PIBIC/CNPq/UFCG-2008

ANÁLISE GEOMÉTRICA E GEOMETRIA DIFERENCIAL GLOBAL DE SUPERFÍCIES

Bruno Fontes de Sousa[1], **Vanio Fragoso de Melo**[2]

RESUMO

A Geometria Diferencial estuda objetos de natureza geométrica, por exemplo, curvas e superfícies, utilizando as técnicas da análise, da álgebra linear, entre outras. A Geometria Diferencial clássica engloba o estudo de propriedades geométricas de curvas e superfícies. Essas propriedades podem ser locais, quando se estuda as proximidades (vizinhanças) de um ponto, ou globais, que são propriedades válidas em todos os pontos da superfície.

É possível encontrar aplicações da Geometria diferencial em várias outras áreas, como por exemplo, as engenharias (no estudo da mecânica do contínuo, na teoria da elasticidade, etc.), física (na teoria da relatividade) e computação (na computação gráfica e no processamento de imagens), entre outras.

Em nosso trabalho estudamos algumas propriedades intrínsecas às superfícies, utilizando-se de ferramentas da análise e da álgebra linear.

Palavras-chave: geometria diferencial, fórmulas de Minkowski, teorema de Hadamard, superfícies convexas.

GEOMETRIC ANALYSIS AND DIFFERENTIAL GEOMETRY GLOBAL OF SURFACES

ABSTRACT

Classical differential geometry studies the geometrical properties of plane and spatial curves and surfaces using the techniques from linear algebra, calculus, analyses and topology, among others. These geometrical properties may be local, i. e, in the neighborhood of a point, or global, when the object of study is considered as a whole.

Differential geometry has important applications in various areas of science and engineering like the theory of elasticity, relativity theory, graphic computation and imaging processing, for example.

In our work we study some intrinsic properties of surfaces through the techniques of analysis and linear algebra.

Keywords: differential geometry, Minkowski formulae, theorem of Hadamard, convex surfaces.

INTRODUÇÃO

Neste projeto fizemos um estudo de propriedades globais intrínsecas às superfícies. As propriedades globais são propriedades válidas na superfície como um todo e não apenas numa vizinhança de um ponto da mesma. Em um primeiro momento, foi feito o estudo fazendo uso do livro **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies,** M. P. DO CARMO, onde estudamos o conceito de superfície abstrata e alguns resultados globais como a rigidez da esfera, superfícies completas e o teorema de Hopf-Rinow, primeira e segunda variações do comprimento de arco, e o teorema de Bonnet. Num segundo momento, o estudo foi realizado fazendo uso do livro do autor LUIS ALÍAS, intitulado **Análises Geométrico y Geometría Global das Superfícies: Una Introducción Elemental,** onde é utilizada uma abordagem analítica e mais enxuta

[1] Aluno do Curso de Bacharelado em Matemática, Unidade Acadêmica de Matemática e Estatística, UFCG, Campina Grande, PB, E-mail: brunofs@dme.ufcg.edu.br.

[2] Prof. Doutor, Unidade Acadêmica de Matemática e Estatística, UFCG, Campina Grande, PB, E-mail: vanio@dme.ufcg.edu.br.

para obtenção dos resultados globais intrínsecos à superfície, tais como, a existência de pontos elípticos, o teorema de Hadamard e as fórmulas de Minkowski.

Este artigo apresenta o conteúdo estudado na segunda fase do projeto de iniciação científica **"análise geométrica e geometria diferencial global de superfícies"**, correspondente ao período de Fevereiro de 2009 à Julho de 2009. Serão apresentados os pré-requisitos de análise na superfície como gradiente, laplaciano, divergente, hessiano e etc. Em seguida, mostraremos o teorema de Hadamard e as fórmulas de Minkowski. Mostraremos duas formas distintas de demonstração da segunda fórmula de Minkowski.

1. Notações e primeiras definições.

O símbolo $\Sigma \subset I\!R^3$ denotará uma superfície regular conexa do espaço euclidiano $I\!R^3$. Como sabemos a restrição da métrica euclidiana ao plano tangente da superfície induz um produto escalar (ou produto interno) sobre cada plano tangente, no sentido de que, para cada ponto $p \in \Sigma$, a aplicação

$$\langle , \rangle_p : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \to I\!R$$

sobre $T_p\Sigma$, que denota o plano tangente a Σ em p, é definida por

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_p = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle, \in T_p\Sigma,$$

é uma aplicação bilinear simétrica e definida positiva (isto é, $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_p > 0,\ \forall \vec{v} \in T_p\Sigma - \{\vec{0}\}$) sobre $T_p\Sigma$. Esta aplicação é chamada de *primeira forma fundamental* da superfície.

Suponhamos que a superfície é *orientável* e seja N sua *aplicação de Gauss*. Isto é, N é um campo normal unitário definido sobre a superfície, de modo que, para cada ponto $p \in \Sigma$, o plano tangente

$$T_p\Sigma = \left\{ \vec{v} \in I\!R^3 : \langle \vec{v}, N(p) \rangle = 0 \right\}.$$

Como $|N(p)| = 1,\ \forall p \in \Sigma$ então N pode ser vista como uma aplicação diferenciável $N : \Sigma \to S^2$, onde

$$S^2 = \left\{ x \in I\!R^3 : |x|^2 = 1 \right\}.$$

Ou seja, S^2 é a esfera unitária de $I\!R^3$ centrada na origem de $I\!R^3$. O conjunto $N(\Sigma)$, a imagem esférica da superfície, contém todas as direções perpendiculares à superfície em algum ponto dela.

Em cada ponto $p \in \Sigma$, a derivada da aplicação de Gauss com respeito a um vetor $\vec{v} \in T_p\Sigma$ é definida por

$$dN_p(\vec{v}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} N(\alpha(t))$$

onde $\alpha : I \to \Sigma$ é qualquer curva parametrizada em Σ com $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = \vec{v}$. Como N é unitário temos

$$1 = |N(p)|^2 = \langle N(p), N(p) \rangle \Rightarrow 0 = 2\langle dN_p(\vec{v}), N(p) \rangle \Rightarrow \langle dN_p(\vec{v}), N(p) \rangle = 0.$$

A aplicação $A_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$ definida por

$$A_p(\vec{v}) = -dN_p(\vec{v})$$

chama-se o *endomorfismo (ou o operador) de Weingarten*.

O operador de Weingarten é auto-adjunto (com respeito à primeira forma fundamental). Seus autovalores, que denotaremos por $k_1(p)$ e $k_2(p)$, definem as *curvaturas principais* da superfície no ponto p, e as direções determinadas pelos autovetores, e_1 e e_2, associados a $k_1(p)$ e $k_2(p)$, são chamadas de *direções principais* da superfície no ponto p. Geometricamente, para cada $\vec{v} \in T_p\Sigma$, com $|\vec{v}| = 1$, o valor

$$k(\vec{v}) = \langle A_p(\vec{v}), \vec{v} \rangle$$

representa a curvatura da curva obtida ao cortar a superfície Σ pelo plano normal que passa por p e é gerado por $\vec{v}$ e $N(p)$. Esta curva é chamada de *seção normal* determinada na direção de $\vec{v}$. O valor $k(\vec{v})$ é chamado de *curvatura normal* da superfície em p, na direção de $\vec{v}$. As curvaturas principais são exatamente os valores máximo e mínimo das curvaturas normais em cada ponto da superfície. Diz-se que um ponto $p \in \Sigma$ é um *ponto umbílico* da superfície se as curvaturas principais são iguais em cada ponto dela. Isso equivale a dizer que a curvatura normal $k(\vec{v})$ é constante, para todo $\vec{v} \in T_p\Sigma$.

O traço de A_p define a *curvatura média* da superfície, denotada por $H(p)$,

$$H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A_p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2},$$

e o determinante de A_p define a *curvatura de Gauss*, denotada por $K(p)$,

$$K(p) = \det(A_p) = k_1(p)k_2(p).$$

As funções H e K são diferenciáveis sobre a superfície.

Lema 1. *Seja $\Sigma \subset I\!R^3$ uma superfície regular. Para todo ponto $p \in \Sigma$ vale*

$$H^2(p) \geq K(p)$$

e a igualdade se ocorre se, e somente se, o ponto p é umbílico.

A demonstração é imediata da expressão

$$H^2(p) - K(p) = \frac{\left(k_1(p) - k_2(p)\right)^2}{4} \geq 0$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, $k_1(p) = k_2(p)$.

2. Derivada covariante (ou intrínseca) em uma superfície

Denotaremos por $C^\infty(\Sigma)$ *o conjunto de todas as funções diferenciáveis de* Σ *em* $I\!R$.

Definição 1. Sejam Σ uma superfície, $f \in C^\infty(\Sigma)$ e $v \in T_p\Sigma,$ onde $p \in \Sigma$ é um ponto. A *derivada de* f *com respeito à* v é dada por

$$\vec{v}(f) = df_p(\vec{v}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \left(f(\alpha(t))\right) \in I\!R,$$

onde $\alpha : I \to \Sigma$ é qualquer curva parametrizada em Σ que satisfaz $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = \vec{v}.$

Temos as seguintes propriedades:

$$\begin{array}{ll} \text{(a) } (\vec{v} + \vec{w})(f) = \vec{v}(f) + \vec{w}(f), & \\ \text{(b) } (\lambda\vec{v})(f) = \lambda\vec{v}(f), & \\ \text{(c) } \vec{v}(f + g) = \vec{v}(f) + \vec{v}(g), & \text{(I)} \\ \text{(d) } \vec{v}(fg) = \vec{v}(f)g(p) + f(p)\vec{v}(g), & \end{array}$$

para quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in T_p\Sigma, \lambda \in I\!R$ e $f, g \in C^\infty(\Sigma).$

Um *campo tangente de vetores sobre* Σ é uma aplicação X que associa a cada ponto $p \in \Sigma$ um vetor tangente $X(p) \in T_p\Sigma \subset I\!R^3.$ Trabalharemos com os campos tangentes que são diferenciáveis sobre a superfície $\Sigma,$ no sentido de que a aplicação $X : \Sigma \to I\!R^3$ é diferenciável. Denotaremos por $\chi(\Sigma)$ o conjunto de todos os campos tangentes de vetores diferenciáveis de Σ em $I\!R^3$.

A derivada de um *campo* $X \in \chi(\Sigma)$ com respeito a um vetor $\vec{v} \in T_p\Sigma, p \in \Sigma$ é definida por

$$dX_p(\vec{v}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} X(\alpha(t)) \in I\!R^3,$$

onde $\alpha : I \to I\!R^3$ é qualquer curva parametrizada em Σ com $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = \vec{v}.$

Observe que, em geral, o vetor $dX_p(\vec{v}) \in I\!R^3$ não é necessariamente um vetor de $T_p\Sigma.$

Por isso, para desenvolver um cálculo intrínseco sobre a superfície Σ vamos dar a seguinte definição

Definição 2. A *derivada covariante* do campo de vetores X, com respeito a um vetor $\vec{v} \in T_p\Sigma$, denotada por $\nabla_{\vec{v}}\,\mathrm{X}$, é a parte tangente do vetor $dX_p(\vec{v})$, ou seja,

$$\nabla_{\vec{v}} X = dX_p(\vec{v}) - \left\langle dX_p(\vec{v}), N(p) \right\rangle N(p) \in T_p\Sigma. \qquad (1)$$

Segue da definição que o vetor $\nabla_{\vec{v}}\,\mathrm{X}$ não depende da orientação N escolhida. Com efeito, se a orientação escolhida para Σ for $-N$ temos que

$$dX_p(\vec{v}) - \left\langle dX_p(\vec{v}), -N(p) \right\rangle (-N)(p) = dX_p(\vec{v}) - \left\langle dX_p(\vec{v}), N(p) \right\rangle N(p).$$

Além disso, se X é tangente à Σ, então a função $\langle X, N \rangle$ é identicamente nula sobre Σ. Assim

$$0 = \vec{v}(\langle \mathrm{X}, \mathrm{N} \rangle) = \left\langle dX_p(\vec{v}), N(p) \right\rangle + \left\langle X(p), dN_p(\vec{v}) \right\rangle, \ \forall p \in \Sigma, \ \forall \vec{v} \in T_p\Sigma.$$

Segue que

$$\left\langle dX_p(\vec{v}), N(p) \right\rangle = -\left\langle X(p), dN_p(\vec{v}) \right\rangle = \left\langle X(p), A_p(\vec{v}) \right\rangle,$$

e (1) se escreve como

$$dX_p(\vec{v}) = \nabla_{\vec{v}} X + \left\langle A_p(\vec{v}), X(p) \right\rangle N(p). \ (2)$$

Esta expressão é conhecida como *a fórmula de Gauss* da superfície.

A soma de dois campos $X, Y \in \chi(\Sigma)$ é o campo $X + Y \in \chi(\Sigma)$ que associa a cada $p \in \Sigma$ o vetor $(X+Y)(p) = X(p) + Y(p)$, o produto $fX \in \chi(\Sigma)$ é definido por $(fX)(p) = f(p)X(p)$, para toda função $f \in C^\infty(\Sigma)$, e o produto por escalar $\langle X, Y \rangle \in C^\infty(\Sigma)$ é definido por

$$\langle X, Y \rangle (p) = \langle X(p), Y(p) \rangle.$$

A derivada covariante de campos de vetores tem as seguintes propriedades.

$$\begin{aligned}
&\text{(a) } \nabla_{\vec{v}+\vec{w}} X = \nabla_{\vec{v}} X + \nabla_{\vec{w}} X,\\
&\text{(b) } \nabla_{\lambda\vec{v}} X = \lambda \nabla_{\vec{v}} X,\\
&\text{(c) } \nabla_{\vec{v}} (X+Y) = \nabla_{\vec{v}} X + \nabla_{\vec{v}} Y, \qquad\qquad (\mathrm{II})\\
&\text{(d) } \nabla_{\vec{v}} (fX) = \vec{v}(f) X(p) + f(p) \nabla_{\vec{v}} X,\\
&\text{(e) } \vec{v}(\langle X, Y \rangle) = \langle \nabla_{\vec{v}} X, Y(p) \rangle + \langle X(p), \nabla_{\vec{v}} Y \rangle,
\end{aligned}$$

para quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in T_p\Sigma, \lambda \in I\!R,$ e quaisquer que sejam $X, Y \in \chi(\Sigma)$.

Definição 3. Dado um campo $X \in \Xi(\Sigma)$ e uma função $f \in C^\infty(\Sigma)$, definimos a *derivada de f com respeito à X*, denotado por $X(f) \in C^\infty(\Sigma)$, usando a derivada de uma função com respeito a um vetor, como sendo

$$X(f)(p) = X(p)(f)$$

para cada ponto $p \in \Sigma$.

As propriedades abaixo são provadas usando (I),

$$\begin{aligned}
&\text{(a) } (X+Y)(f) = X(f) + Y(f)\\
&\text{(b) } (fX)(g) = fX(g),\\
&\text{(c) } X(f+g) = X(f) + X(g),\\
&\text{(d) } X(fg) = X(f)g + fX(g),
\end{aligned}$$

para quaisquer que sejam $X, Y \in \chi(\Sigma), \ f, g \in C^\infty(\Sigma)$.

Analogamente se $X, Y \in \chi(\Sigma)$, então a derivada covariante de Y com respeito à X, denotada por $\nabla_X Y$, é definida da seguinte forma

$$(\nabla_X Y)(p) = \nabla_{X(p)} Y \in T_p\Sigma,$$

para cada $p \in \Sigma$. As propriedades abaixo seguem imediatamente das propriedades da derivada covariante de campos tangentes de vetores.

(i) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z,$
(ii) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y,$
(iii) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$
(iv) $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y,$
(v) $X(\langle Y,Z\rangle) = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle,$

para quaisquer que sejam $X, Y, Z \in \chi(\Sigma)$ e $f \in C^\infty(\Sigma).$

Uma propriedade essencial da derivada covariante de campos tangentes de vetores é a simetria. Observe que se $X, Y \in \chi(\Sigma),$ então em cada ponto $p \in \Sigma$ tem-se

$$\langle dY_p(X(p)), N(p)\rangle = \langle A_p(X(p)), Y(p)\rangle = \langle X(p), A_p(Y(p))\rangle = \langle dX_p(Y(p)), N(p)\rangle.$$

Isto significa que os vetores $dY_p(X(p))$ e $dX_p(Y(p))$ têm ambos a mesma parte normal, e assim a diferença $dY_p(X(p)) - dX_p(Y(p))$ é um vetor tangente a Σ em $p \in \Sigma.$ O campo de vetores tangente $[X,Y]$ definido por

$$[X,Y](p) = dY_p(X(p)) - dX_p(Y(p))$$

chama-se o *colchete de Lie* dos campos X e $Y.$ Esse campo satisfaz a seguinte propriedade,

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \qquad (3)$$

para toda função $f \in C^\infty(\Sigma).$

O campo $[X,Y]$ também é escrito em termos da derivada covariante como

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X.$$

3. Operadores diferenciais. Gradiente e Hessiano.

Definição 4. Seja $f \in C^\infty(\Sigma).$ Para cada ponto $p \in \Sigma$ se define o gradiente de f em p como sendo o vetor $\nabla f(p) \in T_p\Sigma$ determinado por

$$\langle \nabla f(p), \vec{v}\rangle = df_p(\vec{v}) = \vec{v}(f)$$

para todo $\vec{v} \in T_p\Sigma.$

Definição 5. O campo gradiente $\nabla f \in \chi(\Sigma)$ é definido por

$$\langle \nabla f, X\rangle = X(f)$$

para todo $X \in \chi(\Sigma).$ Ou seja, $\langle \nabla f(p), X(p)\rangle = X(f)(p) = X(p)(f).$

O gradiente tem as seguintes propriedades:

(i) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g,$
(ii) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f,$
(iii) $\nabla(\phi \circ f) = (\phi' \circ f)\nabla f,$
(iv) $\nabla f(p) = 0,\ \forall p \in \Sigma \Leftrightarrow f(p) = \lambda,$

onde $\lambda \in I\!R$ é uma constante e $f, g \in C^\infty(\Sigma)$ são funções arbitrárias e $\phi: I\!R \to I\!R$ é uma função diferenciável.

Definição 6. Uma função $f: \Sigma \to I\!R$ atinge um *extremo local* em um ponto $p_0 \in \Sigma$ se existir uma vizinhança V de p_0 em Σ tal que $f(p) \geq f(p_0), \forall p \in V$ (*mínimo local*) ou então $f(p) \leq f(p_0), \forall p \in V$ (*máximo local)*. Além disso, se para todo $p \neq p_0$ ocorrer as desigualdades estritas $f(p) > f(p_0)$ ou $f(p) < f(p_0)$ dizemos que f atinge um extremo local estrito (*mínimo local estrito*, no primeiro caso, ou *máximo local estrito*, no segundo caso).

Definição 7. Analogamente f atinge um *extremo global* em um ponto $p_0 \in \Sigma$ se $f(p) \geq f(p_0), \forall p \in \Sigma$ (*mínimo global*) ou então $f(p) \leq f(p_0), \forall p \in \Sigma$ (*máximo global)*. Do mesmo modo, quando ocorrer as desigualdades estritas para todo ponto $p \in \Sigma - \{p_0\}$ dizemos que f atinge um *extremo global estrito* (m*ínimo global estrito ou máximo global estrito)*.

Definição 8. $p_0 \in \Sigma$ é um *ponto crítico* de uma função $f \in C^\infty(\Sigma)$ se vale $\nabla f(p) = 0.$
Não é difícil provar que se $f : \Sigma \to I\!R$ extremo local em um ponto $p_0 \in \Sigma,$ então p_0 é um ponto crítico de f. Esta propriedade conhecida como *o teste da primeira derivada* é usado para encontrar candidatos a extremos locais de f. O *teste da segunda derivada,* que veremos depois, permite afirmar se um ponto crítico dado é ou não um extremo local (ou global) da função f.

Definição 9. Seja $f \in C^\infty(\Sigma).$ Para cada ponto $p \in \Sigma$ define-se o *hessiano* de f em p como sendo aplicação

$$\nabla^2 f_p : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \to I\!R$$

dada por

$$\nabla^2 f_p(\vec{v}, \vec{w}) = \left\langle \nabla_{\vec{v}} \nabla f, \vec{w} \right\rangle, \ \forall \vec{v}, \vec{w} \in T_p\Sigma.$$

Observe que fazendo $X = \nabla f$ em (3), tem-se que

$$\nabla_{\vec{v}} \nabla f = d(\nabla f)_p(\vec{v}) - \left\langle A_p(\vec{v}), \nabla f(p) \right\rangle N(p), \ \forall \vec{v} \in T_p\Sigma,$$

de modo que $\nabla^2 f_p$ também pode ser calculado usando a derivada usual (euclidiana) de ∇f, da seguinte forma:

$$\nabla^2 f_p(\vec{v}, \vec{w}) = \left\langle d(\nabla f)_p(\vec{v}), \vec{w} \right\rangle.$$

Como se vê, a partir da definição, o hessiano $\nabla^2 f_p$ é uma aplicação bilinear. Além disso, o hessiano possui a propriedade da **simetria**, porém sua prova não é tão imediata. Para prová-la é necessário interpretar o hessiano como um operador que atua sobre os campos tangentes de vetores à superfície $\Sigma,$ e não sobre os vetores tangentes nos pontos da superfície.

Definição 10. O *hessiano de uma função* $f \in C^\infty(\Sigma)$ é a aplicação

$$\nabla^2 f : \chi(\Sigma) \times \chi(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$$

dada por

$$\nabla^2 f(X, Y) = \left\langle \nabla_X \nabla f, Y \right\rangle, \ \forall X, Y \in \chi(\Sigma).$$

Com esta definição e a partir das propriedades de derivada covariante de campos não é difícil provar as seguintes propriedades.

(i) $\nabla^2 f(X + Y, Z) = \nabla^2 f(X, Z) + \nabla^2 f(Y, Z),$

(ii) $\nabla^2 f(gX, Y) = g\nabla^2 f(X, Y),$

(iii) $\nabla^2 f(X, Y) = \nabla^2 f(Y, X),$

para quaisquer $X, Y, Z \in \chi(\Sigma)$ e $f, g \in C^\infty(\Sigma).$ A propriedade (iii), que expressa a simetria de $\nabla^2 f,$ é consequência de (3). Por outro lado da definição vemos que

$$\nabla^2 f_p(\vec{v}, \vec{w}) = \nabla^2 f(X, Y)(p)$$

para quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in T_p\Sigma$ e $\forall X, Y \in \chi(\Sigma)$ tais que $X(p) = \vec{v}$ e $Y(p) = \vec{w}.$ Portanto também o $\nabla^2 f,$ é uma aplicação simétrica.

Teorema 1 (Teste da segunda derivada). *Seja* $f : \Sigma \to I\!R$ *uma função diferenciável sobre uma superfície* $\Sigma \subset I\!R^3$ *e seja* $p_0 \in \Sigma$ *um ponto crítico de* f.

(i) Se f *atinge um mínimo local, então o hessiano* $\nabla^2 f_{p_0}$ *é semidefinido positivo (isto é,* $\nabla^2 f_{p_0}(v,v) \geq 0,\ \forall \vec{v} \in T_{p_0}\Sigma$*).*

(ii) Se f *atinge um máximo local, então o hessiano* $\nabla^2 f_{p_0}$ *é semidefinido negativo (isto é,* $\nabla^2 f_{p_0}(v,v) \leq 0,\ \forall \vec{v} \in T_{p_0}\Sigma$*).*

(iii) Se o hessiano é definido positivo (isto é, $\nabla^2 f_{p_0}(v,v) > 0,\ \forall \vec{v} \in T_p\Sigma, \vec{v} \neq 0$*), então a função (isto é,* f *atinge um mínimo local estrito.*

(iv) Se o hessiano é definido negativo (isto é, $\nabla^2 f_{p_0}(v,v) < 0,\ \forall \vec{v} \in T_p\Sigma, \vec{v} \neq 0$*), então a função (isto é,* f *atinge um máximo local estrito).*

No próximo exemplo será calculado o gradiente e o hessiano de uma função diferenciável sobre Σ quando esta for à restrição a Σ de uma função diferenciável em um aberto de $I\!R^3$.

Exemplo 1. Seja F uma função diferenciável definida em um aberto $W \subset I\!R^3$ e seja $\Sigma \subset IR^3$ uma superfície regular. Denotemos por f a restrição de F a Σ. Então $f \in C^\infty(\Sigma)$ e seu gradiente é a parte tangente do gradiente euclidiano (em $I\!R^3$) de F. Isto é para cada ponto $p \in \Sigma$ tem-se

$$\nabla f(p) = \operatorname{Grad} F(p) - \langle \operatorname{Grad} F(p), N(p) \rangle N(p), \qquad (4)$$

onde $\operatorname{Grad} F(p)$ denota o gradiente euclidiano de F. De fato,

$$\begin{aligned} &\langle \nabla f(p), \vec{v} \rangle = df_p(\vec{v}) = \frac{d}{dt}|_{t=t_0}\ f(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=t_0}\ F(\alpha(t)) = \\ &= \left\langle (\operatorname{Grad} F(p))^T, \vec{v} \right\rangle,\ \forall \vec{v} \in T_p\Sigma \Rightarrow \langle \nabla f(p), \vec{v} \rangle - \left\langle (\operatorname{Grad} F(p))^T, \vec{v} \right\rangle = 0,\ \forall \vec{v} \in T_p\Sigma \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\langle \nabla f(p) - (\operatorname{Grad} F(p))^T, \vec{v} \right\rangle = 0,\ \forall \vec{v} \in T_p\Sigma \Rightarrow \nabla f(p) = (\operatorname{Grad} F(p))^T, \end{aligned}$$

onde,

$$\operatorname{Grad} F(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \frac{\partial F}{\partial x_2}(x), \frac{\partial F}{\partial x_3}(x) \right),\ \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in W.$$

Por outro lado, para se obter o hessiano de f em p, vamos usar

$$\nabla^2 f_p(\vec{v}, \vec{w}) = \langle d(\nabla f)_p(\vec{v}), \vec{w} \rangle \qquad (5)$$

para cada $\vec{v}, \vec{w} \in T_p\Sigma$. Observe que,

$$\begin{aligned} d(\nabla f)_p(\vec{v}) &= d\left((\operatorname{Grad} F)^T \right)_p(\vec{v}) = \\ &= d\left(\operatorname{Grad} F - \langle \operatorname{Grad} F, N \rangle N \right)_p(\vec{v}) = \\ &= d(\operatorname{Grad} F)_p(\vec{v}) - \vec{v}(u)N(p) - u(p)dN_p(\vec{v}) = \\ &= d(\operatorname{Grad} F)_p(\vec{v}) - \vec{v}(u)N(p) + u(p)A_p(\vec{v}), \end{aligned} \qquad (6)$$

onde $u(p) = \langle \operatorname{Grad} F(p), N(p) \rangle$. Portanto, usando (5) e (6), teremos

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_p(\vec{v}, \vec{w}) &= \langle d(\nabla f)_p(\vec{v}), \vec{w} \rangle = \langle d(\operatorname{Grad} F)_p(\vec{v}), \vec{w} \rangle + \langle \operatorname{Grad} F(p), N(p) \rangle \langle A_p(\vec{v}), \vec{w} \rangle = \\ &= \operatorname{Hess} F_p(v,w) + \langle A_p(\vec{v}), \vec{w} \rangle \langle \operatorname{Grad} F(p), N(p) \rangle, \end{aligned} \qquad (7)$$

onde $\operatorname{Hess} F_p$ denota o hessiano euclidiano (em IR^3) de F no ponto $p \in \Sigma$, isto é

$$\operatorname{Hess} F_x(v,w) = \langle d(\operatorname{Grad} F)_x(\vec{v}), \vec{w} \rangle = \sum_{i,j=1}^{3} v_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i x_j}(x) w_i,$$

para todo ponto $(x_1, x_2, x_3) \in W$ e todo par de vetores $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \in IR^3$.

Um caso particular é o exemplo a seguir:

Exemplo 2. Consideremos $F : IR^3 \to IR$ a função diferenciável dada por $F(x) = \frac{1}{2}|x-c|^2$, para algum ponto fixo $c \in R^3$, a qual satisfaz

$$\text{Grad}\, F(x) = x - c \text{ e } \text{Hess}\, F_x(\vec{v},\vec{v}) = |\vec{v}|^2,$$

para todo $x \in IR^3$ e $\vec{v} \in IR^3$. Dada $\Sigma \subset IR^3$ uma superfície regular, consideremos a função $f : \Sigma \to IR$ dada por $f(p) = F(p) = \frac{1}{2}|p-c|^2$ para $p \in \Sigma.$ A função f mede a distância (ao quadrado) dos pontos de Σ até um ponto fixo $c.$ Usando as equações (4) e (7) temos

$$\nabla f(p) = (p-c)^T = p - c - \langle p-c, N(p)\rangle N(p) \quad (8)$$

para todo $p \in \Sigma,$ e

$$\nabla^2 f_p(\vec{v},\vec{w}) = \langle \vec{v},\vec{w}\rangle + \langle A_p(\vec{v}),\vec{w}\rangle\langle p-c, N(p)\rangle \quad (9)$$

para todo par de vetores $\vec{v},\vec{w} \in T_p\Sigma.$ Acima, o símbolo ^{T} significa a parte tangente do vetor de $T_p\Sigma$ sobre o qual ele está sendo aplicado. Como uma consequência de (8) se tem que os pontos críticos de f são precisamente os pontos $p \in \Sigma$ tais que o vetor $\vec{cp} = p - c$ é normal à superfície.

Exemplo 3. Seja Π um plano afim de IR^3 que passa por um ponto $c \in IR^3$ e tem como direção normal à determinada pelo vetor unitário $\vec{a} \in IR^3$. Se $\Sigma \subset IR^3$ é uma superfície, a função $h : \Sigma \to IR$ dada por

$$h(p) = \langle p-c, \vec{a}\rangle,\ p \in \Sigma,$$

mede a distância orientada (ou altura) dos pontos de Σ ao plano Π. Por isso a função h se chama *função altura.*

Observe que $h \in C^\infty(\Sigma)$ é a restrição a Σ da função diferenciável em IR^3 dada por

$$H(x) = \langle x-c, \vec{a}\rangle, x \in IR^3,$$

cujo gradiente euclidiano é o vetor constante $\vec{a}$ e $\text{Hess}\, H(x) = \vec{0},\ \forall x \in IR^3.$ Portanto, a partir das expressões (5) e (7), temos que

$$\nabla h(p) = \vec{a}^T(p) = \vec{a} - \langle \vec{a}, N(p)\rangle N(p) \qquad (10)$$

e

$$\nabla^2 h_p(\vec{v},\vec{w}) = \langle A_p(\vec{v}),\vec{w}\rangle\langle \vec{a}, N(p)\rangle, \qquad (11)$$

para todo $p \in \Sigma$ e $\vec{v},\vec{w} \in T_p\Sigma.$

De (8) segue que os pontos críticos de Σ são os pontos de Σ onde o plano tangente é paralelo ao plano Π (isto é, os pontos $p \in \Sigma$ onde $N(p) = \pm\vec{a}$).

4. Superfícies convexas. O teorema de Hadamard

4.1. Uma primeira aplicação. Existência de pontos elípticos.

O teorema a seguir é uma primeira aplicação do teorema 1. Como sabemos um ponto *elíptico* de Σ é um ponto onde sua curvatura de Gauss é estritamente positiva.

Teorema 2. *Toda superfície regular, orientada e compacta $\Sigma \subset IR^3$ tem pelo menos um ponto elíptico.*

Demonstração. Geometricamente, a idéia da prova consiste em delimitar a superfície Σ em uma esfera suficientemente grande e, após isto, ir diminuindo o raio da esfera até que ela toque pela primeira vez a superfície Σ em algum ponto. Neste ponto a superfície será tangente à esfera e as curvaturas normais de Σ serão limitadas pela curvatura normal constante (que é positiva) da esfera. Consideremos a função altura $f : \Sigma \to IR$ dada por

$$f(p)=\frac{1}{2}|p|^2, \quad p\in\Sigma.$$

O gradiente e o hessiano de f são dados pelas fórmulas (8) e (9) por

$$\nabla f(p)=p-\langle p,N(p)\rangle N(p) \text{ e } \nabla^2 f_p(\vec{v},\vec{v})=|\vec{v}|^2+\langle A_p(\vec{v}),\vec{v}\rangle\langle p,N(p)\rangle .$$

Como Σ é compacta e f é contínua, existe um ponto $p_0\in\Sigma$ onde f atinge seu máximo (global), ou seja, $f(p)\le f(p_0)$, $\forall p\in\Sigma$, de maneira que $\nabla f(p_0)=0$ (p_0 é um ponto crítico de f) e $\nabla^2 f_{p_0}(\vec{v},\vec{v})\le 0$ (teste da segunda derivada) para todo $\vec{v}\in T_{p_0}\Sigma$. De $\nabla f(p_0)=0$ temos $p_0=\langle p_0,N(p_0)\rangle N(p_0)$, isto é,

$$N(p_0)=\pm\frac{p_0}{|p_0|}=\varepsilon\frac{p_0}{|p_0|},\ \varepsilon=\pm 1, \qquad (12)$$

com $|p_0|^2=2f(p_0)>0$, o qual indica que a superfície Σ é tangente a esfera de raio $|p_0|>0$ no ponto p_0. Por outro lado, do fato de que $\nabla^2 f_{p_0}(\vec{v},\vec{v})\le 0$, para todo $\vec{v}\in T_{p_0}\Sigma$, temos em particular que

$$\nabla^2 f_{p_0}(\vec{v},\vec{v})=1+k(\vec{v})\langle p_0,N(p_0)\rangle=1+\varepsilon k(\vec{v})|p_0|\le 0$$

para todo $\vec{v}\in T_{p_0}\Sigma$ tal que $|\vec{v}|=1$. Assim, se $\varepsilon=+1$ concluímos que

$$k(\vec{v})\le-\frac{1}{|p_0|}<0$$

para todo vetor unitário $\vec{v}\in T_{p_0}\Sigma$. Em particular, $k_1(p_0)$ e $k_2(p_0)$ são ambas negativas e daí $K(p_0)>0$. Analogamente, se $\varepsilon=-1$ se tem que

$$k(\vec{v})\ge\frac{1}{|p_0|}>0,$$

para todo vetor unitário $\vec{v}\in T_{p_0}\Sigma$. Em particular, $k_1(p_0)$ e $k_2(p_0)$ são ambas positivas e daí $K(p_0)>0$. Logo, em ambos os casos p_0 é um ponto elíptico de Σ.

c.q.d.

Observação 1. O sinal $\pm$ em (12) depende da orientação escolhida. De fato, pelo teorema da separação de Jordan-Brouwer para superfícies de $I\!R^3$ sabemos que toda superfície compacta $\Sigma\subset I\!R^3$ é a fronteira de um domínio regular compacto $\Omega\subset I\!R^3$, $\partial\Omega=\Sigma$, e, como conseqüência, é necessariamente orientável e admite uma aplicação de Gauss $N:\Sigma\to S^2$ com a seguinte propriedade: a semi-reta que sai de $p\in\Sigma$ na direção de $N(p)$ está inicialmente no domínio Ω. De agora em diante, a aplicação de Gauss é o campo normal unitário de vetores de Σ. A prova do teorema 2 diz que, se a superfície está orientada pelo campo normal unitário interior (isto é, $\varepsilon=-1$), então as curvaturas normais de Σ em p_0 são positivas e maiores do que $\frac{1}{p_0}$, que é precisamente a curvatura normal da esfera (centrada na origem) de raio $|p_0|$ com respeito a seu campo normal interior.

4.2. O teorema de Hadamard

Seja $\Sigma\subset I\!R^3$ uma superfície regular e orientada com aplicação de Gauss N. Para cada ponto $p\in\Sigma$, consideremos Π_p o plano tangente *afim* que passa por p, isto é,

$$\Pi_p=\{x\in I\!R^3:\langle x-p,N(p)\rangle=0\}.$$

Este plano divide o espaço $I\!R^3$ em dois semi-espaços fechados

$$\Pi_p^+=\{x\in I\!R^3:\langle x-p,N(p)\rangle\ge 0\}$$

e

$$\Pi_p^- = \{x \in I\!R^3 : \langle x - p, N(p) \rangle \leq 0\}.$$

Observe que Π_p^+ é precisamente o semi-espaço de $I\!R^3$ para o qual o vetor normal $N(p)$ aponta para dentro. Evidentemente, $p \in \Pi_p^+ \cap \Pi_p^-$.

Definição 11. Uma superfície regular e orientada $\Sigma \subset I\!R^3$ é *localmente convexa* em um ponto $p_0 \in \Sigma$ se existe uma vizinhança V de p_0 em Σ que está totalmente contida em um de seus semi-espaços fechados Π_p^+ ou Π_p^-, isto é $V \subset \Pi_p^+$ ou $V \subset \Pi_p^-$.

Além disso, se p_0 é o único ponto de $V \cap \Pi_{p_0}^+$, diremos que Σ é *estritamente localmente convexa* (isto é, a vizinhança $V - \{p_0\}$ está inteiramente contida em um dos semi-espaços abertos $\text{int}(\Pi_{p_0}^+)$ ou $\text{int}(\Pi_{p_0}^-)$).

Um conceito mais forte de convexidade é o seguinte.

Definição 12. Uma superfície regular e orientada $\Sigma \subset IR^3$ é *globalmente convexa* em um ponto $p_0 \in \Sigma$ se toda a superfície está inteiramente contida em um de seus semi-espaços fechados $\Pi_{p_0}^+$ ou $\Pi_{p_0}^-$, isto é, $\Sigma \subset \Pi_{p_0}^+$ ou $\Sigma \subset \Pi_{p_0}^-$.

Além disso, se p_0 é o único ponto de $\Sigma \cap \Pi_{p_0}$, diremos que Σ é estritamente globalmente convexa em p_0 (isto é, $\Sigma - \{p_0\}$ está inteiramente contida em um dos semi-espaços abertos $\text{int}(\Pi_{p_0}^+)$ ou $\text{int}(\Pi_{p_0}^-)$).

Lema 2. Se $c = p_0 \in \Sigma$ e h_{p_0} a função altura com respeito ao plano tangente afim Π_{p_0}, então

$$h_{p_0}(p) = \langle p - p_0, N(p_0) \rangle, \quad p \in \Sigma.$$

h_{p_0} anula-se nos pontos de $\Sigma \cap \Pi_{p_0}$. Então Σ é

(i) (estritamente) localmente convexa em p_0 se, e somente se, a função altura h_{p_0} atinge um extremo local (estrito) em p_o.

(ii) (estritamente) globalmente convexa em p_0 se, e somente se, a função altura h atinge um extremo global (estrito) em p_o.

Demonstração. (i) ($\Rightarrow$) Suponha que existe uma vizinhança V de p_o em Σ, tal que $V \subset \Pi_p^+$ ou $V \subset \Pi_p^-$. No primeiro caso, temos $h_{p_0}(p) \geq 0$, e no segundo caso, temos $h_{p_0}(p) \leq 0$. Como $h_{p_0}(p_0) = 0$, então h_{p_0} atinge um extremo local em p_0.

Suponha, agora, que existe uma vizinhança V de p_o em Σ, tal que $V \cap \Pi_{p_o} = \{p_0\}$. Assim, se $p \in \text{int}(\Pi_{p_0}^+)$ temos que $h_{p_0}(p) > 0$, se $p \in \text{int}(\Pi_{p_0}^-)$ temos $h_{p_0}(p) < 0$, e $h_{p_0}(p_0) = 0$. Logo h_{p_0} atinge um extremo local estrito em p_0.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, se h_{p_0} atinge um extremo local em p_0, então $h_{p_0}(p) \geq 0$ ou $h_{p_0}(p) \leq 0$, para todo $p \in V$, onde V é uma vizinhança de p_0 em Σ. Logo, Σ é localmente convexa em p_0,

Se, se h_{p_0} atinge um extremo local estrito em p_0, então $h_{p_0}(p) > 0$ ou $h_{p_0}(p) < 0$, para todo $p \in V$, onde V é uma vizinhança de p_0 em Σ. Logo, Σ é estritamente localmente convexa em p_0,

(ii) Análogo ao caso (i).

c.q.d.

Observe, a partir de (8), que p_0 sempre é um ponto crítico de h_{p_0}.

Teorema 3. *Seja* $\Sigma \subset IR^3$ *uma superfície regular e orientada.*

(i) *Se* Σ *é localmente convexa em* $p_0 \in \Sigma,$ *então a curvatura de Gauss neste ponto deve ser maior ou igual a zero,* $K(p_o) \geq 0.$

(ii) *Se* $p_0 \in \Sigma$ *é um ponto elíptico de* Σ *(isto é,* $K(p_0) > 0$*), então* Σ *é estritamente localmente convexa em* p_0.

Demonstração. (i) Se Σ é localmente convexa em p_0, então, pelo lema 2, a função h_{p_0} atinge em p_0 um extremo local. Suponhamos, por exemplo, que atinge um mínimo local. Então, por (11) e pelo teorema 1, tomando $\vec{a} = N(p_0)$, tem-se que

$$\nabla^2 (h_{p_0})_{p_0} (\vec{v},\vec{v}) = \left\langle A_{p_0}(\vec{v}), \vec{v} \right\rangle \geq 0$$

para todo $\vec{v} \in T_p\Sigma.$ Em particular, tomando $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ a base de direções principais de Σ em p_0, se tem que para cada curvatura principal em p_0 é

$$k_i(p_0) = \nabla^2 (h_{p_0})_{p_0} (e_i, e_i) \geq 0, \; i = 1,2,$$

e $K(p_0) = k_1(p_0)k_2(p_0) \geq 0.$

(ii) Sabemos que p_0 é um ponto crítico de h_{p_0}, pois por (10) temos

$$\nabla h_{p_0}(p) = N(p_0) - \langle N(p), N(p_0) \rangle N(p_0), \;\; p \in \Sigma,$$

onde tomamos $\vec{a} = N(p_0)$.

Se $K(p_0) > 0$ então para uma escolha adequada da aplicação de Gauss N, se tem que $k_1(p_0)$ e $k_2(p_0)$ são ambas positivas e, portanto, por (11)

$$\nabla^2 (h_{p_0})_{p_0} (\vec{v},\vec{v}) = \left\langle A_{p_0}(\vec{v}), \vec{v} \right\rangle = k(\vec{v}) > 0 \qquad (13)$$

para toda direção unitária $\vec{v} \in T_p\Sigma.$ Isto é o hessiano $\nabla^2 (h_{p_0})_{p_0}$ é definido positivo e então, pelo teorema 1, h_{p_0} atinge em p_0 um mínimo local estrito. Portanto, pelo lema 2, Σ é estritamente localmente convexa em p_0.

c.q.d.

Definição 13. Um *ovalóide* é uma superfície regular conexa e compacta cuja curvatura de Gauss seja diferente de zero em todos os seus pontos.

Definição 14. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua e sobrejetiva entre dois espaços topológicos X e Y. Se diz que f é uma aplicação de recobrimento se f verifica a seguinte propriedade: cada ponto $q \in Y$ admite uma vizinhança V de q em Y tal que a imagem inversa de V através de f é a união disjunta

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i,$$

onde cada $U_i \subset X$ é um subconjunto aberto de X e, para cada $i \in I$, a restrição $f\big|_{U_i} : U_i \to V$ é um homeomorfismo. Em particular, f é um homeomorfismo local. Se Y é conexo, a cardinalidade do conjunto I é constante e se chama o número de folhas da aplicação de recobrimento. Neste contexto, um homeomorfismo (global) entre X e Y é uma aplicação de recobrimento de uma folha, e se diz que o espaço topológico Y é simplesmente conexo se não admite aplicação de recobrimento que não sejam homeomorfismos, isto é, não admite recobrimentos não-triviais

Como consequência dos teoremas 2 e 3, segue que todo ovalóide é estritamente localmente convexo em todos os seus pontos. O seguinte resultado diz que, mais fortemente, todo ovalóide é estritamente globalmente convexo em todos os seus pontos.

Teorema 4 (Hadamard). *Seja $\Sigma \subset IR^3$ um ovalóide. Então*

(i) A aplicação de Gauss $N : \Sigma \to S^2$ é um difeomorfismo.

(ii) Σ é estritamente globalmente convexa em todos os seus pontos.

Demonstração. (i) $K(p) = \det(A_p) = \det(dN_p) > 0$, para todo $p \in \Sigma,$ pois , Σ é um ovalóide que tem pelo menos um ponto elíptico segundo o teorema 2, onde também usamos o fato de K ser contínua. Então dN_p é regular em todos os seus pontos e, portanto, a aplicação de Gauss N é um difeomorfismo local entre Σ e S^2. Vamos provar que N é um difeomorfismo global. Para isso basta provarmos que N é bijetiva.

Como Σ é compacta, sua imagem $N(\Sigma)$ é um subconjunto compacto em S^2, pois toda função contínua leva compacto em compacto. Além disso, como N é um difeomorfismo local, então N também é uma aplicação aberta, ou seja, a imagem de um conjunto aberto de Σ, por N, é um conjunto aberto em S^2, de maneira que $N(\Sigma)$ também é um subconjunto aberto de S^2. Logo $N(\Sigma) \subset S^2$ é um conjunto aberto e fechado em S^2, e pela conexidade de S^2, concluímos que $N(\Sigma) = S^2$, pois $N(\Sigma) \neq \phi$. Isto prova a sobrejetividade de N.

Para provar que N é injetiva, vamos mostrar que N é uma aplicação de recobrimento, pois, como a esfera S^2 é um espaço topológico simplesmente conexo se N for aplicação de recobrimento será então um homeomorfismo (definição 14).

Vejamos então que $N : \Sigma \to S^2$ é uma aplicação de recobrimento. Para cada ponto $\vec{a} \in S^2$, o subconjunto (não vazio, pois N é sobrejetiva) $N^{-1}(\vec{a})$ é necessariamente finito. De fato, se fosse infinito como $N^{-1}(\vec{a})$ é compacto então existiria um ponto de acumulação $p_0 \in N^{-1}(\vec{a})$, e assim uma sequência de pontos contida em $N^{-1}(\vec{a})$, diferente de p_0, convergindo para p_0, contradizendo a injetividade de N numa vizinhança de p_0 (N é um difeomorfismo local). Seja então $N^{-1}(\vec{a}) = \{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$.

Como N é um difeomorfismo local e $\{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$ é uma quantidade finita de pontos, podemos encontrar para cada $i = 1,2,\cdots,k$ uma vizinhança $\tilde{U}_i$ de p_i em Σ de modo que $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j = \phi$ para cada $i \neq j,$ e tal que, para cada $i,$ a restrição $N\big|_{\tilde{U}_i}$ é um homeomorfismo entre $\tilde{U}_i$ e $\tilde{V}_i = N(\tilde{U}_i)$, onde $\tilde{V}_i$ é uma vizinhança de $\vec{a}$ em S^2. Observe que, $N(\tilde{U}_i)$ é aberto em S^2 e, consequentemente, $V = \bigcap_{i=1}^{k} \tilde{V}_i \neq \phi$ é aberto, pois é interseção finita de abertos. Além disso, V é uma vizinhança de $\vec{a}$ em S^2, cuja imagem inversa por N é a união disjunta

$$N^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{k} U_i,$$

onde $U_i = (N\big|_{\tilde{U}_i})^{-1}(V) \subset \tilde{U}_i$ e cada restrição $N\big|_{U_i}$ é um difeomorfismo entre U_i e V. Além disso, cada U_i é aberto pois $N\big|_{\tilde{U}_i}$ é um homeomorfismo e V é aberto, e $U_i \cap U_j = \phi$.

Assim, de acordo com a definição 14, N é uma aplicação de recobrimento, como queríamos provar. Logo, N é bijetiva e consequentemente é um difeomorfismo global.

(ii) Sabendo que N é um difeomorfismo, o segundo caso é imediato. Com efeito, fixado p_0 um ponto de $\Sigma,$ queremos ver que a função altura h_{p_0} atinge em p_0 um extremo global estrito. Sabemos que os pontos críticos de h_{p_0} são exatamente os pontos $p \in \Sigma$ onde $N(p) = \pm N(p_0)$ (use a fórmula (10) com $\vec{a} = N(p_0)$), de maneira que, para N ser uma bijeção, h_{p_0} deve ter exatamente dois pontos críticos, p_0 e p_1, onde $N(p_1) = -N(p_0)$. Como Σ é compacta, então estes pontos críticos são exatamente os pontos onde a função altura h_{p_0} atinge seus valores mínimo e máximo, e tais extremos são estritos (caso contrário, existiria mais de dois pontos críticos). Finalmente, concluímos que h_{p_0} atinge em p_0 um extremo global estrito e assim, pelo lema 2, Σ é estritamente globalmente convexa em p_0.

c.q.d.

5. As fórmulas de Minkowski.

5.1. Divergência e laplaciano.

Nosso objetivo aqui é introduzir as fórmulas de Minkowski, que são duas fórmulas integrais clássicas para superfícies compactas em IR^3 e como muitas das fórmulas integrais importantes na geometria diferencial, se obtêm como uma aplicação do *teorema da divergência.*

Definição 14. Seja $X \in \chi(\Sigma)$ onde Σ é uma superfície. Para cada ponto $p \in \Sigma$ se define a *divergência de* X no ponto p como traço da aplicação linear

$$(\nabla X)_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$$

definida por

$$(\nabla X)_p(\vec{v}) = \nabla_{\vec{v}} X.$$

Isto é,

$$\operatorname{div} X(p) = \operatorname{tr}(\vec{v} \to \nabla_{\vec{v}} X).$$

Em particular, $\operatorname{div} X(p) \in C^\infty(\Sigma)$ define uma função diferenciável sobre Σ e, para cada ponto $p \in \Sigma,$ se tem

$$\operatorname{div} X(p) = \left\langle \nabla_{\vec{e}_1} X, \vec{e}_1 \right\rangle + \left\langle \nabla_{\vec{e}_2} X, \vec{e}_2 \right\rangle,$$

sendo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ é uma base ortonormal de $T_p\Sigma.$ Todavia, de (2), se tem que $\operatorname{div} X(p)$ pode ser calculado usando a derivada usual de X e é dado por

$$\operatorname{div} X(p) = \left\langle dX_p(\vec{e}_1), \vec{e}_1 \right\rangle + \left\langle dX_p(\vec{e}_2), \vec{e}_2 \right\rangle.$$

A divergência verifica as seguintes propriedades:

(i) $\operatorname{div}(X+Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$, e

(ii) $\operatorname{div}(fX) = X(f) + f \operatorname{div} X = \langle \nabla f, X \rangle + f \operatorname{div} X$

para quaisquer $X, Y \in \chi(\Sigma)$ e $f \in C^\infty(\Sigma).$

Em particular, quando $X = \nabla f,$ onde $f \in C^\infty(\Sigma),$ a divergência do campo ∇f define o *laplaciano* de f e se representa por Δf. Isto é, $\Delta f \in C^\infty(\Sigma)$ é a função definida por

$$\begin{aligned}\Delta f(p) &= \left\langle \nabla_{\vec{e}_1} \nabla f, \vec{e}_1 \right\rangle + \left\langle \nabla_{\vec{e}_2} \nabla f, \vec{e}_2 \right\rangle = \\ &= \nabla^2 f_p(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + \nabla^2 f_p(\vec{e}_2, \vec{e}_2).\end{aligned}$$

Desta maneira, o laplaciano define um operador $\Delta : C^\infty(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$ que tem as seguintes propriedades:

(i) $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g,$

(ii) $\Delta(\lambda f) = \lambda \Delta f,$

(iii) $\Delta(\phi \circ f) = (\phi' \circ f)\Delta g + (\phi'' \circ f)|\nabla f|^2,$ e

(iv) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \Delta f, \Delta g \rangle,$

para quaisquer $f, g \in C^{\infty}(\Sigma)$ e $\lambda \in IR$.

Teorema 5 (Teorema da divergência). *Seja $\Sigma \subset IR^3$ uma superfície regular, compacta e orientada, seja $X \in \chi(\Sigma)$ um campo tangente de vetores sobre Σ. Então*

$$\int_{\Sigma} \operatorname{div} X(p)dp = 0,$$

onde dp denota um elemento de área da superfície Σ. Particularmente, se considerarmos $X = \nabla f$ temos

$$\int_{\Sigma} \Delta f(p)dp = 0,$$

para toda função $f \in C^{\infty}(\Sigma)$.

5.2 Tensores

Definição 15. Um *campo de tensores* sobre uma superfície regular $\Sigma \subset IR^3$ é uma aplicação S que, para cada ponto $p \in \Sigma$, associa um endomorfismo $S_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$. Além disso, um campo de tensores é dito diferenciável sobre Σ se, para cada campo de vetores diferenciável $X \in \chi(\Sigma)$, o campo de vetores SX definido por

$$(SX)(p) = S_p(X(p)) \in T_p\Sigma,\ p \in \Sigma,$$

é diferenciável.

Um exemplo de campo de tensor diferenciável o endomorfismo de Weingarten A.

Definição 16. Sejam $X \in \chi(\Sigma)$ um campo de vetores diferenciável e $S : \chi(\Sigma) \to \chi(\Sigma)$ um campo de tensores diferenciável sobre uma superfície Σ. Definimos a *derivada covariante de S com respeito à* X como sendo o campo de tensores diferenciável $\nabla_X S : \chi(\Sigma) \to \chi(\Sigma)$ dado por

$$(\nabla_X S)(Y) = \nabla_X (SY) - S(\nabla_X Y)$$

para todo $Y \in \chi(\Sigma)$. Além disso, para cada ponto $p \in \Sigma$ e cada vetor $\vec{v} \in T_p\Sigma$, a aplicação $\nabla_{\vec{v}} S : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$ é definida por

$$(\nabla_{\vec{v}} S)(\vec{w}) = (\nabla_X S)(Y)(p), \vec{w} \in T_p\Sigma$$

quaisquer que sejam $X, Y \in \chi(\Sigma)$ com $X(p) = \vec{v}$ e $Y(p) = \vec{w}$.

Teorema 6. *Seja $S : \chi(\Sigma) \to \chi(\Sigma)$ um campo de tensores diferenciável sobre uma superfície Σ. Então para cada $p \in \Sigma$ e $\vec{v}, \in T_p\Sigma$ tem-se*

$$\operatorname{tr}(\nabla_X S) = \vec{v}(\operatorname{tr} S) = \langle \vec{v}, \nabla(\operatorname{tr} S)(p) \rangle,$$

onde $\operatorname{tr} S \in C^{\infty}(\Sigma)$ é a função dada por $(\operatorname{tr} S)(p) = \operatorname{tr}(S_p)$.

Teorema 7. *Seja $\Sigma \subset IR^3$ uma superfície regular. As equações de Codazzi-Mainard são equivalentes a seguinte propriedade. Para todo $X, Y \in \chi(\Sigma)$ vale*

$$(\nabla_X A)(Y) = (\nabla_Y A)(X).$$

De forma equivalente, essas equações são escritas como:

$$(\nabla_{\vec{v}} A)(\vec{w}) = (\nabla_{\vec{w}} A)(\vec{v}),$$

para todo $p \in \Sigma$ e para todo par de vetores $\vec{v}, \vec{w} \in T_p\Sigma$.

5.3 As fórmulas de Minkowski

Teorema 8. *Seja $\Sigma \subset IR^3$ uma superfície regular, compacta e orientada, e seja $N : \Sigma \to IR^3$ sua aplicação de Gauss. Para cada ponto fixo $c \in IR^3$ tem-se*

$$\int_{\Sigma}\left(1+H(p)\langle p-c,N(p)\rangle\right)dp=0 \qquad (14)$$

e

$$\int_{\Sigma}\left(H(p)+K(p)\langle p-c,N(p)\rangle\right)dp=0 \qquad (15)$$

onde H é a curvatura média e K é curvatura Gaussiana de Σ.

Demonstração.

Considere a função diferenciável sobre Σ definida por $f(p)=\frac{1}{2}|p-c|^2$. Sabemos, da fórmula (9), que

$$\nabla^2 f_p(\vec{v},\vec{v})=|\vec{v}|^2+k(\vec{v})\langle p-c,N(p)\rangle=1+k(\vec{v})\langle p-c,N(p)\rangle$$

para todo vetor unitário $\vec{v}\in T_p\Sigma$.

Vamos trabalhar com a base de $T_p\Sigma$ formada pelas direções principais de Σ em p, ou seja, com a base ortonormal $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$. Temos

$$\nabla^2 f_p(\vec{e}_1,\vec{e}_1)=1+k_1(p)\langle p-c,N(p)\rangle$$
$$\nabla^2 f_p(\vec{e}_2,\vec{e}_2)=1+k_2(p)\langle p-c,N(p)\rangle$$

Daí,

$$\Delta f(p)=tr(\nabla^2 f_p)=\nabla^2 f_p(\vec{e}_1,\vec{e}_1)+\nabla^2 f_p(\vec{e}_2,\vec{e}_2)=$$
$$=2+2H(p)\langle p-c,N(p)\rangle$$

$$\Rightarrow \Delta f(p)=2\left(1+H(p)\langle p-c,N(p)\rangle\right).$$

A fórmula (14) se obtém aplicando o teorema 5 na última expressão acima.

Para demonstrar a fórmula (15), vamos calcular o laplaciano da função $g\in C^{\infty}(\Sigma)$ definida por $g(p)=\langle p-c,N(p)\rangle$. Para cada $p\in\Sigma$ e $\vec{v}\in T_p\Sigma$ temos

$$\vec{v}(g)=dg_p(\vec{v})=\langle\vec{v},N(p)\rangle+\langle p-c,dN_p(\vec{v})\rangle$$

Como $dN_p(\vec{v})=-A_p(\vec{v})$ e A_p é auto-adjunta então

$$\vec{v}(g)=-\langle (p-c)^T,A_p(\vec{v})\rangle=-\langle A_p\left((p-c)^T\right),\vec{v}\rangle.$$

Portanto

$$\nabla g(p)=-A_p\left((p-c)^T\right)=-A_p\left(\nabla f(p)\right),\ \forall p\in T_p\Sigma.$$

Sabemos da definição 16 que

$$\left(\nabla_X S\right)(Y)=\nabla_X(SY)-S\left(\nabla_X Y\right),\ \forall X,Y\in\chi(\Sigma)$$

e para cada campo de tensores, diferenciável sobre Σ, $S:\chi(\Sigma)\to\chi(\Sigma)$.

Daí,

$$\nabla_X(SY)=\left(\nabla_X S\right)(Y)+S\left(\nabla_X Y\right).$$

Em particular para $S=A:\chi(\Sigma)\to\chi(\Sigma)$ e $Y=\nabla f\in\chi(\Sigma)$, temos

$$\nabla_X(A(\nabla f))=\left(\nabla_X A\right)(\nabla f)+A\left(\nabla_X\nabla f\right).$$

Ainda, das definições 15 e 16, temos

$$\left[A\left(\nabla_X\nabla f\right)\right](p)=A_p\left(\nabla_{X(p)}\nabla f\right)$$

e

$$(\nabla_{X(p)}A)(\nabla f(p))=(\nabla_X A)(\nabla f)(p).$$

Assim,

$$\left(\nabla_X (A(\nabla f))\right)(p) = \left[\left(\nabla_X A\right)(\nabla f) + A\left(\nabla_X \nabla f\right)\right](p) =$$
$$= \left(\nabla_X A\right)(\nabla f)(p) + \left[A\left(\nabla_X \nabla f\right)\right](p) =$$
$$= \left(\nabla_{X(p)} A\right)(\nabla f(p)) + A_p\left(\nabla_{X(p)} \nabla f\right).$$

Logo, como

$$(\nabla_X (A(\nabla f)))(p) = \nabla_{X(p)} (A(\nabla f)),$$

concluímos

$$\nabla_{X(p)} (A(\nabla f)) = \left(\nabla_{X(p)} A\right)(\nabla f(p)) + A_p\left(\nabla_{X(p)} \nabla f\right).$$

Assim, fazendo $X(p) = \vec{v}$, temos

$$\nabla_{\vec{v}} (A(\nabla f)) = \left(\nabla_{\vec{v}} A\right)(\nabla f(p)) + A_p\left(\nabla_{\vec{v}} \nabla f\right).$$

Consequentemente, para cada $\vec{v} \in T_p\Sigma$

$$\nabla_{\vec{v}} \nabla g = -\nabla_{\vec{v}}\left(A(\nabla f)\right) = -\left(\nabla_{\vec{v}} A\right)\left(\nabla f(p)\right) - A_p\left(\nabla_{\vec{v}} \nabla f\right),$$

onde $\nabla_{\vec{v}} A$ é a derivada covariante de A com respeito à $\vec{v}$.

Do teorema 7 os vetores $\vec{v}$ e $\nabla f(p)$ podem ser comutados na derivada covariante de A. Assim,

$$\left(\nabla_{\vec{v}} A\right)\left(\nabla f(p)\right) = \left(\nabla_{\nabla f(p)} A\right)(\vec{v}).$$

Usando a definição do hessiano para a função g, temos

$$\nabla^2 g_p(\vec{v}, \vec{v}) = \left\langle \nabla_{\vec{v}} \nabla g, \vec{v} \right\rangle = \left\langle -\left(\nabla_{\vec{v}} A\right)\left(\nabla f(p)\right) - A_p\left(\nabla_{\vec{v}} \nabla f\right), \vec{v} \right\rangle =$$
$$= -\left\langle \left(\nabla_{\vec{v}} A\right)\left(\nabla f(p)\right), \vec{v} \right\rangle - \left\langle A_p\left(\nabla_{\vec{v}} \nabla f\right), \vec{v} \right\rangle.$$

Novamente, pelo teorema 7, e usando o fato de A_p ser auto-adjunta, temos

$$\nabla^2 g_p(\vec{v}, \vec{v}) = -\left\langle \left(\nabla_{\vec{v}} A\right)\left(\nabla f(p)\right), \vec{v} \right\rangle - \left\langle A_p\left(\nabla_{\vec{v}} \nabla f\right), \vec{v} \right\rangle =$$
$$-\left\langle \left(\nabla_{\nabla f(p)} A\right)(\vec{v}), \vec{v} \right\rangle - \left\langle \nabla_{\vec{v}} \nabla f, A_p(\vec{v}) \right\rangle.$$

Da definição de hessiano para a função f, temos

$$\nabla^2 g_p(\vec{v}, \vec{v}) = -\left\langle \left(\nabla_{\nabla f(p)} A\right)(\vec{v}), \vec{v} \right\rangle - \nabla^2 f_p(\vec{v}, A_p(\vec{v})).$$

Usando a fórmula (9), para o hessiano de f:

$$\nabla^2 g_p(\vec{v}, \vec{v}) = -\left\langle \left(\nabla_{\nabla f(p)} A\right)(\vec{v}), \vec{v} \right\rangle - \left[\left\langle A_p(\vec{v}), \vec{v} \right\rangle + \left\langle A_p(\vec{v}), A_p(\vec{v}) \right\rangle g(p)\right]$$
$$= -\left\langle \left(\nabla_{\nabla f(p)} A\right)(\vec{v}), \vec{v} \right\rangle - \left\langle A_p(\vec{v}), \vec{v} \right\rangle - \left\langle A_p(\vec{v}), A_p(\vec{v}) \right\rangle g(p),$$

onde $g(p) = \left\langle p - c, N(p) \right\rangle$. Como $k(\vec{v}) = \left\langle A_p(\vec{v}), \vec{v} \right\rangle$, concluímos que

$$\nabla^2 g_p(\vec{v}, \vec{v}) = -\left\langle \left(\nabla_{\nabla f(p)} A\right)(\vec{v}), \vec{v} \right\rangle - k(\vec{v}) - \left|A_p(\vec{v})\right|^2 g(p), \ \forall \vec{v} \in T_p\Sigma.$$

Em particular, para a base ortonormal, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, formada palas direções principais de Σ em p, temos

$$\nabla^2 g_p(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = -\left\langle \left(\nabla_{\nabla f(p)} A\right)(\vec{e}_i), \vec{e}_i \right\rangle - k_i(p) - k_i^{\,2}(p) g(p),$$

pois $k(\vec{e}_i) = k_i(p)$. Assim,

$$\Delta g(p) = \nabla^2 g_p(e_1, e_1) + \nabla^2 g_p(e_2, e_2) =$$
$$= \left[-\left\langle \left(\nabla_{\nabla f(p)} A\right)(\vec{e}_1), \vec{e}_1 \right\rangle - k_1(p) - k_1^{\,2}(p) g(p)\right] + \left[-\left\langle \left(\nabla_{\nabla f(p)} A\right)(\vec{e}_2), \vec{e}_2 \right\rangle - k_2(p) - k_2^{\,2}(p) g(p)\right] =$$
$$= -\left[\left\langle \left(\nabla_{\nabla f(p)} A\right)(\vec{e}_1), \vec{e}_1 \right\rangle + \left\langle \left(\nabla_{\nabla f(p)} A\right)(\vec{e}_2), \vec{e}_2 \right\rangle\right] - \left[k_1(p) + k_2(p)\right] - \left[k_1^{\,2}(p) + k_2^{\,2}(p)\right] g(p).$$

Como $\left\langle \left(\nabla_{\nabla f(p)} A\right)(\vec{e}_1), \vec{e}_1 \right\rangle + \left\langle \left(\nabla_{\nabla f(p)} A\right)(\vec{e}_2), \vec{e}_2 \right\rangle = tr\left(\nabla_{\nabla f(p)} A\right)$, $k_1(p) + k_2(p) = 2H(p)$ e $k_1^{\,2}(p) + k_2^{\,2}(p) = \left(k_1(p) + k_2(p)\right)^2 - 2k_1(p)k_2(p) = 4H^2(p) - 2K(p)$, então

$$\Delta g(p) = -tr\left(\nabla_{\nabla f(p)} A\right) - 2H(p) - 2\left(2H^2(p) - K(p)\right).$$

Vamos agora usar o teorema 6 e obter

$$\begin{aligned}\Delta g(p) &= -\langle \nabla f(p), \nabla (trA)(p)\rangle - 2H(p) - 2\left(2H^2(p) - K(p)\right) = \\ &= -\langle \nabla f(p), \nabla (2H)(p)\rangle - 2H(p) - 2\left(2H^2(p) - K(p)\right) = \\ &= -2\langle \nabla f(p), \nabla H(p)\rangle - 2H(p) - 2\left(2H^2(p) - K(p)\right)\end{aligned}$$

pois $k_1^{\,2}(p) + k_2^{\,2}(p) = 4H^2(p) - 2K(p)$. Assim

$$\Delta g(p) = -2\langle \nabla f(p), \nabla H(p)\rangle - 2H(p) - 2\left(2H^2(p) - K(p)\right)g(p).$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{div}\left(H\nabla f\right) &= 2\langle \nabla f(p), \nabla H(p)\rangle + H(p)\nabla f(p) = \\ &= 2\langle \nabla f(p), \nabla H(p)\rangle + 4H(p)\left(1 + H(p)g(p)\right),\end{aligned}$$

de modo que

$$\mathrm{div}\left(2H\nabla f\right)(p) + \Delta g(p) = 2\left(H(p) + K(p)g(p)\right).$$

A fórmula (15) se obtém usando o teorema 5, por integração da última igualdade.

c.q.d.

O teorema a seguir é uma aplicação das fórmulas de Minkowski. Ele caracteriza as esferas $S^2(r) \subset I\!R^3$ como as únicas superfícies regulares compactas com curvatura de Gauss constante em $I\!R^3$.

Teorema 9. *Seja $\Sigma \subset I\!R^3$ uma superfície regular (conexa) compacta cuja curvatura de Gauss K é constante. Então Σ é uma esfera de raio $r = \dfrac{1}{\sqrt{K}}$.*

Demonstração. Como já vimos a superfície Σ é a fronteira de um domínio regular e compacto $\Omega \subset I\!R^3$, e podemos supor que Σ está orientada pelo campo normal unitário que aponta para o interior de Ω. Além disso, pelo teorema 2, sabemos que K é uma constante positiva e as curvaturas normais em cada ponto (com respeito ao normal interior) são positivas. Em particular, a curvatura média é positiva em todos os seus pontos, e pelo lema 1,

$$H(p) \geq \sqrt{K} > 0, \forall p \in \Sigma, \quad (16)$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, p é um ponto umbílico de Σ.

Como $K > 0$, Σ é um ovalóide, e, assim, o teorema 4 garante que Σ é estritamente globalmente convexa em todos os seus pontos. Além disso, como $k(\vec{v}) > 0, \forall \vec{v} \in T_p\Sigma$, pois $k_i(p) > 0,$ para todo $p \in \Sigma$, e a prova do teorema 3 nos diz que

$$\nabla^2 (h_p)_{\,p}(\vec{v}, \vec{v}) = \langle A_p(\vec{v}), \vec{v}\rangle \geq 0$$

para cada ponto $p \in \Sigma$, e que a função h_p atinge em p um mínimo global estrito. Isto significa que, para cada ponto $p \in \Sigma$, tem-se $\Sigma - \{p\} \subset \mathrm{int}(\Pi_p^+)$ e, por consequência $\mathrm{int}(\Omega) \subset \mathrm{int}(\Pi_p^+)$. Isto nos diz que

$$\langle p - c, N(p)\rangle > 0,\ \forall x \in \mathrm{int}(\Omega),\ \forall p \in \Sigma.$$

Assim, se c é um ponto fixo do interior de Ω, então $\langle p - c, N(p)\rangle > 0,\ \forall p \in \Sigma.$ Se multiplicarmos a primeira fórmula de Minkowski pela constante positiva $\sqrt{K}$, temos

$$\sqrt{K}\int_\Sigma \left(1 + H(p)\langle p - c, N(p)\rangle\right)dp = 0 \Rightarrow \int_\Sigma \left(\sqrt{K} + \sqrt{K}H(p)\langle p - c, N(p)\rangle\right)dp = 0.$$

Subtraindo desta expressão a segunda fórmula de Minkowski, tem-se

$$\int_\Sigma \left(\sqrt{K} + \sqrt{K}H(p)\langle p - c, N(p)\rangle\right)dp - \int_\Sigma \left(H(p) + K(p)\langle p - c, N(p)\rangle\right)dp = 0 \Rightarrow$$

$$\int_\Sigma \left(\sqrt{K} + \sqrt{K}H(p)\langle p - c, N(p)\rangle - \left(H(p) + K(p)\langle p - c, N(p)\rangle\right)\right)dp = 0 \Rightarrow$$

$$\int_\Sigma \left(\sqrt{K} + \sqrt{K}H(p)\langle p - c, N(p)\rangle - \left(H(p) + K(p)\langle p - c, N(p)\rangle\right)\right)dp =$$

$$-\int_\Sigma\left(\left(H(p)-\sqrt{K}\right)+\left(K-\sqrt{K}H(p)\right)\langle p-c,N(p)\rangle\right)dp=0\Rightarrow$$
$$\int_\Sigma\left(\left(H(p)-\sqrt{K}\right)+\left(K-\sqrt{K}H(p)\right)\langle p-c,N(p)\rangle\right)dp=0\Rightarrow$$
$$\int_\Sigma\left(H(p)-\sqrt{K}\right)\left(1+\sqrt{K}\langle p-c,N(p)\rangle\right)dp=0,$$

onde

$$1+\sqrt{K}\langle p-c,N(p)\rangle>0,\forall p\in\Sigma.$$

Portanto, por (14) temos que $\left(H(p)-\sqrt{K}\right)\left(1+\sqrt{K}\langle p-c,N(p)\rangle\right)\geq 0$ em todos os pontos. Como a integral deve ser zero, o integrando também deve ser zero, e assim $H(p)=\sqrt{K},\forall p\in\Sigma,$ e então a superfície deve ser totalmente umbílica. Como as únicas superfícies totalmente umbílicas compactas são as esferas, concluímos que Σ é uma esfera.

c.q.d.

5.4 Superfícies paralelas. Outra demonstração da segunda fórmula de Minkowski

A segunda fórmula de Minkowski também pode ser demonstrada de outra forma, usando uma classe de superfície denominada superfícies paralelas.

Definição 17. Seja $\Sigma\subset IR^3$ uma superfície regular e orientada, com aplicação de Gauss N. Para cada $t\in IR$, o conjunto

$$\Sigma_t=\{p+tN(p):p\in\Sigma\}\subset IR^3,$$

é chamado de *superfície paralela* a Σ a uma distância t.

Uma superfície paralela Σ_t não é necessariamente uma superfície regular. Como exemplo, podemos citar a superfície paralela a uma esfera $S^2(r)$, a uma distância $t=-r$, a qual é formada por apenas um ponto: o centro da esfera.

Se Σ é compacta então existe $\varepsilon>0$ tal que Σ_t é uma superfície regular para todo $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ e a aplicação $\phi_t:\Sigma\to\Sigma_t$ dada por

$$\phi_t(p)=p_t=p+tN(p)\ \ (17)$$

é um difeomorfismo entre Σ e Σ_t (Existência de uma vizinhança tubular).

Seja $\Sigma\subset IR^3$ uma superfície regular compacta e orientada, com aplicação de Gauss N, e suponhamos que Σ_t é uma superfície regular para cada $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ e que a aplicação $\phi_t:\Sigma\to\Sigma_t$ definida por (17) é um difeomorfismo entre Σ e Σ_t. Dessa forma

$$(d\phi_t)_p(\vec{v})=\vec{v}+tdN_p(\vec{v})=\vec{v}-tA_p(\vec{v})\ \ (18)$$

para todo $p\in\Sigma$ e $\vec{v}\in T_p\Sigma.$ Isto implica que o plano tangente a Σ em p coincide com o plano tangente a Σ_t em $p_t=p+tN(p)$, pois $(d\phi_t)_p(\vec{v})=\vec{v}-tA_p(\vec{v})\in T_p\Sigma,$ e $(d\phi_t)_p(T_p\Sigma)=T_{p_t}\Sigma_t$, de modo que $N_t(p_t)=N(p),$ define uma aplicação de Gauss para Σ_t. Por isso a nomenclatura *superfície paralela.*

A aplicação de Gauss N_t verifica $N_t\circ\phi_t=N,$ de modo que para cada $p\in\Sigma$ tem-se que

$$A_p=-dN_p=-(dN_t)_{\phi_t(p)}\circ(d\phi_t)_p=(A_t)_{p_t}\circ(d\phi_t)_p,$$

onde $(A_t)_{p_t}$ denota o endomorfismo de Weingarten de Σ_t com respeito à N_t. Assim, usando (18) vemos que se $\vec{v}\in T_p\Sigma-\{\vec{0}\}$ é um autovetor do endomorfismo A_p associado ao autovalor $\lambda,$ então $\vec{v}$ também é um autovetor do endomorfismo $(A_t)_{p_t}$ com autovalor

$$\lambda_t=\frac{\lambda}{1-t\lambda}.$$

Com efeito, como $A_p(\vec{v})=\lambda\vec{v}$ então

$$
\begin{aligned}
\lambda\vec{v} = A_p(\vec{v}) &= (A_t)_{p_t}\big((d\phi_t)_p(\vec{v})\big) = \\
&= (A_t)_{p_t}(\vec{v} - t\lambda\vec{v}) = (A_t)_{p_t}((1-t\lambda)\vec{v}) \\
&= (1-t\lambda)(A_t)_{p_t}(\vec{v}).
\end{aligned}
$$

Assim, supondo, por contradição, que $1 - t\lambda = 0$ temos $t\lambda = 1$ e $\lambda\vec{v} = \vec{0}.$ Daí $\vec{v} = 1\vec{v} = (t\lambda)\vec{v} = t(\lambda\vec{v}) = \vec{0}.$ Absurdo, pois $\vec{v}$ é autovetor de A_p. Logo $1 - t\lambda \neq 0$ e então faz sentido escrever $\lambda_t = \dfrac{\lambda}{1-t\lambda}$. Logo, $(A_t)_{p_t}(\vec{v}) = \lambda_t\vec{v},$ ou seja, $\vec{v}$ também é autovetor de $(A_t)_{p_t}$.

Portanto, se $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in T_p\Sigma$ são as direções principais de Σ no ponto p com curvaturas principais associadas $k_1(p)$ e $k_2(p)$, então $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ são também as direções principais de Σ_t, em p_t, com curvaturas principais dadas por

$$
(k_i)_t(p_t) = \frac{k_i(p)}{1 - tk_i(p)},\ i = 1{,}2.
$$

Assim, a curvatura média H_t e a curvatura de Gauss K_t, da superfície paralela Σ_t, são dadas por

$$
H_t(p_t) = \frac{1}{2}\left(\frac{k_1(p)}{1-tk_1(p)} + \frac{k_2(p)}{1-tk_2(p)}\right) = \frac{H(p) - tK(p)}{1 - 2tH(p) + t^2K(p)}
$$

e

$$
K_t(p_t) = \frac{1}{2}\left(\frac{k_1(p)k_2(p)}{\big(1-tk_1(p)\big)\big(1-tk_2(p)\big)}\right) = \frac{K(p)}{1 - 2tH(p) + t^2K(p)}.
$$

Então, a primeira fórmula de Minkowski aplicada a superfície regular Σ_t é dada por

$$
\int_{\Sigma_t}\big(1 + H_t(p_t)\langle p_t - c, N_t(p_t)\rangle\big)dp_t = 0, \quad (19)
$$

onde dp_t denota um elemento de área da superfície Σ_t.

Vamos utilizar o teorema da mudança de variáveis para integrais usando o difeomorfismo $\phi_t : \Sigma \to \Sigma_t$. Como $N_t \circ \phi_t = N,$ o difeomorfismo ϕ_t preserva as orientações das superfícies e pelo teorema da mudança de variáveis para integrais, temos

$$
\int_{\Sigma_t} f(p_t)dp_t = \int_{\Sigma_t}(f \circ \phi_t)(p)\,\mathrm{jac}(\phi_t)dp = 0\,, \quad (20)
$$

para toda função $f \in C^\infty(\Sigma_t)$, onde $\mathrm{jac}(\phi_t) : \Sigma \to IR$ representa o determinante jacobiano de ϕ_t, isto é,

$$
\mathrm{jac}(\phi_t) = \frac{\langle (d\phi_t)_{p_t}(\vec{v}) \wedge (d\phi_t)_{p_t}(\vec{w}), N_t(p_t)\rangle}{\langle \vec{v} \wedge \vec{w}, N(p)\rangle},\ p \in \Sigma,
$$

para qualquer base $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ de $T_p\Sigma.$

Em particular considere a base de direções principais de Σ no ponto p, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Daí, pela fórmula (18),

$$
(d\phi_t)_{p_t}(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - tk_1(p)\vec{e}_1 = (1 - tk_1(p))\vec{e}_1
$$

e

$$
(d\phi_t)_{p_t}(\vec{e}_2) = (1 - tk_2(p))\vec{e}_2.
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
&(d\phi_t)_{p_t}(\vec{e}_1) \wedge (d\phi_t)_{p_t}(\vec{e}_2) = (1 - tk_1(p))(1 - tk_1(p))\big(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2\big) = \\
&= \big(1 - 2tH(p) + t^2K(p)\big)\big(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2\big).
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\mathrm{jac}(\phi_t) = 1 - 2tH(p) + t^2K(p),\ p \in \Sigma.
$$

Podemos então reescrever a fórmula (20) da seguinte forma

$$
\int_{\Sigma_t} f(p_t)dp_t = \int_{\Sigma_t}(f \circ \phi_t)(p)\big(1 - 2tH(p) + t^2K(p)\big)dp
$$

para toda função $f \in C^{\infty}(\Sigma_t)$. Usando a fórmula acima, na integral (17), e usando a expressão encontrada para H_t, temos

$$\int_{\Sigma_t} \left(1 + H_t(\phi_t(p))\right)\left(\langle p - c, N(p)\rangle + t\right)\left(1 - 2tH(p) + t^2 K(p)\right)dp = 0.$$

para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, onde

$$H_t(\phi_t(p)) = \frac{H(p) - tK(p)}{1 - 2tH(p) + t^2 K(p)}.$$

Isto é,

$$\int_{\Sigma} \left(1 + H(p)\langle p - c, N(p)\rangle - t\left(H(p) + K(p)\right)\langle p - c, N(p)\rangle\right)dp =$$

$$= \int_{\Sigma} \left(1 + H(p)\langle p - c, N(p)\rangle\right)dp - t\int_{\Sigma} \left(H(p) + K(p)\right)\langle p - c, N(p)\rangle dp = 0.$$

Como $\int_{\Sigma} \left(1 + H(p)\langle p - c, N(p)\rangle\right)dp = 0$, pois essa fórmula é a primeira fórmula de Minkowski, concluímos que $\int_{\Sigma} \left(H(p) + K(p)\right)\langle p - c, N(p)\rangle dp = 0$, que é a segunda fórmula de Minkowski.

c.q.d.

CONCLUSÕES

O objetivo da pesquisa foi estudar a geometria global das superfícies em duas fases. Na primeira fase, usamos um livro que usava sistemas de coordenadas para estudar essas propriedades sobre a superfície (teorema da rigidez da esfera, teorema de Hopf-Rinow, teorema de Bonnet). Na segunda, outras propriedades foram estudadas, como teorema de Hadamard, teorema da divergência e as fórmulas de Minkowski, fazendo uso de análise geométrica. Para isso, foi feito um estudo de alguns conceitos e propriedades de análise sobre a superfície, tais como derivada covariante e alguns operadores diferenciais, como gradiente, hessiano, divergente e laplaciano.

Tal estudo foi de grande importância para aumentar o conhecimento analítico e geométrico de geometria diferencial de superfícies, o que contribui para uma preparação para uma pós-graduação na área em questão.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

M. P. DO CARMO. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Sociedade Brasileira de Matemática.

P. V. DE ARAÚJO. **Geometria Diferencial.** Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 1998.

LUIS ALÍAS. **Análises Geométrico y Geometría Global das Superfícies: Una Introducción Elemental.** Universidad de Murcia.