UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Renan Gomes Lima Aragão

O problema da seta do tempo na cosmologia holográfica em laços.

Campina Grande, Paraíba, Brasil

8 de maio de 2023

Renan Gomes Lima Aragão

O problema da seta do tempo na cosmologia holográfica em laços.

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, apresentada à Unidade Acadêmica de Física na Universidade Federal de Campina Grande, em complemetação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Professor Dr. Francisco de Assis de Brito

Coorientador: Professor Dr. Carlos Alex Sousa Silva

Campina Grande, Paraíba, Brasil

8 de maio de 2023

A659p Aragão, Renan Gomes Lima.
O problema da seta do tempo na cosmologia holográfica em laços / Renan Gomes Lima Aragão. – Campina Grande, 2023.
65 f.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2022.
"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, Prof. Dr. Carlos Alex Sousa Silva".
Referências.

1. Cosmologia. 2. Gravitação. 3. Seta do Tempo. 4. Cosmologia Quântica em Laços. 5. Cosmologia Quântica. 6. Holográfica em Laços. I. Brito, Francisco de Assis de. II. Silva, Carlos Alex Sousa. III. Título.

CDU 523.11(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

RENAN GOMES LIMA ARAGÃO

O PROBLEMA DA SETA DO TEMPO NA COSMOLOGIA HOLOGRÁFICA EM LAÇOS

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Física na Universidade Federal de Campina Grande em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: _______/________/_________

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito - UFCG
Orientador

____

Prof. Dr. Carlos Alex Sousa Silva - IFCE
Coorientador

____

Prof. Dr. Amílcar Rabelo de Queiroz - UFCG
Examinador Interno

____

Prof. Dr. Messias de Brito Cruz - UEPB
Examinador Externo

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
POS-GRADUACAO EM FISICA
Rua Aprigio Veloso, 882, - Bairro Universitario, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

REGISTRO DE PRESENÇA E ASSINATURAS

REGISTRO DE PRESENÇA E ASSINATURAS

ATA DA DEFESA PARA CONCESSÃO DO GRAU DE MESTRE EM FÍSICA, REALIZADA EM 18 DE ABRIL DE 2022

Aos dezoito dias do mês de abril do ano de dois mil e vinte e dois, reuniram-se em caráter de solenidade pública, os membros da comissão designada para avaliar **RENAN GOMES DE LIMA ARAGÃO** ao grau de Mestre em Física, área de concentração Física. Foram componentes da Banca Examinadora os especialistas: o professor **Francisco de Assis de Brito** (Orientador) – Doutor em Física, o professor **Carlos Alex Sousa Silva** (coorientador) – Doutor em Física, o professor **Amílcar Rabelo de Queiroz** – Doutor em Física, o professor **Messias de Brito Cruz** – Doutor em Física, sendo o primeiro, integrante do corpo docente da Universidade Federal de Campina Grande, o segundo, integrante do Curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação do Ceará IFCE, o terceiro, integrante do corpo docente da Universidade Federal de Campina Grande, e o quarto, integrante do corpo docente da Universidade Estadual da Paraíba. HORA DE INÍCIO: **14h00min** – LOCAL: **Sala Virtual, em virtude da suspensão de atividades na UFCG decorrente do corona vírus.** Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca, professor **Francisco de Assis de Brito**, após declarar os objetivos da reunião, apresentou o(a) candidato(a) **RENAN GOMES DE LIMA ARAGÃO**, a quem concedeu a palavra para que dissertasse oral e sucintamente sobre o tema apresentado, intitulado "**O problema da seta do tempo na cosmologia holográfica em laços**"**.** Após discorrer o referido tema, o(a) candidato(a) foi arguido(a) pelos examinadores na forma regimental. Ato continuo, passou a Comissão, em caráter secreto, a proceder a avaliação e julgamento do trabalho, concluindo por atribuir-lhe o conceito Aprovado. Face à aprovação, declarou o Presidente estar o(a) avaliado(a), legalmente habilitado(a) a receber o Grau de Mestre em Física, cabendo à Universidade Federal de Campina Grande, providências para a expedição do Diploma a que o(a) mesmo(a) faz jus. Nada mais havendo a tratar, foi lavrada a ata, que será submetida à aprovação da Comissão Examinadora. Campina Grande, 18 de abril de 2022.

Francisco de Assis de Brito
Presidente da Comissão e Orientador

Carlos Alex Sousa Silva
Coorientador

Amílcar Rabelo de Queiroz
Examinador Interno

Messias de Brito Cruz
Examinador Externo

Renan Gomes Lima Aragão
Candidato(a)

João Rafael Lúcio dos Santos
Coordenador do Programa

2 - APROVAÇÃO

2.1. Segue a presente Ata de Defesa de Tese de Mestrado do(a) candidato(a) **RENAN GOMES DE LIMA ARAGÃO**, assinada eletronicamente pela Comissão Examinadora acima identificada.

2.2. No caso de examinadores externos que não possuam credenciamento de usuário externo ativo no SEI, para igual assinatura eletrônica, os examinadores internos signatários certificam que os examinadores externos acima identificados participaram da defesa da tese e tomaram conhecimento do teor deste documento.

Documento assinado eletronicamente por **FRANCISCO DE ASSIS DE BRITO**, **PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 18/04/2022, às 22:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018.

Documento assinado eletronicamente por **Messias de Brito Cruz**, **Usuário Externo**, em 19/04/2022, às 16:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018.

Documento assinado eletronicamente por **CARLOS ALEX SOUZA DA SILVA**, **Usuário Externo**, em 19/04/2022, às 17:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018.

Documento assinado eletronicamente por **Renan Gomes Lima Aragão**, **Usuário Externo**, em 19/04/2022, às 17:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufcg.edu.br/autenticidade, informando o código verificador **2265300** e o código CRC **C0648052**.

Dedico este trabalho a minha sobrinha Aurora Gonçalo Aragão.

Agradecimentos

- Aos meus pais e familiares pelo apoio, confiança e incentivo.
- Aos Professores Dr. Francisco de Assis de Brito e Dr. Carlos Alex Sousa Silva, pela orientação, sugestão, estímulo e competência com que conduziu este trabalho.
- A todos os professores desta Unidade Acadêmica que contribuiram com a minha formação.
- Aos meus amigos Arthur Ramos e Kelven Félix pelo apoio.
- A minha namorada Maisa Claudino pelo apoio e incentivo.
- Aos colegas de pós-graduação e funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade.
- À CAPES pelo suporte financeiro.
- A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

Buracos negros não são tão negros quanto parecem.
Eles não são as prisões eternas que nós pensávamos.
As coisas podem escapar para fora dos buracos negros
e possivelmente até para outro universo.
Então, se você se sentir dentro de um,
não desista – há uma maneira de escapar!
(Stephen Hawking)

Resumo

O problema da seta do tempo é uma questão bem conhecida em cosmologia e trata de sabermos como o universo iniciou a partir de um estado de baixa entropia, evoluindo de forma que sua entropia nunca decresça. A cosmologia quântica em laços procura descrever o comportamento do universo no período próximo da singularidade do *Big-Bang*. Ao relacionarmos cosmologia quântica em laços com a equação modificada de Bekenstein-Hawking, temos o que chamamos de cosmologia quântica holográfica em laços. Diante dessa perspectiva, obtemos uma possível solução para o problema da violação da segunda lei generalizada da termodinâmica no contexto da cosmologia quântica em laços nos períodos iniciais após o *Big-Bang*.

Palavras-chave: Seta do tempo, cosmologia quântica em laços, cosmologia quântica holográfica em laços.

Abstract

The time arrow problem is a well known question in cosmology and it is about knowing why the universe started from a low entropy state, evolving in a way that its entropy never decreases. Loop quantum cosmology seeks to describe the behavior of the universe in the period close to the Big Bang singularity. By relating loop quantum cosmology to the modified Bekenstein-Hawking equation, we have what we call holographic loop quantum cosmology. In view of this perspective, we obtain a possible solution to the problem of violation of the generalized second law of thermodynamics in the context of loop quantum cosmology in the early periods of the universe.

Keywords:Arrow of time, loop quantum cosmology, holographic loop quantum cosmology.

Lista de abreviaturas e siglas

FLRW	Friedmann-Lamaître-Robertson-Walker
GQL	Gravidade Quântica em Laços
CQL	Cosmologia Quântica em Laços
CQHL	Cosmologia Quântica Holográfica em Laços

Lista de símbolos

$d\Omega^2_{n-1}$	Elemento de linha para unidade de esfera $(n-1)$-dimensional
k	Constante de curvatura
$\tilde{r}_A$	Raio do horizonte aparente
$\tilde{r}_H$	Raio do horizonte de Hubble
$\tilde{r}_E$	Raio do horizonte de eventos cosmológico
W	Densidade de trabalho
Ψ_a	Vetor fonte de energia
κ	Gravidade superficial
$T_{\mu\nu}$	Tensor momento-energia
H	Parâmetro de Hubble
ρ	Densidade de energia
P	Pressão
$\mathcal{L}$	Lagrangeana
ρ_c	Densidade crítica
γ	Parâmetro de Barbero-Immirzi
S_H	Entropia do horizonte do buraco negro auto-dual
A_{min}	Mínimo valor de área previsto pela gravidade quântica em laços
Λ	Constante cosmológica
Δ_{GQL}	Gap de área definido pela gravidade quântica em laços
Φ	Função de Lerchphi
S_h	Entropia do horizonte aparente presente na cosmologia quântica em laços
S_{in}	Entropia da matéria dentro do horizonte
S_{tot}	Entropia total
$sgn(S_H)$	Função sinal da entropia do horizonte do buraco negro auto-dual

Sumário

1 Introdução

O termo seta do tempo, surgiu primeiramente por Arthur Eddington em 1927 [1]. Para Eddington a direção dessa seta poderia ser determinada através de estudos da organização de átomos, moléculas e corpos. Na física, não existe nenhuma lei fundamental que impeça a irreversibilidade do tempo, podemos citar como exemplo as leis de Newton que são simétricas em relação ao tempo.

No entanto, o que observamos na natureza é justamente o contrário, o tempo sempre se mantém em uma única direção. O problema da seta do tempo ainda é uma questão não solucionada pelos físicos, e trata de entendermos como o universo iníciou a partir de um estado de baixa entropia, evoluindo de forma que sua entropia nunca decresça. É importante ressaltarmos que a seta do tempo da qual estamos tratando é a seta do tempo termodinâmica [2].

Nas ultimas décadas, estudos na área da física de buracos negros mostram que segmentos como a termodinâmica e a mecânica quântica, estão profundamente relacionadas com buracos negros. As primeiras pistas da existência de buracos negros surgiram através de observações do sistema binário Cygnus X-1 [3], na década de 1970. Atualmente temos evidências mais fortes como as observações de ondas gravitacionais provenientes de uma fusão de dois buracos negros [4], e principalmente a fotografia do buraco negro presente no centro da galáxia M-87 [5]. Portanto, os buracos negros aparecem como objetos que podem nos ajudar a compreender melhor a natureza do nosso próprio universo.

Com os trabalhos pioneiros de Stephen Hawking onde ele propõe que buracos negros podem se comportar, de acordo com a mecânica quântica, como corpos negros emitindo radiação térmica com uma temperatura proporcional a sua gravidade superficial [6]. E também, os trabalhos de Bekenstein onde ele sugere que a entropia do buraco negro seria proporcional a área do horizonte de eventos dividido por quatro vezes o comprimento de Planck [7]. Mostraram de fato, as primeiras conexões da termodinâmica, mecânica quântica e a relatividade geral.

Para reforçar ainda mais essas conexões, temos que a segunda lei generalizada da termodinâmica [8], não é violada devido ao fato de que a entropia total da matéria fora do buraco negro somada à entropia do buraco negro nunca decresce. Diante dessas descobertas, muitos estudos foram realizados nos últimos anos para investigar as relações entre a termodinâmica e a gravidade, [9] [10] [11][12][13][14] [15].

Em 1995, Jacobson propõe uma forma de derivar as equações de Einstein através da relação de proporcionalidade entre a entropia e a área do horizonte em conjunto com a seguinte relação fundamental $\delta Q = TdS$, conectando calor, entropia e a temperatura

[9]. Por outro lado, Verlinde [11] descobriu que para um universo do tipo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), preenchido por radiação a equação de Friedmann pode ser reescrita da mesma forma que fórmula de Cardy-Verlinde, sendo ela uma fórmula de entropia para uma teoria de campo conforme.

Seguindo o espírito dos resultados obtidos por Jacobson, Cai deriva as equações de Friedmann utilizando o mesmo método [10], no entanto a entropia utilizada vai estar associada ao horizonte aparente do universo do tipo FLRW onde a esse horizonte será aplicada a relação de Clausius, para calcular o fluxo de calor que atravessa o horizonte do universo que está em uma expansão acelerada.

Além dos estudos que investigam as relações entre a termodinâmica e a gravidade, surgiram nos últimos anos estudos que tentam de alguma forma conciliar a mecânica quântica com a relatividade geral. De fato, a busca por uma teoria quântica de gravidade é, certamente um dos mais destacados e áridos problemas da física. Nesse contexto a gravidade quântica em laços GQL é uma teoria que propõe uma forma de modelar o comportamento quântico do espaço tempo [16][17][18][19][20].

Diante disso, a natureza do nosso universo próximo da singularidade do *Big-Bang*, pode ser descrita através da cosmologia quântica em laços (CQL) [21] [22] [23][24]. Nesta teoria, as equações de Friedmann incorporam correções quânticas provenientes da GQL. Como consequência dessas correções, a singularidade é substituída por um salto quântico. Uma possibilidade interessante, é o fato de que o nosso universo pode ter origem de uma fase de contração até atingir a densidade crítica, onde ocorre o salto quântico, e passar pelo processo de super-inflação e inflação.

No entanto, os resultados obtidos no contexto da cosmologia quântica em laços não trouxeram luz sobre o problema da seta do tempo, além disso, a segunda lei da termodinâmica é desobedecida durante um certo regime da evolução do universo [25].

Conforme mostrado em [26] é possível obter as equações da cosmologia quântica em laços, utilizando a fórmula modificada de bekenstein-Hawking proveniente da relação de área e entropia do buraco negro auto-dual previsto pela GQL utilizando o formalismo de Jacobson. Revelando assim, a cosmologia quântica holográfica em laços (CQHL). Essa nova perspectiva, pode abrir caminho para investigarmos importantes questões da termodinâmica e do comportamento do universo no contexto da CQL. Dessa maneira, isso abre um leque para investigarmos a violação da segunda lei generalizada da termodinâmica no contexto da CQL.

Seguindo esta linha de raciocínio, a presente dissertação tem como objetivo investigar a validação da segunda lei generalizada dentro do contexto da CQL. Para tanto, partimos de revisões de literaturas sobre a derivação termodinâmica das equações de Friedmann utilizando o formalismo de Jacobson. Servindo de base portanto, para as revisões sobre as correções quânticas dessas equações, utilizando o mesmo formalismo, e sobre as discussões da violação da segunda lei generalizada no cenário da CQL.

A presente dissertação está organizada da seguinte forma: No capítulo 2, realizamos uma revisão sobre a derivação das equações de Friedmann seguindo o formalismo de Jacobson. Onde é aplicado a primeira lei da termodinâmica ao horizonte aparente, assumindo a relação de proporcionalidade de entropia e área do horizonte.

No capítulo 3, iremos revisar o formalismo que concilia a cosmologia quântica em laços, com a holografia utilizando a fórmula de Bekenstein-Hawking com correções quânticas que é proveniente da solução de buracos negros auto-duais, que surge no contexto de Gravidade Quântica em Laços. E seguindo o formalismo de Jacobson é mostrado as equações de Friedmann com correções quânticas. Já no capítulo 4, iremos revisar sobre a violação da segunda lei generalizada da termodinâmica no contexto da cosmologia quântica em laços, nos períodos de super inflação, transição e inflação. No capítulo 5, utilizando a formula de Bekenstein-Hawking para o caso do buraco negro auto dual, vamos investigar se é possível manter a validade da segunda lei da termodinâmica no contexto da cosmologia quântica em laços. Por fim, no capítulo 6, faremos uma breve discussão sobre o resultado encontrado, suas implicações e o que podemos extrair desse resultado como perspectivas para futuros trabalhos.

2 Derivação termodinâmica das equações de Friedmann

No contexto da relatividade geral [27], as equações de Friedmann formam um conjunto de equações que governam a expansão do universo. Essas equações foram derivados pela primeira vez por Alexander Friedmann em 1922, a partir das equações de campo de Einstein, aplicadas a um fluido perfeito com uma determinada densidade de massa e pressão na presença de uma métrica do tipo de FLRW [28].

Na década de 1970, com as descobertas das relações entre a termodinâmica e buracos negros, começaram a surgir especulações sobre a relação entre as equações de Einstein e a termodinâmica de buracos negros, trabalhos como os de Bekenstein [8, 7], de Hawking em conjunto com Barden e Carter [29], foram fundamentais para fornecer as ferramentas necessárias para essas especulações.

As quatros leis da mecânica de buracos negros e suas semelhanças com as leis da termodinâmica, assim como a relação de área e entropia do horizonte de eventos do buraco negro, estabeleceram profundas ligações entre a física de buracos negros e áreas aparentemente distantes como a termodinâmica. A equação de Bekenstein-Hawlking para a entropia de buracos negros trouxe um resultado interessante a respeito da informação contida no buraco negro, onde toda a informação tridimensional estaria contida na área do horizonte de eventos

$$S = \frac{A}{l_p^2} = \frac{Ac^3}{4\hbar G}, \tag{2.1}$$

Onde c é a velocidade da luz, G a constante da gravitação universal, l_p o comprimento de Planck e $\hbar = h/2\pi$, sendo h a constante de Planck. O que futuramente acabou se tornando a base do princípio holográfico, proposto inicialmente por Gerard't Hooft [30] e posteriormente por Susskind [31], esse princípio propõe que toda informação contida em um volume do espaço pode ser codificada na área da superficie do horizonte desse espaço [32][33].

Com essas relações, Jacobson conseguiu derivar as equações de Einstein a partir da relação de proporcionalidade entre a entropia do horizonte de eventos e a sua área em conjunto com a relação fundamental $\delta Q = TdS$ [9], onde δQ e T são o fluxo de energia e a temperatura Unruh para um observador acelerado dentro do horizonte [34].

Diante disso, o espaço-tempo passa a ser visto como um gás de átomos com uma entropia relacionada que é dada através da equação de Bekenstein-Hawking, sendo assim a equação de Einstein pode ser interpretada como uma equação de estado desse gás.

Seguindo o formalismo de Jacobson, podemos então derivar as equações de Friedmann utilizando a mesma relação $\delta Q = TdS$, mas desta vez aplicada ao horizonte aparente de um universo do tipo (FLRW) onde a entropia do universo é tomada como proporcional a área do seu horizonte [10].

O universo FRLW de $(n+1)$ dimensões é descrito pela seguinte métrica

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega_{n-1}^2\right), \tag{2.2}$$

o termo do elemento de linha para uma unidade de esfera $(n-1)$-dimensional é denotado por $d\Omega_{n-1}^2$, e a constante de curvatura k é igual a $+1, 0$ ou -1 , que corresponde a um universo fechado, plano e aberto, respectivamente. Utilizando a simetria esférica, podemos reescrever a métrica (2.2), como sendo:

$$ds^2 = h_{ab}dx^a dx^b + \tilde{r}^2 d\Omega_{n-1}^2, \tag{2.3}$$

onde $\tilde{r} = a(t)r$, e os indices $x^0 = t$ e $x^1 = r$, correspondem a coordenada temporal e radial da métrica bidimensional $h_{ab} = diag(-1, a^2/1 - kr^2)$. A dinâmica do horizonte aparente é definida como sendo $h^{ab}\partial_a\tilde{r}\partial_b\tilde{r} = 0$, o que implica que o vetor $\nabla\tilde{r}$, será nulo sobre a superfície do horizonte aparente. A partir dessa relação, podemos então determinar a expressão do raio do horizonte aparente

$$h^{ab}\partial_a\tilde{r}\partial_b\tilde{r} = 0, \tag{2.4}$$

expandindo os índices, temos

$$h^{00}\partial_0\tilde{r}\partial_0\tilde{r} + h^{11}\partial_1\tilde{r}\partial_1\tilde{r} = 0 \tag{2.5}$$

calculando as derivadas parciais

$$-(\dot{a}r)^2 + (1-kr^2) = 0 \tag{2.6}$$

$$r^2(\dot{a}^2 + k) = 1 \tag{2.7}$$

$$r^2 = \frac{1}{(\dot{a}^2 + k)}. \tag{2.8}$$

Podemos então dizer que

$$r^2 = \frac{1}{a^2\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right)} \tag{2.9}$$

dessa forma

$$ar = \frac{1}{\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right)^{1/2}} \tag{2.10}$$

encontramos então

$$\tilde{r}_A = ar = \frac{1}{\sqrt{H^2 + \frac{k}{a^2}}}, \tag{2.11}$$

o termo $H = \dot{a}/a$ é conhecido como o parâmetro de Hubble. Podemos perceber que em um universo plano onde a constante de curvatura é $k = 0$, o raio do unviverso aparente $\tilde{r}_A$ tem o mesmo valor de $\tilde{r}_H$, que é o raio correspondente ao horizonte de Hubble. Para um universo com expansão acelerada, temos que o raio do horizonte de eventos cosmológico é definido por

$$\tilde{r}_E = a(t) \int_{t'}^{\infty} \frac{dt'}{a(t')}, \tag{2.12}$$

mas em um universo plano De Sitter, os raios do horizonte aparente, do horizonte de Hubble e do horizonte de eventos cosmológico apresentam o mesmo valor constante $\tilde{r}_A = \tilde{r}_H = \tilde{r}_E = 1/H$. Para os próximos passos, vamos considerar que, em um espaço tempo dinâmico, o horizonte aparente será um horizonte causal, portanto vamos relacionar com a entropia e a gravidade superficial. Desse modo iremos aplicar a primeira lei da termodinâmica ao horizonte aparente.

Seguindo [35] e [36] , temos que a densidade de trabalho e o vetor de fonte de energia é definida da seguinte forma

$$W = -\frac{1}{2} T^{ab} h_{ab}, \tag{2.13}$$

e

$$\Psi_a = T_a^b \partial_b \tilde{r} + W \partial_a \tilde{r}. \tag{2.14}$$

A densidade de trabalho (2.13) nada mais é do que o trabalho realizado por uma mudança no horizonte aparente, enquanto que o vetor de fonte de energia (2.14) representa o fluxo de energia total que atravessa o horizonte aparente. O termo T^{ab} é a projeção do tensor momento-energia $T^{\mu\nu}$ de dimensão $(n-1)$, da matéria que se comporta como um flúido perfeito no universo de FRLW.

De acordo com [37]. A primeira lei unificada é dada por

$$\nabla E = A\Psi + W \nabla V, \tag{2.15}$$

onde $A = n\Omega_n \tilde{r}^{n-1}$ e $V = \Omega_n \tilde{r}^n$ são a área e o volume de uma esfera n-dimensional de raio $\tilde{r}$. O termo $\Omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1)$ é o volume de uma esfera n-dimensional, e a energia total dentro de um espaço de raio $\tilde{r}$ é definida como

$$E = \frac{n(n-1)\Omega_n}{16\pi}\tilde{r}^{n-2}(1 - h^{ab}\partial_a\tilde{r}_a\partial_b\tilde{r}_b). \tag{2.16}$$

Na termodinâmica, a entropia está intimamente relacionada com o fluxo de calor da seguinte forma $\delta Q = TdS$, sabemos, também, que o fluxo de calor está relacionado com a mudança de energia de um dado sistema. Desse modo, podemos relacionar a entropia com o termo de fonte de energia, rescreevendo-a da seguinte forma

$$A\Psi = \frac{\kappa}{8\pi}\nabla A + \tilde{r}^{n-2}\nabla\left(\frac{E}{\tilde{r}^{n-2}}\right), \tag{2.17}$$

onde κ é a gravidade superficial definida por

$$\kappa = \frac{1}{2\sqrt{-h}}\partial_a(\sqrt{-h}h^{ab}\partial_b\tilde{r}). \tag{2.18}$$

Agora, iremos calcular a densidade de trabalho, vetor de fonte de energia, a energia interna total e a gravidade superficial para um universo de dimensão $(3+1)$. Vamos supor também, que a matéria deste universo terá o comportamento de um fluido perfeito, definido pelo tensor momento-energia

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu + Pg_{\mu\nu}, \tag{2.19}$$

Onde as grandezas P e ρ são a pressão e a densidade de energia respectivamente. Então, calculando (2.13)

$$W = -\frac{1}{2}(T^{00}h_{00} + T^{11}h_{11}), \tag{2.20}$$

$$W = -\frac{1}{2}[(\rho + P)U^0U^0 + ph_{00}] - \frac{1}{2}[(\rho + P)U^1U^1 + Ph_{11}], \tag{2.21}$$

então a densidade de trabalho será

$$W = \frac{1}{2}(\rho - P). \tag{2.22}$$

Calculando agora cada termo do vetor de fonte de energia (2.14), para coordenada temporal

$$\psi_0 = T_0^0\partial_0\tilde{r} + W\partial_0\tilde{r}, \tag{2.23}$$

$$\psi_0 = \left[T_0^0 + \frac{1}{2}(\rho - P)\right]\tilde{r}Hdt, \tag{2.24}$$

para coordenada radial

$$\psi_1 = T_1^1 \partial_1 \tilde{r} + W \partial_1 \tilde{r} \tag{2.25}$$

$$\psi_1 = \left[T_1^1 + \frac{1}{2}(\rho - P) \right] a(t) dr, \tag{2.26}$$

e portanto o vetor de fonte de energia será

$$\Psi_a = \left(-\frac{1}{2}(\rho + P) H \tilde{r}, \frac{1}{2}(\rho + P) a \right). \tag{2.27}$$

Com (2.22) e (2.27)definidos, podemos então, encontrar a energia total presente em um espaço de raio $\tilde{r}$ (2.16)

$$E = \frac{\tilde{r}}{2} \left[1 - (h^{00} \partial_0 \tilde{r} + h^{11} \partial_1 \tilde{r}) \right], \tag{2.28}$$

então

$$E = \frac{\tilde{r}}{2} \left[1 + r^2 \dot{a}^2 - 1 + kr^2 \right] \tag{2.29}$$

$$E = \frac{\tilde{r}}{2} \left[r^2 (\dot{a}^2 + k) \right], \tag{2.30}$$

multiplicando a expressão por a^2/a^2, teremos então a energia total do espaço de raio $\tilde{r}$

$$E = \frac{\tilde{r}^3}{2} \left[H^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \tag{2.31}$$

Por fim, iremos calcular a gravidade superficial (2.18)

$$\kappa = \frac{1}{2\sqrt{-h}} \left[\partial_0 \left(\sqrt{-h} h^{00} \partial_0 \tilde{r} \right) + \partial_1 \left(\sqrt{-h} h^{11} \partial_1 \tilde{r} \right) \right], \tag{2.32}$$

onde $det(h^{ab}) = \sqrt{-h}$, Então

$$\kappa = \frac{2\pi \tilde{r}}{3} (3P - \rho). \tag{2.33}$$

Agora, com todos os parâmentros termodinâmicos definidos,vamos calcular o fluxo de calor δQ, através do horizonte aparente durante um intervalo de tempo infinitesimal dt. Podemos interpretar esse fluxo de calor como a quantidade de energia atravessando este horizonte aparente durante um intervalo de tempo dt.

Essa relação surge justamente porque o fluxo de calor é, também, uma forma de energia. Logo, $\delta Q = -dE$, nada mais é do que a variação de energia interna do horizonte aparente. Durante um intervalo de tempo dt, nós obtemos a quantidade de energia que atravessa o horizonte aparente

$$-dE \equiv -A\psi = A(\rho + P)H\tilde{r}_A dt, \tag{2.34}$$

onde o termo $A = n\Omega_n \tilde{r}_A^{n-1}$ representa a área do horizonte aparente. Propondo que o horizonte aparente tem associado uma entropia S e uma temperatura T, definidas como

$$S = \frac{A}{4}; \qquad T = \frac{1}{2\pi\tilde{r}_A}, \tag{2.35}$$

Relacionando (2.34), com a a definição de variação de energia interna do horizonte aparente, teremos a seguinte relação

$$\delta Q = A(\rho + P)H\tilde{r}_A dt, \tag{2.36}$$

então

$$TdS = A(\rho + P)H\tilde{r}_A dt, \tag{2.37}$$

substituindo (2.35), teremos

$$\frac{1}{2\pi\tilde{r}_A}\frac{d}{dt}\left(\frac{n\Omega_n \tilde{r}_A^{n-1}}{4}\right) = n\Omega_n \tilde{r}_A^{n-1}(\rho + P)H\tilde{r}_A, \tag{2.38}$$

sendo assim

$$\frac{(n-1)}{8\pi}(\tilde{r}_A \dot{\tilde{r}}_A) = (\rho + P)\tilde{r}_A^{n+1}, \tag{2.39}$$

calculando a derivada do raio aparente $\dot{\tilde{r}}_A$

$$\dot{\tilde{r}}_A = -H\tilde{r}_A^3\left(\dot{H} - \frac{k}{a^2}\right), \tag{2.40}$$

substituindo $\dot{\tilde{r}}_A$, e isolando os termos, finalmente encotramos

$$\dot{H} - \frac{k}{a^2} = -\frac{8\pi}{(n-1)}(\rho + P). \tag{2.41}$$

A equação (2.41), é conhecida como a primeira equação de Friedmann, que descreve o universo FRW de $(n+1)$ - dimensões, com uma curvatura espacial k. Podemos reescrever esta expressão para um universo FRW de $(3 + 1)$ - dimensões

$$\dot{H} - \frac{k}{a^2} = -4\pi(\rho + P). \tag{2.42}$$

Utilizando agora a equação da continuidade

$$\dot{\rho} + nH(\rho + P) = 0, \tag{2.43}$$

substituindo $H(\rho + P)$ em (2.41), teremos

$$\dot{H} - \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi\dot{\rho}}{n(n-1)H}, \tag{2.44}$$

$$H\dot{H} - \frac{Hk}{a^2} = \frac{8\pi\dot{\rho}}{n(n-1)}, \tag{2.45}$$

temos que

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2, \tag{2.46}$$

logo

$$H\frac{\ddot{a}}{a} - H\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right) = \frac{8\pi\dot{\rho}}{n(n-1)}, \tag{2.47}$$

podemos reescrever (3.10), da seguinte forma

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right) = \frac{8\pi}{n(n-1)}\frac{d\rho}{dt}, \tag{2.48}$$

integrando, encontramos então

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{16\pi\rho}{n(n-1)}. \tag{2.49}$$

A equação (2.49) é conhecida como a segunda equação de Friedmann para o universo FRW de $(n+1)$ -dimensões. Reescrevendo para $(3+1)$ - dimensões, teremos a seguinte expressão

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi\rho}{3}. \tag{2.50}$$

Portanto,utilizando as relações entre as equações de Einstein e a termodinâmica [38] [39] [40] e aplicando a primeira lei da termodinâmica sobre o horizonte aparente, assumindo que a entropia do horizonte aparente é dada pela equação de Bekenstein-Hawking, é possível derivar as equações de Friedmann para o universo FRLW (2.41) e (2.49).

3 Cosmologia quântica holográfica em laços

A gravidade quântica em laços é uma teoria que propõe uma forma de modelar o comportamento quântico do espaço-tempo. De acordo com ela, o espaço é feito de átomos distintos, cada um portador de uma unidade mínima de volume. A teoria limita também as áreas e comprimentos possíveis que uma superfície pode ter a um conjunto finito de valores [16] [17][18][19][20]. Diante desses aspectos, a cosmologia quântica em laços, estuda os estágios inciais do universo próximo da singularidade do *Big-Bang*, onde o espaço-tempo apresenta um comportamento quântico [22] [23] [24] [41].

Portanto as equações de Friedmann no contexto da CQL, incorporam correções quânticas que implicam em uma contribuição adicional ao termo de densidade na segunda equação de Friedmann. Devido ao termo adicional, um salto quântico surge no lugar da singularidade do Big-Bang. A densidade nesse ponto não é mais infinita, mas assume um valor crítico finito e máximo dado por

$$\rho_c = \sqrt{3}/(32\pi G^2\gamma^3), \tag{3.1}$$

onde γ é o parâmetro Barbero-Immirzi [13] [42]. Neste sentido, a evolução quântica do universo se estende através do *Big-Bang*. Tais resultados abrem a possibilidade de que nosso universo possa ter sua origem em uma fase anterior de contração [43].

Seguindo os passos de [10] e [26], calcularemos as equações de Friedmann no contexto da CQL. Para fazermos a derivação termodinâmica, vamos assumir que a relação entropia-área do horizonte aparente vai ser dada pela seguinte expressão

$$S_H = \pm\frac{\sqrt{A^2 - A_{min}^2}}{4\sigma}, \tag{3.2}$$

onde A_{min} é o valor de área mínimo previsto pela teoria da gravidade quântica em laços. A equação (3.2), é a equação modificada de Bekenstein-Hawking [44], ela é proveniente da relação de área e entropia do buraco negro auto dual, previsto pela GQL, esse tipo de buraco negro trás correções quânticas em sua métrica, a partir de um modelo simplificado da GQL [44][45][46][47]. Removendo tais correções quânticas, a métrica se resume a do buraco negro de Schwarzschild [48].

Da relação de Clausius $\delta Q = TdS$, teremos

$$TdS = A(\rho + P)H\tilde{r}_A dt, \tag{3.3}$$

substituindo a temperatura do horizonte aparente (2.34) e a entropia (3.2)

$$\pm\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{A^2-A^2_{min}}}{4\sigma}\right)=8\pi A(\rho+P)H\tilde{r}_A^2, \tag{3.4}$$

calculando a derivada e simplificando a expressão, teremos

$$\pm\frac{1}{2\tilde{r}_A}(A^2-A^2_{min})^{\frac{1}{2}}4A^2\dot{\tilde{r}}_A=8\pi A(\rho+P)H\tilde{r}_A^2, \tag{3.5}$$

substituindo a derivada do raio aparente (2.39)

$$\mp(A^2-A^2_{min})^{\frac{1}{2}}\left[H\tilde{r}_A^2\left(\dot{H}-\frac{k}{a^2}\right)\right]=\frac{8\pi\sigma}{A}(\rho+P)H\tilde{r}_A^2, \tag{3.6}$$

simplificando a expressão e isolando alguns termos

$$\dot{H}-\frac{k}{a^2}=\mp 4\pi\sigma\frac{(A^2-A^2_{min})^{-\frac{1}{2}}}{A}(\rho+P). \tag{3.7}$$

Utilizando a equação de continuidade (2.43), e substituindo $(\rho+P)$ em (3.7)

$$\dot{H}-\frac{k}{a^2}=\mp 4\pi\sigma\frac{(A^2-A^2_{min})^{-\frac{1}{2}}}{A}\left(-\frac{\dot{\rho}}{3H}\right), \tag{3.8}$$

então

$$H\dot{H}-H\frac{k}{a^2}=\pm\frac{4\pi\sigma}{3}\frac{(A^2-A^2_{min})^{-\frac{1}{2}}}{A}\dot{\rho}, \tag{3.9}$$

substituindo a derivada do parâmetro de Hubble, e isolando os termos teremos

$$H\frac{\ddot{a}}{a}-H\left(H^2+\frac{k}{2}\right)=\pm\frac{4\pi\sigma}{3}\frac{(A^2-A^2_{min})^{-\frac{1}{2}}}{A}\dot{\rho}, \tag{3.10}$$

podemos então reescrever (3.10) como sendo

$$\frac{d}{dt}\left(H^2+\frac{k}{2}\right)=\pm\frac{8\pi\sigma}{3}\frac{(A^2-A^2_{min})^{-\frac{1}{2}}}{A}\frac{d\rho}{dt}, \tag{3.11}$$

usando a relação

$$H^2+\frac{k}{a^2}=\frac{4\pi}{A}, \tag{3.12}$$

e substituindo em (3.11)

$$\frac{8\pi\sigma}{3}\frac{d\rho}{dt}=\pm\frac{A}{(A^2-A^2_{min})^{\frac{1}{2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi}{A}\right), \tag{3.13}$$

então, temos a seguinte integral

$$\frac{8\pi\sigma}{3}\int d\rho = \mp\int \frac{4\pi}{A(A^2 - A_{min}^2)^{\frac{1}{2}}} dA, \tag{3.14}$$

para resolvermos a integral do segundo membro em (3.14), é necessário rescrever a expressão da seguinte forma

$$\int \frac{dA}{A^2\sqrt{1 - A_{min}^2/A^2}}, \tag{3.15}$$

em seguida, faremos uma substituição trignométrica onde $cos(\Theta) = A_{min}/A$, como consequência

$$\frac{dA}{A^2} = \frac{sen(\Theta)d\Theta}{A_{min}}, \tag{3.16}$$

fazendo as devidas substituições, a equação (3.14) ficará da seguinte forma

$$\frac{8\pi}{3}\int d\rho = \mp\frac{4\pi}{A_{min}\sigma}\int d\Theta, \tag{3.17}$$

temos como resultado

$$\frac{8\pi}{3}\rho = \mp\frac{4\pi}{A_{min}\sigma}\Theta + \alpha, \tag{3.18}$$

logo,

$$\Theta = \pm\left(\frac{2A_{min}}{3}\sigma\rho - \alpha\right) = arccos(A_{min}/A), \tag{3.19}$$

onde teremos que $-\pi/2 \leq \Theta \leq \pi/2$, desde que tenhamos $A_{min}/A \geq 0$. Por fim, aplicando a função cosseno na equação (3.19)e utilizando a relação do raio do horizonte aparente dado por (3.12), teremos

$$\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right)\frac{A_{min}}{4\pi} = cos\left[\pm\left(\frac{2A_{min}}{3}\rho\sigma - \alpha\right)\right], \tag{3.20}$$

Usando $A_{min} = 4\pi\gamma\sqrt{3}$, e isolando os termos encontramos, então, a primeira equação de Friedmann modificada

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{1}{\gamma\sqrt{3}}cos(\Theta). \tag{3.21}$$

Derivando (3.21) em relação ao tempo,

$$\frac{d}{dt}\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right) = \frac{1}{\gamma\sqrt{3}}\frac{d}{dt}\left[cos\left(\frac{2A_{min}}{3}\sigma\rho - \alpha\right)\right], \tag{3.22}$$

vamos encontrar

$$2H\left(\dot{H}-\frac{k}{a^2}\right)=\mp\frac{1}{\gamma\sqrt{3}}sen(\Theta)\frac{2}{3}A_{min}\sigma\dot{\rho}, \tag{3.23}$$

substituindo a equação da continuidade teremos então

$$\dot{H}-\frac{k}{a^2}=\sigma sen(\Theta)(\rho+P). \tag{3.24}$$

As equações (3.21) e (3.24), são versões das equações de Friedmann com correções quânticas, essas correções são provenientes da relação área-entropia do buraco negro auto-dual, o que faz o termo da densidade quântica efetiva, ser uma função harmônica da densidade clássica. Consequentmente, essas correções quânticas fazem com que a singularidade do *Big-Bang* deixe de existir, e em seu lugar ocorre um salto no ponto em que o universo atinge uma densidade crítica, assim como na CQL.

3.1 Relação com CQL semi-clássico

Vamos agora, mostrar como as equações de Friedmann corrigidas quânticamente podem ser relacionadas com as equações semi-clássicas do CQL. Para isso, vamos expandir (3.21) usando a expansão em taylor, considerando o segundo membro como sendo uma função $f(A_{min})$, teremos então que

$$f(A_{min})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(a)}{n!}(A_{min}-a)^n=f(a)+\frac{f^{'}(a)}{1!}(A_{min}-a)+\frac{f^{''}(a)}{2!}(A_{min}-a)^2+\ldots, \tag{3.25}$$

onde $a=0$, teremos

$$f(0)=\frac{1}{\gamma\sqrt{3}}cos(\alpha), \tag{3.26}$$

$$f^{'}(0)=\frac{8\pi}{3}\sigma sen(\alpha)\rho, \tag{3.27}$$

$$f^{''}(0)=-\frac{64\pi^2}{9}\sigma^2\gamma\sqrt{3}cos(\alpha)\rho^2, \tag{3.28}$$

substituindo esses termos em (3.25),

$$f(\rho)=\frac{1}{\gamma\sqrt{3}}cos(\alpha)+\frac{8\pi}{3}\sigma sen(\alpha)\rho-\frac{32\pi^2}{9}\sigma^2\gamma\sqrt{3}cos(\alpha)\rho^2+\ldots, \tag{3.29}$$

então (3.21) fica da seguinte forma

$$H^2+\frac{k}{a^2}=\frac{1}{\gamma\sqrt{3}}cos(\alpha)+\frac{8\pi}{3}\sigma sen(\alpha)\rho-\frac{32\pi^2}{9}\sigma^2\gamma\sqrt{3}cos(\alpha)\rho^2, \tag{3.30}$$

de acordo com CQL semi-clássico [21], desconsideramos os termos de correções quânticas da ordem $\mathcal{O}(\geq A_{min}^2)$. De (3.30) podemos obter

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho_{tot}\left(1 - \frac{\rho_{tot}}{\rho_c}\right), \tag{3.31}$$

onde $\rho_{tot} = \rho + \Lambda/8\pi$ e Λ é a constante cosmológica. Dessa expressão podemos obter a equação de Raychaudhuri, derivando-a e usando a equação da continuidade, então

$$\frac{d}{dt}\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right) = \frac{8\pi}{3}\frac{d}{dt}\left(\rho_{tot} - \frac{\rho_{tot}^2}{\rho_c}\right), \tag{3.32}$$

$$2H\left(\dot{H} - \frac{k}{a^2}\right) = \frac{8\pi}{3}\dot{\rho}\left(1 - \frac{2\rho_{tot}}{\rho_c}\right), \tag{3.33}$$

substituindo a equação da continuidade (2.43) teremos

$$\dot{H} - \frac{k}{a^2} = -4\pi(\rho + P)\left(1 - \frac{2\rho_{tot}}{\rho_c}\right), \tag{3.34}$$

podemos reescrever a expressão acima como sendo

$$\dot{H} - \frac{k}{a^2} = -4\pi(\rho_{tot} + P_{tot})\left(1 - \frac{2\rho_{tot}}{\rho_c}\right), \tag{3.35}$$

onde $P_{tot} = P - \Lambda/8\pi$. Obtemos então, através de uma descrição holográfica, as equações usuais do CQL semiclássico. No entanto, precisamos interpretar o papel da constante cosmológica que aparece como consequência das correções quânticas provenientes da fórmula de Bekenstein-Hawking modificada. Além disso, é necessário relacionar a densidade crítica do universo que foi encontrada, em nossos cálculos, com a que está presente no CQL usual. Das equações (3.31) e (3.35), podemos extrair os seguintes termos

$$\rho_c = \frac{\sqrt{3}}{4\pi\gamma\sigma^2 cos(\alpha)}, \tag{3.36}$$

$$\tilde{\Lambda}\left(1 - \frac{\tilde{\Lambda}}{\rho_c}\right) = \frac{3}{8\pi\gamma\sqrt{3}}cos(\alpha), \tag{3.37}$$

$$1 - \frac{2\tilde{\Lambda}}{\rho_c} = \sigma sen(\alpha), \tag{3.38}$$

onde $\tilde{\Lambda} = \Lambda/8\pi$. Da equação (3.37), temos que

$$[cos(\alpha)]^2 = \frac{64\pi^2\gamma^2}{3}\left[\tilde{\Lambda}\left(1 - \frac{\tilde{\Lambda}}{\rho_c}\right)\right]^2, \tag{3.39}$$

da equação (3.36)

$$\sigma^2 = \frac{3}{32\pi^2\gamma^2\rho_c}\left[\tilde{\Lambda}\left(1-\frac{\tilde{\Lambda}}{\rho_c}\right)\right]^{-1}, \tag{3.40}$$

da equação (3.36) e (3.37)

$$4\pi\sigma^2\gamma\sqrt{3}cos(\alpha) = \frac{3}{\rho_c}, \tag{3.41}$$

multiplicando por (3.37), temos

$$\frac{3}{2}\sigma^2 cos^2(\alpha) = \frac{3}{\rho_c}\tilde{\Lambda}\left(1-\frac{\tilde{\Lambda}}{\rho_c}\right), \tag{3.42}$$

agora, elevando (3.38) ao quadrado, e somando com (3.42), teremos como resultado a seguinte expressão

$$\frac{3}{2}\sigma^2[cos^2(\alpha)+sen^2(\alpha)] = \frac{3\tilde{\Lambda}}{\rho_c}\left(1-\frac{\tilde{\Lambda}}{\rho_c}\right)+\frac{3}{2}\left(1-\frac{2\tilde{\Lambda}}{\rho_c}\right)^2, \tag{3.43}$$

substituindo σ encontramos

$$\frac{3}{32\pi^2\gamma^2\rho_c}\left[\tilde{\Lambda}\left(1-\frac{\tilde{\Lambda}}{\rho_c}\right)\right]^{-1} = \frac{2\tilde{\Lambda}}{\rho_c}\left(1-\frac{\tilde{\Lambda}}{\rho_c}\right)+\left(1-\frac{2\tilde{\Lambda}}{\rho_c}\right)^2, \tag{3.44}$$

desenvolvendo os termos do segundo membro, teremos

$$\frac{3}{32\pi^2\gamma^2\rho_c}\left[\tilde{\Lambda}\left(1-\frac{\tilde{\Lambda}}{\rho_c}\right)\right]^{-1} = \frac{2\tilde{\Lambda}}{\rho_c}-\frac{2\tilde{\Lambda^2}}{\rho_c^2}+1-\frac{4\tilde{\Lambda}}{\rho_c}+\frac{4\tilde{\lambda^2}}{\rho_c^2}, \tag{3.45}$$

sendo assim,

$$\frac{3}{32\pi^2\gamma^2\rho_c}\left[\tilde{\Lambda}\left(1-\frac{\tilde{\Lambda}}{\rho_c}\right)\right]^{-1} = -\frac{2\tilde{\Lambda}}{\rho_c}\left(1-\frac{\tilde{\Lambda}}{\rho_c}\right)+1 \tag{3.46}$$

organizando os termos

$$\frac{2}{\rho_c}\left[\tilde{\Lambda}\left(1-\frac{\tilde{\Lambda}}{\rho_c}\right)\right]^2-\tilde{\Lambda}\left(1-\frac{\tilde{\Lambda}}{\rho_c}\right)+\frac{3}{32\pi^2\gamma^2\rho_c}=0 \tag{3.47}$$

para resolver essa equação, vamos fazer uma mudança de variável da seguinte forma

$$\xi = \tilde{\Lambda}\left(1-\frac{\tilde{\Lambda}}{\rho_c}\right), \tag{3.48}$$

então (3.47) fica da seguinte forma

$$\frac{2}{\rho_c}\xi^2-\xi+\frac{3}{32\pi^2\gamma^2\rho_c}=0. \tag{3.49}$$

Resolvendo a equação de segundo grau teremos como solução

$$\xi_{\pm} = \frac{\rho_c}{4}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4\pi^2\gamma^2\rho_c^2}}\right). \tag{3.50}$$

Agora, desenvolvendo a equação de segundo grau em (3.37), e calculando a solução, teremos

$$\tilde{\Lambda}_{\pm} = \frac{\rho_c}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\left(\frac{3cos(\alpha)}{8\pi\gamma\sqrt{3}\rho_c}\right)}\right), \tag{3.51}$$

onde temos a seguinte relação

$$\xi_{\pm} = \frac{3cos(\alpha)}{8\pi\gamma}, \tag{3.52}$$

encontramos então

$$\tilde{\Lambda}_{\pm} = \frac{\rho_c}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{\rho_c}\xi_{\pm}}\right). \tag{3.53}$$

Para uma solução real de (3.53) a unica escolha consistente para (3.50) é ξ_-, temos, também que a unica escolha consistente para (3.39), é a solução $\tilde{\Lambda}_-$, dada a seguinte condição $-1 \leq cos(\alpha) \leq 1$. Consequentemente, teremos

$$\Lambda = 8\pi\tilde{\Lambda} = 4\pi\rho_c\left[1 - \left(1 - \frac{3}{4\pi^2\gamma^2\rho_c^2}\right)^{\frac{1}{4}}\right]. \tag{3.54}$$

Como podemos perceber, o valor da constante cosmológica vai depender das condições iniciais do universo, e mais especificamente da densidade crítica do universo no momento do salto quântico. Fazendo uma expansão binomial no segundo membro de (3.54), temos que

$$\left(1 - \frac{3}{4\pi^2\gamma^2\rho_c^2}\right)^{\frac{1}{4}} = 1 - \frac{3}{16\pi^2\gamma^2\rho_c^2} + \cdots, \tag{3.55}$$

a constante cosmológica fica da seguinte forma

$$\Lambda = 4\pi\rho_c\left[1 - \left(1 - \frac{3}{16\pi^2\gamma^2\rho_c^2}\right) + \cdots\right]. \tag{3.56}$$

No limite em que $\rho_c \gg 1$, iremos desconsiderar os termos da ordem $\mathcal{O}(\geq \rho_c^3)$, dessa forma, a constante cosmologica se reduz a

$$\Lambda \sim \frac{3}{4\pi\gamma^2\rho_c}. \tag{3.57}$$

Enquanto que no limite infravermelho ($\rho_c \to \infty$), a constante cosmológica tenderá a zero. Se compararmos a constante cosmológica deste formalismo com o tratamento usual da cosmologia quântica em laços, foi demonstrado que CQL se ajusta á situação em que uma constante constante cosmológica Λ está presente, tanto para casos em que Λ é positivo ou negativo [49][50][51].

Entretanto, a CQL não oferece nenhum resultado teórico para o valor da constante cosmológica, no sentido de que ela não surge de um resultado de cálculo mais fundamental. Em vez disso, sob o ponto de vista da cosmologia quântica em laços, e também da gravidade quântica em laços, a constante cosmológica consiste em uma constante da natureza, assim como a constante gravitacional de Newton ou a constante de Planck.

Diante disso, a CQL acaba não abordando um dos problemas fundamentais da física, conhecido como o problema da constante cosmológica [52]. Onde temos que as observações de supernovas com altos redshifts são umas das evidências diretas de que o nosso universo está em expansão acelerada [53] [54]. Para explicar esta aceleração no contexto da relatividade geral, é reintroduzido nas equações de Einstein um termo cosmológico, referente a energia escura, que está associado ao vácuo [55] [56][57][58]. Como consequência, o modelo padrão da cosmologia apresenta este problema que consiste no fato de que o valor de Λ, previsto pelo modelo padrão, seja muito maior do que o valor observado [58].

Por outro lado, a constante cosmológica (3.56) tem a dependência da densidade crítica ρ_c do universo no momento do salto quântico. Com relação ao valor da densidade dentro do contexto da cosmologia quântica em laços, temos que é dada por [21][59]

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi\gamma^2\Delta}, \tag{3.58}$$

onde Δ é o gap de área. Esse gap de área é dado pela gravidade quântica em laços onde $\Delta_{GQL} = 4\pi\gamma\sqrt{3}$, e calcula-se que a densidade crítica do universo seja em unidades de Planck $\rho_c \approx 0.41$ [60] [23]. No entanto a escolha do gap de área carece de uma justificativa física adicional, consequentemente outros valores da densidade crítica poderiam ser concebidos, onde o ρ_c seria fixado por observações de acordo com [61][62][63].

Se for este o caso, os resultados desse formalismo [26] podem nos dar uma forma de fixar o valor de ρ_c pelo uso dos resultados observacionais sobre Λ. Portanto, deve-se ter que a escala de energia do salto quântico seria super Planckiana, pelo fato de que para se ter uma concordância com o valor observado da constante cosmológica devemos ter $\rho_c \sim 10^{120}$.

4 Investigação sobre a validade da segunda lei generalizada

A cosmologia quântica em laços pode trazer alguns aspectos interessantes no período após o salto quântico, onde o mesmo passaria de uma fase de super inflação e entraria em um regime de inflação. A super inflação seria o período em que o universo estaria em um regime de super aceleração durante o qual a derivada em ralação ao tempo do parâmentro de Hubble é positiva $\dot{H} > 0$, em contraste com o regime de inflação slow-roll padrão onde $\dot{H} < 0$. A super inflação pode ser vista como uma consequência das equações modificadas de friedmann no contexto da cosmologia quântica em laços.

Considerando um universo plano do tipo FLRW, seguindo [25], iremos investigar a validade da segunda lei generalizada da termodiânmica no período de inflação, principalmente no instante de transição entre a super inflação e inflação padrão. Dada as equações de Friedmann para CQL usual,

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right), \tag{4.1}$$

$$\dot{H} = -4\pi(P+\rho)\left(1 - \frac{2\rho}{\rho_c}\right). \tag{4.2}$$

Podemos descrever a expansão do universo, no qual se comporta como um fluido perfeito que satisfaz a seguinte condição $P + \rho > 0$. Onde o salto quântico ocorre quando $\rho = \rho_c$ e o parâmentro de Hubble é igual a zero $H = 0$, depois do salto, a densidade começa a diminuir e no intervalo compreendido em $\rho_c/2 < \rho < \rho_c$, o universo se expande de forma super acelerada, onde a taxa de variação em relação ao tempo do parâmetro de Hubble se mantém positiva $\dot{H} > 0$.

Considerando o campo escalar ϕ como sendo a fonte da inflação, vamos utilizar o seguinte potencial [64]

$$V(\phi) = \frac{(1-\omega)V_0 e^{\sqrt{24\pi(1+\omega)}\phi}}{(1 + \frac{V_0}{2\rho_c}e^{\sqrt{24\pi(1+\omega)}\phi})^2}, \tag{4.3}$$

onde V_0 é uma constante e ω, define a equação de estado dado por $\omega = P/\rho$. O campo escalar imita classicamente o comportamento de um fluido perfeito com o parâmetro de equação do estado constante. Para calcularmos uma solução de campo escalar no regime de slow roll, em que cruza a linha $\dot{H} = 0$, temos que a densidade de energia é definida como sendo

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \tag{4.4}$$

a pressão é definida como sendo

$$P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \tag{4.5}$$

onde $V(\phi)$ é o potencial.

Em períodos próximos do tempo de transição $t = t_0$, vamos ter um parâmetro de Hubble diferente, dado por

$$H(t) = h_0 + h_1(t - t_0)^p + \mathcal{O}\left((t - t_0)^{p+1}\right), \tag{4.6}$$

onde h_0, é o parâmentro de Hubble e o p representa a ordem das derivadas não nulas em relação ao tempo no instante $t = t_0$. Portanto esta solução descreve a transição do período de super inflação para o periodo de inflação, dado que para $t \leq t_0$ teremos $\dot{H} \geq 0$, enquanto que para $t \geq t_0$, teremos $\dot{H} \leq 0$. Temos que a equação da continuidade para o campo escalar é dada por

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V^{'}(\phi) = 0, \tag{4.7}$$

onde $V^{'}(\phi) = \frac{dV(\phi)}{d\phi}$, substituindo (4.6), e supondo que $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$, temos que

$$3(h_0 + h_1(t - t_0)^p + \mathcal{O}\left((t - t_0)^{p+1}\right)))\dot{\phi} + V^{'}(\phi) = 0, \tag{4.8}$$

então,

$$3(h_0 + h_1(t - t_0)^p + \mathcal{O}\left((t - t_0)^{p+1}\right)\frac{d\phi}{dt} = -\frac{dV(\phi)}{d\phi}, \tag{4.9}$$

onde o potencial é definido pela lei de potência, dado por

$$V(\phi) = v_1\phi^n, \tag{4.10}$$

portanto

$$3(h_0 + h_1(t - t_0)^p + \mathcal{O}\left((t - t_0)^{p+1}\right)\frac{d\phi}{dt} = -nv_1\phi^{n-1}, \tag{4.11}$$

$$\int_{t_0}^{t}\phi^{1-n}d\phi = -nv_1\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{3(h_0 + h_1(t - t_0)^p + \mathcal{O}\left((t - t_0)^{p+1}\right)}, \tag{4.12}$$

$$\frac{\phi^{2-n}(t) - \phi^{2-n}(t_0)}{2 - n} = -nv_1\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{3(h_0 + h_1(t - t_0)^p + \mathcal{O}\left((t - t_0)^{p+1}\right)}. \tag{4.13}$$

Para resolvermos a integral presente em (4.13), será necessário realizar uma expansão binomial, para isso vamos considerar que a função $f(t)$ que terá a seguinte forma

$$f(t)=\left[1+\frac{h_1}{h_0}(t-t_0)^p\right]^{-1}, \tag{4.14}$$

calculando a expansão $f(t)$, fica da seguinte forma

$$f(t)=1-\frac{h_1}{h_0}(t-t_0)^p+\dots, \tag{4.15}$$

voltando para (4.13), temos então

$$\frac{\phi^{2-n}(t)-\phi^{2-n}(t_0)}{2-n}=\frac{nv_1}{3h_0}\left[\int_{t_0}^{t}dt-\frac{h_1}{h_0}\int_{t_0}^{t}(t-t_0)^p dt\right], \tag{4.16}$$

então,

$$\frac{\phi^{2-n}(t)-\phi^{2-n}(t_0)}{2-n}=\frac{nv_1}{3h_0}\left[(t-t_0)-\frac{h_1}{h_0}\frac{(t-t_0)^{p+1}}{p+1}\right], \tag{4.17}$$

isolando $(t-t_0)/p$ no segundo membro, e organizando os termos

$$\frac{\phi^{2-n}(t)-\phi^{2-n}(t_0)}{2-n}=\frac{nv_1(t-t_0)}{3h_0 p}\left[p-\frac{h_1}{h_0}\frac{(t-t_0)^p}{\frac{1}{p}+1}\right]. \tag{4.18}$$

os termos dentro do colchete no segundo membro, pode ser escrito como sendo a função de Lerchphi. Desse modo, o campo escalar terá a seguinte forma

$$\phi=\left[\frac{n(n-2)(t-t_0)}{3h_0 p}\Phi\left(-\frac{(t-t_0)^p h_1}{h_0},1,\frac{1}{p}\right)+C_1\right]^{\frac{1}{n-2}}. \tag{4.19}$$

Onde $C_1=\phi^{n-2}(t_0)$, e a função de Lerchphi é dada por

$$\Phi\left(-\frac{(t-t_0)^p h_1}{h_0},1,\frac{1}{p}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(t-t_0)^p h_1}{h_0}\right]^n\left(\frac{1}{p}+n\right)^{-1}. \tag{4.20}$$

Agora vamos definir o campo escalar para um potencial quadrático,

$$V(\phi)=\frac{1}{2}m^2\phi, \tag{4.21}$$

partindo da equação da continuidade (4.7), e substituindo o parâmentro de Hubble (4.6), teremos

$$3(h_0+h_1(t-t_0)^p+\mathcal{O}\left((t-t_0)^{p+1}\right))\frac{d\phi}{dt}+m^2\phi=0, \tag{4.22}$$

calculando a integral

$$\phi(t) = \phi(t_0)exp\left[\frac{-m^2(t-t_0)}{3h_0 p}\Phi\left(-\frac{(t-t_0)^p h_1}{h_0}, 1, \frac{1}{p}\right)\right]. \tag{4.23}$$

A condição $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$, usada para se obter o campo escalar para o potencial quadrático, é satisfeita quando

$$\left|\frac{n(n-1)v_1}{9h_0^2}\phi^{n-2}(t_0)\right| \ll 1, \tag{4.24}$$

que para o potencial quadrático dá $m^2 \ll h_0^2$, o que nos leva então a $m^2 \ll \rho_c$.

$$m^2 \ll \rho_c, \tag{4.25}$$

se reescrevermos (4.24)como sendo $|\frac{d^2V}{d\phi 2}| \ll h_0^2$, no regime slow roll utilizado, deduzimos então que o potencial deve satisfazer $|\frac{d^2V}{d\phi 2}| \ll V$, implicando que o potencial deve ser plano o suficiente. Combinando (4.24), com

$$v_1\phi^n(t_0) \simeq \frac{\rho_c}{2}, \tag{4.26}$$

que podemos perceber que na aproximação de slow roll a principal parte da densidade de energia é proveniente do potencial. Da combinação, temos como resultado

$$\left|\frac{n(n-1)}{12\pi}\right| \ll \phi^2(t_0). \tag{4.27}$$

Portanto, o valor do campo escalar no tempo de transição deve ser grande nesta aproximação. Calculando a derivada do campo escalar (4.19),

$$\phi = \left[\frac{n(n-2)v_1(t-t_0)}{3h_0 p}\left(p - \frac{(t-t_0)^p}{h_0\left(\frac{1}{p}+1\right)}\right) + C_1\right]^{\frac{1}{2n-1}}, \tag{4.28}$$

chamando o que está dentro do colchete de $\mathcal{X}$, então

$$\phi = \mathcal{X}^{\frac{1}{2n-1}}, \tag{4.29}$$

portanto

$$\dot{\phi} = \frac{1}{2n-1}\mathcal{X}^{\left(\frac{1}{2n-1}-1\right)}\left[\frac{n(n-2)v_1}{3h_0}\left(p - \frac{(p+1)(t-t_0)^p h_1}{h_0\left(\frac{1}{p}+1\right)}\right)\right] \tag{4.30}$$

então

$$\dot{\phi} = \frac{1}{2n-1}\mathcal{X}^{\left(\frac{1}{2n-1}-1\right)}\left[\frac{n(n-2)v_1}{3h_0 p}\left(p - \frac{(t-t_0)^p h_1}{h_0\left(\frac{1}{p}+1\right)} - \frac{p(t-t_0)^p h_1}{h_0\left(\frac{1}{p}+1\right)}\right)\right], \tag{4.31}$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{2n-1}\mathcal{X}^{\left(\frac{1}{2n-1}-1\right)}\left[\frac{n(n-2)v_1}{3h_0p}\left(\Phi - \frac{p(t-t_0)^p h_1}{h_0\left(\frac{1}{p}+1\right)}\right)\right], \tag{4.32}$$

temos então

$$\dot{\phi} = \frac{1}{2n-1}\mathcal{X}^{\left(\frac{1}{2n-1}-1\right)}\left[\frac{n(n-2)v_1}{3h_0p}\left(\Phi(1+p)-p^2\right)\right]. \tag{4.33}$$

Aplicando na equação de Friedmann, temos

$$\dot{H} = -4\pi\dot{\phi}^2\left(1-\frac{2\rho}{\rho_c}\right), \tag{4.34}$$

substituindo a derivada do campo escalar (4.33)

$$\dot{H} = -\frac{8\pi}{\rho_c}\left[\frac{1}{2n-1}\mathcal{X}^{\left(\frac{1}{2n-1}-1\right)}\left[\frac{n(n-2)v_1}{3h_0p}\left(\Phi(1+p)-p^2\right)\right]\right]^2\left(v_1\phi^n(t_0)-\rho\right), \tag{4.35}$$

então

$$\dot{H} = -\frac{8\pi}{\rho_c}\left[\frac{1}{2n-1}\phi^{2n}\left[\frac{n(n-2)v_1}{3h_0p}\left(\Phi(1+p)-p^2\right)\right]\right]^2\left(v_1\phi^n(t_0)-\rho\right). \tag{4.36}$$

Desenvolvendo a função de Lerchphi, encontramos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}\dot{H} \;=\; & -\frac{8\pi}{\rho_c}\left[\frac{1}{2n-1}\phi^{2n}\left[-\frac{n(n-2)v_1(t-t_0)}{3h_0p}\left(2\phi^{2n-1}(t_0)+p^2\right)+\frac{\phi^{2n-1}}{t-t_0}(1+p^2)\right]\right]^2 \\ & \times(v_1\phi^n(t_0)-\rho).\end{aligned} \tag{4.37}$$

Organizando a expressão

$$\begin{aligned}\dot{H} = & -\frac{8\pi}{\rho_c}\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2\phi^{4n}\left[\frac{n^2(n^2-4n+4)v_1^2(t-t_0)^2}{9h_0^2p^2}\left(4\phi^{4n-2}(t_0)+\right.\right. \\ & \left.4\phi^{2n-1}(t_0)p^2+p^4\right)-\frac{2n(n-2)v_1(t-t_0)}{3h_0p}(2\phi^{2n-1}(t_0)+p^2)\frac{\phi^{2n-1}}{(t-t_0)}(1+p) \\ & \left.+\frac{\phi^{4n-2}}{t-t_0}(1+p)^2\right](v_1\phi^n(t_0)-\rho),\end{aligned} \tag{4.38}$$

chegaremos em

$$\begin{aligned}\dot{H} \;=\; & -\frac{8\pi}{27\rho_c}\left(\frac{n^2v_1^2\phi^{2(n-1)}(t_0)}{h_0^3}\right)\left(\frac{n^3(n-1)v3_1\phi^{3n-4}(t_0)}{9h_0^2}+n^2v_1^2\phi^{2(n-1)}(t_0)\right) \\ & \times(t-t_0)\mathcal{O}\left((t-t_0)^2\right).\end{aligned} \tag{4.39}$$

Temos que (4.6) só satisfaz a equação de Friedmann desde que

$$h_1 = -\frac{4\pi}{27\rho_c}\left(\frac{n^2 v_1^2 \phi^{2(n-1)}(t_0)}{h_0^3}\right)\left(\frac{n^3(n-1)v3_1\phi^{3n-4}(t_0)}{9h_0^2} + n^2 v_1^2 \phi^{2(n-1)}(t_0)\right),$$
$$p = 2. \tag{4.40}$$

Aplicando a condição de slow roll (4.24) para (4.40), obtemos

$$h_1 \simeq \frac{4\pi}{27}\frac{n^4 v_1^4 (\phi^4(t_0))^{n-1}}{h_0^3 \rho_c}, \tag{4.41}$$

o que determina a taxa de transição. Como $h < 0$, temos como soluções em série

$$H \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{3}\rho_c} - \sqrt{\frac{2}{27\pi}}\frac{n^4 v_1^4 \phi^{4(n-1)}(t_0)}{\rho_c^{5/2}}(t-t_0)^2 + \mathcal{O}\left((t-t_0)^3\right), \tag{4.42}$$

$$\rho \simeq \frac{\rho_c}{2} - \frac{n^2 v_1^2 \phi^{2(n-1)}(t_0)}{\sqrt{6\pi\rho_c}}(t-t_0) + \mathcal{O}\left((t-t_0)^2\right), \tag{4.43}$$

onde $\phi(0)$ é determinado por (4.26), descreve uma transição da super inflação para a inflação no instante de $t = t_0$. Podemos observar que o primeiro termo da solução em série do parâmetro de Hubble H, é o valor de H no tempo de transição, ou seja, quando $\rho = \rho_c/2$. Portanto, podemos concluir que cruzar a linha divisória da super-inflação para inflação é, em princípio, possível durante uma evolução de slow roll para o campo escalar com o potencial de lei de potência, e a solução aproximada para as equações de Friedmann, nesta região, é dada por (4.42) e (4.43).

4.1 Segunda lei generalizada

O estudo das leis da termodinâmica em horizontes cosmológicos podem trazer informações importantes sobre as soluções modificadas nas equações de Friedmann, que descrevem o comportamento da era inflacionária no período de super aceleração e aceleração do universo. Para investigarmos a segunda lei generalizada da entropia, vamos utilizar a entropia do horizonte aparente $\tilde{r}_A$, presente na teoria LQC.

$$S_h = \pi\tilde{r}_A^2 + \pi\alpha ln(\pi\tilde{r}_A^2) + \beta, \tag{4.44}$$

onde α e β, são constantes provenientes de correções quânticas. Considerando um universo plano onde $k = 0$, temos que o raio do horizonte cosmológico terá o mesmo valor do horizonte aparente $\tilde{r}_A = 1/H$. Portanto, a taxa de variação da entropia no horizonte será

$$\frac{dS_h}{dt} = \pi\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{H^2}\right) + \pi\alpha\frac{d}{dt}\left(ln\left(\pi\frac{1}{H^2}\right)\right), \tag{4.45}$$

$$\dot{S}_h = -2\pi(1+\alpha H^2)\frac{\dot{H}}{H^3}. \tag{4.46}$$

Podemos perceber em (4.46), que próximo de $H = 0$ a entropia do horizonte é muito grande e a taxa de variação da entropia tem um valor aproximado $\dot{S}_h \approx -2\pi\dot{H}/H^3$, então, no momento posterior ao bounce S_h diminui rapidamente para um menor valor finito. Na era de expansão super acelerada o parâmentro de Hubble cresce de $H = 0$, no momento do bounce, para $H = \sqrt{2\pi\rho_c/3}$, no tempo de transição, logo a entropia aumenta apenas para $-3/2\pi\rho_c < \alpha < 0$ e quando $(1+\alpha H^2) < 0$. Depois da transição da era de super inflação para inflação normal, temos que $\dot{H} < 0$ e a taxa de variação da entropia $\dot{S}_h > 0$ é válida para $(1+\alpha H^2) > 0$.

Para estudarmos a segunda lei generalizada precisamos levar em consideração a contribuição da matéria que satisfaça a condição de energia fraca $\rho > 0$, $P + \rho \geq 0$, para entropia. Usando a primeira lei da termodinâmica, temos

$$dE = TdS_{in} - PdV, \tag{4.47}$$

sendo assim,

$$(P+\rho)dV + Vd\rho = TdS_{in}, \tag{4.48}$$

onde S_{in} é a entropia da matéria dentro do horizonte. Definida como sendo

$$\dot{S}_{in} = -4\pi\frac{(P+\rho)}{TH^2}\left(1+\frac{\dot{H}}{H^2}\right), \tag{4.49}$$

durante a inflação $1 + \dot{H}/H^2 > 0$, portanto a taxa de variação da entropia interna será $\dot{S}_{in} > 0$, depois da infação a entropia interna diminui. Somando (4.46) e (4.49) teremos a taxa de variação da entropia total S_{tot}, dada por

$$\dot{S}_{tot} = -2\pi(1+\alpha H^2)\frac{\dot{H}}{H^3} - 4\pi\frac{(P+\rho)}{TH^2}\left(1+\frac{\dot{H}}{H^2}\right) \geq 0. \tag{4.50}$$

Desde que a condição de energia fraca seja válida, imediatamente após o bounce a entropia total S_{tot}, diminui rapidamente. Em seguida, a densidade de energia também diminui e o sistema se aproxima do tempo de transição da era de super inflação para inflação. Na era de expansão acelerada do universo ($\dot{H} + H^2 > 0$), a validade da segunda lei generalizada requer as seguintes condições

$$\dot{H}(1+\alpha H^2) < 0, \;\; para \;\; \dot{H} > 0, \tag{4.51}$$

$$\dot{H}(1+\alpha H^2) < 0, \;\; para \;\; \dot{H} < 0. \tag{4.52}$$

Considerando que H é contínuo no tempo de transição, temos que

$$\alpha = -\frac{1}{H^2(t_0)} = -\frac{3}{2\pi\rho_c} \approx -1,16. \tag{4.53}$$

Na era de super aceleração , o parâmentro de Hubble cresce até o valor máximo $H = \sqrt{2\pi\rho_c/3}$, no tempo de transição. Mas esse resultado entra em contradição com (4.51), o que implica em $H(t < t_0) > \sqrt{2\pi\rho_c/3}$. Consequentemente, após o bounce a segunda lei generalizada não se sustenta em toda região conectada que compreende a era de super inflação e a era de inflação comum. Se observarmos o comportamento do sistema próximo do tempo de transição t_0, quando a taxa de variação da entropia total $\dot{S}_{tot}$, se reduz a

$$\dot{S}_{tot}(t = t_0) = -4\pi\frac{P+\rho}{TH^2}. \tag{4.54}$$

A única maneira de manter a validade da segunda lei generalizada nesta região para uma matéria que satisfaz a condição de energia fraca, é ter $P(t_0) + \rho(t_0) = 0$. Para o modelo de campo escalar temos $P + \rho = \dot{\phi}^2 \geq 0$. Baseando nas soluções derivadas anteriormente, o campo escalar com o potencial de lei de potência (4.10), tem o seguinte comportamento próximo de $\dot{H} = 0$:

$$\dot{\phi}^2(t) = \frac{n^2 v_1^2 \phi^{2(n-1)}(t_0)}{6\pi\rho_c} - \frac{2n^3(n-1)v_1^3\phi^{3n-4}(t_0)}{\sqrt{216\pi^3}\rho^{3/2}} + \mathcal{O}\left((t-t_0)^2\right), \tag{4.55}$$

Mas na aproximação de slow roll o potencial do campo escalar se aproxima de $V(\phi) \approx \rho_c/2$, então o campo escalar $\phi(t_0) \neq 0$, e temos que $\dot{S}_{tot}(t_0) < 0$. Portanto, em t_0 e pelo menos na próximidade de t_0, a segunda lei generalizada é violada.

5 Validade da segunda lei generalizada da termodinâmica no contexto da CQHL

Como vimos no capítulo anterior, a expressão da entropia do horizonte aparente presente na CQL, não é adequada e acaba violando a segunda lei generalizada durante o período de super inflação. No entanto, sob o ponto de vista da CQHL, podemos assumir que o horizonte aparente do universo terá a mesma relação de proporcionalidade entre a entropia e área do horizonte dada pela fórmula de Bekenstein-Hawking modificada para o caso do buraco negro auto-dual:

$$S_H = \pm\frac{\sqrt{A^2 - A^2_{min}}}{4\sigma}. \tag{5.1}$$

Dessa forma, iremos investigar a partir dessa expressão de entropia, se com esta relação, a validade da segunda lei generalizada dada por

$$\dot{S}_{tot} = \dot{S}_{in} + \dot{S}_H \geq 0, \tag{5.2}$$

permanecerá inviolável, dentro do contexto da cosmologia quântica em laços, nos períodos de super inflação $\dot{H} > 0$, transição $\dot{H} = 0$, e inflação $\dot{H} < 0$. Utilizaremos o mesmo formalismo de [25]. Portanto, precisamos calcular a taxa de variação da entropia do horizonte aparente

$$\dot{S}_H = -sgn(S_H)\frac{1}{2}\frac{[A^2 - A^2_{min}]^{-\frac{1}{2}}}{4\sigma}2A\dot{A}, \tag{5.3}$$

a função sinal $sgn(S_H)$, em (5.3) aparece justamente da característica de sinais da entropia do horizonte aparente, onde estão sendo consideradas as parcelas positiva e negativa da entropia

$$\begin{cases} -1 & : & S_H < 0 \\ 0 & : & S_H = 0 \\ 1 & : & S_H > 0 \end{cases}. \tag{5.4}$$

A área de supérficie do horizonte aparente A, é dado por $A = 4\pi\tilde{r}_A^2$ e $\tilde{r}_A$, é o raio do horizonte aparente, especificamente para o caso de universo plano

$$\tilde{r}_A = \frac{1}{H}. \tag{5.5}$$

Substituindo (5.5) na área e calculando a derivada, encontramos a taxa de variação da entropia do horizonte aparente

$$\dot{S}_H = -sgn(S_H)\frac{2\pi}{\sigma}\left[1 - \frac{A_{min}^2 H^4}{16\pi^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \frac{\dot{H}}{H^3}. \tag{5.6}$$

Além disso, para encontrarmos a taxa de variação total da entropia do universo, é necessário levar em consideração a taxa de variação da entropia da matéria dentro do horizonte $\dot{S}_{in}$ [25]:

$$\dot{S}_{in} = -4\pi\frac{(P+\rho)}{TH^2}\left[1 + \frac{\dot{H}}{H^2}\right]. \tag{5.7}$$

Então, adicionando as taxas de variação de entropia do horizonte e da matéria, teremos a seguinte expressão para a variação da entropia total do universo:

$$\dot{S}_{tot} = -sgn(S_H)\frac{2\pi}{\sigma}\left[1 - \frac{A_{min}^2 H^4}{16\pi^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \frac{\dot{H}}{H^3} - 4\pi\frac{(P+\rho)}{TH^2}\left[1 + \frac{\dot{H}}{H^2}\right] \geq 0. \tag{5.8}$$

A partir de agora, vamos analisar a taxa de variação da entropia do universo em dois regimes específicos presentes na descrição dada pela CQL para a evolução do universo: Super-inflação e inflação; assim como para o período de transição entre esses dois regimes.

No regime de super-inflação, a taxa de variação do parâmentro de Hubble se mantém positiva $\dot{H} > 0$. Dessa forma, (5.8) se mantém maior ou igual a zero, e a segunda lei generalizada da termodinâmica é obedecida, se somente se, o primeiro termo da equação (5.8) for positivo e tiver valor absoluto maior que o do segundo termo. Isso só é possível se o sinal da entropia S_H for negativa.

Para analisarmos o regime de transição, vamos reescrever a equação (5.8) como:

$$-sgn(S_H)\frac{2\pi}{\sigma}\left[1 - \frac{A_{min}^2 H^4}{16\pi^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \frac{\dot{H}}{H^3} \geq 4\pi\frac{(P+\rho)}{TH^2}\left[1 + \frac{\dot{H}}{H^2}\right], \tag{5.9}$$

isolando $\frac{\dot{H}}{H^3}$, temos

$$\frac{\dot{H}}{H^3} \geq -sgn(S_H)\frac{\sigma}{2\pi}\left[1 - \frac{A_{min}^2 H^4}{16\pi^2}\right]^{\frac{1}{2}} 4\pi\frac{(P+\rho)}{TH^2}\left[1 + \frac{\dot{H}}{H^2}\right], \tag{5.10}$$

no regime de transição, $\dot{H} = 0$, assim

$$0 \geq -sgn(S_H)\frac{\sigma}{2\pi}\left[1 - \frac{A_{min}^2 H^4}{16\pi^2}\right]^{\frac{1}{2}} 4\pi\frac{(P+\rho)}{TH^2}. \tag{5.11}$$

Para que a condição acima seja satisfeita, é necessário que a entropia do horizonte S_H seja positiva ou igual a zero. Considerando o caso em que ela é igual a zero no regime de transição, é possível calcular o parâmetro A_{min}:

$$\frac{\sigma}{2\pi}\left[1-\frac{A_{min}^2 H^4(t_0)}{16\pi^2}\right]^{\frac{1}{2}} 4\pi\frac{(P+\rho)}{TH^2}=0, \tag{5.12}$$

podemos perceber que a contribuição da matéria na taxa de variação de entropia não tem como ser igual a zero, sendo assim a taxa de variação de entropia do horizonte será igual a zero.

$$\frac{2\pi}{\sigma}\left[1-\frac{A_{min}^2 H^4(t_0)}{16\pi^2}\right]^{\frac{1}{2}}=0, \tag{5.13}$$

então

$$-\frac{A_{min}^2 H^4(t_0)}{16\pi^2}+1=0, \tag{5.14}$$

$$A_{min}=\frac{4\pi}{H^2(t_0)}. \tag{5.15}$$

No período de transição $H(t_0)$ é dado por

$$H(t_0)=\sqrt{\frac{2\pi\rho_c}{3}}, \tag{5.16}$$

substituindo, temos

$$A_{min}=\frac{6}{\rho_c}, \tag{5.17}$$

onde a densidade crítica ρ_c, é dada por

$$\rho_c=\frac{3}{8\pi\gamma^2\lambda^2}, \tag{5.18}$$

substituindo a densidade crítica na expressão de A_{min}, teremos

$$A_{min}=8\pi\gamma^2\lambda^2. \tag{5.19}$$

Após a transição para o período de inflação padrão, a taxa de variação do parâmentro de Hubble se torna negativa $\dot{H}<0$. Assim, para que a segunda lei generalizada da termodinâmica seja satisfeita no período de inflação, é necessário que a entropia do horizonte aparente do universo seja positiva e o valor absoluto do primeiro termo da equação (5.8) seja maior que o valor absoluto do segundo.

Dessa forma, observamos que para a segunda lei generalizada da termodinâmica seja mantida no contexto da CQHL, é necessário que o universo saia de um regime de entropia negativa, no período de super-inflação, para o regime de entropia positiva que passa valer a partir do período de inflação.

6 Conclusão

Nesta dissertação, investigamos o problema da validade da segunda lei generalizada, no cenário da cosmologia quântica em laços nos períodos de super-inflação, transição e inflação. No entanto, para chegarmos a essa discussão ilustramos no capítulo 2, que através do princípio holográfico e utilizando o formalismo de Jacobson é possível derivar as equações de Friedmann.

De fato, a utilização desse princípio e do formalismo de Jacobson se tornam necessários para se ter uma nova perspectiva da CQL, o que seria a cosmologia quântica holográfica em laços [26], essa nova perspectiva utiliza da fórmula de entropia para o caso do buraco negro auto-dual. como é apresentado no capítulo 3.

A investigação da violação da segunda lei generalizada no contexto da CQL, é mostrado no capitulo 4. Onde é utilizada a fórmula de entropia do horizonte aparente presente na gravidade quântica em laços. As discussões apresentadas no capítulo mencionado nos inspiraram a seguir a discussão a diante.

Os resultados que obtivemos, mostram que o problema da validade da segunda lei generalizada da termodinâmica, no contexto da CQHL, pode ser resolvido, se supormos que o universo sai de um regime de entropia negativa, no período de super-inflação, para um regime de entropia positiva durante o regime de inflação. Além disso, conseguimos também definir o termo de área mínima, como sendo $A_{min} = 8\pi\gamma^2\lambda^2$.

Como perspectivas para trabalhos futuros, podemos fazer o mesmo estudo da segunda lei generalizada no contexto dos resultados obtidos em [65], onde se conseguiu estabelecer uma relação da cosmologia quântica em laços com a cosmologia de Branas.

Apêndices

APÊNDICE A – Equações de Friedmann

As equações de Friedmann descrevem a dinâmica de um universo do tipo FLRW. Nesse apêndice, mostraremos a sua derivação exata, que surge a partir das equações de campo de Einstein utilizando a métrica FLRW.

A.1 Métrica FLRW

A métrica FLRW para um universo (3+1) dimensões, isotrópico e homogêneo, é descrita da seguinte forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\right). \tag{A.1}$$

Onde o elemento de linha pode ser escrito da seguinte forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{A.2}$$

a métrica FLRW é diagonal, ou seja $g_{\mu\nu} = 0$ se $\mu \neq \nu$, onde os elementos de diagonais são funções de uma coordenada quadrimensional $x^\mu = x^0, x^1, x^2, x^3$:

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 \\ g_{11} &= \frac{a^2}{1-kr^2} \\ g_{22} &= a^2 r^2 \\ g_{33} &= a^2 r^2 \sin^2\theta. \end{aligned}$$

Por uma questão de notação, temos que as coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3), representam as coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ).

A.2 Símbolos de Christoffel

Os símbolos de Christoffel Γ^l_{ij}, estão associados a derivada covariante de tensores, definidos por

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} g^{lk} \left[g_{ki;j} + g_{jk;i} - g_{ij;k}\right]. \tag{A.3}$$

Mostraremos agora, os cálculos dos símbolos de Christoffel não nulos, utilizando a métrica de FLRW

$$\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2} g^{00} \left[g_{01;1} + g_{10;1} - g_{11;0}\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{d}{dt}\frac{-a^2}{(1-kr^2)}\right] = \frac{a(t)}{1-kr^2}\dot{a};$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{22} &= \frac{1}{2}g^{00}\left[g_{02;2}+g_{20;2}-g_{22;0}\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{d}{dt}-a^2r^2\right] = r^2a(t)\dot{a};\\
\Gamma^0_{33} &= \frac{1}{2}g^{00}\left[g_{03;3}+g_{30;3}-g_{33;0}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}a^2r^2\sin^2\theta\right] = \sin^2\theta r^2a(t)\dot{a};\\
\Gamma^1_{01} &= \frac{1}{2}g^{11}\left[g_{10;1}+g_{11;0}-g_{01;1}\right] = \frac{1}{2}\frac{-a^2}{(1-kr^2)}\left[\frac{d}{dt}\frac{-a^2}{1-kr^2}\right] = \frac{\dot{a}}{a(t)} = \Gamma^1_{10};\\
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}g^{11}\left[g_{11;1}+g_{11;1}-g_{11;1}\right] = \frac{-1}{2}\frac{1-kr^2}{a^2}\left[\frac{d}{dr}\frac{-a^2}{(1-kr^2)}\right] = \frac{kr}{(1-kr^2)};\\
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}g^{11}\left[g_{12;2}+g_{21;2}-g_{22;1}\right] = \frac{-1}{2}\frac{(1-kr^2)}{a^2}\left[\frac{d}{dr}(a^2r^2)\right] = -r(1-kr^2);\\
\Gamma^1_{33} &= \frac{1}{2}g^{11}\left[g_{13;3}+g_{31;3}-g_{33;1}\right] = \frac{1}{2}\frac{(1-kr^2}{a^2}\left[\frac{d}{dr}(-a^2r^2\sin^2\theta)\right] = -r\sin^2\theta(1-kr^2);\\
\Gamma^2_{02} &= \frac{1}{2}g^{22}\left[g_{20;2}+g_{22;0}-g_{02;2}\right] = \frac{1}{2}\frac{-1}{a^2r^2}\left[\frac{d}{dt}(-a^2r^2)\right] = \frac{\dot{a}}{a(t)} = \Gamma^2_{20};\\
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}g^{22}\left[g_{21;2}+g_{22;1}-g_{12;2}\right] = \frac{-1}{2}(-a^2r^2)\left[\frac{d}{dr}a^2r^2\right] = \frac{1}{r} = \Gamma^2_{21};\\
\Gamma^2_{33} &= \frac{1}{2}g^{22}\left[g_{23;3}+g_{32;3}-g_{33;2}\right] = \frac{1}{2}\frac{-1}{a^2r^2}\left[\frac{d}{d\theta}a^2r^2\sin^2\theta\right] = -\sin\theta\cos\theta;\\
\Gamma^3_{03} &= \frac{1}{2}g^{33}\left[g_{30;3}+g_{33;0}-g_{03;3}\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{a^2r^2\sin^2\theta}\left[\frac{d}{dt}a^2r^2\sin^2\theta\right] = \frac{\dot{a}}{a} = \Gamma^3_{30};\\
\Gamma^3_{13} &= \frac{1}{2}g^{33}\left[g_{31;3}+g_{33;1}-g_{13;3}\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{a^2r^2\sin^2\theta}\left[\frac{d}{dr}a^2r^2\sin^2\theta\right] = \frac{1}{r} = \Gamma^3_{31};\\
\Gamma^3_{23} &= \frac{1}{2}g^{33}\left[g_{32;3}+g_{33;2}-g_{23;3}\right] = \frac{1}{2}\frac{-1}{a^2r^2\sin^2\theta}\left[\frac{d}{d\theta}a^2\sin^2\theta r^2\right] = \cot\theta = \Gamma^3_{32}.
\end{aligned}
$$

A.3 Tensor de Ricci

O tensor de Ricci tem um papel central nas equações de campo. Onde temos uma combinação de derivadas de primeira e segunda ordem da métrica, tornando as equações de campo não-lineares. O tensor de Ricci é definido da seguinte forma

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\lambda\alpha} - \Gamma^\lambda_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\lambda}. \tag{A.4}$$

Como nosso objetivo é determinar o tensor de Einstein, precisamos calcular os tensores de Ricci para cada coordenada da métrica FLRW. Então, para a componente temporal R_{00}, teremos

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= \partial_\alpha\Gamma^\alpha_{00} - \partial_0\Gamma^\alpha_{0\alpha} + \Gamma^0_{00}\Gamma^\alpha_{0\alpha} + \Gamma^1_{00}\Gamma^\alpha_{1\alpha} + \Gamma^2_{00}\Gamma^\alpha_{2\alpha} + \Gamma^3_{00}\Gamma^\alpha_{3\alpha} - \Gamma^0_{0\alpha}\Gamma^\alpha_{00} +\\
&\quad -\Gamma^1_{0\alpha}\Gamma^\alpha_{01} - \Gamma^2_{0\alpha}\Gamma^\alpha_{02} - \Gamma^3_{0\alpha}\Gamma^\alpha_{03},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{d}{dt}\left[\Gamma^1_{01} + \Gamma^2_{02} + \Gamma^3_{03}\right] - \Gamma^1_{01}\Gamma^1_{01} - \Gamma^2_{02}\Gamma^2_{02} - \Gamma^3_{03}\Gamma^3_{03}, \\
&= -\frac{d}{dt}\left[\dot{a}a^{-1} + \dot{a}a^{-1} + \dot{a}a^{-1}\right] - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}, \\
&= \frac{-3}{a^2}(\ddot{a}a - \dot{a}^2) - \frac{3\dot{a}^2}{a^2}, \\
&= \frac{-3\ddot{a}}{a}. \qquad \text{(A.5)}
\end{aligned}
$$

Para a coordenada radial, R_{11}

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= \partial_\alpha\Gamma^\alpha_{11} - \partial_1\Gamma^\alpha_{1\alpha} + \Gamma^0_{11}\Gamma^\alpha_{0\alpha} + \Gamma^1_{11}\Gamma^\alpha_{1\alpha} + \Gamma^2_{11}\Gamma^\alpha_{2\alpha} + \Gamma^3_{11}\Gamma^\alpha_{3\alpha} - \Gamma^0_{1\alpha}\Gamma^\alpha_{10} - \Gamma^1_{1\alpha}\Gamma^\alpha_{11} + \\
&\quad -\Gamma^2_{1\alpha}\Gamma^\alpha_{12} - \Gamma^3_{1\alpha}\Gamma^\alpha_{13}, \\
&= \partial_0\Gamma^0_{11} + \partial_1\Gamma^1_{11} - \partial_1\Gamma^1_{11} - \partial_1\Gamma^2_{12} - \partial_1\Gamma^3_{13} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{11}\Gamma^3_{13} - \Gamma^0_{11}\Gamma^1_{10} + \\
&\quad -\Gamma^1_{10}\Gamma^0_{11} - \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{13}, \\
&= \frac{d}{dt}\left[\frac{a\dot{a}}{(1-kr^2)}\right] - \frac{d}{dr}\frac{1}{r} - \frac{d}{dr}\frac{1}{r} + \frac{kr}{1-kr^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right] - \frac{2\dot{a}}{a}\left[\frac{a\dot{a}}{1-kr^2}\right] - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}, \\
&= \frac{\dot{a}^2 + a\ddot{a}}{1-kr^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{2k}{1-kr^2} - \frac{2\dot{a}^2}{1-kr^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}, \\
&= \frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2}. \qquad \text{(A.6)}
\end{aligned}
$$

Para a coordenada θ, R_{22}, obteremos

$$
\begin{aligned}
R_{22} &= \partial_\alpha\Gamma^\alpha_{22} - \partial_2\Gamma^\alpha_{2\alpha} + \Gamma^0_{22}\Gamma^\alpha_{0\alpha} + \Gamma^1_{22}\Gamma^\alpha_{1\alpha} + \Gamma^2_{22}\Gamma^\alpha_{2\alpha} + \Gamma^3_{22}\Gamma^\alpha_{3\alpha} - \Gamma^0_{2\alpha}\Gamma^\alpha_{20} - \Gamma^1_{2\alpha}\Gamma^\alpha_{21} + \\
&\quad -\Gamma^2_{2\alpha}\Gamma^\alpha_{22} - \Gamma^3_{2\alpha}\Gamma^\alpha_{23}, \\
&= \partial_0\Gamma^0_{22} + \partial_1\Gamma^1_{22} - \partial_2\Gamma^1_{21} - \partial_2\Gamma^3_{23} + \Gamma^0_{22}\Gamma^1_{01} + \Gamma^0_{22}\Gamma^2_{02} + \Gamma^0_{22}\Gamma^3_{03} + \Gamma^1_{22}\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + \\
&\quad +\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{22}\Gamma^3_{13} - \Gamma^0_{22}\Gamma^2_{20} - \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{21} - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{21} - \Gamma^2_{20}\Gamma^0_{22} - \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} - \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{23}, \\
&= \frac{d}{dt}(r^2a\dot{a}) + \frac{d}{dr}\left[-r(1-kr^2)\right] - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{d}{d\theta}(\cot\theta) + a\dot{a}r^2\left(\frac{2\dot{a}}{a}\right) + \frac{\dot{a}}{a}a\dot{a}r^2 + \\
&\quad -r(1-kr^2)\left[\frac{kr}{1-kr^2} + \frac{1}{r}\right] - \frac{\dot{a}}{a}r^2a\dot{a} - \cot^2\theta + \frac{1}{r}[r(1-kr^2)], \\
&= r^2(a\ddot{a} + \dot{a}^2) - 1 + 3kr^2 + cossec^2\theta + 2\dot{a}r^2 - kr^2 - 1 + kr^2 - \dot{a}^2r^2 - \cot^2\theta + \\
&\quad \dot{a}^2r^2 + 1 - kr^2, \\
&= r^2(a\ddot{a} + 2k + 2\dot{a}^2). \qquad \text{(A.7)}
\end{aligned}
$$

Para a coordenada ϕ, R_{33}, temos:

$$
\begin{aligned}
R_{33} &= \partial_\alpha\Gamma^\alpha_{33} - \partial_3\Gamma^\alpha_{3\alpha} + \Gamma^0_{33}\Gamma^\alpha_{0\alpha} + \Gamma^1_{33}\Gamma^\alpha_{1\alpha} + \Gamma^2_{33}\Gamma^\alpha_{2\alpha} + \Gamma^3_{33}\Gamma^\alpha_{3\alpha} - \Gamma^0_{3\alpha}\Gamma^\alpha_{30} - \Gamma^1_{3\alpha}\Gamma^\alpha_{31} + \\
&\quad -\Gamma^2_{3\alpha}\Gamma^\alpha_{32} - \Gamma^3_{3\alpha}\Gamma^\alpha_{33},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_0\Gamma^0_{33} + \partial_1\Gamma^1_{33} + \partial_2\Gamma^2_{33} + \Gamma^0_{33}\Gamma^1_{01} + \Gamma^0_{33}\Gamma^2_{02} + \Gamma^0_{33}\Gamma^3_{03} + \Gamma^1_{33}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{33}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{13} + \\
&\quad + \Gamma^2_{33}\Gamma^2_{22} + \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{23} - \Gamma^0_{33}\Gamma^3_{30} - \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{31} - \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{32} - \Gamma^3_{32}\Gamma^2_{33} - \Gamma^3_{30}\Gamma^0_{33} - \Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33}, \\
&= \frac{d}{dr}(a\dot{a}\sin^2\theta r^2) + \frac{d}{dr}\left[-r\sin^2\theta(1-kr^2)\right] + \frac{d}{d\theta}(-\sin\theta\cos\theta) + \frac{2\dot{a}}{a}(\sin^2\theta r^2 a\dot{a}) + \\
&\quad - \sin^2\theta r(1+kr^2)\left[\frac{kr}{1-kr^2} + \frac{1}{r}\right] + \cos^2\theta - \sin^2\theta r^2\dot{a}^2 + \frac{1}{r}r\sin^2\theta(1-kr^2), \\
&= r^2\sin^2\theta(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) - \sin^2\theta(1-3kr^2) - \cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\dot{a}r^2\sin^2\theta - kr^2\sin^2\theta + \\
&\quad - \sin^2\theta(1-kr^2) - \sin^2\theta r^2\dot{a}^2 + \sin^2\theta(1-kr^2) + \cos^2\theta, \\
&= \sin^2\theta r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) - \sin^2\theta + 3kr^2\sin^2\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta - kr^2\sin^2\theta + \cos^2\theta, \\
&= \sin^2\theta r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k).
\end{aligned} \tag{A.8}
$$

A.4 Escalar de Ricci

O escalar de Ricci $\mathcal{R}$, surge a partir de uma contração de indices do tensor de Ricci, da seguinte forma

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \tag{A.9}$$

dessa forma, podemos calcular o escalar de Ricci para a métrica FLRW

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R} &= g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \\
&= -3\frac{\ddot{a}}{a} - 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right) \\
&= -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right).
\end{aligned} \tag{A.10}
$$

A.5 Tensor de Einstein

A equação de campo de Einstein descreve todos os fenômenos gravitacionais conhecidos, com notável precisão:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{A.11}$$

onde G é a cosnstante gravitacional de Newton. O primeiro membro da equação de Einstein, descreve a geometria do espaço-tempo através do tensor $G_{\mu\nu}$. Por outro lado, o segundo membro da equação descreve a distribuição da matéria através do tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$. Na sua forma mais geral, a constante cosmológica $\Lambda g_{\mu\nu}$ é adicionada a equação. O tensor de Einstein é definido da seguinte forma

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R}. \tag{A.12}$$

Podemos agora, formar o tensor de Einstein que corresponde à parte geométrica da equação de campo cosmológica. Dessa forma,A componente temporal G_{00}:

$$\begin{aligned} G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} \mathcal{R} \\ &= -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) \\ &= 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right). \end{aligned} \tag{A.13}$$

As componentes espaciais G_{ij}:

$$\begin{aligned} G_{ij} &= R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} \mathcal{R} \\ &= -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right) g_{ij} + \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) g_{ij} \\ &= \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) g_{ij}. \end{aligned} \tag{A.14}$$

A.6 Tensor momento-energia

A partir de agora, vamos voltar nossa atenção ao segundo membro da equação de Einstein. Onde vamos assumir que a massa e a energia contida no universo, se comporte como um fluido perfeito, onde esse fluido se move através do tecido espaço-tempo com uma quadrivelocidade U_μ. Este fluido apresenta uma densidade de energia ρ, e uma pressão isotropica P. O tensor momento-energia é descrito da seguinte forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}, \tag{A.15}$$

onde a coordenada comóvel da quadrivelocidade é dada por

$$U^t = 1, \quad U^i = 0 \qquad ou \qquad U^\mu = (1, 0, 0, 0), \tag{A.16}$$

e as componoentes do tensor $T_{\mu\nu}$, que serão importantes

$$T_{00} = \rho \qquad\qquad T_{ij} = -P. \tag{A.17}$$

A.7 As equações de Friedmann

A forma compacta das equações de campo é dada por

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{A.18}$$

Para a componente temporal, temos

$$\begin{aligned}
G_{00} &= 8\pi G T_{00} \\
3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) &= 8\pi G \rho \\
\Rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}.
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Esta é a primeira equação de Friedmann, que descreve como a velocidade de expansão depende da densidade de energia e da curvatura. As componentes espaciais, nos dão três equações idênticas

$$\begin{aligned}
G_{ij} &= 8\pi G T_{ij} \\
2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} &= -8\pi G P \\
2\frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{8\pi G}{3}(3\frac{8\pi G}{3}\rho \\
\Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P).
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Esta é a segunda equação de Friedmann, que descreve que, a aceleração do fator de escala $\ddot{a}$, depende da pressão e da densidade de energia.

APÊNDICE B – Campo Escalar *Inflaton*

Com as equações de Friedmann, podemos abordar o caso do modelo inflacionário com o campo escalar homogêneo ϕ, como responsável da expansão acelerada do universo, esse campo é conhecido como o *inflaton*. Associado a este campo, teremos uma densidade de energia potencial $V(\phi)$. Para determinarmos as condições para que esse campo possa gerar o período inflacionário, primeiro vamos escrever a lagrangeana de um campo escalar

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi), \tag{B.1}$$

onde o tensor momento-energia é definido por

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right). \tag{B.2}$$

Considerando a homogeneidade do campo, de forma que o *inflanton* dependa só da coordenada temporal, teremos a seguinte relação para a densidade de energia na componente temporal

$$T_{00} = \rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \tag{B.3}$$

onde podemos perceber que a densidade total da energia do campo escalar será dada pela soma das densidades de energia cinética e potencial. Para a pressão teremos a seguinte expressão

$$T_{ii} = P = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi), \tag{B.4}$$

com a equação do estado definida como $P = \omega \rho$, usando (B.3)e (B.4), temos

$$\omega = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\phi^2 + 2V(\phi)}. \tag{B.5}$$

Substituindo a expressão encontrada para densidade de energia (B.3) na primeira equação de Friedmann (2.41), e considerando que o espaço é plano temos que

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right), \tag{B.6}$$

derivando em relação ao tempo temos

$$2H\dot{H} = \frac{8\pi}{3} \left(\phi \dot{\phi} + V' \dot{\phi} \right), \tag{B.7}$$

reescrevendo a segunda equação de Friedmann (2.49) teremos

$$\dot{H} + H^2 = \frac{4\pi}{3}(\rho + 3P), \tag{B.8}$$

combinando com (B.7)

$$\dot{H} = -4\pi(\rho + P), \tag{B.9}$$

substituindo agora a pressão e a densidade de energia respectivamente (B.3) e (B.4), temos

$$\dot{H} = -4\pi\dot{\phi}^2. \tag{B.10}$$

Substituindo em (B.7), obtemos então a equação de movimento para o campo

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V^{'}(\phi) = 0, \tag{B.11}$$

onde o termpo $V^{'}$ age como uma força e o termo proporcional a velocidade $3H\dot{\phi}$ age como o termo de atrito.

Referências

1 EDDINGTON, A. The analysis of matter. by bertrand russell, frs (london: Kegan paul, trench, trübner & co. 1927. pp. xvi+ 400. price 21s.). *Philosophy*, Cambridge University Press, v. 3, n. 9, p. 93–95, 1928. Citado na página 17.

2 ALBRECHT, A. Cosmic inflation and the arrow of time. *arXiv preprint astro-ph/0210527*, 2002. Citado na página 17.

3 TANANBAUM, H. et al. Observation of a correlated x-ray transition in cygnus x-1. *The Astrophysical Journal*, v. 177, p. L5, 1972. Citado na página 17.

4 ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016. Citado na página 17.

5 COLLABORATION, E. H. T. et al. First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole. *arXiv preprint arXiv:1906.11238*, 2019. Citado na página 17.

6 HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. In: *Euclidean quantum gravity*. [S.l.]: World Scientific, 1975. p. 167–188. Citado na página 17.

7 BEKENSTEIN, J. D. Black holes and entropy. In: *JACOB BEKENSTEIN: The Conservative Revolutionary*. [S.l.]: World Scientific, 2020. p. 307–320. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 21.

8 BEKENSTEIN, J. D. Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics. In: *JACOB BEKENSTEIN: The Conservative Revolutionary*. [S.l.]: World Scientific, 2020. p. 321–329. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 21.

9 JACOBSON, T. Thermodynamics of spacetime: the einstein equation of state. *Physical Review Letters*, APS, v. 75, n. 7, p. 1260, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 21.

10 CAI, R.-G.; KIM, S. P. First law of thermodynamics and friedmann equations of friedmann-robertson-walker universe. *Journal of High Energy Physics*, IOP Publishing, v. 2005, n. 02, p. 050, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 17, 18, 22 e 29.

11 VERLINDE, E. On the holographic principle in a radiation dominated universe. *arXiv preprint hep-th/0008140*, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

12 KARAMI, K.; KHALEDIAN, M. S.; ABDOLLAHI, N. The generalized second law of gravitational thermodynamics on the apparent horizon in f(r)-gravity. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 98, n. 3, p. 30010, May 2012. ISSN 1286-4854. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1209/0295-5075/98/30010>. Citado na página 17.

13 ASHTEKAR, A.; WILSON-EWING, E. Covariant entropy bound and loop quantum cosmology. *Physical Review D*, APS, v. 78, n. 6, p. 064047, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 29.

14 FARAONI, V. Black hole entropy in scalar-tensor and f(r) gravity: An overview. *Entropy*, MDPI AG, v. 12, n. 5, p. 1246–1263, May 2010. ISSN 1099-4300. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.3390/e12051246>. Citado na página 17.

15 PADMANABHAN, T. General relativity from a thermodynamic perspective. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 46, n. 3, p. 1673, 2014. Citado na página 17.

16 ROVELLI, C. *Quantum gravity*. [S.l.]: Cambridge university press, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 29.

17 ASHTEKAR, A.; LEWANDOWSKI, J. Background independent quantum gravity: a status report. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 21, n. 15, p. R53–R152, Jul 2004. ISSN 1361-6382. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/21/15/R01>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 29.

18 THIEMANN, T. Loop quantum gravity: An inside view. *Lecture Notes in Physics*, Springer Berlin Heidelberg, p. 185–263, 2007. ISSN 0075-8450. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-71117-9_10>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 29.

19 THIEMANN, T. Introduction to modern canonical quantum general relativity. *arXiv preprint gr-qc/0110034*, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 29.

20 THIEMANN, T. Lectures on loop quantum gravity. *Lecture Notes in Physics*, Springer Berlin Heidelberg, p. 41–135, 2003. ISSN 1616-6361. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-45230-0_3>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 29.

21 TAVERAS, V. Corrections to the friedmann equations from loop quantum gravity for a universe with a free scalar field. *Physical Review D*, APS, v. 78, n. 6, p. 064072, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 18, 33 e 36.

22 ASHTEKAR, A.; BOJOWALD, M.; LEWANDOWSKI, J. Mathematical structure of loop quantum cosmology. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, International Press of Boston, v. 7, n. 2, p. 233–268, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 29.

23 ASHTEKAR, A. Loop quantum cosmology: an overview. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 41, n. 4, p. 707–741, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 18, 29 e 36.

24 ASHTEKAR, A. An introduction to loop quantum gravity through cosmology. *arXiv preprint gr-qc/0702030*, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 29.

25 SADJADI, H. M. On solutions of loop quantum cosmology. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 73, n. 9, p. 1–8, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 18, 37, 45 e 46.

26 SILVA, C. On the holographic basis of loop quantum cosmology. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 78, n. 5, p. 1–9, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 18, 29, 36 e 49.

27 EINSTEIN, A. Erklarung der perihelionbewegung der merkur aus der allgemeinen relativitatstheorie. *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss*, v. 47, p. 831–839, 1915. Citado na página 21.

28 FRIEDMANN, A. Über die krümmung des raumes. *Zeitschrift fur Physik*, v. 10, p. 377–386, 1922. Citado na página 21.

29 BARDEEN, J. M.; CARTER, B.; HAWKING, S. W. The four laws of black hole mechanics. *Communications in mathematical physics*, Springer, v. 31, n. 2, p. 161–170, 1973. Citado na página 21.

30 HOOFT, G. Dimensional reduction in quantum gravity. *arXiv preprint gr-qc/9310026*, 1993. Citado na página 21.

31 SUSSKIND, L. The world as a hologram. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 36, n. 11, p. 6377–6396, 1995. Citado na página 21.

32 BOUSSO, R. The holographic principle for general backgrounds. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 17, n. 5, p. 997, 2000. Citado na página 21.

33 BOUSSO, R. The holographic principle. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 74, n. 3, p. 825, 2002. Citado na página 21.

34 UNRUH, W. G. Notes on black-hole evaporation. *Physical Review D*, APS, v. 14, n. 4, p. 870, 1976. Citado na página 21.

35 BAK, D.; REY, S.-J. Cosmic holography+. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 17, n. 15, p. L83, 2000. Citado na página 23.

36 HAYWARD, S. A.; MUKOHYAMA, S.; ASHWORTH, M. Dynamic black-hole entropy. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 256, n. 5-6, p. 347–350, 1999. Citado na página 23.

37 HAYWARD, S. A. Unified first law of black-hole dynamics and relativistic thermodynamics. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 15, n. 10, p. 3147–3162, Oct 1998. ISSN 1361-6382. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/15/10/017>. Citado na página 23.

38 FROLOV, A. V.; KOFMAN, L. Inflation and de sitter thermodynamics. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2003, n. 05, p. 009, 2003. Citado na página 27.

39 DANIELSSON, U. H. Transplanckian energy production and slow roll inflation. *Physical Review D*, APS, v. 71, n. 2, p. 023516, 2005. Citado na página 27.

40 BOUSSO, R. Cosmology and the s matrix. *Physical Review D*, APS, v. 71, n. 6, p. 064024, 2005. Citado na página 27.

41 BOJOWALD, M. Absence of a singularity in loop quantum cosmology. *Physical Review Letters*, APS, v. 86, n. 23, p. 5227, 2001. Citado na página 29.

42 BOJOWALD, M. Loop quantum cosmology. *Living Reviews in Relativity*, Springer, v. 11, n. 1, p. 1–131, 2008. Citado na página 29.

43 BOJOWALD, M. What happened before the big bang? *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 3, n. 8, p. 523–525, 2007. Citado na página 29.

44 HOSSENFELDER, S.; MODESTO, L.; PRÉMONT-SCHWARZ, I. Emission spectra of self-dual black holes. *arXiv preprint arXiv:1202.0412*, 2012. Citado na página 29.

45 MODESTO, L. Semiclassical loop quantum black hole. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, v. 49, n. 8, p. 1649–1683, 2010. Citado na página 29.

46 MODESTO, L.; PRÉMONT-SCHWARZ, I. Self-dual black holes in loop quantum gravity: Theory and phenomenology. *Physical Review D*, APS, v. 80, n. 6, p. 064041, 2009. Citado na página 29.

47 CARR, B.; MODESTO, L.; PRÉMONT-SCHWARZ, I. Generalized uncertainty principle and self-dual black holes. *arXiv preprint arXiv:1107.0708*, 2011. Citado na página 29.

48 SCHWARZSCHILD, K. Über das gravitationsfeld einer kugel aus inkompressibler flüssigkeit nach der einsteinschen theorie. *Sitzungsberichte der königlich preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, p. 424–434, 1916. Citado na página 29.

49 KAMIńSKI, W.; PAWŁOWSKI, T. Loop quantum cosmology evolution operator of an frw universe with a positive cosmological constant. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 81, n. 2, Jan 2010. ISSN 1550-2368. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.81.024014>. Citado na página 36.

50 PAWŁOWSKI, T.; ASHTEKAR, A. Positive cosmological constant in loop quantum cosmology. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 85, n. 6, Mar 2012. ISSN 1550-2368. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.85.064001>. Citado na página 36.

51 BENTIVEGNA, E.; PAWLOWSKI, T. Anti-de sitter universe dynamics in loop quantum cosmology. *Physical Review D*, APS, v. 77, n. 12, p. 124025, 2008. Citado na página 36.

52 PADILLA, A. *Lectures on the Cosmological Constant Problem*. 2015. Citado na página 36.

53 ASTIER, P. et al. The supernova legacy survey: measurement of, and w from the first year data set. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 447, n. 1, p. 31–48, 2006. Citado na página 36.

54 RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, IOP Publishing, v. 116, n. 3, p. 1009, 1998. Citado na página 36.

55 TEGMARK, M. et al. Cosmological parameters from sdss and wmap. *Physical review D*, APS, v. 69, n. 10, p. 103501, 2004. Citado na página 36.

56 PEEBLES, P. J. E.; RATRA, B. The cosmological constant and dark energy. *Reviews of modern physics*, APS, v. 75, n. 2, p. 559, 2003. Citado na página 36.

57 PADMANABHAN, T. Cosmological constant—the weight of the vacuum. *Physics Reports*, Elsevier, v. 380, n. 5-6, p. 235–320, 2003. Citado na página 36.

58 WEINBERG, S. The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 61, p. 1–23, Jan 1989. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.61.1>. Citado na página 36.

59 ASHTEKAR, A.; PAWLOWSKI, T.; SINGH, P. Quantum nature of the big bang: An analytical and numerical investigation. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 73, n. 12, Jun 2006. ISSN 1550-2368. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.73.124038>. Citado na página 36.

60 CHIOU, D.-W.; VANDERSLOOT, K. Behavior of nonlinear anisotropies in bouncing bianchi i models of loop quantum cosmology. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 76, n. 8, Oct 2007. ISSN 1550-2368. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.76.084015>. Citado na página 36.

61 MAŁKIEWICZ, P.; PIECHOCKI, W. Energy scale of the big bounce. *Physical Review D*, APS, v. 80, n. 6, p. 063506, 2009. Citado na página 36.

62 BOJOWALD, M. Consistent loop quantum cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 26, n. 7, p. 075020, 2009. Citado na página 36.

63 DZIERZAK, P. et al. The minimum length problem of loop quantum cosmology. *arXiv preprint arXiv:0810.3172*, 2008. Citado na página 36.

64 WILSON-EWING, E. The matter bounce scenario in loop quantum cosmology. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2013, n. 03, p. 026, 2013. Citado na página 37.

65 SILVA, C. Spin networks and the big bang singularity avoidance in the ads/cft correspondence. *Physical Review D*, APS, v. 102, n. 4, p. 046001, 2020. Citado na página 49.