



SOLUÇÕES DE P -BRANAS E BURACOS NEGROS EM TEORIAS DE SUPERGRAVIDADE

Édyo Ribeiro de Melo¹, Francisco de Assis de Brito²

RESUMO

Este trabalho teve o objetivo de investigar soluções tipo buraco negro via equações de primeira ordem, considerando inicialmente a solução de vácuo na qual apenas o campo gravitacional desempenha um papel significativo. Em Física de Altas Energias, as teorias de buracos negros em supergravidade desempenham um papel fundamental para a análise e a compreensão da gravidade quântica. Sendo assim, utilizou-se para tais fins, uma solução geral obtida para situações envolvendo buracos negros estáticos, dotados de massa e sem carga elétrica. Verificou-se que o potencial escalar $V(f)$ encontrado via solução geral, dado em termos do superpotencial W , assumiu formas distintas para diferentes valores do parâmetro α presente na expressão de f , em especial, para valores de $\alpha \leq -1$, tendo em vista que para este caso obteve-se gráficos que descrevem transições de fase de primeira e segunda ordem.

Palavras-chave: campos escalares, superpotencial

P-BRANES AND BLACK HOLES SOLUTIONS IN SUPERGRAVITY THEORIES

ABSTRACT

The present work aimed at to investigate solutions of black hole type via equations of first order considering firstly the vacuum solution in which only the gravitational field plays a significant role. In High Energy Physics, the black holes theories in supergravity play a key role in the analysis and understanding of quantum gravity. Thus, a general solution obtained for solving situations involving static black holes with mass and no electric charge was used. It was found that the scalar potential $V(f)$ found via general solution, given in terms of superpotencial W , took different forms for different values of the parameter α present in the f term, mainly for values of $\alpha \leq -1$, taking into account that for this case graphs that describe the phase transitions of first and second order were obtained.

Keywords: scalars fields, superpotencial

INTRODUÇÃO

O estudo das soluções tipo buraco negro em teorias que envolvem a supersimetria representa um papel importante na compreensão da gravitação quântica, já que, a física oriunda dessas soluções abrange desde a dualidade gauge/gravidade até o mundo brana. Muitas Teorias de Campos, mesmo ao nível clássico, podem apresentar características interessantes, pois uma teoria de campos escalares pode ser analisada como sendo o setor escalar de uma teoria de campos do Modelo Padrão com a simetria $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, em que considera-se somente o campo escalar e seu potencial com uma certa simetria.

¹ Aluno de Curso de Física, Unidade Acadêmica de Física, UFPG, Campina Grande, PB, E-mail: edyporibeirodemelo@hotmail.com

² Físico, Professor Doutor, Unidade Acadêmica de Física, UFPG, Campina Grande, PB, E-mail: fabrito@df.ufcg.edu.br

Tal t3pico de estudo ocupa uma posi33o de destaque em F3sica de Altas Energias, sobretudo pela possibilidade de produ33o de efeitos de mini-buracos negros nos grandes colisores de h3adrons (como est3 previsto para ocorrer em breve no LHC, situado em Genebra, na Su33a).

Um exemplo relevante a ser analisado na a33o que descreve a din3mica de campos bos3nicos e fermi3nicos de tal forma que possa ser generalizada para uma teoria de supergravidade em quatro dimens3es 3 dada por:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{R}{8\pi G} + L \right), \quad (1)$$

onde L representa a lagrangeana dada por:

$$L = i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi + W_{\phi\phi} \bar{\Psi}\Psi + W_{XX} \bar{\Psi}\Psi + W_{\phi X} \bar{\Psi}\Psi + \frac{1}{2} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi + \frac{1}{2} \partial_\sigma X \partial^\sigma X - V(\phi, X) - \frac{1}{4} F_{\sigma\nu} F^{\sigma\nu} - J^\sigma A_\sigma, \quad (2)$$

onde $J^\sigma = \bar{\Psi}\gamma^\sigma \Psi$ 3 a corrente fermi3nica. Todavia, como os campos escalares s3o reais, desprezamos os termos de conex3o de spin e a corrente bos3nica escalar.

Desta forma, o potencial $V(\phi, X)$ ser3 dado por:

$$V(\phi, X) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial X} \right)^2. \quad (3)$$

As equa33es de movimento para campos escalares podem ser reduzidas a equa33es de primeira ordem da seguinte forma:

$$\frac{d\phi}{dx} = W_\phi, \quad (4)$$

$$\frac{dX}{dx} = W_X. \quad (5)$$

Para esta an3lise as solu33es devem englobar m3tricas do tipo:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 - \frac{1}{f(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2. \quad (6)$$

No limite aonde apenas o campo gravitacional 3 n3o nulo, obt3m-se mediante as equa33es de Einstein, a seguinte equa33o:

$$\frac{f'(r)}{r^2} [f'(r)r - 1 + f(r)] = 0 \quad (7)$$

Para $r, f(r) \neq 0$, temos:

$$f'(r) = \frac{1-f(r)}{r} \quad \text{ou} \quad \frac{rdf(r)}{dr} = 1 - f(r). \quad (8)$$

Nesta situa33o, pode-se fazer a seguinte identifica33o:

$$r \frac{d}{dr} = \frac{d}{dx}, \quad (9)$$

Assim:

$$\frac{df(x)}{dx} = W_f. \quad (10)$$

Aonde $W_f = \frac{dW}{df}$. Desta maneira, nota-se que esta equa33o 3 equivalente a uma teoria de campos escalares com o superpotencial sendo correspondente a integral de W_f .

Partindo dessas equa33es encontra-se a solu33o de buraco negro de Schwarzschild dada por:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (11)$$

onde M é a massa do buraco negro.

MATERIAL E MÉTODOS

Este trabalho foi desenvolvido no Departamento de Física no Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal de Campina Grande – PB.

Material

Toda a pesquisa ocorreu através de seminários semanais, nos quais, o orientador expunha novas questões pertinentes à abordagem adotada, utilizando para este fim, além da lousa e pincéis, alguns programas computacionais como o Maple, Mathematica e o Winplot.

Métodos

Para este trabalho foi realizada a generalização da solução de buraco negro de Schwarzschild, gerando portanto, um novo e mais abrangente campo para a análise das questões aqui estudadas.

Procedimento para obtenção da solução geral

Levando em consideração que a métrica usada neste caso é aquela expressa pela equação (6), utilizou-se o Maple para escrever $f(r)^\alpha$, onde α é o parâmetro escolhido para realizar-se a generalização e obteve-se o seguinte resultado:

$$\left[\frac{f(r)^\alpha (\alpha f(r)^\alpha \left(\frac{d}{dr} f(r) \right) r - f(r) + f(r)^\alpha f(r))}{f(r)r^2}, 0, 0, 0 \right] \quad (12)$$

$$\left[0, - \frac{\alpha f(r)^\alpha \left(\frac{d}{dr} f(r) \right) r - f(r) + f(r)^\alpha f(r)}{f(r)f(r)^\alpha r^2}, 0, 0 \right] \quad (13)$$

$$\left[0, 0, - \frac{1}{2} \frac{f(r)^\alpha \alpha \left(r \alpha \left(\frac{d}{dr} f(r) \right)^2 + \left(\frac{d^2}{dr^2} f(r) \right) f(r) r - r \left(\frac{d}{dr} f(r) \right)^2 + 2f(r) \left(\frac{d}{dr} f(r) \right) \right) r}{f(r)^2}, 0 \right] \quad (14)$$

$$\left[0, 0, 0, - \frac{1}{2} \frac{\text{sen}(\text{th})^2 f(r)^\alpha \alpha \left(r \alpha \left(\frac{d}{dr} f(r) \right)^2 + \left(\frac{d^2}{dr^2} f(r) \right) f(r) r - r \left(\frac{d}{dr} f(r) \right)^2 + 2f(r) \left(\frac{d}{dr} f(r) \right) \right) r}{f(r)^2} \right] \quad (15)$$

As situações descritas em (12), (13), (14) e (15) representam as quatro linhas de uma matriz identicamente nula, obtida via equações de Einstein. Assim, tomando a situação (12) e analisando-a, concluiu-se que:

$$\frac{f(r)^\alpha (\alpha f(r)^\alpha \left(\frac{d}{dr} f(r) \right) r - f(r) + f(r)^\alpha f(r))}{f(r)r^2} = 0 \quad (16)$$

Desenvolvendo a equação acima, ficou-se com:

$$r \frac{df}{dr} = \frac{1}{\alpha} (f^{1-\alpha} - f), \quad (17)$$

Mas, mediante a identidade expressa em (9), a equação (17) se torna:

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\alpha} (f^{1-\alpha} - f), \quad (18)$$

Diante dessa equação diferencial, realizou-se uma separação de variáveis:

$$\frac{df}{(f^{1-\alpha} - f)} = \frac{dx}{\alpha} \quad (19)$$

Integrando-se ambos os membros da equação (19), chegou-se à expressão:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\ln(f)}{\alpha} - \ln(f) - \frac{\ln(-e^{((1-\alpha)\ln(f))} + f)}{\alpha} \quad (20)$$

Mas, pela identidade (9), observa-se também que:

$$x = \ln(r) + \text{constante} \quad (21)$$

Logo, substituindo (21) em (20) e desenvolvendo a equação resultante:

$$\frac{\ln(r)}{\alpha} = \frac{\ln(f)}{\alpha} - \ln(f) - \frac{\ln(-e^{((1-\alpha)\ln(f))} + f)}{\alpha} - \frac{\text{constante}}{\alpha} \quad (22)$$

Após algumas manipulações algébricas, obteve-se:

$$e^{-\ln(r)} = e^{-\ln(f)} e^{\alpha \ln(f)} e^{\ln(-e^{((1-\alpha)\ln(f))} + f)} e^{-\text{Constante}} \quad (23)$$

Assim:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{f} f^{\alpha} (-e^{-\ln(f)} e^{-\alpha \ln(f)} + f) e^{-\text{Constante}} \quad (24)$$

Simplificando a expressão dada em (24), segue:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{f} f^{\alpha} [-f(f^{-\alpha}) + f] e^{-\text{Constante}} \quad (25)$$

Considerando $e^{-\text{Constante}} = A$ e efetuando-se as operações necessárias, a equação (25) resultou em:

$$\frac{1}{r} = \frac{(-1+f^{\alpha})}{A} \quad (26)$$

Rearranjando convenientemente os termos da equação (26), determinou-se que:

$$f^{\alpha} = 1 + \frac{A}{r} \quad (27)$$

Esta é, portanto, a solução de buraco negro tipo Schwarzschild generalizada. É importante observar que para $\alpha = 1$, recai-se novamente na equação (11), isto é:

$$f = 1 + \frac{A}{r} \quad (28)$$

Aonde A é uma constante a ser determinada de modo que as equações (28) e (11) são equivalentes e f é uma função de r, podendo assim ser escrita também como f(r).

Percebe-se assim que a solução obtida por Schwarzschild trata-se apenas de um caso particular da equação (27). Pode-se ainda, considerando as situações expressas em (12), (13), (14) e (15) obter uma equação análoga à descrita em (8), todavia, neste caso a relação obtida envolverá o caso geral, ou seja, a nova expressão terá termos englobando $f(r)^{\alpha}$. Por simplificação escolheu-se a situação descrita em (12) e efetuou-se o seguinte procedimento:

$$\frac{f(r)^{\alpha} (\alpha f(r)^{\alpha} \left(\frac{d}{dr} f(r)\right) r - f(r) + f(r)^{\alpha} f(r))}{f(r)r^2} = 0 \quad (29)$$

Observando-se que a equação (29) é igual à expressa em (16). Desenvolvendo, obtém-se:

$$f(r)^{\alpha} \alpha \left(\frac{d}{dr} f(r)\right) r - f(r) + f(r)^{\alpha} f(r) = 0 \quad (30)$$

Realizando algumas simplificações, verificou-se que a equação (30) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$r \alpha f(r)^{\alpha-1} \left(\frac{d}{dr} f(r)\right) = 1 - f(r)^{\alpha} \quad (31)$$

Mas:

$$\frac{df(r)^\alpha}{dr} = \alpha \left(\frac{df(r)}{dr}\right) f(r)^{\alpha-1} \quad (32)$$

Fazendo uso da identidade (32), a expressão (31) ficou:

$$\frac{r df(r)^\alpha}{dr} = 1 - f(r)^\alpha \quad (33)$$

Assim, encontrou-se uma relação similar a (8), porém, a equação (33) é geral, englobando também a expressão (8) obtida. Usando estas novas relações, a pesquisa direcionou-se para a análise gráfica e suas possíveis conseqüências, tendo em vista que:

$$r \frac{df}{dr} = \frac{\partial W}{\partial f} \quad (34)$$

No entanto:

$$V(f) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial f} \right)^2 \quad (35)$$

Logo, usando a relação dada em (31):

$$r \frac{df(r)}{dr} \frac{1 - f(r)^\alpha}{\alpha f(r)^{\alpha-1}} \quad (36)$$

Por fim:

$$V(f) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - f(r)^\alpha}{\alpha f(r)^{\alpha-1}} \right)^2 \quad (37)$$

Através desse potencial geral realizaram-se as análises que constituem o alvo do projeto.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Mediante o uso do potencial (37), foi possível construir gráficos relativos aos diferentes valores do parâmetro α , sendo estes nesta abordagem pertencentes ao domínio dos números reais. Para tal tarefa utilizou-se os programas Winplot e Maple, alternadamente, visando obter em cada situação a melhor representação possível de modo a ampliar as prováveis características físicas inerentes. As Figuras 1 a 5 abaixo mostram os gráficos do potencial (37) em função de f para alguns valores positivos do parâmetro α iguais ou maiores do que 1.

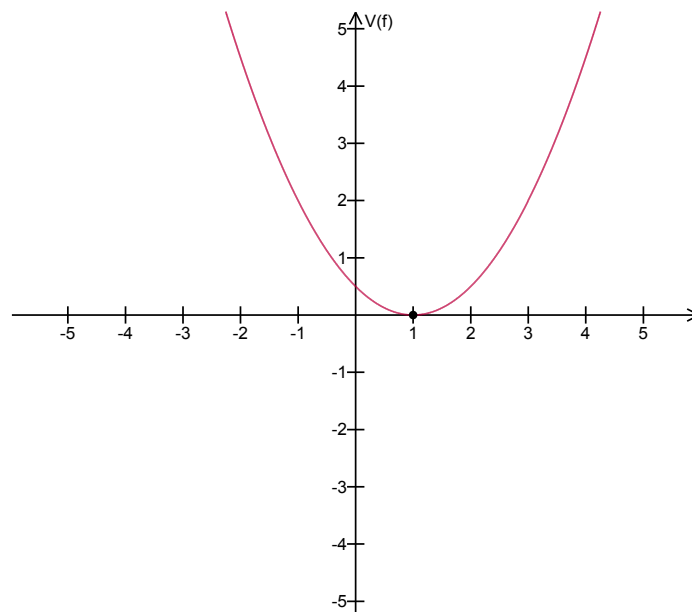


Figura 1. Gráfico gerado pelo programa Winplot para o potencial $V(f)$ em função de f , no caso em que $\alpha = 1$.

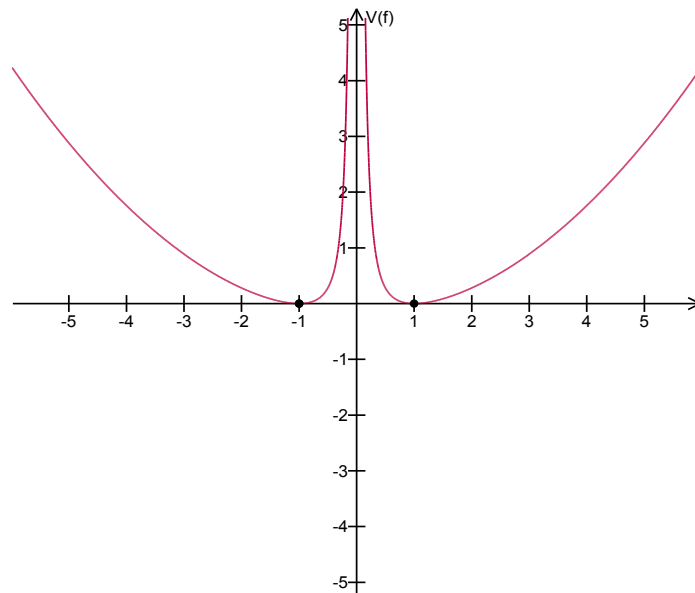


Figura 2. Gráfico gerado pelo programa Winplot para o potencial $V(f)$ em função de f , no caso em que $\alpha = 2$.

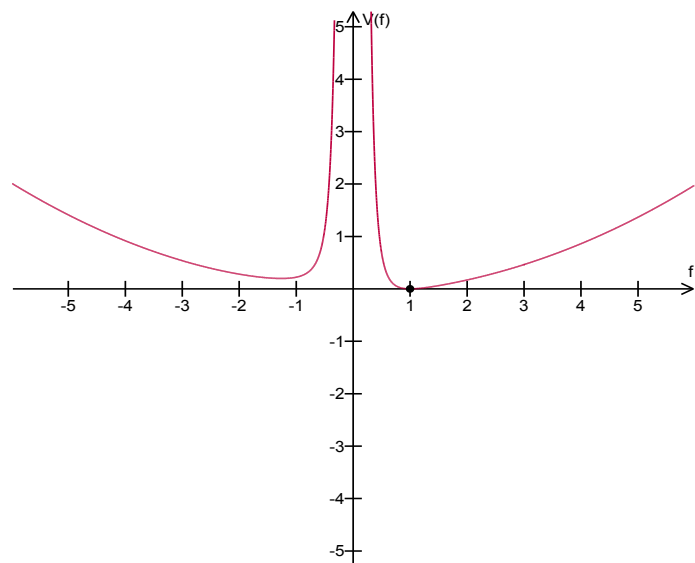


Figura 3. Gráfico gerado pelo programa Winplot para o potencial $V(f)$ em função de f , no caso em que $\alpha = 3$.

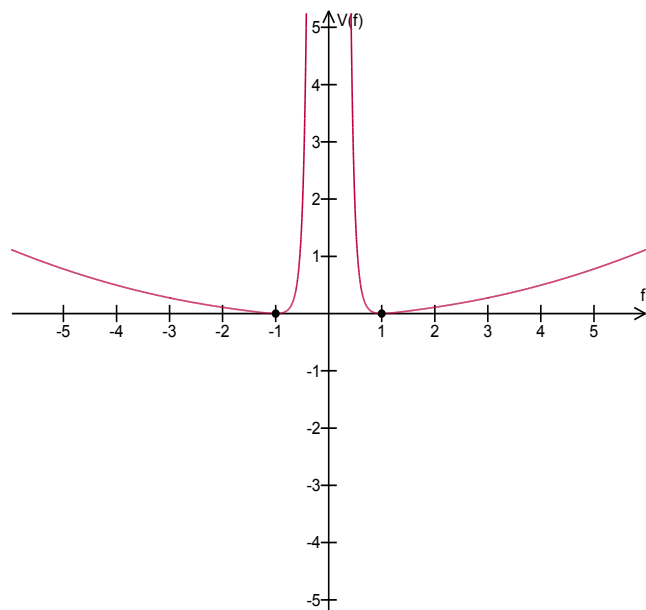


Figura 4. Gráfico gerado pelo programa Winplot para o potencial $V(f)$ em função de f , no caso em que $\alpha = 4$.

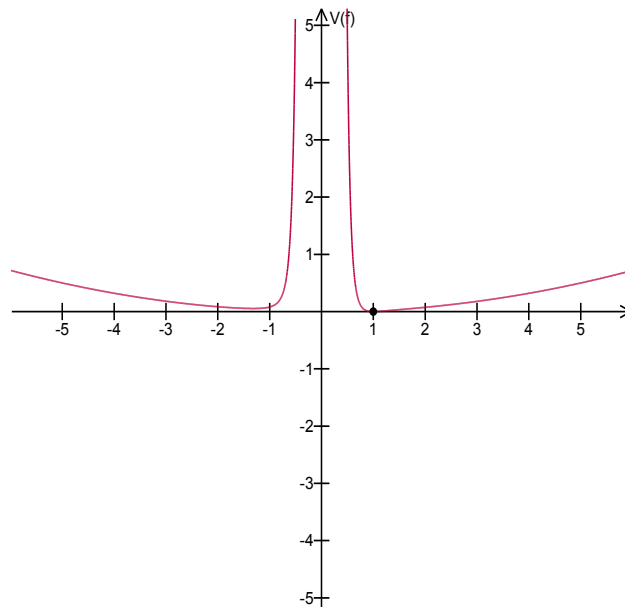


Figura 5. Gráfico gerado pelo programa Winplot para o potencial $V(f)$ em função de f , no caso em que $\alpha = 5$.

Após a construção dos gráficos apresentados acima foi realizada uma análise sobre cada situação. Para $\alpha = 1$, a relação dada entre $V(f)$ e f se mostrou equivalente ao que seria encontrado se o potencial $V(f)$ fosse obtido via equação (10), ou seja, considerando-se apenas o caso particular representado pela solução de buraco negro tipo Schwarzschild, ressaltando-se que para este caso, quando $f = 1$, a expressão dada por (37) é nula. Para $\alpha = 2$, obteve-se dois pontos onde a função $V(f)$ se anula, isto é, determinaram-se dois zeros da função, $f = 1$ e $f = -1$, observando que a função se torna infinita para valores cada vez menores de f , tanto para valores positivos quanto negativos. Na situação $\alpha = 3$, constatou-se apenas um zero da função ($f = 1$) e um comportamento similar quando $\alpha = 2$, salvo que para f negativo, $V(f)$ não toca no eixo das abscissas. Quando $\alpha = 4$, encontrou-se novamente $f = 1$ e $f = -1$ como os valores para o qual $V(f)$ é nula e o comportamento foi similar ao obtido para $\alpha = 2$. Por fim, no caso $\alpha = 5$ verificou-se também apenas um zero da função ($f = 1$) e situação correspondente foi praticamente análoga a encontrada para $\alpha = 3$. Percebeu-se então uma tendência no comportamento do potencial $V(f)$ expresso em (37) para valores inteiros pares e ímpares de α . Continuando com o estudo plotou-se os gráficos referentes a alguns valores fracionários de α , de maneira que $0 < \alpha < 1$. Tais situações são expostas nas Figuras 6, 7 e 8, a seguir:

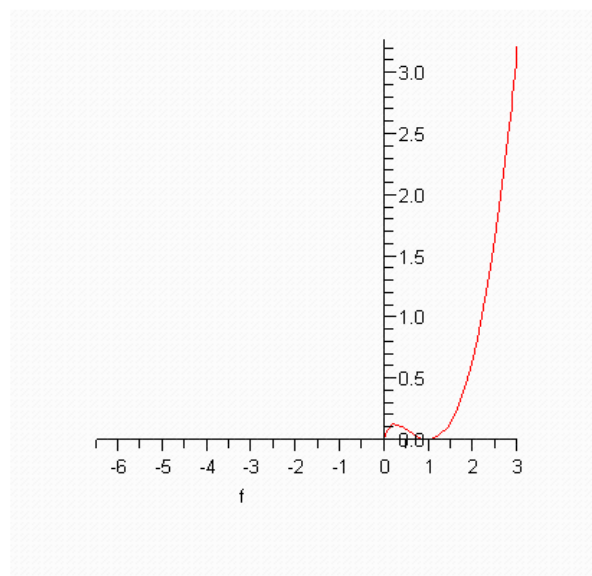


Figura 6. Gráfico gerado pelo programa Maple para o potencial $V(f)$ em função de f , no caso em que $\alpha = \frac{1}{2}$.

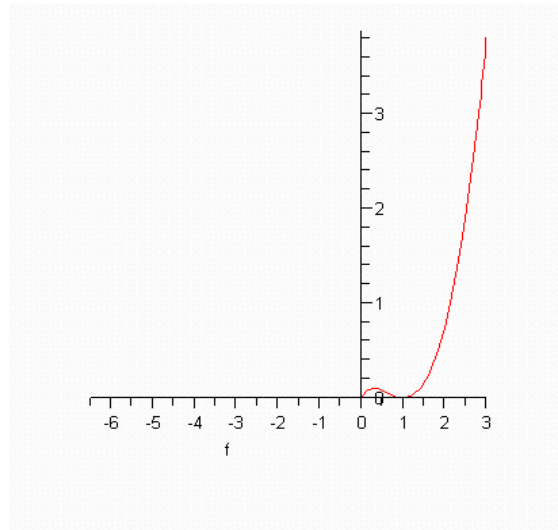


Figura 7. Gráfico gerado pelo programa Maple para o potencial $V(f)$ em função de f , no caso em que $\alpha = \frac{1}{3}$.

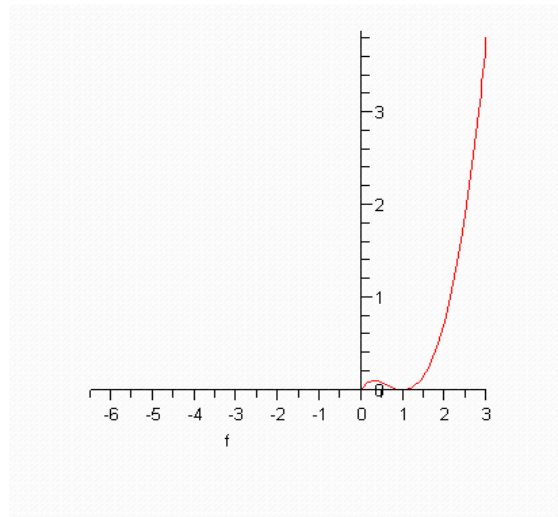


Figura 8. Gráfico gerado pelo programa Maple para o potencial $V(f)$ em função de f , no caso em que $\alpha = \frac{1}{4}$.

Considerou-se também, o caso no qual α assumia valores fracionários e negativos, de sorte que $-1 < \alpha < 0$. Estas situações estão representadas nas figuras 9 e 10, abaixo:

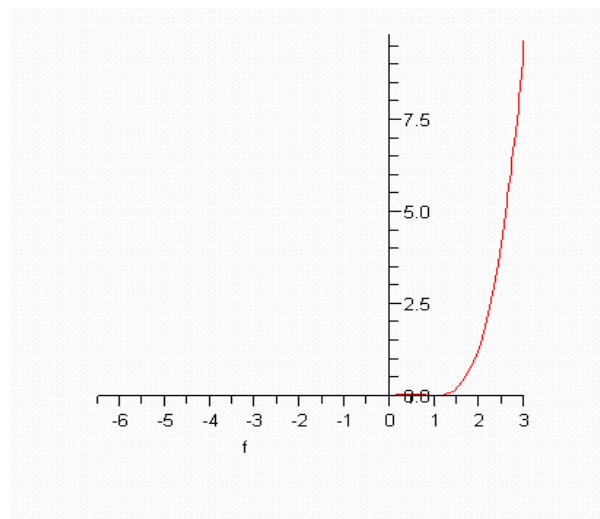


Figura 9. Gráfico gerado pelo programa Maple para o potencial $V(f)$ em função de f , no caso em que $\alpha = -\frac{1}{2}$.

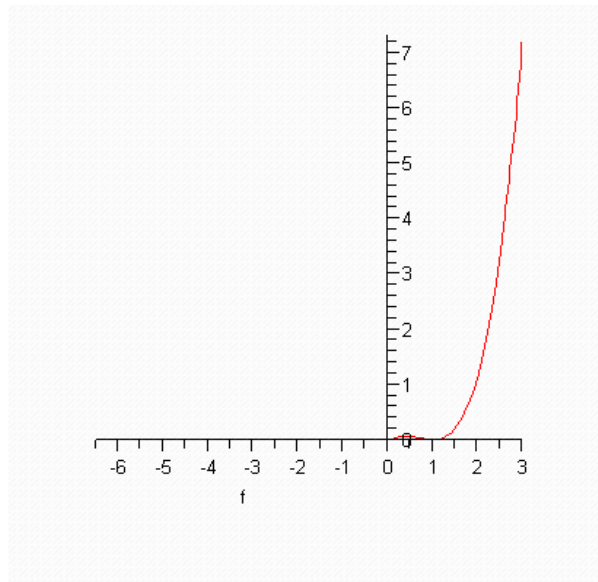


Figura 10. Gráfico gerado pelo programa Maple para o potencial $V(f)$ em função de f , no caso em que $\alpha = -\frac{1}{4}$.

Tendo em mãos estes resultados para os casos $0 < \alpha < 1$ e $-1 < \alpha < 0$, efetuou-se uma nova análise para cada situação. Para α fracionário e localizado entre 0 e 1, observou-se a presença de dois valores para os quais a função potencial $V(f)$ é nula, ou seja, constatou-se dois zeros da função, sendo estes por sua vez $f = 1$ e $f = 0$; a diferença mais notável entre os gráficos desse caso está na determinação do máximo compreendido entre $f = 1$ e $f = 0$, pois fora desse intervalo e sendo f positivo, o comportamento descrito nas Figuras 6, 7 e 8 são similares. E quando α assumiu valores fracionários, tal que $-1 < \alpha < 0$, foi observado novamente apenas dois zeros da função, isto é $f = 0$ e $f = 1$, assim como foi visto nos casos relativos às Figuras 6,7 e 8, todavia, para esta situação constatou-se em ambos os gráficos uma considerável diferença no que se refere ao máximo compreendido entre os dois zeros ($f = 0$ e $f = 1$), já que, nestas circunstâncias a curva é quase imperceptível, embora o comportamento fora desse intervalo seja parecido com o caso $0 < \alpha < 1$. Em seguida, plotaram-se novas situações, sendo que dessa vez, para o parâmetro $\alpha \leq -1$ e os resultados obtidos são ilustrados nas Figuras 11, 12, 13 e 14 abaixo:

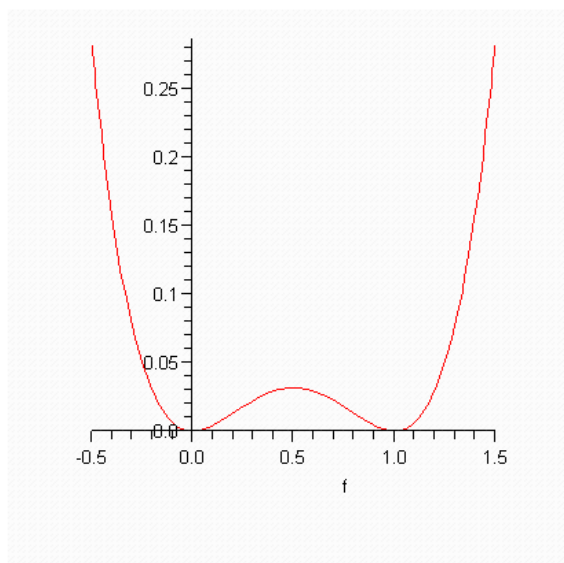


Figura 11. Gráfico gerado pelo programa Maple para o potencial $V(f)$ em função de f , no caso em que $\alpha = -1$.

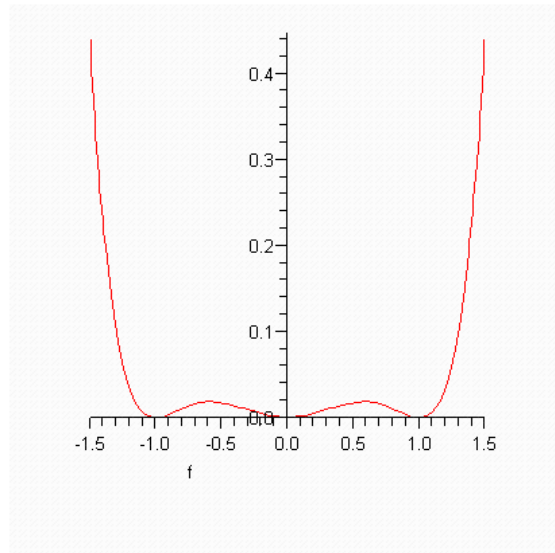


Figura 12. Gráfico gerado pelo programa Maple para o potencial $V(f)$ em função de f , no caso em que $\alpha = -2$.

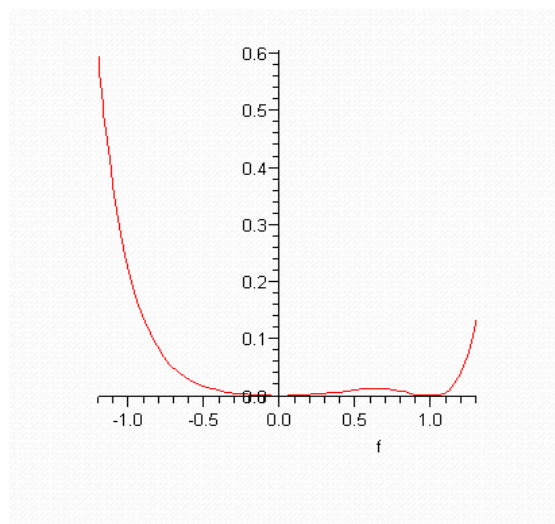


Figura 13. Gráfico gerado pelo programa Maple para o potencial $V(f)$ em função de f , no caso em que $\alpha = -3$.

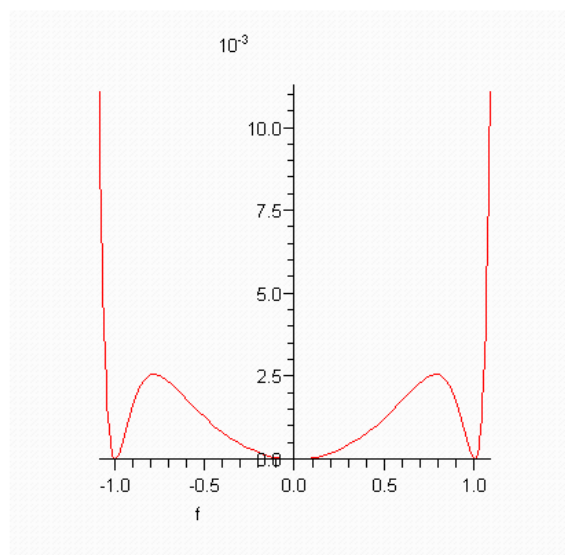


Figura 14. Gráfico gerado pelo programa Maple para o potencial $V(f)$ em função de f , no caso em que $\alpha = -10$.

Por fim, utilizou-se o Maple para construir um gráfico que expusesse a relação entre os máximos da função potencial $V(f)$ e o parâmetro α , de modo que $-10 \leq \alpha \leq -1$. Essa situação é mostrada na figura 15, a seguir:

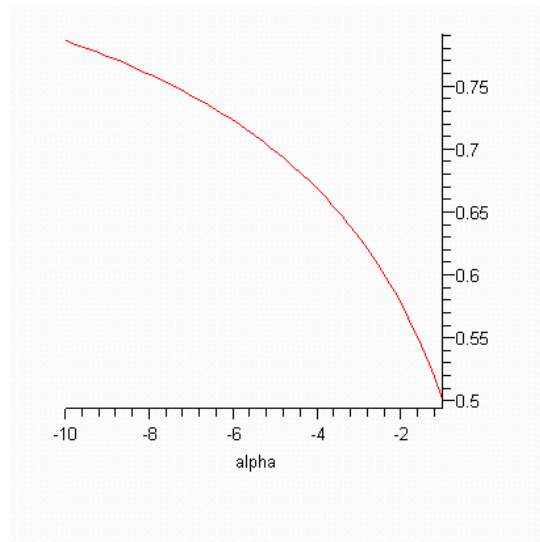


Figura 15. Gráfico gerado pelo programa Maple para os máximos de f em função do parâmetro de generalização α compreendido no intervalo $-10 \leq \alpha \leq -1$.

Na situação $\alpha = -1$, obtiveram-se dois valores no qual $V(f)$ é nula, isto é, $f = 1$ e $f = 0$, contudo a característica mais interessante percebida remete-se ao fato de que a Figura 11 descreve uma transição de fase de segunda ordem, ou seja, o fenômeno conhecido em Termodinâmica como sublimação, sabendo que nestas condições, a transição entre sólido e gás é descontínua, uma vez que envolve calor latente. Quando $\alpha = -2$, determinaram-se três valores para f que anulam a função $V(f)$, portanto, encontrou-se para esta situação três zeros da função, no entanto, assim como no caso $\alpha = -1$, a importância da Figura 12 consiste na situação física descrita, isto é, para $\alpha = -2$ observou-se a representação gráfica de uma transição de fase de primeira ordem, como por exemplo, a transição sólido-líquido-gás de um dado sistema. Para $\alpha = -3$, obteve-se uma situação ligeiramente parecida com a descrita na Figura 11, todavia, o valor máximo determinado para $V(f)$ entre $f = 1$ e $f = 0$ é consideravelmente distinto do caso em que $\alpha = -1$. No caso, $\alpha = -10$, encontrou-se um comportamento análogo ao obtido para $\alpha = -2$ com a diferença mais relevante na determinação da posição dos máximos compreendidos entre $f = -1$ e $f = 0$ e entre $f = 0$ e $f = 1$. Tais resultados levaram a uma investigação matemática com o intuito de verificar os possíveis valores para os quais a função potencial descrita por (37) se torna nula. A abordagem matemática e os resultados encontrados são mostrados abaixo:

Caso 1:

Para que (37) seja nula, faz-se necessário que $W_f = 0$, então:

$$\frac{f}{f^\alpha} - \frac{f}{\alpha} = 0 \tag{38}$$

Assumindo $f \neq 0$ e $\alpha > 0$, determinou-se:

$$f^\alpha = 1 \tag{39}$$

Logo, obteve-se que para $f = 1$, a função $V(f)$ assume valor nulo como já havia sido ilustrado graficamente.

Caso 2:

Analisando em seguida a equação (38) simplificada, isto é,

$$\frac{f}{f^\alpha} - f = 0 \tag{40}$$

tornou-se evidente que para $\alpha \geq 1$, $f = 0$ não é solução, entretanto para $\alpha \leq -1$ e adotando $\alpha = -|\beta|$, obteve-se:

$$f^{|\beta|} - f = 0 \quad (41)$$

Desta forma, verificou-se que para esta situação $f = 0$ é solução, ou seja, $f = 0$ é um zero da função. A abordagem anterior também permitiu concluir que $f = 0$ também é solução no caso em que $-1 < \alpha < 0$.

Caso 3:

Quando $f \neq 0$, constatou-se que a expressão (41) se tornaria da seguinte forma:

$$f^{|\beta|} - 1 = 0 \quad (42)$$

Com isso, verificou-se que $f = \pm 1$, no caso em que o expoente $|\beta|$ for um número par, conforme ilustrado nas Figuras 2 e 4.

CONCLUSÕES

Diante dos resultados obtidos nesta pesquisa teórica, onde se analisou os aspectos de uma solução geral para o buraco negro tipo Schwarzschild conclui-se que:

I. As equações (27), (33) e (37) constituem um conjunto de expressões que caracterizam uma generalização da solução de Schwarzschild.

II. Os possíveis zeros da função potencial $V(f)$ são: $f = -1$, $f = 0$ e $f = 1$.

III. Para $\alpha \leq -1$, a equação (37) em função de f descreve transições de fase de primeira e segunda ordem que se constituem por sua vez de importância fundamental para a compreensão da Termodinâmica e da Mecânica Estatística.

AGRADECIMENTOS

Ao CNPq pela bolsa de Iniciação Científica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. A. Vilenkin and E.P.S. Shellard, "Cosmic strings and other topological defects" (Cambridge University Press, Cambridge/UK, 1994).
2. M. Cvetič, "Properties of Black holes in toroidally compactified string theory" , Nucl. Phys. Proc. Supl. 56B, 1 (1997).