



Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Engenharia Elétrica e Informática

Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica - PPgEE

Tese de Doutorado

**Estabilidade de Sistemas Chaveados Baseados em Objetivo de  
Controle Principal**

Elyson Ádan Nunes Carvalho

Orientadores:

Prof. Dr. Benedito Antonio Luciano

Prof. Dr. Eduardo Oliveira Freire

Campina Grande, Março de 2012



Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Engenharia Elétrica e Informática  
Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica

## **Estabilidade de Sistemas Chaveados Baseados em Objetivo de Controle Principal**

**Elyson Ádan Nunes Carvalho**

Tese de Doutorado apresentada à Coordenação do Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Doutor em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Campina Grande, Março de 2012

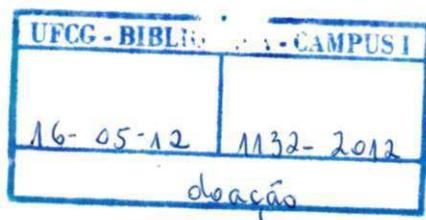
FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

C331e Carvalho, Elyson Ádan Nunes.  
Estabilidade de sistemas chaveados baseados em objetivo de controle principal / Elyson Ádan Nunes Carvalho. - Campina Grande: UFCG, 2012.  
128 f.: il.

Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Engenharia Elétrica e Informática.  
Orientadores: Prof. Dr. Benedito Antonio Luciano e Prof. Dr. Eduardo Oliveira Freire.  
Referências.

1. Sistemas Chaveados. 2. Controle Não-Linear. 3. Estabilidade.  
I. Título.

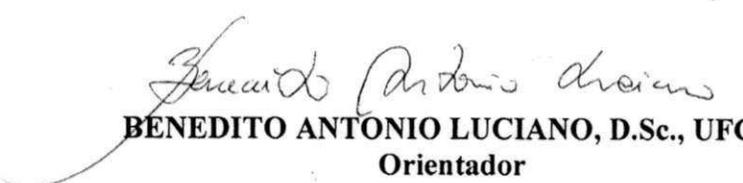
CDU 621.38(043)



**ESTABILIDADE DE SISTEMAS CHAVEADOS BASEADOS EM OBJETIVO DE  
CONTROLE PRINCIPAL**

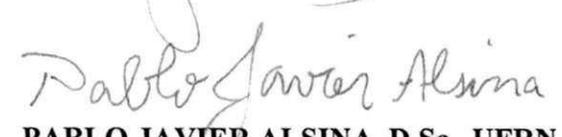
**ELYSON ÁDAN NUNES CARVALHO**

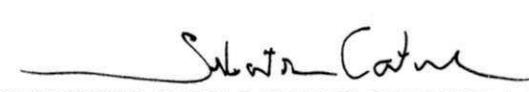
Tese Aprovada em 23.03.2012

  
**BENEDITO ANTONIO LUCIANO, D.Sc., UFCG**  
Orientador

  
**EDUARDO OLIVEIRA FREIRE, Dr., UFS**  
Orientador

  
**GEOVANY ARAÚJO BORGES, Dr., UNB**  
Componente da Banca

  
**PABLO JAVIER ALSINA, D.Sc., UFRN**  
Componente da Banca

  
**SEBASTIAN YURI CAVALCANTI CATUNDA, D.Sc., UFRN**  
Componente da Banca

  
**RAIMUNDO CARLOS SILVÉRIO FREIRE, Dr., UFCG**  
Componente da Banca

**CAMPINA GRANDE – PB  
MARÇO - 2012**

*“Tudo começou com meus avós,  
aos quais dedico este trabalho”*

## Agradecimentos

---

Em primeiro lugar gostaria de agradecer à sociedade brasileira, visto que esse trabalho e muito do que aprendi foi financiado pela mesma. Minha graduação, mestrado e doutorado foram realizados em universidade pública, sendo que em todos estes recebi bolsa de estudos e auxílios. Dessa forma, registro o meu agradecimento pelo investimento que a sociedade fez em mim e espero retribuí-lo como pesquisador.

Agradeço muito a minha família pelo apoio e incentivo na minha árdua e prazerosa busca pela carreira acadêmica. Em meus pais, Luiz e Sandra, sempre tive o espelho da verdade, honestidade e inteligência. Foi os admirando que consegui sonhar mais longe e perceber que a conclusão da graduação era só o começo. Em meus irmãos, Eric, Elker e Louise tive todo o carinho e companheirismo que precisava para seguir em frente. Com tantos exemplos do meu lado, todo o sonho ficou mais fácil e concreto.

Agradeço também a Taís, minha noiva, por todo amor e paciência a mim dedicados e por ter acreditado e ficado ao meu lado até quando nem eu acreditava. Suas palavras de incentivo e todo seu amor foram meu farol nessa jornada. Agradeço também aos meus sogros, Antônio e Rita, pelo incentivo e por acreditar tanto no meu trabalho.

Não poderia deixar de agradecer aos meus orientadores, Benedito Antonio Luciano e Eduardo Oliveira Freire, pois sem suas orientações esse trabalho não teria sido realizado na forma que se encontra. Dos meus orientadores sempre recebi mais do que orientações acadêmicas, recebi exemplos e conselhos para a vida.

Agradeço ao grande amigo e irmão Lucas Molina, cuja parte desse trabalho e de todas as minhas conquistas acadêmicas devo lhe atribuir.

Esse trabalho foi realizado a várias mãos, muitas das quais já foram citadas, mas ainda devo agradecer a: Raimundo Freire, Jugurta Montalvão, Jânio Canuto, Ricardo Carelli e Celso de La Cruz, pela ajuda, paciência e apoio empregados neste trabalho.

Por fim, agradeço a todos os meus primos e aos amigos Christiane, Marta, Silvana, Camila, Getulio, Marcelli, Alex, Clarissa, Diego, Gabriela, Samantha e Kelly por todo o apoio. E, é claro, a Salete e Everton, cujo café e piadas tiveram grande influência neste trabalho.

## Resumo

---

Atualmente, verifica-se um interesse crescente de grupos de pesquisa pelos sistemas híbridos, em particular no que diz respeito aos sistemas chaveados. Diante da necessidade de se desenvolver ferramentas que possam auxiliar os trabalhos nessa área, principalmente na análise de estabilidade, nesta tese de doutorado é proposto um novo campo de análise de estabilidade de sistemas chaveados baseado na determinação de um objetivo principal do sistema. Baseado nesta proposta, existe a possibilidade de que os subsistemas tenham pontos de equilíbrio diferentes, ou até que alguns deles sejam instáveis. De acordo com esta abordagem, apenas o subsistema principal precisa ser globalmente assintoticamente estável. No entanto, ao ser realizado o chaveamento, a estabilidade de Lyapunov muitas vezes não se aplica, visto que, para os sistemas chaveados, a norma das variáveis de estado do sistema pode crescer temporariamente. Assim, uma alternativa à estabilidade de Lyapunov é a estabilidade prática, voltada às aplicações, que está baseada em uma abordagem mais quantitativa. Neste contexto, são abordados os sistemas *quasi*-estáveis, nos quais as condições da estabilidade de Lyapunov são atendidas após um tempo  $\tau$ . Para tanto, nesta tese são propostas uma definição de *quasi*-estável e duas proposições com condições suficientes do tipo Lyapunov para este tipo de estabilidade. Adicionalmente, são apresentadas neste trabalho três proposições, que devem auxiliar na análise de estabilidade de um número significativo de sistemas que apresentem essa característica de objetivo de controle principal, ainda que no caso de controle chaveado não-linear. As contribuições deste trabalho são ilustradas mediante a apresentação de simulações e resultados experimentais. Tais resultados abrangem a área de controle de processos químicos e navegação de robôs móveis.

**Palavras-chave:** sistemas chaveados; sistemas híbridos; controle não-linear; *quasi*-estabilidade; estabilidade prática; estabilidade de Lyapunov.

## Abstract

---

Nowadays, a growing interest of research groups for hybrid systems can be seen, especially for the switched systems. Due to the need to develop tools that can assist the work in this area, mainly in sense of the stability analysis, in this PhD thesis is proposed a new field of stability analysis of switched systems based on the choice of a main objective for the system. As a result of this proposal, there is the possibility that subsystems may have different points of equilibrium, or even some of them can be unstable. According to this approach, only the main subsystem needs to be globally asymptotically stable. However, when the switching is performed, the Lyapunov stability is often inappropriate, since the norm of state variables may temporarily grow for the switched systems. Thus, an alternative to Lyapunov stability is the practical stability, focused to applications, which is based on a quantitative approach. In this context, this work addresses the quasi-stable systems, which are systems that met the Lyapunov condition after a time  $\tau$ . In this way, this PhD thesis proposes a definition of quasi-stable and two propositions with sufficient conditions for this kind of stability. Additionally, in this work, three propositions are presented, which should help in the stability analysis of a significant number of systems with the main control objective characteristic, including the case of nonlinear switched control. The contributions of this work are illustrated by the presentation of simulations and experimental results. These results cover the control of chemical processes and mobile robot navigation areas.

**Keywords:** switched systems; hybrid systems; nonlinear control; quasi-stability; practical stability; Lyapunov stability.

# Índice

---

<b>CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>CAPÍTULO 2: ESCOPO E OBJETIVOS DO TRABALHO</b>	<b>23</b>
2.1. DEFINIÇÃO DO ESCOPO	23
2.2. OBJETIVO GERAL	23
2.3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	24
<b>CAPÍTULO 3: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>25</b>
3.1. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DE UM SISTEMA CHAVEADO	31
3.2. FUNÇÃO COMUM DE LYAPUNOV	32
3.3. TEMPO DE PERMANÊNCIA ( <i>DWELL TIME</i> )	34
3.4. TEMPO DE PERMANÊNCIA MÉDIO ( <i>AVERAGE DWELL TIME</i> )	35
3.5. FUNÇÕES MÚLTIPLAS DE LYAPUNOV	37
<b>CAPÍTULO 4: PROPOSIÇÕES E PROVAS</b>	<b>41</b>
4.1. SISTEMAS <i>QUASI</i> -ESTÁVEIS	41
4.2. SISTEMAS CHAVEADOS BASEADOS EM OBJETIVO DE CONTROLE PRINCIPAL	50
<b>CAPÍTULO 5: RESULTADOS</b>	<b>61</b>
5.1. CHAVEAMENTOS ADOTADOS	61
5.1.1. CHAVEAMENTO RÁPIDO	61
5.1.2. CHAVEAMENTO LENTO	62
5.2. EXPERIMENTO EM CONTROLE DE PROCESSOS QUÍMICOS	63
5.3. EXPERIMENTOS EM NAVEGAÇÃO DE ROBÔS MÓVEIS	71
5.3.1. CONTROLADORES	71
5.3.2. EXPERIMENTO 1	76
5.3.3. EXPERIMENTO 2	80
5.3.4. EXPERIMENTO 3	84
5.3.5. EXPERIMENTO 4	85
5.3.6. EXPERIMENTO 5	87
5.3.7. EXPERIMENTO 6	90
5.3.8. EXPERIMENTO 7	93
5.3.9. EXPERIMENTO 8	96
<b>CAPÍTULO 6: CONCLUSÕES</b>	<b>107</b>
6.1. CONTRIBUIÇÕES	108
6.2. TRABALHOS FUTUROS	109
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>112</b>

## Lista de Figuras

---

<i>Figura 1. Exemplo de um sistema de controle chaveado.</i>	12
<i>Figura 2. (a) (b) Exemplos de espaço de estados de sistemas assintoticamente estáveis; (c) espaço de estados de um sistema assintoticamente estável obtido a partir do chaveamento de (a) e (b); (d) espaço de estados de um sistema instável obtido a partir do chaveamento de (a) e (b). (adaptada de [1])</i>	15
<i>Figura 3. (a) (b) Exemplos de espaço de estados de sistemas instáveis; (c) espaço de estados de um sistema assintoticamente estável obtido a partir do chaveamento de (a) e (b). (adaptada de [1])</i>	16
<i>Figura 4. Classificação proposta para os problemas básicos encontrados na análise de estabilidade de sistemas de controle chaveados.</i>	19
<i>Figura 5. Exemplo de trajetórias das variáveis de estados de sistemas que tendem à origem e não são estáveis segundo a definição de Lyapunov: (a) sistemas com distúrbios externos; (b) sistemas perturbados; (c) sistemas chaveados.</i>	19
<i>Figura 6. Exemplo do comportamento das funções de Lyapunov em um chaveamento lento assintoticamente estável de dois subsistemas [1].</i>	34
<i>Figura 7. Comportamento das funções de Lyapunov em um erro comum no chaveamento baseado em Funções Múltiplas de Lyapunov, no qual as funções <math>V_{\sigma(t)}(t)</math> são chaveadas para valores decrescentes, porém o sistema não tende para a origem.</i>	38
<i>Figura 8. Exemplo de chaveamento estável baseado em Funções Múltiplas de Lyapunov [71].</i>	38
<i>Figura 9. Exemplo de chaveamento estável menos restritivo baseado em Funções Múltiplas de Lyapunov [71].</i>	39
<i>Figura 10. Bolas <math>B_r</math> e <math>B_k</math>.</i>	45
<i>Figura 11. Exemplo de função <math>V[x(t)]</math> de um sistema de chaveado que atende às proposições 1 e 2.</i>	48
<i>Figura 12. Exemplo de função <math>V(x)</math>, invariante no tempo e que atende as proposições apresentadas.</i>	50
<i>Figura 13. Notação adotada para <math>V_I(x)</math>, sendo <math>V_{I_{fp}}</math> (<math>\sigma = 1</math>) representado pela linha contínua e <math>V_{I_{fs}}</math> (<math>\sigma = \{2;3\}</math>) pela linha tracejada.</i>	53
<i>Figura 14. Quando <math>\ x(t)\  \geq \alpha</math>, a derivada de <math>V_{I_{fp}}</math> (linha contínua) é sempre menor do que zero.</i>	54
<i>Figura 15. Reator químico com misturador e serpentina de aquecimento utilizado para o controle chaveado de nível (principal) e temperatura.</i>	64
<i>Figura 16. Nível controlado, sem chaveamento, para o reator químico considerado.</i>	67

<i>Figura 17. Evolução da temperatura do interior do tanque, considerando apenas o controlador de nível.</i>	67
<i>Figura 18. Ação de controle aplicada ao sistema.</i>	68
<i>Figura 19. Função SSLF para obtida no experimento.</i>	68
<i>Figura 20. Nível controlado, a partir do chaveamento lento entre o controlador de nível (principal) e o controlador de temperatura, para o reator químico considerado.</i>	69
<i>Figura 21. Evolução da temperatura obtida a partir do chaveamento lento entre o controlador de nível (principal) e o controlador de temperatura.</i>	69
<i>Figura 22. Ações de controle do sistema chaveado, <math>W_i</math>, do controlador de temperatura, <math>W_{it}</math>, e do controlador de nível, <math>W_{ih}</math>.</i>	70
<i>Figura 23. Função SSLF obtida com o chaveamento.</i>	70
<i>Figura 24. Variáveis e eixos de coordenadas relativos ao controlador de posição final [149].</i>	72
<i>Figura 25. Ilustração no ambiente das principais variáveis do controlador de evitar obstáculos.</i>	74
<i>Figura 26. Ilustração no ambiente das principais variáveis do controlador de seguir corredores [149].</i>	75
<i>Figura 27. Trajetória realizada para um chaveamento, que atende à proposição 4, entre os controladores de posição final (principal) e de evitar obstáculos.</i>	76
<i>Figura 28. Velocidades comandadas para o experimento mostrado na Figura 27.</i>	77
<i>Figura 29. Função SSLF do experimento mostrado na Figura 27.</i>	77
<i>Figura 30. Trajetória realizada para um ambiente com vários obstáculos, considerando um chaveamento, que atende à proposição 4, entre os controladores de posição final (principal) e de evitar obstáculos.</i>	78
<i>Figura 31. Velocidades comandadas para o experimento mostrado na Figura 30.</i>	79
<i>Figura 32. Função SSLF do experimento mostrado na Figura 30.</i>	79
<i>Figura 33. Trajetória realizada para o primeiro ambiente, considerando um chaveamento, que atende à proposição 5, entre os controladores de posição final (principal) e de evitar obstáculos.</i>	80
<i>Figura 34. Velocidades comandadas para o experimento mostrado na Figura 33.</i>	81
<i>Figura 35. Função SSLF do experimento mostrado na Figura 33.</i>	81
<i>Figura 36. Trajetória realizada para um ambiente com vários obstáculos, considerando um chaveamento, que atende à proposição 5, entre os controladores de posição final (principal) e de evitar obstáculos.</i>	82
<i>Figura 37. Velocidades comandadas para o experimento mostrado na Figura 36.</i>	83
<i>Figura 38. Função SSLF do experimento mostrado na Figura 36.</i>	83

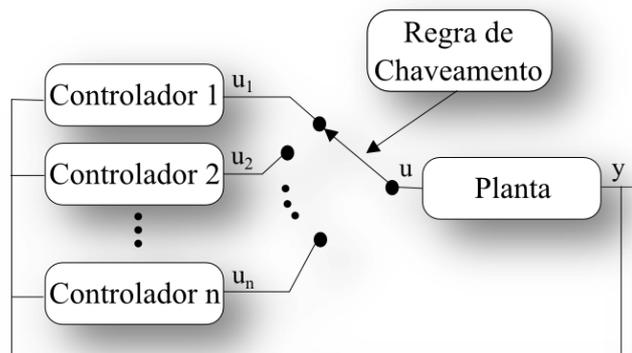
<i>Figura 39. Trajetória realizada em um ambiente com corredor, considerando um chaveamento, que atende à proposição 4, entre os controladores de posição final (principal) e seguir corredores.</i>	84
<i>Figura 40. Velocidades comandadas para o experimento mostrado na Figura 39.</i>	85
<i>Figura 41. Função SSLF do experimento mostrado na Figura 39.</i>	85
<i>Figura 42. Trajetória realizada em um ambiente com corredor, considerando um chaveamento, que atende à proposição 5, entre os controladores de posição final (principal) e seguir corredores.</i>	86
<i>Figura 43. Velocidades comandadas para o experimento mostrado na Figura 42.</i>	86
<i>Figura 44. Função SSLF do experimento mostrado na Figura 42.</i>	87
<i>Figura 45. Trajetória realizada para um ambiente com corredores e obstáculos, considerando um chaveamento rápido, que atende à proposição 4, entre os controladores de posição final (principal), seguir corredores e evitar obstáculos.</i>	88
<i>Figura 46. Velocidades comandadas para o experimento em ambiente com corredor e obstáculos, considerando o chaveamento rápido dos controladores.</i>	89
<i>Figura 47. Função SSLF obtida com o experimento 5.</i>	89
<i>Figura 48. Chaveamento realizado durante o experimento 5. A posição da chave para o controlador de posição final é 0, enquanto que para o controlador de evitar obstáculos é 1 e para o controlador de seguir corredores é 2.</i>	90
<i>Figura 49. Chaveamento realizado entre os tempos 57 s e 62 s do experimento 5. A posição da chave para o controlador de posição final é 0, enquanto que para o controlador de evitar obstáculos é 1 e para o controlador de seguir corredores é 2.</i>	90
<i>Figura 50. Trajetória realizada para um ambiente com corredores e obstáculos, considerando um chaveamento lento, que atende à proposição 5, entre os controladores de posição final (principal), seguir corredores e evitar obstáculos.</i>	91
<i>Figura 51. Velocidades comandadas para o experimento em ambiente com corredor e obstáculos, considerando o chaveamento lento dos controladores.</i>	92
<i>Figura 52. Função SSLF obtida com o experimento 6.</i>	92
<i>Figura 53. Chaveamento realizado durante o experimento 6. A posição da chave para o controlador de posição final é 0, enquanto que para o controlador de evitar obstáculos é 1 e para o controlador de seguir corredores é 2.</i>	93
<i>Figura 54. Chaveamento realizado entre 90 s e 95 s no experimento 6. A posição da chave para o controlador de posição final é 0, enquanto que para o controlador de evitar obstáculos é 1 e para o controlador de seguir corredores é 2.</i>	93
<i>Figura 55. Colisão do robô devido às limitações do chaveamento rápido.</i>	94

<i>Figura 56. Trajetória realizada para um ambiente em “U”, considerando um chaveamento lento, que atende à proposição 5, entre os controladores de posição final (principal) e evitar obstáculos.</i>	95
<i>Figura 57. Velocidades comandadas para o chaveamento lento descrito no experimento 2.</i>	95
<i>Figura 58. Função SSLF obtida para o chaveado lento supracitado.</i>	96
<i>Figura 59. Ambiente 1 considerado nos experimentos reais.</i>	97
<i>Figura 60. Ambiente 2 considerado nos experimentos reais</i>	97
<i>Figura 61. Ambiente 1 e trajetória do robô reconstruídos a partir dos dados sensoriais do experimento real com chaveamento rápido dos controladores de posição final (principal) e de evitar obstáculos.</i>	98
<i>Figura 62. Velocidades comandas no experimento real de chaveamento rápido para o ambiente 1.</i>	99
<i>Figura 63. Função SSLF obtida no experimento real de chaveamento rápido para o ambiente 1.</i>	99
<i>Figura 64. Ambiente 1 e trajetória do robô reconstruídos a partir dos dados sensoriais do experimento real com chaveamento lento dos controladores de posição final (principal) e de evitar obstáculos.</i>	100
<i>Figura 65. Velocidades comandas no experimento real de chaveamento lento para o ambiente 1.</i>	101
<i>Figura 66. Função SSLF obtida no experimento real de chaveamento lento para o ambiente 1.</i>	101
<i>Figura 67. Ambiente 2 e trajetória do robô reconstruídos a partir dos dados sensoriais do experimento real com chaveamento rápido dos controladores de posição final (principal) e de evitar obstáculos.</i>	102
<i>Figura 68. Velocidades comandas no experimento real de chaveamento rápido para o ambiente 2.</i>	103
<i>Figura 69. Função SSLF obtida no experimento real de chaveamento rápido para o ambiente 2.</i>	103
<i>Figura 70. Ambiente 2 e trajetória do robô reconstruídos a partir dos dados sensoriais do experimento real com chaveamento lento dos controladores de posição final (principal) e de evitar obstáculos.</i>	104
<i>Figura 71. Velocidades comandas no experimento real de chaveamento lento para o ambiente 2.</i>	105
<i>Figura 72. Função SSLF obtida no experimento real de chaveamento lento para o ambiente 2.</i>	105

# Capítulo 1: Introdução

---

De acordo com [1], um sistema chaveado pode ser definido como um sistema dinâmico híbrido consistindo de uma família de subsistemas contínuos no tempo e uma regra de chaveamento entre eles. O termo “híbrido” é comumente encontrado em diversas áreas com significados diferentes, como em [2-4], cujo termo representa a interação entre dinâmicas contínuas e discretas, enquanto que, para robótica móvel o mesmo termo pode ser aplicado para sistemas com características de reação e deliberação [5]. Neste trabalho o termo “híbrido” é empregado como apresentado em [6], que define um sistema híbrido como um conjunto de processos contínuos ou discretos no tempo agregados com alguma lógica ou processo de tomada de decisão. Aqui é acrescentado nesta definição que cada processo deverá ser diferente dos demais. Um exemplo de sistema de controle chaveado com  $n$  controladores é ilustrado na Figura 1.



**Figura 1. Exemplo de um sistema de controle chaveado.**

A teoria de sistemas híbridos é uma área de pesquisa bem estabelecida, com contribuições de várias comunidades de pesquisa, como engenharias, matemática e ciência da computação [7], contando com muitas aplicações práticas na área de

chaveamento de controladores, presentes há alguns anos no mercado, a destacar: (i) controle de sistemas mecânicos [8]; (ii) indústria automotiva [9]; (iii) indústria aeronáutica [10, 11]; (iv) controle de tráfego [12, 13], com destaque para o tráfego aéreo [14, 15]; (v) sistemas de potência [16, 17]; (vi) redes de distribuição elétrica [18]; (vii) navegação de robôs móveis [19]; (viii) controle adaptativo chaveado [19, 20].

Aliado à grande evolução na área de sistemas chaveados, observada por muitos pesquisadores, pode-se perceber um crescimento significativo de aplicações de sistemas chaveados na área de controle [1], principalmente no contexto adaptativo [20] e de análise de estabilidade [21], dando origem ao nicho de pesquisa de sistemas de controle chaveados, amplamente explorado em pesquisas científicas e frequentemente tema de seções de congressos e artigos convidados, evidenciando a abrangência dessa linha de pesquisa. Um exemplo disto pode ser verificado na revista *Automatica*, Volume 47, *Issue 1*, de janeiro de 2011, na qual mais de 25% dos artigos publicados se referem a algum tipo de chaveamento entre controladores.

Apesar de os sistemas chaveados, na maneira como são apresentados hoje, constituírem uma área de pesquisa relativamente recente, vários sistemas de controle já apresentavam algum tipo de chaveamento entre seus controladores, dentre os quais se destaca o controle por modos deslizantes [22], que muitas vezes não é enquadrado na área de sistemas de controle chaveados, porém é frequentemente aplicado combinado com técnicas dessa área, como em [23-27]. Outros exemplos de sistemas concebidos anteriormente aos sistemas chaveados, mas que apresentam algum tipo de chaveamento em suas estruturas, são os sistemas sob influência de distúrbios [28, 29], saltos Markovianos [30, 31], sistemas baseados em modos de controle [32] e sistemas impulsivos [33, 34].

Muitos são os fatores que influenciaram a evolução rápida da área de sistemas de controle chaveados. Dentre eles, destaca-se a redução da complexidade do projeto ou modelagem de sistemas. Isso se dá porque geralmente problemas complexos são mais facilmente resolvidos quando decompostos em problemas menores. Dessa forma, um sistema de controle complexo pode ser substituído por alguns subsistemas mais simples e uma regra de chaveamento que determina a escolha do subsistema mais adequado em cada momento.

Outro fator, também importante, para a evolução da área de sistemas chaveados advém da constatação que muitos sistemas encontrados na prática exibem um chaveamento entre vários subsistemas, que são dependentes de muitos fatores ambientais. Exemplos destes sistemas são apresentados em [35, 36]. Sendo assim, conforme a definição supracitada, sua análise e projeto podem ser obtidos por meio do uso de ferramentas desenvolvidas para os sistemas chaveados.

Além disso, diferente dos casos em que o uso de sistemas de controle chaveados é escolha do projetista, alguns sistemas não podem ser assintoticamente estabilizados por uma única lei de controle realimentada continuamente. Um exemplo desses sistemas é apresentado em [37], onde é demonstrado matematicamente que existem sistemas que só podem ser assintoticamente estabilizados mediante o emprego de sistemas híbridos.

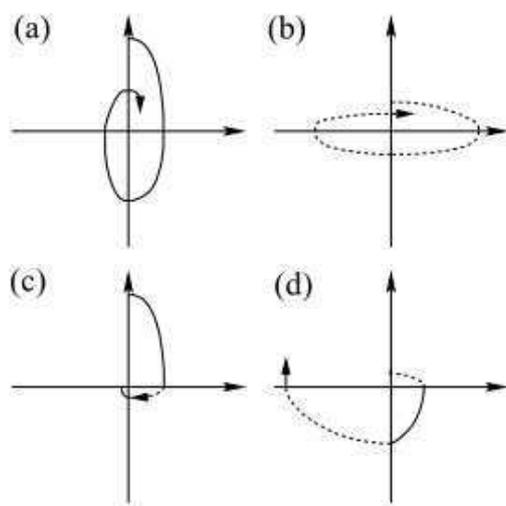
Em comparação com os sistemas híbridos que tem como ferramenta de agregação dos subsistemas a fusão de dados, técnica amplamente utilizada em controle, principalmente no contexto da robótica com os filtros de Kalman e suas variações, os sistemas chaveados de controle possuem como principais vantagens a facilidade de implementação e geralmente uma maior facilidade na análise da estabilidade do sistema. Essa última vantagem é ainda mais evidenciada quando é feito uso de subsistemas instáveis ou com pontos de equilíbrio diferentes. Na maioria dos casos, mesmo cada subsistema sendo globalmente assintoticamente estável, existe apenas evidências experimentais que o sistema é assintoticamente estável, não sendo possível garantir tal estabilidade do mesmo.

Entretanto, o desempenho dos sistemas que fazem uso de técnicas de fusão é normalmente superior em relação ao desempenho dos sistemas chaveados, uma vez que a fusão normalmente leva a uma trajetória mais suave das variáveis de estado, quando comparado com o chaveamento. Vale ressaltar que, geralmente, quanto maior for a frequência do chaveamento, o desempenho desse sistema tende ao mesmo desempenho da fusão. Exemplos de aplicações do Filtro de Kalman e suas variações (Filtro de Informação e  $\alpha$ - $\beta$ ) no contexto da robótica podem ser encontrados em [38-46].

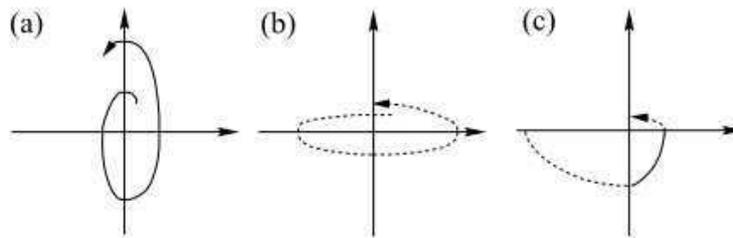
Verifica-se, facilmente, que as contribuições oriundas da área de sistemas de controle chaveados são importantes. Entretanto, o desempenho de um sistema chaveado pode ser muito influenciado pela escolha dessa regra de chaveamento, bem como pelo

projeto de cada subsistema. Nesse contexto, é necessário o desenvolvimento de ferramentas que auxiliem na avaliação desse tipo de sistema, como análise de estabilidade [1, 21], controlabilidade [47, 48] e observabilidade [21]. O grande avanço dessa área é representado, em grande parte, pelo significativo desenvolvimento dessas ferramentas, com grande destaque para a análise de estabilidade.

O grande foco das comunidades de pesquisa de sistemas de controle chaveados na análise da estabilidade advém da grande influência que a regra de chaveamento pode exercer sobre o sistema, podendo ser citados dois exemplos: (i) um sistema formado apenas por subsistemas globalmente assintoticamente estáveis pode se tornar instável a depender da regra de chaveamento empregada, mesmo no caso em que todos os subsistemas tenham o mesmo ponto de equilíbrio, sendo um exemplo desse tipo de sistema apresentado na Figura 2; (ii) um sistema chaveado formado apenas por subsistemas instáveis pode se tornar globalmente assintoticamente estável a depender de cada subsistema e da regra de chaveamento aplicada, sendo que nesse caso o chaveamento é conhecido como estabilizante, e um exemplo desse tipo de sistema é apresentado na Figura 3.



**Figura 2. (a) (b) Exemplos de espaço de estados de sistemas assintoticamente estáveis; (c) espaço de estados de um sistema assintoticamente estável obtido a partir do chaveamento de (a) e (b); (d) espaço de estados de um sistema instável obtido a partir do chaveamento de (a) e (b). (adaptada de [1])**



**Figura 3. (a) (b) Exemplos de espaço de estados de sistemas instáveis; (c) espaço de estados de um sistema assintoticamente estável obtido a partir do chaveamento de (a) e (b). (adaptada de [1])**

Segundo [1], os problemas básicos de estabilidade e projeto de sistemas chaveados podem ser divididos em três categorias:

- Estabilidade de sistemas com chaveamento arbitrário;
- Estabilidade de sistemas para classes de funções de chaveamento;
- Construção de sequências de chaveamento estabilizantes;

Cada uma dessas categorias é melhor abordada na sequência do texto, e suas principais características e estado da arte na área são apresentados.

A idéia básica da estabilidade de sistemas com chaveamento arbitrário consiste em encontrar condições que garantam que o sistema chaveado é assintoticamente estável para qualquer função de chaveamento. Nesse caso, um sistema poderá ser composto de vários subsistemas cujas funções são projetadas para atender diferentes aspectos, e o chaveamento entre eles pode ser aplicado, dentro de certas restrições, sem o risco de tornar o sistema instável.

Nessa linha de pesquisa todos os subsistemas devem ser assintoticamente estáveis e possuir o mesmo ponto de equilíbrio, no entanto, como já citado, essa condição não é suficiente para garantir a estabilidade do sistema. Na maioria dos trabalhos encontrados até o momento o chaveamento precisa ser lento (frequência baixa) devido aos efeitos transitórios do chaveamento. Dessa forma, os esforços de diversos grupos de pesquisa são concentrados na elaboração de sistemas rápidos ou independentes da frequência de chaveamento. A principal técnica encontrada nessa área consiste em encontrar uma função de Lyapunov comum a todos os subsistemas, o que na maioria dos casos só é possível quando todos os subsistemas são lineares, restringindo as possibilidades de aplicação, embora haja trabalhos com essa teoria para sistemas não-lineares [49] e que

não usam as funções comuns de Lyapunov para chaveamento arbitrário, como em [50]. Mais detalhes sobre a Função Comum de Lyapunov em sistemas chaveados são apresentados no capítulo 3.

Na linha de estabilidade de sistemas para classes de sinais de chaveamento o foco é identificar para quais classes de chaveamento o sistema é assintoticamente estável. Está claro que na área de chaveamento arbitrário, a estabilidade assintótica é garantida por meio da análise dos subsistemas, enquanto que nesta área o próprio chaveamento é analisado para verificar a estabilidade assintótica.

Em estabilidade para determinadas classes de chaveamento normalmente assume-se que todos os subsistemas são assintoticamente estáveis e possuem o mesmo ponto de equilíbrio. A solução básica para este tipo de chaveamento é o uso de sistemas lentos (frequência de chaveamento baixa), nos quais é determinada qual a maior frequência de chaveamento admitida ou em que condições o chaveamento é permitido. As principais técnicas aplicadas nesta área são as Funções Múltiplas de Lyapunov [51] e suas variações. Nesta técnica admite-se que os subsistemas poderão ser não-lineares, no entanto, seu uso ainda é muito restrito ao chaveamento lento. As técnicas Funções Múltiplas de Lyapunov e suas variações, conhecidas como Tempo de Chaveamento e Tempo de Chaveamento Médio, são apresentadas com maior detalhe no Capítulo 3.

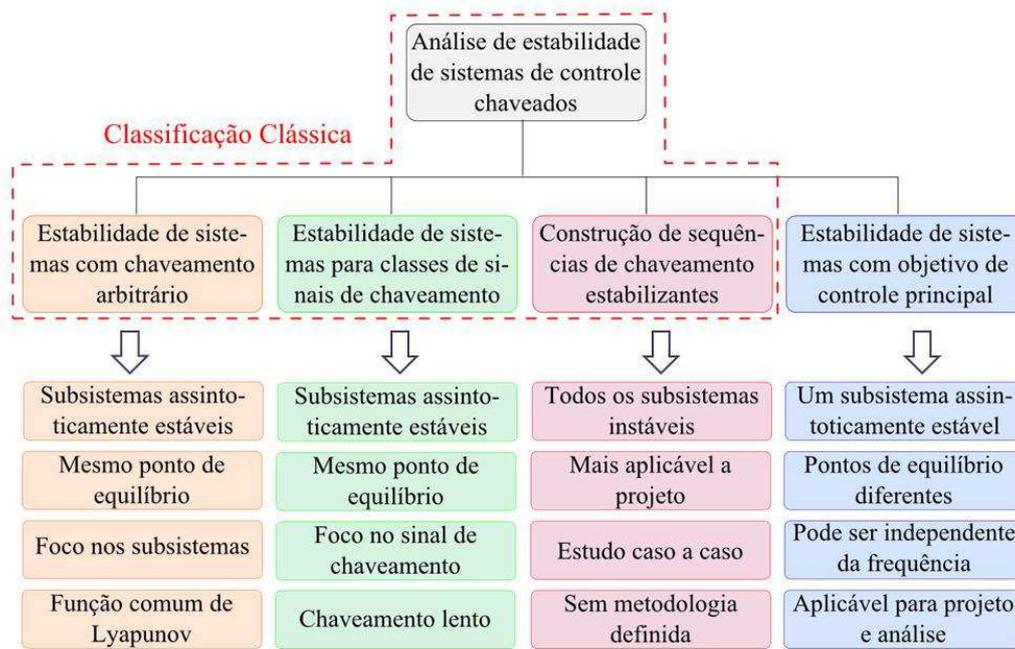
Diferente das demais áreas apresentadas, na construção de sequências de chaveamento estabilizantes admite-se o uso de controladores instáveis. Entretanto, fica evidente que se pelo menos um dos subsistemas for assintoticamente estável, a solução para o problema é trivial, com o sinal de chaveamento constante nesse subsistema. Segundo [1], essa área é mais aplicável para projeto de sistemas do que para análise de estabilidade, uma vez que seu uso geralmente é realizado caso a caso, existindo poucos esforços na tentativa de apresentar uma teoria que englobe uma quantidade significativa de sistemas, justificados pela dificuldade apresentada nesta tarefa.

No tocante aos sistemas chaveados, nesta tese de doutorado são apresentadas três proposições, com suas respectivas provas, que visam auxiliar no projeto e análise de estabilidade de sistemas de controle chaveados. Nessas proposições assume-se que o sistema é formado por um subsistema globalmente assintoticamente estável segundo Lyapunov, dito como principal, e outros subsistemas contínuos no tempo que podem ser

assintoticamente estáveis ou até mesmo instáveis, podendo ainda possuir pontos de equilíbrio diferentes, ditos como secundários. Nesse contexto, assume-se como objetivo do sistema o objetivo principal, ou seja, o ponto de equilíbrio do sistema chaveado é o mesmo do subsistema principal. Todavia, é admitido que haja chaveamentos para os subsistemas secundários, por qualquer motivo de interesse do projetista.

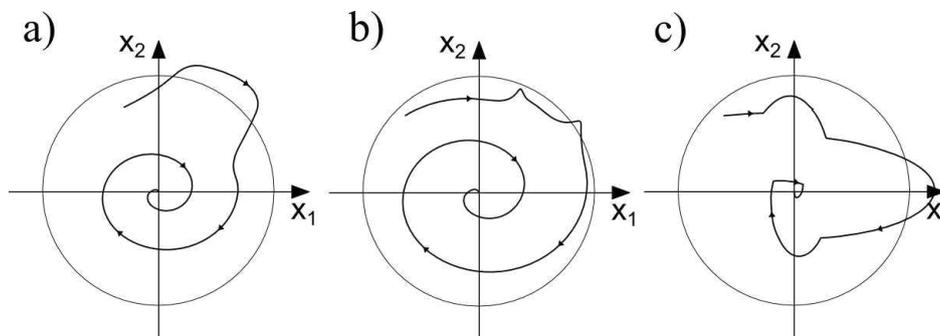
Com efeito, analisando a classificação apresentada em [1], percebe-se que as proposições aqui apresentadas não possuem as características de nenhuma das áreas de pesquisa apresentadas naquele artigo. Após uma busca exaustiva, não foram encontrados trabalhos com proposições semelhantes às aqui apresentadas, nas quais é empregado um subsistema principal e permitido o chaveamento para objetivos de controle diferentes ou subsistemas instáveis. A expressão “objetivos de controle diferentes” é muito encontrada em sistemas chaveados, porém, diferente da maneira abordada aqui, essa expressão não significa pontos de equilíbrio diferentes, ela é frequentemente usada para designar subsistemas diferentes com o mesmo ponto de equilíbrio, como apresentada em [7, 52, 53].

Dessa forma, é proposta nesta tese de doutorado uma nova classificação dos problemas básicos da análise de estabilidade em sistemas de controle chaveados. Tal classificação é baseada naquela apresentada por [1] e está ilustrada na Figura 4, enfatizando as principais características de cada área. De acordo com essa classificação, as proposições apresentadas neste trabalho estão contidas na área de estabilidade de sistemas com objetivo de controle principal.



**Figura 4. Classificação proposta para os problemas básicos encontrados na análise de estabilidade de sistemas de controle chaveados.**

No entanto, para a maioria dos sistemas chaveados o conceito de estabilidade de Lyapunov não pode ser aplicado, mesmo quando a trajetória das variáveis de estado tende ao ponto de equilíbrio do sistema. Isso acontece porque na definição de estabilidade de Lyapunov é assumido que existe um conjunto compacto que contém as trajetórias das variáveis de estado do sistema. Em sistemas chaveados, muitas vezes não é possível garantir a existência desse conjunto compacto, uma vez que tal trajetória pode temporariamente se afastar da origem. Esta característica também pode ser observada nos sistemas perturbados ou sob influência de distúrbios externos, como mostrado na Figura 5.



**Figura 5. Exemplo de trajetórias das variáveis de estados de sistemas que tendem à origem e não são estáveis segundo a definição de Lyapunov: (a) sistemas com distúrbios externos; (b) sistemas perturbados; (c) sistemas chaveados.**

Deve-se destacar que, apesar de o estudo da estabilidade ser o principal interesse da teoria de controle [54], um sistema pode ser estável na teoria, mas ser inútil na prática por causa do desempenho transitório indesejado [54-58]. Outro fator que pode levar um sistema assintoticamente estável na teoria a ser instável na prática é o domínio atrator, que pode não ser grande o suficiente para determinados estados.

Por outro lado, o estado desejado do sistema pode ser instável de acordo com o conceito clássico de estabilidade e ainda oscilar suficiente próximo desse estado, tendo um desempenho aceitável na prática [56-62].

Segundo [63], a teoria de Lyapunov é frequentemente adequada para sistemas com aplicações práticas, mas em alguns casos, como grandes valores de estado, o desempenho do sistema pode ser inaceitável. Somado ao fato de que muitas vezes se está interessado apenas nos limites das trajetórias dos sistemas [54], pode ser útil analisar a estabilidade destes sistemas apenas em subespaços do estado [55].

Na década de 60, LaSalle [64] e Weiss [65] introduziram o conceito de estabilidade prática. Esse conceito permitiu formalizar a estabilidade de sistemas já usados, proporcionando uma análise quantitativa ao invés da abordagem qualitativa de Lyapunov [56-58, 66], estando baseado principalmente nos limites das trajetórias das variáveis de estado, tempo de execução finito dos experimentos ou análise da estabilidade em subespaços de interesse. No entanto, os limites aceitáveis para que um sistema seja considerado estável na prática podem variar muito em cada caso, tornando o conceito de estabilidade prática muitas vezes frágil, o que é uma consequência da sua forte motivação prática.

Quando o sistema atende às condições da estabilidade clássica apenas após um tempo  $\tau$ , também é caracterizado um tipo de estabilidade prática, sendo o sistema denominado *quasi*-estável. A definição de *quasi*-estável, proposta neste trabalho, é menos restritiva que a estabilidade de Lyapunov e mais restritiva que a definição de praticamente estável, dessa forma, a definição de *quasi*-estável pode se tornar uma boa solução de compromisso entre as abordagens quantitativa e qualitativa.

Apesar de o termo "*quasi*" ser amplamente empregado na estabilidade prática, como em [61, 62, 65, 67], após ampla revisão bibliográfica foi encontrada apenas a definição de *quasi*-assintoticamente estável, não sendo encontrados trabalhos que

apresentem a definição de *quasi*-estável, tampouco condições suficientes ou necessárias para este tipo de estabilidade. Dessa forma, nesta tese são apresentadas outras duas proposições referentes a estes sistemas, sendo as mesmas condições suficientes do tipo Lyapunov para sistemas *quasi*-estáveis. Para tanto, uma definição de *quasi*-estável é proposta, levando em conta a definição de *quasi*-assintoticamente estável apresentada em [67] e as definições de estabilidade de Lyapunov apresentadas em [67, 68].

As cinco proposições apresentadas neste trabalho são abordadas com grande detalhe no Capítulo 4. As duas primeiras referem-se à estabilidade de sistemas *quasi*-estáveis e servem de base para as outras três. Naquelas duas proposições são apresentados critérios do tipo Lyapunov para sistemas que atendem às condições de Lyapunov após um tempo  $\tau$ .

Para o caso dos sistemas chaveados abordados neste trabalho,  $\tau$  expressa o tempo a partir do qual a função de Lyapunov do controlador principal seja sempre menor que seu valor inicial, mesmo que haja chaveamentos antes ou depois desse tempo. Isso pode ser obtido tanto com restrições ao sinal de chaveamento quanto com um sinal de chaveamento qualquer, incluindo restrições nos subsistemas.

Nas terceira e quarta proposições, que são referentes ao chaveamento de controladores, são apresentadas condições tanto para os subsistemas quanto para os sinais de chaveamento, visando, dessa forma, a demonstrar a estabilidade ou a estabilidade assintótica do sistema. Nessas proposições não há restrições quanto à frequência do sinal de chaveamento, sendo observado apenas o tempo total que o sistema fica chaveado em cada subsistema.

A quinta e última proposição pode ser classificada no grupo de chaveamento lento de controladores. Nela é estabelecido o quanto a função de Lyapunov do sistema deverá ter caído após o tempo  $\tau$  mencionado nas primeiras proposições para que o sistema seja *quasi*-assintoticamente estável, mesmo quando há chaveamento para outros subsistemas. Um exemplo de aplicação imediata dessa proposição é a criação de um sistema supervisor para controlar o chaveamento do sistema e garantir a estabilidade do mesmo.

Esta tese de doutorado está organizada na forma apresentada a seguir: no Capítulo 2 são apresentados os objetivos deste trabalho; no Capítulo 3 é apresentada a revisão

bibliográfica, mostrando as principais técnicas de análise de estabilidade de sistemas de controle chaveados; no Capítulo 4 são apresentadas as proposições e provas, representando e ilustrando as contribuições deste trabalho; os resultados desta tese, envolvendo navegação de robôs móveis e controle de processos químicos, são apresentados no Capítulo 5; no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões, as contribuições desta tese e apontados possíveis trabalhos futuros; finalmente são apresentadas as referências bibliográficas.

# Capítulo 2: Escopo e Objetivos do Trabalho

---

Diante da relevância dos sistemas de controle chaveados, conforme abordado no capítulo 1, faz-se necessário investigar a estabilidade desses sistemas, a que se propõe este trabalho, cujo escopo é apresentado na seção 2.1 e os objetivos geral e específicos são apresentados nas seções 2.2 e 2.3, respectivamente.

## 2.1. Definição do Escopo

O escopo deste trabalho consiste em abordar a estabilidade de sistemas de controle chaveados que possuam a característica de objetivo de controle principal, aqui proposta, buscando o desenvolvimento de ferramentas matemáticas para auxiliar no projeto e análise de estabilidade de sistemas que possuam essa característica. Como o conceito de estabilidade clássica normalmente não se aplica aos sistemas chaveados, neste trabalho são propostos e estudados os sistemas *quasi*-estáveis.

## 2.2. Objetivo Geral

O objetivo geral desta tese de doutorado é o desenvolvimento de ferramentas matemáticas que possam auxiliar na análise da estabilidade de sistemas *quasi*-estáveis, com foco nos sistemas de controle chaveados. Para tanto, nesse trabalho, são apresentadas cinco proposições, assim como suas respectivas demonstrações matemáticas, sendo duas mais gerais, sobre *quasi*-estabilidade, e outras três mais específicas para a análise de estabilidade de sistemas chaveados, abrangendo desde chaveamentos lentos até chaveamentos independentes da frequência, bem como poderão ser utilizadas para guiar o projeto de sistemas chaveados com objetivo de controle principal.

### 2.3. Objetivos Específicos

São objetivos específicos deste trabalho:

- Realizar uma ampla revisão bibliográfica a respeito de sistemas de controle chaveados e estabilidade prática;
- Avaliar o estado da arte a respeito da análise de estabilidade de sistemas chaveados;
- Avaliar o estado da arte no tocante aos sistemas *quasi*-estáveis;
- Propor e demonstrar matematicamente ferramentas que possam auxiliar na análise de estabilidade desses sistemas chaveados;
- Desenvolver ferramentas que possam auxiliar na análise de um número significativo de sistemas;
- Realizar simulações e testes experimentais envolvendo as ferramentas desenvolvidas;

## Capítulo 3: Revisão Bibliográfica

---

Este capítulo é dedicado à apresentação da revisão bibliográfica sobre a área de sistemas de controle chaveados e sistemas *quasi*-estáveis, mostrando o estado da arte e os principais problemas, soluções e linhas de pesquisa dentro dessas áreas. Para tanto, este capítulo foi organizado da seguinte forma: primeiro é apresentada uma revisão geral, realizada com artigos e livros, tanto clássicos quanto modernos, das áreas citadas, e em seguida são apresentadas, em cada seção, as principais contribuições destas áreas e a formulação matemática do problema.

O grande interesse da comunidade científica pela área de sistemas de controle chaveados é evidenciado na publicação regular de artigos de revisão em revistas conceituadas da área de controle. Esses artigos são geralmente justificados pela importância de se apresentar as principais contribuições recentes na área, como forma de consolidar os principais avanços e atrair novos esforços para o controle chaveado. Grande parte dos artigos de revisão a respeito de sistemas de controle chaveados trata apenas do caso linear, que é mais amplamente estudado, como em [6, 69-71]. No entanto, apesar de complexo, o caso não-linear também é amplamente abordado nos artigos de revisão, como em [1, 72].

No campo de análise de estabilidade de sistemas de controle chaveados, tema abordado nesta tese de doutorado, os trabalhos [1, 71] dividiram o problema da análise de estabilidade desses sistemas em três problemas principais: (i) chaveamento arbitrário, (ii) restrição do sinal de chaveamento e (iii) chaveamento estabilizante.

No caso do chaveamento arbitrário [73, 74], a ferramenta mais comumente aplicada consiste em encontrar uma função de Lyapunov comum a todos os subsistemas, que devem ser assintoticamente estáveis e possuir o mesmo ponto de equilíbrio. As ferramentas desenvolvidas com esse intuito são, em sua maioria,

aplicáveis apenas a sistemas lineares, como em [33, 75]. Entretanto, os casos não-lineares passaram a ser abordados no desenvolvimento destas ferramentas, assim como mostrado em [49]. Uma abordagem mais detalhada a respeito das Funções Comuns de Lyapunov é apresentada na seção 3.2.

Em [75] foi proposto uma condição conhecida como *Lie-algebraic*, para sistemas lineares invariantes no tempo, com a qual é mostrado que quando a álgebra de Lie das matrizes de estados dos subsistemas é solucionável, então existe uma função quadrática de Lyapunov comum a todos os subsistemas e, dessa forma, o sistema chaveado é assintoticamente estável sob um chaveamento arbitrário. O uso dessa condição também foi aplicado em [73, 76]. A estabilidade quadrática corresponde a um tipo particular de estabilidade exponencial e é frequentemente abordada em sistemas de controle chaveados, como em [7, 77].

Em relação à restrição do sinal de chaveamento, a principal abordagem aplicada compreende o chaveamento lento [28, 33, 78, 79]. Assim como no caso das funções comuns de Lyapunov, a maior parte dos trabalhos encontrados podem ser aplicados para sistemas compostos apenas por subsistemas assintoticamente estáveis, e com o mesmo ponto de equilíbrio. No entanto, em [80] essa abordagem foi usada em sistemas com alguns subsistemas instáveis, considerando que estes sejam pouco ativados em relação aos demais. As duas principais ferramentas no tocante ao chaveamento lento são o Tempo de Permanência (*dwell time*) [81, 82] e o Tempo de Permanência Médio (*average dwell time*) [29, 34, 79, 83-86]. Ambas são abordadas com maior detalhe nas seções 3.3 e 3.4, respectivamente.

Outra abordagem, mais geral, amplamente usada em sistemas chaveados com chaveamento lento é conhecida como Funções Múltiplas de Lyapunov [51, 84, 85]. Tal abordagem é comumente aplicada quando todos os subsistemas são assintoticamente estáveis segundo Lyapunov e possuem o mesmo ponto de equilíbrio. Quando não são consideradas as abordagens baseadas em tempo de permanência em cada subsistema, as funções múltiplas de Lyapunov são geralmente aplicadas, determinando quando um chaveamento pode ocorrer observando o comportamento das funções de Lyapunov de cada subsistema. Por ser amplamente usada, essa ferramenta será apresentada mais detalhadamente na seção 3.5.

Em muitos casos a construção de uma família de funções de Lyapunov representa uma tarefa complexa. Nesses casos, se focados no caso linear, o uso de funções do tipo Lyapunov por partes pode se tornar atrativo [71]. Isso se dá devido à facilidade normalmente maior de se encontrar funções que atendam aos critérios de Lyapunov apenas em determinadas regiões. Assim, o chaveamento para determinado subsistema é apenas realizado dentro dessas regiões. Essa ferramenta é conhecida como *piecewise Lyapunov functions* e são abordadas para sistemas de controle chaveados em [87, 88].

Em [89] é apresentada uma proposta de chaveamento estabilizante de sistemas lineares invariantes no tempo, considerando que todos os subsistemas são instáveis. O caso da estabilidade quando apenas alguns subsistemas são instáveis é mais usualmente abordado considerando que o tempo em que um subsistema instável estará ativado é muito pequeno em relação ao tempo total do experimento, como em [83, 85].

Um conceito amplamente usado em sistemas de controle chaveados é o ISS (do inglês: *input-to-state stability*) conhecido em português como “estabilidade entrada para o estado” ou “estabilidade entrada estado”. Com essa ferramenta é possível analisar a estabilidade de sistemas com perturbações conhecidas. O fato de o chaveamento ser muitas vezes considerado como uma perturbação, ou de o mesmo ser usado para modelar perturbações, evidencia as possibilidades de aplicações da estabilidade entrada estado para os sistemas de controle chaveados. Esse tipo de estabilidade é abordado em [3, 20, 29, 34, 79, 90-93].

Diante da necessidade de analisar a estabilidade na presença de perturbações no contexto de sistemas chaveados, bem como distúrbios externos e imprecisões, vários trabalhos têm sido propostos com a apresentação de ferramentas que possam auxiliar nessa linha. No caso da análise de estabilidade na presença de distúrbios, algumas dessas contribuições podem ser encontradas em [28, 29, 72, 81, 85, 90, 94]. No tocante a análise de estabilidade de sistemas imprecisos, algumas das ferramentas propostas podem ser encontradas em [20, 51, 72, 87, 95]. Essa linha de pesquisa tem avançado significativamente, apesar dessa restrição ainda ser mais amplamente abordada na proposição de métodos de medição mais adequados a cada aplicação, como em [96-99]. A quantidade de artigos encontrados para análise de estabilidade na presença de perturbações, distúrbios externos ou imprecisões, e considerando a qualidade dos

periódicos que os mesmos têm sido publicados, pode ser considerada como indicativo de que este é um campo de aplicação promissor dos sistemas de controle chaveados.

Particularmente em relação aos sistemas incertos, nota-se um grande campo de atuação na área de controle que trata de sistemas nos quais a observação da saída é limitada. Dentre as limitações mais abordadas estão o tempo de atraso e quantização da medida, sendo este último o mais abordado. Nesta revisão bibliográfica foi encontrada uma grande quantidade de artigos abordando a quantização da medição para os sistemas chaveados, embora a maioria deles seja de um mesmo autor, como em [72, 90, 92, 100-103]. Um exemplo prático de medição quantizada na indústria que pode fazer uso desse tipo de abordagem é apresentado em [104]. Outra possível abordagem dos sistemas incertos seria o caso da quantização da saída de controle, que pode afetar o desempenho do sistema, como observado nos resultados apresentados em [105, 106], oriundos da comparação entre a navegação de um robô móvel feita por pessoas e por um sistema de controle híbrido.

Frequentemente, descontinuidades nas variáveis de estado são tratadas como distúrbios. No entanto, a ocorrência de “pulos” na trajetória das variáveis de estados pode estar associada a outras causas, sobretudo nos sistemas chaveados. Como esse comportamento normalmente influencia muito no desempenho do sistema, são necessários esforços no estudo da estabilidade de sistemas impulsivos. Nos artigos [33, 34, 107] são apresentados sistemas de controle chaveados impulsivos, bem como em [108] é apresentado o uso de sistemas chaveados como forma de modelar impulsos diferenciais adicionados ao sistema.

Por se tratar de uma área de interesse científico relativamente novo, alguns conceitos já amplamente aplicados em controle, passaram a ser aplicados em controle chaveado nas últimas duas décadas. Entre esses conceitos podem ser destacados: observabilidade [21, 109, 110], controlabilidade [48, 111], inversibilidade [111-114] e, mais especificamente no caso discreto, alcançabilidade [48, 111, 115].

A definição de controle ótimo também é estendida para os sistemas de controle chaveados, com a qual se estabelece um parâmetro conveniente e se determina em que condições esse parâmetro é ótimo. O uso de controle chaveado ótimo é abordado em [69, 73, 116].

Dentre as aplicações dos sistemas de controle chaveados destacam-se o controle supervísório e os sistemas adaptativos, principalmente com os dois associados. Segundo [1] o controle adaptativo representa uma das principais aplicações dos sistemas chaveados. O uso de sistemas chaveados para o controle adaptativo é abordado em [20, 29, 82, 117]. Já as aplicações de controle supervísório podem ser encontradas em [20, 29, 72, 82, 95].

Vu e Liberzon propuseram em seu trabalho [82] a análise de estabilidade de um sistema de controle com dois chaveamentos assíncronos, no qual os chaveamentos influenciam um ao outro. Nessa revisão bibliográfica não foi encontrado nenhum outro artigo com essa abordagem. Para demonstração da estabilidade desse sistema foi usado o chaveamento lento, baseado em Tempo de Permanência. A principal aplicação indicada para esse tipo de chaveamento é o sistema de controle supervísório adaptativo.

Em [79, 80, 84] são apresentados sistemas de controle chaveados estocásticos, nos quais é analisada a estabilidade de sistemas chaveados, dada a probabilidade de ocorrer um chaveamento. A maioria dos trabalhos nessa linha faz uso das técnicas *average dwell time* ou do *dwell time* para mostrar que abaixo de certa probabilidade de ocorrência de chaveamento o sistema é assintoticamente estável.

No entanto, a maioria dos sistemas chaveados não atende as condições para a estabilidade no sentido de Lyapunov, visto que, para esses sistemas, a norma das variáveis de estado do sistema pode crescer temporariamente devido ao chaveamento. Nesses casos, os sistemas podem tender a origem e ainda assim não serem estáveis segundo o conceito de Lyapunov.

Apesar de a teoria de Lyapunov ser frequentemente adequada para sistemas com aplicações práticas [63], muitas vezes se está interessado apenas nos limites das trajetórias dos sistemas [54], bem como pode ser útil analisar a estabilidade destes sistemas apenas em subespaços do estado [55]. Além disso, em alguns casos, como grandes valores de estado, o desempenho de um sistema estável segundo Lyapunov pode ser inaceitável [63], dando margem a definições de outros tipos de estabilidade, como no caso da estabilidade prática.

Esse conceito de estabilidade foi introduzido na década de 60 por LaSalle [64] e Weiss [65], e é baseado principalmente nos limites das trajetórias das variáveis de

estado, tempo de execução finito dos experimentos ou análise da estabilidade em subespaços de interesse. Dessa forma foi possível formalizar a estabilidade de sistemas já usados, proporcionando uma análise quantitativa ao invés da abordagem qualitativa de Lyapunov [56-58, 66].

Em [118-121] são apresentadas as definições de estabilidade prática mais aceitas na comunidade científica. Entretanto, esse tipo de estabilidade está fortemente relacionado à aplicação em questão, o que tem como consequência a necessidade da criação de diversas definições de estabilidade, também relacionadas com os diversos tipos de aplicações. São exemplos de tipos de estabilidade prática encontrados na literatura: semi-estabilidade [122]; estabilidade semi-global [123, 124]; estabilidade eventual [125]; *quasi*-estabilidade [59]; estabilidade estrita [61]; estabilidade usual [126]; estabilidade BIBO [127]; estabilidade prática ISS [128]; estabilidade prática forte (sistemas fortemente praticamente estáveis) [129]; e estabilidade  $\phi$  [129]. Além disso, alguns tipos de estabilidade prática são muitas vezes referidos como estabilidade de tempo finito, como em [55, 130].

Em sistemas chaveados (foco desta tese de doutorado), bem como nos sistemas perturbados ou sob influência de distúrbios externos, muitas vezes não é possível garantir a existência de um conjunto compacto que contém a trajetória das variáveis de estado, dada uma condição inicial. Isto acontece por que, nestes sistemas, tal trajetória pode temporariamente se afastar da origem de forma não previsível, e, dessa forma, o conceito de estabilidade de Lyapunov não é aplicável, sendo mais adequada para estes casos a estabilidade prática.

Aplicações de sistemas chaveados que fazem uso da estabilidade prática são mostradas em [31, 56, 131-134], enquanto que [57, 130, 135, 136] fazem referência a sistemas perturbados que abordam este tipo de estabilidade. No entanto, grande parte dos trabalhos envolvendo estabilidade prática trata de sistemas impulsivos, como em [60, 125, 126, 129, 136-138], e saltos Markovianos [30, 31].

A importância desse tipo de estabilidade é evidenciada na gama de aplicações encontradas na literatura científica, com destaque para: sistemas caóticos [138]; abordagens estocásticas [135]; sistemas fracionários [54, 139, 140]; sistemas descritores

[59]; sistemas politópicos [63]; sistemas descontínuos [55, 57, 130]; e sistemas incertos [66].

Nesta tese de doutorado é abordada a estabilidade prática, com foco para os sistemas *quasi*-estáveis. Para tanto, foi apresentada uma nova definição para *quasi*-estabilidade, considerando a definição de *quasi*-assintoticamente estável já existente. Adicionalmente, são apresentadas nas proposições 1 e 2 deste trabalho condições suficientes do tipo Lyapunov para este tipo de estabilidade. Em [122] são apresentadas outras condições do tipo Lyapunov para estabilidade prática.

As demais proposições apresentadas aqui dizem respeito aos sistemas chaveados, foco deste trabalho, e foram desenvolvidas com base nas proposições de *quasi*-estabilidade apresentada. Sendo assim, na próxima seção é apresentada a formulação matemática de um sistema chaveado, bem como nas seções subsequentes são apresentados os principais campos estudados na área de sistemas de controle chaveados.

### 3.1. Formulação Matemática de um Sistema Chaveado

Esta seção é dedicada à apresentação da descrição matemática de um sistema chaveado. Para tanto, um sistema de controle chaveado será escrito na forma:

$$\dot{x} = f_{\sigma}(x), \quad (1)$$

em que  $\{f_{\chi}: \chi \in X\}$  é uma família de funções, de  $\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ , suficientemente regulares, que é parametrizada por algum índice do conjunto  $X$ ,  $x$  é o vetor de dimensão  $n$  de variáveis de estado do sistema e  $\sigma: [0, \infty) \rightarrow X$  é uma função constante por partes chamada de sinal de chaveamento, que indica qual subsistema está ativo em cada instante de tempo. As funções  $f_{\chi}$  representam cada subsistema do sistema chaveado.

Outra forma muito comum, e mais usada neste trabalho, para a representação de um sistema de controle chaveado é apresentada em (2).

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x), \\ f_2(x), \\ \vdots \\ f_k(x), \end{cases} \quad (2)$$

em que  $k$  representa a quantidade de elementos do conjunto  $f_\chi$ . Esta representação é mais usada quando se tem um número de subsistemas pequeno e se pretende explicitar as funções de cada um deles.

É importante ressaltar que é assumido que as variáveis de estado do sistema chaveado não apresentam descontinuidades no momento do chaveamento.

Uma classe particular de (1) amplamente abordada na literatura específica é o caso linear. Nos sistemas chaveados lineares assume-se que todos os subsistemas são lineares, dessa forma, o sistema pode ser apresentado na forma:

$$\dot{x} = A_\sigma x, \quad (3)$$

em que  $\{A_\chi: \chi \in X\}$  é uma família de matrizes que definem cada subsistema.

### 3.2. Função Comum de Lyapunov

É fácil observar que quando todos os subsistemas de (4),

$$\dot{x} = f_p(x), \quad (4)$$

compartilham a mesma função de Lyapunov, ou seja, existe uma função suave  $V(x)$  radialmente ilimitada e positiva definida, tal que  $\nabla[V(x)].f_p(x) < 0$  para todo  $x \neq 0$  e  $p \in P$ , então o sistema chaveado (1) é assintoticamente estável para qualquer sinal de chaveamento  $\sigma$  [1].

Essa abordagem é considerada muito importante, pois a mesma proporciona tanto o projeto, quanto a análise de estabilidade, de sistemas chaveados sem que haja restrições quanto ao chaveamento. Dentre as principais aplicações dessa abordagem destacam-se os sistemas adaptativos, que podem ser implementados sem o risco de tornar o sistema instável em qualquer circunstância.

A tarefa de se projetar um sistema composto de vários subsistemas em que todos eles possuam a mesma função de Lyapunov é na maioria das vezes inviável, principalmente nos casos em que os subsistemas são preestabelecidos. Dessa forma, são concentrados esforços para determinar condições em que se possa garantir que o sistema

chaveado possui uma função comum a todos os subsistemas. Esse tipo de abordagem normalmente é aplicado apenas para o caso linear.

Considerando somente o caso linear, existe uma quantidade expressiva de trabalhos que buscam encontrar condições necessárias e suficientes para a existência de uma função comum de Lyapunov. No entanto, em vários trabalhos recentes, como nos exemplos abordados na revisão apresentada em [71], têm-se procurado abordar um caso particular dessas funções, a Função Quadrática Comum de Lyapunov. A estabilidade quadrática é um tipo de estabilidade exponencial, que implica estabilidade assintótica, e vem sendo muito estudada devido à sua importância na prática [71]. Muitas vezes esse tipo de abordagem é mais facilmente empregado, uma vez que, para o caso linear, é conhecido que as condições para a existência de uma função quadrática comum de Lyapunov pode ser expressa como uma matriz linear de inequações, o que facilita a busca por esse tipo de função comum.

Um aspecto importante a ser considerado é que a existência de uma função quadrática comum de Lyapunov é condição suficiente e não necessária para garantir a estabilidade assintótica em um sistema com chaveamento arbitrário. Em [141] é apresentado um exemplo em que o sistema é exponencialmente estável sob um chaveamento arbitrário e não possui uma função quadrática comum de Lyapunov. Uma alternativa a esse tipo de ferramenta abordada na literatura específica é o chaveamento de funções quadráticas de Lyapunov particulares a cada subsistema, considerando que todos os subsistemas possuem o mesmo ponto de equilíbrio. Diferente dos demais tipos de funções de Lyapunov, as funções quadráticas podem ter análise de estabilidade mais facilmente realizada quando chaveadas arbitrariamente, em determinados sistemas.

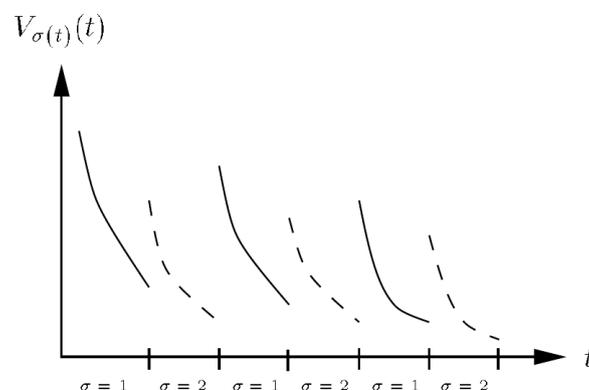
Ainda de acordo com as funções quadráticas comuns de Lyapunov, um número significativo de trabalhos baseou a análise de estabilidade de sistemas chaveados em uma matriz formada por um par de matrizes de estado dos subsistemas, conhecida como matriz *pencil*. De acordo com [71], dadas duas matrizes de estado  $A_1$  e  $A_2$ , a matriz *pencil*  $\gamma_\alpha(A_1, A_2)$  é definida como a família de matrizes  $\gamma_\alpha(A_1, A_2) = \alpha A_1 + (1-\alpha)A_2$ , com  $\alpha$  real e contida no intervalo  $[0,1]$ . Um caso mais abordado da matriz *pencil* é conhecido como Hurwitz e ocorre quando seus autovalores estão no semi-plano esquerdo aberto para todo  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

A existência de uma função quadrática comum de Lyapunov também pode ser comprovada a partir da condição conhecida como *Lie-algebraic*, proposta em [75], cuja aplicação está restrita para sistemas lineares invariantes no tempo. Nesse trabalho é mostrado que quando a álgebra de Lie das matrizes de estados dos subsistemas é solucionável, então existe uma função quadrática de Lyapunov comum a todos os subsistemas e, dessa forma, o sistema chaveado é assintoticamente estável sob um chaveamento arbitrário.

Em casos mais específicos se deseja não apenas garantir a existência de uma função comum de Lyapunov, como também determinar na forma de equação essa função, dado determinado sistema chaveado. Esse problema é conhecido como Função Comum Reversa de Lyapunov [1] e é abordado compreendendo ferramentas que fazem uso tanto de técnicas algébricas, quanto de técnicas computacionais, com a proposição de algoritmos iterativos que convergem em um número finito de passos.

### 3.3. Tempo de Permanência (*Dwell Time*)

Como mencionado e ilustrado na Figura 3, a depender do sinal de chaveamento aplicado, um sistema pode se tornar instável mesmo que todos os subsistemas sejam assintoticamente estáveis e possuam o mesmo ponto de equilíbrio. No entanto, esse problema pode ser resolvido inserindo restrições ao chaveamento, de forma que o mesmo só ocorra quando a função de Lyapunov do subsistema tenha decrescido o suficiente para garantir um chaveamento assintoticamente estável, caracterizando um chaveamento lento. Um exemplo de chaveamento de dois subsistemas com essa característica é apresentado na Figura 6.



**Figura 6. Exemplo do comportamento das funções de Lyapunov em um chaveamento lento assintoticamente estável de dois subsistemas [1].**

Uma maneira muito simples de realizar esse chaveamento lento necessário é introduzir um número  $\tau > 0$  e restringir a classe de sinais de chaveamento admissíveis para sinais com a propriedade de que os intervalos entre dois chaveamentos consecutivos não é menor do que  $\tau$ . Como o tempo  $\tau$  define o menor tempo admissível que o sistema deverá permanecer em determinado subsistema quando o mesmo é ativado, essa abordagem é conhecida como Tempo de Permanência, ou em inglês *dwell time*.

Por ser uma ferramenta muito intuitiva e facilmente aplicada a vários tipos de sistemas, são registradas quantidades consideráveis de trabalhos baseados nessa abordagem, como em [1, 81, 82, 142]. Essa facilidade é ainda mais evidenciada quando considerado que o valor de  $\tau$  pode ser calculado explicitamente a partir dos parâmetros de cada subsistema, podendo, dessa forma, determinar quais sinais de chaveamento que levam à estabilidade assintótica. Assim, essa abordagem pode ser usada tanto para projeto quanto para análise de estabilidade do sistema de controle chaveado.

O Tempo de Permanência é amplamente aplicado para o caso linear, embora a existência do mesmo seja comprovada também para o caso não-linear. Mais detalhes com respeito a essa abordagem podem ser encontrados em [1] e suas referências, no entanto, variações desse tipo de chaveamento são apresentadas em [143, 144].

### 3.4. Tempo de Permanência Médio (*Average Dwell Time*)

Apesar de amplamente usada e facilmente aplicável em muitos sistemas de controle chaveados, a abordagem baseada em Tempo de Permanência, apresentada na seção 3.3, possui problemas conhecidos. Segundo [1], uma de suas principais aplicações consiste no controle de sistemas chaveados lineares com medições imprecisas ou incertezas de modelagem, como as discutidas em [145, 146]. O sucesso conseguido com essas aplicações motivou a busca do uso do Tempo de Permanência em sistemas incertos e imprecisos também para o caso não-linear, o que em muitos casos não foi possível devido à possibilidade da existência de um tempo de escape finito. De forma simples, como o sistema não é totalmente conhecido, existirá sempre a possibilidade de um dos subsistemas não convergir para zero, e, no caso não-linear, tender ao infinito antes que haja o chaveamento para outro subsistema, uma vez que o Tempo de

Permanência apenas assegura um tempo mínimo antes seja realizado um novo chaveamento.

Uma alternativa ao Tempo de Permanência para os sistemas de controle não-lineares, proposta em [147], é conhecida como chaveamento com histerese. Essa alternativa foi aplicada com sucesso em sistemas de controle chaveados não-lineares com incertezas de modelagem. Quando a incerteza é puramente paramétrica e não há ruídos de medição, os sinais de chaveamento gerados pela histerese de escala independente (versão conhecida do chaveamento com histerese) têm a propriedade de que é realizado um novo chaveamento em um tempo finito. Adicionalmente, quando esse caso é apresentado na presença de ruído de medição, com algumas restrições, pode ser mostrado que esses sinais têm a propriedade de Tempo de Permanência Médio [1].

Dessa forma, tornou-se necessário o desenvolvimento da análise de estabilidade baseada em Tempo de Chaveamento Médio. Para formalizar essa abordagem, considera-se que para todo  $T > 0$ , existe um  $N_\sigma(T)$ , que denota o número de discontinuidades de um dado sinal de chaveamento  $\sigma$  no intervalo  $[0, T)$ . Segundo [148], é dito que  $\sigma$  tem a propriedade de Tempo de Permanência Médio se existem duas constantes não negativas  $a$  e  $b$  tal que, para todo  $T > 0$ ,  $N_\sigma(T) \leq a + bT$ . De acordo com [1], essa terminologia pode ser interpretada da seguinte forma: se forem descartados os primeiros  $a$  chaveamentos, o tempo médio entre os seguintes chaveamentos deve ser pelo menos  $1/b$ . Com efeito, o Tempo de Permanência apresentado na seção 3.3 é um caso particular do Tempo de Permanência Médio, com  $a = 0$  e  $b = 1/\tau$ .

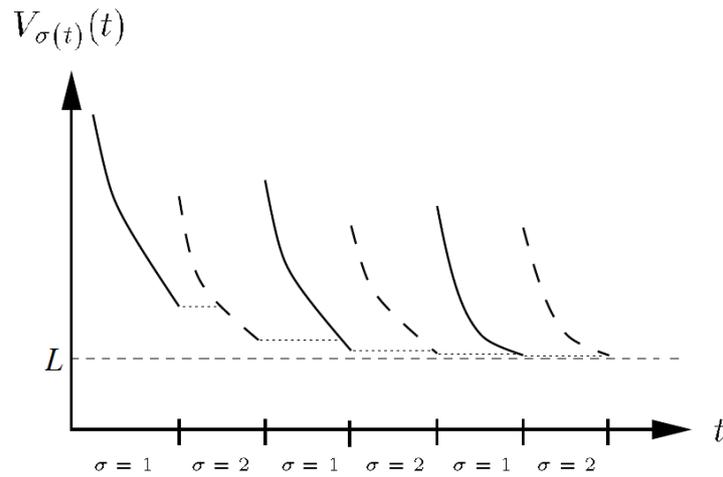
Apesar de aplicado para o caso em que um dos controladores pode não convergir para a origem do sistema, essa abordagem é mais frequentemente aplicada quando todos os subsistemas são assintoticamente estáveis e possuem o mesmo ponto de equilíbrio. Os casos em que é ativado um subsistema instável são normalmente tratados como distúrbios temporários. As aplicações dessa ferramenta podem ser tanto lineares quanto não-lineares, apresentando vantagem perceptível no caso não-linear quando comparada com o Tempo de Permanência.

### 3.5. Funções Múltiplas de Lyapunov

Assim como no caso do Tempo de Permanência e do Tempo de Permanência Médio, a abordagem baseada em Funções Múltiplas de Lyapunov é considerada na maioria dos casos como um tipo de chaveamento lento. Seu uso é indicado quando não é possível encontrar uma Função Comum de Lyapunov e, dessa forma, o sistema não pode ser assintoticamente estável sob qualquer sinal de chaveamento. Por ser uma tarefa muitas vezes mais simples, são atribuídas funções de Lyapunov diferentes para os subsistemas, porém, todos são assintoticamente estáveis e possuem o mesmo ponto de equilíbrio.

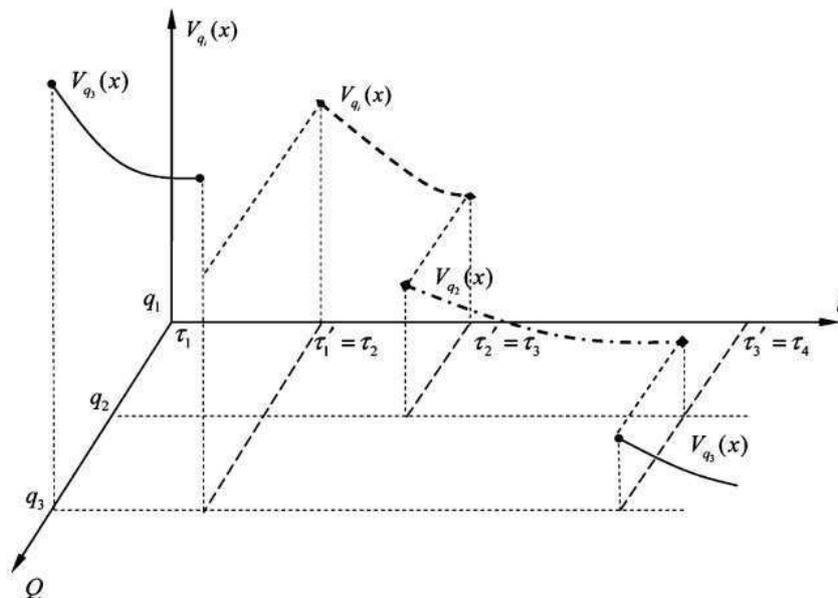
Muitos autores consideram as abordagens baseadas em Tempo de Permanência e Tempo de Permanência Médio como um caso especial das Funções Múltiplas de Lyapunov. Neste trabalho as abordagens foram apresentadas de forma independente com o intuito de evidenciar as contribuições de cada área, sem, no entanto, discordar com o fato de que as mesmas podem ser representadas em um mesmo grupo. Dessa forma, a ideia básica das Funções Múltiplas de Lyapunov, na forma aqui apresentada, consiste em chavear as funções de Lyapunov de cada subsistema para encontrar uma função de Lyapunov descrita em [71] como sendo não tradicional. O termo “não tradicional” foi empregado no sentido de que as trajetórias das Funções Múltiplas de Lyapunov no espaço de estados podem não ser monótonas ou até apresentar descontinuidades, sendo, entretanto, diferenciáveis por partes.

A tarefa básica dessa abordagem consiste em encontrar condições sob as quais um novo chaveamento poderá ser realizado sem afetar a estabilidade do sistema. Muitas vezes essas condições são intuitivas, e dessa forma, acaba levando a falsas conclusões. Um exemplo de uma condição amplamente intuitiva, que corresponde a um erro comum no projeto de sistemas chaveados estáveis, é permitir que haja um novo chaveamento quando o valor da função de Lyapunov do subsistema ativado for menor que do subsistema anterior no momento do chaveamento para o subsistema atual. Com essa condição há garantias que o sistema é estável, no entanto não assegura a estabilidade assintótica, como mostrado na Figura 7.

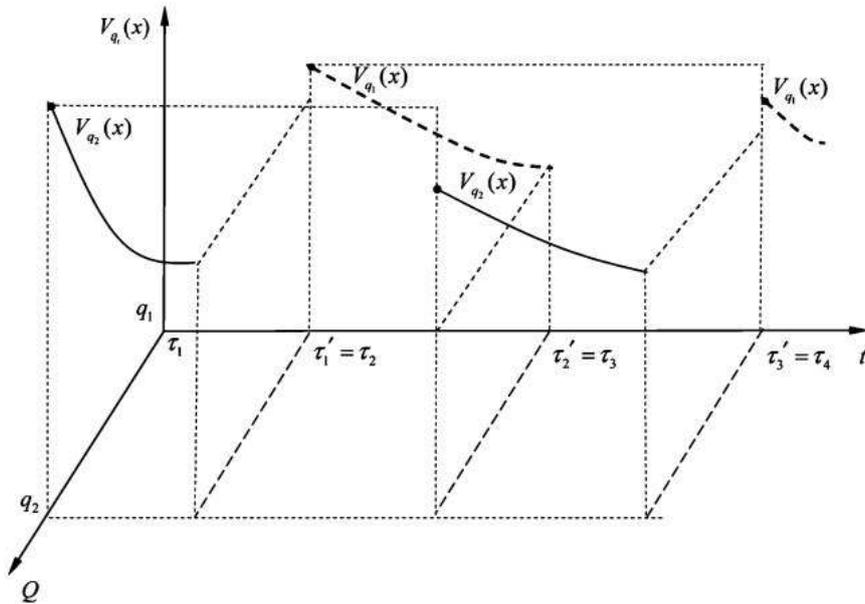


**Figura 7. Comportamento das funções de Lyapunov em um erro comum no chaveamento baseado em Funções Múltiplas de Lyapunov, no qual as funções  $V_{\sigma(t)}(t)$  são chaveadas para valores decrescentes, porém o sistema não tende para a origem.**

Duas condições também intuitivas, porém com estabilidade demonstrada, foram apresentadas em [71], e reproduzidas na Figura 8 e na Figura 9. No chaveamento apresentado na Figura 8, o sistema é assintoticamente estável se o chaveamento é realizado de forma que os valores das funções de Lyapunov são sempre decrescentes. Essa abordagem é facilmente assimilada, mas de difícil aplicação na prática por ser muito restritiva. Uma condição menos restritiva é ilustrada na Figura 9. Nesse caso, para todo  $i$ , os valores de  $V_i(x)$  no início de cada chaveamento para o  $i$ -ésimo subsistema representam uma sequência decrescente.



**Figura 8. Exemplo de chaveamento estável baseado em Funções Múltiplas de Lyapunov [71].**



**Figura 9. Exemplo de chaveamento estável menos restritivo baseado em Funções Múltiplas de Lyapunov [71].**

Por se assemelhar com a quinta proposição apresentada nesta tese de doutorado, aqui será reproduzido o Lema 9 apresentado e demonstrado matematicamente em [1]. Apesar de apresentar semelhança, o autor deste trabalho considera que não há qualquer relação entre as duas proposições.

Lema. [1] Supondo que existe uma constante  $\rho > 0$  com a propriedade que para quaisquer dois instantes de chaveamento  $t_i$  e  $t_j$ , tal que  $i < j$  e  $\sigma(t_j) = \sigma(t_i)$ , se:

$$V_{\sigma(t_i)}(x(t_{j+1})) - V_{\sigma(t_i)}(x(t_{i+1})) \leq -\rho \|x(t_{i+1})\|^2, \quad (5)$$

então o sistema chaveado é globalmente assintoticamente estável.

Este lema é considerado como um tipo de chaveamento lento, uma vez que são estabelecidos os valores das funções de Lyapunov dos subsistemas, em função do instante de chaveamento e da norma das variáveis de estado, para que seja possível realizar um novo chaveamento, não permitindo, dessa forma, um chaveamento arbitrário.

Segundo [71], a tarefa crítica da aplicação dos teoremas baseados em Funções Múltiplas de Lyapunov é como construir a família de funções de Lyapunov adequada, representando um problema usualmente difícil na prática. Para o caso linear, uma

alternativa mais simples pode ser encontrada no uso das Funções de Lyapunov Quadráticas por Partes (em inglês *Piecewise Quadratic Lyapunov Functions*). Dessa forma, como mostrado em [70, 71], vários trabalhos têm surgido nessa linha, porém ainda restritos para o caso linear.

## Capítulo 4: Proposições e Provas

---

Neste capítulo são apresentadas cinco proposições e suas respectivas demonstrações matemáticas, apontadas como contribuições deste trabalho, objetivando auxiliar no projeto e análise de estabilidade de sistemas *quasi*-estáveis, com maior foco para os sistemas chaveados que possuem objetivo de controle principal. Para tanto, na seção 4.1 são tratados os sistemas *quasi*-estáveis, assim como as condições suficientes do tipo Lyapunov para estes sistemas, enquanto que na seção 4.2 são apresentados os sistemas chaveados baseados em objetivo de controle principal, mostrando as proposições a respeito destes sistemas e suas respectivas provas.

### 4.1. Sistemas *Quasi*-estáveis

Seja o sistema autônomo

$$\dot{x} = f(x), \tag{6}$$

em que  $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  é um mapa de Lipschitz de um domínio  $\mathfrak{R}^n$  em  $\mathfrak{R}^n$ , e  $x$  o vetor de dimensão  $n$  de variáveis de estado do sistema, assumidas como contínuas no tempo. Sem perda de generalidade, será considerado que a origem do sistema é um ponto de equilíbrio, ou seja,

$$f(0) = 0. \tag{7}$$

Segundo [68], o ponto de equilíbrio  $x = 0$  de (6) é:

- estável se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que

$$\|x(0)\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0; \tag{8}$$

- instável se não é estável;
- assintoticamente estável se é estável e  $\delta$  pode ser escolhido de tal forma que

$$\|x(0)\| < \delta \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (9)$$

A definição de estabilidade apresentada em [68] é amplamente usada e aceita pela comunidade científica, no entanto, de acordo com [67], esta definição é muito restritiva e pode inviabilizar a demonstração de estabilidade de muitos sistemas encontrados na prática, com destaque para os sistemas que estão sujeitos à perturbação ou distúrbios externos. Dessa forma, em [67] são propostas as definições de *quasi*-estabilidade assintótica e estabilidade prática, apresentadas a seguir, nas definições 1 e 2, respectivamente.

**Definição 1.** O ponto de equilíbrio  $x = 0$  de (6) é *quasi*-assintoticamente estável se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe uma constante  $\delta_0 > 0$  e um  $\tau = \tau(\varepsilon)$  tal que

$$\|x(0)\| < \delta_0 \rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq \tau. \quad (10)$$

**Definição 2.** O ponto de equilíbrio  $x = 0$  de (6) é fortemente praticamente estável se dados  $(\lambda, A)$ , com  $0 < \lambda < A$ ,

$$\|x(0)\| < \lambda \rightarrow \|x(t)\| < A, \forall t \geq 0. \quad (11)$$

De forma equivalente a (9), a definição de estabilidade assintótica pode ser reescrita conforme a notação apresentada em [67], como ilustrado na definição 3.

**Definição 3.** O ponto de equilíbrio  $x = 0$  de (6) é assintoticamente estável se ele é estável (8) e *quasi*-assintoticamente estável (10), ao mesmo tempo.

Pode ser verificado que a diferença básica entre as definições de estabilidade assintótica (definição 3) e *quasi*-estabilidade assintótica (definição 1) é que esta só atende aos critérios da primeira após um tempo  $t \geq \tau$ . Considerando que, após ampla revisão bibliográfica, não foi encontrada uma definição de *quasi*-estabilidade (sem o termo "assintoticamente"), neste trabalho é proposta a definição 4. Nesta definição, o

termo "*quasi*" foi empregado para formalizar a estabilidade de sistemas que atendam a definição clássica de estabilidade apenas após o tempo  $t \geq \tau$ .

**Definição 4.** O ponto de equilíbrio  $x = 0$  de (6) é *quasi*-estável se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  e um  $\tau = \tau(\varepsilon)$  tal que

$$\|x(0)\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq \tau. \quad (12)$$

Com o intuito de auxiliar no desenvolvimento e análise de sistemas *quasi*-estáveis, nesta tese foram desenvolvidas condições suficientes, do tipo Lyapunov, para a demonstração da estabilidade dos mesmos. Para tanto, na sequência do texto é definida a função  $V(x)$ , e em seguida tais condições são apresentadas nas proposições 1 e 2.

Apesar de se tratar de sistemas invariantes no tempo, a partir deste ponto o instante inicial será tratado como  $t_0$  para simplificar a apresentação das proposições.

Considerando que  $x = 0$  é o ponto de equilíbrio de (6), e seja  $V: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  uma função contínua, tal que

$$V(0) = 0, \quad (13)$$

$$V(x) > 0 \text{ em } \mathfrak{R}^n - \{0\} \quad (14)$$

$$\|x(t)\| \rightarrow \infty \Rightarrow V[x(t)] \rightarrow \infty \quad (15)$$

**Proposição 1.** Se, para uma função  $V(\cdot)$  que atende a (13), (14) e (15),

$$\forall t_0 \in \mathfrak{R}_+, \exists \tau \in (0, \infty) \mid \forall t \in [t_0 + \tau, \infty[ \Rightarrow V[x(t)] \leq V[x(t_0)], \quad (16)$$

em que  $t$  e  $t_0$  são medições de tempo, então (6) é *quasi*-estável.

**Prova.** Considerando inicialmente o sistema quando  $t \in [t_0, t_0 + \tau)$ , não há garantia alguma que  $V(x)$  seja decrescente, porém, considerando que as variáveis de estado do sistema são contínuas no tempo, então,

$$t \in [t_0, t_0 + \tau[ \Rightarrow ||t - t_0|| < \tau \Rightarrow ||x(t) - x(t_0)|| < \delta. \quad (17)$$

Como  $V(x)$  é contínua,

$$||x(t) - x(t_0)|| < \delta \Rightarrow ||V[x(t)] - V[x(t_0)]|| < \gamma. \quad (18)$$

Se  $V(\cdot)$  não for limitada nesse intervalo, então

$$\exists t \in [t_0, t_0 + \tau[ \mid V[x(t)] = \infty. \quad (19)$$

Portanto, para um  $V[x(t_0)]$  finito qualquer, considerando as propriedades da norma, segue que

$$V[x(t)] = \infty \Rightarrow ||V[x(t)] - V[x(t_0)]|| = \infty. \quad (20)$$

O que é uma contradição com (18), assim  $V(x)$  é limitada nesse intervalo. Isto significa que existe um  $k \in (0, \infty)$ , tal que

$$V[x(t)] \leq k \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \tau[. \quad (21)$$

Quando  $t \in [t_0 + \tau, \infty)$ , então da própria definição da proposição 1 e de (21),

$$V[x(t)] \leq V[x(t_0)] \leq k. \quad (22)$$

Seja  $B_k$  um conjunto fechado, dado por

$$B_k = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid V(x) \leq k\}. \quad (23)$$

$\forall k \in \mathfrak{R}_+$ , o raio da bola  $B_k$ , de (15),

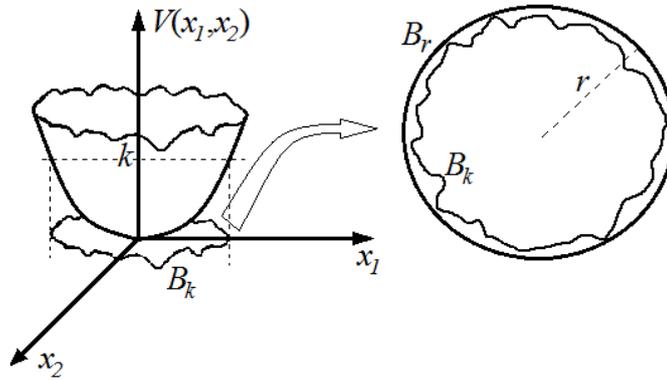
$$\exists r < \infty \in \mathfrak{R}_+ \mid \|x(t)\| > r \Rightarrow V[x(t)] > k. \quad (24)$$

Seja  $B_r$  o conjunto:

$$B_r = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid \|x(t)\| \leq r\}. \quad (25)$$

Então, como mostrado na Figura 10,

$$B_k \subset B_r. \quad (26)$$



**Figura 10. Bolas  $B_r$  e  $B_k$ .**

Como  $f[x(t)]$  é função global de Lipschitz, então

$$\|f[x(t)] - f[y(t)]\| \leq L \|x - y\|. \quad (27)$$

Porém, dentro da bola  $B_r$  e de acordo com as propriedades da norma:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2r. \quad (28)$$

Assim,

$$\|f[x(t)] - f[y(t)]\| \leq 2rL, \quad (29)$$

com  $r$  e  $L \in \mathfrak{R}_+$ .

Uma vez que (29) se mantém para todo  $x$  e  $y \in B_r$  e  $t \in \mathfrak{R}_+$ , essa condição também é válida quando  $y = 0$ . Nesse caso, de (7),

$$f(0) = 0. \quad (30)$$

Dessa forma,

$$\|f(x)\| \leq 2rL. \quad (31)$$

Seja  $h = 2rL$  uma constante positiva, então

$$\|f(x)\| \leq h. \quad (32)$$

Do teorema da existência e unicidade global [68] e considerando (27) e (32), existe uma única solução de  $f(x)$ ,  $\forall t \in \mathfrak{R}_+$ . Mesmo sendo  $f(x)$  função de Lipschitz, a prova da existência e unicidade foi apresentada para que não restem dúvidas relativas ao sistema abordado na proposição 1.

O desenvolvimento a seguir é apresentado para mostrar que  $x(0)$  é um ponto de equilíbrio *quasi*-estável. Como  $V(x)$  é contínua, com  $V[x(t_0)] = \psi$  e  $V(0) = 0$ ,  $\forall \psi > 0$ , sempre existirá um  $\delta > 0$ , tal que

$$\|x\| \leq \delta \Rightarrow V(x) < \psi. \quad (33)$$

Considerando a bola  $B_\psi$  como

$$B_\psi = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid V(x) \leq \psi\}. \quad (34)$$

De maneira análoga a (24), de (15),

$$\exists \varepsilon < \infty \in \mathfrak{R}_+ \mid \|x(t)\| > \varepsilon \Rightarrow V[x(t)] > \psi. \quad (35)$$

Seja  $B_\varepsilon$  o conjunto,

$$B_\varepsilon = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid \|x(t)\| \leq \varepsilon\}. \quad (36)$$

Pela própria definição da proposição,  $\forall t \geq t_0 + \tau$ ,

$$V[x(t)] \leq V[x(t_0)]. \quad (37)$$

Assim,

$$\forall t \geq t_0 + \tau \Rightarrow x(t) \in B_\psi \subset B_\varepsilon. \quad (38)$$

De (33) e (38),  $\forall t \geq t_0 + \tau$  e  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$\exists \delta > 0 \mid \|x(0)\| < \delta \Rightarrow V[x(t)] < \psi \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon. \quad (39)$$

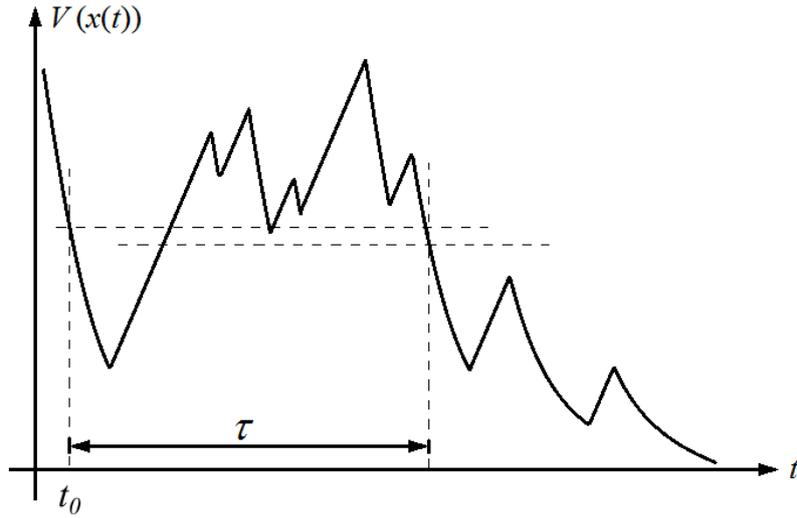
Assim, de acordo com a definição 4,  $x = 0$  é um ponto de equilíbrio *quasi*-estável para o tempo finito  $t \geq t_0 + \tau$ . ■

**Proposição 2.** Se, para uma função  $V(\cdot)$  que atende a (13), (14) e (15),

$$\forall t_0 \in \mathfrak{R}_+, \exists \tau \in (0, \infty) \mid \forall t \in [t_0 + \tau, \infty[ \Rightarrow V[x(t)] < V[x(t_0)], \quad (40)$$

em que  $t$  e  $t_0$  são medições de tempo, então (6) é *quasi*-estável e  $V[x(t)] \rightarrow L$ ,  $L \in [0, V[x(t_0)])$ .

**Observação 1.** O resultado da proposição 2 é particularmente importante quando  $L = 0$ , pois assim é possível mostrar que, nesse caso, o sistema é *quasi*-assintoticamente estável, como mostrado na prova desta proposição. Na Figura 11 é apresentado um exemplo de chaveamento que atende as condições das proposições 1 e 2.



**Figura 11.** Exemplo de função  $V[x(t)]$  de um sistema de chaveado que atende às proposições 1 e 2.

**Prova.** Para provar que (40) leva à condição de  $V[x(t)] \rightarrow L$ ,  $L \in [0, V[x(t_0)]]$ , é necessário provar que

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow V[x(t)] \rightarrow L. \quad (41)$$

Como  $V(0) = 0$ , então

$$\forall a > 0 \in \mathfrak{R}, \exists x \mid V(x) \leq a. \quad (42)$$

Ou,

$$\forall a > 0 \in \mathfrak{R}, \exists t_0 \mid V[x(t_0)] \leq a. \quad (43)$$

A partir da definição da proposição,

$$\exists \tau \geq 0 \Rightarrow V[x(t)] < V[x(t_0)] \quad \forall t \geq t_0 + \tau, \forall t_0 \in \mathfrak{R}_+. \quad (44)$$

De (43) e (44),

$$V[x(t)] < a \quad \forall a > 0, \forall t \geq t_0 + \tau, \forall t_0 \in \mathfrak{R}_+. \quad (45)$$

Assim,

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow V[x(t)] \rightarrow L, L \in [0, V[x(t_0)]]. \quad (46)$$

Um exemplo do resultado (46) é apresentado na Figura 7. Esse resultado é particularmente importante quando é possível provar que  $L \rightarrow 0$ , que pode ser obtido impondo restrições no sistema, como no caso da proposição 4, apresentada a seguir. Nesses casos, como  $L = 0$  e  $t \geq t_0 + \tau$ ,  $x(t) \in B_\psi$  (38),

$$||V[x(t)]|| \rightarrow 0 \Rightarrow ||x(t)|| \rightarrow 0. \quad (47)$$

Dessa forma,

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow ||x(t)|| \rightarrow 0. \quad (48)$$

Considerando a definição 1, conclui-se, portanto, que quando  $L = 0$ , (6) é *quasi*-assintoticamente estável. ■

**Observação 2.** Os sistemas aqui tratados são considerados invariantes no tempo e podem se afastar da meta em instantes de tempo finitos, considerando as condições apresentadas. Um exemplo de função  $V(x)$  com essas características é apresentado na Figura 12.

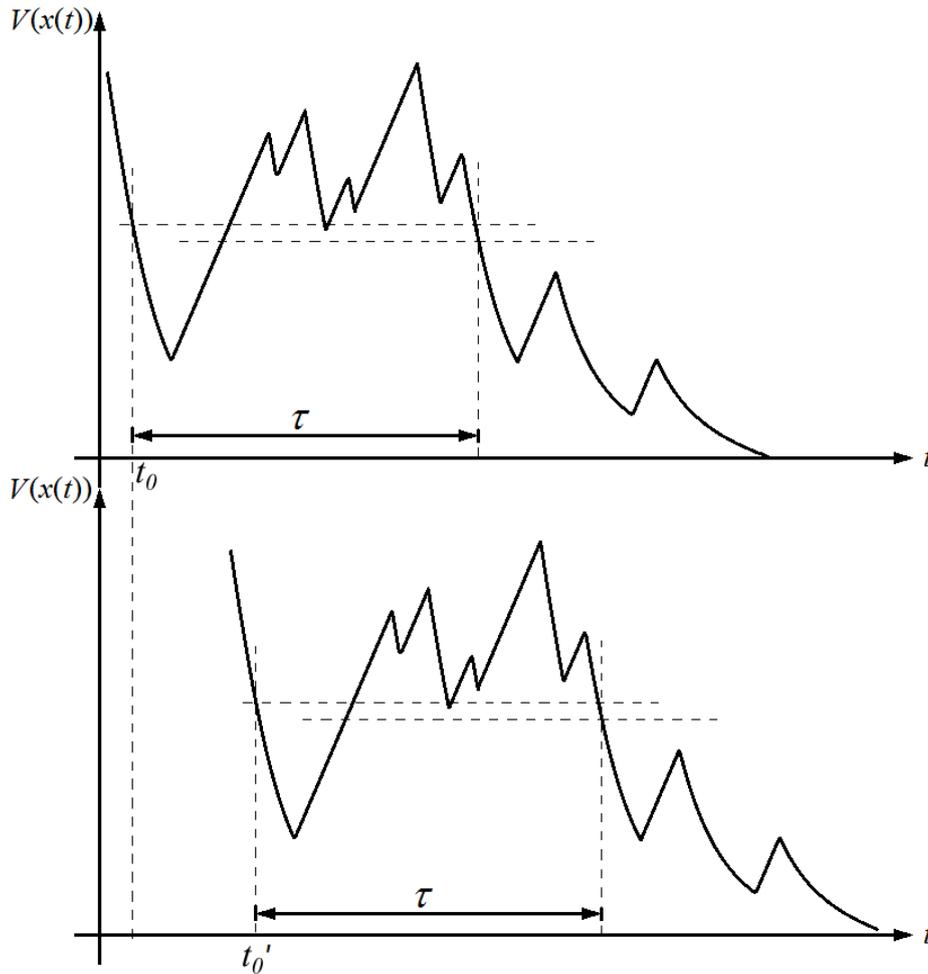


Figura 12. Exemplo de função  $V(x)$ , invariante no tempo e que atende as proposições apresentadas.

## 4.2. Sistemas Chaveados Baseados em Objetivo de Controle Principal

Considerando dois sistemas do tipo (1), quais sejam:

$$\dot{x} = f_1(x_1), \quad (49)$$

e

$$\dot{x} = f_2(x_2), \quad (50)$$

em que  $f_1: \mathfrak{R}^k \rightarrow \mathfrak{R}^k$  é um mapa de Lipschitz de um domínio  $\mathfrak{R}^k$  em  $\mathfrak{R}^k$ ,  $f_2: \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^m$  uma função contínua qualquer e  $x_1$  e  $x_2$  vetores de dimensão  $k$  e  $m$ , respectivamente, de variáveis de estado contínuas no tempo dos sistemas (49) e (50).

Supõe-se que é sabido *a priori* que (49) é globalmente assintoticamente estável (GAE) segundo Lyapunov, ou seja [68],

$$V_1(x) > 0 \quad \forall x \in \mathfrak{R}^n - \{0\}, \quad (51)$$

$$V_1(0) = 0, \quad (52)$$

$$\dot{V}_1(x) < 0 \quad \forall x \in \mathfrak{R}^n - \{0\}, \quad (53)$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V_1(x) \rightarrow \infty, \quad (54)$$

sendo  $V_1(x_1)$  função de Lyapunov de (49), e

$$f_1(0) = 0. \quad (55)$$

Seja o sistema chaveado formado pelo chaveamento entre funções do tipo (49) e do tipo (50), apresentado na forma:

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x), \\ f_2(x), \\ \vdots \\ f_i(x), \end{cases} \quad (56)$$

sendo  $f_i: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  definida pelo chaveamento das funções  $f_{1..i}$ , em que  $f_1: \mathfrak{R}^k \rightarrow \mathfrak{R}^k$  é função do tipo (49) e  $f_{2..i}: \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^m$  são funções do tipo (50), e  $x = \{x_1 \cup x_2 \cup \dots\}$  o vetor de variáveis de estado do sistema de dimensão  $n \leq k + m$ .

As funções do tipo (49) e (50) que compõem este sistema chaveado podem possuir (ou não) objetivos de controle diferentes, sendo as funções do tipo (50) sem restrições quanto à estabilidade ou objetivo de controle.

A ideia do sistema chaveado com objetivo de controle principal, proposta neste trabalho, consiste em considerar que  $f_1(x)$  é o sistema principal, que leva o sistema chaveado a atingir o objetivo principal, ou seja, durante o tempo que o sistema estiver chaveado em  $f_1(x)$ , ele estará cumprindo o seu objetivo pré-estabelecido principal ou preponderante. Durante o tempo em que o sistema estiver chaveado em  $f_{2..i}(x)$ , ele estará

cumprindo outro objetivo, considerado como secundário. Assim, quando o sistema estiver chaveado em  $f_{2..i}(x)$ , as funções do tipo (50) podem ser consideradas como uma perturbação de (49).

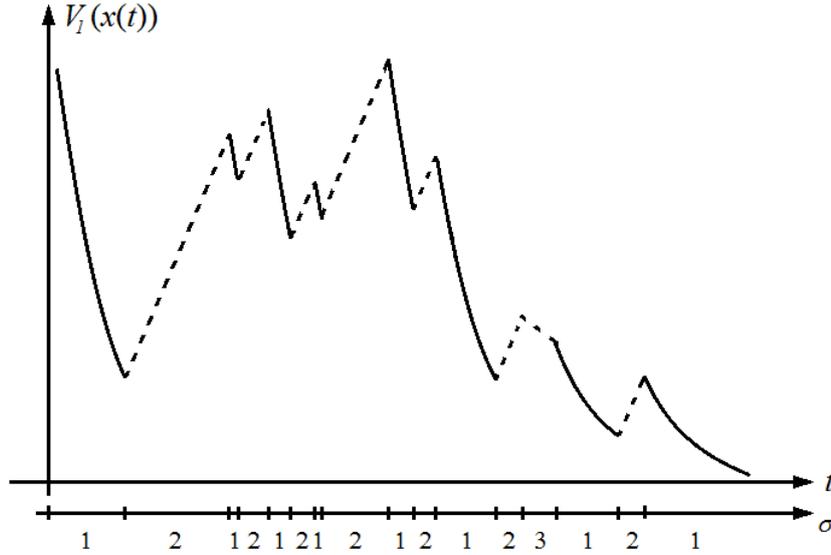
Esta abordagem permite que seja analisada a estabilidade do sistema chaveado em função apenas das  $k$  variáveis de estado de  $f_1(x_1)$ , que devem ser observáveis durante todo tempo. Nesse caso, o sistema terá como candidata SSLF (*Switched Systems Lyapunov Function*)  $V_1(x)$ , que é a função candidata de Lyapunov de (49), e como  $V_1$  é função somente das  $k$  variáveis de (49),  $V_1(x) = V_1(x_1)$ .

Nessa abordagem não é considerado se os objetivos das funções tipo (50) serão realizados, devendo ser analisado separadamente se o chaveamento estável de (56) permite que as funções  $f_{2..i}(x)$  tenham seus objetivos alcançados. O intuito da abordagem aqui proposta é possibilitar que haja chaveamento para  $f_{2..i}(x)$  sem que (56) deixe de cumprir seu objetivo principal.

Por simplicidade, em muitos casos será usada a notação  $V_1(x)$ , omitindo a dependência de  $x$  ou de  $V_1$  com o tempo. Porém, em alguns casos é necessário enfatizar essa dependência. Dessa forma, é importante ressaltar as três notações aqui empregadas:

$$V_1(x) = V_1[x(t)] = V_1(t). \quad (57)$$

Em algumas passagens deste texto será mais conveniente dividir a notação da função  $V_1(x)$  em duas partes:  $V_1(x) = V_{1fp}(x)$  quando o sistema estiver o chaveado em  $f_1(x)$  e  $V_1(x) = V_{1fs}(x)$  quando o sistema estiver chaveado em  $f_j(x)$ , com  $j \neq 1$ . Essa notação é ilustrada na Figura 13.



**Figura 13.** Notação adotada para  $V_I(x)$ , sendo  $V_{I_p}$  ( $\sigma = 1$ ) representado pela linha contínua e  $V_{I_{fs}}$  ( $\sigma = \{2;3\}$ ) pela linha tracejada.

É assumido que  $x_1$  e  $x_2$  sejam contínuas em relação ao tempo. Assim, se  $t$  e  $t_0$  são medidas de tempo, pelo conceito de continuidade, dado um  $\mu > 0$ , existe um  $\lambda > 0$ , com  $\mu$  e  $\lambda$  finitos, tal que

$$\|t - t_0\| < \lambda \Rightarrow \|x_1(t) - x_1(t_0)\| < \mu. \quad (58)$$

De forma similar, (58) pode ser escrita para  $x_2$ .

Uma vez estabelecido o conceito de objetivo de controle principal, nesta tese de doutorado são propostas condições suficientes para os sistemas de controle chaveados com esta característica. Tais condições garantem a *quasi*-estabilidade assintótica destes sistemas e são apresentadas nas proposições 3, 4 e 5.

**Proposição 3.** Dado um sistema chaveado do tipo (56), com função candidata SSLF  $V_1(x)$ , escolhida de acordo com (13), (14) e (15), se

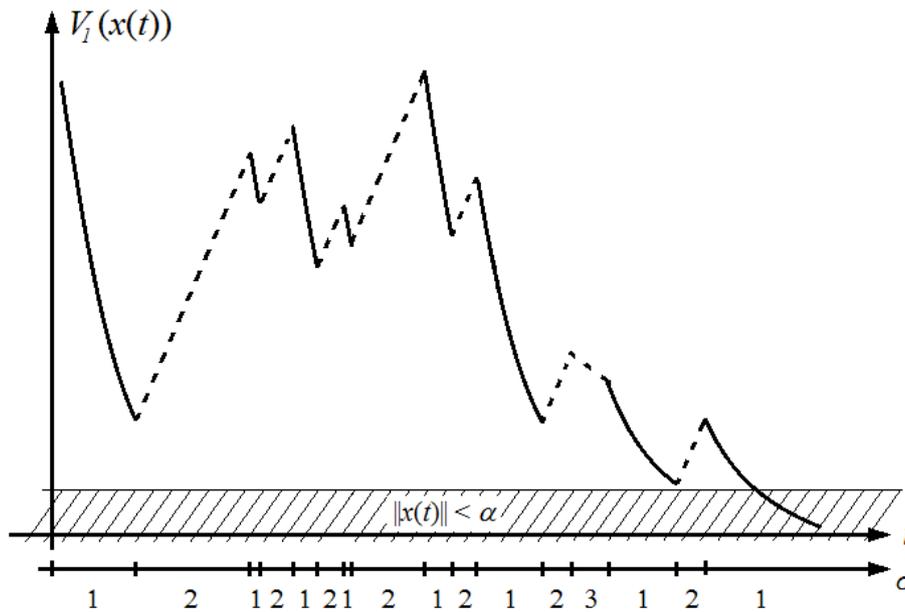
$$\exists \alpha > 0 \mid \|x\| < \alpha \Rightarrow \dot{x} = f_1(x); \quad (59)$$

$$T_p \geq T_s; \quad (60)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \geq \alpha \Rightarrow \sup [\dot{V}_{1fp}(x)] \leq -\sup [\dot{V}_{1fs}(x)], \quad (61)$$

então (56) é *quasi*-estável, em que  $\sup(\cdot)$  representa supremo da função. Considerando um  $\varepsilon > 0$  qualquer e tão pequeno quanto se queira,  $T_P$  é o tempo finito total em que o sistema esteve chaveado no objetivo principal até que  $\|x\| < \varepsilon$  e  $T_S$  o tempo total que (56) esteve chaveado nos objetivos secundários.

Um exemplo de função SSLF de um sistema chaveado que atende à proposição 3 é mostrado na Figura 14. Nesta figura pode ser observado que a condição (61) garante que o valor máximo da derivada em função do tempo de  $V_{1fp}(x)$  seja sempre menor que zero para  $\|x\| \geq \alpha$ .



**Figura 14.** Quando  $\|x(t)\| \geq \alpha$ , a derivada de  $V_{1fp}$  (linha contínua) é sempre menor do que zero.

**Prova.** Quando  $\|x(t)\| < \alpha$ , a condição (59) garante que não há chaveamentos, sendo o sistema descrito apenas por (49), que é *a priori* globalmente assintoticamente estável. Assim, será necessário apenas estudar o caso em que  $\|x(t)\| \geq \alpha$ .

O chaveamento para cada sistema determina um comportamento na função  $V_1[x(t)]$ , e a variação dessa função em determinado tempo pode ser obtida com o somatório de todas as variações ocorridas em cada chaveamento. Assim,

$$\Delta V_1 = \sum \Delta V_{1fp} + \sum \Delta V_{1fs}, \quad (62)$$

em que o operador  $\Delta(\cdot)$  representa a diferença entre o valor final e o valor inicial da função em determinado intervalo.

Dada a sequência  $c = \{c_1; c_2; \dots; c_q\}$ , tem-se a propriedade do somatório

$$\sum_{p=1}^q c_p \leq q \cdot \max(c), \quad (63)$$

em que  $\max(\cdot)$  representa o maior valor da sequência, e considerando um tempo,  $\Delta t$ , suficientemente pequeno, pode-se dividir o tempo total do experimento (que pode ser considerado finito),  $T_p + T_s$ , em  $n_p + n_s$  intervalos iguais de tamanho  $\Delta t$ , sendo  $n_p$  o número de intervalos que o sistema está chaveado na função principal e  $n_s$  o número de intervalos em que o sistema está chaveado em algum objetivo secundário, então,

$$\sum_{i=1}^{n_p} \Delta_i(V_{1fp}) \leq n_p \cdot \Delta_{\max}(V_{1fp}), \quad (64)$$

sendo  $\Delta_{\max}(\cdot)$  o maior valor de  $\Delta(\cdot)$  no somatório.

De forma similar a (64),

$$\sum_{i=1}^{n_s} \Delta_i(V_{1fs}) \leq n_s \cdot \Delta_{\max}(V_{1fs}). \quad (65)$$

De (62), (64) e (65),

$$\Delta(V_1) \leq n_p \cdot \Delta_{\max}(V_{1fp}) + n_s \cdot \Delta_{\max}(V_{1fs}). \quad (66)$$

Considerando a definição de  $\Delta_{\max}$  e de (61),

$$\Delta_{\max}(V_{1fp}) \leq -\Delta_{\max}(V_{1fs}). \quad (67)$$

Multiplicando ambos os lados de (67) por  $n_S$ ,

$$n_S \cdot \Delta_{max} (V_{1f_p}) \leq -n_S \cdot \Delta_{max} (V_{1f_s}). \quad (68)$$

De (60), existe um tempo finito,  $\tau = T_P + T_S$ , tal que  $T_P \geq T_S$ , então, a partir desse instante,

$$n_P \geq n_S. \quad (69)$$

A condição (61) garante que  $\Delta_{max}(V_{1fp}) < 0$ . Então, como  $n_P$  e  $n_S \geq 0$ , multiplicando os dois lados da inequação (69) por  $\Delta_{max}(V_{1fp})$ ,  $\forall t \geq t_0 + \tau$ , tem-se que

$$n_P \cdot \Delta_{max} (V_{1f_p}) \leq n_S \cdot \Delta_{max} (V_{1f_p}). \quad (70)$$

De (68) e (70),

$$n_P \cdot \Delta_{max} (V_{1f_p}) \leq -n_S \cdot \Delta_{max} (V_{1f_s}), \quad (71)$$

ou ainda,

$$n_P \cdot \Delta_{max} (V_{1f_p}) + n_S \cdot \Delta_{max} (V_{1f_s}) \leq 0 \quad (72)$$

Dessa forma, de (66) e (72),

$$\Delta(V_1) \leq 0. \quad (73)$$

Mas,

$$\Delta(V_1) \leq 0 \Rightarrow V_1[x(t)] \leq V_1[x(t_0)], \forall t > t_0 + \tau. \quad (74)$$

Então, de acordo com a proposição 1, o sistema chaveado (56) é *quasi*-estável.

■

**Proposição 4.** Dado um sistema chaveado da proposição 3, se

$$\forall x \in \mathfrak{R}^n \mid \|x\| \geq \alpha \Rightarrow \sup [\dot{V}_{1f_p}(x)] < -\sup [\dot{V}_{1f_s}(x)], \quad (75)$$

então (56) é *quasi*-assintoticamente estável.

**Prova.** Quando o tempo finito,  $\tau = T_P + T_S$ , leva à condição (75), então a inequação (71) fica na forma

$$n_P \cdot \Delta_{max}(V_{1f_p}) < -n_S \cdot \Delta_{max}(V_{1f_s}). \quad (76)$$

Substituindo (76) em (66),

$$\begin{aligned} \Delta(V_1) &< -n_S \cdot \Delta_{max}(V_{1f_s}) + n_S \cdot \Delta_{max}(V_{1f_s}) \\ &\Rightarrow \Delta(V_1) < 0, \forall t > \tau + t_0. \end{aligned} \quad (77)$$

Dessa forma, de acordo com a proposição 2, o sistema chaveado (56) é *quasi*-estável e  $V_1[x(t)] \rightarrow L$ ,  $L \in [0, V_1[x(t_0)]]$ . Assim, fica provado que o sistema tende a uma assíntota  $L$ . Será provado a seguir que para o caso (75) a assíntota  $L$  é igual a zero, logo, de acordo com a proposição 2, o sistema (56) é *quasi*-assintoticamente estável.

Seja a bola  $B_\alpha$ ,

$$B_\alpha = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid \|x(t)\| < \alpha\}. \quad (78)$$

Considerando inicialmente a hipótese que quando o tempo tende a infinito,  $x(t)$  não entra na bola  $B_\alpha$ , tem-se

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \|x(t)\| \geq \alpha. \quad (79)$$

Por repetição de argumentos prévios,

$$\Delta(V_1) < n_P \cdot \Delta_{max}(V_{1f_p}) + n_S \cdot \Delta_{max}(V_{1f_s}), \forall t \geq t_0 + \tau. \quad (80)$$

Aplicando (70) em (80),

$$\Delta(V_1) < n_s \cdot \Delta_{max}(V_{1f_p}) + n_s \cdot \Delta_{max}(V_{1f_s}), \forall t \geq t_0 + \tau. \quad (81)$$

ou ainda,

$$\Delta(V_1) < n_s \cdot [\Delta_{max}(V_{1f_p}) + \Delta_{max}(V_{1f_s})], \forall t \geq t_0 + \tau. \quad (82)$$

Seja a constante  $\gamma$ ,

$$\gamma = \Delta_{max}(V_{1f_p}) + \Delta_{max}(V_{1f_s}), \quad (83)$$

então (82) pode ser reescrito na forma

$$\Delta(V_1) \leq \gamma n_s. \quad (84)$$

De (75) e (83),  $\gamma < 0$ . Considerando (84), para qualquer tempo  $t \geq t_0 + \tau$ ,  $V_1[x(t)]$  pode ser escrito na forma

$$V_1[x(t)] = V_1[x(t_0)] + \Delta V_1 \Big|_{t_0}^t < V_1[x(t_0)] + \gamma n_s. \quad (85)$$

Considerando que durante o experimento  $n_s$  é crescente (se o sistema permanecer chaveado no objetivo principal, ele é globalmente assintoticamente estável segundo Lyapunov). Como  $\gamma < 0$ , haverá instantes em que o lado direito da inequação (85) será negativo, o que contradiz a premissa que  $V_1[x(t)] \geq 0$ . Portanto, a hipótese (79) é falsa. Isso significa que

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \|x(t)\| < \alpha \Rightarrow x \in B_\alpha. \quad (86)$$

Mas, de (59),

$$\|x(t)\| < \alpha \Rightarrow \dot{x} = f_1(x). \quad (87)$$

Como  $f_1(x)$  é globalmente assintoticamente estável, então  $V_1[x(t)] \rightarrow L = 0$ . Assim, de acordo com a proposição 2, (56) é *quasi*-assintoticamente estável. ■

**Proposição 5.** Considerando um sistema do tipo (56), com função candidata SSLF  $V_1(x)$ , escolhida de acordo com (13), (14) e (15), que atende a proposição 2, sejam  $t_i$  e  $t_j$  dois instantes, se  $\forall i$  e  $j$ , com  $t_j - t_i > \tau$  e  $t_j > t_i$ ,  $\exists \rho > 0$ , tal que,

$$V_1[x(t_j)] - V_1[x(t_i)] \leq -\rho \|x(t_i)\|, \quad (88)$$

então o sistema (56) é *quasi*-assintoticamente estável.

Diferentemente das proposições 3 e 4, o chaveamento apresentado na proposição 5 é dependente do estado atual, e dessa forma é caracterizado como um chaveamento lento, pois a ocorrência de um novo chaveamento, para a um subsistema secundário, depende do valor da norma das variáveis de estado, não podendo ser realizado a qualquer momento.

**Prova.** Devido a  $V_1(x)$  atender a proposição 2, como  $t_j - t_i > \tau$ , então  $V_1(x) \rightarrow L$ . Assim,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} V_1[x(t_i)] = L. \quad (89)$$

Não obstante,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} V_1[x(t_i + \tau)] = L. \quad (90)$$

Dessa forma,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} V_1[x(t_i + \tau)] - \lim_{i \rightarrow \infty} V_1[x(t_i)] = 0, \quad (91)$$

ou

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \{V_1[x(t_i + \tau)] - V_1[x(t_i)]\} = 0. \quad (92)$$

Considerando que  $t_j > t_i$  e  $t_j - t_i > \tau$ , de (92),

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \{V_1[x(t_j)] - V_1[x(t_i)]\} = 0. \quad (93)$$

De (88),

$$\lim_{i \rightarrow \infty} -\rho \|x(t_i)\| \geq \lim_{i \rightarrow \infty} \{V_1[x(t_j)] - V_1[x(t_i)]\} = 0. \quad (94)$$

Mas, como  $\rho > 0$  e considerando as propriedades da norma,

$$-\rho \|x(t_i)\| \leq 0. \quad (95)$$

Então, de (94) e (95),

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \|x(t_i)\| \rightarrow 0. \quad (96)$$

Assim, o sistema chaveado (56) é *quasi-assintoticamente estável*. ■

# Capítulo 5: Resultados

---

A característica de objetivo de controle principal pode trazer benefícios para diversas áreas de controle chaveado, sendo abordados como exemplo nesta tese o controle de processos químicos e a navegação de robôs móveis. Para tanto, nas seções subsequentes são apresentados os chaveamentos abordados, que atendem às proposições 4 e 5 deste trabalho, os modelos adotados nos experimentos, os controladores utilizados e os resultados obtidos com os mesmos.

Tais experimentos foram realizados de forma a atender apenas às proposições 4 e 5 deste trabalho, uma vez que as proposições 1, 2 e 3 foram usadas como base para o desenvolvimento das demais, e, sendo assim, são contempladas nos experimentos.

## 5.1. Chaveamentos Adotados

Nesta seção são apresentados os chaveamentos adotados na realização dos experimentos deste trabalho. Tais chaveamentos foram divididos em dois tipos, aqui chamados de chaveamento rápido, relativo ao chaveamento que atende à proposição 4, e chaveamento lento, relativo ao chaveamento que atende à proposição 5. Tais chaveamentos, na forma que foram aplicados neste nesta tese, são apresentados nas subseções 5.1.1 e 5.1.2.

### 5.1.1. Chaveamento Rápido

O chaveamento rápido foi elaborado de forma a atender a proposição 4, sendo que em tal chaveamento é considerado que as variáveis de estado do subsistema principal são conhecidas e observáveis durante todo o processo, assim,  $\|x(t)\|$  é continuamente mensurada. Com efeito, foram elaboradas três situações específicas que definem a forma como o chaveamento é realizado. Para a primeira situação é definido um  $\alpha$  (de acordo com cada aplicação) de maneira que quando  $\|x(t)\| < \alpha$  o sistema permanece durante todo o tempo no subsistema principal, atendendo, dessa forma, a (59).

Apenas quando a primeira situação não acontece, o chaveamento passa a ser determinado pelas outras duas situações. A segunda situação ocorre quando não há necessidade de chavear para um controlador secundário, e, assim, o sistema chaveado permanece no subsistema principal até que essa necessidade ocorra, momento em que acontece a terceira situação.

Na terceira situação é realizado o chaveamento de forma alternada entre o controlador principal e um dos secundários, podendo mais de um secundário ser acionado, porém intercalados pelo principal, proporcionando o tempo do controlador principal maior ou igual à soma dos tempos dos secundários, visto que o experimento é sempre iniciado com o sistema chaveado no controlador principal. Assim (60) é atendida.

A última condição a ser satisfeita na proposição 4 é (75), que determina o limite do supremo da derivadas de  $V_{1fs}$  em função do supremo da derivada de  $V_{1fp}$ . Essa condição é satisfeita limitando os sinais de controle dos subsistemas secundários em função dos sinais de controle do subsistema principal, como também em função das variáveis de estado e das constantes adotadas para cada controlador. Nos experimentos aqui abordados essa tarefa foi realizada de forma computacional.

### 5.1.2. Chaveamento Lento

Neste trabalho, foi intitulado como chaveamento lento aquele que atende a proposição 5. Para tanto, o mesmo deve estar de acordo com (40) e (88), o que representa uma forma mais simples de realizar o chaveamento, quando comparado com o chaveamento rápido da seção anterior. Assim como no caso do chaveamento rápido, é considerado que as variáveis de estado do subsistema principal são conhecidas e observáveis durante todo o processo, possibilitando que  $\|x(t)\|$  seja continuamente mensurada.

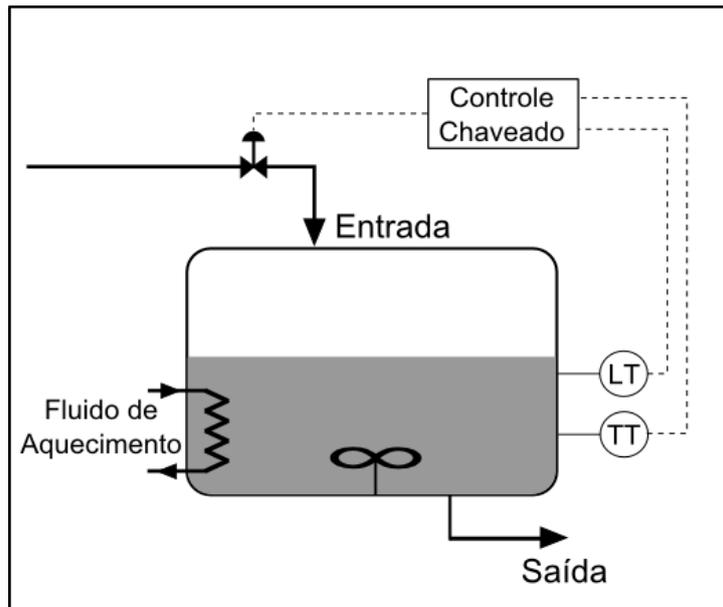
O chaveamento é feito com base na mensuração contínua de  $\|x(t)\|$  e  $V_1[x(t)]$ , sendo escolhido, de acordo com a aplicação desejada, o valor da constante  $\rho$  da proposição 5. Adicionalmente, foi definida  $\tau'$ , que deve ser finita, como sendo a constante de chaveamento lento, escolhida arbitrariamente, que tem por objetivo determinar o tempo em que a SSLF do sistema pode crescer.

Dessa forma, no chaveamento realizado, durante o tempo  $\tau'$  qualquer subsistema pode ser ativado, de acordo com a necessidade oriunda da tarefa em questão. Após esse tempo, o sistema permanece chaveado no subsistema principal até que as condições (40) e (88) sejam satisfeitas, permitindo novamente, por um tempo  $\tau'$ , que qualquer subsistema seja ativado. Como o controlador principal é globalmente assintoticamente estável segundo Lyapunov, tais condições serão satisfeitas em um tempo  $\tau$  finito, atendendo à proposição 5.

## 5.2. Experimento em Controle de Processos Químicos

Os experimentos relativos a controle de processos químicos foram realizados para um modelo de reator químico com misturador e serpentina de aquecimento, implementado para simulação no *software* Matlab® R2010a. A tarefa, aqui considerada, consiste em controlar o nível de um tanque por meio da vazão mássica de entrada de um líquido aquecido, mantendo a temperatura no interior do tanque preferencialmente constante. Nesse experimento é considerado que não há controle sobre a serpentina e que, portanto, o controle de temperatura deve ser feito também através da vazão mássica de entrada. No entanto, provavelmente, o ponto de equilíbrio do controle da temperatura não será o mesmo que o do controle de nível, o que justifica o fato de a temperatura constante ser apenas desejável. Dessa forma, pode ser aplicado o conceito de objetivo de controle principal, sendo o controle de nível o subsistema considerado principal.

O tanque a ser controlado e as variáveis envolvidas são mostradas na Figura 15.



**Figura 15. Reator químico com misturador e serpentina de aquecimento utilizado para o controle chaveado de nível (principal) e temperatura.**

O modelo matemático do reator químico considerado é regido pelas equações diferenciais

$$\frac{dV}{dt} = \frac{(W_i - W_o)}{\rho_l}, \quad (97)$$

$$\frac{d(V \cdot T)}{dt} = \frac{1}{\rho_l c_p} \left( W_i c_p T_i - W_o c_p T + q_h - \frac{T - T_a}{R} \right), \quad (98)$$

em que  $V$  e  $T$  representam, respectivamente, o volume e a temperatura do líquido no interior do tanque,  $t$  o tempo,  $W_i$  a vazão mássica de entrada,  $W_o$  a vazão mássica de saída,  $\rho_l$  a massa específica do líquido,  $c_p$  representa o calor específico a pressão constante do líquido,  $T_i$  é a temperatura do líquido de entrada e  $q_h$  o calor fornecido pela serpentina de aquecimento. Para a modelagem da perda de calor para o ambiente (último termo de (98)), a resistência térmica do tanque é representada por  $R$  e a temperatura ambiente, no exterior do tanque, por  $T_a$ .

O calor fornecido pela serpentina é dado por

$$q_h = UA(T_s - T), \quad (99)$$

sendo  $U$  a constante universal da serpentina de aquecimento,  $T_s$  a temperatura do fluido de aquecimento, no interior da serpentina, e  $A$  é a área total de troca térmica da serpentina, dada por

$$A = 2\pi r_s L, \quad (100)$$

para uma serpentina de comprimento  $L$  (quando esticada) e com secção transversal de raio  $r_s$ .

Considerando um tanque, com área da superfície  $A_r$ , revestido com um material de condutividade térmica  $k_r$  e espessura  $l$ , a resistência térmica foi modelada como

$$R = \frac{l}{A_r k_r}. \quad (101)$$

Dessa forma, o nível do tanque é dado por

$$H = \frac{V}{\pi r_r^2}, \quad (102)$$

em que  $H$  é o nível de líquido no tanque e  $r_r$  o raio do tanque, considerado como sendo cilíndrico.

Como o foco deste trabalho não está no controle de cada subsistema, o mesmo foi simplificado de forma a evidenciar os efeitos obtidos com o chaveamento. Assim, foi considerado neste trabalho que a vazão de saída,  $W_o$ , é constante e conhecida, como obtido com uma bomba de vazão constante. Com efeito, o sinal de controle associado ao controlador de nível,  $W_{ih}$ , é dado por

$$W_{ih} = W_o + k_{wh} e_h, \quad (103)$$

em que  $k_{wh}$  é a constante associada a este controlador e  $e_h$  o erro de nível, que representa a diferença entre nível do líquido no interior do tanque,  $H$ , e o nível desejado,  $H_d$ , assim

$$e_h = H_d - H. \quad (104)$$

Considerando a função candidata de Lyapunov,  $E$ , desse controlador como sendo

$$E = \frac{e_h^2}{2}, \quad (105)$$

de (97), (102), (104) e (105), tem-se

$$\dot{E} = -e_h \frac{W_{ih} - W_o}{\pi r_r^2 \rho_l}. \quad (106)$$

Aplicando (103) em (106),

$$\dot{E} = -\frac{k_{wh} e_h^2}{\pi r_r^2 \rho_l} \quad (107)$$

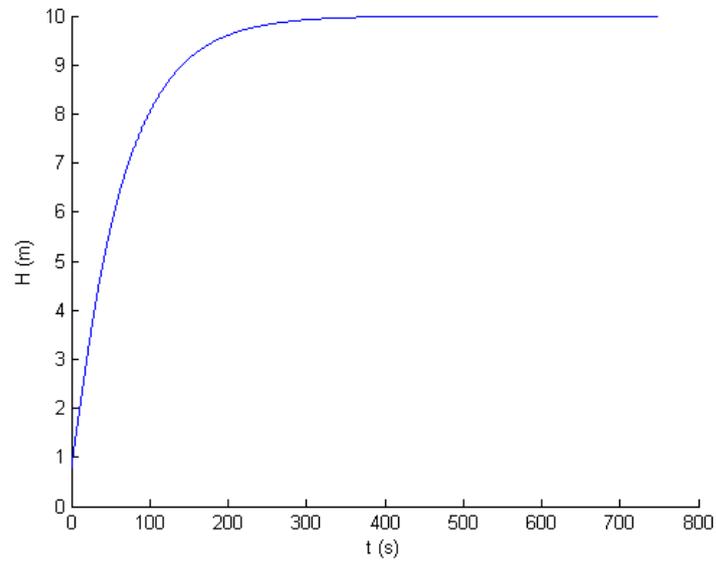
Dessa forma, desde que  $k_{wh} > 0$ ,

$$\dot{E} < 0, \forall e_h \in \mathfrak{R} - \{0\} \quad (108)$$

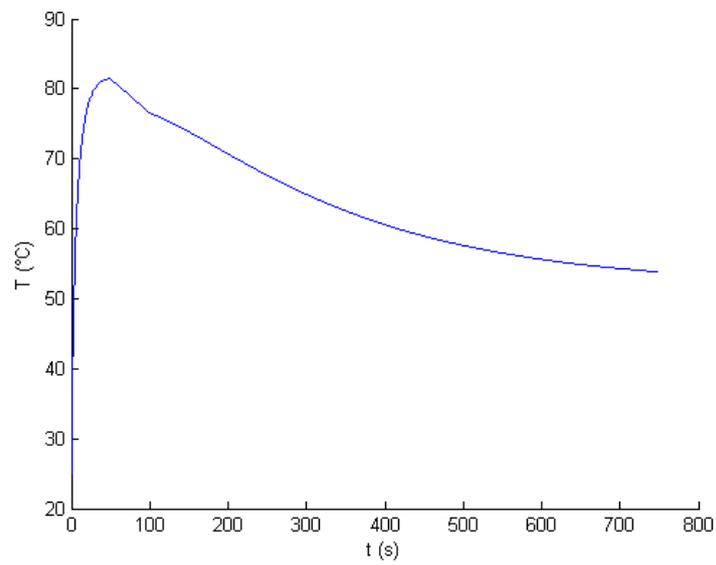
Assim, com a ação de controle (103), (97) é globalmente assintoticamente estável segundo Lyapunov.

As simulações com este modelo foram realizados considerando  $\rho_l = 1000 \text{ kg/m}^3$  (água),  $c_p = 4,185 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$ ,  $l = 5 \text{ mm}$ ,  $A_r = 150,8 \text{ m}^2$ ,  $k_r = 0,033 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ ,  $T_i = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_a = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $U = 2500$ ,  $r_s = 1 \text{ cm}$  e  $L = 5 \text{ m}$ . A temperatura do fluido no interior da serpentina  $T_S$  foi variada durante o experimento como forma de verificar o efeito da mesma na temperatura do líquido, assim, o experimento foi realizado com  $T_S = 60 \text{ }^\circ\text{C}$ , exceto entre os tempos 50 s e 100 s, nos quais  $T_S = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ .

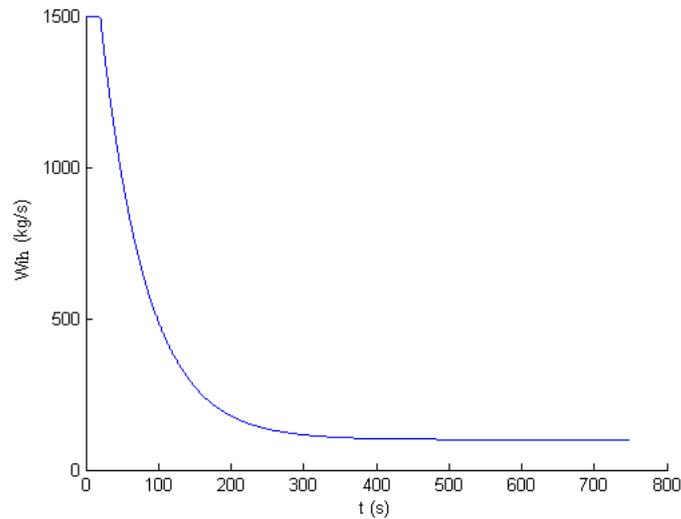
Os resultados obtidos apenas com o controlador de nível apresentado, com  $k_{wh} = 200$  e  $H_d = 10 \text{ m}$ , são mostrados nas Figuras 16, 17, 18 e 19.



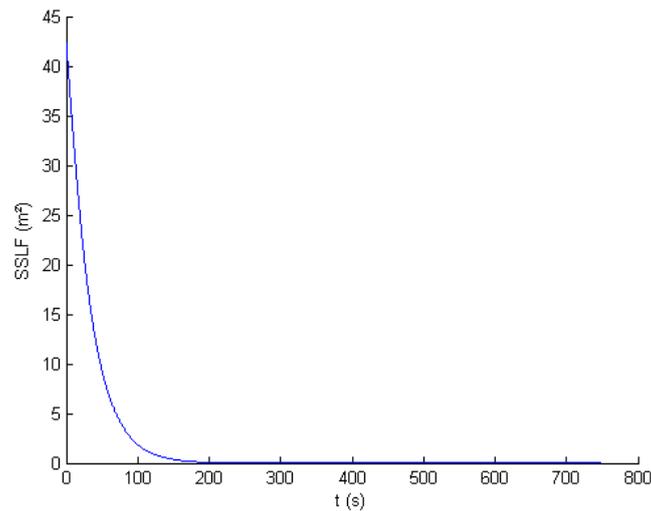
**Figura 16. Nível controlado, sem chaveamento, para o reator químico considerado.**



**Figura 17. Evolução da temperatura do interior do tanque, considerando apenas o controlador de nível.**



**Figura 18. Ação de controle aplicada ao sistema.**



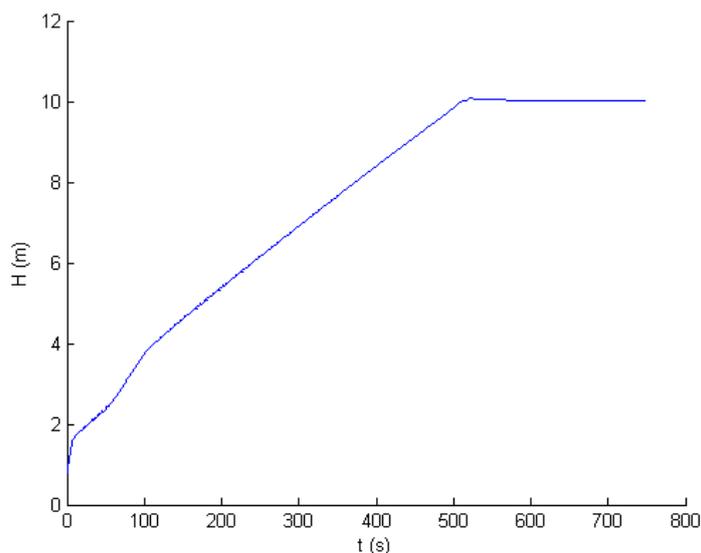
**Figura 19. Função SSLF para obtida no experimento.**

Considerando agora a inclusão de um subsistema secundário, que tenha como objetivo o controle da temperatura, propõe-se  $W_{it}$ , o sinal de controle para este fim, como

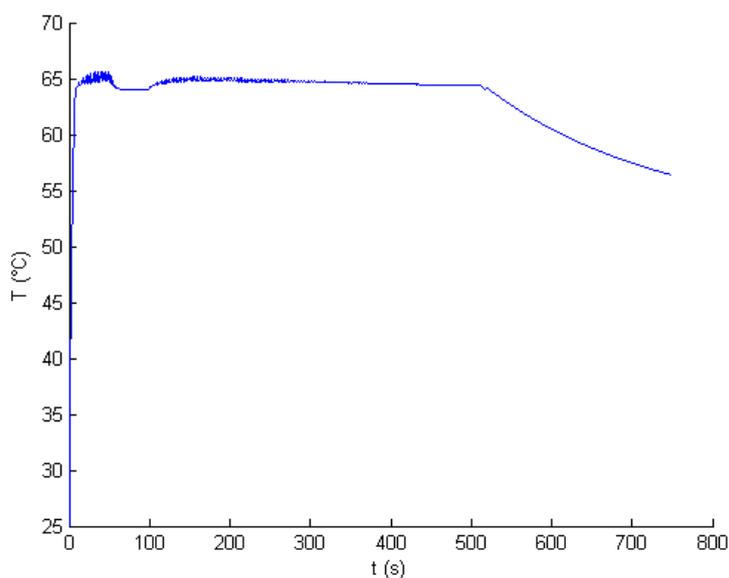
$$W_{it} = k_{wt}(T_d - T), \quad (109)$$

sendo  $k_{wt}$  a constante relativa a este controlador e  $T_d$  a temperatura desejada. Nenhuma análise com respeito à estabilidade deste subsistema será apresentada, uma vez que, para o chaveamento proposto, não é necessário o que tal controlador seja estável, tampouco garante que o objetivo deste controlador seja cumprido.

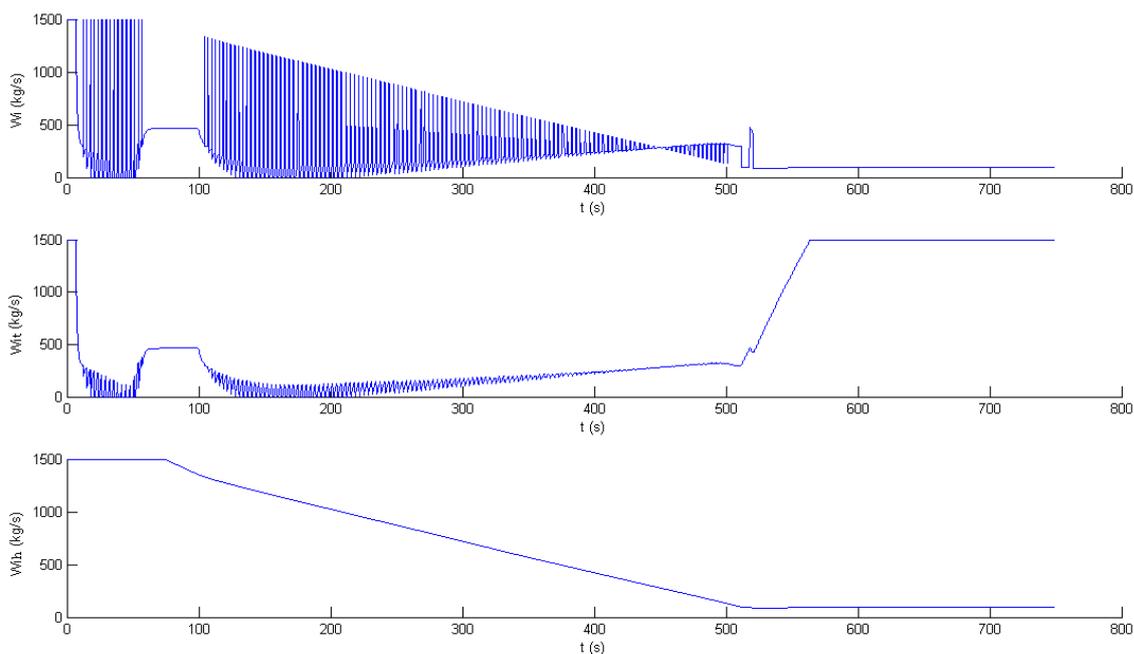
Para este experimento foi empregado o chaveamento lento da seção 5.1.2, considerando como subsistema principal o controlador de nível e como subsistema secundário o controlador de temperatura. As variáveis e constantes envolvidas nos controladores foram  $k_{wh} = 200$ ,  $k_{wt} = 500$ ,  $T_d = 65\text{ }^\circ\text{C}$  e  $H_d = 10\text{ m}$ , enquanto que foram aplicadas como constantes relativas ao chaveamento  $\rho = 0,05$  e  $\tau' = 2,5\text{ s}$ . Os resultados obtidos com este chaveamento são mostrados nas Figuras 20, 21, 22 e 23.



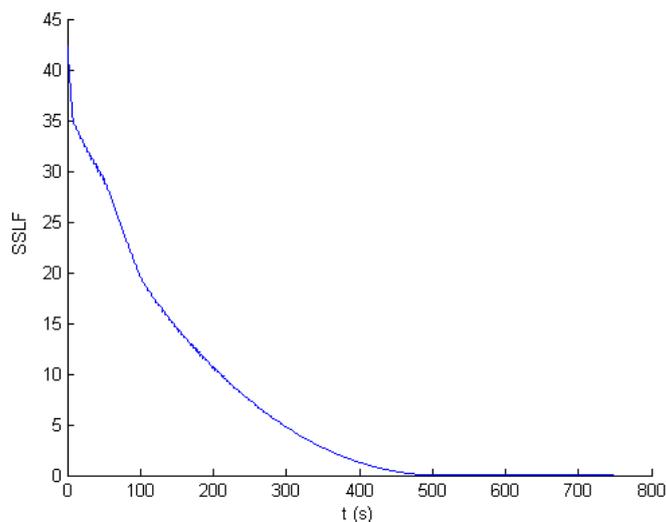
**Figura 20. Nível controlado, a partir do chaveamento lento entre o controlador de nível (principal) e o controlador de temperatura, para o reator químico considerado.**



**Figura 21. Evolução da temperatura obtida a partir do chaveamento lento entre o controlador de nível (principal) e o controlador de temperatura.**



**Figura 22.** Ações de controle do sistema chaveado,  $W_i$ , do controlador de temperatura,  $W_{it}$ , e do controlador de nível,  $W_{ih}$ .



**Figura 23.** Função SSLF obtida com o chaveamento.

Comparando a evolução da temperatura na Figura 21 com a da Figura 17, pode-se observar que o chaveamento manteve a temperatura significativamente mais constante quando comparado somente com o controle de nível. É importante ressaltar que, mesmo com o chaveamento, a meta principal foi alcançada. No entanto, para o chaveamento adotado, quando o nível esteve suficientemente próximo do desejável, a temperatura foi preterida como forma de manter tal nível, como pode ser observado na Figura 21, após o tempo  $t = 500$  s.

### 5.3. Experimentos em Navegação de Robôs Móveis

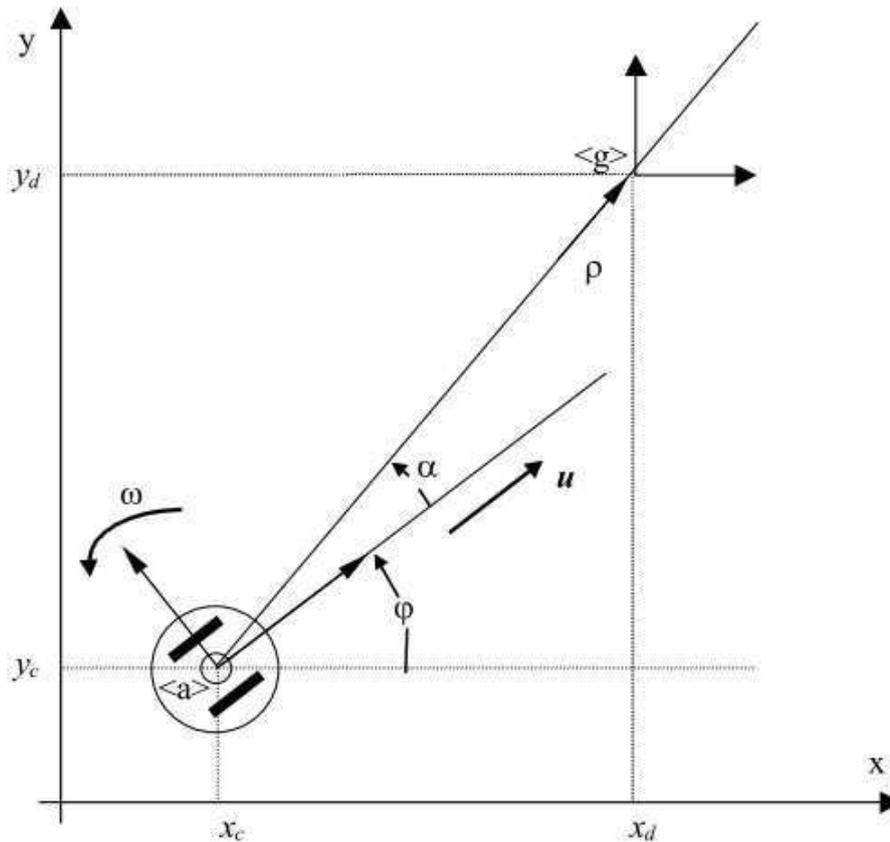
Como forma de ilustrar possíveis aplicações referentes às proposições apresentadas foram realizados experimentos reais e por simulação, sendo os reais realizados na plataforma Pioneer 3-DX em ambiente semiestruturado e os de simulação no *software* Matlab® R2010a, este último considerando apenas o modelo cinemático do robô.

Nas simulações foi usado um arranjo com 32 sensores ultrassônicos dispostos regularmente em toda a circunferência do robô. Tais sensores mediam uma distância máxima de 300 cm, com um erro de medição de 5%. Nas seções subsequentes são apresentados os controladores utilizados e os resultados obtidos com cada experimento.

#### 5.3.1. Controladores

Para os experimentos envolvendo navegação de robôs móveis, foram utilizados três controladores, desenvolvidos com base em [149], sendo eles de posição final, evitar obstáculos e seguir corredores.

O controlador de posição final será adotado como objetivo principal do sistema, e dessa forma deverá ser globalmente assintoticamente estável segundo Lyapunov. As variáveis e sistemas de coordenadas envolvidos nesse processo são apresentados na Figura 24, onde a tarefa consiste em levar o robô ao destino, representado pelo sistema de coordenadas  $\langle g \rangle$ , por meio das velocidades linear e angular, acopladas ao sistema de coordenadas  $\langle a \rangle$  do robô.



**Figura 24. Variáveis e eixos de coordenadas relativos ao controlador de posição final [149].**

Assim como proposto em [149, 150], as equações cinemáticas que descrevem o movimento do robô no ambiente são:

$$\dot{x} = u \cos \varphi ; \quad (110)$$

$$\dot{y} = u \sin \varphi ; \quad (111)$$

$$\dot{\varphi} = \omega. \quad (112)$$

em que  $u$  e  $\omega$  representam, respectivamente, as velocidades linear e angular do robô e  $\varphi$  o ângulo entre os sistemas de coordenadas do robô e do ambiente (formado pelos eixos  $(x, y)$  da Figura 24).

Para o controlador de posição final, a velocidade linear será descrita por  $V_{pf}$ , enquanto que a velocidade angular por  $W_{pf}$ . De acordo com [150], os sinais de controle

$$V_{pf} = kv_{pf} \tanh \rho \cos \alpha, \quad (113)$$

$$W_{pf} = kw_{pf} \cdot \alpha + kv_{pf} \left( \frac{\tanh \rho}{\rho} \right) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (114)$$

levam o sistema a ser globalmente assintoticamente estável segundo Lyapunov, em que  $kv_{pf}$  e  $kw_{pf}$  são constantes positivas,  $\rho$  é a distância entre o sistema de coordenadas do robô e o sistema de coordenadas do destino e  $\alpha$  o erro de orientação do robô com relação à linha que liga o robô ao destino, ambos mostrados na Figura 24.

Ainda segundo [150], a função de Lyapunov desse sistema é dada por

$$V = \frac{\rho^2 + \alpha^2}{2}. \quad (115)$$

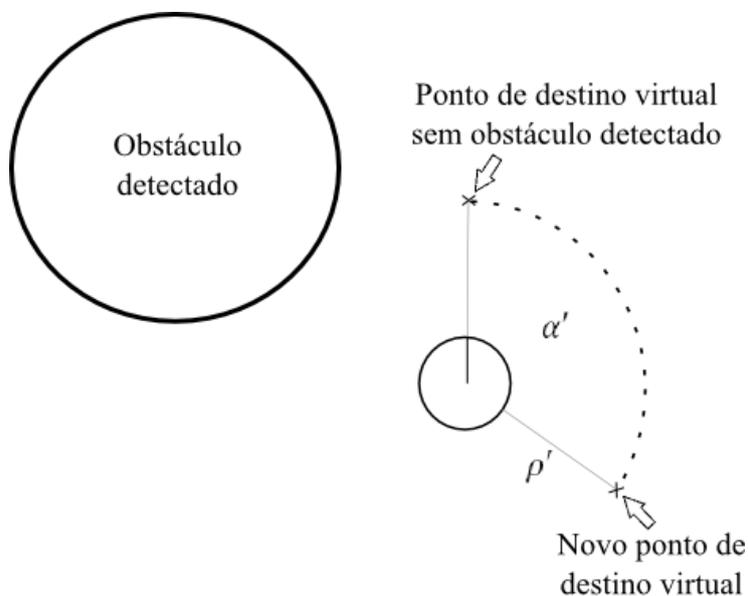
O controlador de evitar obstáculos, assim como sugere o próprio nome, tem como função evitar a colisão do robô com os obstáculos presentes na cena. Para tanto, tal controlador foi inspirado em [149] e consiste em manter uma velocidade linear constante e controlar a velocidade angular a partir de um ponto de destino virtual mantido a uma distância fixa do robô. Quando nenhum obstáculo é detectado, o ponto de destino virtual é posicionado no eixo  $x$  do sistema de coordenadas do robô. Caso contrário, é realizada uma rotação no ponto de destino virtual, de forma que o mesmo seja mantido oposto ao obstáculo, formando um ângulo de 180 graus entre o novo ponto de destino e o obstáculo, com relação ao robô. Dessa forma, a velocidade angular do controlador de evitar obstáculos  $W_{eo}$  pode ser calculada como em (114), porém considerando o ponto de destino virtual, assim

$$V_{eo} = \kappa_1, \quad (116)$$

$$W_{eo} = kw_{eo} \cdot \alpha' + kv_{eo} \left( \frac{\tanh \rho'}{\rho'} \right) \sin \alpha' \cos \alpha', \quad (117)$$

em que  $\kappa_1$  é uma constante positiva expressa em cm/s,  $\alpha'$  o erro de orientação do robô com relação ao ponto de destino virtual,  $\rho'$  uma distância, mantida constante, entre o robô e o ponto de destino virtual (neste trabalho essa distância foi adotada como 30 cm),

e  $k_{w_{eo}}$  e  $k_{v_{eo}}$  constantes positivas relativas a este controlador. Na Figura 25 estão ilustradas as principais variáveis envolvidas neste controlador.



**Figura 25. Ilustração no ambiente das principais variáveis do controlador de evitar obstáculos.**

Uma vez que, para a abordagem aqui proposta, não é necessário que os controladores secundários sejam estáveis, e nem tampouco garante que os objetivos deste controlador serão atendidos, não será apresentada neste trabalho uma análise a respeito da estabilidade do controlador de evitar obstáculos, visto que, em todos os experimentos aqui propostos, apenas o controlador de posição final é considerado como principal.

O terceiro e último controlador para navegação de robôs móveis abordado neste trabalho tem como objetivo navegar no centro de corredores, proporcionando uma navegação mais segura. Para tanto, o controlador de seguir corredores atua mantendo uma velocidade linear constante, de forma que a meta (navegação no centro do corredor) seja atingida a partir do controle da velocidade angular. As ações de controle associadas a este processo são [149]

$$V_{sc} = \kappa_2, \quad (118)$$

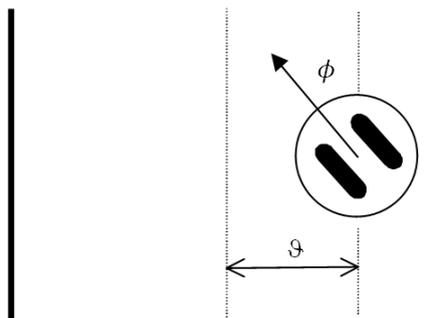
$$W_{sc} = k_{1sc} \cdot \phi + k_{2sc} \cdot \vartheta \cdot V_{sc} \cdot \frac{\sin \phi}{\phi}, \quad (119)$$

em que  $V_{sc}$  e  $W_{sc}$  são, respectivamente, as velocidades linear e angular associadas ao controlador de seguir corredores,  $\kappa_2$  é uma constante positiva expressa em cm/s,  $\phi$  o erro do ângulo do robô com relação à linha que define o centro do corredor, paralela às duas paredes, e  $\vartheta$  a menor distância entre o robô e essa linha.  $k_{1sc}$  e  $k_{2sc}$  são dados por

$$k_{1sc} = \frac{K_{1sc}}{a_{1sc} + |\phi|}, \quad (120)$$

$$k_{2sc} = \frac{K_{2sc}}{a_{2sc} + |\vartheta|}, \quad (121)$$

sendo  $K_{1sc}$ ,  $K_{2sc}$ ,  $a_{1sc}$  e  $a_{2sc}$  constantes positivas associadas a este controlador. As variáveis  $\phi$  e  $\vartheta$  são ilustradas na Figura 26.



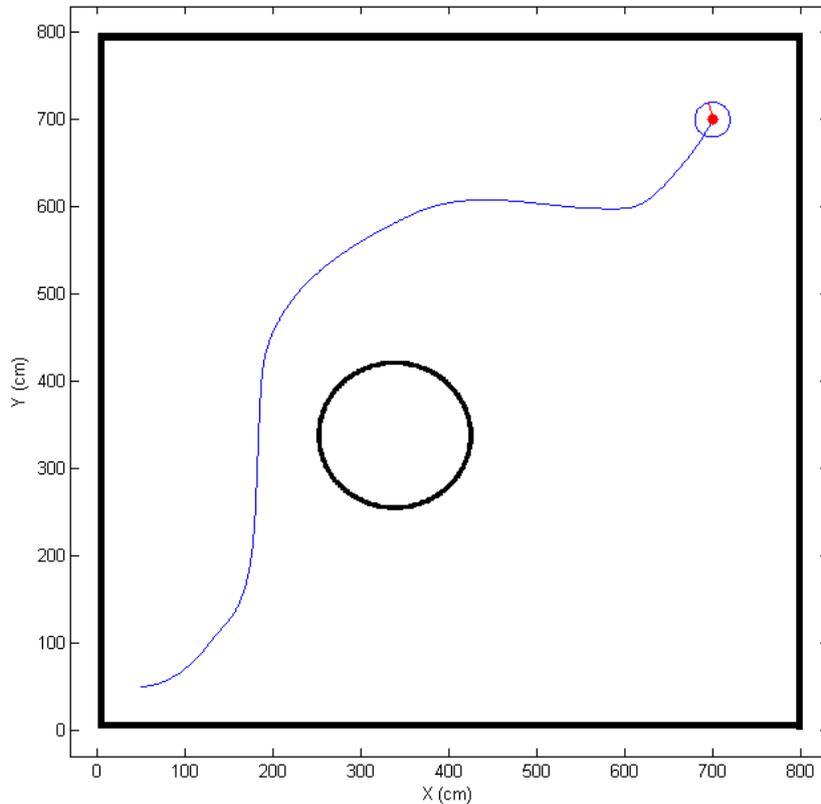
**Figura 26. Ilustração no ambiente das principais variáveis do controlador de seguir corredores [149].**

Assim como explicado para o caso do controlador de evitar obstáculos, não será realizada qualquer análise a cerca da estabilidade do controlador de seguir corredores. Nas seções subsequentes são apresentados os experimentos realizados envolvendo navegação de robôs móveis.

### 5.3.2. Experimento 1

Para o experimento 1 foram utilizados os controladores de posição final (objetivo de controle principal) e de evitar obstáculos, considerando o chaveamento rápido da seção 5.1.1. Esse experimento, realizado por simulação, consistiu na navegação em dois ambientes fechados, com o robô iniciado na posição (50 cm, 50 cm), com ângulo de 0 rad, e ponto de destino (700 cm, 700 cm). Para tal experimento, as constantes relativas aos controladores e chaveamento adotadas foram  $k_{w_{eo}} = \pi/30$ ,  $k_{v_{eo}} = 50$ ,  $k_{w_{pf}} = \pi/20$ ,  $k_{v_{pf}} = 20$ ,  $V_{eo} = 1$  cm/s e  $\alpha = 100$  cm.

No primeiro ambiente é apresentada uma estrutura clássica com um obstáculo entre o robô e o destino. Nas Figuras 27, 28 e 29 são mostrados os resultados obtidos com o controlador em questão para este ambiente.



**Figura 27. Trajetória realizada para um chaveamento, que atende à proposição 4, entre os controladores de posição final (principal) e de evitar obstáculos.**

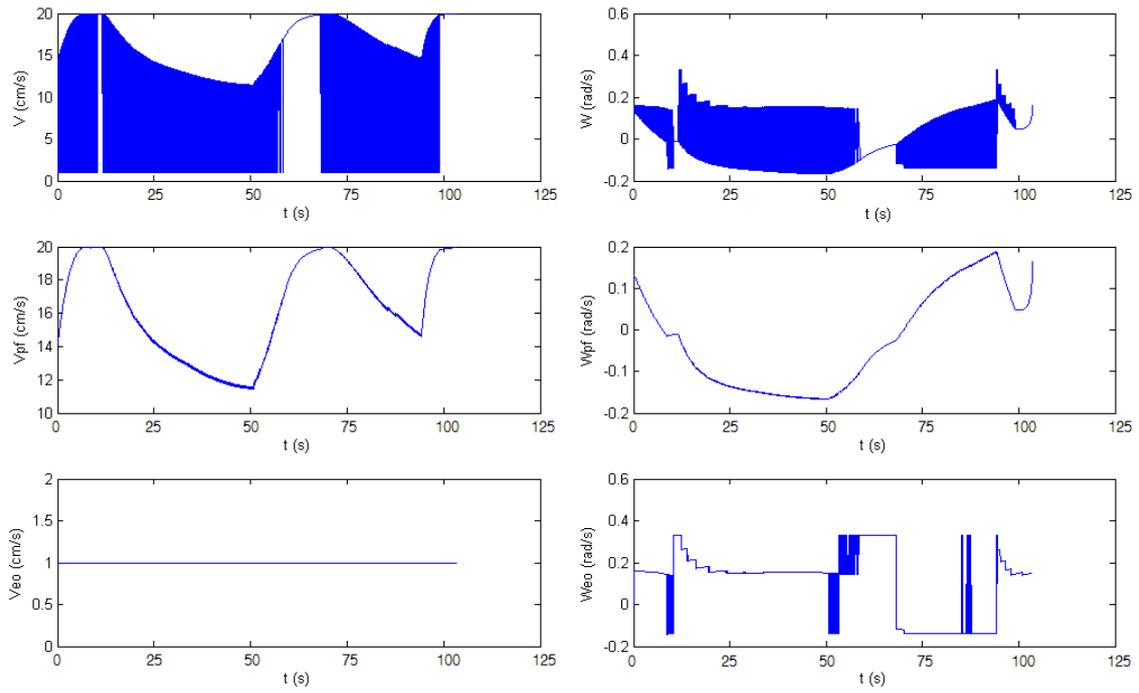


Figura 28. Velocidades comandadas para o experimento mostrado na Figura 27.

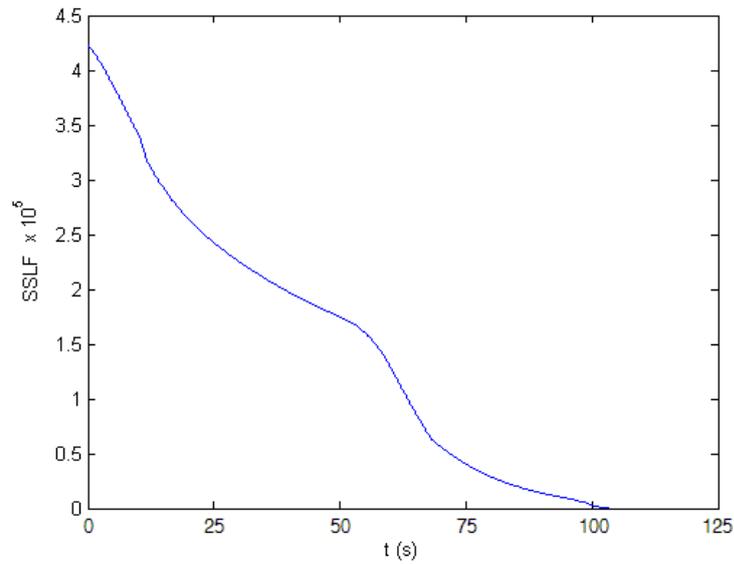
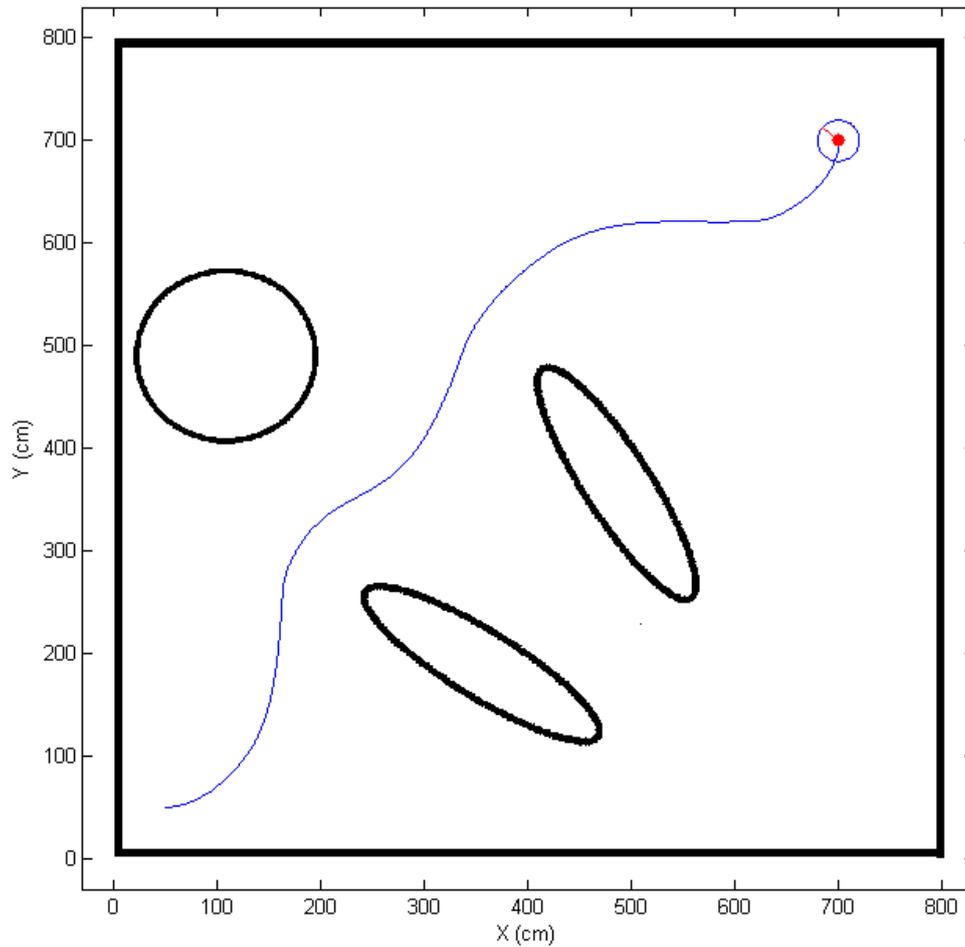


Figura 29. Função SSLF do experimento mostrado na Figura 27.

O segundo ambiente considerado neste experimento consistiu na inclusão de outros obstáculos, de forma que o robô tenha que fazer um “zig-zag” para atingir a meta. Nas Figuras 30, 31 e 32 são apresentados os resultados a tal experimento.



**Figura 30. Trajetória realizada para um ambiente com vários obstáculos, considerando um chaveamento, que atende à proposição 4, entre os controladores de posição final (principal) e de evitar obstáculos.**

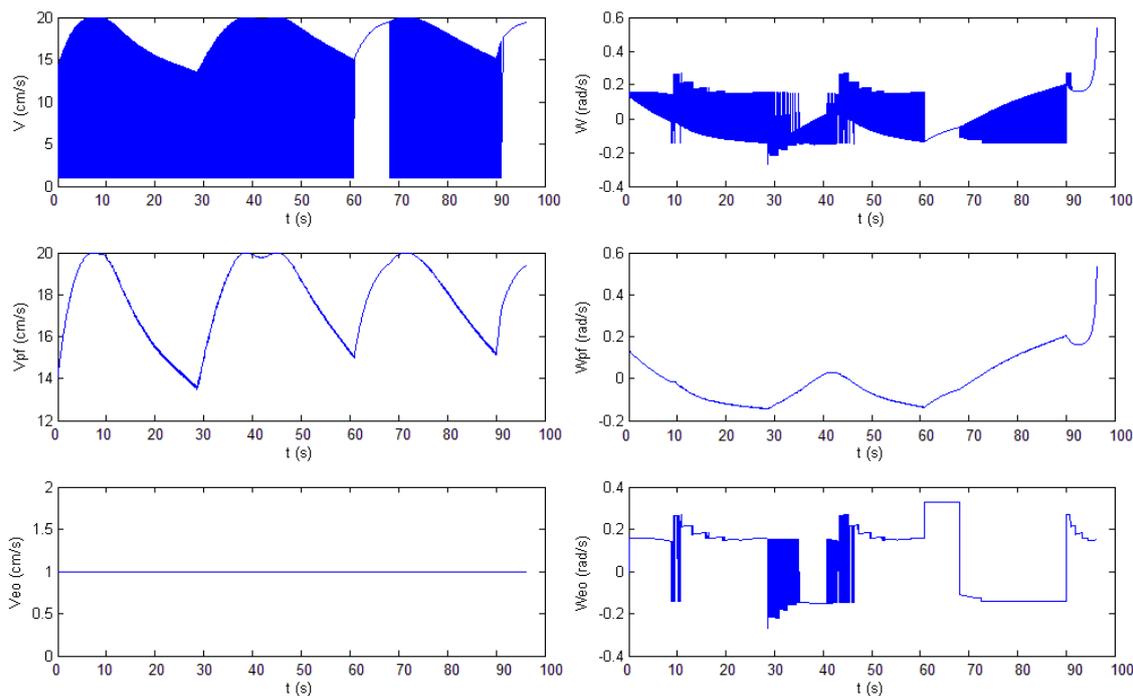


Figura 31. Velocidades comandadas para o experimento mostrado na Figura 30.

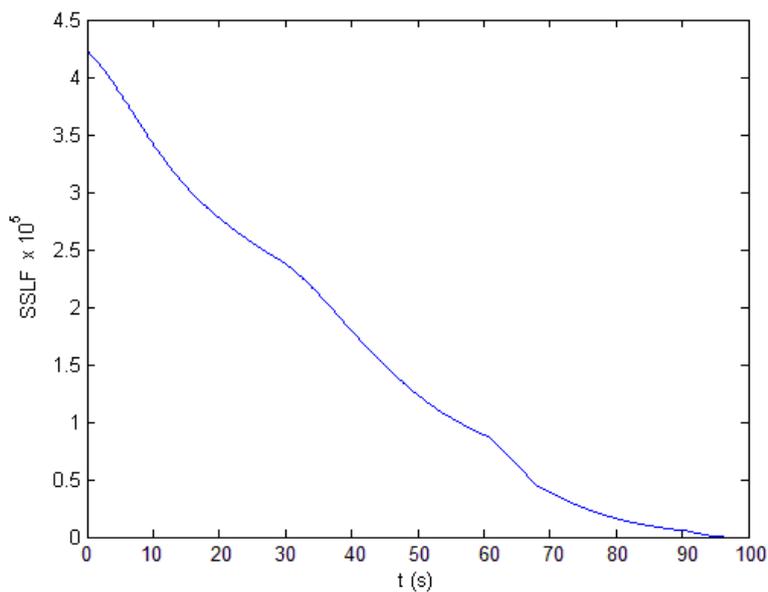


Figura 32. Função SSLF do experimento mostrado na Figura 30.

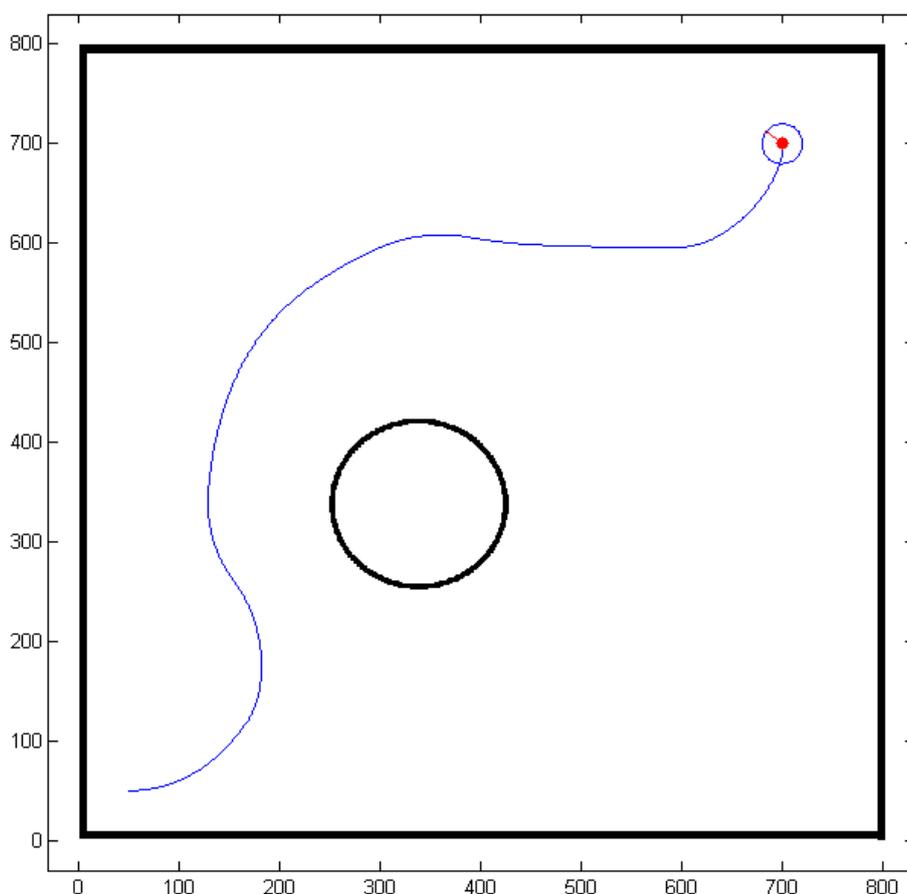
Nos resultados apresentados para este experimento, a tarefa foi cumprida com êxito, sendo atingida a meta do controlador considerado principal. Além disso, pode ser observado que o chaveamento adotado possibilitou ao sistema atender a um objetivo secundário, desviando os obstáculos presentes no ambiente.

Pode se verificar ainda que apesar de chavear para um sistema com ponto de equilíbrio diferente, a função SSLF é decrescente para este chaveamento.

### 5.3.3. Experimento 2

Para o experimento 2 foram utilizados os mesmos controladores e ambientes do experimento 1, no entanto, será considerado o chaveamento lento, mostrado na seção 5.1.2. Esse experimento também foi realizado por simulação, sendo o robô iniciado na posição (50 cm, 50 cm), com ângulo de 0 rad, e ponto de destino (700 cm, 700 cm). As constantes relativas aos controladores e chaveamento adotadas foram  $k_{w_{eo}} = \pi/30$ ,  $k_{v_{eo}} = 50$ ,  $k_{w_{pf}} = \pi/20$ ,  $k_{v_{pf}} = 20$ ,  $V_{eo} = 20$  cm/s,  $\rho = 1$  e  $\tau' = 1$  s.

Nas Figuras 33, 34 e 35 são mostrados os resultados obtidos para o primeiro ambiente.



**Figura 33. Trajetória realizada para o primeiro ambiente, considerando um chaveamento, que atende à proposição 5, entre os controladores de posição final (principal) e de evitar obstáculos.**

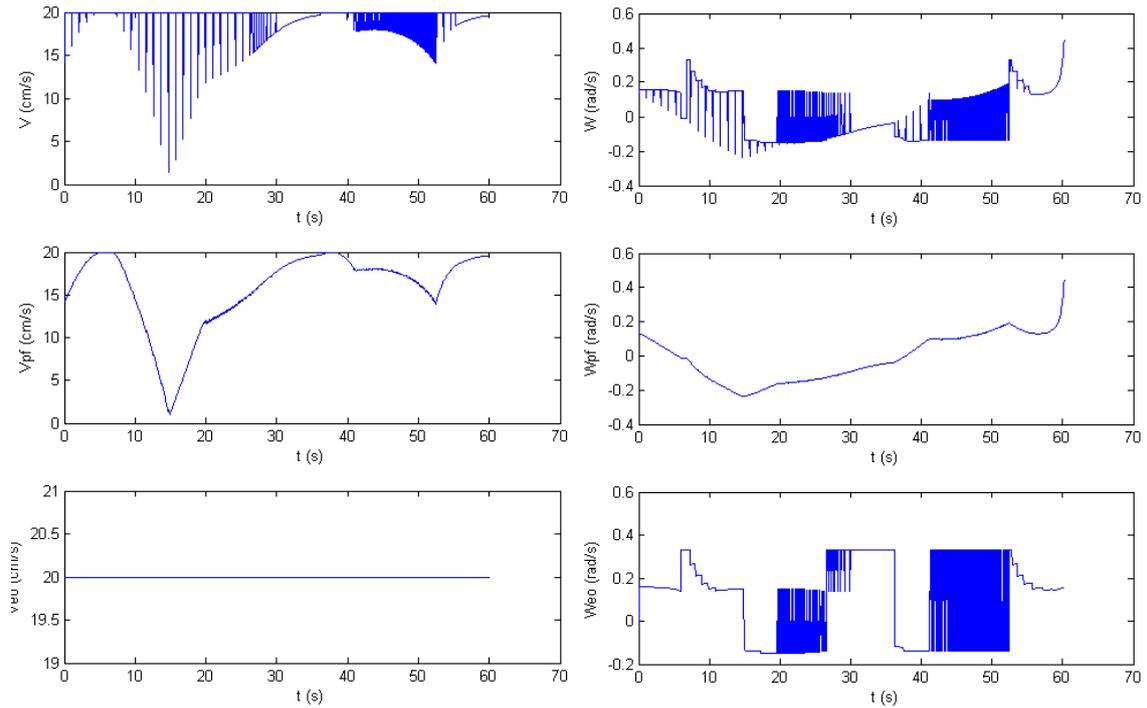


Figura 34. Velocidades comandadas para o experimento mostrado na Figura 33.

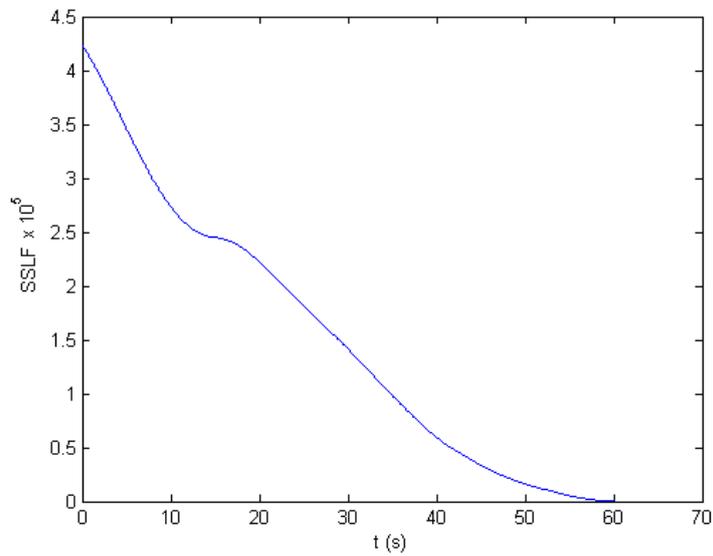
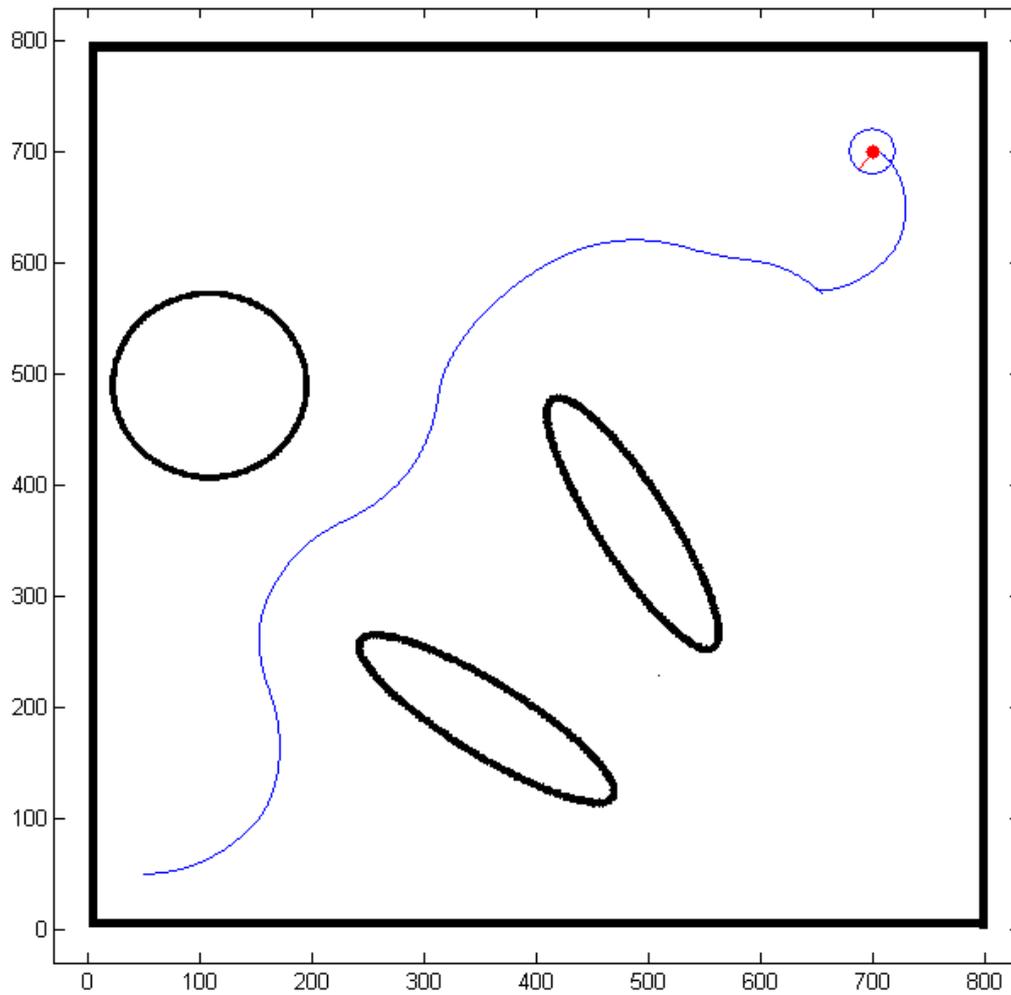
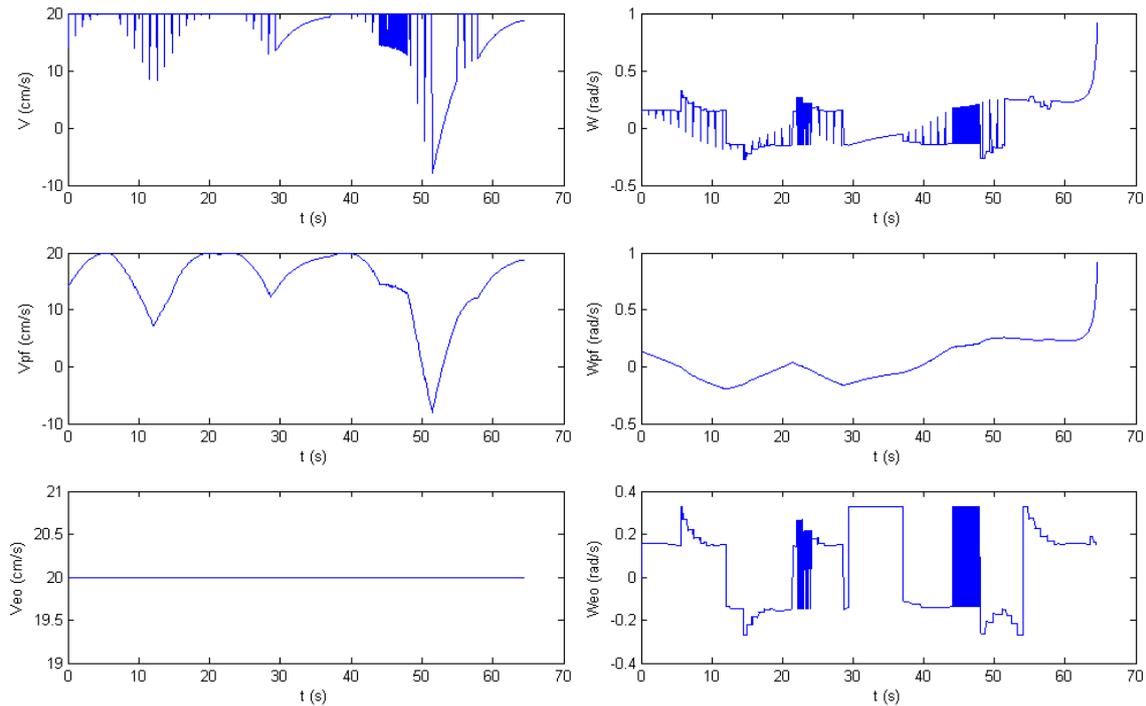


Figura 35. Função SSLF do experimento mostrado na Figura 33.

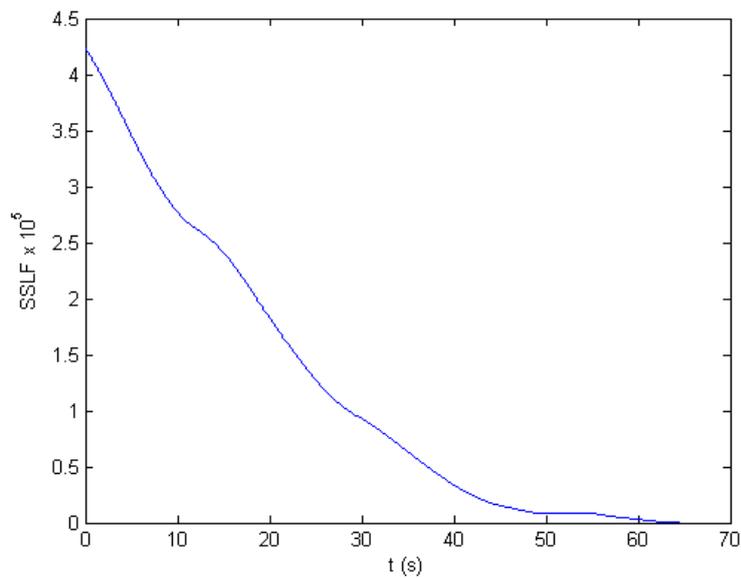
O mesmo controle com chaveamento lento foi aplicado ao segundo ambiente, sendo obtidos os resultados mostrados nas Figuras 36, 37 e 38.



**Figura 36.** Trajetória realizada para um ambiente com vários obstáculos, considerando um chaveamento, que atende à proposição 5, entre os controladores de posição final (principal) e de evitar obstáculos.



**Figura 37. Velocidades comandadas para o experimento mostrado na Figura 36.**



**Figura 38. Função SSLF do experimento mostrado na Figura 36.**

Em comparação com o experimento 1, além de atingir o objetivo desejado, a meta foi alcançada em um tempo mais curto, o que é decorrência dos limites requeridos no chaveamento da proposição 4, o que levou a adotar  $V_{eo} = 1$  cm/s para o chaveamento rápido, enquanto que para o chaveamento lento foi possível aplicar  $V_{eo} = 20$  cm/s. O chaveamento lento permite que a função SSLF cresça temporariamente ou que a mesma fique temporariamente constante, fato que pode ser observado entre os tempos de 50 s e

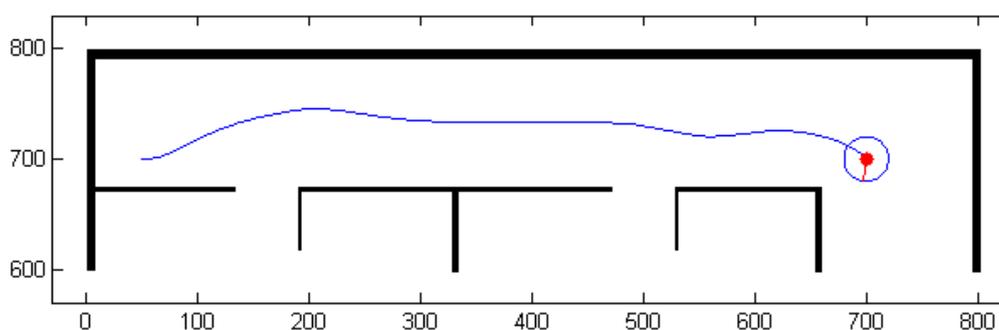
55 s na Figura 38. Neste intervalo pode ser percebida uma tendência de o robô desviar da parede próxima ao destino, o que foi corrigido pelo chaveamento.

### 5.3.4. Experimento 3

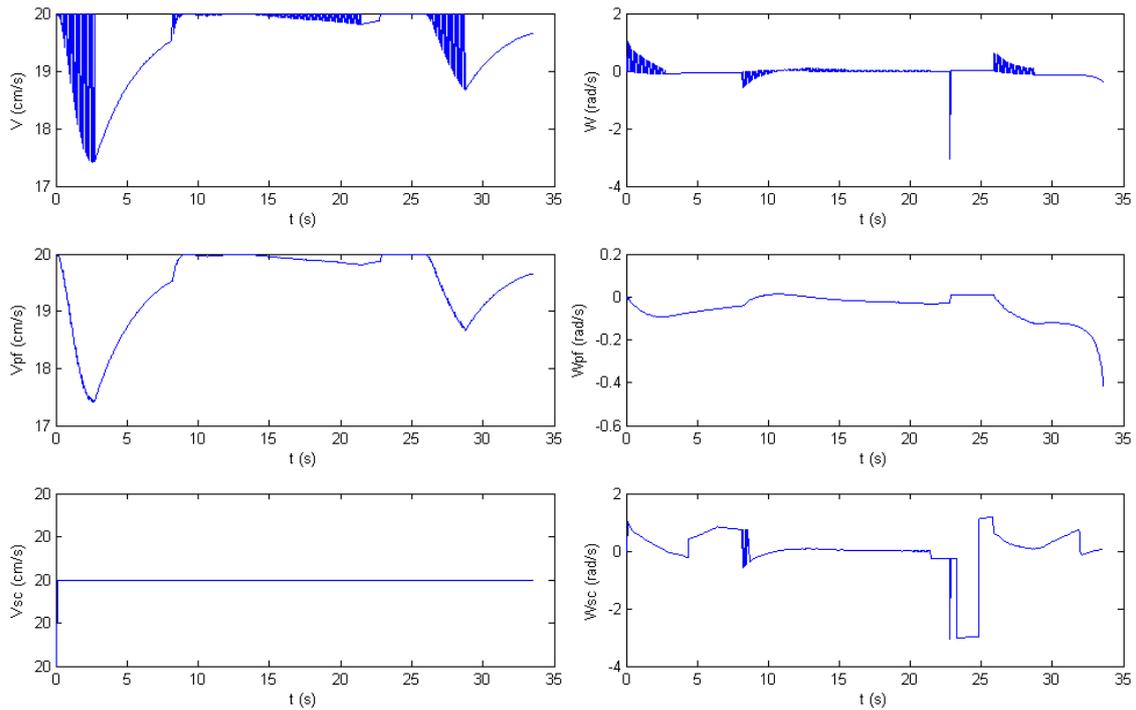
O experimento 3 foi realizado com os controladores de posição final (controlador principal) e de seguir corredores, sendo considerado o chaveamento rápido da seção 5.1.1. Como pode ser observado na Figura 39 esse experimento poderia ter sido realizado apenas com o controlador de posição final, no entanto a trajetória do robô estaria muito próxima a parede, indicando uma navegação de risco para o mesmo. A inclusão do controlador de seguir corredores pode fazer o robô navegar mais próximo do centro do corredor, e ainda assim atingir o ponto de destino.

Esse experimento foi realizado por simulação, com o robô iniciado na posição (50 cm, 700 cm), com ângulo de 0 rad, e ponto de destino (700 cm, 700 cm). As constantes relativas aos controladores e chaveamento adotadas foram  $K_{1sc} = 0,8$ ,  $K_{2sc} = 0,8$ ,  $a_{1sc} = 20$ ,  $a_{2sc} = 500$ ,  $kw_{pf} = \pi/20$ ,  $kv_{pf} = 20$ ,  $V_{sc} = 20$  cm/s e  $\alpha = 100$  cm.

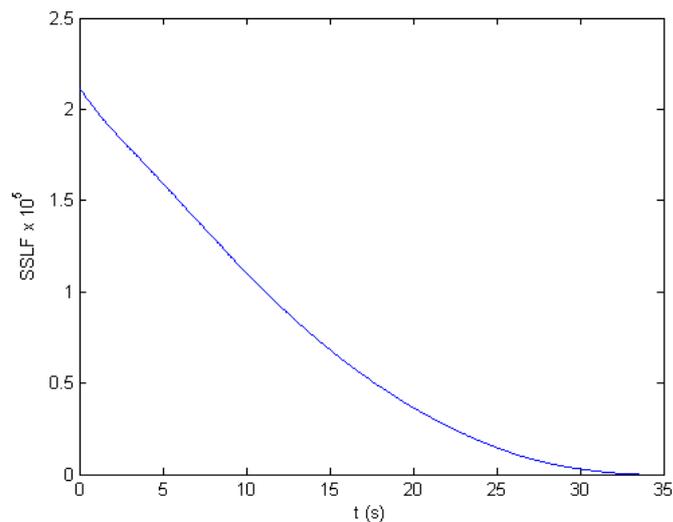
Nas Figuras 39, 40 e 41 são mostrados os resultados obtidos para o primeiro ambiente.



**Figura 39. Trajetória realizada em um ambiente com corredor, considerando um chaveamento, que atende à proposição 4, entre os controladores de posição final (principal) e seguir corredores.**



**Figura 40. Velocidades comandadas para o experimento mostrado na Figura 39.**



**Figura 41. Função SSLF do experimento mostrado na Figura 39.**

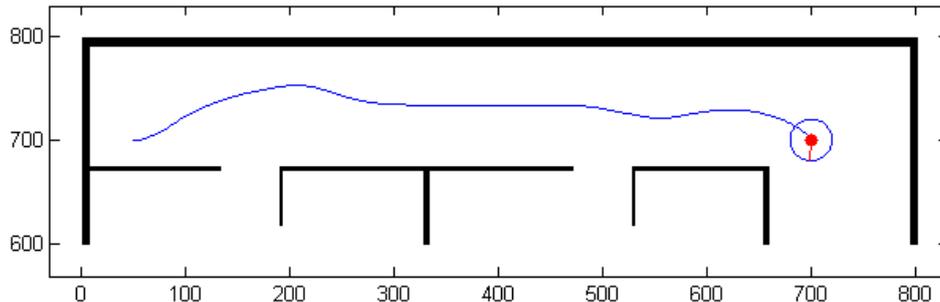
Conforme apresentado na Figura 39, o robô realizou uma trajetória mais segura, estando mais próximo do centro do corredor. Em alguns momentos o robô se afasta temporariamente do centro em consequência das portas abertas.

### 5.3.5. Experimento 4

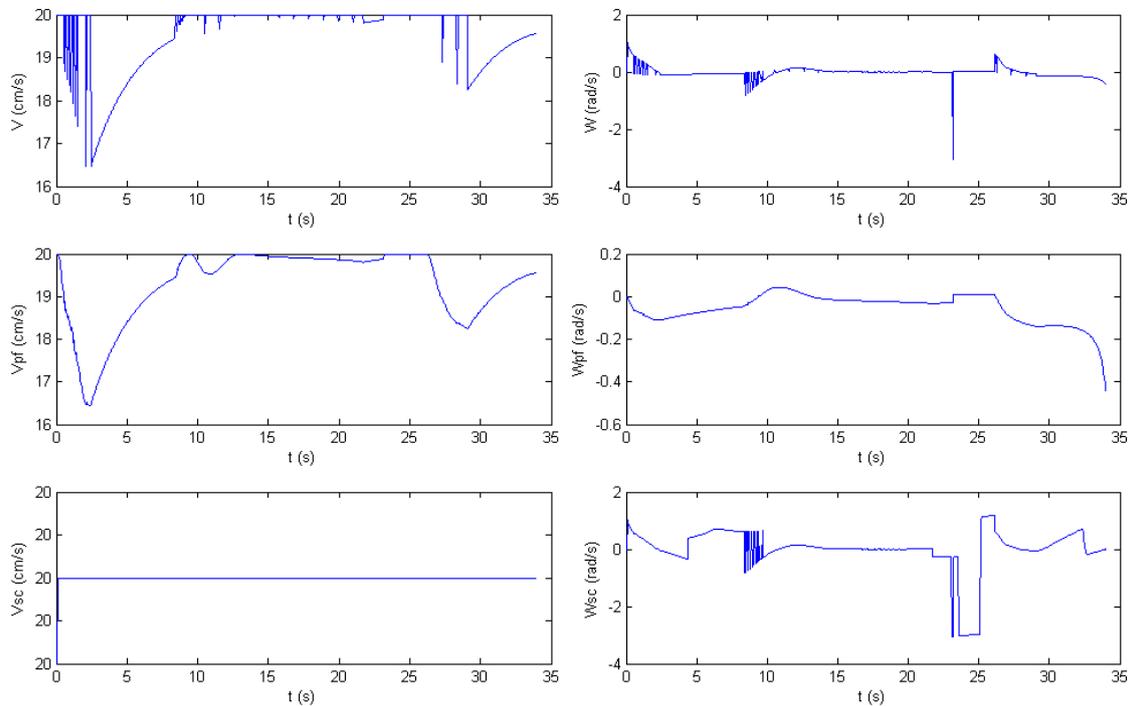
De forma equivalente aos experimentos 1 e 2, o experimento apresentado na seção anterior foi repetido fazendo uso do chaveamento lento, mostrado na seção 5.1.2. O

experimento foi realizado por simulação, com a mesma condição inicial e mesmo destino. As constantes relativas aos controladores e chaveamento adotadas foram  $K_{1sc} = 0,8$ ,  $K_{2sc} = 0,8$ ,  $a_{1sc} = 20$ ,  $a_{2sc} = 500$ ,  $k_{w_{pf}} = \pi/20$ ,  $k_{v_{pf}} = 20$ ,  $V_{sc} = 20$  cm/s,  $\rho = 1$  e  $\tau' = 1$  s.

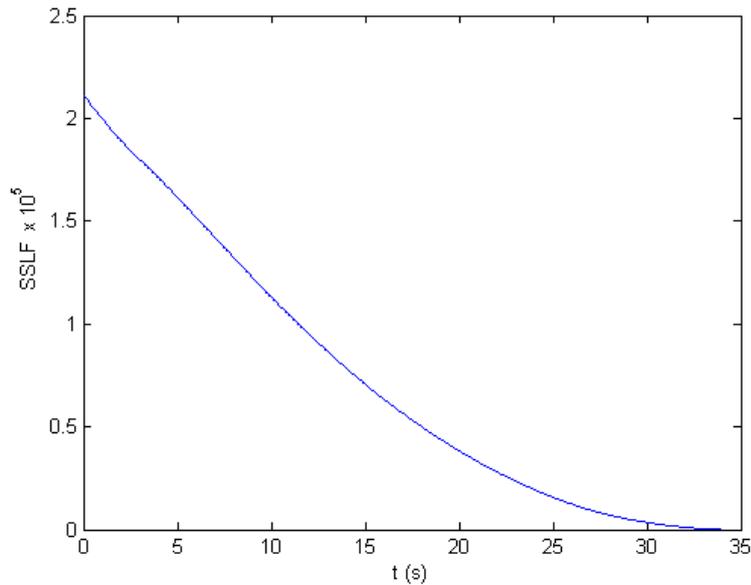
Nas Figuras 42, 43 e 44 são mostrados os resultados obtidos com este experimento.



**Figura 42. Trajetória realizada em um ambiente com corredor, considerando um chaveamento, que atende à proposição 5, entre os controladores de posição final (principal) e seguir corredores.**



**Figura 43. Velocidades comandadas para o experimento mostrado na Figura 42.**



**Figura 44. Função SSLF do experimento mostrado na Figura 42.**

Assim como no caso do experimento 3, o robô atingiu a meta, navegando de forma mais segura no centro do corredor, dessa forma, os objetivos desse sistema foram alcançados com êxito.

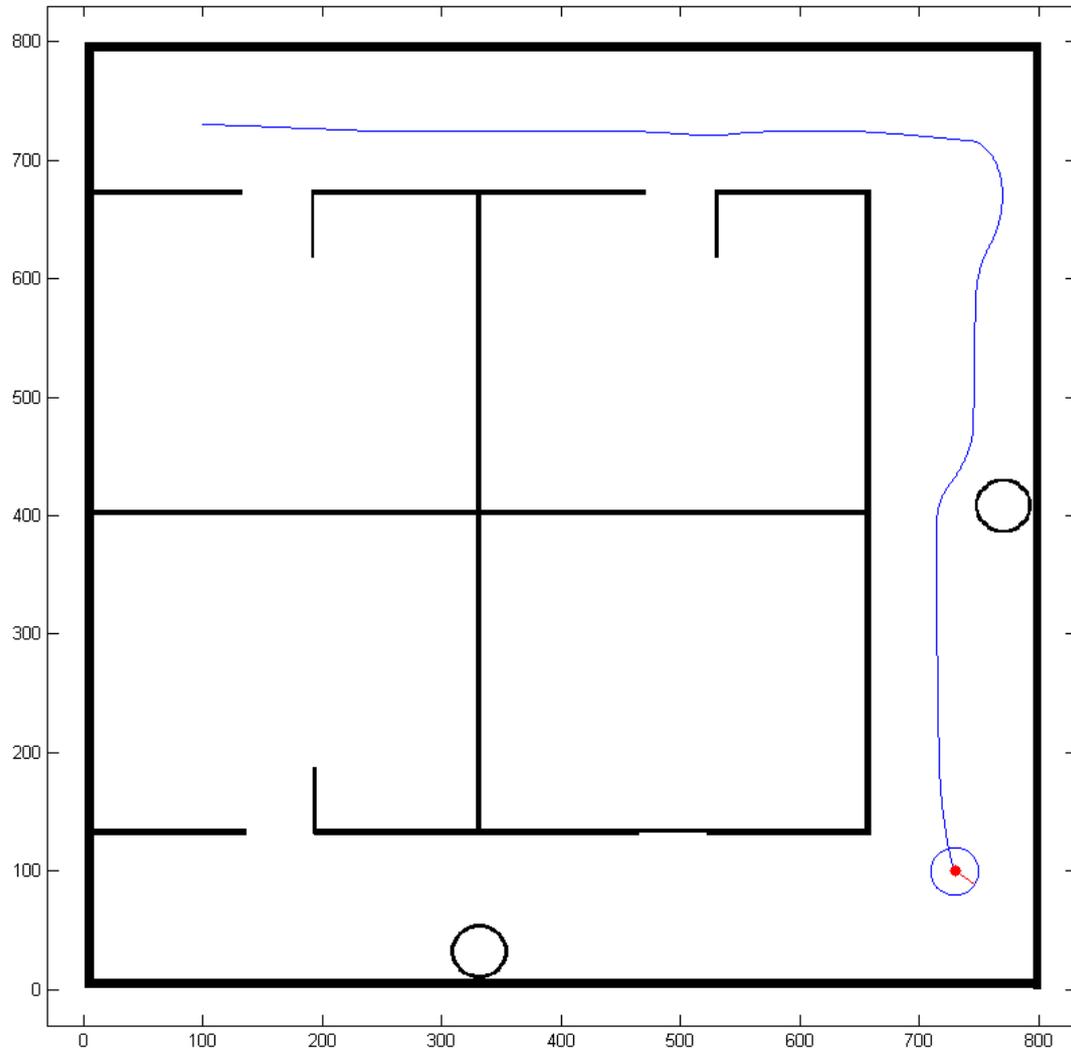
### 5.3.6. Experimento 5

Para o quinto experimento realizado foram considerados os controladores de posição final (controlador principal), seguir corredores e evitar obstáculos, sendo considerado o chaveamento rápido citado da proposição 4. O objetivo deste experimento é mostrar uma tarefa mais complexa para a navegação de robôs móveis, contando com mais de um subsistema secundário.

Esse experimento foi realizado por simulação, com o robô iniciado na posição (100 cm, 730 cm), com ângulo de 0 rad, e ponto de destino (730 cm, 100 cm). As constantes relativas aos controladores e chaveamento adotadas foram  $K_{1sc} = 1$ ,  $K_{2sc} = 1$ ,  $a_{1sc} = 20$ ,  $a_{2sc} = 500$ ,  $kw_{pf} = \pi/20$ ,  $kv_{pf} = 20$ ,  $V_{sc} = 1$  cm/s,  $V_{eo} = 1$  cm/s,  $kw_{eo} = \pi/20$ ,  $kv_{pf} = 50$  e  $\alpha = 100$  cm.

Para este experimento, a escolha de qual subsistema secundário deve atuar foi feita com base em um limiar de distância medida pelos sensores, determinada de forma que quando a menor distância medida for menor que este limiar, o subsistema secundário acionado será o de evitar obstáculos, caso contrário, será o de seguir corredores. O limiar aqui estabelecido foi de 50 cm.

Nas Figuras 45, 46, 47 e 48 são apresentados os resultados obtidos com este experimento.



**Figura 45. Trajetória realizada para um ambiente com corredores e obstáculos, considerando um chaveamento rápido, que atende à proposição 4, entre os controladores de posição final (principal), seguir corredores e evitar obstáculos.**

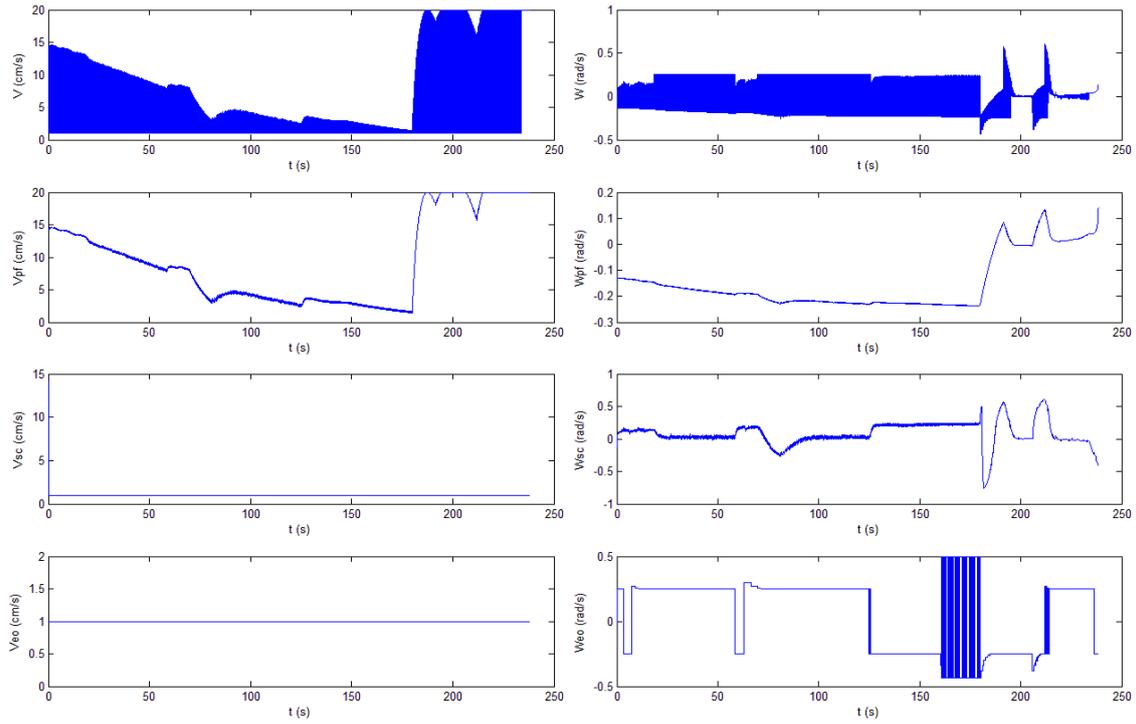


Figura 46. Velocidades comandadas para o experimento em ambiente com corredor e obstáculos, considerando o chaveamento rápido dos controladores.

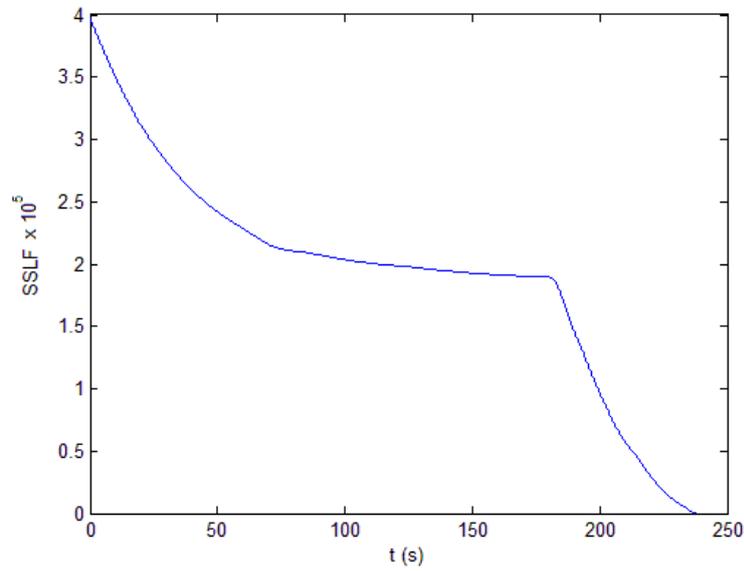
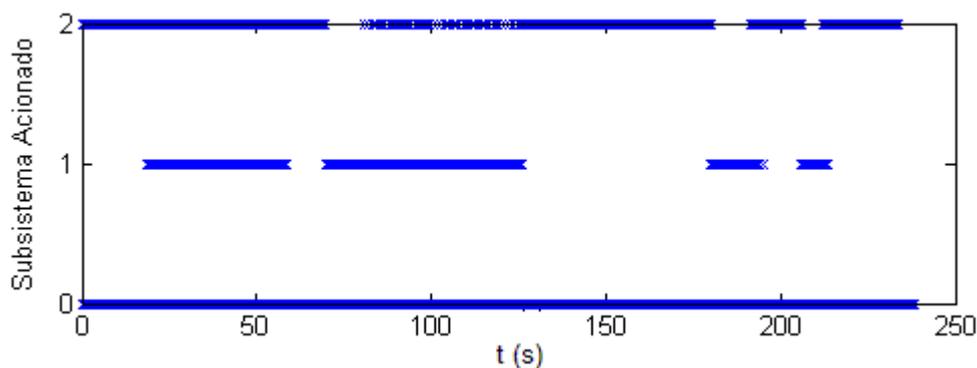
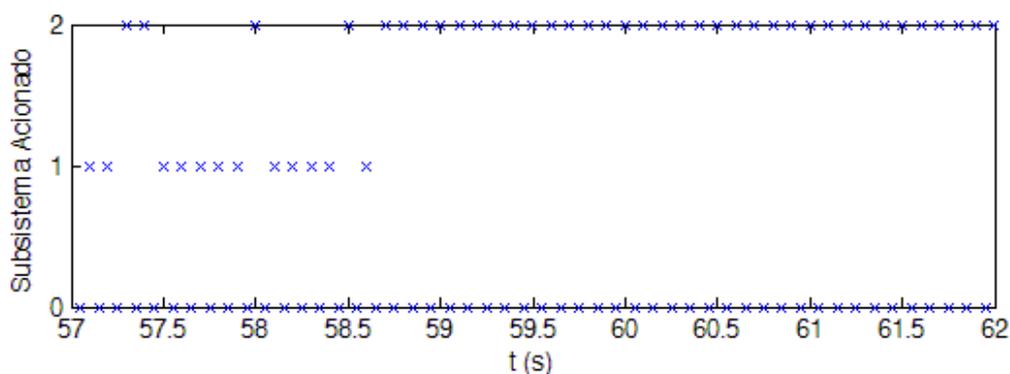


Figura 47. Função SSLF obtida com o experimento 5.



**Figura 48. Chaveamento realizado durante o experimento 5. A posição da chave para o controlador de posição final é 0, enquanto que para o controlador de evitar obstáculos é 1 e para o controlador de seguir corredores é 2.**

A evolução do chaveamento foi mostrada para este experimento como forma de facilitar o entendimento dos resultados, uma vez que aqui foi realizado um chaveamento com três controladores de objetivos distintos. Como forma de tornar mais fácil o entendimento com relação ao chaveamento realizado, o chaveamento da Figura 48 é mostrado na Figura 49 para um intervalo de 5 segundos.



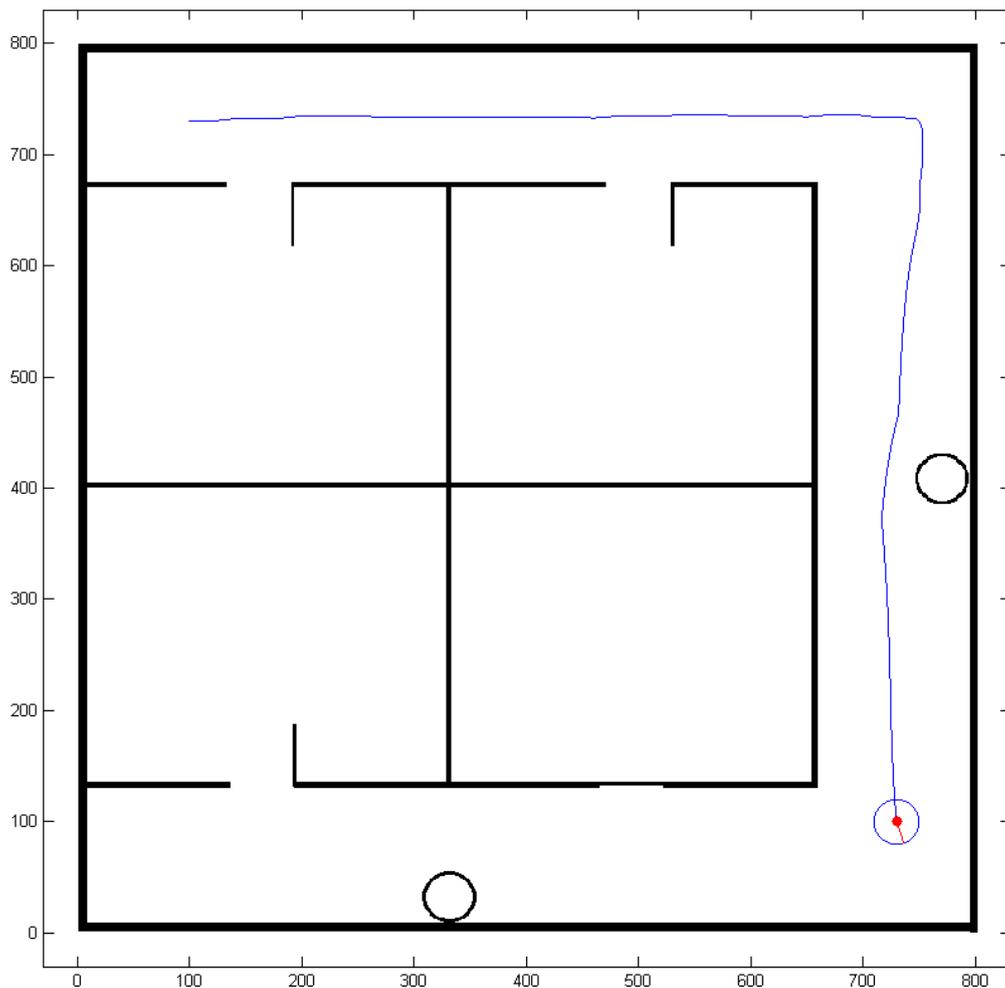
**Figura 49. Chaveamento realizado entre os tempos 57 s e 62 s do experimento 5. A posição da chave para o controlador de posição final é 0, enquanto que para o controlador de evitar obstáculos é 1 e para o controlador de seguir corredores é 2.**

### 5.3.7. Experimento 6

O sexto experimento foi realizado por simulação, considerando os mesmos controladores e tarefas do experimento anterior, fazendo uso do chaveamento lento da proposição 5. Para tanto, o robô foi iniciado na posição (100 cm, 730 cm), com ângulo de 0 rad, e ponto de destino (730 cm, 100 cm), e as constantes relativas aos controladores e chaveamento adotadas foram  $K_{1sc} = 0,8$ ,  $K_{2sc} = 0,8$ ,  $a_{1sc} = 20$ ,  $a_{2sc} = 500$ ,  $kW_{pf} = \pi/20$ ,  $kV_{pf} = 20$ ,  $V_{sc} = 10$  cm/s,  $V_{eo} = 1$  cm/s,  $kW_{eo} = \pi/20$ ,  $kV_{pf} = 50$ ,  $\rho = 1$  e  $\tau' = 0,5$  s.

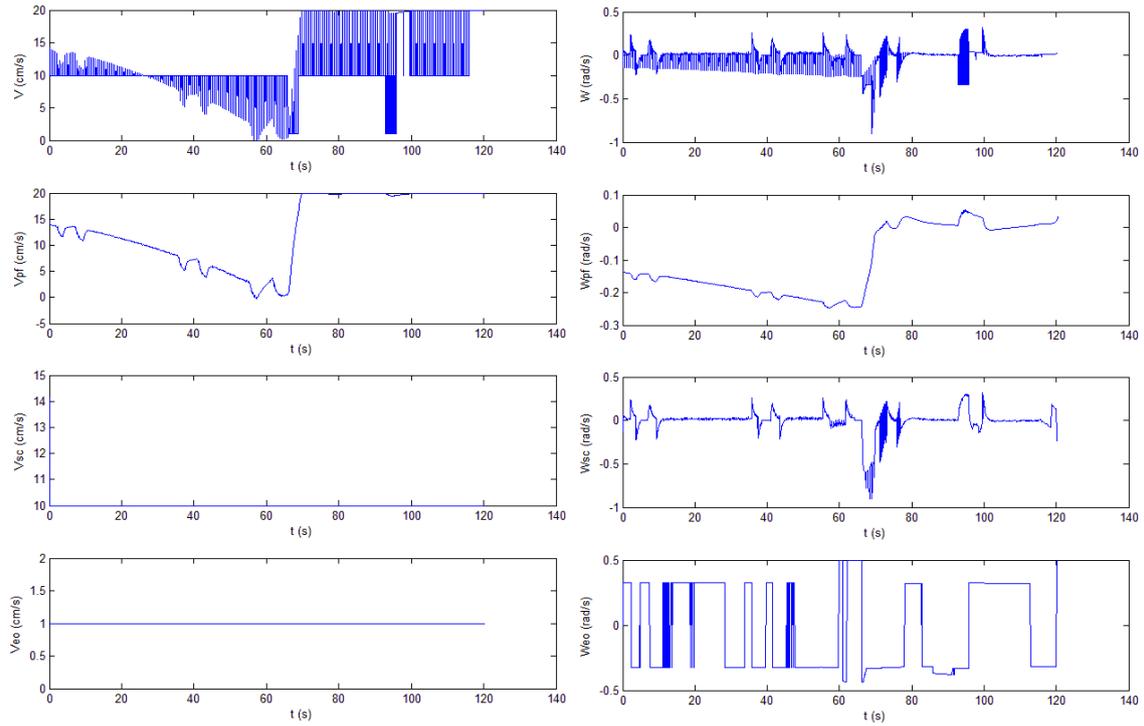
Assim como no experimento anterior, a escolha de qual subsistema secundário deve atuar foi feita com base em um limiar de distância medida pelos sensores, dessa forma, quando a menor distância medida for menor que 50 cm, o subsistema secundário acionado será o de evitar obstáculos, caso contrário, será o de seguir corredores.

Os resultados obtidos com este experimento são apresentados nas Figuras 50, 51, 52 e 53.

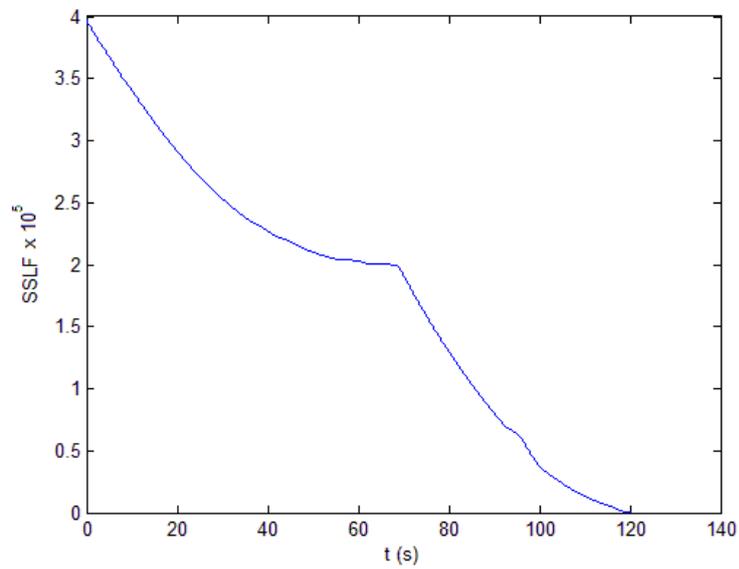


**Figura 50. Trajetória realizada para um ambiente com corredores e obstáculos, considerando um chaveamento lento, que atende à proposição 5, entre os controladores de posição final (principal), seguir corredores e evitar obstáculos.**

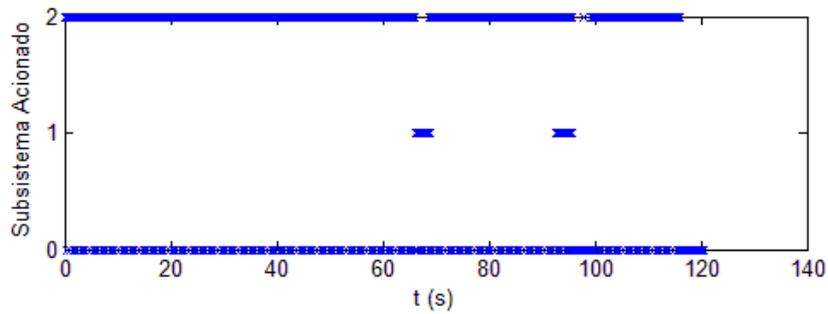
## Estabilidade de Sistemas Chaveados Baseados em Objetivo de Controle Principal



**Figura 51.** Velocidades comandadas para o experimento em ambiente com corredor e obstáculos, considerando o chaveamento lento dos controladores.

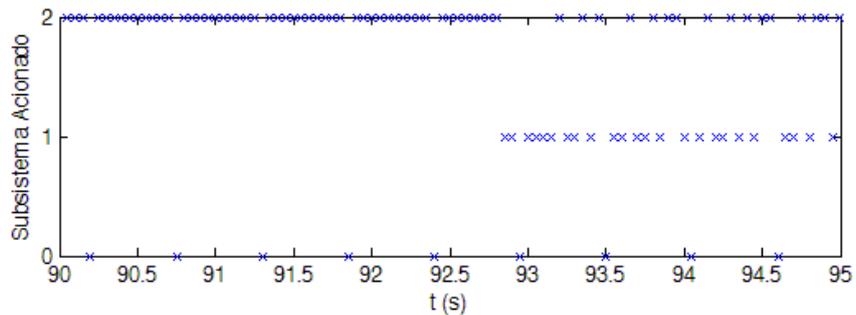


**Figura 52.** Função SSLF obtida com o experimento 6.



**Figura 53. Chaveamento realizado durante o experimento 6. A posição da chave para o controlador de posição final é 0, enquanto que para o controlador de evitar obstáculos é 1 e para o controlador de seguir corredores é 2.**

A evolução do chaveamento foi mostrada para este experimento pelos mesmos motivos apresentados no experimento 5, assim como o chaveamento da Figura 53 é mostrado na Figura 54 para um intervalo de 5 segundos, de maneira a deixar mais fácil o entendimento com relação ao chaveamento realizado.



**Figura 54. Chaveamento realizado entre 90 s e 95 s no experimento 6. A posição da chave para o controlador de posição final é 0, enquanto que para o controlador de evitar obstáculos é 1 e para o controlador de seguir corredores é 2.**

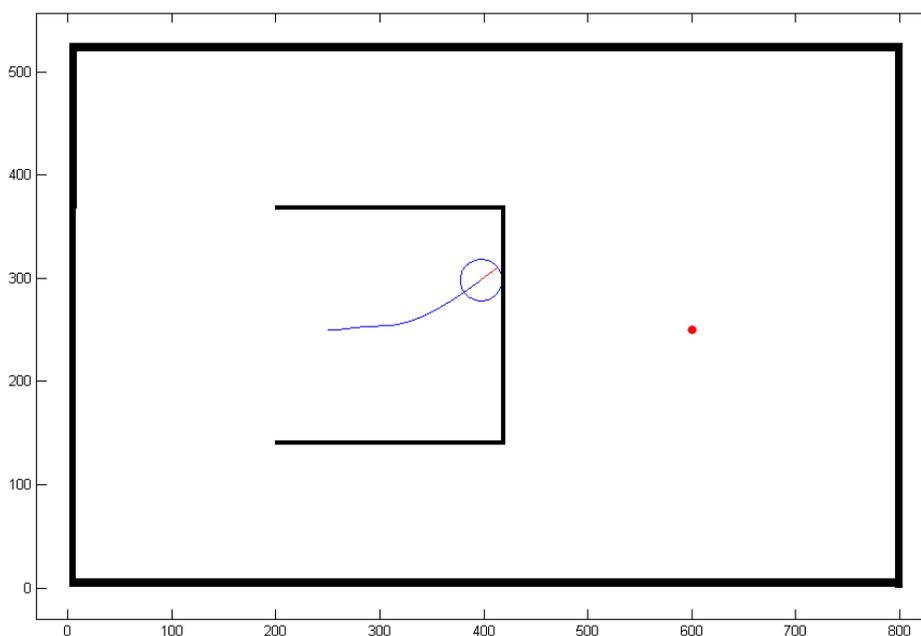
Tanto no caso do experimento 5 quanto no caso do experimento 6, os objetivos foram alcançados com êxito, sendo a principal diferença o tempo necessário para que o robô atinja o destino. Pode-se verificar também que o chaveamento lento adotado possibilitou um maior tempo de chaveamento nos subsistemas secundários.

### 5.3.8. Experimento 7

O experimento 7 consiste em mostrar as limitações do chaveamentos propostos. Para tanto, foi feito uso de um ambiente clássico em forma de “U” e aplicados os mesmos sistemas chaveados dos experimentos 1 e 2.

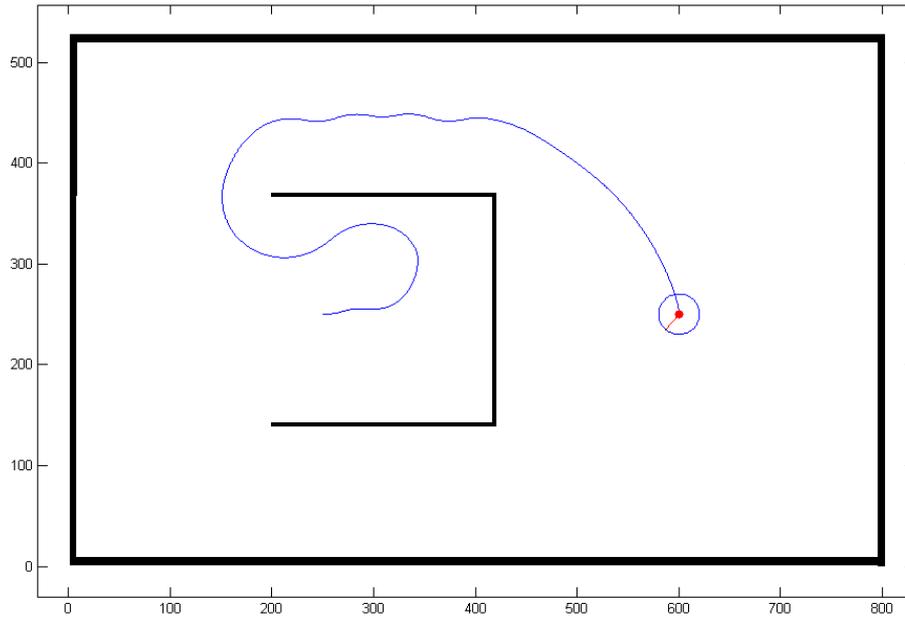
Devido a sua condição inicial (dentro do “U”), para o chaveamento do experimento 1, não é possível que seja evitada a colisão do robô. Isso se dá devido às condições da proposição 4, que não permitem um crescimento da função SSLF do sistema chaveado por um período maior que o do chaveamento, o que é necessário neste caso. No entanto, o chaveamento lento da proposição 5 permite um crescimento da função por um tempo  $\tau$ , sendo, dessa forma, adequado para o ambiente em questão. Vale ressaltar que limitações para este tipo de ambiente são frequentes em sistemas reativos amplamente usados em robótica. Esse aspecto é discutido em [149].

Para um robô iniciado na posição (250 cm, 250 cm), com ponto de destino (600 cm, 250 cm) e ângulo 0 rad, foi obtido o resultado mostrado na Figura 55, para o chaveamento do experimento 1, sendo as constantes relativas aos controladores e chaveamento dadas por  $k_{w_{eo}} = \pi/30$ ,  $k_{v_{eo}} = 50$ ,  $k_{w_{pf}} = \pi/20$ ,  $k_{v_{pf}} = 20$ ,  $V_{eo} = 1$  cm/s e  $\alpha = 100$  cm.

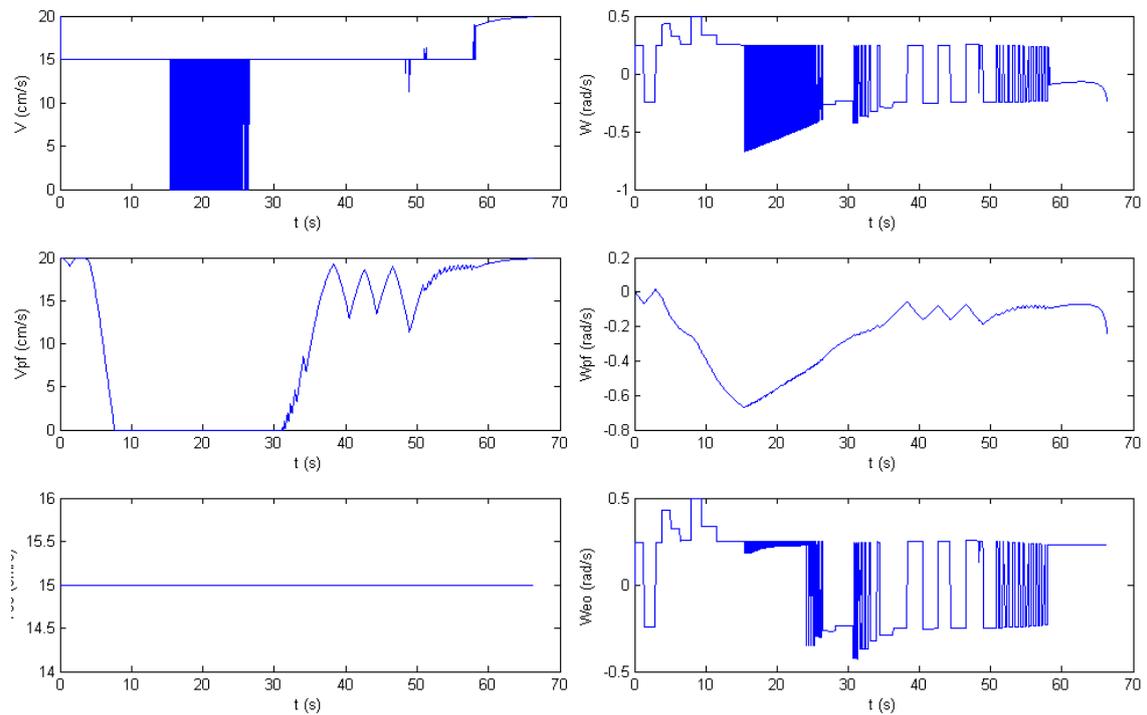


**Figura 55. Colisão do robô devido às limitações do chaveamento rápido.**

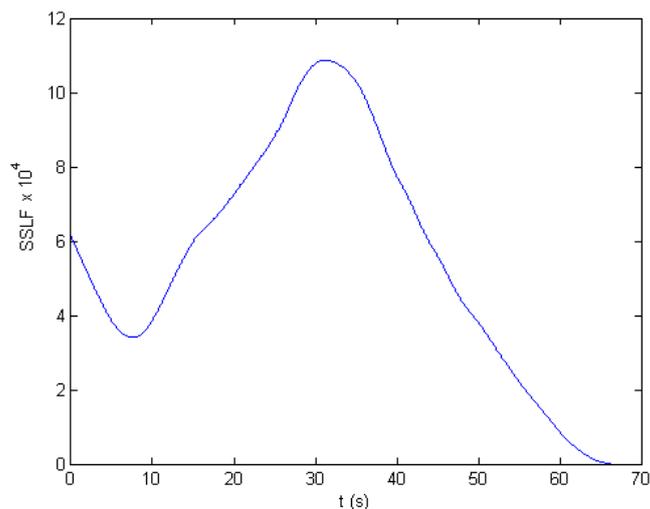
Considerando as mesmas condições iniciais do robô, nas Figuras 56, 57 e 58 são mostrados os resultados obtidos com o chaveamento lento mostrado no experimento 2, com as constantes relativas aos controladores e chaveamento sendo  $k_{w_{eo}} = \pi/20$ ,  $k_{v_{eo}} = 50$ ,  $k_{w_{pf}} = \pi/20$ ,  $k_{v_{pf}} = 20$ ,  $V_{eo} = 15$  cm/s,  $\rho = 1$  e  $\tau' = 100$  s.



**Figura 56.** Trajetória realizada para um ambiente em “U”, considerando um chaveamento lento, que atende à proposição 5, entre os controladores de posição final (principal) e evitar obstáculos.



**Figura 57.** Velocidades comandadas para o chaveamento lento descrito no experimento 2.



**Figura 58. Função SSLF obtida para o chaveado lento supracitado.**

Deve-se deixar claro que o chaveamento lento, assim como já foi explicado, não garante que os obstáculos serão evitados, uma vez que o mesmo é um objetivo secundário. Esse experimento tem por finalidade apenas mostrar que é possível navegar neste ambiente com o chaveamento lento, no entanto, existe ainda o risco de colisão. Por outro lado, os resultados obtidos não condenam o chaveamento rápido, sendo o mesmo útil para outras aplicações, a destacar o caso em que o chaveamento deve ser realizado com alta frequência na tentativa de aproximar os resultados com os que podem ser obtidos empregando-se fusão.

Espera-se que as proposições aqui apresentadas sirvam de base para que novos sistemas chaveados sejam desenvolvidos, contornando alguns destes problemas.

### 5.3.9. Experimento 8

Esta seção é dedicada à apresentação dos resultados reais, realizados na plataforma Pioneer P3DX, envolvendo os chaveamentos, lento e rápido, supracitados. Diferente dos demais, nos experimentos desta seção as distâncias são apresentadas em milímetros, as velocidades em milímetros por segundo e os ângulos em graus, por serem essas as unidades padrões desta plataforma. Para estes experimentos foram utilizados os controladores de posição final (objetivo de controle principal) e de evitar obstáculos, descritos na subseção 5.3.1, e arranjo frontal de ultrassom disponíveis no robô, com 8 sensores ultrassônicos, para navegação nos ambientes 1 e 2, mostrados nas Figuras 59 e 60, respectivamente.



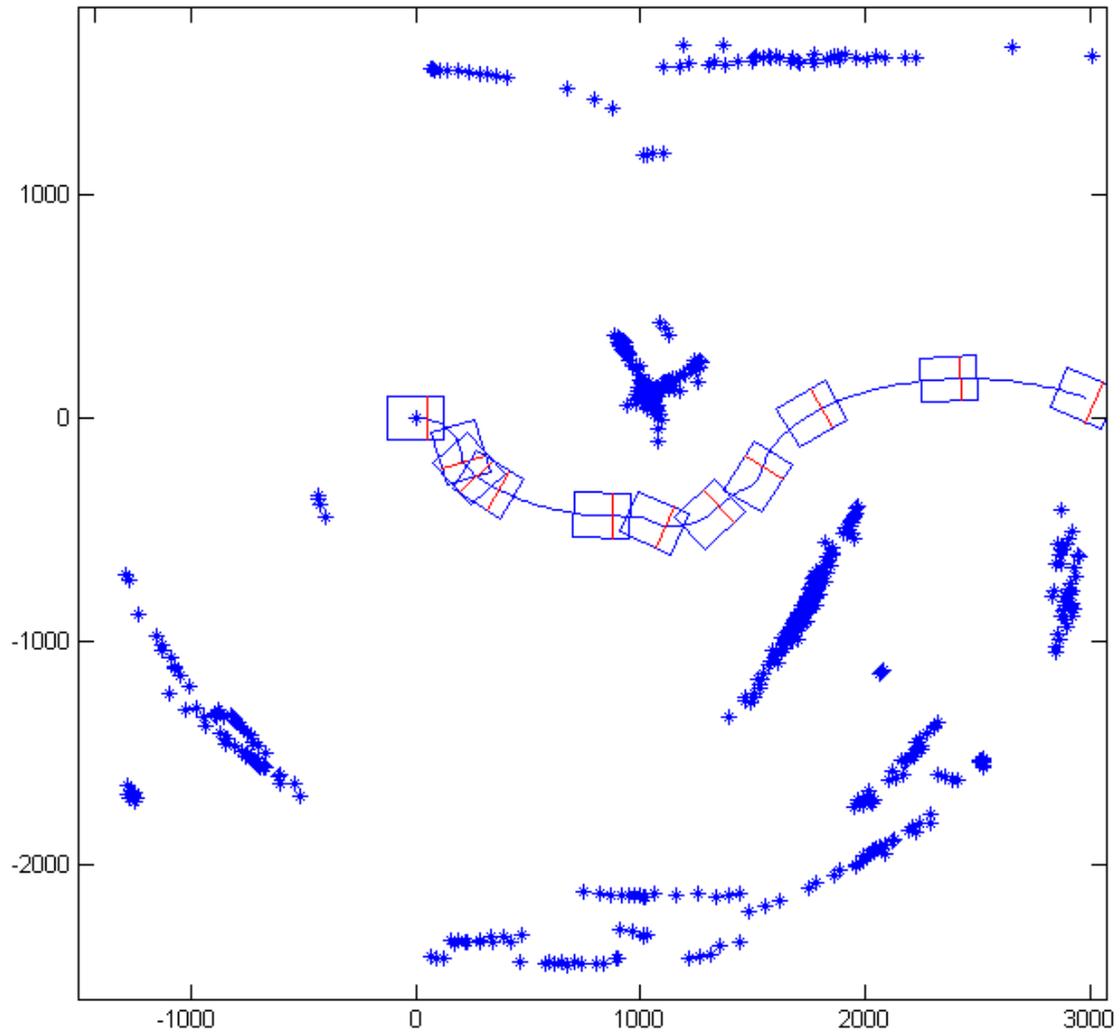
**Figura 59. Ambiente 1 considerado nos experimentos reais.**



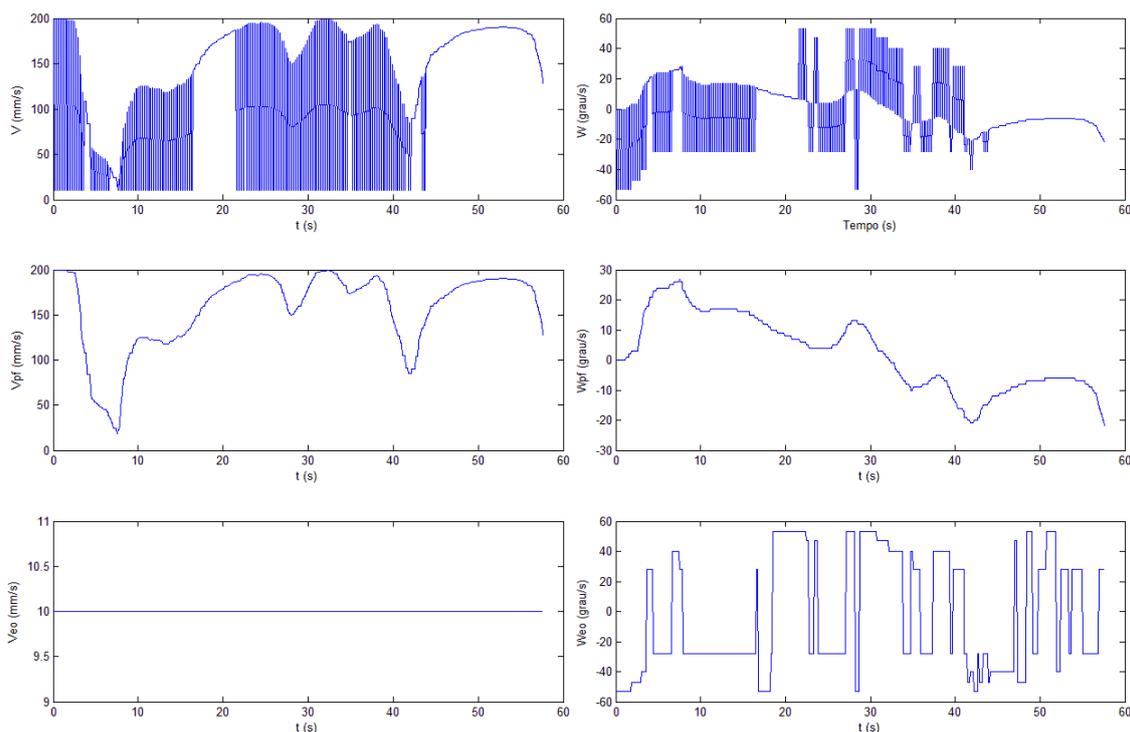
**Figura 60. Ambiente 2 considerado nos experimentos reais**

Os ambientes das Figuras 59 e 60 foram escolhidos por representarem um típico ambiente semi-estruturado de escritório. O ambiente 1 (Figura 59) deve possibilitar uma navegação em “zig-zag”, enquanto que o ambiente 2 (Figura 60) possui um obstáculo maior, possibilitando enfatizar o as diferenças de velocidades do robôs para os chaveamentos rápido e lento quando os objetivos secundários estão sendo cumpridos.

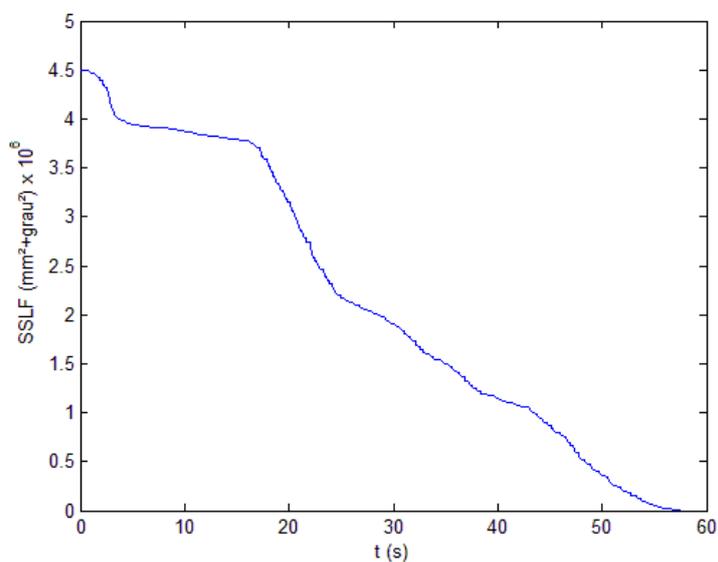
Os resultados obtidos com o chaveamento rápido dos controladores de posição final e de evitar obstáculos, para o ambiente 1, são mostrados nas Figuras 61, 62 e 63. Para tanto, o robô foi iniciado na posição (0 mm, 0 mm), com ângulo de 0 grau, e ponto de destino (3000 mm, 0 mm), e as constantes relativas aos controladores e chaveamento adotadas foram  $kw_{eo} = \pi/20$ ,  $kv_{eo} = 50$ ,  $kw_{pf} = \pi/20$ ,  $kv_{pf} = 20$ ,  $V_{eo} = 10$  mm/s e  $\alpha = 500$  mm.



**Figura 61.** Ambiente 1 e trajetória do robô reconstruídos a partir dos dados sensoriais do experimento real com chaveamento rápido dos controladores de posição final (principal) e de evitar obstáculos.



**Figura 62. Velocidades comandas no experimento real de chaveamento rápido para o ambiente 1.**



**Figura 63. Função SSLF obtida no experimento real de chaveamento rápido para o ambiente 1.**

Ainda para o ambiente 1, foram obtidos os resultados mostrados nas Figuras 64, 65 e 66 para o chaveamento lento dos controladores de posição final e de evitar obstáculos. Neste experimento, o robô foi iniciado na posição (0 mm, 0 mm), com ângulo de 0 grau, e ponto de destino (3000 mm, 0 mm), e as constantes relativas aos

controladores e chaveamento adotadas foram  $k_{w_{eo}} = \pi/15$ ,  $k_{v_{eo}} = 50$ ,  $k_{w_{pf}} = \pi/15$ ,  $k_{v_{pf}} = 20$ ,  $V_{eo} = 200$  mm/s,  $\rho = 1$  e  $\tau' = 1$  s.

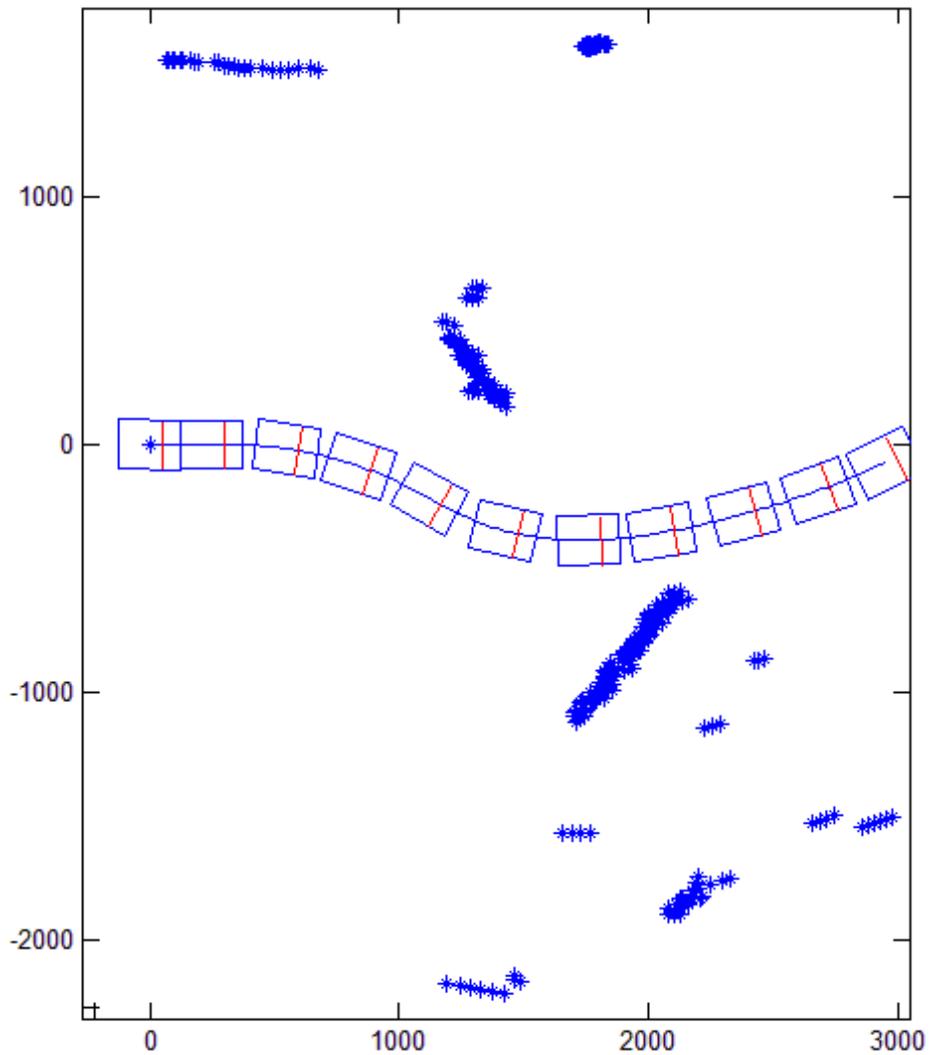
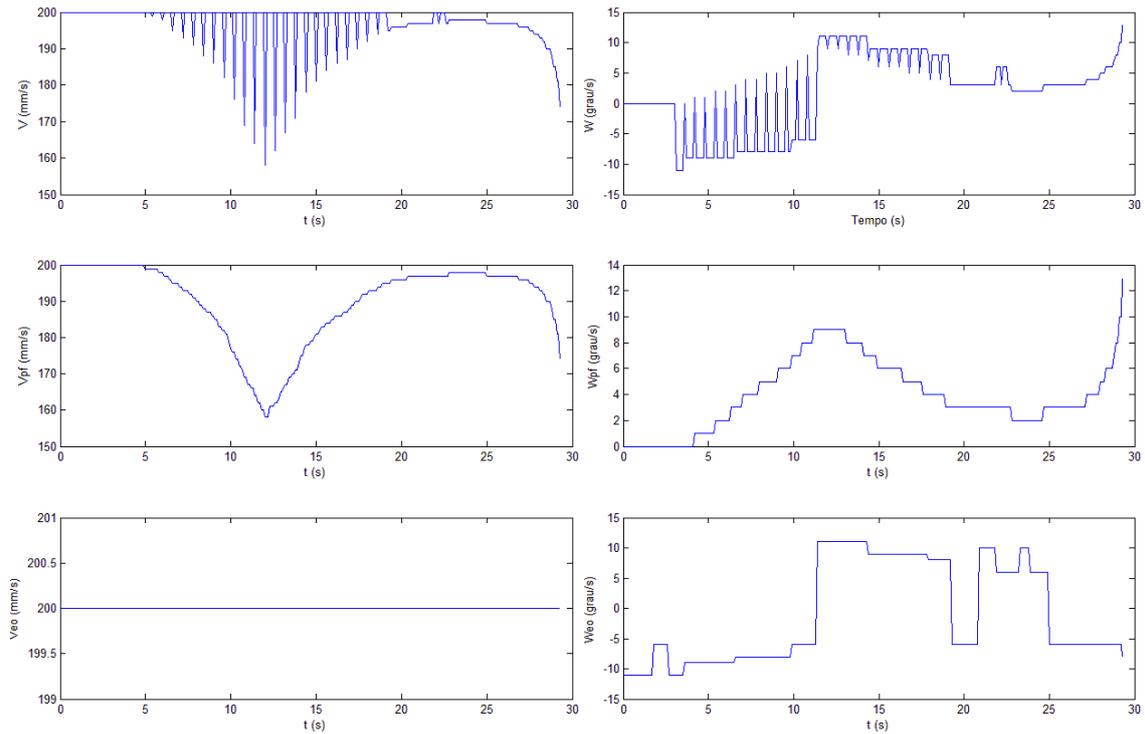
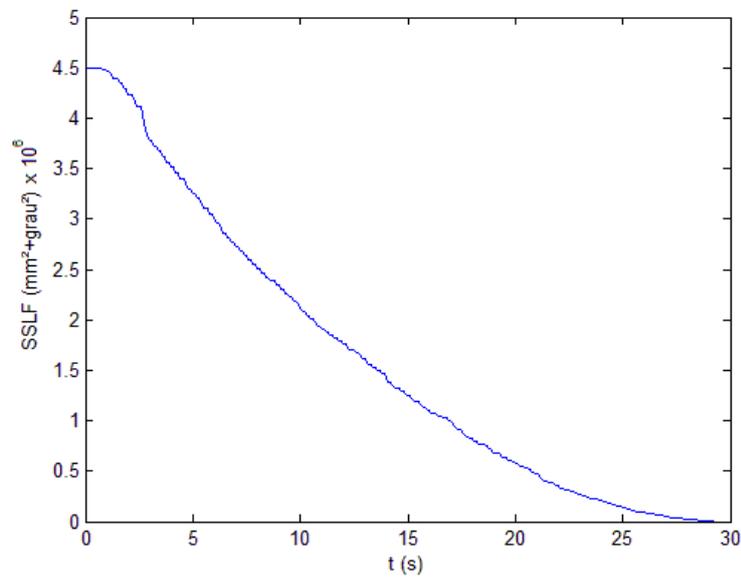


Figura 64. Ambiente 1 e trajetória do robô reconstruídos a partir dos dados sensoriais do experimento real com chaveamento lento dos controladores de posição final (principal) e de evitar obstáculos.



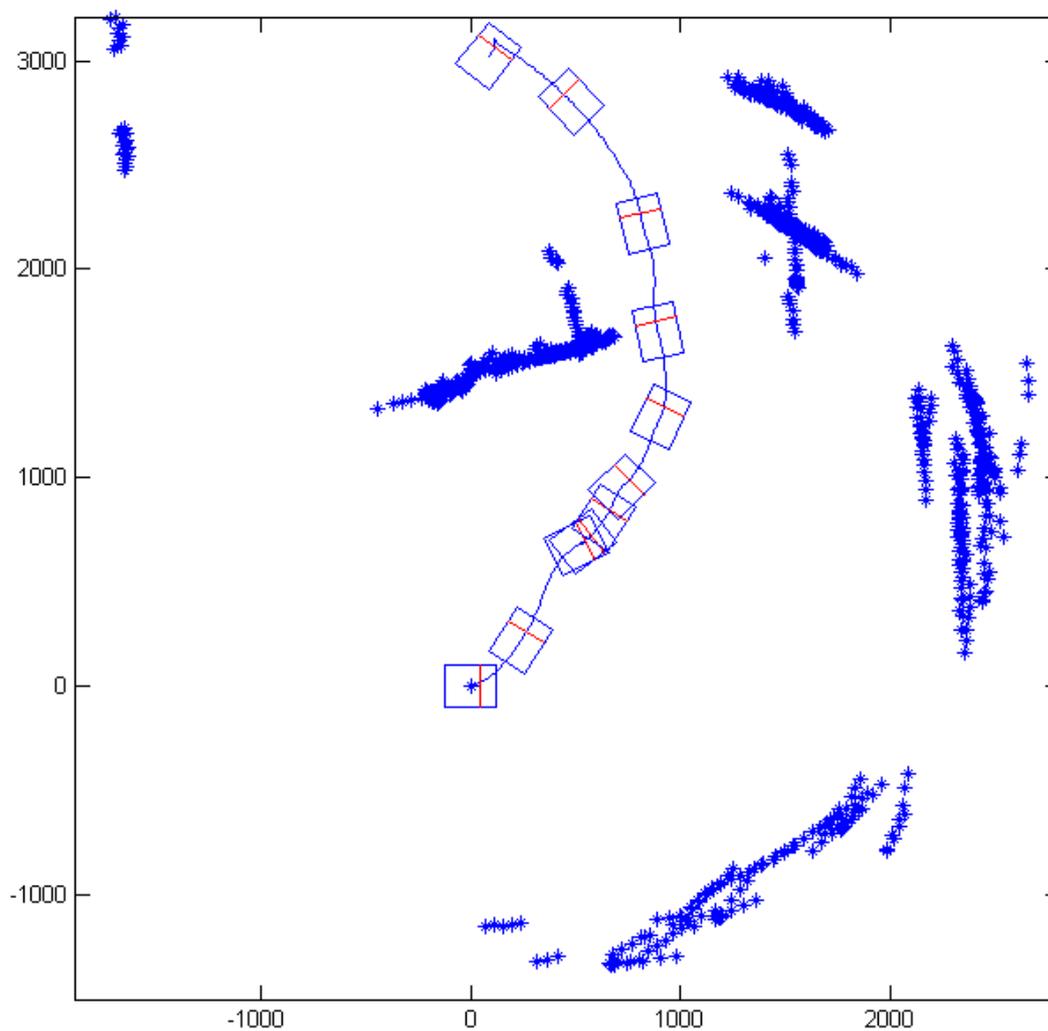
**Figura 65. Velocidades comandadas no experimento real de chaveamento lento para o ambiente 1.**



**Figura 66. Função SSLF obtida no experimento real de chaveamento lento para o ambiente 1.**

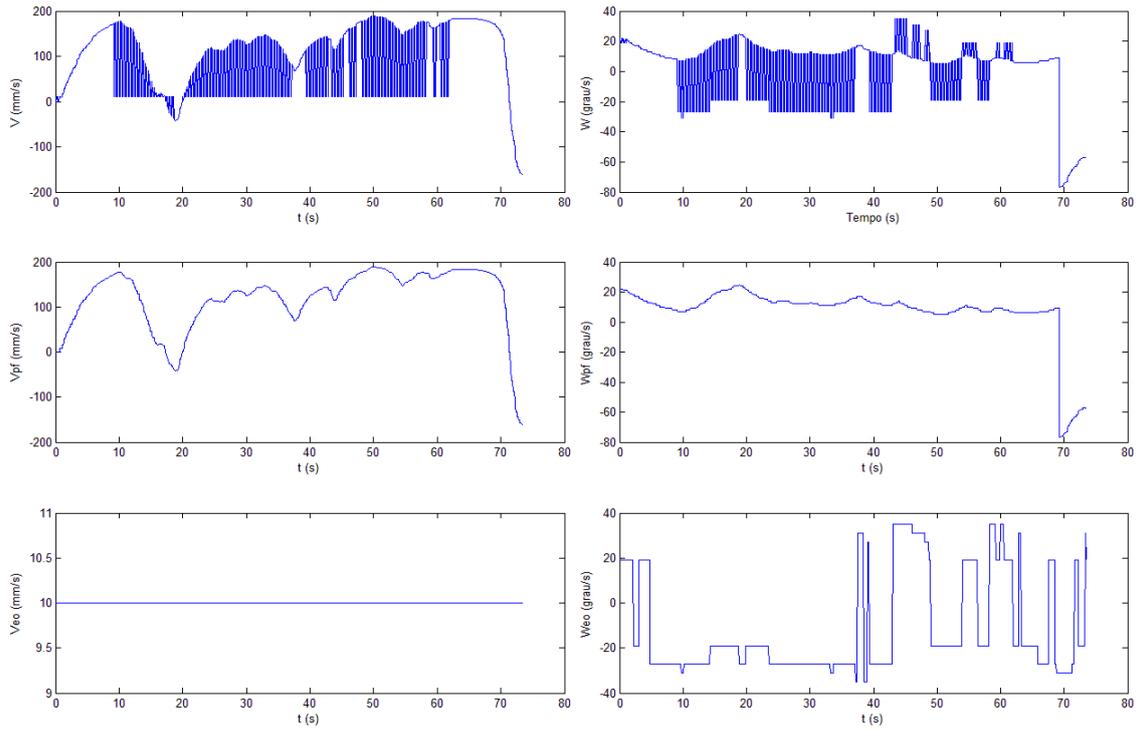
De forma semelhante ao ambiente 1, outros dois experimentos foram realizados para o ambiente 2, um abordando o chaveamento rápido e o outro abordando o chaveamento lento. Nesses dois experimentos o robô foi iniciado na posição (0 mm, 0 mm), com ângulo de 0 grau, e ponto de destino (0 mm, 3000 mm), sendo que para o

chaveamento rápido, cujos resultados são mostrados nas Figuras 67, 68 e 69, as constantes relativas aos controladores e chaveamento adotadas foram  $k_{w_{eo}} = \pi/15$ ,  $k_{v_{eo}} = 50$ ,  $k_{w_{pf}} = \pi/15$ ,  $k_{v_{pf}} = 20$ ,  $V_{eo} = 10$  mm/s,  $\alpha = 500$  mm, enquanto que para o chaveamento lento foram  $k_{w_{eo}} = \pi/40$ ,  $k_{v_{eo}} = 50$ ,  $k_{w_{pf}} = \pi/20$ ,  $k_{v_{pf}} = 20$ ,  $V_{eo} = 200$  mm/s,  $\rho = 10$  e  $\tau' = 5$  s, estando os resultados obtidos com tal chaveamento ilustrados nas Figuras 70, 71 e 72.

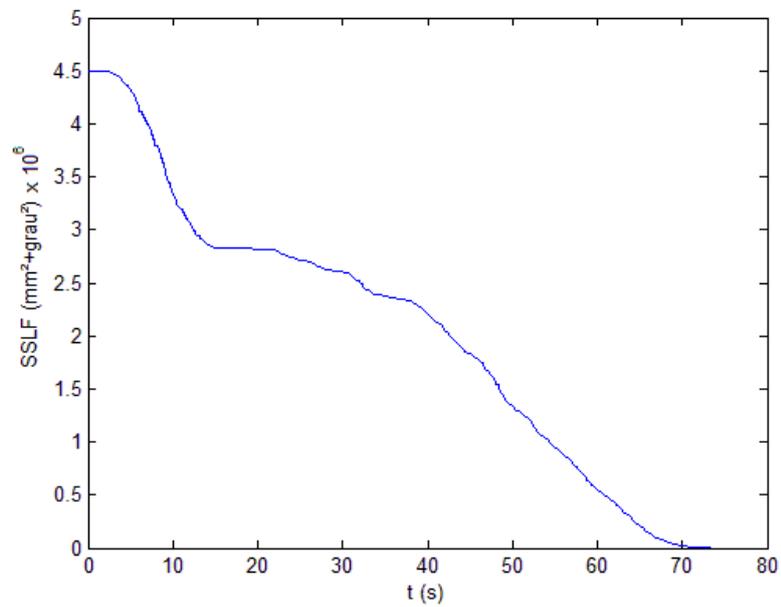


**Figura 67.** Ambiente 2 e trajetória do robô reconstruídos a partir dos dados sensoriais do experimento real com chaveamento rápido dos controladores de posição final (principal) e de evitar obstáculos.

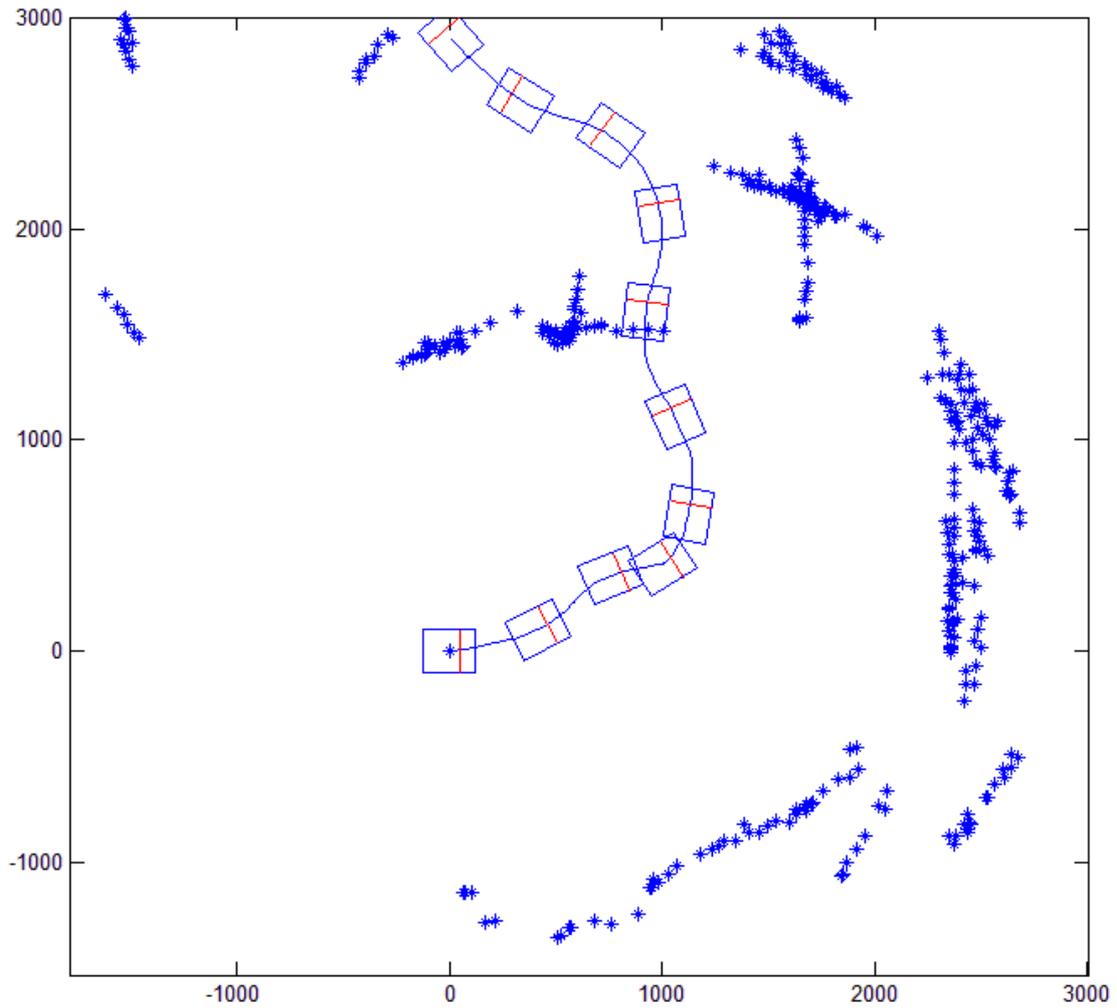
## Estabilidade de Sistemas Chaveados Baseados em Objetivo de Controle Principal



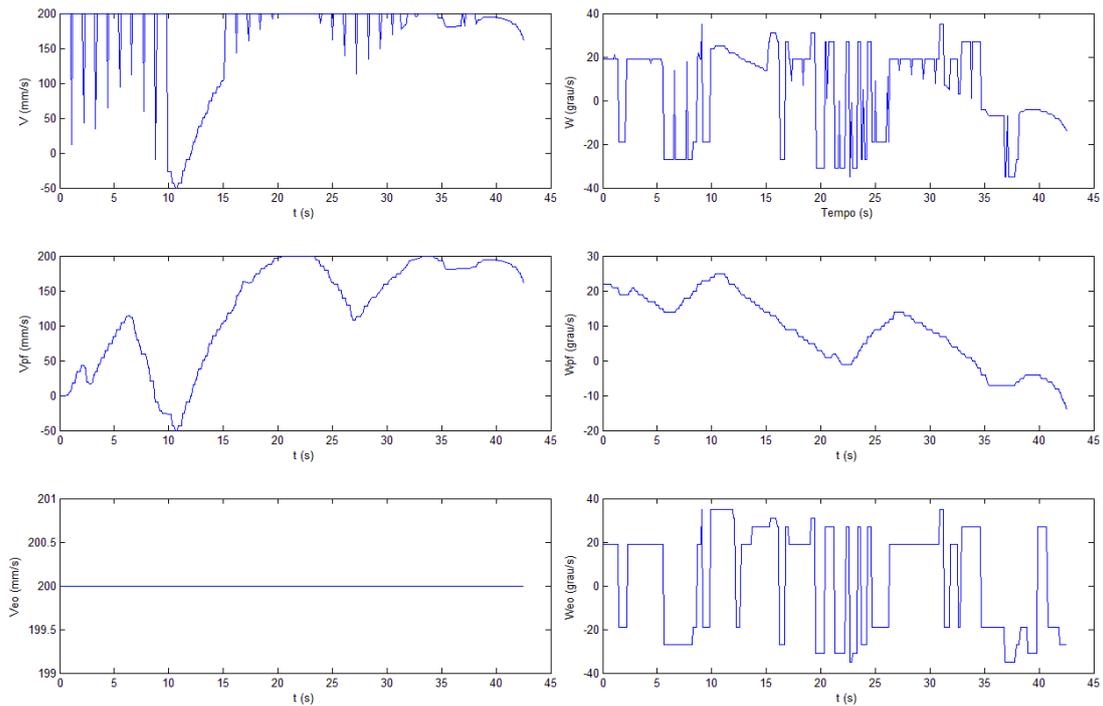
**Figura 68. Velocidades comandas no experimento real de chaveamento rápido para o ambiente 2.**



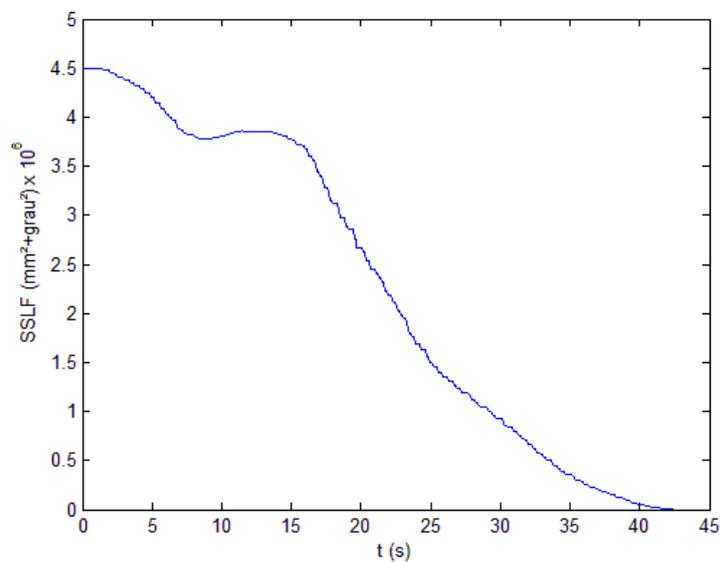
**Figura 69. Função SSLF obtida no experimento real de chaveamento rápido para o ambiente 2.**



**Figura 70.** Ambiente 2 e trajetória do robô reconstruídos a partir dos dados sensoriais do experimento real com chaveamento lento dos controladores de posição final (principal) e de evitar obstáculos.



**Figura 71. Velocidades comandadas no experimento real de chaveamento lento para o ambiente 2.**



**Figura 72. Função SSLF obtida no experimento real de chaveamento lento para o ambiente 2.**

De forma geral, os resultados reais tiveram desempenho semelhante aos resultados simulados, podendo atestar a pouca influência da inércia e das imperfeições do robô Pioneer P3DX nas abordagens propostas. Na Figura 70, por exemplo, podem ser observados erros de medição dos sensores de ultrassom, que ocorreram de forma pontual e, dessa forma, não impediram o desenvolvimento da tarefa.

Para os experimentos realizados, os resultados para o chaveamento lento se mostraram visivelmente melhores do que quando empregado o chaveamento rápido, no entanto a característica de chaveamento rápido é, como citado anteriormente, desejada em diversas aplicações, motivando o seu desenvolvimento. O objetivo almejado neste capítulo foi mostrar, através de simulações e experimentos, possíveis aplicações para as ferramentas desenvolvidas, não pretendendo comparar os resultados destas duas abordagens.

## Capítulo 6: Conclusões

---

Neste trabalho foi abordado o conceito de *quasi*-estabilidade para sistemas autônomos. Uma vez que não foi encontrada na literatura uma definição de *quasi*-estabilidade, tal definição foi proposta neste trabalho. Adicionalmente, Foram apresentadas, nas proposições 1 e 2, condições suficientes do tipo Lyapunov para a demonstração da *quasi*-estabilidade de sistemas autônomos. Além disso, é mostrado que a proposição 2 também pode ser usada para analisar a *quasi*-estabilidade assintótica, possibilitando assim uma análise mais completa para este tipo de sistema.

Diferentemente da estabilidade de Lyapunov, no conceito de estabilidade aqui proposto, a função candidata,  $V(x)$ , não precisa ser continuamente diferenciável, bem como não são apresentadas condições com respeito à derivada de  $V(x)$ . Dessa forma, espera-se que um maior número de trabalhos possa ter a estabilidade demonstrada a partir do proposto, como em sistemas sujeitos a perturbações, distúrbios externos ou em chaveamento de controladores.

No tocante aos sistemas chaveados, neste trabalho foi proposta uma nova linha na análise de estabilidade para estes sistemas. Esta linha é baseada na análise de estabilidade de um sistema chaveado com objetivo principal, determinado a partir da escolha de um subsistema, também denominado principal, que deve ser assintoticamente estável e possuir o mesmo ponto de equilíbrio desejado para o sistema chaveado. Esta proposta deverá possibilitar a análise de estabilidade de sistemas que não se encaixam nas áreas clássicas e, dessa forma, contribuir para o aumento da quantidade de aplicações na área de sistemas chaveados.

Foram apresentadas, juntamente com suas demonstrações matemáticas, três proposições baseadas na linha supracitada, que serão usadas como ferramentas matemáticas para auxiliar na análise de estabilidade de sistemas de controle chaveados.

Essas proposições podem ser aplicadas tanto para o caso linear, quanto para o não-linear, bem como para chaveamentos lentos (proposição 5) ou independentes da frequência (proposições 3 e 4), permitindo o uso dessas ferramentas para auxiliar na análise de estabilidade de um número significativo de sistemas.

Por meio da revisão bibliográfica realizada, foi possível avaliar o estado da arte na área de sistemas de controle chaveados, bem como na área de sistemas *quasi*-estáveis, apresentando com maior detalhe as principais contribuições dessas áreas. Cabe ressaltar que nesta revisão não foram encontrados trabalhos que abordem a questão da análise de estabilidade de sistemas chaveados com objetivo de controle principal, tampouco proposições que possam ser confundidas com as aqui apresentadas, indicando a originalidade das contribuições deste trabalho.

Foram desenvolvidos e analisados experimentos reais e por simulação, envolvendo tarefas de controle de processos químicos e navegação de robôs móveis. Os testes realizados abrangeram todas as proposições desenvolvidas nesta tese e foram usados para mostrar algumas possibilidades de aplicações envolvendo tais proposições. Adicionalmente, foram apresentados experimentos para ilustrar as limitações das mesmas para as aplicações em questão.

Os resultados obtidos com os experimentos realizados, unidos ao fato que foram apresentadas descrição e prova das proposições, são considerados como fortes indicativos de que as contribuições desta tese possuem um grau de contribuição original compatível com o de um doutorado.

No texto a seguir são apresentadas as principais contribuições já obtidas com o presente trabalho e os trabalhos futuros que se espera realizar a partir dessas contribuições.

## 6.1. Contribuições

De forma resumida, são apresentadas nos tópicos a seguir as principais contribuições deste doutorado:

- Apresentação de uma revisão bibliográfica ampla e atual sobre sistemas de controle chaveados;

- Definição de um novo conceito de estabilidade para sistemas que atendem os critérios de estabilidade clássica após um tempo  $\tau$ .
- Proposta de duas condições suficientes do tipo Lyapunov para os sistemas *quasi*-estáveis.
- Proposta de um novo campo no contexto da análise de estabilidade, baseado em objetivo de controle principal;
- Apresentação de duas condições suficientes para demonstração de *quasi*-estabilidade e *quasi*-estabilidade assintótica para chaveamento rápido de sistemas que se enquadram nesse novo campo;
- Apresentação de uma proposição para demonstração de *quasi*-estabilidade assintótica de sistemas de controle chaveados com a característica supracitada e que, além disso, possuem chaveamento dependente do estado atual (chaveamento lento);
- Demonstração matemática das cinco proposições apresentadas;
- Elaboração e realização de testes por simulação na área de controle de processos químicos;
- Elaboração e realização de testes por simulação aplicados à navegação de robôs móveis;
- Desenvolvimento de testes reais na área de navegação de robôs móveis usando a plataforma Pioneer P3DX;
- Apresentação das principais limitações deste trabalho a partir de testes realizados por simulação.

## 6.2. Trabalhos Futuros

Com a definição da *quasi*-estabilidade, bem como a proposição de condições suficientes do tipo Lyapunov para este tipo de estabilidade, espera-se que um grande número de trabalhos que não se enquadram no conceito clássico de estabilidade possa ter sua estabilidade matematicamente demonstrada. Como trabalho futuro é proposta a continuidade deste trabalho no sentido de desenvolver novas ferramentas matemáticas que auxiliem na demonstração da *quasi*-estabilidade de um número maior de sistemas dinâmicos híbridos, não restringindo para o caso dos sistemas chaveados.

Como já explanado no capítulo 1, as proposições 3 e 4 devem servir como uma ferramenta alternativa para a análise de estabilidade de sistemas de controle chaveados,

sem restrições com respeito à frequência de chaveamento, o que permite um chaveamento rápido. Como essas ferramentas também podem ser aplicadas para o caso não-linear, é proposto como trabalho futuro o uso dessas ferramentas para analisar sistemas desse tipo que atualmente não possuem estabilidade demonstrada, como ocorre no caso do chaveamento de controladores para navegação de robôs móveis.

Na proposição 5 é apresentada uma condição para que o chaveamento seja *quasi*-assintoticamente estável, para tanto o mesmo deve ocorrer de maneira que, após determinado tempo, a função de Lyapunov do subsistema principal tenha decrescido uma quantia proporcional ao valor da norma das variáveis de estado naquele ponto de operação. Dessa forma, propõe-se investigar o uso dessa proposição como ferramenta para o projeto e análise de sistemas supervisórios, que deverá ser útil para um significativo número de sistemas, uma vez que essa proposição também pode ser utilizada no caso não-linear.

Além disso, serão realizadas novas aplicações de sistemas de controle chaveados, criadas a partir da inclusão do novo conceito de objetivo de controle principal, proposto neste doutorado. Assim, será analisada a estabilidade desses sistemas chaveados, que poderão possuir subsistemas instáveis ou com pontos de equilíbrio diferentes, desde que sejam contínuos no tempo. Deve-se ressaltar que, nesse caso, apenas a estabilidade com respeito ao ponto de equilíbrio do controlador principal poderá ser provada usando as referidas proposições.

De posse das ferramentas para a análise de estabilidade aqui propostas, propõe-se ainda como trabalho futuro um estudo focado no projeto de sistemas que farão uso dessas ferramentas, facilitando, dessa forma, o desenvolvimento de novos sistemas baseados em objetivo de controle principal.

Uma vez que distúrbios externos ou perturbações do sistema podem ser modelados como um chaveamento temporário do sistema de controle principal para algum subsistema secundário, que seria o distúrbio ou a perturbação, as proposições apresentadas nesta tese de doutorado poderão ser usadas para provar a estabilidade do sistema sob condições adversas, sejam elas frequentes ou não.

Por fim, considerando a existência de pouco ferramental matemático para a área de fusão de sinais de controle heterogêneos (objetivos de controle diferentes), é

proposto o uso das contribuições apresentadas neste doutorado como base para a análise de estabilidade de alguns dos métodos de fusão já aplicados para o caso homogêneo, considerando o caso objetivo de controle principal, proposto neste trabalho.

## Referências Bibliográficas

---

- [1] Liberzon, Daniel, and A. Stephen Morse. "Basic Problems in Stability and Design of Switched Systems." *IEEE Control Systems*, October, 1999: 59-70.
- [2] Goebel, Rafal, Ricardo G. Sanfelice, and Andrew R. Teel. "Robust Stability And Control for Systems That Combine Continuous-Time and Discrete-Time Dynamics." *IEEE Control Systems Magazine*, April, 2009.
- [3] Sanfelice, Ricardo G., Rafal Goebel, and Andrew R. Teel. "Invariance principles for hybrid systems with connections to detectability and asymptotic stability." *IEEE Transactions on Automatic Control*, December, 2007.
- [4] Lygeros, John, Karl Henrik Johansson, Slobodan N. Simic, Jun Zhang, and S. Shankar Sastry. "Dynamical Properties of Hybrid Automata." *IEEE Transactions on Automatic Control*, January, 2003.
- [5] Arkin, Ronald C. *Behavior-Based Robotics (Intelligent Robotics and Autonomous Agents)*. The MIT Press: May, 1998.
- [6] Decarlo, Raymond A., Michael S. Branicky, Stefan Pettersson, and Bengt Lennartson. "Perspectives and Results on the Stability and Stabilizability of Hybrid Systems." *Proceedings of the IEEE*, July, 2000: 1069-1082.
- [7] Wulff, Kai. "Quadratic and Non-Quadratic Stability Criteria for Switched Linear Systems." PhD Thesis, Department of Computer Science, National University of Ireland, Maynooth, 2004.
- [8] Ji, Hongli, Jinhao Qiu, Adrien Badel, and Kongjun Zhu. "Semi-active Vibration Control of a Composite Beam using an Adaptive SSDV Approach." *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, March, 2009: 401-412.

- [9] Corona, Daniele, Alessandro Giua, and Carla Seatzu. "Optimal control of hybrid automata: design of a semiactive suspension." *Control Engineering Practice*, May 14, 2004: 1305-1318.
- [10] Boskovic, J. D., and R. K. Mehra. "Multi-mode switching in flight control." *Proceedings of the 19th Digital Avionics Systems Conference*. Philadelphia, 2000.
- [11] Boskovic, J., and R. Mehra. "Multivariable adaptive controller design for a class of non-affine models arising in flight control." *Proceedings of the 40th Conference on Decision and Control*. Florida, 2001.
- [12] Antsaklis, P. "Special issue on hybrid systems: Theory and applications - a brief introduction to the theory and applications of hybrid systems." *Proceedings of the IEEE*, July, 2000: 879-887.
- [13] Horowitz, Roberto, and Pravin Varaiya. "Control design of an automated highway system." *Proceedings of the IEEE*, 2000: 913-925.
- [14] Sastry, S., G. Meyer, C. Tomlin, J. Lygeros, D. Godbole, and G. Pappas. "Hybrid control in air traffic management systems." *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, LA, 1995.
- [15] Tomlin, Claire, George J. Pappas, and Shankar Sastry. "Conflict Resolution for Air Traffic Management: A Study in Multiagent Hybrid Systems." *IEEE Transactions On Automatic Control*, April, 1998.
- [16] Meyer, C., S. Schroder, and R. W. De Doncker. "Solid-state circuit breakers and current limiters for medium-voltage systems having distributed power systems." *IEEE Transactions on Power Electronics*, September, 2004: 1333-1340.
- [17] Sira-Ramirez, Hebertt, and Marija Ilic-Spong. "Exact linearization in switched-mode DC-to-DC power converters." *International Journal of Control*, 1989: 511-524.
- [18] Tanwani, Aneel, Alejandro D. Domínguez-García, and Daniel Liberzon. "An Inversion-Based Approach to Fault Detection and Isolation in Switching

Electrical Networks.” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, October 07, 2010: 1-17.

- [19] De La Cruz, C., R. Carelli, and T. F. Bastos. “Switching adaptive control of mobile robots.” *IEEE International Symposium on Industrial Electronics, 2008. ISIE 2008*. Cambridge, 2008. 835-840.
- [20] Vu, L., D. Chatterjee, and D. Liberzon. “Input-to-state stability of switched systems and switching adaptive control.” *Elsevier Science Automatica*, January 25, 2007: 639-646.
- [21] Hespanha, João P., Daniel Liberzon, David Angeli, and Eduardo D. Sontag. “Nonlinear observability notions and stability of switched systems.” *IEEE Transactions on Automatic Control*, February, 2005: 154-168.
- [22] Slotine, J. J., and S. S. Sastry. “Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators.” *International Journal of Control*, 1983: 465-492.
- [23] Yang, Song, Xiang Zheng-Rong, Chen Qing-Wei, and Hu Wei-Li. “Analysis of sliding mode in planar switched systems.” *Acta Automatica Sinica*, September, 2005.
- [24] Richard, P. Y., H. Cormerais, and J. Buisson. “A generic design methodology for sliding mode control of switched systems.” *Elsevier Nonlinear Analysis*, 2006: 1751–1772.
- [25] Wu, Ligang, and James Lam. “Sliding mode control of switched hybrid systems with time-varying delay.” *International Journal Of Adaptive Control And Signal Processing*, 2008: 909–931.
- [26] Saadaoui, H., J. de Leon, M. Djemai, N. Manamanni, and E J. P. Barbot. “High order sliding mode and adaptive observers for a class of switched systems with unknown parameter: A comparative study.” *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control*. San Diego, CA, December, 2006.

- [27] Zhaolan, He, Wang Mao, and Liu Shuhuan. "Discrete Sliding Mode Prediction Control of Uncertain Switched Systems." *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2009: 1065–1071.
- [28] Liberzon, Daniel. "On new sufficient conditions for stability of switched linear systems." *Proceedings of European Control Conference*. 2009.
- [29] Vu, L., D. Chatterjee, and D. Liberzon. "ISS of Switched Systems and Applications to Switching Adaptive Control." *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005*. Seville, Spain, 2005.
- [30] Zhao, Ping "Practical stability, controllability and optimal control of stochastic Markovian jump systems with time-delays." *Elsevier Automatica*. 2008: 3120-3125.
- [31] Kawka, Paul A., and Andrew G. Alleyne. "Stability and Performance of Packet-Based Feedback Control over a Markov Channel." *Proceedings of the 2006 American Control Conference*. Minneapolis, Minnesota, June, 2006. 2807-2812.
- [32] Koo, T. John, George J. Pappas, and Shankar Sastry. "Mode Switching Synthesis for Reachability Specifications." *Lecture Notes in Computer Science*, 2001: 333-346.
- [33] Liberzon, Daniel, and Stephan Trenn. "On Stability of Linear Switched Differential Algebraic Equations." *Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference*. Shanghai, 2009: 2156-2161.
- [34] Hespanha, João P., Daniel Liberzon, and Andrew R. Teel. "Lyapunov Conditions for the Input-to-State Stability of Impulsive Systems." *Elsevier Automatica*, November, 2008: 2735-2744.
- [35] Wicks, M., P. Peleties, and E. R. Decarlo. "Switched controller synthesis for the quadratic stabilisation of a pair of unstable linear systems." *European journal of control*, 1998: 140-147.

- [36] Belta, C., J. Schug, Dang Thao, and V. Kumar. "Stability and reachability analysis of a hybrid model of luminescence in the marine bacterium *Vibrio fischeri*." *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, 2001*. Orlando, FL, 2001. 869 - 874.
- [37] Brockett, R. W. "Asymptotic Stability and Feedback Stabilization." *Differential Geometric Control Theory*, 1983: 181-191.
- [38] Carvalho, Elyson A. N., Lucas Molina, Eduardo O. Freire, Benedito A. Luciano, and Raimundo C. S. Freire. "Fault-Tolerant Weld Line Detection Based On Distance and Visual Information Fusion." *Anais do 4 Workshop de Robótica Aplicada e Automação - Robocontrol'10*. Bauru, SP, 2010.
- [39] Carvalho, Elyson A. N., Lucas Molina, Eduardo O. Freire, Benedito A. Luciano, and Raimundo C. S. Freire. "Fault-Tolerant Weld Line Detection for Automatic Inspection of Storage Tanks Based on Distance and Visual Information Fusion." *Proceedings on International Instrumentation and Measurement Technology Conference*. Singapore, 2009.
- [40] Molina, Lucas, Raimundo C. S. Freire, Elyson A. N. Carvalho, and Eduardo O. Freire. "A Model-Based Fault-Tolerant Weld Line Detection for Automatic Inspection of Storage Tanks Using Visual Information and Alfa-Beta Filter." *Latin American Robotics Symposium and Intelligent Robotics Meeting*. São Bernardo do Campo -SP, 2010.
- [41] Molina, Lucas, Elyson A. N. Carvalho, Matheus A. Moura, Eduardo O. Freire, e Jugurta R. Montalvão-Filho. "Um Método de Visão Robótica para Identificação de Cordões de Solda em Tanques de Armazenamento Visando Inspeção Automatizada." *Anais do XVII Congresso Brasileiro de Automática - CBA*. Juiz de Fora - MG, 2008.
- [42] Carvalho, Elyson A. N., Lucas Molina, Eduardo O. Freire, Raimundo C. S. Freire, and Benedito A. Luciano. "Fillet Weld Identification for Automatic Inspection of Spherical Tanks." *IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*. Warsaw, 2007.

- [43] Alves, Marcos V. S., Leocarlos B. S. Lima, Eduardo O. Freire, Elyson Á. N. Carvalho, and Lucas Molina. “Applications of Stochastic Approaches in Mobile Robotics: An Overview of Recent Brazilian Works.” *Latin American Robotics Symposium and Intelligent Robotics Meeting*. São Bernardo do Campo - SP, 2010.
- [44] Carvalho, Elyson A. N., Lucas Molina, Eduardo O. Freire, Benedito A. Luciano, e Raimundo C. S. Freire. “Sistema para Identificação, Localização e Estimação de Cordões de Solda Presentes em Tanques de Armazenamento de Combustíveis Derivados do Petróleo.” *Anais do XVII Congresso Brasileiro de Automática - CBA*. Juiz de Fora, 2008.
- [45] Molina, Lucas, Elyson A. N. Carvalho, Eduardo O. Freire, Jugurta R. Montalvão-Filho, and Flávio de A. Chagas. “A Robotic Vision System Using a Modified Hough Transform to Perform Weld Line Detection on Storage Tanks.” *Latin American Robotics Symposium - LARS*. Salvador - BA, 2008.
- [46] Carvalho, Elyson A. N., Lucas Molina, André Dantas Dias, Eduardo O. Freire, Raimundo C. S. Freire, e Benedito A. Luciano. “Desenvolvimento de um Sistema de Baixo Custo para Identificação de Cordões de Solda para Inspeção Automatizada de Tanques Esféricos.” *Anais do VIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI*. Florianópolis - SC, 2007.
- [47] Ji, Zhijian, Long Wang, and Xiaoxia Guo. “On Controllability of Switched Linear Systems.” *IEEE Transactions on Automatic Control*, April, 2008: 796-801.
- [48] Sun, Zhendong, S. S. Ge, and T. H. Lee. “Controllability and reachability criteria for switched linear systems.” *Elsevier Science Automatica*, 2002: 775-786.
- [49] Vu, Linh, and Daniel Liberzon. “Common Lyapunov functions for families of commuting nonlinear systems.” *Systems & Control Letters*, 2005.
- [50] Tuna, S. Emre, and Andrew R. Teel. “Regulating discrete-time homogeneous systems under arbitrary switching.” *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005*. Seville, Spain, 2005. 2586-2591.

- [51] El-Farra, Nael H., Prashant Mhaskar, and Panagiotis D. Christofides. "Output feedback control of switched nonlinear systems using multiple Lyapunov functions." *Systems & Control Letters*, May 26, 2005: 1163-1182.
- [52] Leith, D., W. Leithead, O. Mason, and R. Shorten. "A wind turbine benchmark for hybrid systems analysis and design." *Proceedings of the IFAC World Congress*. Barcelona, 2002.
- [53] Leith, D. J., R. N. Shorten, W. E. Leithead, O. Mason, and P. Curran. "Issues in the design of switched linear control systems: A benchmark study." *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2003: 103-118.
- [54] Lazarevic, M. P. "Finite Time Stability Analysis of PD[alpha] Fractional Control of Robotic Time-Delay Systems." *Mechanics Research Communications*, 2006: 269 - 279.
- [55] Michel, A., and D. Porter. "Practical Stability and Finite-Time Stability of Discontinuous Systems." *IEEE Transactions on Circuit Theory*, March, 1972: 123 - 129.
- [56] Zhai, Guisheng, and A. N. Michel. "On Practical Stability of Switched Systems." *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, 2002. December, 2002. 3488 - 3493.
- [57] Zhai, G., and A. N. Michel. "Generalized Practical Stability Analysis of Discontinuous Dynamical Systems." *42nd IEEE Conference on Decision and Control, 2003. Proceedings*. December, 2003. 1663 - 1668.
- [58] Sathananthan, S. "Quantitative Analysis of Jump Markovian Nonlinear Stochastic Hybrid Systems: Practical Stability." *Nonlinear Studies*, 2001: 407 - 428.
- [59] Yang, Chunyu, Qingling Zhang, and Linna Zhou. "Practical Stability of Descriptor Systems with Time Delays in Terms of Two Measurements." *Journal of the Franklin Institute*, 2006: 635 - 646.

- [60] Zhang, Yu, and Sun Jitao. “Practical Stability of Impulsive Functional Differential Equations in Terms of Two Measurements.” *Computers & Mathematics with Applications*, 2004: 1549 - 1556.
- [61] Lakshmikantham, V., and Y. Zhang. “Strict Practical Stability of Delay Differential Equation.” *Applied Mathematics and Computation*, 2001: 275 - 285.
- [62] Bernfeld, Stephen R., and V. Lakshmikantham. “Practical Stability And Lyapunov Functions.” *Tohoku Mathematical Journal*, 1980: 607 - 613.
- [63] Zhen, Zhong, and Duan Guangren. “Analysis of Finite-Time Practical Stability for Time-Varying Polytopic Systems.” *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2009: 112 – 119.
- [64] LaSalle, J. P., and S. Lefschetz. *Stability by Liapunov's Direct Method: With Applications*. Academic Press, 1961.
- [65] Weiss, Leonard, and E. F. Infante. “On The Stability of Systems Defined Over a Finite Time Interval.” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 1965: 44 - 48.
- [66] Ryali, V., and K. M. Moudgalya. “Practical Stability Analysis Of Uncertain Nonlinear Systems.” *National Conference on Control and Dynamic Systems*. 2005: 27 – 29.
- [67] Lakshmikantham, V., S. Leela, and A. A. Martynyuk. *Practical Stability of Nonlinear Systems*. World Scientific, 1990.
- [68] Khalil, Hassan K. *Nonlinear Systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, Inc., 2002.
- [69] Sun, Zhendong, and S. S. Ge. “Analysis and synthesis of switched linear control systems.” *Elsevier Automatica*, March, 2004: 181-195.
- [70] Lin, Hai, and Panos J. Antsaklis. “Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Short Survey of Recent Results.” *Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on Intelligent Control*. Limassol, Cyprus, 2005. 27-29.

- [71] Lin, Hai, and Panos J. Antsaklis. “Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results.” *IEEE Transactions on Automatic Control*, February, 2009: 308-322.
- [72] Liberzon, Daniel. “Nolinear Control with Limited Information.” *Communication in Information and Systems*, 2009: 41-58.
- [73] Margaliot, Michael, and Daniel Liberzon. “Lie-Algebraic Stability Conditions for Nonlinear Switched Systems and Differential Inclusions.” *Elsevier Systems & Control Letters*, June, 2005: 8-16.
- [74] Cheng, Daizhan, Lei Guo, Yuandan Lin, and Yuan Wang. “Stabilization of Switched Linear Systems.” *IEEE Transactions on Automatic Control*, May, 2005: 661-666.
- [75] Liberzon, Daniel, João P. Hespanha, and A. Stephen Morse. “Stability of Switched Systems - A Lie-algebraic Condition.” *Systems and Control Letters*, 1999: 117-122.
- [76] Agrachev, Andrei A., and Daniel Liberzon. “Lie-Algebraic Stability Criteria for Switched Systems.” *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2002: 253–269.
- [77] Zhai, Guisheng, Hai Lin, and Panos J. Antsaklis. “Quadratic Stabilizability of Switched Linear Systems with Polytopic Uncertainties.” *International Journal of Control*, 2003: 747-753.
- [78] Sun, Xi-Ming, Jun Zhao, and David J. Hill. “Stability and L2-Gain Analysis for Switched Delay Systems: A Delay-Dependent Method.” *Elsevier Automatica*, July, 2006: 1769–1774.
- [79] Chatterjee, Debasish, and Daniel Liberzon. “Towards ISS Disturbance Attenuation for Randomly Switched Systems.” *46th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, LA, USA, 2007.
- [80] Chatterjee, Debasish, and Daniel Liberzon. “On Stability of Randomly Switched Nonlinear Systems.” *IEEE Transactions on Automatic Control*, December, 2007: 2390-2394.

- [81] Zhai, Guisheng, Bo Hu, Kazunori Yasuda, and Anthony N. Michel. “Disturbance Attenuation Properties of Time-Controlled Switched Systems.” *Elsevier Journal of the Franklin Institute*, November, 2001: 765-779.
- [82] Vu, L., and D. Liberzon. “Stability of Interconnected Switched Systems and Supervisory Control of Time-Varying Plants.” *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, LA, USA, 2007.
- [83] Müller, Matthias A., and Daniel Liberzon. “Input/output-to-state stability of switched nonlinear systems.” *2010 American Control Conference*. Marriott Waterfront, Baltimore, MD, USA, 2010.
- [84] Chatterjee, Debasish, and Daniel Liberzon. “Stability Analysis of Deterministic and Stochastic Switched Systems via a Comparison Principle and Multiple Lyapunov Functions.” *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2007: 174–206.
- [85] Zhai, Guisheng, Bo Hu, Kazunori Yasuda, and Anthony N. Michel. “Stability Analysis of Switched Systems with Stable and Unstable Subsystems: an Average Dwell Time Approach.” *International Journal of Systems Science*, 2001: 1055-1061.
- [86] Mitra, Sayan, Daniel Liberzon, and Nancy Lynch. “Verifying Average Dwell Time of Hybrid Systems.” *ACM Transactions on Embedded Computing Systems (TECS)*, December, 2008: 3:1-3:37.
- [87] Prajna, Stephen, and Antonis Papachristodoulou. “Analysis of Switched and Hybrid Systems – Beyond Piecewise Quadratic Methods.” *Proceedings of ACC*. 2003. 1-6.
- [88] Johansson, Mikael, and Anders Rantzer. “Computation of Piecewise Quadratic Lyapunov Functions for Hybrid Systems.” *IEEE Transactions on Automatic Control*, April, 1998: 555-559.
- [89] Xu, Xuping, and Panos J. Antsaklis. “Stabilization of Second-Order LTI Switched Systems.” *International Journal of Control*, 2000: 1261-1279.

- [90] Liberzon, Daniel, and Dragan Nesic. "Input-to-State Stabilization of Linear Systems with Quantized State Measurements." *IEEE Transactions on Automatic Control*, May, 2007: 767-781.
- [91] Sharon, Yoav, and Daniel Liberzon. "Input to State Stabilizing Controller for Systems with Coarse Quantization." *IEEE Transactions on Automatic Control*, "submitted for publication".
- [92] Sharon, Yoav, and Daniel Liberzon. "Input-to-State Stabilization with Quantized Output Feedback." *Hybrid Systems: Computation and Control*, 2008: 500-513.
- [93] Liberzon, Daniel, and Dragan Nesic. "Stability Analysis of Hybrid Systems Via Small-Gain Theorems." *Hybrid systems: computation and control*, 2006: 421-435.
- [94] Vu, Linh, and Daniel Liberzon. "Stabilizing Uncertain Systems with Dynamic Quantization." *47th IEEE Conference on Decision and Control, 2008. CDC 2008*. Cancun, 2008. 4681-4686.
- [95] Hespanha, João P., Daniel Liberzon, and A. Stephen Morse. "Hysteresis-based switching algorithms for supervisory control of uncertain systems." *Elsevier Automatica*, September, 2002: 263-272.
- [96] Carvalho, Elyson A. N., José G. N. Carvalho Filho, Lucas Molina, Eduardo O. Freire, Raimundo C. S. Freire, e Benedito A. Luciano. "Medição de velocidade angular com alta resolução usando encoders de baixa resolução e PLL." *Controle & Automação (Impresso)*, 2010: 616-625.
- [97] Carvalho Filho, José G. N., Elyson A. N. Carvalho, Lucas Molina, Eduardo O. Freire, e Raimundo C. S. Freire. "Medição de Velocidade Angular Usando PLL: Medidas de Alta Resolução Usando Enconders de Baixa Resolução." *Anais do 8th International Seminar on Electrical Metrology*. João Pessoa, PB, 2009.
- [98] Carvalho Filho, José G. N., Elyson A. N. Carvalho, Lucas Molina, Eduardo O. Freire, and Benedito Luciano. "High Resolution Analogical Measurement of Motor's Angular Velocity Using Low Resolution Optical Encoders." *Workshop Robocontrol'08 - 3rd Applied Robotics and Collaborative Systems Engineering*. Bauru, SP, 2008.

- [99] Carvalho Filho, José G. N., Lucas Molina, K. Bensebaa, Elyson A. N. Carvalho, e Eduardo O. Freire. “Estimação de Posição e Orientação para Robôs Móveis.” *Anais do IX Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. Brasília - DF, 2009.
- [100] Liberzon, Daniel. “Hybrid feedback stabilization of systems with quantized signals.” *Elsevier Automatica*, March, 2003: 1543–1554.
- [101] Liberzon, Daniel. “Quantization, Time Delays, and Nonlinear Stabilization.” *IEEE Transactions on Automatic Control*, July, 2006: 1190-1195.
- [102] Brockett, Roger W., and Daniel Liberzon. “Quantized Feedback Stabilization of Linear Systems.” *IEEE Transactions on Automatic Control*, July, 2000: 1279-1289.
- [103] Liberzon, Daniel, and João P. Hespanha. “Stabilization of Nonlinear Systems with Limited Information Feedback.” *IEEE Transactions on Automatic Control*, June, 2005: 910-915.
- [104] Carvalho, Elker A. N., Jugurta R. Montalvão-Fillho, Elyson A. N. Carvalho, Eduardo O. Freire, e Leocarlos B. S. Lima. “Utilização da Análise Espectral de Imagens Térmicas para Determinação da Mínima Taxa de Amostragem Espacial Necessária.” *Anais do Simpósium Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI*. Brasília - DF, 2009.
- [105] Carvalho, Elyson A. N., Marcos V. S. Alves, Eduardo O. Freire, Jugurta R. Montalvão-Filho, e Lucas Molina. “Avaliação de Desempenho de Arquiteturas de Navegação de Robôs Móveis com Base em Padrões Humanos.” *Anais do IX Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI*. Brasília - DF, 2009.
- [106] Freire, Eduardo O., Elyson A. N. Carvalho, Marcos V. S. Alves, Jugurta R. Montalvão-Filho, and Lucas Molina. “Human Based Benchmark for Robot Navigation Assessment.” *Proceedings of the ISSNIP Biosignals and Biorobotics Conference*. Vitória - ES, 2010.
- [107] Guan, Zhi-Hong, David J. Hill, and Xuemin (Sherman) Shen. “On Hybrid Impulsive and Switching Systems and Application to Nonlinear Control.” *IEEE Transaction on Automatic Control*, July, 2005: 1058-1062.

- [108] Aubin, Jean-Pierre, John Lygeros, Marc Quincampoix, Shank Sastry, and Nicolas Seube. "Impulse Differential Inclusions: A Viability Approach to Hybrid Systems." *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2002: 2-20.
- [109] Babaali, Mohamed, and George J. Pappas. "Observability of Switched Linear Systems in Continuous Time." *Lecture Notes in Computer Science*, 2005: 103-117.
- [110] Vidal, René, Alessandro Chiuso, Stefano Soatto, and Shankar Sastry. "Observability of Linear Hybrid Systems." *Lecture Notes in Computer Science*, 2003: 526-539.
- [111] Ge, S. S., Z. Sun, and T. H. Lee. "Reachability and Controllability of Switched Linear Discrete-Time Systems." *IEEE Transactions on Automatic Control*, September, 2001: 1437-1441.
- [112] Tanwani, Aneel, and Daniel Liberzon. "Invertibility of Switched Nonlinear Systems." *Elsevier Automatica*, December, 2010: 1962-1973.
- [113] Vu, L., and D. Liberzon. "Invertibility of Switched Linear Systems." *Elsevier Automatica*, April, 2008: 949-958.
- [114] Tanwani, A., and D. Liberzon. "Invertibility of Nonlinear Switched Systems." *47th IEEE Conference on Decision and Control, 2008. CDC 2008*. Cancun, 2008. 286-291.
- [115] Sun, Zhendong, and Dazhong Zheng. "On Reachability and Stabilization of Switched Linear Systems." *IEEE Transactions on Automatic Control*, February, 2001: 291-295.
- [116] Xu, Xuping, and P. J. Antsaklis. "Optimal Control of Switched Systems Based on Parameterization of the Switching Instants." *IEEE Transaction on Automatic Control*, January, 2004: 2-16.
- [117] Hespanha, João P., Daniel Liberzon, and A. Stephen Morse. "Overcoming the limitations of adaptive control by means of logic-based switching." *Systems and Control Letters*, 2003: 49-65.

- [118] Moreau, Luc, and Dirk Aeyels. "Practical Stability for Systems Depending on a Small Parameter." *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision & Control*. Tampa, Florida, 1998: 1429-1433.
- [119] Moreau, Luc, and Dirk Aeyels. "Practical Stability and Stabilization." *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000: 1554-1558.
- [120] Yang, Xiao-song. "Practical stability in dynamical systems." *Elsevier Chaos, Solitons & Fractals.*, 2000: 1087-1092.
- [121] Lakshmikantham, V., and Stephen R. Bernfeld. *Practical Stability and Lyapunov Functions*. University of Texas at Arlington, 1979.
- [122] Teel, Andrew R., Joan Peuteman, and Dirk Aeyels. "Semi-global practical asymptotic stability and averaging." *Systems & Control Letters*, 1999: 329-334.
- [123] Teel, Andrew, and Laurent Praly. "Tools for Semiglobal Stabilization by Partial State and Output Feedback." *Siam Journal of Control and Optimization*, 1995: 1443-1488.
- [124] Nesic, D., A. R. Teel, and P. V. Kokotović. "Sufficient Conditions for Stabilization of Sampled-data Nonlinear Systems via Discrete-time Approximations." *Elsevier Systems & Control Letters*, 1999: 259-270.
- [125] Zhang, Yu, and Jitao Sun. "Eventual Practical Stability of Impulsive Differential Equations with Time Delay in Terms of Two Measurements." *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2005: 223-229.
- [126] Stamova, Ivanka M. "Vector Lyapunov Functions for Practical Stability of Nonlinear Impulsive Functional Differential Equations." *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007: 612-623.
- [127] Agathoklis, P., and L.T. Bruton. "Practical-BIBO stability of n-dimensional discrete systems." *IEE Electronic Circuits & Systems*, 1983: 236-242.
- [128] Jiang, Z.-P., A. R. Teel, and L. Praly. "Small-Gain Theorem for ISS Systems and Applications." *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 1994: 95-120.

- [129] Wang, Peiguang, and Meng Wu. “Practical  $[\phi]_0$ -stability of Impulsive Dynamic Systems on Time Scales.” *Applied Mathematics Letters*, 2007: 651-658.
- [130] Zhai, G. and Michel, A. N. “Generalized Practical Stability Analysis of Discontinuous Dynamical Systems.” *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2004: 5-12.
- [131] Xu, Xuping, and Guisheng Zhai. “Practical Stability and Stabilizations of Hybrid and Switched Systems.” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005: 1987-1903.
- [132] Xu, Xuping, and Guisheng Zhai. “On Practical Stability and Stabilization of Hybrid and Switched Systems.” *Lecture Notes in Computer Science*, 2004: 63-88.
- [133] Yin, G. George, Bo Zhang, and Chao Zhu. “Practical Stability and Instability of Regime-switching Diffusions.” *Journal of Control Theory and Applications*, 2008: 105-114.
- [134] Chaillet, Antoine, and Antonio Loria. “Uniform semiglobal practical asymptotic stability for non-autonomous cascaded systems and applications.” *Elsevier Automatica*, 2008.
- [135] Sathamanthan, S., and S. Suthaharan. “Practical Stability Criteria for Large-scale Nonlinear Stochastic Systems by Decomposition and Aggregation.” *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 2001: 227-248.
- [136] Bainov, Drumi D. “On the Practical Stability of the Solutions of Impulsive Systems of Differential-difference Equations with Variable Impulsive Perturbations.” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1996: 272-288.
- [137] Bainov, D. D., A. B. Dishliev, and I. M. Stamova. “Practical Stability of the Solutions of Impulsive Systems of Differential-difference Equations via the Method of Comparison and Some Applications to Population Dynamics.” *Anzian J.*, 2002: 525-539.

- [138] Yang, Tao, and Leon O. Chua. "Practical Stability of Impulsive Synchronization Between Two Nonautonomous Chaotic Systems." *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2000: 859-867.
- [139] Kaczorek, T. "Practical stability of positive fractional discrete-time linear systems." *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, 2008: 313-317.
- [140] Buslowicz, Mikolaj, and Tadeusz Kaczorek. "Simple Conditions for Practical Stability of Positive Fractional Discrete-Time Linear Systems." *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2009: 263-269.
- [141] Liberzon, Daniel. *Switching in Systems and Control*. Boston, MA: Birkhauser, 2003.
- [142] Vidal, R., S. Soatto, Yi Ma, and S. Sastry. "An algebraic geometric approach to the identification of a class of linear hybrid systems." *42nd IEEE Conference on Decision and Control, 2003. Proceedings.* 2004. 167-172.
- [143] Goebel, Rafal, Ricardo G. Sanfelice, and Andrew R. Teel. "Hybrid Systems Techniques for Convergence of Solutions to Switching Systems." *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, LA, 2007.
- [144] Goebel, Rafal, Ricardo G. Sanfelice, and Andrew R. Teel. "Invariance principles for switching systems via hybrid systems techniques." *Systems & Control Letters*, 2008: 980-986.
- [145] Carvalho, Elyson A. N., Lucas Molina, Eduardo O. Freire, Jugurta R. Montalvão-Filho, Raimundo C. S. Freire, e Benedito A. Luciano. "Propagação de Incertezas Estruturais no Modelo Cinemático de Robôs Móveis." In: *Metrologia e Instrumentação: Tópicos Seleccionados*, por Flávio Vasconcelos, Raimundo C. S. Freire e Sebastian Y. C. Catunda, 53-66. Campina Grande - PB: EDUFPG, 2010.
- [146] Chagas, Flávio de A., Elyson A. N. Carvalho, Eduardo O. Freire, Jugurta R. Montalvão-Filho, e Raimundo C. S. Freire. "Avaliação da Imprecisão Odométrica em Robôs Móveis Considerando as Incertezas Associadas ao Processo de Fabricação." *8th International Seminar on Electrical Metrology - SEMETRO*. João Pessoa - PB, 2009.

- [147] Morse, A. S., D. Q. Mayne, and G. C. Goodwin. “Applications of Hysteresis Switching in Parameter Adaptive Control.” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992: 1343-1354.
- [148] Hespanha, J. P. “Stability of Switched Systems with Average Dwell Time.” *Proceedings of 38th Conference of Decision and Control*. 1999.
- [149] Freire, Eduardo O. “Controle de Robô Móveis por Fusão de Sinais de Controle Usando Filtro de Informação Descentralizado.” Tese de Doutorado, Universidade Federal de do Espírito Santo, Vitória, Espírito Santo, 2002.
- [150] Secchi, Humberto. “Control de Vehículos Autoguiados con Realimentación Sensorial.” Disertación de Maestría, Universidad Nacional de San Juan, San Juan, Argentina, 1999.