harmônicos no sistema elétrico deve considerar que existe uma incerteza intrínseca em relação ao valor do período fundamental do sinal analisado. Além disso, os componentes senoidais presentes no sinal são não estacionários devido ao comportamento dinâmico das cargas conectadas ao sistema. Obviamente em diferentes horas do dia ou em diferentes dias da semana a demanda de carga no sistema pode ter valores completamente diferentes. Gunther (2002) sugere que é razoável um tempo de uma semana para caracterização de uma carga industrial em relação aos harmônicos ou inter-harmônicos. Contudo, se os sinais fossem adquiridos de modo ininterrupto durante uma semana, uma enorme massa de dados teria que ser armazenada na memória do laptop, o que inviabilizaria a análise dos dados. Assim, devido as restrições práticas, decidiu-se que janelas do sinal com duração de 1 segundo seriam adquiridas a intervalos regulares de 10 minutos. Assim, ao final de 1 semana de medições, seriam necessários 400 MB de memória para armazenar as três tensões e três correntes de fase oriundas dos transformadores de corrente e de potência. Essa quantidade de memória é pequena em relação aos 20 GB de memória do disco rígido do *laptop* utilizado nas medições. Ao mesmo tempo, o intervalo de 10 minutos entre uma janela e outra é adequado pois o nível de distorção harmônica dos sinais não costumam sofrer alterações tão rápidas. Ou seja, é possível acompanhar a evolução nos níveis de distorções no decorrer da semana sem uma perda excessiva de informação.

O intervalo de amostragem utilizado nas aquisições dos sinais foi fixado em 0,2 ms. Portanto,

componentes senoidais de freqüências de até 2500 Hz podem ser adquiridos corretamente, sem problemas de *aliasing*. De acordo com Gunther (2002), componentes com freqüências maiores são associados a amplitudes muito baixas. Assim, mesmo que negligenciados, não afetam significativamente a estimativa de componentes com freqüências menores. Nas medições não foram utilizados filtros *anti-aliasing*. Contudo a banda de passagem dos transformadores de potencial e de corrente são do tipo passa-baixa e desempenham papel equivalente aos dos filtros *anti-aliasing* Gunther (2002). Outro fator determinante na fixação do intervalo de amostragem foi a realização de simulações em que se observou que as melhores estimativas das freqüências foram obtidas, quando o componente senoidal com menor período foi amostrado de 2 a 4 vezes. Supondo que os sinais da rede dificilmente possuem componentes significativos com freqüências maiores que 2000 Hz, então o intervalo de amostragem de 0,2 ms é adequado pois assim, garante-se que o componente com menor período seja amostrado 2,5 vezes por ciclo.

As janelas de duração de 1 segundo correspondem a 5000 amostras do sinal analisado. Cada janela também corresponde a um arquivo de dados do tipo texto que armazena o tempo de aquisição, as três tensões e as três correntes de fase. Os arquivos são nomeados de modo seqüencial. Assim, a aquisição referente à indústria X possui os arquivos armazenados com os seguintes nomes:

$$X1.txt, X2.txt, \dots Xn.txt,$$

sendo n o número de arquivos ou janelas adquiridos.

5.2.2 Processamento dos sinais

O processamento dos sinais proposto aqui combina o estimador linear de Kalman com o método de PM em uma análise *off-line* dos dados. Aqui, é importante salientar que devido a não linearidade do problema, a estimação das freqüências pelo método PM é consideravelmente mais onerosa em termos computacionais do que a estimação das amplitudes pelo filtro de Kalman. Por isso, resolveu-se adotar um esquema de análise em que o método PM é aplicado em um número restrito de janelas obtidas durante todo o processo de aquisição. De maneira

simplificada, a análise dos sinais pode ser melhor entendida com o auxílio do diagrama de blocos mostrado na Figura 5.2. O bloco **A** do diagrama é detalhado pelo fluxograma mostrado na Figura 5.3 e o bloco **B** detalhado pelo fluxograma mostrado na Figura 5.4.

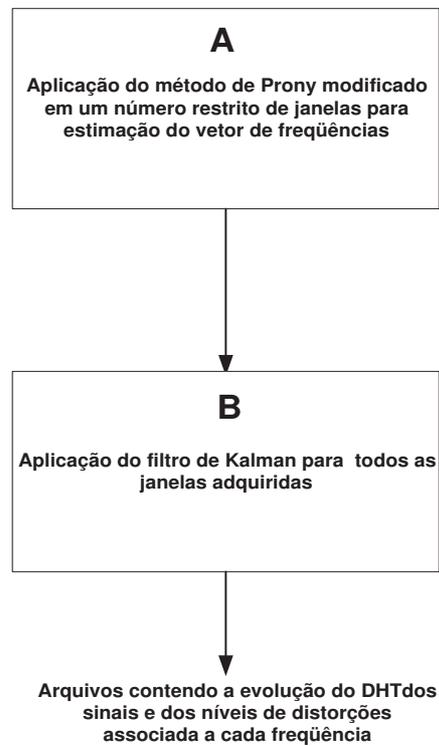


Figura 5.2. Diagrama de blocos simplificado da análise dos sinais adquiridos da rede elétrica.

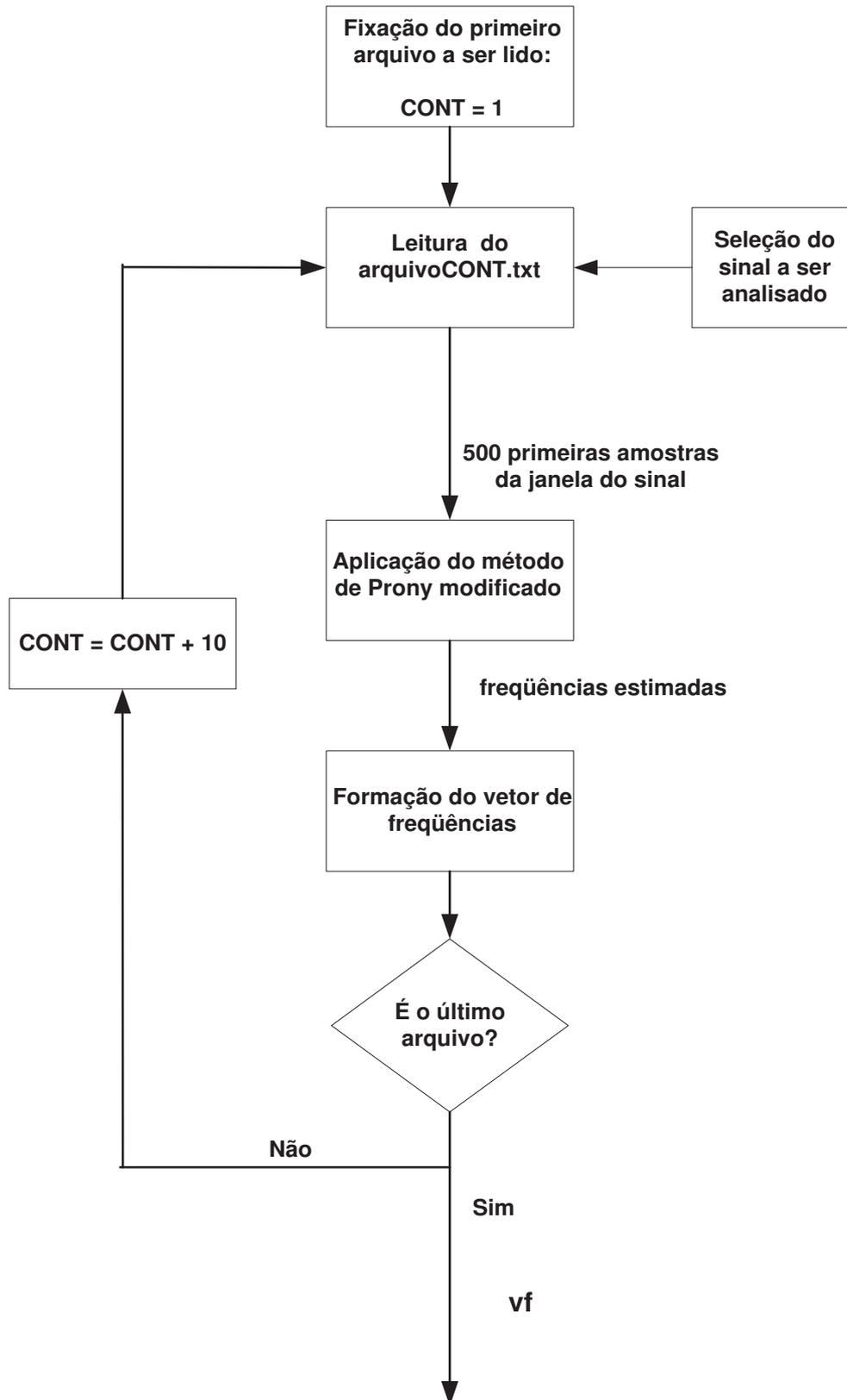


Figura 5.3. Fluxograma detalhando a aplicação do método de Prony modificado.

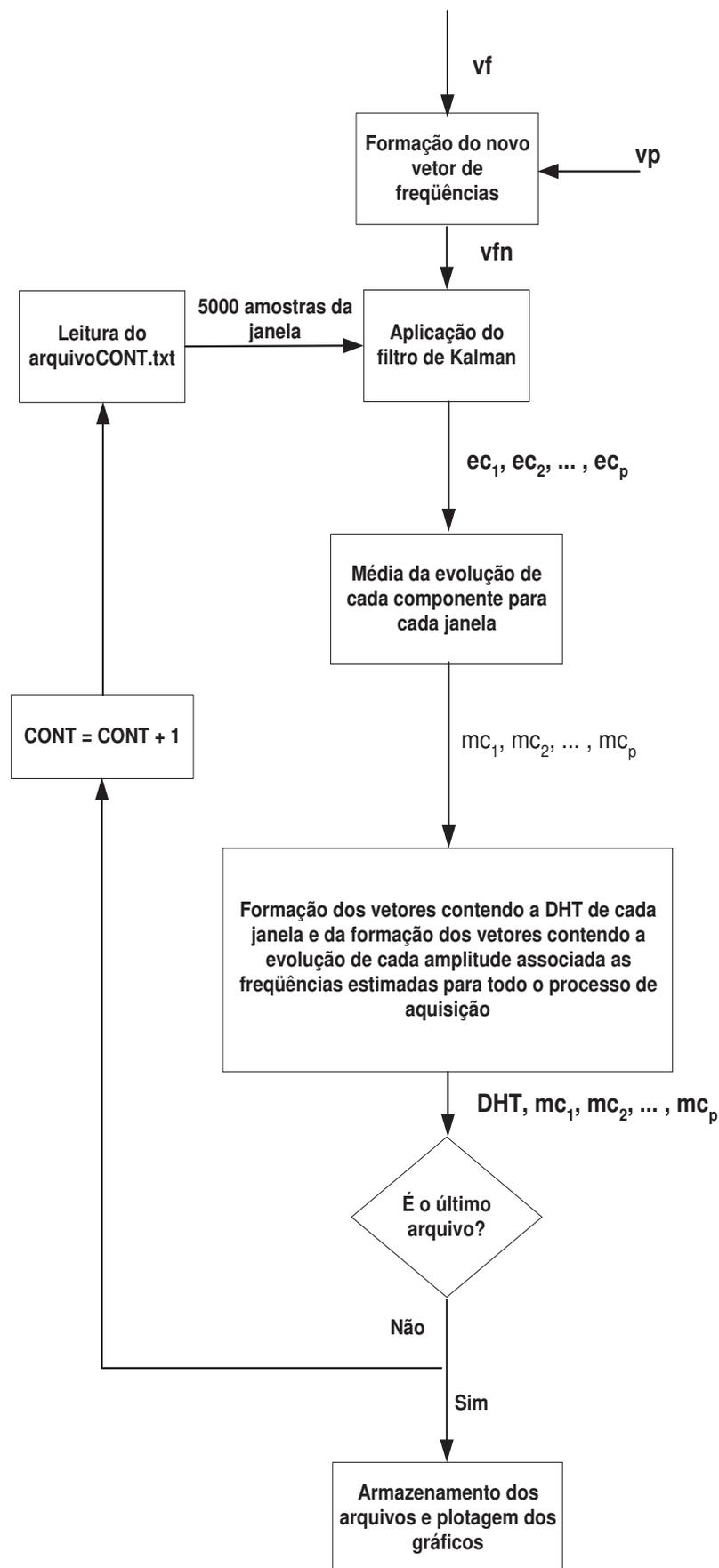


Figura 5.4. Fluxograma detalhando a aplicação do filtro de Kalman.

No fluxograma da Figura 5.3, ilustra-se a maneira pela qual o método de PM é aplicado aos arquivos disponíveis para a análise. Percebe-se que antes da aplicação do filtro de Kalman, o método de Prony modificado é aplicado em um conjunto restrito de arquivos, porém que abrangem todo o tempo no qual o processo de aquisição foi realizado. Assim, o método PM é sucessivamente aplicado aos arquivos cujas aquisições estão separadas por um tempo de 100 minutos. Devido aos arquivos serem nomeados seqüencialmente, o contador *CONT* deve ser incrementado de 10 unidades a cada laço do programa. Antes do método PM ser aplicado em cada janela, deve-se selecionar, entre as três tensões e três correntes de fase, qual sinal será analisado. As freqüências estimadas pelo método PM devem ser armazenadas em um vetor \mathbf{vf} , denominado vetor de freqüências, a cada laço do algoritmo. Se em uma das iterações, o método PM fornecer uma ou mais freqüências de valores já armazenados no vetor de freqüências, então o algoritmo deve efetuar as médias dos valores próximos. As médias e os valores distintos obtidos obtidos pelo método PM, devem formar, juntamente com os valores previamente armazenados, um novo vetor de freqüências. Assim se, por exemplo, na iteração i , \mathbf{vf}_i for expresso por:

$$\mathbf{vf}_i = [60 \ 120 \ 180],$$

e o método PM fornecer as freqüências 30 e 60,5 rad/s, então na iteração $i + 1$, vetor \mathbf{vf}_{i+1} será expresso por:

$$\mathbf{vf}_{i+1} = [30 \ 60,25 \ 120 \ 180].$$

Observe que 60,25 é a média entre 60 e 60,5. Como saída, o fluxograma da Figura 5.3 fornece um vetor de freqüência que contem todas as freqüências estimadas para diferentes janelas do grandeza selecionada (correntes ou tensões). Apesar das janelas estarem espaçadas de 100 minutos no tempo, a informação contida pelo vetor \mathbf{vf} é significativa, pois o tempo total de aquisição da grandeza é bastante longo.

O primeiro processo representado no fluxograma da Figura 5.4 é necessário para evitar a polarização da estimativa das amplitudes pelo filtro de Kalman. A polarização ocorrerá se componentes senoidais de baixas amplitudes forem descartados devido ao nível de *thresholding* estipulado pelo método PM. Para evitá-la e necessária a formação do novo vetor de freqüências \mathbf{vfn} . O vetor \mathbf{vfn} é a combinação de um vetor \mathbf{vp} , de freqüências previamente fixadas, e do

vetor \mathbf{vf} , oriundo das estimativas do método PM. Os elementos do vetor \mathbf{vp} representam as frequências de 60 rad/s e suas 40 primeiras harmônicas. O vetor \mathbf{vfn} é uma versão ampliada de \mathbf{vp} . Assim, no processo de formação de \mathbf{vfn} , incorpora-se ao vetor \mathbf{vp} , os elementos de \mathbf{vf} que são distintos dos elementos de \mathbf{vp} . Já os elementos de \mathbf{vp} semelhantes aos elementos de \mathbf{vf} , são substituídos pelos últimos. Assim, por exemplo, se o vetor \mathbf{vf} for representado por:

$$\mathbf{vf} = [60, 1 \quad 70 \quad 120, 1],$$

então o vetor \mathbf{vfn} é expresso por:

$$\mathbf{vfn} = [60, 1 \quad 70 \quad 120, 1 \quad 180 \quad 240 \quad \dots \quad 2400],$$

É claro que o conceito de semelhante ou distinto é relativo e arbitrário. Na metodologia aqui proposta, considera-se frequências semelhantes aquelas cujos módulos das diferenças entre elas são inferiores a 0,5 rad/s. O primeiro processo minimiza a polarização na medida em que, pelo menos frequências harmônicas de alta frequência, estarão, necessariamente, consideradas nos regressores do estimador de Kalman, mesmo que sejam previamente descartadas devido ao nível de *thresholding* do método PM. É importante ressaltar que essas frequências mesmo, não presentes no sinal analisado, não afetam a estimativa das amplitudes relacionadas com frequências, verdadeiramente, presentes no sinal.

O segundo processo relacionado ao fluxograma da Figura 5.4 é a aplicação do filtro de Kalman nas janelas do sinal analisado. Como já mencionado anteriormente, devido à linearidade, o problema da estimação das amplitudes é bem menos oneroso em termos computacionais do que o método PM, e assim o estimador de Kalman pode ser aplicado a todas as janelas adquiridas do sinal analisado. Isso significa que o contador *CONT* deve ser incrementado de uma unidade a cada laço principal do algoritmo. A aplicação do filtro de Kalman para cada janela do sinal resulta na evolução das amplitudes de cada componente senoidal presente em cada uma delas. As evoluções são denominadas pelos vetores:

$$\mathbf{ec}_1, \mathbf{ec}_2, \dots, \mathbf{ec}_p,$$

em que p é o tamanho do vetor \mathbf{vfn} e \mathbf{ec}_1 é o vetor que armazena a evolução do componente fundamental. Para se estimar a Distorção Harmônica Total (DHT) média relacionada a cada

janela, é necessário, antes, obter-se a média dos vetores $\mathbf{ec}_1, \mathbf{ec}_2, \dots, \mathbf{ec}_p$. As médias são denominadas pelos escalares: mc_1, mc_2, \dots, mc_p . Dessa forma, o DHT médio para cada janela pode ser expresso por:

$$DHT = \frac{\sqrt{mc_2^2 + mc_3^2 + \dots + mc_p^2}}{mc_1} \quad (5.1)$$

O DHT pode ser armazenado em um vetor, denominado **DHT**, a cada iteração do laço principal do algoritmo. Do mesmo modo, as médias de cada evolução podem ser armazenadas nos vetores $\mathbf{mc}_1, \mathbf{mc}_2, \dots, \mathbf{mc}_p$. Esses vetores podem ser salvos em arquivos e plotados para visualização e análise gráfica.

5.2.3 Verificação de conformidade com as normas

Em um sentido geral, as normas sobre qualidade de energia foram desenvolvidas para auxiliar as concessionárias de energia e seus clientes na minimização dos problemas relacionados à conexão de cargas não lineares na rede elétrica. Uma das primeiras normas propostas abordando este problema, foi a IEEE-519 (IEEE 519, 1992). Atualmente, existem dois critérios na norma para avaliação das distorções. O primeiro é a limitação da corrente harmônica que um cliente pode injetar no sistema elétrico e o segundo é a qualidade da tensão que a concessionária fornece aos seus usuários. Sob o ponto de vista da concessionária, os limites referentes à tensão são mais críticos, pois fiscalizações rigorosas e com níveis de exigência maiores são adotadas pelas agências reguladoras sobre as concessionárias de energia. Por isso, considera-se que a evolução do DHT de tensão durante o tempo de aquisição dos sinais é a resposta mais importante para a concessionária. Na Tabela 5.1, mostra-se os níveis de distorções na tensão recomendados pela norma IEEE-519.

Tabela 5.1. Limites de distorção harmônica para a tensão (IEEE 519).

Tensão no PAC (Ponto de Acoplamento Comum)	Limite individual de distorção (%)	Distorção Harmônica Total (%)
69 kV e abaixo	3,0	5,0
69,001 kV até 161 kV	1,5	2,5
161,001 e acima	1,0	1,5

Os limites individuais de distorção são as relações percentuais entre as amplitudes de cada componente harmônico em relação a amplitude do componente fundamental. Os limites mostrados na Tabela 5.1 podem ser violados por curtos períodos de tempo durante partidas de grandes motores ou durante condições anormais do sistema (IEEE 519, 1992).

Em relação aos limites de corrente injetados pelos clientes das concessionárias, além da Distorção Harmônica Total, as recomendações são feitas para as distorções individuais da corrente em relação a máxima corrente de curto circuito no ponto de acoplamento comum. Assim, é importante a monitoração das amplitudes de cada componente senoidal presentes no sinal analisado. Na Tabela 5.2, mostra-se os limites de distorção harmônicas para sinais de corrente recomendados pela norma IEEE-519.

Tabela 5.2. Limites de distorção harmônica para a corrente (IEEE 519).

Distorção harmônica máxima (% da corrente I_L)						
Distorção harmônica individual (Harmônicas Ímpares)						
I_{sc}/I_L	< 11	11 < h < 17	17 < h < 23	23 < h < 35	35 < h	DHT
<20	4,0	2,0	1,5	0,6	0,3	5,0
20<50	7,0	3,5	2,5	1,0	0,5	8,0
50<100	10,0	4,5	4,0	1,5	0,7	12,0
100<1000	12,0	5,5	5,0	2,0	1,0	15,0
>100	15,0	7,0	6,0	2,5	1,4	20,0

Harmônicos pares são limitados a 25% dos harmônicos ímpares

Não é permitido correntes que provoquem tensões contínuas

I_{sc} = máxima corrente de curto circuito no PAC
 I_L = máxima corrente de carga no PAC

O programa desenvolvido neste trabalho é capaz de fornecer a evolução dos níveis de DHT para as tensões e correntes, bem como os níveis de amplitude para cada harmônico (ou inter-harmônico presentes nos sinais analisados). Desse modo a conformidade da concessionária ou de uma determinada planta industrial pode ser verificada por dias e assim proporcionar um maior grau de informação sobre os níveis de distorção do sistema elétrico.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

A metodologia de análise de harmônicos e inter-harmônicos proposta no capítulo anterior pressupõe a validação do método de Prony Modificado (método PM). É necessário, portanto, testá-lo em sinais sintéticos nos quais as frequências a serem estimadas são previamente conhecidas. Também é necessário comparar suas estimações com as estimações fornecidas pelo método clássico de Prony e pela transformada rápida de Fourier. É importante observar que os picos do módulo da transformada rápida de Fourier podem indicar onde estão localizadas as frequências contidas no sinal analisado. Por isso a FFT também pode ser utilizada como um estimador de frequências. Além disso, devem ser testadas as técnicas para selecionar uma ordem adequada para o modelo do sinal e também a técnica de filtragem FIR.

Na primeira seção deste capítulo, o método de Prony Modificado será comparado com o método de Prony clássico e com a transformada rápida de Fourier. As técnicas serão avaliadas em sinais sintéticos. Na segunda seção serão aplicadas as técnicas de aperfeiçoamento do método de Prony Modificado, também em sinais sintéticos. Na terceira seção, a metodologia de análise de harmônicos e inter-harmônicos proposta no Capítulo 6 será aplicada em sinais de tensão e adquiridos na rede de distribuição da Saelpa. Na última seção, algumas características das técnicas serão discutidas.

6.1 VERIFICAÇÃO DOS ALGORITMOS EM SINAIS SINTÉTICOS

6.1.1 Caso 1

Inicialmente, os estimadores de Prony clássico e Prony Modificado são testados em um sinal sintético contendo três componentes senoidais: uma de frequência 50 Hz, uma de 25 Hz e outra

de 125 Hz. Na simulação, o intervalo de tempo ΔT , entre as amostras é fixado em 0,5 ms e são utilizadas 100 amostras. Assim o sinal é descrito por:

$$y[n] = 25\cos(2\pi 25\Delta Tn) + 100\cos(2\pi 50\Delta Tn) + 75\cos(2\pi 125\Delta Tn) + e[n], \quad (6.1)$$

em que $e[n]$ representa uma parcela de ruído branco. No Caso 1 o ruído será considerado nulo. A janela do sinal analisado é mostrada na Figura 6.1.

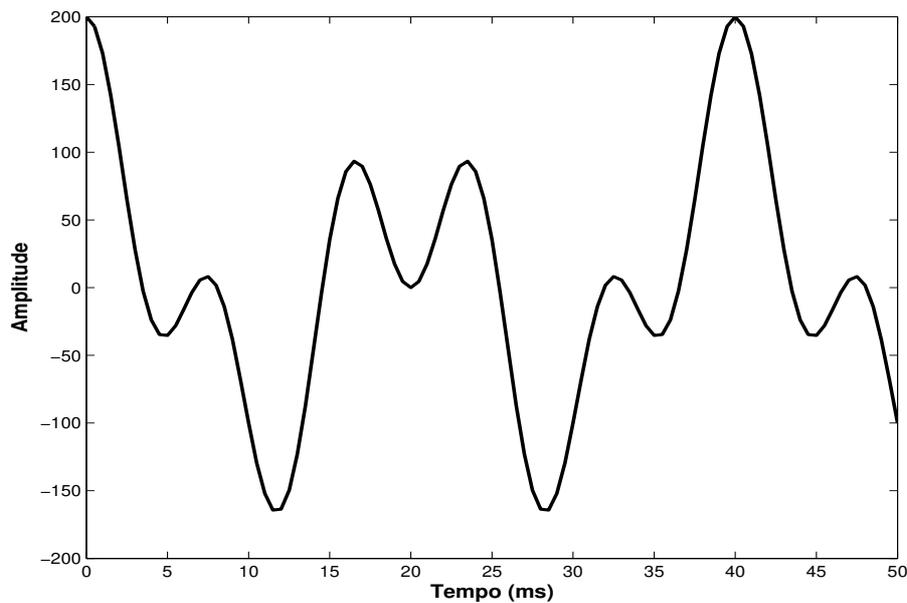


Figura 6.1. Sinal composto por três senóides.

O único parâmetro de simulação que deve ser selecionado previamente é a ordem p . Como a simulação parte do pressuposto que o número de senóides que compõem o sinal é conhecido, basta fixar o valor da ordem p em 3. O resultado para os dois estimadores está mostrado na Tabela 6.1. Observa-se que as frequências tanto para o estimador de Prony clássico, quanto para o estimador de Prony Modificado são coincidentes com os valores corretos.

Tabela 6.1. Estimação das frequências e das amplitudes para o Caso 1.

Frequências		Amplitudes	
Prony Modificado	Prony clássico	Prony Modificado	Prony clássico
25	25	25	25
50	25	100	100
125	100	75	75

O gráfico do módulo da FFT do sinal descrito no Caso 1 é mostrado na Figura 6.2. Pode-se perceber o surgimento de muitas raias espúrias, não condizentes com os componentes presentes no sinal analisado. Como foi mencionado no Capítulo 2, isso ocorre devido ao truncamento incorreto do sinal. A maior raia corresponde a uma freqüência de 61 Hz, 1 completamente equivocada. Se o sinal for analisado pelos procedimentos da norma IEC, que recomenda uma janela de 200 ms, o módulo da FFT apresenta o aspecto mostrado na Figura 6.3. Apenas as três raias esperadas ocorrem no gráfico. Porém, é necessário utilizar 3600 amostras. A maior raia corresponde a uma freqüência de 50,014 Hz.

6.1.2 Caso 2

No Caso 2, utiliza-se o mesmo sinal do Caso 1 mais uma parcela de ruído branco com energia de 5% da energia dos componentes senoidais, ou seja o valor de SNR (Signal to Noise Ratio) é 20. Percebe-se, na Tabela 6.2 que os estimadores de Prony e de Prony Modificado são fortemente afetados pelo ruído. Uma das alternativas para se tentar contornar esta limitação, é superestimar a ordem do modelo (KAY, 1988). Tanto para o método de Prony quanto para o

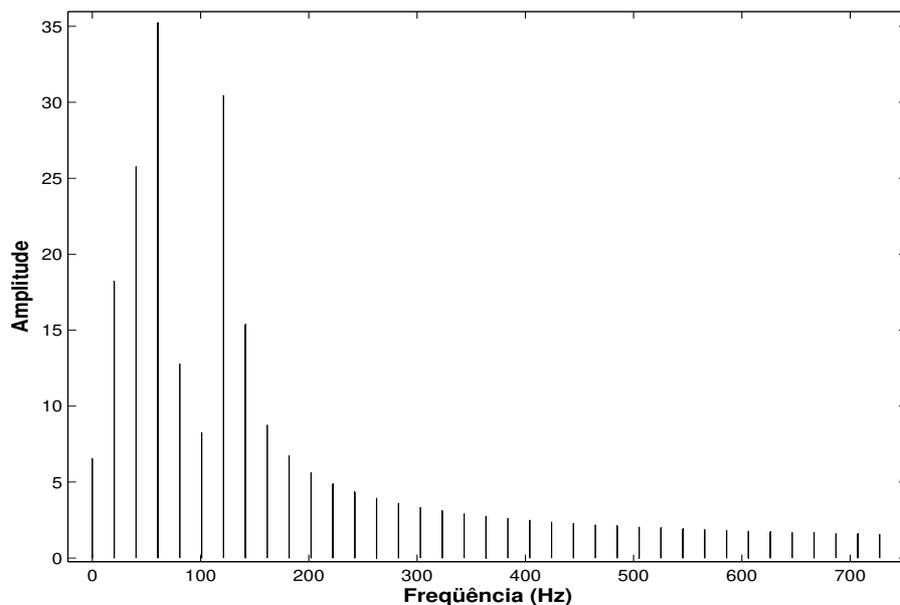


Figura 6.2. Fourier do sinal composto por três senóides - janela curta.

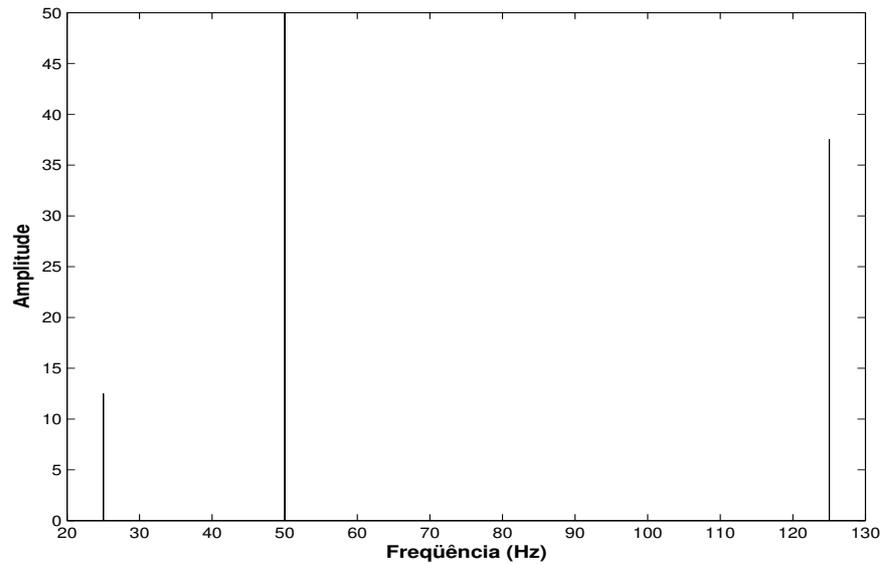


Figura 6.3. Fourier do sinal composto por três senóides - IEC.

Prony Modificado, um resultado satisfatório é alcançado quando a ordem p do modelo é fixada em 27. Como a ordem é superestimada, os métodos de Prony e Prony Modificado estimam frequências espúrias, porém elas estão associadas a amplitudes muito baixas. Por isso, um procedimento de *thresholding*, que descarte os componentes de frequência cujo as amplitudes são inferiores a 1% da fundamental, produz bons resultados para os dois métodos.

Tabela 6.2. Estimação das frequências e das amplitudes para o Caso 2 - ordem 3.

Frequências		Amplitudes	
Prony Modificado	Prony clássico	Prony Modificado	Prony clássico
80,85	81,31	2,88	2,16
428,12	430,89	1,63	1,18
818,13	820,24	1,33	0,67

Tabela 6.3. Estimação das frequências e das amplitudes para o Caso 2 - ordem 27.

Frequências		Amplitudes	
Prony Modificado	Prony clássico	Prony Modificado	Prony clássico
24,71	24,75	24,11	24,52
50,00	50,02	100,58	99,54
125,01	124,98	75,42	74,54

6.1.3 Caso 3

O sinal sintético utilizado neste caso provém de uma simulação de um conversor de frequência industrial realizada por Leonowicz, Lobos e Rezmer (2003). O sinal é composto por seis senóides, três de baixas frequências e três de altas e é descrito por:

$$y[n] = 200\cos(\omega_1\Delta Tn) + 50\cos(5\omega_1\Delta Tn) + 70 * \cos(7\omega_1\Delta Tn) + 50\cos(7\omega_1\Delta Tn) + 30\cos(25\omega_1\Delta Tn) + \cos(45\omega_1Tn) + e[n]. \quad (6.2)$$

em que, $\omega_1 = 2\pi 40$ Hz e $\Delta T = 0,1$ ms. São utilizadas 1000 amostras do sinal. As simulações partem de um modelo composto por 6 senóides. Não é acrescentado ruído ao sinal e, portanto $e[n]$ é nulo. A janela do sinal analisado é mostrada na Figura 6.4. Na Tabela 6.4, mostra-se que o estimador de Prony Modificado tem um melhor desempenho do que o Prony clássico e do que a FFT. As frequências estimadas pela FFT são obtidas localizando-se no eixo das frequências, onde ocorrem os picos do gráfico do seu módulo, mostrado na Figura 6.5.

Tabela 6.4. Estimação das frequências e das amplitudes para o Caso 3 - ordem 6.

Frequências			Amplitudes		
FFT	Prony Modificado	Prony clássico	FFT	Prony Modificado	Prony clássico
40,0	40,0	41,1	200,0	200,0	193,2
200,2	200,0	199,5	50,0	50,0	50,01
280,3	280,0	280,2	70,0	70,0	69,92
760,8	760,0	760,0	50,0	50,0	50,02
1001,1	1000,0	1000,0	30,0	30,0	30,01
1801,8	1800,0	1800,0	0,99	1,0	0,98

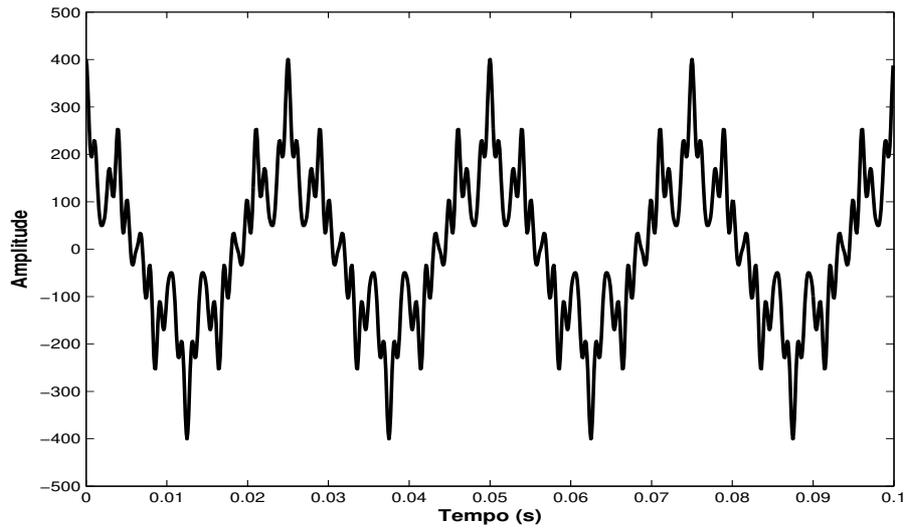


Figura 6.4. Sinal composto por seis senóides - Caso 3.

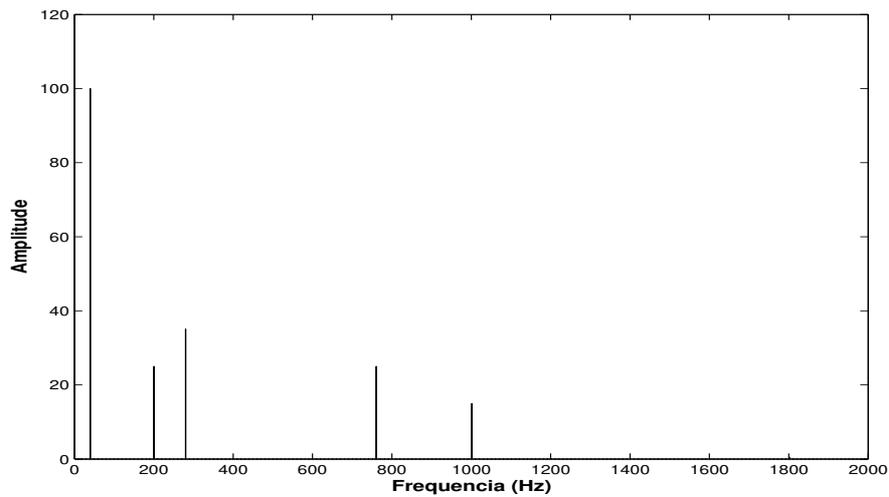


Figura 6.5. Fourier do sinal do caso 3.

6.1.4 Caso 4

No Caso 4, utiliza-se o mesmo sinal descrito Caso 3 acrescido de uma parcela de ruído branco. O valor de SNR fixada em 100. As estimativas de Prony e Prony Modificado são bastante afetadas, como é mostrado na Tabela 6.5. Novamente, se a ordem do modelo for superestimada, melhora-se de maneira significativa a estimativa dos parâmetros. Com o aumento da ordem p

de 6 para 31, os resultados são melhorados significativamente e são mostrados na Tabela 6.6. Observa-se que o método de Prony Modificado é mais exato do que o método de Prony clássico. Isto sugere que o método de Prony Modificado exige ordens menores na estimação correta das frequências procuradas.

Tabela 6.5. Estimação das frequências e das amplitudes para o Caso 4 - ordem 6.

Frequências		Amplitudes	
Prony Modificado	Prony clássico	Prony Modificado	Prony clássico
101,1	105,3	4,94	13,23
846,9	853,8	3,96	3,54
1803,7	1802,6	0,63	0,50
2791,7	2807,0	1,62	0,67
3685,0	3679,8	1,06	0,67
4563,6	4595,4	1,29	1,80

Tabela 6.6. Estimação das frequências e das amplitudes para o Caso 4 - ordem 31.

Frequências		Amplitudes	
Prony Modificado	Prony clássico	Prony Modificado	Prony clássico
40,1	38,9	199,90	199,28
201,4	203,1	48,27	42,70
280,3	281,9	70,35	70,84
760,0	759,1	49,97	48,36
1000,6	1001,0	29,14	29,34
1800,4	1820,4	1,3	0,4

Como já mencionado, o método de Prony Modificado fornece os componentes presentes no sinal sem a necessidade de se utilizar o algoritmo de mínimos quadrados. Nas Figuras 6.6 e 6.7, mostram-se os componentes dominantes do sinal descrito na equação (6.2). A reconstrução deste sinal é mostrada na Figura 6.8. Ela é soma dos componentes dominantes do sinal.

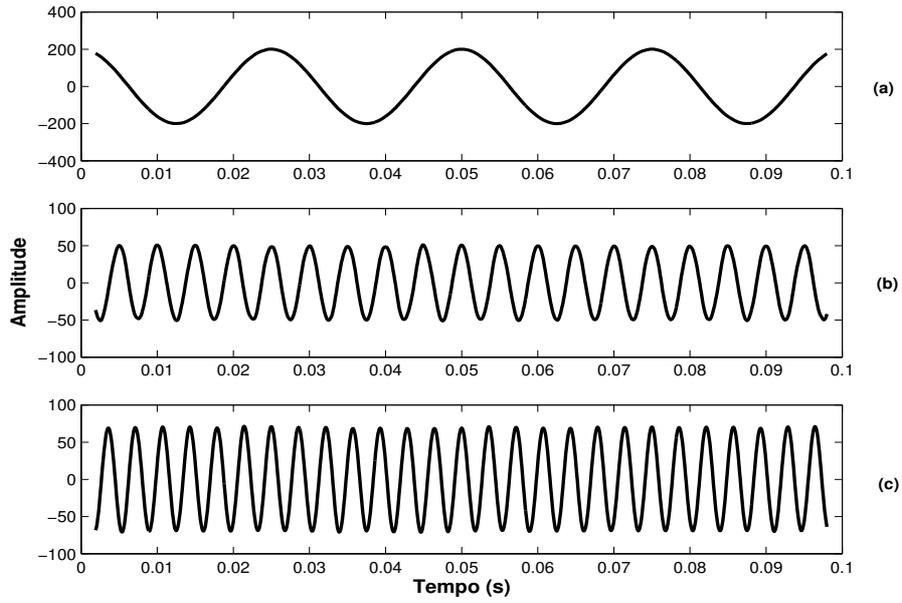


Figura 6.6. Componentes de Prony: (a) 40 Hz; (b) 200 Hz; (c) 280 Hz.

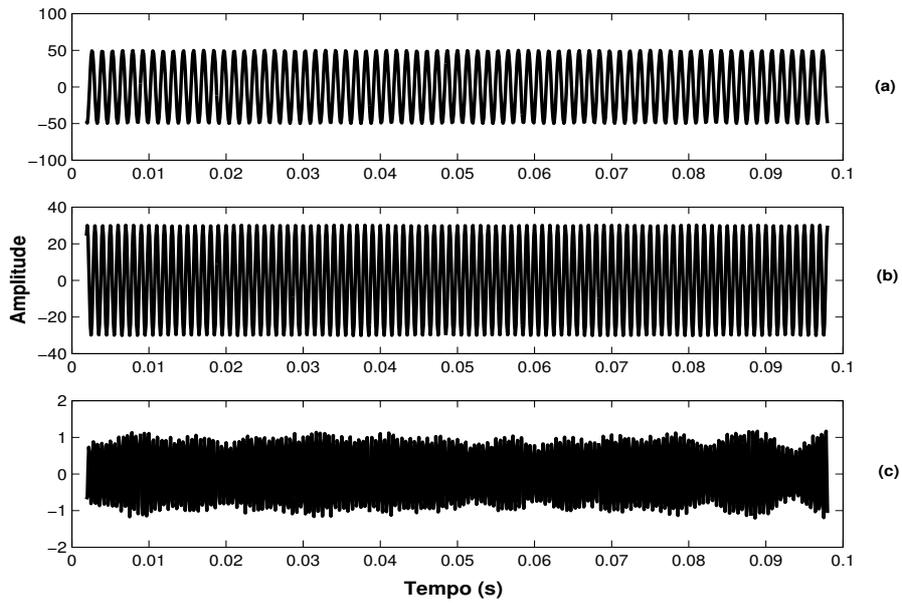


Figura 6.7. Componentes dominantes para o sinal composto por 6 senóides: (a) 760 Hz; (b) 1000 Hz; (c) 1800 Hz.

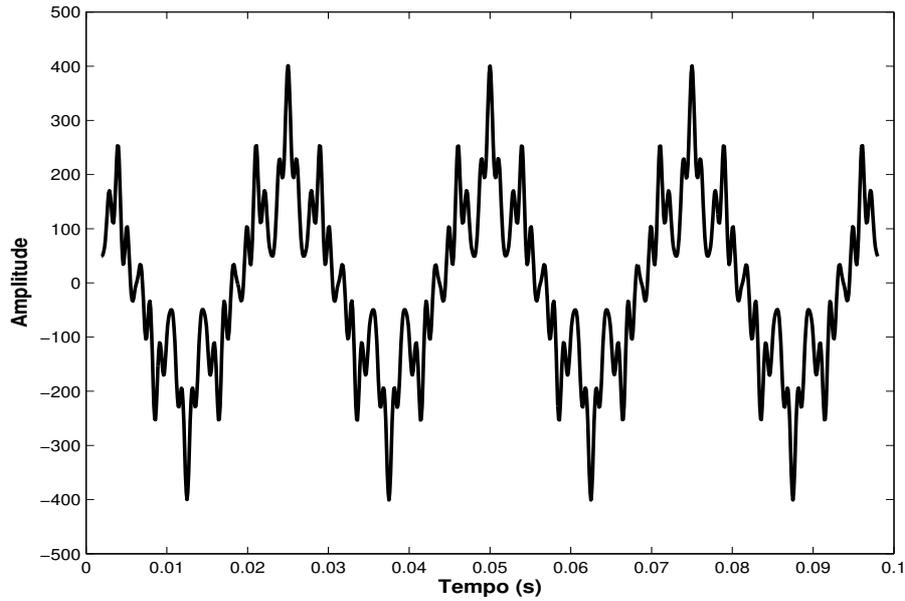


Figura 6.8. Reconstrução do sinal de 6 senóides através da soma dos componentes de Prony.

6.1.5 Caso 5

O próximo sinal analisado é oriundo da simulação de um retificador de tensão, cujo o esquema elétrico é mostrado na Figura 6.9. Deseja-se estimar as frequências do sinal de corrente da fase *A*. O espectro do sinal é uma sucessão de raias ocorrendo sempre em frequências múltiplas ímpares da fundamental de 60 Hz e com amplitudes decrescentes a medida que as frequências aumentam. O sinal analisado é mostrado na Figura 6.10 e sua FFT, realizada conforme as normas da IEC, é mostrada na Figura 6.11. A norma IEC recomenda que o sinal seja truncado em uma janela de 200 ms e que o intervalo de amostragem seja de 9 kHz. Tanto o estimador de Prony, quanto o estimador de Prony Modificado necessitam que a ordem p seja fixada em 50 para conseguirem estimações praticamente idênticas à estimação da FFT. Os resultados dos estimadores de Prony, Prony Modificado e da FFT estão reunidos na Tabela 6.7. O aumento da ordem é necessário porque apesar do sinal não ser ruidoso, os harmônicos de alta frequência, mesmo muito pequenos, afetam a estimação e devem ser contemplados pela ordem p

Tabela 6.7. Estimação das frequências e das amplitudes para o Caso 5.

Frequências			Amplitudes		
FFT	Prony Modificado	Prony clássico	FFT	Prony Modificado	Prony clássico
60,04	60,00	60,00	4,80	4,80	4,80
180,12	180,00	180,00	0,22	0,21	0,22
300,20	300,00	300,00	1,24	1,24	1,23
420,25	420,00	420,00	0,32	0,32	0,32
540,32	540,00	540,00	0,03	0,03	0,03
660,40	660,00	660,00	0,19	0,19	0,18
780,5	780,00	780,00	0,11	0,11	0,11
900,54	900,00	900,00	0,018	0,018	0,018
1020,61	1020,00	1020,00	0,075	0,075	0,077

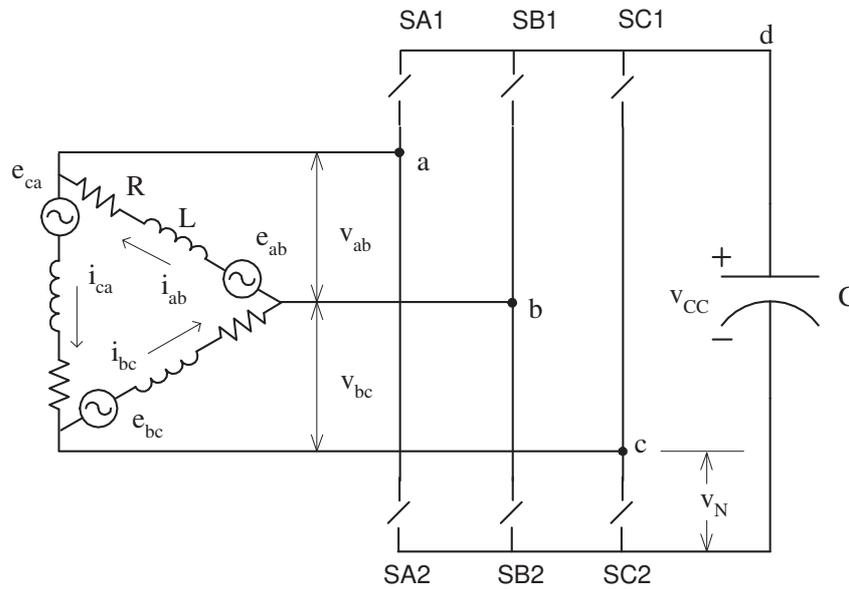


Figura 6.9. Circuito retificador de tensão.

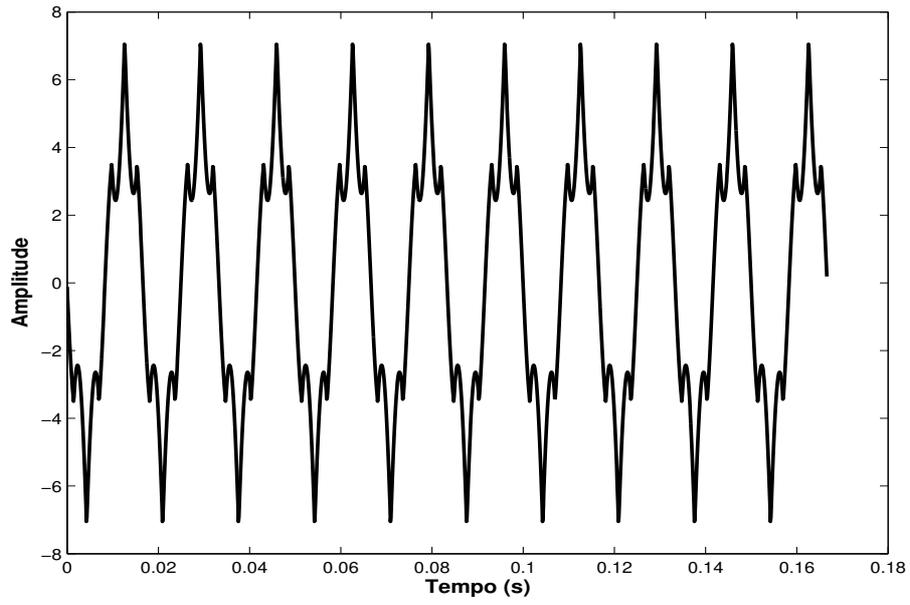


Figura 6.10. Sinal de corrente no circuito retificador de tensão.

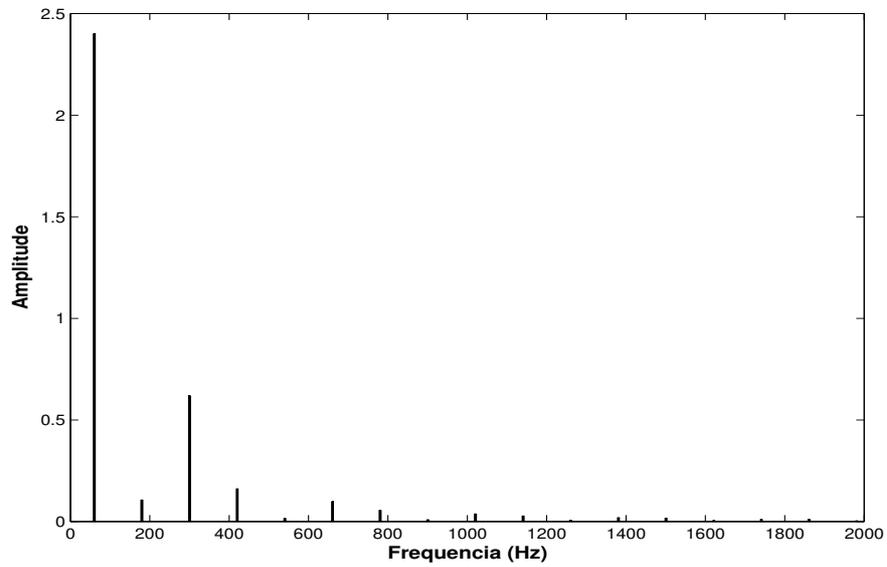


Figura 6.11. FFT do sinal de corrente do retificador - norma IEC.

6.1.6 Caso 6

Neste caso, as técnicas de Prony e Prony Modificado são aplicadas a um sinal contendo 10 senóides. O sinal foi também utilizado por Beites (2001) e emula um sinal de corrente em um alimentador de um forno a arco. As fases referentes a cada senóide não foram fornecidas pelos autores do trabalho. O sinal é descrito por:

$$\begin{aligned}
 y[n] = & 1,81\cos(2\pi 18,75\Delta Tn) + 1,67\cos(2\pi 25\Delta Tn) + 2,81\cos(2\pi 31,25\Delta Tn) + \\
 & 4,43\cos(2\pi 37,5\Delta Tn) + 6,82\cos(2\pi 43,75\Delta Tn) + 103,3\cos(2\pi 50\Delta Tn) + \\
 & 5,44\cos(2\pi 56,25\Delta Tn) + 2,59\cos(2\pi 62,5\Delta Tn) + 1,25\cos(2\pi 68,75\Delta Tn) + \\
 & 0,94\cos(2\pi 75\Delta Tn).
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Todos os co-senos foram fixados com a mesma fase. Inicialmente, selecionou-se o período de amostragem ΔT em 3,6 ms e o número de amostras em 64. O sinal é mostrado na Figura 6.12. Na Tabela 6.8, mostram-se as estimativas de Prony e Prony Modificado, para os 10 componentes de frequência mais significativos. A ordem p foi fixada em 17 para os dois métodos. O gráfico do módulo da FFT para o sinal amostrado, conforme as recomendações da norma IEC é apresentado na Figura 6.13. Na Tabela 6.9, mostram-se as amplitudes e frequências dos componentes mais significativos extraídos da FFT. Pode-se notar que apesar da janela do sinal estar de acordo com a norma IEC, a FFT não consegue extrair as frequências corretamente. Neste caso também se verificou o efeito da mudança do período de amostragem e do número de pontos, na estimação das frequências, para os métodos de Prony e Prony Modificado. Na Tabela 6.10 são mostradas as frequências e amplitudes dos componentes mais significativos estimados pelos dois métodos para um ΔT fixado em 1,2 ms e o número de pontos em 192 (o tamanho da janela permanece o mesmo). Nota-se que há uma degeneração da estimação, evidenciando que o período de amostragem é um parâmetro de simulação crítico tanto para o método de Prony clássico quanto para o Prony Modificado.

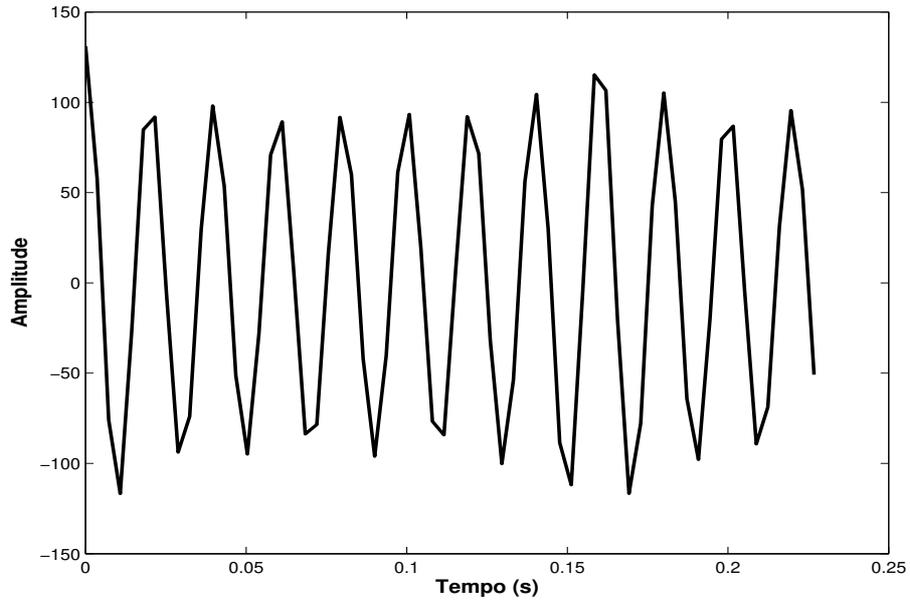


Figura 6.12. Janela do sinal contendo 10 senóides.

Tabela 6.8. Estimação das frequências e das amplitudes para o Caso 4 - $dt=3,6$ ms.

Frequências			Amplitudes		
Valores corretos	PM	PC	Valores corretos	PM	PC
18,75	18,75	18,75	1,81	1,81	1,81
25,00	25,01	25,01	1,67	1,67	1,68
31,25	31,25	32,01	2,81	2,81	2,77
37,50	37,50	37,50	4,43	4,43	4,43
43,75	43,75	44,50	6,82	6,82	6,79
50,00	50,00	50,00	103,3	100,3	100,3
56,25	56,25	56,24	5,44	5,44	5,43
62,50	62,50	62,51	2,59	2,59	2,59
68,75	68,77	68,00	1,25	1,25	1,27
75,00	75,00	75,01	0,94	0,94	0,93

PM = Prony Modificado, PC=Prony Clássico

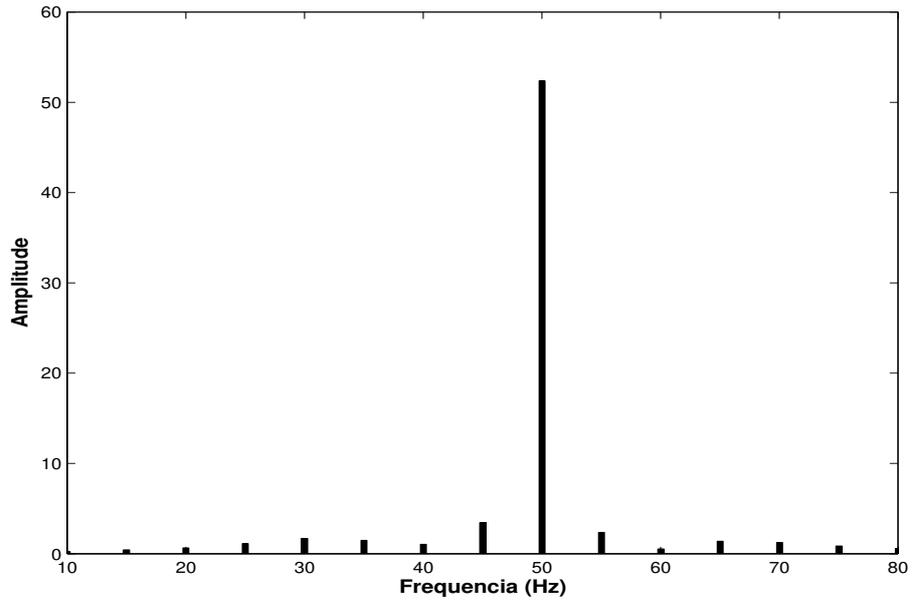


Figura 6.13. FFT do sinal contendo 10 senóides.

Tabela 6.9. Estimação das frequências e das amplitudes para a FFT no Caso 4 - norma IEC.

Frequências(Hz)	Amplitudes
25,02	2,24
30,00	3,38
35,01	2,97
40,02	2,07
45,01	6,86
50,01	104,72
55,02	4,73
60,00	2,77
65,01	2,48
75,03	1,70

Tabela 6.10. Estimação das frequências e amplitudes - $dt=1,2$ ms.

Frequências		Amplitudes	
Prony Modificado	Prony clássico	Prony Modificado	Prony clássico
20,42	20,29	0,85	1,02
34,55	34,48	1,85	1,64
48,16	48,05	9,6	4,91
50,21	50,12	96,85	100,44
63,48	63,32	4,12	4,07
74,25	74,24	1,58	1,60
132,86	131,47	0,48	0,43
168,84	168,31	0,25	0,27
219,02	194,66	0,32	0,21
275,08	219,08	0,24	0,31

6.1.7 Caso 7

No Caso 7 os estimadores de Prony clássico e Prony Modificado são testados em um sinal sintético contendo três componentes senoidais muito próximos: um de frequência 60 Hz e outros dois com frequências laterais de 59 e 61 Hz. Na simulação, o intervalo de tempo ΔT , entre as amostras é fixado em 0.2 ms e são utilizadas 500 amostras. O sinal é descrito por:

$$y[n] = 100\cos(2\pi 60\Delta Tn) + 1\cos(2\pi 61\Delta Tn) + 1\cos(2\pi 59\Delta Tn) \quad (6.4)$$

Neste Caso não se adicionou ruído ao sinal. A janela do sinal analisado é mostrada na Figura 6.14. Para efeito da simulação, a ordem foi fixada em 30 para os dois estimadores. O resultado dos estimadores de Prony e Prony modificado são mostrados está mostrado na Tabela 6.11. Observa-se que as frequências tanto para o estimador de Prony clássico, quanto para o estimador de Prony Modificado são coincidentes com os valores corretos.

Tabela 6.11. Estimação das frequências e das amplitudes para o Caso 7.

Frequências		Amplitudes	
Prony Modificado	Prony clássico	Prony Modificado	Prony clássico
59,0	59,1	1,0	1,0
60,0	59,9	100	99,9
61,0	61,0	1,0	1,0

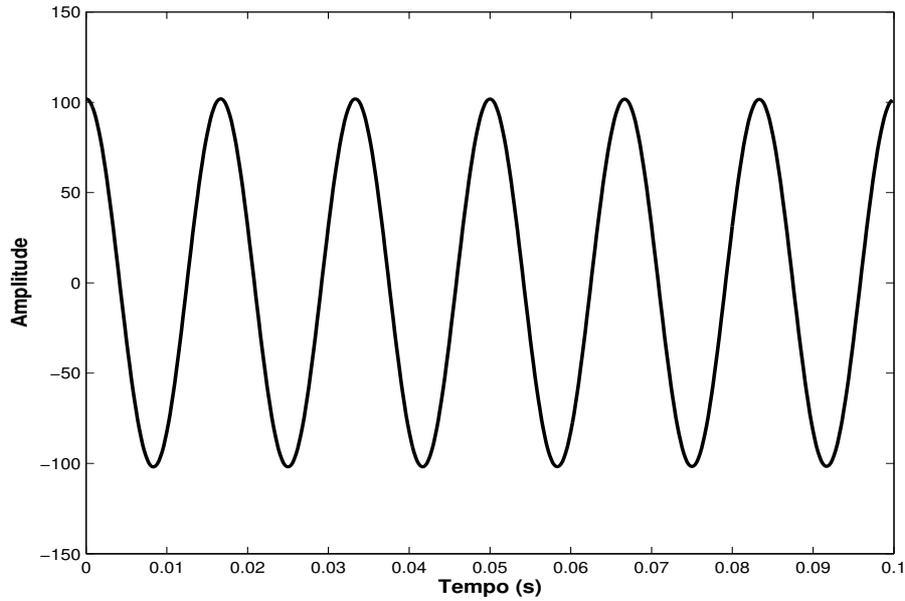


Figura 6.14. Sinal composto por três senóides.

6.2 TÉCNICAS PARA APERFEIÇOAMENTO DO MÉTODO DE PRONY MODIFICADO

As próximas simulações serão realizadas para avaliar as técnicas de aperfeiçoamento do método de Prony Modificado. O objetivo das técnicas é determinar uma ordem adequada para o modelo e também minimizar o efeito do ruído na estimação das frequências. No exemplo a seguir, mostra-se a aplicação do critério de Akaike e da Norma Mínima do resíduo (NM) em um sinal formado por seis senóides, descrito por:

$$y[n] = 200\cos(\omega_1\Delta Tn) + 50\cos(5\omega_1\Delta Tn) + 70\cos(7\omega_1\Delta Tn) + 50\cos(7\omega_1\Delta Tn) + 30\cos(25\omega_1\Delta Tn) + 30\cos(45\omega_1\Delta Tn) + e[n] \quad (6.5)$$

em que, $\omega_1 = 2\pi 40$ e $\Delta T = 0,2$ ms. Foram utilizadas 500 amostras do sinal. A parcela $e[n]$ representa um ruído branco adicionado ao sinal. O valor de $1/SNR$ entre a energia do sinal e a energia do ruído foi inicialmente fixada em 1%. Nas Figuras 6.15 e 6.16 mostram-se os valores dos índices de Akaike e da Norma Mínima em função da ordem do modelo. O valor da ordem selecionada, ou seja, da ordem correspondente aos menores valores dos índices de Akaike e da Norma Mínima, foi 31 para ambas as técnicas. Na Tabela 6.12, mostram-se as

ordens selecionadas para diferentes níveis de ruídos adicionados ao sinal, descrito pela equação (6.5) e também as frequências estimadas correspondentes à seleção dessas ordens. Na Tabela 6.13, mostram-se as mesmas informações da Tabela 6.12 para o caso em que o valor do período de amostragem é 0,1 ms e são consideradas 1000 amostras. As frequências a serem estimadas valem 40, 200, 280, 760, 1000 e 1800 Hz.

Tabela 6.12. Ordem obtida pelo critério de Akaike e pela Norma Mínima - dt=0,2 ms.

1/SNR	Ordem selecionada		Frequências estimadas					
	AIC	Norma Mínima	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
1%	31	31	40,0	199,9	280,1	760,3	1000,3	1800,9
5%	31	31	40,0	199,8	280,0	759,6	1001,6	1801,1
10%	31	31	40,1	199,0	280,1	760,5	1000,9	1800,3
15%	31	31	39,8	200,2	280,1	760,4	998,1	1799,5
20%	31	31	40,3	201,1	279,6	762,4	1004,6	1802,1

Tabela 6.13. Ordem obtida pelo critério de Akaike e pela Norma Mínima - dt=0,1 ms.

1/SNR	Ordem selecionada		Frequências estimadas					
	AIC	Norma mínima	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
1%	32	32	39,9	199,6	280,9	760,4	999,8	1799,7
5%	41	41	40,4	202,5	281,8	766,1	1002,2	1797,7
10%	32	-	40,8	216,9	291,3	740,1	998,3	1797,9
	-	42	39,9	198,3	279,9	760,6	1000,5	1807,7
15%	45	45	39,9	195,8	280,2	754,2	1011,2	1796,1
20%	29	29	41,4	246,6	336,6	759,7	968,6	1799,1

Das Tabelas 6.12 e 6.13, pode ser constatado que existe uma boa concordância entre os valores das ordens fornecidos pelo critério de Akaike e pelo critério da Norma Mínima. Na Tabela 6.13 ocorre uma situação em que há uma discordância de valores. Nesse caso, as frequências estimadas, correspondentes à ordem fornecida pelo critério da Norma Mínima, são mais próximas das frequências reais. Na estimação utilizando o intervalo de amostragem de 0,1 ms, as frequências estimadas não são tão próximas das frequências corretas quando comparadas àquelas que utilizam o intervalo de amostragem de 0,2 ms. A diferença entre as estimativas das frequências pode ser compreendida pela consideração de que o intervalo de amostragem de 0,2 ms está relacionado a um espaço de busca menor do que o do intervalo de 0,1 ms. No

primeiro caso, frequências de até 2500 Hz podem ser estimadas, de acordo com o teorema de Nyquist e na segunda situação, frequências de até 5000 Hz podem ser estimadas. Além disso, o intervalo de amostragem de 0,2 ms rejeita uma parcela maior da energia do ruído. É importante salientar que o nível de 20% de ruído é bastante elevado. Na Figura 6.17(a) mostra-se o sinal sem a presença de ruídos enquanto que na Figura (b), mostra-se o ruído adicionado e na Figura 6.17(c), mostra-se o sinal resultante.

O procedimento de filtragem FIR foi inserido ao método de Prony Modificado no próximo exemplo e foi testado no sinal descrito pela equação (6.5) para os mesmos níveis de ruído mostrados na Tabela 6.13. A ordem do modelo foi fixada arbitrariamente em 31. Os resultados para as novas frequências estimadas são mostrados na Tabela 6.14, evidenciando uma melhoria significativa em relação frequências estimadas mostradas na Tabela 6.13.

Tabela 6.14. Estimação de frequências com filtragem FIR.

1/SNR	Frequências estimadas					
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
1%	40,1	200,0	280,1	759,9	999,8	1800,2
5%	40,0	199,9	279,4	759,9	999,3	1801,5
10%	40,1	200,9	280,3	761,2	1000,0	1799,8
15%	40,0	201,6	280,7	759,0	1001,0	1801,0
20%	40,0	199,9	280,1	760,0	999,6	1799,1

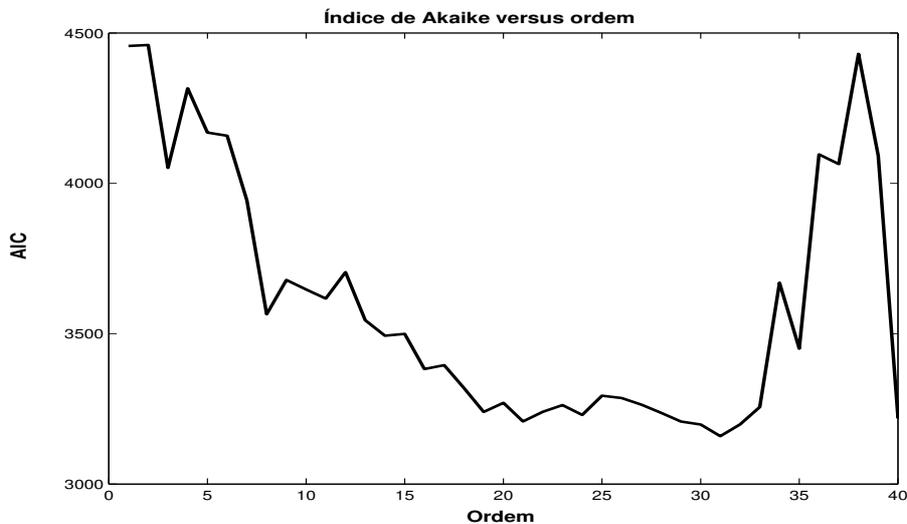


Figura 6.15. Variação do índice de Akaike em função da ordem para o sinal formado por seis senóides.

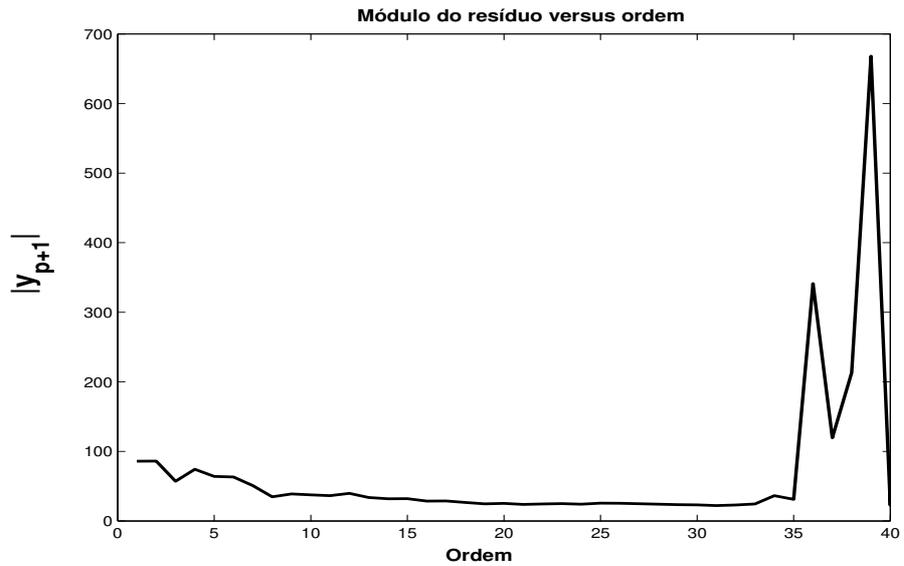


Figura 6.16. Variação da norma do resíduo em função da ordem para o sinal formado por seis senóides.

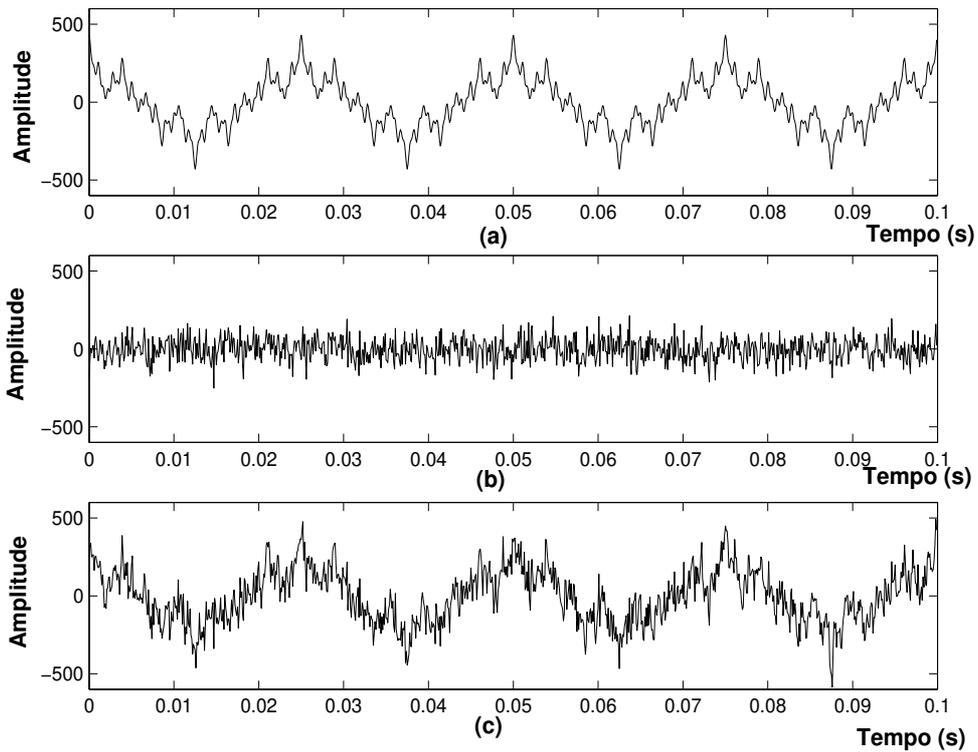


Figura 6.17. Adição de ruído ao sinal com seis senóides: (a) Sinal sem ruído; (b) Ruído adicionado ao sinal; (c) Sinal com ruído

Antes da finalização da seção é necessário fazer uma consideração sobre os intervalos de

amostragens utilizados na digitalização dos sinais apresentados anteriormente. Dos resultados mostrados nas Tabelas 6.12 e 6.13, claramente, infere-se que a estimação das frequências também é dependente do intervalo de amostragem. A estimação de um intervalo de amostragem ótimo para o método de Prony é um problema pouco explorado. Um dos trabalhos encontrados na literatura foi realizado por Kulp (1981). Segundo o autor, é possível estimar o intervalo ótimo, monitorando-se o número de condição da matriz de dados para diferentes intervalos de amostragens, previamente selecionados. No trabalho, afirma-se que o menor número de condição corresponde à melhor estimação das frequências. Outro trabalho (LEE; KIM, 2003) propõe monitorar uma função sensibilidade, dependente de autovalores da matriz de dados, também para diferentes valores de amostragem. A grande desvantagem das técnicas apresentadas nesses trabalhos é a necessidade intrínseca de se amostrar o sinal com diferentes intervalos de amostragem, antes da escolha de um intervalo específico. Isso dificulta suas implementações. Neste trabalho, verificou-se, que melhores estimativas para as frequências eram obtidas quando a frequência de amostragem era fixada próxima da frequência de Nyquist, de tal modo que, o período correspondente à maior frequência contida no sinal, seja amostrado de 2 a 4 vezes. Como já foi mencionado, um dos possíveis motivos para a efetividade dessa faixa de frequências, é a redução do espaço de busca do método de Prony Modificado.

6.3 APLICAÇÃO DA METODOLOGIA DE ANÁLISE DE HARMÔNICOS

A aplicação da metodologia, proposta no capítulo anterior, para a análise de harmônicos em sinais oriundos da rede elétrica é mostrada nesta seção. Optou-se por apresentar, para duas plantas industriais, as evoluções do DHT e da amplitude do quinto harmônico de tensão e também a evolução do DHT de corrente.

6.3.1 Caso 8

No Caso 8, os sinais foram adquiridos na subestação de entrada de uma unidade industrial produtora de calçados com potência nominal de 10 MVA. Na unidade estão instalados motores e conversores de potência. O esquema de como foram realizadas as medições está mostrado na Figura 6.18. Os sinais foram adquiridos no lado da alta tensão de um transformador de 13,8 kV para 440 V através de três transformadores de potencial e três transformadores de corrente. A relação do transformador de potencial é de 120 para 1, e a relação do transformador de corrente é de 200 para 5. A aquisição dos sinais abrangeu um período de pouco mais de 5 dias. Na Figura 6.19, mostra-se o gráfico da evolução da Distorção Harmônica Total para a tensão da fase *A* durante o período de aquisição. Observa-se que a distorção não excede o limite recomendado pela norma IEEE 519 que é de 5%. Nas Figuras 6.20 e 6.21 mostram-se as evoluções da amplitude do quinto harmônico de tensão na fase *A* e do DHT da corrente na fase *A*, respectivamente.

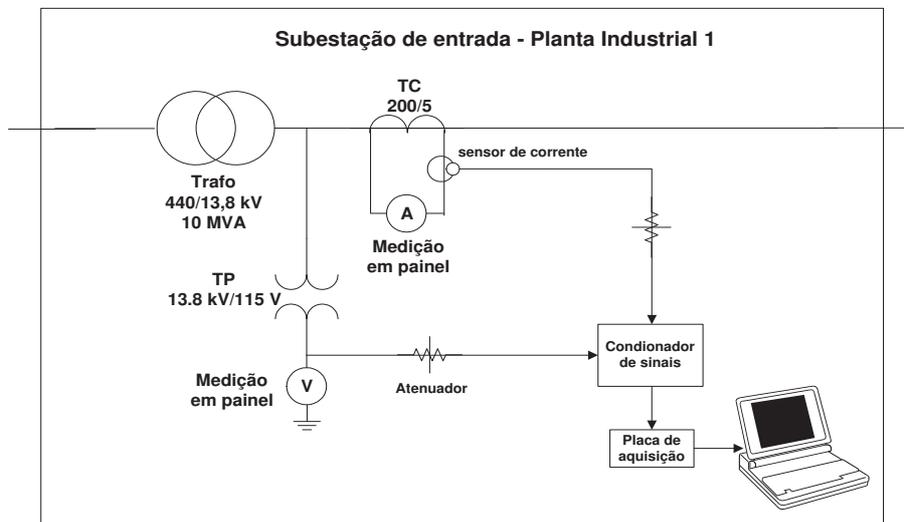


Figura 6.18. Esquema de medição para a Planta Industrial 1.

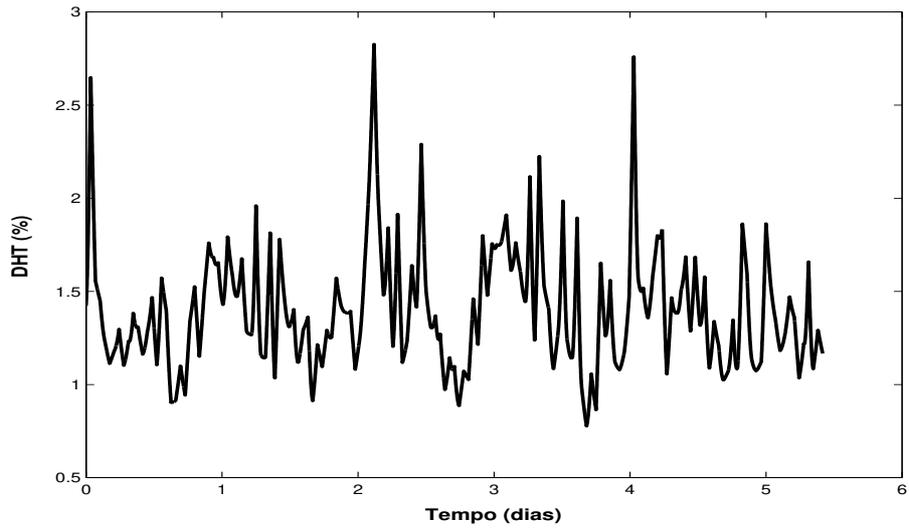


Figura 6.19. Evolução da DHT da tensão na fase A - Planta Industrial 1.

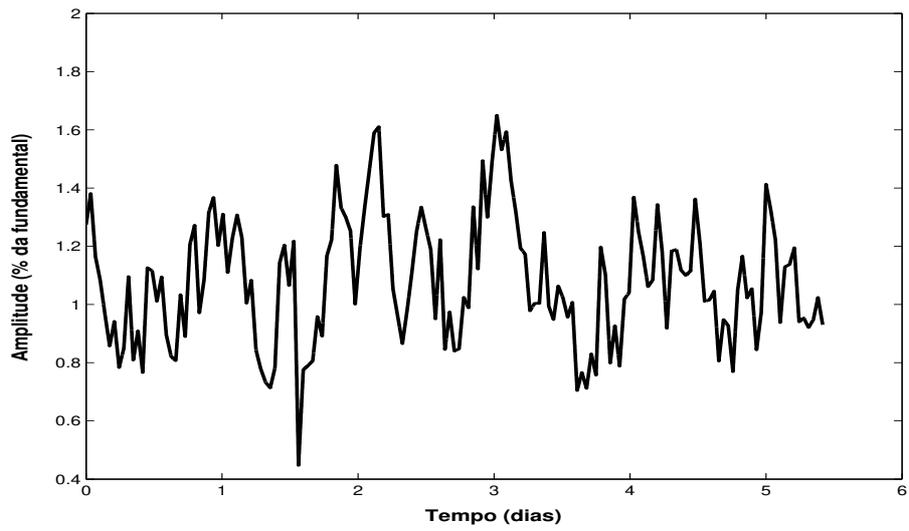


Figura 6.20. Evolução da amplitude do quinto harmônico da tensão na fase A - Planta Industrial 1.

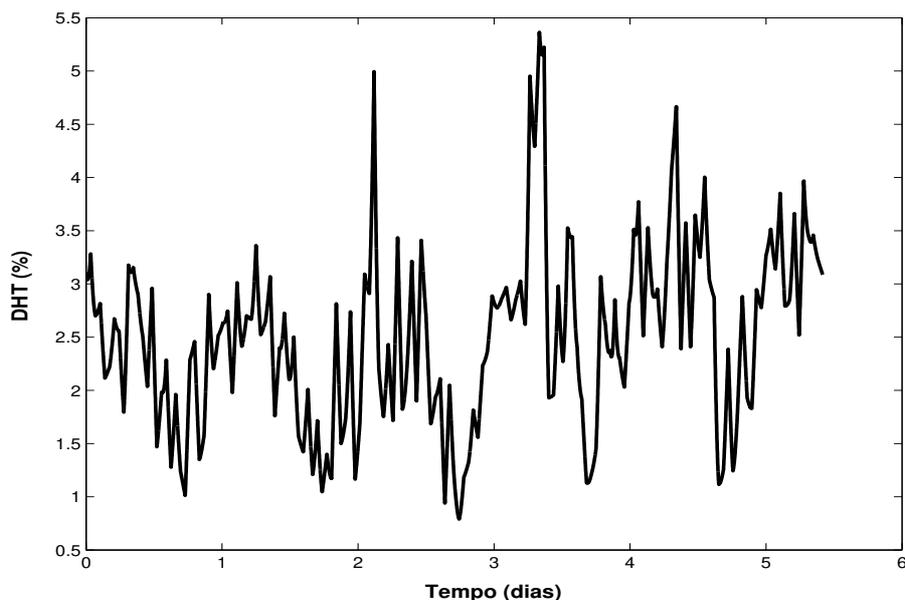


Figura 6.21. Evolução da DHT da corrente na fase A - Planta Industrial 1.

6.3.2 Caso 9

No Caso 9, os sinais foram adquiridos em uma subestação da Saelpa com uma linha expressa alimentando uma unidade industrial produtora de cimento. O esquema de medições é mostrado na Figura 6.22. A aquisição dos sinais abrangeu um período de 8 dias. Na Figura 6.23, mostra-se o gráfico da evolução da Distorção Harmônica Total para a tensão da fase A, durante o período de aquisição. Na Figura 6.24, mostra-se a evolução da amplitude do quinto harmônico de tensão na fase A. Observa-se que por volta do sexto dia de aquisições tanto o DHT quanto o quinto harmônico da tensão na fase A sofrem um aumento abrupto. A Saelpa reportou que houve um desligamento de energia neste dia.

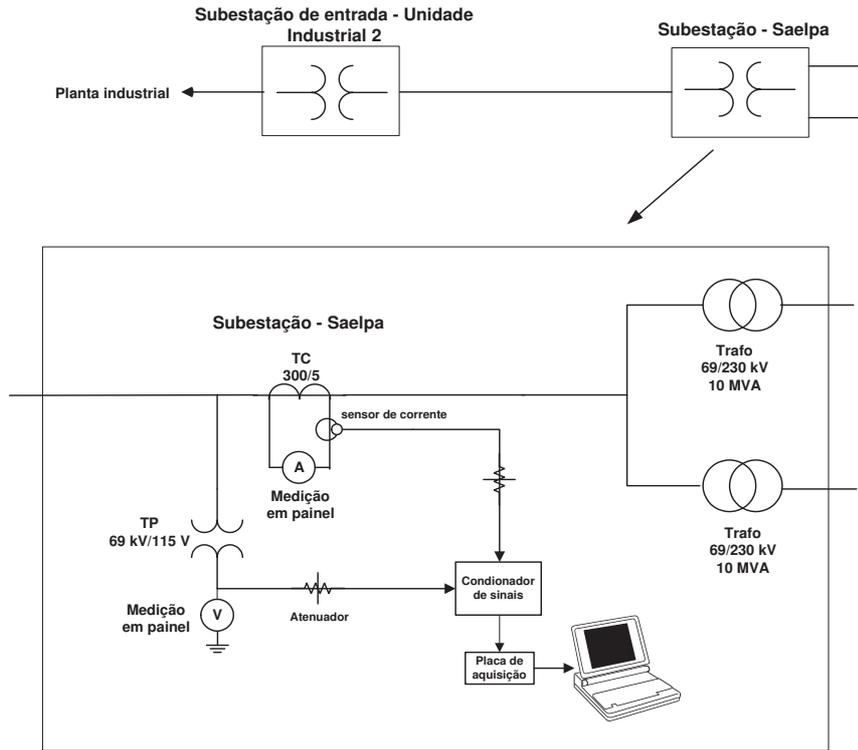


Figura 6.22. Esquema de medição para a Planta Industrial 2.

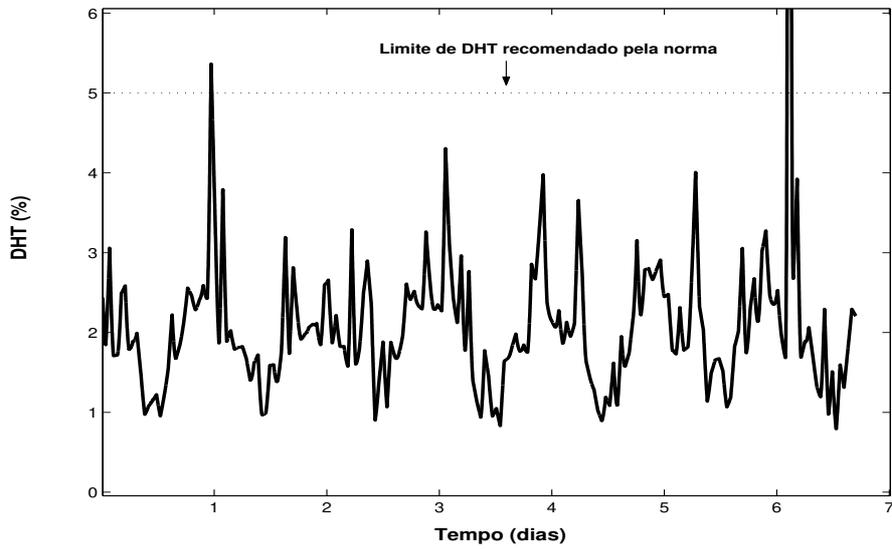


Figura 6.23. Evolução da DHT da tensão na fase A - Planta Industrial 2.

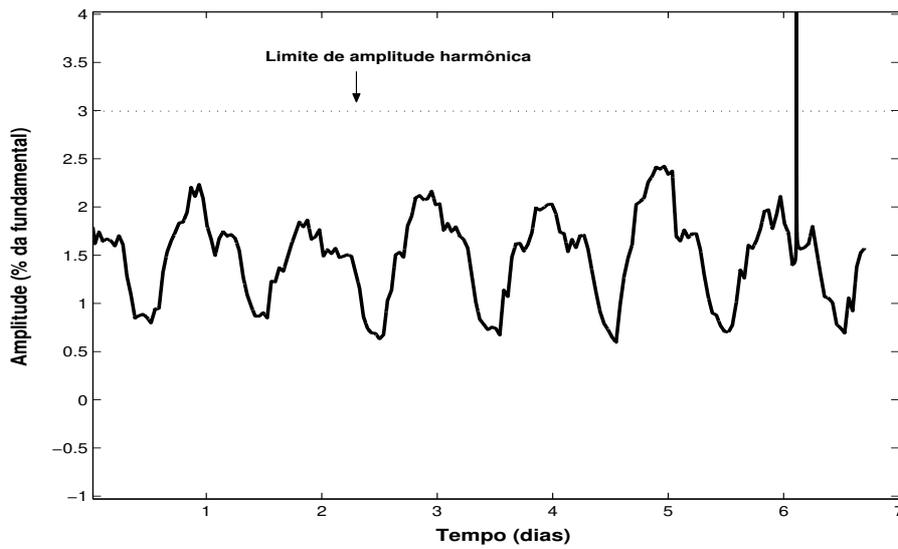


Figura 6.24. Evolução da amplitude do quinto harmônico da tensão na fase A - Planta Industrial 2.

Também pode ser observado que no primeiro dia de medições o DHT de tensão na fase A ultrapassa o limite de 5% recomendado pela norma. É importante salientar que a escala de tempo dos gráficos acima, é medida em dias. Para o caso da Figura 6.23, o limite de DHT de tensão foi ultrapassado durante pouco mais de 14 minutos de duração. O gráfico do DHT neste período é mostrado na Figura 6.25.

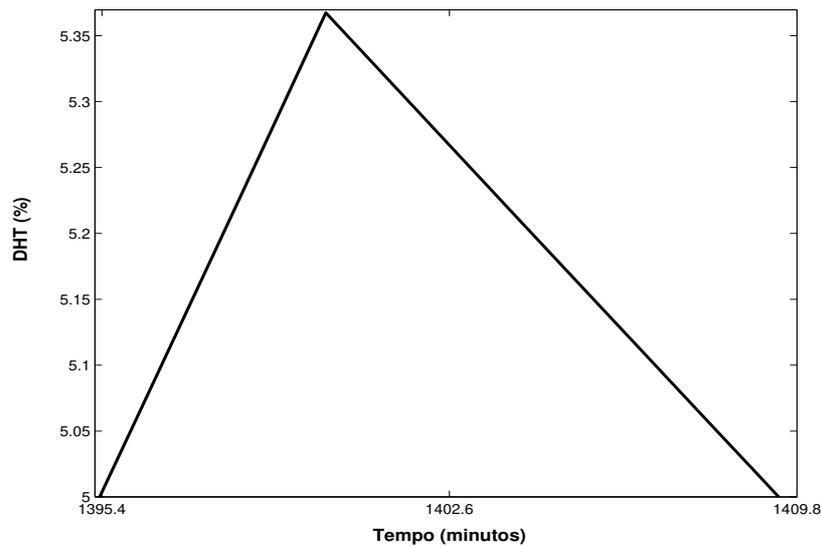


Figura 6.25. Evolução do DHT da tensão na fase A - Planta Industrial 2 e escala em minutos.

6.4 COMENTÁRIOS

De modo geral, as estimações realizadas pelo método de Prony e pelo método de Prony Modificado apresentaram bons resultados. Porém na presença de ruídos o método de Prony Modificado é melhor, como ficou evidenciado no Caso 4.

É importante reiterar que diferentemente do método de Prony, o método de Prony Modificado minimiza o módulo de cada elemento do resíduo de um processo de filtragem que fornece coeficientes diretamente relacionados com os polos contidos pelo sinal. Não há necessidade de se resolver um sistema linear e uma equação polinomial. Portanto evita-se a polarização da solução por mínimos quadrados e o efeito degenerativo dos ruídos é minimizado. Também, vale ressaltar que devido ao método de Prony Modificado não necessitar da solução da equação polinomial, sua implementação em diferentes linguagens é simplificada pois se evita a utilização de pacotes ou funções *built-in* que resolvem equações polinomiais.

A efetividade do método de Prony Modificado pode ser entendida com o auxílio da Figura 6.26. A Figura 6.26 mostra a superfície de busca do método de Prony Modificado cujo o ótimo

global é o mesmo mostrado na Figura 2.9. Observa-se que a formulação da otimização do método de Prony Modificado deforma a superfície de busca mostrada na Figura 2.9 de tal modo que a uma nova região convexa é formada.

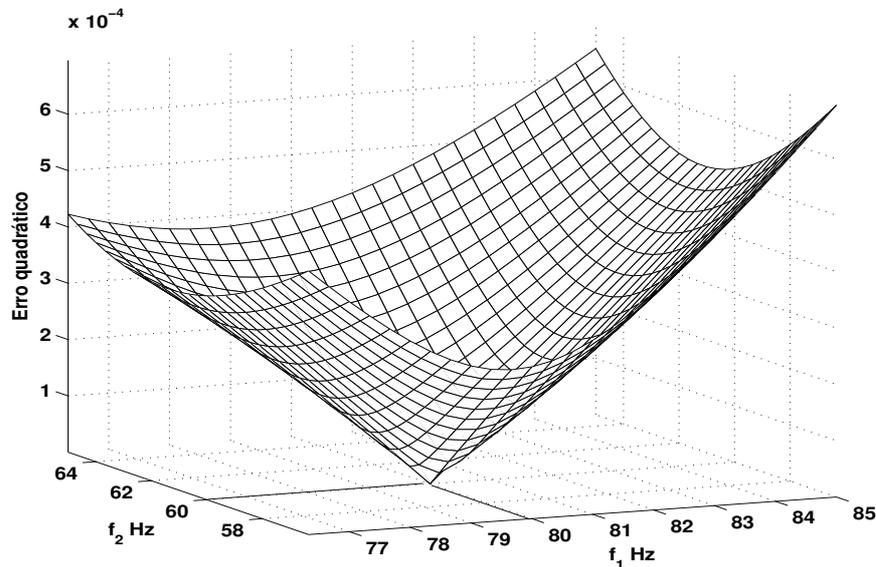


Figura 6.26. Evolução do DHT da tensão na fase A - Planta Industrial 2 e escala em minutos.

Também se mostrou no Caso 5 que a transformada de Fourier não é tão precisa como o método de Prony modificado, mesmo quando é aplicada em sinais adquiridos conforme a norma IEC. Quando a FFT é aplicada em janelas curtas do sinal e não correspondentes a um número inteiro de ciclos do sinal analisado, então, como é mostrado no Caso 1, os resultados são completamente equivocados.

Os resultados mostrados na seção 6.2 sugerem que a filtragem FIR pode ser efetiva na redução do efeito degenerativo dos ruídos na estimação das frequências. Também se mostrou que o critério da Norma Mínima é praticamente equivalente ao critério de Akaike para a determinação de ordem adequada na estimação.

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Uma metodologia de análise de harmônicos e inter-harmônicos de sinais de corrente e de tensão adquiridos em sistemas elétricos foi proposta neste trabalho. A metodologia está baseada na análise *off-line* dos sinais. Isso tornou possível a compatibilização entre um estimador não linear, para as frequências, e um estimador linear, para as amplitudes dos componentes senoidais presentes nos sinais. A metodologia permite que a Distorção Harmônica Total dos sinais e as amplitudes de cada componente sejam rastreadas permitindo, assim, a verificação da conformidade da concessionária e dos clientes com as normas vigentes de qualidade de energia. O resultado do DHT da tensão, no Caso 9 do capítulo de resultados, demonstra a necessidade do monitoramento do DHT dos sinais por um período longo, caso contrário, a transgressão dos limites recomendados pelas normas não pode ser observada de maneira adequada.

Como a metodologia requer a utilização de um estimador linear, no Capítulo 3, comparou-se dois estimadores muito utilizados na área de identificação paramétrica: o estimador de Kalman e o estimador de mínimos quadrados recursivo ponderado. Os dois estimadores foram implementados e testados para a estimação das amplitudes senoidais de sinais sintéticos. Verificou-se que o estimador de Kalman é o mais adequado para a aplicação considerada. Além disso, a utilização do estimador de Kalman permite a incorporação eficiente de informações a priori sobre a variação das amplitudes.

Como a utilização do estimador de Kalman requer o conhecimento prévio das frequências contidas no sinal analisado, buscou-se, inicialmente, o uso de estimadores de frequências que minimizassem diretamente a soma dos erros quadráticos entre as amostras do sinal de dados e seu modelo. Verificou-se que tanto os métodos baseados no cálculos de gradientes, como os métodos baseados em algoritmos genéticos, não convergiam para a solução correta em casos

onde existiam muitas frequências a serem estimadas. Na literatura, o método de Prony clássico é como um estimador de frequências eficaz. No entanto, sua eficácia é significativamente reduzida na presença de ruídos devido à polarização do estimador de mínimos quadrados. Tentando-se contornar a limitação imposta pelos ruídos, o método de Prony Modificado foi desenvolvido nesta Tese.

Para sua validação, o método de Prony Modificado foi aplicado na estimação de frequências de sinais sintéticos. Os resultados demonstraram que as estimativas das frequências pelo método de Prony Modificado são melhores do que as estimativas pelo método de Prony clássico. Mostrou-se que a formulação do problema de estimação de frequências pelo método de Prony Modificado pode gerar superfícies de busca suaves e convexas. Além disso, os resultados mostrados no Capítulo 6 confirmaram as limitações da transformada rápida de Fourier na análise de sinais compostos de senóides. Finalmente, verificou-se que a eficiência método de Prony modificado é dependente de uma seleção adequada para a frequência de amostragem dos sinais de dados.

Com a validação do método de Prony Modificado, um critério de seleção de uma ordem adequada para a estimativa das frequências foi proposto. O novo critério foi denominado de critério da Norma Mínima. De acordo com o novo critério, a ordem mais adequada para a estimação das frequências é aquela em que se obtém o vetor resíduo de menor norma. Os resultados mostraram que o critério da Norma Mínima fornece as mesmas ordens do critério de Akaike.

As simulações realizadas mostraram que o método de Prony Modificado, apesar da maior robustez aos ruídos em relação ao método de Prony, também é sensível à presença de ruídos. Por isso, foi proposta uma técnica de filtragem para diminuir o efeito degenerativo que os ruídos exercem. A idéia fundamental da técnica é construir um filtro FIR a partir das informações sobre o espectro do sinal de dados, obtidas por meio de uma aplicação prévia do método de Prony Modificado. A técnica foi testada em sinais sintéticos com diferentes níveis de ruído e se mostrou eficaz na melhoria da estimativa das frequências.

7.1 TRABALHOS FUTUROS

1) Estimação da ordem do modelo.

Os critérios da Norma Mínima e de Akaike devem ser calculados para diferentes ordens, antes da seleção de uma delas, para modelar o sinal de dados. Esse é um tipo de procedimento exaustivo que pode ser muito oneroso se a ordem adequada for muito elevada. Seria interessante a investigação de um método em que a ordem pudesse ser determinada de uma maneira mais direta. Talvez, um caminho viável fosse a aplicação da FFT ao sinal de dados. O número de raias fornecidas pela FFT poderia servir como ponto de partida para o procedimento.

2) Caracterização estatística do estimador de Prony Modificado.

Outra proposta de trabalho seria a caracterização estatística do estimador de Prony Modificado. A caracterização pode ser realizada por meio da análise dos resultados das estimações e também de forma analítica. Seria relevante a investigação sobre as condições de consistência e variância (limite de Cramer-Rao) do estimador.

3) Monitoração de máquinas elétricas

Sistemas de auxílio a diagnósticos e predição de faltas em motores são requisitados de maneira crescente em plantas industriais. Muitos destes sistemas são baseados em técnicas de processamento digital de sinais que objetivam estimar o espectro de sinais de tensão, corrente ou mesmo de vibrações mecânicas, captadas por acelerômetros. Tradicionalmente, a obtenção desses espectros é realizada por meio da Transformada Rápida de Fourier (FFT - Fast Fourier Transform) (THOMSON; FENGER, 2001). Outra proposta de trabalho futuro seria a aplicação do método de Prony Modificado na análise destes sinais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGUIRRE, L. A. *Introdução a Identificações de Sistemas - Técnicas Lineares e Não Lineares*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2000.
- AKAIKE, H. A. A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Autom. Control*, v. 21, p. 716–723, December 1974.
- BAGHZOUZ, Y. et al. Time-varying harmonics: Part I - Characterizing measured data. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 13, n. 3, p. 938–944, July 1998.
- BASIC, D.; RAMSDEN, V. S.; MUTIK, P. K. Hybrid filter control system with adaptive filters for selective elimination of harmonics and interharmonics. *IEE Proceedings on Electric Power Applications*, v. 147, n. 3, May 2000.
- BEITES, L. F. et al. Harmonics, interharmonics and unbalances of arc furnaces: A new frequency domain approach. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 16, n. 4, p. 661–668, October 2001.
- BELLARMINI, G. T.; ASGILL, A. B.; LEE, M. V. Noise induced from power lines in voice frequency communications. In: IEEE. *Southeastern 2000*. [S.l.], 2000. p. 9 – 12.
- BRIGHAM, E. O. *The Fast Fourier Transform*. [S.l.]: Prentice Hall PTR, 1974.
- CHAN, Y.; LAVOIE, M.; PLANT, J. A parameter estimation approach to estimation of frequencies of sinusoids. *IEEE Transactions on Acoustic Speech Signal Processing*, ASSP-29, April 1981.

COSTA, F. F. et al. Improving the signal data acquisition in condition monitoring of electrical machines. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, v. 53, n. 4, p. 561–580, April 2004.

COSTA, F. F. et al. Recursive prony's method for improving the monitoring of electric machines. In: *Instrumentation and Measurement Technology Conference*. Ottawa-Canada: [s.n.], 2005.

COSTA, F. F. et al. Localização de inter-harmônicos utilizando algoritmos genéticos - aplicação ao estudo de faltas em motores de indução. In: UNIV. ESTADUAL DE SÃO PAULO. *VI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. Bauru, 2003. p. 754 – 759.

COSTA, F. F.; FERNANDES, D.; ALMEIDA, L. A. L. de. Comparison between Prony's method and FFT for analysing power converters signals. In: *8th Brazilian Electronic Conference-COBEP*. Recife: [s.n.], 2005.

COSTA, F. F.; FERNANDES, D.; ALMEIDA, L. A. L. de. Prony's method versus FFT for analysis of responses of power converters. In: *European Conference on Power Electronics and Applications*. Dresden-Germany: [s.n.], 2005.

COSTA, F. F.; NAIDU, S. R.; COSTA, E. G. da. Estudo comparativo entre algoritmos recursivos para rastreamento de harmônicos. In: *Congresso Brasileiro de Automática - CBA*. Gramado: [s.n.], 2004.

DAVID, P. A. M.-S.; SZCZUPAK, J. Refining the digital spectrum. In: IEEE. *Midwest Symposium on circuits and systems*. [S.l.], 1996. p. 767 – 770.

GELB, A. et al. *Applied Optimal Estimation*. London: M.I.T. Press, 1974.

GIRGIS, A. A.; CHANG, W. B.; MAKRAM, E. B. A digital recursive measurement scheme for on-line tracking of power system harmonics. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 6, n. 3, July 1991.

GIRGIS, A. A.; HAM, F. M. A quantitative study of pitfalls in the FFT. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, v. 16, n. 4, p. 434–439, July 1980.

GIRGIS, A. A.; PETERSON, W. L. Adaptive estimation of power system frequency deviation and its rate of change for calculating sudden power system overloads. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 5, p. 585–594, April 1990.

GOLDBERG, D. E. *Genetic Algorithms in Search Optimization and Machine Learning*. [S.l.]: Addison Wesley Longman, 1986.

GUNTHER, E. W. Interharmonics - Recommended updates to IEEE 519. In: *IEEE Power Engineering Society Meeting*. [S.l.: s.n.], 2002. v. 2, p. 950–954.

HAUER, J. F.; DEMEURE, C. J.; SCHARF, L. L. Initial results in prony analysis of power system response signals. *IEEE Transactions on Power System*, v. 5, n. 1, p. 80–89, February 1990.

HAYKIN, S.; VEEN, B. V. *Sinais e Sistemas*. [S.l.]: Artmed, 2001.

HENICHE, A.; BOURLES, H.; HOURY, M. P. Desensitized controller for voltage regulation of power systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 10, n. 3, p. 1461–1466, August 1995.

HILDEBRAND, F. B. *Introduction to Numerical Numerical Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1956.

IEC 1000-2-1. [S.l.], 1990. Electromagnetic Compatibility, Part 2: Environment, Sect.1: Description of the Environment - Electromagnetic environment for low-frequency conducted disturbances and signalling in public power supply systems.

IEC 61000-3-2. [S.l.], 1998. Limits for harmonic current emissions.

IEEE 519. [S.l.], 1992. Recommended Practices and Requirements for Harmonic Control in Electric Power Systems.

JIANZE, W. et al. Powercon 98. In: IEEE. *Conference on Power System Technology*. [S.l.], 1998. v. 2, p. 1556–1559.

- KALMAN, R. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Trans. of the ASME-J. Basic Eng.*, v. 82, p. 35–45, March 1960.
- KAY, S. Accurate frequency estimation at low signal noise ratio. *IEEE Transactions on Acoustic Speech Signal Processing*, ASSP-32, June 1984.
- KAY, S. M. *Modern Spectral Analysis*. [S.l.]: Prentice Hall, 1988.
- KAY, S. M.; MARPLE, S. L. Spectrum analysis-a modern perspective. *Proceedings of the IEEE*, v. 69, n. 11, p. 434–439, November 1981.
- KULP, R. An optimum sampling procedure for use with the prony method. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, p. 67–71, May 1981.
- LAI, L. L. et al. On the processing of harmonics and interharmonics using hanning window in standard framework. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 14, n. 1, p. 52–59, January 1999.
- LEE, J.-H.; KIM, H.-T. Selecting sampling interval of transient response for the improved Prony method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 51, p. 74–77, January 2003.
- LEONOWISZCZ, Z.; LOBOS, T.; REZMER, J. Advanced spectrum estimation methods for signal analysis in power electronics. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 50, p. 514–519, June 2003.
- MA, H.; GIRGIS, A. A. Identification and tracking of harmonic sources in a power system using a Kalman filter. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 11, n. 3, July 1996.
- MACDONOUGH, R. N.; HUGGINS, W. H. Best least-squares representation of signals by exponentials. *IEEE Transactions on Autom. Control*, p. 408–412, August 1968.
- MARPLE, S. L. *Digital Spectral Analysis with applications*. New Jersey: Addison-Wiley, 1987. ISBN 0-13-214149-3.

MCEACHERN, A.; GRADY, W. M.; MONCRIEF, W. A. Revenue and harmonics: An evaluation of some proposed rate structures. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 10, n. 1, p. 474–482, January 1995.

MOO, C. H.; CHANG, Y. N.; MOK, P. P. A digital measurement scheme for time-varying transient harmonics. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 10, n. 2, p. 588–594, April 1995.

NAIDU, S. R.; COSTA, F. F. A novel technique for estimating harmonic and inter-harmonic frequencies in power system signals. In: *European Conference on Circuit Theory and Design-EPE*. Cork-Ireland: [s.n.], 2005.

NORTON, J. *An Introduction to Identification*. Second. [S.l.]: Academic Press, 1988.

OPPENHEIM, A.; SCHAFER, R. *Discret-Time Signal Processing*. [S.l.]: Prentice Hall PTR, 1989.

PRESS, W. H. et al. *Numerical Recipes in Fortran - The Art of Scientific Computation*. New Delhi: Cambridge University Press, 1992. ISBN 81-85618-17-8.

RAHMAN, M. Total least squares approach for frequency estimation using linear prediction. *IEEE Transactions on Acoustic Speech Signal Processing*, ASSP-35, October 1987.

SRINIVASAN, K. On separating customer and supply side harmonic contributions. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 11, n. 2, p. 1003–1012, April 1996.

SUN, H.; ALLEN, G. H.; CAIN, G. D. A new filter-bank configuration for harmonic measurement. *IEEE Transactions on Power Instrumentation and Measurements*, v. 45, n. 3, p. 739–744, June 1996.

TESTA, A.; GALLO, D.; LANGELLA, R. On the processing of harmonics and interharmonics using hanning window in standard framework. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 19, n. 1, p. 28–34, January 2004.

THOMSON, W. T.; FENGER, M. Current signature analysis to detect induction motor faults. *IEEE Industry Applications Magazine*, v. 7, n. 4, p. 26–34, July/August 2001.

XU, W.; LIU, X.; LIU, Y. An investigation on the validity of power-direction method for harmonic source determination. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 18, n. 1, p. 214–219, January 2003.

ZHEZHELENKO, I.; SAYENKO, Y. Analysis methods of interharmonics investigations in power supply systems. In: *Ninth international conference on harmonics and quality of power*. [S.l.: s.n.], 2000. v. 1, p. 61–63.

MQR - DEMONSTRAÇÃO

A obtenção da expressão recursiva para o método de mínimos quadrados, inicia-se com a manipulação algébrica da expressão (3.5) para se obter a equação:

$$\hat{\alpha}_n = \left(\sum_{i=1}^n \varphi_{i-1} \varphi_{i-1}^T \right)^{-1} \sum_{i=1}^n y[i] \varphi_{i-1}, \quad (\text{A.1})$$

em que n representa um tempo amostrado t_n qualquer. A equação (A.1) pode ser reescrita como:

$$\hat{\alpha}_n = \mathbf{P}_n \sum_{i=1}^n y[i] \varphi_{i-1}, \quad (\text{A.2})$$

em que

$$\mathbf{P}_n^{-1} = \sum_{i=1}^n \varphi_{i-1} \varphi_{i-1}^T. \quad (\text{A.3})$$

Da equação (A.2), obtém-se:

$$\hat{\alpha}_{n+1} = \mathbf{P}_{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} y[i] \varphi_{i-1}, \quad (\text{A.4})$$

e da equação (A.3)

$$\mathbf{P}_{n+1}^{-1} = \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_{i-1} \varphi_{i-1}^T = \mathbf{P}_n^{-1} + \varphi_n \varphi_n^T. \quad (\text{A.5})$$

Considerando, agora a identidade:

$$\sum_{i=1}^{n+1} y[i] \varphi_{i-1} = \sum_{i=1}^n y[i] \varphi_{i-1} + y[n+1] \varphi_n + \varphi_n \varphi_n^T \hat{\alpha}_n - \varphi_n \varphi_n^T \hat{\alpha}_n \quad (\text{A.6})$$

Os dois somatórios na equação (A.6) podem ser substituídos, utilizando-se as equações (A.2) e (A.4), de tal modo que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} y[i] \varphi_{i-1} &= \mathbf{P}_{n+1}^{-1} \hat{\alpha}_{n+1} = \mathbf{P}_n \hat{\alpha}_n + y[n+1] \varphi_n - \varphi_n \varphi_n^T \hat{\alpha}_n + \varphi_n \hat{\alpha}_n^T \varphi_n = \\ &= \mathbf{P}_n^{-1} \hat{\alpha}_n + \varphi_n \hat{\alpha}_n^T \varphi_n + \varphi_n (y[n+1] - \varphi_n^T \hat{\alpha}_n). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Observe que para a construção da equação (A.7), a seguinte relação é utilizada:

$$\boldsymbol{\varphi}_n \boldsymbol{\varphi}_n^T \hat{\boldsymbol{\alpha}}_n = \boldsymbol{\varphi}_n \hat{\boldsymbol{\alpha}}_n^T \boldsymbol{\varphi}_n. \quad (\text{A.8})$$

Então, substituí-se P_n na equação (A.7) (utilizando a equação (A.5)) e considerando-se a equação (3.7) para substituir $y[n+1]$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n+1}^{-1} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{n+1} &= (\mathbf{P}_{n+1}^{-1} - \boldsymbol{\varphi}_n \boldsymbol{\varphi}_n^T) \hat{\boldsymbol{\alpha}}_n + \boldsymbol{\varphi}_n \boldsymbol{\varphi}_n^T \hat{\boldsymbol{\alpha}}_n \\ &+ \boldsymbol{\varphi}_n \left(e^0[n+1] + \hat{y}^0[n+1] - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_n^T \boldsymbol{\varphi}_n \right) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

e desenvolvendo-se a equação (A.9), obtém-se:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{n+1} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_n + \mathbf{P}_{n+1} \boldsymbol{\varphi}_n e^0[n+1]. \quad (\text{A.10})$$

Apesar da equação (A.10) possuir uma forma recursiva, sua aplicação em um algoritmo recursivo é ainda inconveniente, pois é necessário encontrar uma fórmula recursiva para a matriz P . Para isso deve-se considerar o *lema da inversão*:

Seja \mathbf{P} uma matriz de dimensão $(n \times n)$ e $\boldsymbol{\varphi}$ um vetor de dimensão n , então:

$$(\mathbf{P}^{-1} + \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^T)^{-1} = \mathbf{P} - \frac{\mathbf{P} \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{P}}{1 + \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\varphi}} \quad (\text{A.11})$$

Das equações (A.5) e (A.11), obtém-se a formula recursiva para a matriz \mathbf{P} :

$$\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_n - \frac{\mathbf{P}_n \boldsymbol{\varphi}_n \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{P}_n}{1 + \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{P}_n \boldsymbol{\varphi}_n} \quad (\text{A.12})$$

Utilizando a equação (A.12), o produto $\mathbf{K}_n = \mathbf{P}_{n+1} \boldsymbol{\varphi}_n$, pode ser escrito como:

$$\mathbf{K}_n = \frac{\mathbf{P}_n \boldsymbol{\varphi}_n}{\boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{P}_n \boldsymbol{\varphi}_n + 1}, \quad (\text{A.13})$$

e substituindo \mathbf{K}_n em (A.10), obtém-se:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{n+1} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_n + \mathbf{K}_n e^0[n+1]. \quad (\text{A.14})$$

PROPRIEDADES DE FILTRAGEM DO MÉTODO DE PRONY

Considere um sinal formado pela soma de duas senóides de frequências ω_1 e ω_2 :

$$y[n] = A_{c1} \cos \theta_1 n + A_{s1} \sin \theta_1 n + A_{c2} \cos \theta_2 n + A_{s2} \sin \theta_2 n, \quad (\text{B.1})$$

em que $\theta_1 = \omega_1 \Delta T$ e $\theta_2 = \omega_2 \Delta T$. Deseja-se mostrar que se o sinal $y[n]$ for processado de acordo com a equação:

$$y_2[n] = y[n - 1] + b_1 y[n] + y[n + 1], \quad (\text{B.2})$$

com $b_1 = -2 \cos \theta_1$, então o sinal $y_2[n]$, resultante da filtragem só será composto pela senóide de frequência ω_2 . Considere então que y_2 é a soma de duas parcelas: s_{θ_1} e s_{θ_2} . As parcelas s_{θ_1} e s_{θ_2} são os componente senoidais presentes no sinal y_2 de frequências ω_1 e ω_2 respectivamente.

Para determinar o componente s_{θ_1} , deve-se, considerar somente as parcelas de (B.2), somente com elementos que envolvem θ_1 :

$$y_{\theta_1}[n - 1] = A_{c1} \cos(\theta_1 n - \theta_1) + A_{s1} \sin(\theta_1 n - \theta_1) \quad (\text{B.3})$$

$$y_{\theta_1}[n] = (A_{c1} \cos \theta_1 n + A_{s1} \sin \theta_1 n) b_1 \quad (\text{B.4})$$

$$y_{\theta_1}[n + 1] = A_{c1} \cos(\theta_1 n + \theta_1) + A_{s1} \sin(\theta_1 n + \theta_1) \quad (\text{B.5})$$

Somando-se as três últimas equações e considerando as relações trigonométricas:

$$\begin{cases} \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos b, \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

obtém-se facilmente que s_{θ_1} é nulo.

Deseja-se, agora examinar o efeito do processamento descrito em (B.2), para o componente senoidal de frequência ω_2 . Deve-se então considerar somente as parcelas que envolvem θ_2 :

$$y_{\theta_2}[n-1] = A_{c2} \cos(\theta_2 n - \theta_2) + A_{s2} \sin(\theta_2 n - \theta_2) \quad (\text{B.7})$$

$$y_{\theta_2}[n] = (A_{c2} \cos \theta_2 n + A_{s2} \sin \theta_2 n) b_1 \quad (\text{B.8})$$

$$y_{\theta_2}[n+1] = A_{c2} \cos(\theta_2 n + \theta_2) + A_{s2} \sin(\theta_2 n + \theta_2) \quad (\text{B.9})$$

Para se encontrar a expressão para s_{θ_2} , deve-se somar as três últimas equações e considerar as relações descritas em (B.6). Desta maneira, obtém-se após alguma manipulação:

$$\begin{aligned} s_{\theta_2} = & [A_{c2} (2 \cos^2 \theta_2 + \cos \theta_2 b_1) + A_{s2} (-2 \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_2 b_1)] \cos(\theta_2 n + \theta_2) + \\ & [A_{s2} (2 \cos^2 \theta_2 + \cos \theta_2 b_1) + A_{c2} (2 \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_2 b_1)] \sin(\theta_2 n + \theta_2). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Igualando-se $b_2 = -2 \cos(\theta_2)$, pode-se reescrever s_{θ_2} , como:

$$\begin{aligned} s_{\theta_2} = & [A_{c2} (-b_2 \cos \theta_2 + b_1 \cos \theta_2) + A_{s2} (b_2 \sin \theta_2 - b_1 \sin \theta_2)] \cos(\theta_2 n + \theta_2) + \\ & [A_{s2} (-b_2 \cos \theta_2 + b_1 \cos \theta_2) + A_{c2} (-b_2 \sin \theta_2 + b_1 \sin \theta_2)] \sin(\theta_2 n + \theta_2), \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

e com alguns reagrupamentos:

$$\begin{aligned} s_{\theta_2} = & (A_{c1} \cos \theta_2 - A_{s2} \sin \theta_2) (b_1 - b_2) \cos(\theta_2 n + \theta_2) \\ & (A_{s2} \cos \theta_2 - A_{c2} \sin \theta_2) (b_1 - b_2) \sin(\theta_2 n + \theta_2), \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Novamente utilizando as relações (B.6), finalmente obtém-se:

$$s_{\theta_2} = (b_1 - b_2) (A_{c2} \cos \theta_2 n + A_{s2} \sin \theta_2 n). \quad (\text{B.13})$$

e então y_2 que é a soma de s_{θ_2} e s_{θ_1} , vale:

$$y_2[n] = (b_1 - b_2) (A_{c2} \cos \theta_2 n + A_{s2} \sin \theta_2 n). \quad (\text{B.14})$$

A equação (B.13) mostra que o efeito do processamento descrito em (B.2), no componente de frequência ω_2 , é simplesmente um escalonamento realizado pelo fator $(b_1 - b_2)$.

Se o sinal analisado fosse composto pela soma de três senóides, com $b_3 = -2\cos\theta_3$ e $\theta_3 = \omega_3\Delta T$, depois da aplicação de (B.2), o efeito do processamento realizado em (B.2) no componente de frequência ω_3 seria o mesmo e o sinal resultante resultante y_2 seria descrito por:

$$y_2[n] = (b_1 - b_2) (A_{c2} \cos \theta_2 n + A_{s2} \sin \theta_2 n) + (b_1 - b_2) (A_{c3} \cos \theta_3 n + A_{s3} \sin \theta_3 n) \quad (\text{B.15})$$

Se o sinal descrito acima for processado por:

$$y_3[n] = y_2[n - 1] + b_3 y_2[n] + y_2[n + 1], \quad (\text{B.16})$$

o componente de frequência ω_3 do sinal resultante y_3 é removido e o componte de frequência ω_2 é multiplicado pelo fator $(b_3 - b_2)$. Isso ocorre porque na dedução da equação (B.17), não se faz nenhuma restrição para amplitudes A_{c1} e A_{c2} . Desse modo o sinal resultante y_3 é descrito por:

$$y_3[n] = (b_1 - b_2) (b_3 - b_2) (A_{c2} \cos \theta_2 n + A_{s2} \sin \theta_2 n). \quad (\text{B.17})$$

O mesmo raciocínio pode ser aplicado a um sinal composto por p senóides. Se ele for processado através de:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= y[n], & n &= 1, 2, \dots, N, \\ y_2[n] &= y_1[n - 1] + b_1 y_1[n] + y_1[n + 1], & n &= 2, \dots, (N - 1), \\ y_3[n] &= y_2[n - 1] + b_2 y_2[n] + y_2[n + 1], & n &= 3, \dots, (N - 2), \\ &\vdots & & \\ y_p[n] &= y_{p-1}[n - 1] + b_{p-1} y_{p-1}[n] + y_{p-1}[n + 1], & n &= p, \dots, (N - p + 1), \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

e se $b_i = -2\cos(\theta_i)$, então, o sinal y_p resultante seria fornecido por:

$$\prod_{k=1, k \neq 2}^p (b_k - b_2) (A_{c2} \cos \theta_2 n + A_{s2} \sin \theta_2 n) \quad (\text{B.19})$$

Se o sinal $y[n]$ fosse processado através de:

$$\begin{aligned}
 y_1[n] &= y[n], & n &= 1, 2, \dots, N, \\
 y_2[n] &= y_1[n-1] + b_2 y_1[n] + y_1[n+1], & n &= 2, \dots, (N-1), \\
 y_3[n] &= y_2[n-1] + b_3 y_2[n] + y_2[n+1], & n &= 3, \dots, (N-2), \\
 &\vdots \\
 y_p[n] &= y_{p-1}[n-1] + b_p y_{p-1}[n] + y_{p-1}[n+1], & n &= p, \dots, (N-p+1), \quad (\text{B.20})
 \end{aligned}$$

o sinal resultante seria fornecido por:

$$\prod_{k=2}^p (b_k - b_1) (A_{c1} \cos \theta_1 n + A_{s1} \sin \theta_1 n) \quad (\text{B.21})$$

DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DE SINAIS ALEATÓRIOS

Qualquer sinal que representa um processo físico pode ser classificado como determinístico ou aleatório. Sinais determinísticos são aqueles que podem ser descritos por uma relação matemática explícita, como, por exemplo um função cossenoidal ou uma exponencial. A relação matemática determina de maneira exata o valor que a função toma em um determinado instante. Apesar de existirem muitos processos físicos que podem ser representados de uma maneira determinística, alguns fenômenos são muito complexos para serem descritos desse modo. Os ruídos e imprecisões inerentes a uma medição são exemplos de processos aleatórios. Não há possibilidade de prever com exatidão o valor da amplitude de um ruído em um tempo futuro. O processo, então, deve ser caracterizado em termos probabilísticos. Por isso a definição de probabilidade é fundamental. Considere um evento A , pertencente a um conjunto discreto e finito de valores que uma variável pode tomar em um determinado experimento. A probabilidade associada ao evento A é definida como:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(A)_n}{n}, \quad (\text{C.1})$$

em que n representa o número de vezes que o experimento ocorreu e $N(A)_n$, o número de vezes de ocorrências do evento A . A equação (C.1) expressa a chance de um evento A ocorrer quando se realiza o experimento um única vez. As saídas que o experimento produz são conhecidas como realizações. É importante observar que o evento A pertence a um conjunto discreto de valores. Se não fosse o caso, então a definição de probabilidade da equação (C.1) não se aplicaria ao evento porque a chance de um único evento, pertencente a um conjunto infinito, ocorrer, seria virtualmente nula. A aplicação da equação (C.1) levaria sempre ao resultado zero. Quando se está considerando conjuntos infinitos o conceito de função densidade de probabilidade é o mais adequado. Ao invés de se tratar com um único evento deve-se considerar um intervalo contínuo

de eventos. O que se procura determinar aqui, é a chance de uma realização pertencer a um intervalo de eventos. Formalmente a função densidade de probabilidade é definida como uma função que possui as seguintes características básicas:

1. $f_X(\nu)$ é uma função não negativa.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(\nu) d\nu = 1$.

Nas premissas acima, ν representa os valores que a saída do experimento pode tomar. O subscrito X é a denominação da saída do experimento. Um dos tipos mais importantes de densidade de probabilidade é a curva gaussiana ou normal, fornecida pela seguinte equação:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m_\nu)^2} \quad (\text{C.2})$$

em que σ e m_ν são o desvio padrão e a esperança da variável da variável aleatória X . Esses dois parâmetros serão definidos no próximo parágrafo. A equação (C.2) gera uma curva mostrada na Figura (C.1) para valores de σ e m_ν de 0.8 e 0 respectivamente. A área preenchida com retângulos representa a probabilidade ou chance de uma realização fornecer um valor de ν entre -1 e 1.

A esperança $E(X)$ de uma variável aleatória X é definida por:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X x dx. \quad (\text{C.3})$$

Para o caso em que a variável aleatória é discreta, a esperança é obtida por:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i. \quad (\text{C.4})$$

Na equação (C.4) p_i representa a probabilidade da realização resultar x_i e é conhecida como *função de probabilidade*. O índice i varia entre 1 e n pois existem n possibilidades de realização para a variável X . A esperança também é conhecida como momento de primeira ordem ou média.

A variância é definida por:

$$\sigma^2 = E [(X - E(X))^2]. \quad (\text{C.5})$$

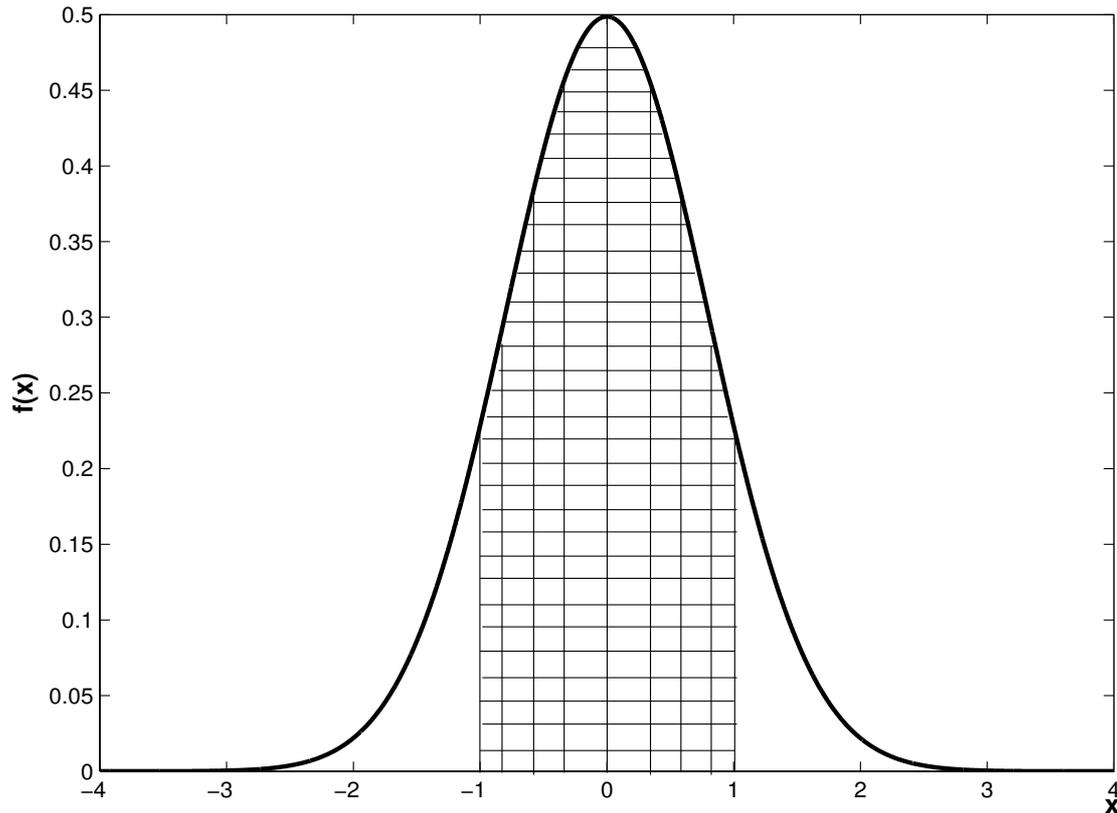


Figura C.1. Função densidade de probabilidade gaussiana.

Qualitativamente a variância pode ser compreendida como a dispersão de uma variável aleatória em relação a sua esperança. Outro conceito fundamental é o da *independência* entre variáveis. Novamente em termos qualitativos dois eventos são ditos independentes se a ocorrência de um não afeta a probabilidade do outro. Formalmente, eventos A e B são ditos independentes se, e somente se:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (\text{C.6})$$

Na equação (C.6), afirma-se que a probabilidade de ocorrência dos eventos A e B é igual ao produto das probabilidades de cada evento separadamente. Um processo estocástico é um sinal que em cada instante de tempo toma valores aleatórios. Portanto, para cada instante está associada uma variável aleatória com uma função densidade de probabilidade relacionada a esta variável. Para se aferir as propriedades estatísticas do sinal, obviamente é necessário considerar todos os instantes de tempo em que ele é definido. Para isso, é útil o conceito de *densidade de probabilidade conjunta*. Se, por exemplo, considera-se duas variáveis, $x(t_1)$ e $x(t_2)$ a densidade

de probabilidade conjunta é definida como a função que satisfaz às seguintes condições:

1. $f[x(t_1), x(t_2)]$ é uma função não negativa.

$$2. \int_R \int_R f[x(t_1), x(t_2)] dx(t_1) dx(t_2) = 1$$

Na segunda condição R representa o domínio da função f . A interpretação geométrica da densidade de probabilidade conjunta é mostrada na Figura C.2. O volume coberto pela parte escura do gráfico representa a probabilidade de uma realização do processo estocástico fornecer valores de $x(t_1)$ entre -5 e 5 e de $x(t_2)$ entre 0 e -5. A esperança do produto de duas variáveis

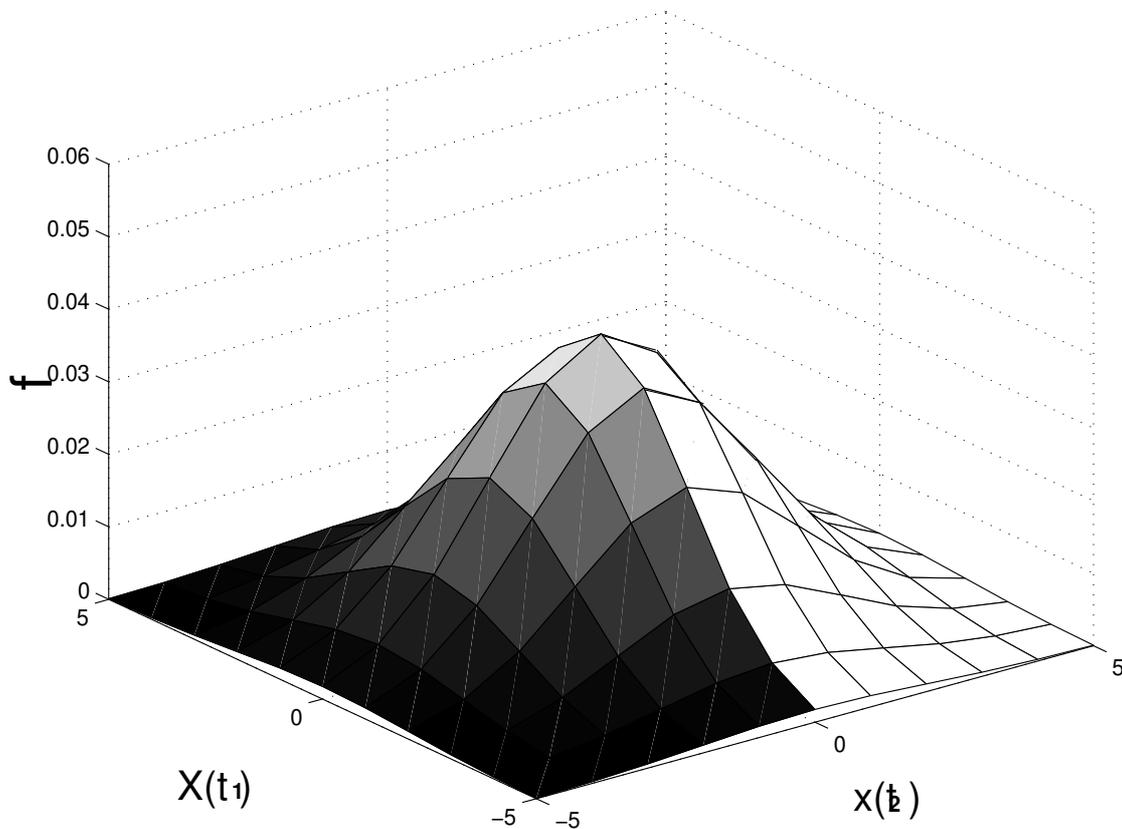


Figura C.2. Função densidade de probabilidade conjunta.

aleatórias é definida por:

$$E(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (C.7)$$

Se X e Y são independentes, a equação (C.7), pode ser reduzida para:

$$E(X, Y) = E(X)E(Y) \quad (C.8)$$

Quando a esperança do produto de duas variáveis aleatórias é igual ao produto das esperanças de cada variável, as variáveis são chamadas de *não correlacionadas*.

Para a completa descrição estatística de um processo estocástico todas as funções densidades de probabilidades e densidades de probabilidades conjuntas devem ser fornecidas. Se, por exemplo, o processo for discreto e contiver 3 eventos (relacionados a três instantes de tempo), em que X_1 representa $X(t_i)$, então o processo será totalmente descrito em termos estatísticos se forem fornecidas as funções de densidade $f_{X_1}, f_{X_1, X_2}, f_{X_1, X_3}, f_{X_2, X_3}, f_{X_1, X_2, X_3}$. Um processo estocástico é dito *estacionário* se as funções densidades de probabilidade são invariantes a uma translação no tempo. E é chamado de *ergótico* se as propriedades estatísticas como esperança e variância puderem ser calculadas por médias temporais.

A função de *auto-correlação* de um processo estocástico é definida como:

$$R_X = E [X(t_1)X(t_2)]. \tag{C.9}$$

Se o processo for estacionário então a auto-correlação só dependerá somente da diferença de tempo $t_2 - t_1$. A auto-covariância de um processo estocástico é definida por:

$$C_X = E [(X(t_1) - \mu_1) (X(t_2) - \mu_2)], \tag{C.10}$$

em que μ_1 e μ_2 são respectivamente as esperanças para o processo nos tempos t_1 e t_2 respectivamente. Se o processo estocástico for estacionário com esperança nula, a auto-correlação e a auto-covariância resultam em valores iguais. São dois conceitos muitos úteis pois dependem somente da densidade de probabilidade de segunda ordem. Ou seja, são conceitos que relacionam duas apenas variáveis. Outro conceito de grande utilidade é a *matriz de auto covariância*. Ela relaciona todos as variáveis de um processo estocásticos. Seja então um processo estocástico composto pelas variáveis aleatórias x_1, x_2, \dots, x_n , em que $x_i = x(t_i)$, então a matriz de covariância C do processo estocástico é definida da seguinte forma:

$$C = \begin{bmatrix} E(x_1 - \mu_1)^2 & E(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) & \cdots & E(x_1 - \mu_1)(x_n - \mu_n) \\ E(x_2 - \mu_2)(x_1 - \mu_1) & E(x_2 - \mu_2)^2 & \cdots & E(x_2 - \mu_2)(x_n - \mu_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(x_n - \mu_n)(x_1 - \mu_1) & E(x_n - \mu_n)(x_2 - \mu_2) & \cdots & E(x_n - \mu_n)^2 \end{bmatrix} \tag{C.11}$$

Para um processo estocástico estacionário com média nula todos os i se anulam. Para este caso uma notação mais compacta para a equação (C.11) é:

$$C = E [x(t_k)x(t_i)], \quad (C.12)$$

para k e $i = 1, 2, \dots, n$. Para o caso em todas as esperanças são nulas, a matriz da equação (C.11) também é conhecida como matriz de auto correlação. Vale salientar que apesar da matriz de auto covariância ser extremamente útil para a caracterização estatística do processo estocástico, ela não é uma descrição completa do mesmo, pois para isso haveria necessidade de considerar funções densidade de probabilidade com ordens variando até o número de variáveis aleatórias do processo em questão. Um processo estocástico é chamado de *seqüência não correlacionada* ou *ruído branco* quando sua matriz de auto covariância é diagonal.