



ESTUDO DA FASE GEOMÉTRICA ADQUIRIDA POR SISTEMAS FÍSICOS QUANTO-MECÂNICOS, E SUA IMPORTÂNCIA NO ESTUDO DA NÃO-LOCALIDADE

Camilla dos Santos Rodrigues Leite¹, Aécio Ferreira de Lima²

RESUMO

Quando um sistema se move numa evolução cíclica do estado inicial ao estado final, a função de onda adquire uma fase. A fase adquirida pelo sistema físico, em geral, é oriunda de duas contribuições: uma de natureza dinâmica e a outra de natureza geométrica. A fase geométrica é importante não apenas para os sistemas quanto- mecânicos, mas também para toda física ondulatória. A análise de um sistema quanto- mecânico unidimensional simples é utilizado para discutir a relação entre a fase geométrica e propriedades não-clássicas de estados quânticos. O sistema quântico investigado neste estudo é uma partícula presa a um poço quadrado de potencial, comumente discutido nos livros-textos, exceto pela possibilidade de as paredes do poço se movimentar adiabaticamente.

Palavras-chave: Fase Geométrica, fase dinâmica, não-localidade.

STUDY OF THE GEOMETRIC PHASE ACQUIRED BY PHYSICAL-MECHANICAL SYSTEMS AND ITS IMPORTANCE IN THE STUDY OF NONLOCALITY

ABSTRACT

When a system moves in a cyclical motion from the initial to final state, the wave function acquires a phase. The phase acquired by the physical system, in general, comes from two contributions: one from a dynamic nature and the other from a nature geometric. The geometric phase is not only important for quantum mechanics systems but also for all ondulatory physical. The analysis of a simple one-dimensional mechanical system is used to discuss the relationship between geometric phase and non-classical properties of quantum states. The quantum system investigated in this study is a particle bound to a square well potential, commonly discussed in text-books, except for the possibility that the walls of the well move adiabatically.

Keywords: Geometric phase, phase dynamics, nonlocality.

INTRODUÇÃO

Os estados quânticos são representados como vetores pertencentes a um espaço vetorial complexo (isto é, o espaço complexo de Hilbert (\mathcal{H})), responsável por descrever os sistemas quânticos, que também pode apresentar dimensões finitas ou infinitas).

Entretanto, esses estados não distinguem vetores que diferem por uma fase [1]. Então, se ψ é um vetor pertencente a \mathcal{H} , então um outro vetor ψ' definido como

¹Aluna de Curso de Bacharelado em Física, Depto. de Física, UFPG, Campina Grande, PB, E-mail: camillaslr@hotmail.com.br

²Doutor em Física, Prof. Doutor, Depto. de Física, UFPG, Campina Grande, PB, E-mail: aerciofdlima@gmail.com.br

$$\psi' = e^{i\alpha}\psi \quad ; \quad \alpha \in R \quad (1)$$

representam o mesmo estado quântico. Tem-se assim, que, na mecânica quântica, estados que diferem por uma fase global são indistinguíveis.

As fases podem ser de diversas origens. Podem ser dinâmicas quando dependem da velocidade de evolução de sistemas quânticos; geométricas quando dependem da geometria de espaço do estado, e topológicas quando dependem da estrutura topológica do espaço de configuração [2].

Neste artigo, porém, nos restringiremos apenas ao estudo das fases geométricas cujo conceito foi primeiramente introduzido em 1956 por Pancharatnam [3] em seus estudos sobre os efeitos de interferência da luz polarizada. Contudo, foi apenas em 1984 que Michael Berry [4] apresentou a fase geométrica como uma característica dos sistemas quânticos.

Berry analisou o problema de um estado quanto-mecânico que se desenvolve adiabaticamente no tempo variando lentamente o parâmetro dependente da Hamiltoniana. Ele nos mostrou que quando esses parâmetros retornam para seus valores iniciais depois de terem percorrido um "caminho fechado", a autofunção adquire um fator de fase geométrico, dependente apenas do caminho percorrido, em adição ao já bem conhecido fator de fase dinâmica $\exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int E(t) dt\right]$.

O fator de fase geométrico, analisado em termos da mecânica quântica, é também denominado como Fase de Berry.

O objetivo principal deste trabalho é procurar entender como as condições espaciais, que se traduzem em condições de contorno para a solução da equação de Schrödinger, dão origem às fases geométricas na função de onda e qual a sua respectiva importância para os sistemas mecânicos quânticos.

Para esses fins, utilizamos um sistema quanto-mecânico unidimensional simples descrito pela equação de Schrödinger representando a partícula confinada em um potencial da forma poço de potencial. As fronteiras da barreira que confinam a partícula são afastadas modificando as condições de contorno. O resultado destas mudanças é refletido na fase adquirida pela função de onda. E a maneira pela qual a fase adquirida é responsável por carregar informações sobre a não-localidade quântica é então discutida.

Segundo a mecânica quântica, denomina-se "não-localidade" à concepção segundo a qual pode haver entre objetos, comunicações com velocidades maiores que a da luz ou de forma instantânea, através do espaço-tempo. Seria uma totalidade intacta ou não separabilidade entre objetos que transcende o espaço-tempo [5].

Entretanto o conceito não-local, neste caso, é aplicado no sentido de que as propriedades de um sistema possam ser alteradas, embora aparentemente sem força alguma agir sobre elas [6].

METODOLOGIA

Para os resultados obtidos neste trabalho foram usadas propriedades da álgebra de operadores, tais quais as relações de ortogonalidade e produtos escalares (segundo a notação de Dirac). Foi utilizado o programa MAPLE para a resolução numérica de equações.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

FASE GEOMÉTRICA

Se a Hamiltoniana é independente do tempo, então a partícula que se encontra inicialmente no n th auto-estado $\psi_n(x)$,

$$H_n \psi_n = E_n \psi_n, \quad (2)$$

permanecerá nesse n th auto-estado devido ao fator de fase:

$$\psi_n(t) = e^{-iE_n t / \hbar} \psi_n(x) \quad (3)$$

Se a Hamiltoniana muda com o tempo, então, suas autofunções e seus autovalores também dependerão do tempo:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad (4)$$

Porém, de acordo com o teorema adiabático segundo o qual, se a Hamiltoniana (H) de uma partícula muda gradualmente de um estado inicial H^i para um estado final H^f , então o n th auto-estado de H^i será levado (sobre a equação de Schrödinger) para o n th auto-estado de H^f . Assim, quando H muda lentamente, temos que, a autofunção do estado evoluído difere apenas por um fator de fase do estado inicial, e como o processo ocorre quase que estaticamente, a partícula também se encontrará num estado fundamental.

Logo,

$$\psi(x,t) = \psi_n(x) e^{i\theta_n(t)} \quad (5)$$

onde,

$$\theta_n = \frac{1}{\hbar} \int H dt \quad (6)$$

Denominamos **fase dinâmica**, representada pela equação (6), o fator de fase $e^{i\theta_n(t)}$ para caso em que E_n é uma função do tempo. E a fase extra $\gamma_n(t)$ é chamada de **fase geométrica ou fase de Berry**.

Substituindo a expressão (5) na equação de Schrödinger dependente do tempo (7), temos

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad (7)$$

$$i\hbar \left[\frac{\partial \psi_n}{\partial t} e^{i\theta_n} - \frac{i}{\hbar} E_n \psi_n e^{i\theta_n} + i \frac{d\theta_n}{dt} \psi_n e^{i\theta_n} \right] = [H \psi_n] e^{i\theta_n} = E_n \psi_n e^{i\theta_n} \quad (8)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi_n}{\partial t} + i \psi_n \frac{d\theta_n}{dt} = 0$$

Tomando o produto interno* com ψ_n (assumindo que seja normalizado), obtemos,

$$\frac{d\theta_n}{dt} = i \left\langle \psi_n \left| \frac{\partial \psi_n}{\partial t} \right. \right\rangle \quad (9)$$

Como $\psi_n(x,t)$ depende do tempo devido ao parâmetro $R(t)$ (definido, em nosso caso, como a largura do poço quadrado infinito) da Hamiltoniana que evolui temporalmente, podemos escrever,

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \psi_n}{\partial R} \frac{dR}{dt} \quad (10)$$

Logo, substituindo (10) em (9), temos

$$\frac{d\theta_n}{dt} = i \left\langle \psi_n \left| \frac{\partial \psi_n}{\partial R} \frac{dR}{dt} \right. \right\rangle \quad (11)$$

Integrando (11), obtemos

$$\theta_n = i \int_{R_i}^{R_f} \left\langle \psi_n \left| \frac{\partial \psi_n}{\partial R} \right. \right\rangle dR \quad (12)$$

onde, R_i e R_f correspondem respectivamente ao valor inicial e final de $R(t)$.

Então, se o Hamiltoniano de uma partícula retornar ao estado inicial depois de transcorrido um

* O produto interno, definido na notação de Dirac, pode ser representado por $\int \psi_n^* \psi_n dx \rightarrow \langle \psi | \psi \rangle$, onde ψ_n^* é o conjugado complexo de ψ_n .

tempo T, teremos que $R_i = R_f$, assim $y_n(T) = 0$.

Entretanto, será de interesse estudar o caso em que apenas um parâmetro da Hamiltoniana mude. Supondo que existam N deles: R_1, R_2, \dots, R_N ; neste caso podemos escrever (12) como:

$$y_n(T) = i \oint_{\mathcal{R}} \langle \psi | \nabla_{\mathbf{R}} | \psi \rangle \cdot d\mathbf{R} \quad (13)$$

onde $\vec{R} = (R_1, R_2, \dots, R_N)$, e $\nabla_{\mathbf{R}}$ é o gradiente com respeito aos parâmetros R.

Agora, se a Hamiltoniana retornar ao estado original depois de um tempo T, teremos,

$$y_n(T) = i \oint \dots \quad (14)$$

A expressão obtida acima é uma integral de linha sobre uma superfície fechada, que não é zero! Pois, em geral, o fator de fase $y_n(T)$ é não-integrável.

Note que $y_n(T)$ depende apenas do caminho tomado, e não sobre o quão rápido este caminho é percorrido (desde que, obviamente, seja lento o suficiente para validar a hipótese adiabática).

A equação (14) foi obtida pela primeira vez por Berry em 1984, e $y_n(T)$ é chamada de fase de Berry.

Segundo Michael Berry, se levarmos o Hamiltoniano sobre uma curva fechada, trazendo-o de volta de seu estado original para o estado final, a fase relativa ao início e ao fim do processo é uma quantidade não arbitrária, com profundas implicações físicas.

Dessa forma, podemos afirmar que a fase de Berry é um conceito geométrico ligado ao transporte paralelo em uma superfície curva. Já que, se um vetor for deslocado paralelamente ao longo de uma curva fechada, por exemplo, sobre a superfície de uma esfera, ele formará no final com a direção inicial um ângulo característico da curvatura da superfície. Como as fases das funções de onda correspondem às direções dos vetores sobre a superfície, então quando uma fase for transportada paralelamente ao longo de uma curva fechada no espaço de estados da mecânica quântica, ela pode no final ser distinta do valor inicial. E a diferença entre os valores final e inicial é a fase de Berry [2].

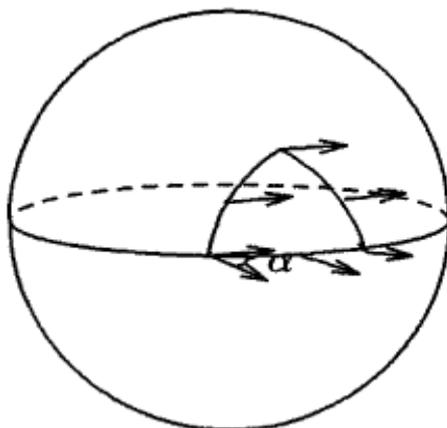


Figura 1. O transporte paralelo em uma superfície curva

APLICAÇÃO

Para uma melhor compreensão sobre a fase geométrica analisaremos um sistema quântico de um poço quadrado infinito que se expande adiabaticamente de uma largura a_1 para uma largura a_2 .

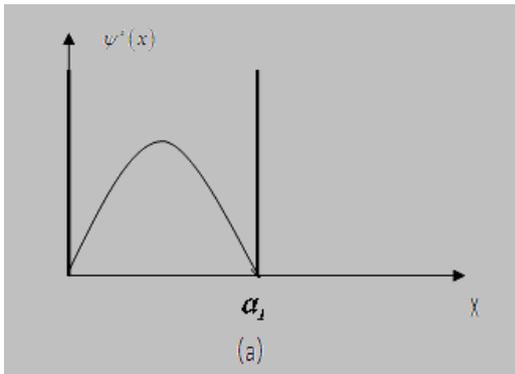


Figura (a): A partícula inicialmente encontra-se no estado fundamental de um poço quadrado infinito.

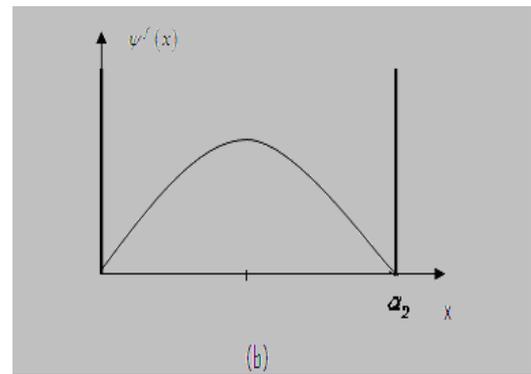


Figura (b) Se a parede direita move-se gradativamente, a partícula permanece num estado fundamental.

Podemos calcular a fase geométrica, adquirida neste processo, através da equação (13), sabendo que a função de onda do estado fundamental de uma partícula presa num poço quadrado infinito é dada por [7]:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad ; \quad \text{neste caso } R = a \quad (15)$$

Diferenciando (15) em relação à R, temos

$$\frac{d\psi_n}{dR} = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{a^{3/2}} \right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) + \sqrt{\frac{2}{a}} \left(-\frac{n\pi}{a^2}x \right) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (16)$$

Então

$$\begin{aligned} \left\langle \psi_n \left| \frac{d\psi_n}{dR} \right. \right\rangle &= \int_0^a \psi_n \frac{d\psi_n}{dR} dx \\ &= -\frac{1}{a^2} \int_0^a \text{sen}^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx - \frac{2n\pi}{a^3} \int_0^a x \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \\ &= -\frac{1}{a^2} \int_0^a \text{sen}^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx - \frac{n\pi}{a^3} \int_0^a x \text{sen}\left(\frac{2n\pi}{a}x\right) dx \\ &= -\frac{1}{a^2} \left(\frac{a}{2}\right) - \frac{n\pi}{a^3} \left[\left[\left(\frac{a}{2n\pi}\right)^2 \text{sen}\left(\frac{2n\pi}{a}x\right) - \frac{ax}{2n\pi} \cos\left(\frac{2n\pi}{a}x\right) \right] \right]_0^a \\ &= -\frac{1}{2a} - \frac{n\pi}{a^3} \left[-\frac{a^2}{2n\pi} \cos(2n\pi) \right] = -\frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} = 0 \quad (17) \end{aligned}$$

Substituindo (17) em (13) podemos verificar que $y_n(t) = 0$.

De acordo com a condição de normalização na mecânica quântica [8]:

$$\langle \psi_n | \psi_n \rangle = I \quad (18)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \nabla_R \langle \psi_n | \psi_n \rangle &= 0 \\ \nabla_R \langle \psi_n | \psi_n \rangle &= \langle \nabla_R \psi_n | \psi_n \rangle + \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle = 0 \\ \nabla_R \langle \psi_n | \psi_n \rangle &= \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle^* + \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle = 0 \Rightarrow \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle^* = -\langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \end{aligned} \quad (19)$$

Segundo a equação (19), temos que $\langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle$ é puramente imaginário. Assim, se ψ_n for real, então $\langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle$ deve, de fato, ser zero, o que implica, de acordo com a equação (13), em $y_n(t) = 0$.

Dessa forma, podemos concluir que para autofunções reais, um dado sistema quântico não possuirá fase geométrica.

Supondo agora, que a expansão ocorra a uma taxa constante ($da/dt = v$). Vamos analisar a fase dinâmica neste processo, sabendo que o autovalor de energia de uma partícula de massa m confinada num poço quadrado infinito é [7]:

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (20)$$

Assim, substituindo (20) em (6), obtemos:

$$\begin{aligned} \theta_n(t) &= -\frac{1}{\hbar} \int_0^t \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} a \dot{a} dt = -\frac{\hbar}{2m} \int_0^t \frac{1}{a^2} \frac{da}{dt} dt \\ \theta_n &= -\frac{n^2 \pi^2 \hbar}{2mv} \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{a^2} da = -\frac{\hbar}{2mv} \left[-\frac{1}{a} \right]_{a_1}^{a_2} \\ \theta_n &= \frac{n^2 \pi^2 \hbar}{2mv} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Se o poço, agora, sofrer uma contração e voltar para o seu tamanho original. Podemos facilmente verificar que a fase de Berry para o ciclo será zero, pois de acordo com a equação (13) quando $R_f = R_i \Rightarrow y_n(t) = 0$.

Vamos agora, introduzir um fator de fase numa função de onda originalmente real para torná-la complexa, a fim de evitar que a fase Berry se anule.

Desse modo, considere,

$$\psi'_n(x, t) = e^{i\varphi_n(R)} \psi_n(x, t) \quad ; \text{ onde } \psi_n \text{ e } \varphi_n \in \mathbb{R} \quad (22)$$

Então,

$$\nabla_R \psi'_n = e^{i\varphi_n} \nabla_R \psi_n + i(\nabla_R \varphi_n) e^{i\varphi_n} \psi_n \quad (23)$$

Assim, de (23) temos

$$\langle \psi'_n | \nabla_R \psi'_n \rangle = e^{-i\varphi_n} e^{i\varphi_n} \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle + i e^{-i\varphi_n} (\nabla_R \varphi_n) e^{i\varphi_n} \langle \psi_n | \psi_n \rangle \quad (24)$$

Mas $\langle \psi_n | \psi_n \rangle = 1$ e para $\psi_n \in \square$ vemos que, de acordo com (19), $\langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle = 0$. Logo, podemos reescrever (24) como:

$$\langle \psi'_n | \nabla_R \psi'_n \rangle = i(\nabla_R \varphi_n) \quad (25)$$

Substituindo (25) em (13), obtemos:

$$y'_n(t) = i \int_{R_i}^{R_f} i \nabla_R (\varphi_n) \square \quad \left[\gamma_n(R_f) - \varphi_n(R_i) \right] \quad (26)$$

Substituindo (6) em (5), de uma forma geral temos:

$$\Psi_n(x, t) = \psi_n(x, t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t E_n(t') dt'} e^{i y_n(t)} \quad (27)$$

E substituindo (26) em (27), podemos escrever:

$$\Psi'_n(x, t) = \psi'_n(x, t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t E_n(t') dt'} e^{-i[\varphi_n(R_f) - \varphi_n(R_i)]} \quad (28)$$

Em particular, quando o estado quântico sofre uma evolução, de modo que $\varphi_n(R_f) = \varphi_n(R_i)$, ou seja, uma curva fechada, $y'_n(t) = 0$.

Portanto, para que a fase de Berry, de um determinado sistema quântico, não seja nula precisamos de mais do que um parâmetro da Hamiltoniana dependente do tempo e de uma Hamiltoniana que gere autofunções complexas não triviais.

Dessa forma, vamos novamente analisar o problema unidimensional de uma partícula de massa m confinada num poço de potencial infinito, cuja parede se movimenta linearmente a uma taxa constante v . De modo que o comprimento do poço no tempo t é $L(t) = L_0 + vt$ com $L_0 = L(0)$, sendo o parâmetro v (a velocidade da parede), um valor positivo na expansão e negativo na contração do poço.

Daremos ênfase, agora, ao fato de que as fronteiras do potencial $L(t)$ e a trajetória da partícula $x(t)$ são funções que evoluem com o tempo constituindo uma curva (aberta ou fechada) suave $C = \{\psi(t) = \psi(x(t), L(t), t)\}$, subdividida em N partes. De modo que as subdivisões sejam determinadas em t_0, t_1, \dots, t_N .

Assim os valores de $x(t)$ e $L(t)$, para esses pontos podem, ser escritos como [6]

$$\begin{aligned} x_0 &= x(t_0), & x_1 &= x(t_1), & \dots, & x_N &= x(t_N), \\ L_0 &= L(t_0), & L_1 &= L(t_1), & \dots, & L_N &= L(t_N). \end{aligned}$$

Dessa maneira, cada caminho do sistema físico, pode ser representado por uma seqüência discreta de estados quânticos $\{\psi_0 = \psi(x_0, L_0, t_0), \psi_1 = \psi(x_1, L_1, t_1), \dots, \psi_N = \psi(x_N, L_N, t_N)\}$.

O operador Hamiltoniano dependente do tempo é escrito como [8]:

$$H(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t) \quad (29)$$

E a função de energia potencial $V(x,t)$, para o nosso problema, é definida como zero se $0 < x < L(t)$, e infinito caso contrário.

A solução exata da equação de Schrödinger dependente do tempo (7) que satisfaz as condições de contorno é dada por [8]

$$\psi(x, L, t) = \sum_n b_n \varphi_n(x, L, t) \quad (30)$$

onde, os coeficientes de projeção b_n independem do tempo e [6-9]

$$\varphi_n(x, L, t) = (2/L)^{1/2} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{i\left(\frac{mvx^2}{2\hbar} - \frac{n^2\pi^2\hbar}{nv}\left(\frac{L_0}{L}\right)\right)} e^{-i\left(\frac{E_n}{\hbar}t - \dots\right)} \quad (31)$$

onde $E_n(t) = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2}$. Da equação (31) podemos observar que o fator de fase provém das alterações nas condições de contorno do sistema.

A fase quântica decorrente de uma evolução geral do sistema quântico associada a uma curva suave C é constituída de duas partes: uma parte dinâmica dada pela equação (6) e uma parte geométrica dada pela equação (13). A fase total é, então, constituída de duas contribuições [1]:

$$\alpha[C] = \theta[C] + \gamma[C] \quad (32)$$

Sendo,

$\alpha[C] \equiv$ fase total associada à curva C

$\theta[C] \equiv$ fase dinâmica associada à curva C

$\gamma[C] \equiv$ fase geométrica associada à curva C

Vamos denotar agora, o produto interno como (\dots) e considerar nossa curva C como uma curva poligonal (aberta ou fechada) constituída por N arcos geodésicos conectados de t_0 para t_1 , de t_1 para t_2, \dots , de t_{N-1} para t_N . De modo que os vetores $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$ estejam respectivamente sob $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$ e assumindo que todos os produtos internos $(\psi_0, \psi_1), (\psi_1, \psi_2), \dots, (\psi_{N-1}, \psi_N)$ sejam não nulos.

Assim, de acordo com a expressão de Bargmann dada por [1] a fase geométrica pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \gamma[C] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \arg(\psi_0, \psi_1), (\psi_1, \psi_2), \dots, (\psi_{N-1}, \psi_N), (\psi_N, \psi_0) \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \arg(\psi_0, \psi_N) - \arg \prod_{i=0}^N (\psi_i, \psi_{i+1}) \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

E fazendo uma expansão, de primeira ordem, em série de Taylor, no segundo termo, do lado direito, da expressão acima,

$$\begin{aligned} \gamma[C] &\cong \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \arg(\psi_0, \psi_N) - \arg \prod_{i=0}^N \left(\psi_i, \psi_i + \delta t_i \frac{\partial \psi_i}{\partial t_i} + \delta x_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} + \delta L_i \frac{\partial \psi_i}{\partial L_i} \right) \right\} \\ &\cong \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \arg(\psi_0, \psi_N) - \arg \prod_{i=0}^N \left((\psi_i, \psi_i) + \left(\psi_i, \delta t_i \frac{\partial \psi_i}{\partial t_i} \right) + \left(\psi_i, \delta x_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \right) + \left(\psi_i, \delta L_i \frac{\partial \psi_i}{\partial L_i} \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cong \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \arg(\psi_0, \psi_N) - \arg \prod_{i=0}^N \left(1 + \left(\psi_i, \delta t_i \frac{\partial \psi_i}{\partial t_i} \right) + \left(\psi_i, \delta x_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \right) + \left(\psi_i, \delta L_i \frac{\partial \psi_i}{\partial L_i} \right) \right) \right\} \\
&\cong \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \arg(\psi_0, \psi_N) - \arg \prod_{i=0}^N \left(1 + \delta t_i \left(\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial t_i} \right) + \delta x_i \left(\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \right) + \delta L_i \left(\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial L_i} \right) \right) \right\} \\
&\cong \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \arg(\psi_0, \psi_N) - \arg \left[\exp \left(\sum_{i=0}^N \delta t_i \left(\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial t_i} \right) + \sum_{i=0}^N \delta x_i \left(\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=0}^N \delta L_i \left(\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial L_i} \right) \right) \right] \right\} \\
&\cong \arg(\psi_0, \psi_N) - \arg \left[\exp \left(\int_{t_0}^t dt \left(\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial t_i} \right) + \int_{x_0}^x dx \left(\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \right) + \int_{L_0}^L dL \left(\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial L_i} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

De acordo com (19), temos que $(\psi_i, \nabla \psi_i)$ é puramente imaginário. Logo,

$$\gamma[C] = \arg(\psi(x_0, L_0, t_0), \psi(x_N, L_N, t_N)) - \arg \left[\exp \left(i \operatorname{Im} \int_{t_0}^t dt \left(\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial t_i} \right) + i \operatorname{Im} \int_{x_0}^x dx \left(\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \right) + i \operatorname{Im} \int_{L_0}^L dL \left(\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial L_i} \right) \right) \right]$$

$$\gamma[C] = \arg(\psi(x_0, L_0, t_0), \psi(x_N, L_N, t_N)) - \operatorname{Im} \left[\left(\int_{t_0}^t dt \left(\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial t_i} \right) + \int_{x_0}^x dx \left(\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \right) + \int_{L_0}^L dL \left(\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial L_i} \right) \right) \right]$$

Comparando o resultado da equação (33), obtido acima, com a equação (32), podemos verificar que

$$\text{Como, } \gamma[C] = \alpha[C] - \theta[C] \quad (34)$$

Então,

$$\alpha[C] = \arg(\psi(x_0, L_0, t_0), \psi(x_N, L_N, t_N)) \quad (35)$$

$$\theta[C] = \operatorname{Im} \left[\left(\int_{t_0}^t dt \left(\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial t_i} \right) + \int_{x_0}^x dx \left(\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \right) + \int_{L_0}^L dL \left(\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial L_i} \right) \right) \right] \quad (36)$$

Primeiro, vamos calcular a fase total $\alpha[C]$ para a função de onda (31). De acordo com as equações (31) e (35), a fase total é expressa como

$$\arg(\varphi_n(t_0), \varphi_n(t)) = \frac{mv}{2\hbar} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} \right) + \frac{n^2 \pi^2 \hbar}{2m} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right) - \frac{1}{\hbar} \int_{t_0}^t E(t) dt \quad (37)$$

Podemos perceber que a fase dinâmica $\theta[C]$, expressa pela equação (36), é constituída por três partes que surgem essencialmente da energia, do momento e do deslocamento da barreira respectivamente.

As fases dinâmicas da equação (36) são facilmente calculadas, de modo que:

- A primeira fase dinâmica, que advinda da energia, é obtida como

$$Im \int_{t_0}^t dt \left(\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial t_i} \right) = -\frac{1}{2\hbar} \int_{t_0}^t E(t) dt \quad (38)$$

- A segunda fase dinâmica, que provém do momento, é dada por

$$Im \int_{x_0}^x dx \left(\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \right) = \frac{mv}{2\hbar} (x^2(t) - x_0^2) \quad (39)$$

- E a terceira fase dinâmica, que surge devido ao deslocamento da barreira é

$$Im \int_{L_0}^L dL \left(\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial L_i} \right) = \left(\frac{mvx^2}{2\hbar} + \frac{n^2\pi^2\hbar}{L} \right) \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L_0} \right) \quad (40)$$

Logo, substituindo as equações (37), (38), (39) e (40) na equação (34), obtemos a fase geométrica do sistema dada por

$$\gamma[C] = \frac{mv}{2\hbar} (x_0^2 - x^2(t)) \left(\frac{1}{L(t)} - \frac{1}{L_0} \right) \quad (41)$$

Podemos verificar na equação (41), que se $L(t) = L_0$, a fase de Berry é anulada. Portanto, de acordo com a equação (41), verifica-se que a fase geométrica ou fase de Berry é apenas originária das alterações nas condições de contorno e da trajetória da partícula. Todavia, é necessário salientar que o sistema físico não está sujeito a qualquer tipo de interação ou força, e que dessa forma, são apenas as condições espaciais que afetam o seu comportamento. Daí a denominação de efeito não-local.

CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi discutido o problema quântico de um poço quadrado infinito, cuja barreira do potencial se expandia adiabaticamente com o tempo. Este sistema, devido a sua simplicidade, se mostrou adequado para o estudo da fase geométrica, denominada também fase de Berry (nome dado em homenagem a Michael Berry, que em 1984 apresentou a fase geométrica como característica de sistemas quanto-mecânicos).

Através da resolução do problema proposto fomos capazes de observar que a fase de Berry é advinda apenas das alterações nas condições de contorno do sistema.

Dessa maneira, verificamos a partir de cálculos a veracidade dos resultados teóricos. E a fim de entender a natureza desse fator de fase constatamos que ele reflete a não-localidade quântica. Pois, sem aparentemente força alguma agir sobre o sistema, observamos que as propriedades do mesmo, podem ser alteradas devido ao seu comportamento.

O entendimento deste fenômeno promete trazer vários avanços nas mais diversas áreas físicas. Uma das aplicações em potencial desta fase é que vem causando grande interesse na computação quântica é o fato de as evoluções geométricas desta fase serem facilmente controláveis, e por não dependerem da evolução temporal, são imunes a efeitos capazes de destruir a coerência quântica.

AGRADECIMENTOS

A Deus por tudo, ao CNPq pela bolsa de Iniciação Científica, ao professor Aécio pela compreensão e paciência e aos meus colegas de graduação pelo auxílio e disponibilidade.

REFERÊNCIAS

- [1] Mukunda, N. ;Simon, R. Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. I. General Formalism. Annals of Physics, v.228, p.205-268, 1993.
- [2] Gutierrez, J. M. Fases Cuánticas Geométricas. Monografía (Licenciatura em Física), Faculdade de Ciências Físicas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima-Peru. 2005.
- [3] Pancharatnam, S. Generalized Theory of Interferência, and its applications, Proc. Indian Acad. Sci. A, v. 44,p. 247, 1956.
- [4] Berry, M. V. Quantal Phase Factor Accompanying Adiabatic Changes, Proc. Roy. London. Soc. A, v.392, p.45, 1984.
- [5] Mokross. B. J. Não Localidade na Mecânica Quântica. Revista Brasileira de Ensino de Física, v.19, n.1, 1997.
- [6] Wang. Z. S. Geometric Phase Induced by Quantum nonlocality. Physics Letters A, v. 372, p. 775-778, 2008.
- [7] Griffiths, D. J. Introduction to Quantum Mechanics. Prentice Hall, New Jersey, 1995
- [8] Liboff, R. L. Introductory quantum mechanics. Addison-Wesley, United States of America, 1980
- [9] Doescher, S. W. ;Rice, M. H. Infinitesimal Square- Well Potential with a Moving Wall. AM. J. Phys., v.37, n.12, 1969.

