

# Análise da Estabilidade e do Desempenho de Sistemas de Controle via Redes de Comunicações com Atraso Aleatório

Edmar José do Nascimento

Dissertação de Mestrado submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre no domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Processamento da Informação -  
Comunicações

Prof. Francisco Marcos de Assis, Dr.

Orientador

Prof. Antônio Marcus Nogueira de Lima, Dr.

Orientador

Campina Grande, Paraíba, Brasil

©Edmar José do Nascimento, Dezembro de 2004



N244a Nascimento, Edmar Jose do  
Análise da estabilidade e do desempenho de sistemas de controle via redes de comunicações com atraso aleatório / Edmar Jose do Nascimento. - Campina Grande, 2004.  
75 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.

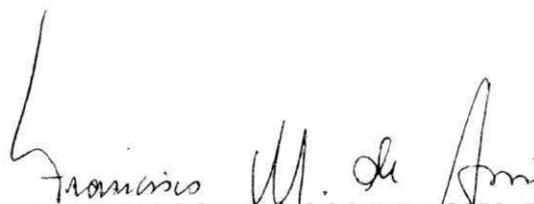
1. Atraso Aleatório 2. Controle Estocástico 3. Redes Industriais 4. Análise Probabilística 5. Dissertação I. Assis, Francisco Marcos de, Dr. II. Lima, Antonio Marcus Nogueira, Dr. III. Universidade Federal de Campina Grande - Campina Grande (PB) IV. Título

CDU 681.5.012(043)

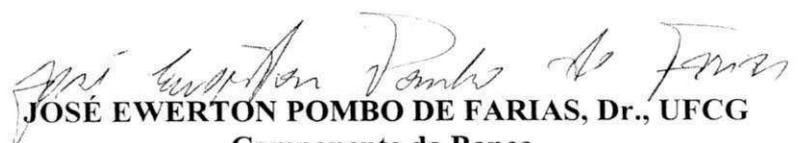
**ANÁLISE DA ESTABILIDADE E DO DESEMPENHO DE SISTEMAS DE  
CONTROLE VIA REDES DE COMUNICAÇÕES COM ATRASO ALEATÓRIO**

**EDMAR JOSÉ DO NASCIMENTO**

Dissertação Aprovada em 07.12.2004

  
**FRANCISCO MARCOS DE ASSIS, Dr., UFCG**  
**Orientador**

  
**ANTONIO MARCUS NOGUEIRA LIMA, Dr., UFCG**  
**Orientador**

  
**JOSÉ EWERTON POMBO DE FARIAS, Dr., UFCG**  
**Componente da Banca**

  
**PÉRICLES REZENDE BARROS, Ph.D., UFCG**  
**Componente da Banca**

CAMPINA GRANDE - PB  
Dezembro - 2004



## Dedicatória

Este trabalho é dedicado a minha família, especialmente aos meus irmãos e a minha namorada Christiane.

## Agradecimentos

- À Deus por tudo;
- Aos meus pais, José Nivaldo do Nascimento e Maria do Socorro Nascimento, pelo amor e carinho que sempre me foram dados;
- Aos meus irmãos Sandra, José Luís, Maria de Lourdes e Sérgio por estarem sempre perto durante todos esses anos;
- À minha namorada Christiane pelo apoio e compreensão dispensados;
- Aos meus orientadores Francisco Marcos de Assis e Antônio Marcus Nogueira de Lima pela paciência e pelas valiosas contribuições dadas;
- Aos colegas do Gepoti, especialmente a Rex e a Luiz Felipe, pela amizade;
- Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica que de uma certa forma contribuíram para o bom andamento do meu trabalho;
- À CAPES pelo apoio financeiro.

## Resumo

Nessa dissertação são analisados o desempenho e a estabilidade de Sistemas de Controle via Redes (SCR) nos quais o processo de comunicação entre os elementos do sistema ligados à rede, ocasiona atrasos aleatórios. Esses atrasos tendem a degradar o desempenho do sistema e podem até mesmo desestabilizá-lo. Os modelos de atraso aleatório são motivados tanto pela natureza das redes (protocolos de comunicação) quanto pelas características temporais dos elementos do sistema (redes guiadas a evento ou guiadas pelo tempo). Ao considerar-se a natureza aleatória do atraso, adiciona-se complexidade à análise e ao projeto dos sistemas de controle, pois os sistemas passam a ser variantes no tempo. Com isso, novas ferramentas de análise que possam auxiliar no projeto de tais sistemas devem ser investigadas.

Para auxiliar o projeto e a análise de SCR com atrasos aleatórios é proposto nessa dissertação, um tipo de análise de estabilidade baseada na função densidade de probabilidade (FDP) dos autovalores do sistema em malha fechada. Com a FDP pode-se determinar a probabilidade de se ter modos instáveis para uma dada configuração dos parâmetros do sistema. Uma outra medida explorada nesse trabalho é a covariância do estado do sistema. Essa medida permitiu analisar a evolução do comportamento probabilístico das variáveis do sistema ao longo do tempo. A combinação da FDP com as medidas de covariância e com o cálculo de funções de custo, objetivando a comparação de estratégias de controle disponíveis, constitui o ponto central desse trabalho.

## Abstract

In this thesis we analyze the performance and stability of a Networked Control System (NCS) that presents random delays in the communication process among the system's devices connected to the network medium. These delays may degrade the system's performance and even destabilize it. Random delay models are motivated by both network features (protocols) and timing features of system's devices (event and time driven networks). The complexity of control systems analysis and design is increased when a random delay model is adopted. This happens because the system is no longer time-invariant, so that new analysis tools must be investigated.

To help the design and the analysis of NCS with random delays, it is proposed in this thesis a stability analysis method based on probability density functions (pdf) of the closed-loop eigenvalues. By using the pdf it is possible to determine the probability of having unstable modes for a given system configuration. Another useful tool is the state covariance. This tool allows analyzing the evolution of the probabilistic behavior of the system's variables through the time. The main contribution of this thesis is in the combination of pdfs, covariance and cost functions in order to compare available control strategies.

# Lista de Símbolos e Abreviaturas

*BEB* - Recuo Binário Exponencial (*Binary Exponential Backoff*).

*CAN* - *Controller Area Network*.

*CSMA/AMP* - Acesso Múltiplo Sensível à Portadora com Arbitragem por Prioridade de Mensagens (*Carrier Sense Multiple Access with Arbitration by Message Priority*)

*CSMA/CD* - Acesso Múltiplo Sensível à Portadora com Detecção de Colisão (*Carrier Sense Multiple Access with Collision Detection*).

*LTI* - Linear Invariante no Tempo (*Linear Time-Invariant*).

*MAC* - Controle de Acesso ao Meio (*Medium Access Control*).

*OSI* - Interconexão de Sistemas Abertos (*Open Systems Interconnection*).

*SCR* - Sistema de Controle via Redes (*Networked Control System*).

*SISO* - *Single-Input Single-Output*.

*UDP* - (*User Datagram Protocol*).

# Lista de Figuras

2.1	Estrutura geral de um SCR - Os elementos do sistema estão ligados diretamente à rede. . . . .	5
2.2	Estrutura hierárquica - Subsistemas independentes ligados à rede através dos seus controladores. $S_1$ , $S_2$ , $A_1$ , $A_2$ , $C_1$ e $C_2$ representam os sensores, atuadores e controladores dos subsistemas 1 e 2 respectivamente, enquanto que $CM$ representa o controlador central ( <i>Master</i> ). . . . .	6
3.1	Modelo de Referência OSI. O modelo é organizado em sete camadas, sendo que a camada de Enlace de Dados é composta pelas subcamadas MAC ( <i>Medium Access Control</i> ) e LLC ( <i>Link Logical Control</i> ). . . . .	15
3.2	Protocolo CSMA/CD. (a) Os nós A e B escutam o meio; (b) A e B detectam o meio livre e começam a transmitir; (c) Ocorre colisão entre os quadros; (d) A colisão é detectada por ambos os nós, que abortam as suas respectivas transmissões. . . . .	16
3.3	Diagrama de um SCR. Destaca-se nesta figura o atraso sensor-controlador $\tau_{SC}$ e o atraso controlador-atuador $\tau_{CA}$ . . . . .	17
3.4	Medições do atraso (em segundos) num horizonte de 2000 amostras. Na figura superior, é mostrado o atraso sensor-controlador $\tau_{SC}$ e na figura inferior é mostrado o atraso controlador-atuador $\tau_{CA}$ (Figura retirada de Nilsson [1]). . . . .	17
3.5	Medições do atraso (em segundos) num horizonte de 2000 amostras. Na figura superior, é mostrado o atraso sensor-controlador $\tau_{SC}$ e na figura inferior é mostrado o atraso controlador-atuador $\tau_{CA}$ (Figura retirada de Nilsson [1]). . . . .	18
3.6	Configuração <i>ad-hoc</i> . Não existe uma estrutura fixa e todos os nós podem se comunicar uns com os outros. . . . .	19

3.7	Configuração hierárquica. Os nós se comunicam através dos pontos de acesso. . . . .	20
3.8	<i>Handshake</i> de quatro modos do protocolo CSMA/CA. RTS( <i>Request To Send</i> ), CTS ( <i>Clear To Send</i> ) e ACK ( <i>Acknowledgement</i> ) . . . . .	20
3.9	Histograma do atraso total sob condições de rede ideais. A distribuição do atraso é aproximadamente normal com média $3,56ms$ e desvio padrão $0,06ms$ (Figura retirada de Ploplys <i>et al.</i> [2]). . . . .	22
3.10	Medições do atraso (em segundos) num horizonte de 1000 amostras. Na figura superior, é mostrado o atraso sensor-controlador $\tau_{SC}$ e na figura inferior é mostrado o atraso controlador-atuador $\tau_{CA}$ (Figura retirada de Nilsson [1]). . . . .	24
3.11	Modelo para a FDP do atraso numa rede que utiliza o protocolo CAN. Essas figuras se referem ao caso em que há um nó com prioridade mais alta que compete pelo barramento. A figura superior se refere à FDP do atraso sensor-controlador e a figura inferior se refere à FDP do atraso controlador-atuador (Figura retirada de Nilsson [1]). . . . .	24
3.12	Esquema de funcionamento de uma rede com passagem de ficha. Apenas o nó que possui a ficha pode transmitir. . . . .	25
4.1	Diagrama de um SCR com um sensor, um controlador e um atuador. A malha de controle é fechada através da rede. . . . .	28
4.2	Diagrama temporal onde são mostrados os instantes da amostragem no sensor (linhas verticais pontilhadas) e os instantes de chegada de dados no controlador e no atuador (barras verticais). Os símbolos $y_k$ , $u_k$ , $\tau_k^{SC}$ e $\tau_k^{CA}$ representam a saída do processo, o sinal de controle, o atraso sensor-controlador e o atraso controlador-atuador no instante de tempo $kh$ , respectivamente. . . . .	29
4.3	Gráfico de $ \lambda_1 $ versus $\eta$ para $a = 1$ , $h = 0,25$ e $K = 2$ . . . . .	39
4.4	Gráfico de $ \lambda_2 $ versus $\eta$ para $a = 1$ , $h = 0,25$ e $K = 2$ . . . . .	39
4.5	Estimativa da FDP para diferentes valores de $\sigma$ . Na esquerda $\sigma = 0,1$ e na direita $\sigma = 0,3$ . . . . .	43
4.6	Pêndulo com base rotativa. O objetivo de controle é manter o braço vertical na posição $\theta = 0$ através de um torque aplicado no braço horizontal (Figura retirada de Ploplys <i>et al.</i> [2]). . . . .	44

4.7	Diagrama de um SCR cujo processo é representado por um modelo de um pêndulo invertido. . . . .	47
4.8	Função de Custo. . . . .	49
4.9	Raio espectral da matriz $\mathcal{A}$ em função do intervalo de amostragem $h$ . . . . .	50
5.1	Estimativa da FDP dos autovalores para $h = 0,010$ com $\tau_k \sim [0, h]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio. . . . .	58
5.2	Estimativa da FDP dos autovalores para $h = 0,015$ com $\tau_k \sim [0, h]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio. . . . .	59
5.3	Estimativa da FDP dos autovalores para $h = 0,020$ com $\tau_k \sim [0, h]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio. . . . .	59
5.4	Estimativa da FDP dos autovalores para $h = 0,025$ com $\tau_k \sim [0, h]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio. . . . .	60
5.5	Estimativa da FDP dos autovalores para $h = 0,010$ com $\tau_k \sim [0, h/2]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio. . . . .	60
5.6	Estimativa da FDP dos autovalores para $h = 0,015$ com $\tau_k \sim [0, h/2]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio. . . . .	61
5.7	Estimativa da FDP dos autovalores para $h = 0,020$ com $\tau_k \sim [0, h/2]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio. . . . .	61
5.8	Estimativa da FDP dos autovalores para $h = 0,025$ com $\tau_k \sim [0, h/2]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio. . . . .	62

5.9	Estimativa da FDP dos autovalores para $h = 0,010$ com $\tau_k \sim [h/2, h]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio. . . . .	62
5.10	Estimativa da FDP dos autovalores para $h = 0,015$ com $\tau_k \sim [h/2, h]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio. . . . .	63
5.11	Estimativa da FDP dos autovalores para $h = 0,020$ com $\tau_k \sim [h/2, h]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio. . . . .	63
5.12	Estimativa da FDP dos autovalores para $h = 0,025$ com $\tau_k \sim [h/2, h]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio. . . . .	64
5.13	Evolução das variáveis do sistema após a aplicação de uma perturbação no estado inicial do processo. Para essa simulação, considerou-se $h = 0,025$ e o controlador projetado negligenciando a rede. . . . .	64

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Organização do trabalho . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Sistemas de Controle via Redes</b>	<b>4</b>
2.1	Introdução . . . . .	4
2.2	Revisão Bibliográfica . . . . .	6
2.2.1	Análise de Redes e Protocolos . . . . .	7
2.2.2	Projeto de Controladores e Mecanismos de Compensação . . . . .	8
2.2.3	Ferramentas de Análise de Desempenho . . . . .	9
2.3	Conclusões . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Redes de Comunicação</b>	<b>12</b>
3.1	Introdução . . . . .	12
3.2	Ethernet . . . . .	14
3.2.1	Controle de Acesso ao Meio . . . . .	15
3.2.2	Características do Atraso . . . . .	16
3.3	Ethernet sem Fio . . . . .	19
3.3.1	Controle de Acesso ao Meio . . . . .	19
3.3.2	Características do Atraso . . . . .	21
3.4	DeviceNet . . . . .	21
3.4.1	Controle de Acesso ao Meio . . . . .	22
3.4.2	Características do Atraso . . . . .	23
3.5	ControlNet . . . . .	23
3.5.1	Controle de Acesso ao Meio . . . . .	25
3.5.2	Características do Atraso . . . . .	25
3.6	Conclusões . . . . .	26

<b>4</b>	<b>Sistemas de Controle via Redes com Atraso Aleatório</b>	<b>27</b>
4.1	Modelo do Sistema . . . . .	27
4.1.1	Formulação Matemática . . . . .	30
4.2	Ferramentas de Análise . . . . .	32
4.2.1	Cálculo da Covariância . . . . .	32
4.2.2	Função de Custo Quadrática . . . . .	34
4.2.3	Cálculo da FDP dos Autovalores do Sistema . . . . .	34
4.2.4	Estimativa da FDP dos Autovalores do Sistema . . . . .	41
4.3	Influência do Atraso em SCR . . . . .	43
4.3.1	Pêndulo com Base Rotativa . . . . .	44
4.3.2	Pêndulo Invertido . . . . .	47
4.4	Conclusões . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>52</b>
5.1	Processo de Primeira Ordem sem Ruído . . . . .	52
5.1.1	Realimentação de Estados Desconsiderando a Rede . . . . .	53
5.1.2	Realimentação de Estados Considerando o Atraso Médio . . . . .	54
5.1.3	Simulações . . . . .	56
5.2	Processo de Primeira Ordem com Ruído . . . . .	58
5.2.1	Realimentação de Estados Desconsiderando a Rede . . . . .	65
5.2.2	Realimentação de Estados Considerando o Atraso Médio . . . . .	66
5.2.3	Simulações . . . . .	66
5.3	Conclusões . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>70</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Tradicionalmente, a arquitetura de comunicação ponto a ponto tem sido empregada pela indústria nos sistemas de controle durante décadas [3]. Numa arquitetura ponto a ponto, há uma ligação física, através de fios ou cabos, entre os elementos do sistema para os quais é necessário haver comunicação. Entretanto, com a evolução dos sistemas de controle, surgiram novos requisitos de projeto - modularidade, descentralização das ações de controle, diagnóstico integrado, facilidade de manutenção e redução de custos - que não podem ser atendidos através da utilização de uma arquitetura ponto a ponto [3]. Por outro lado, o avanço da tecnologia em redes de comunicação permitiu tanto a diversificação dos tipos de redes existentes quanto a redução dos custos de instalação, o que tornou a utilização das redes bastante atrativa para o projeto de sistemas de controle. Os sistemas de controle em que as malhas são fechadas através de uma rede de comunicação em tempo real, são chamados de Sistemas de Controle via Redes, SCR (ou NCS, para *Networked Control Systems*) [4].

A inserção de uma rede de comunicação para interligar os elementos de um sistema de controle torna, entretanto, a análise e o projeto do sistema mais complexos do que nos sistemas convencionais. Essa complexidade advém do fato que características inerentes às redes de comunicações, tais como o atraso de comunicação entre nós ligados à rede, a perda de pacotes durante a comunicação e a transmissão de pacotes através de múltiplos percursos [5] exigem a reavaliação de resultados amplamente utilizados na teoria de controle, que são obtidos considerando-se hipóteses simplificadoras tais como controle sincronizado e atuação sem atraso. Essas hipóteses são difíceis de serem atendidas quando são considerados SCR em um sentido mais amplo, ou seja, quando estes sistemas estão distribuídos ao longo de uma vasta área geográfica e quando os

seus componentes estão conectados a tipos genéricos de redes. Em tais situações, é bastante oneroso e às vezes, impossível, dispor-se de um relógio global para o sistema.

Além do fato da análise de um SCR ser mais complexa, os problemas relativos ao desempenho do sistema também merecem ser analisados. Quando há atraso, ocorre um aumento na dimensão do sistema analisado em relação ao mesmo sistema sem atraso, o que ocasiona a inserção de novos pólos na dinâmica do sistema que por sua vez, podem fazer com que o sistema apresente uma resposta mais lenta e oscilante [2].

Nesta dissertação, analisa-se a influência do atraso ocasionado pelas redes no desempenho e na estabilidade de SCR. Nesta análise, considera-se um modelo no qual há um sensor, um controlador e um atuador conectados através de uma rede de comunicação. Além disso, considera-se que o sensor é guiado pelo tempo (*time driven*) enquanto que o controlador e o atuador são guiados por eventos (*event driven*). Essas hipóteses acerca do comportamento temporal do sistema juntamente com a análise das características de acesso ao meio para vários tipos de rede, motivam a utilização de um modelo de atraso aleatório. Por essa razão, ao longo dessa dissertação considera-se que o atraso de comunicação entre os elementos do sistema (sensor, controlador e atuador) pode ser modelado como uma variável aleatória. A partir desse modelo, pode-se analisar a estabilidade a partir das funções densidade de probabilidade (FDP) dos autovalores do sistema, o que constitui a principal contribuição deste trabalho. A FDP também auxilia no projeto dos sistemas de controle, pois ela fornece uma indicação da localização mais provável dos pólos do sistema para os diversos tipos de estratégias de controle existentes.

## 1.1 Organização do trabalho

A dissertação está estruturada da seguinte maneira.

No capítulo 2, são apresentadas as vantagens, desvantagens e problemas apresentados por SCR. Também nesse capítulo, é apresentada uma revisão bibliográfica acerca de temas relacionados a SCR.

No capítulo 3, apresenta-se uma breve descrição das redes de comunicação que podem ser usadas em SCR. É de interesse, nesse capítulo, entender o funcionamento dos protocolos de redes, bem como as características do atraso para os diversos tipos de rede existentes.

No capítulo 4, descreve-se o modelo do SCR que será analisado ao longo da dissertação. Para esse modelo, são introduzidas ferramentas de análise (cálculo da covariância e a análise da FDP). Por fim, é mostrado através de exemplos como o atraso influencia no desempenho e na estabilidade de SCR.

No capítulo 5, são analisados alguns exemplos a partir do modelo e da fundamentação teórica apresentada no capítulo 4. Nesses exemplos, são comparadas algumas estratégias de controle já existentes.

No capítulo 6, é feita uma recapitulação dos resultados obtidos e são apresentadas perspectivas para trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# Sistemas de Controle via Redes

### 2.1 Introdução

Sistemas de Controle via Redes (SCR) são sistemas de controle em que a malha de controle é fechada através de uma rede de comunicação em tempo real. A característica fundamental desse tipo de sistema é que a informação (sinal de referência na entrada, saída da planta, sinal de entrada, etc.) é transmitida através de uma rede de comunicação à qual os componentes do sistema (sensores, controladores, atuadores, etc.) estão diretamente conectados. Na Figura 2.1 tem-se uma ilustração desse tipo de sistema.

A estrutura de um SCR pode ser classificada como sendo do tipo direta [6]. Numa estrutura direta, os componentes do sistema estão ligados diretamente à rede. Um outro tipo de estrutura é a do tipo hierárquica na qual há vários subsistemas, cada um contendo os seus próprios sensores, controladores e atuadores. Numa estrutura hierárquica, apenas os controladores estão conectados à rede. Esses controladores por sua vez, se comunicam com um controlador central através da rede a fim de receberem informações tais como pontos de ajuste (*set-point*). Esse tipo de estrutura é mostrado na Figura 2.2.

As principais vantagens de um SCR são a redução no volume de cabos, a facilidade de diagnóstico e de manutenção do sistema e o processamento distribuído. Por outro lado, a inserção de uma rede de comunicação na malha de controle torna a análise e o projeto mais complexo que nos sistemas de controle usuais. Essa complexidade adicional advém do fato de que inúmeros resultados da teoria de controle são baseados em hipóteses ideais tais como controle sincronizado e atuação e leitura de sensores sem

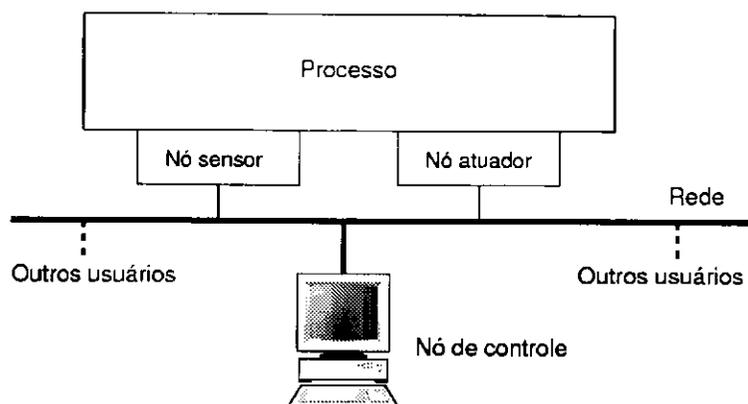


Figura 2.1: Estrutura geral de um SCR - Os elementos do sistema estão ligados diretamente à rede.

atraso. Para que haja controle sincronizado, é necessário a existência de um relógio global para o sistema, o que é em geral bastante difícil de ser implementado, bem como bastante oneroso para determinados tipos de aplicações distribuídas. No que concerne a hipótese de atuação e leitura de sensores sem atraso, esta não pode ser considerada quando o atraso induzido pela rede é da mesma ordem de grandeza que o intervalo de transmissão entre amostras sucessivas através da rede. Dessa forma, ao lidar com tal tipo de sistema é necessário reavaliar os resultados disponíveis da teoria de controle convencional antes de aplicá-los no contexto de um SCR.

De modo mais específico, ao se lidar com sistemas de controle via redes, é necessário levar em conta três problemas fundamentais. O primeiro deles é o atraso induzido pela rede (comunicação entre sensor e controlador e entre controlador e atuador). Este atraso, que pode ser constante, variante no tempo ou até mesmo aleatório, pode degradar o desempenho do sistema e até mesmo desestabilizá-lo. O segundo problema que pode ocorrer é a perda de pacotes devido a erros durante a transmissão que também leva a uma degeneração do desempenho do sistema. O terceiro problema é que a saída do processo (dados amostrados pelos sensores) pode ser transmitida através de vários pacotes de dados, devido a restrições de largura de faixa e de tamanho dos pacotes da rede. Em razão da política de acesso ao meio físico da rede que procura atender aos vários nós, há possibilidade de que alguns pacotes não cheguem a tempo para o cálculo do sinal de controle.

Dependendo do tipo de processo que está sendo controlado e da banda disponível na rede para transmissão, pode-se ainda ter problemas adicionais tais como os problemas

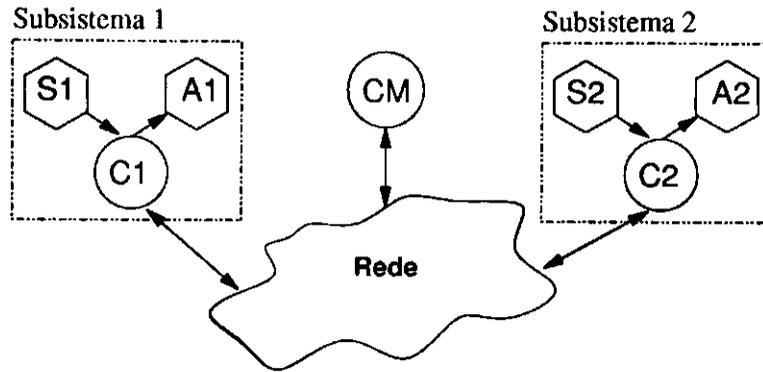


Figura 2.2: Estrutura hierárquica - Subsistemas independentes ligados à rede através dos seus controladores.  $S1$ ,  $S2$ ,  $A1$ ,  $A2$ ,  $C1$  e  $C2$  representam os sensores, atuadores e controladores dos subsistemas 1 e 2 respectivamente, enquanto que  $CM$  representa o controlador central (*Master*).

oriundos do efeito da quantização dos sinais na estabilidade. Normalmente, em SCR, esses efeitos não são significativos, porém, quando há fortes restrições de banda, faz-se necessário reduzir a quantidade de bits por amostra transmitida de modo que o erro introduzido pela quantização se torna um problema. Dependendo da amplitude do erro de quantização, o sistema pode se tornar instável, principalmente quando o processo já apresenta modos instáveis [7, 8, 9].

Nessa dissertação, é abordado apenas o problema do atraso induzido pela rede, e mais especificamente, a sua influência no desempenho e na estabilidade do sistema em malha fechada. Na seqüência deste capítulo é apresentada uma revisão bibliográfica dos trabalhos relacionados a Sistemas de Controle via Redes.

## 2.2 Revisão Bibliográfica

Em se tratando de Sistemas de Controle via Redes, há uma extensa gama de trabalhos publicados, os quais podem ser divididos nos três grupos seguintes: Análise de Redes e Protocolos, Projeto de Controladores e Mecanismos de Compensação e Ferramentas de Análise de Desempenho. No primeiro grupo, são relacionados os trabalhos que abordam questões referentes aos tipos de redes e protocolos que podem ser usados no projeto de SCR [3, 10, 11, 12, 13, 2]. No segundo grupo, são relacionados os trabalhos que se referem ao projeto de controladores e mecanismos de compensação a fim de minimizar

problemas oriundos das redes de comunicação, tais como o atraso ou a perda de pacotes [14, 15, 16, 17, 5]. No terceiro grupo, são agrupados os trabalhos analíticos de natureza geralmente teórica nos quais objetiva-se o desenvolvimento de ferramentas de análise para SCR, bem como o estabelecimento de condições necessárias para problemas como a estabilidade do sistema [6, 5, 14]. A seguir, cada grupo de trabalhos é comentado, juntamente com os artigos correspondentes.

### 2.2.1 Análise de Redes e Protocolos

No que se refere às redes e protocolos de comunicação é de interesse do projetista de um SCR conhecer o perfil do atraso de transmissão e as características do controle de acesso ao meio físico de transmissão. Nessa linha de pesquisa, muitos trabalhos foram realizados procurando responder se as redes de uso industrial e outras, tais como Ethernet e Internet podem ser usadas na construção de SCR.

Em Lian *et al.* [3] são comparados três tipos de rede: Ethernet que utiliza o protocolo CSMA/CD (Acesso Múltiplo Sensível à Portadora com Detecção de Colisão); ControlNet, que utiliza um barramento com passagem de ficha, e DeviceNet com um barramento CAN (*Controller Area Network*). Nesse artigo é feita uma descrição detalhada do Controle de Acesso ao Meio (MAC) para cada tipo de rede e são analisados parâmetros de interesse para a utilização dessas redes para fins de controle. Em se tratando do atraso, a rede Ethernet apresenta um atraso bastante pequeno quando a rede está sob baixa utilização, porém esse atraso pode aumentar consideravelmente ou até se tornar ilimitado quando a rede está sob tráfego intenso, devido ao aumento do número de colisões entre as mensagens. Como a rede ControlNet é determinística, ela apresenta um bom desempenho sob tráfego intenso, porém quando o tráfego é baixo, gasta-se a maior parte do tempo na passagem da ficha para os nós que compõem o anel lógico. Para a rede DeviceNet, pode-se garantir que mensagens com alta prioridade tenham um atraso limitado, entretanto a taxa de transmissão desse tipo de rede é baixa se comparada às anteriores. Portanto, as condições de utilização da rede irão influenciar o seu desempenho, seja qual for o tipo de rede escolhida.

Em Tovar *et al.* [10] é mostrado que é possível garantir que haja comunicação em tempo real usando redes Profibus, de modo que essas redes podem ser usadas em sistemas de controle distribuídos.

Em Lee *et al.* [11] é analisado o desempenho da rede Ethernet comutada (*switched*

*Ethernet*) em SCR. A principal característica desse tipo de rede é que nela não há colisão de quadros. Essa característica é devido ao uso de repetidores ativos no lugar dos tradicionais repetidores passivos (*hubs*) empregados numa rede Ethernet convencional. De acordo com a análise realizada, a rede Ethernet comutada apresenta um atraso de comunicação bastante pequeno que pouco influencia no desempenho de um SCR. Entretanto a sua desvantagem ainda está no seu alto custo se comparado às redes Ethernet convencionais.

Apesar das redes Ethernet não serem adequadas para o tráfego em tempo real, encontram-se, em vários trabalhos, estratégias para contornar esse problema. Em Lo Bello *et al.* [12] é proposto um método de suavização de tráfego a fim de que as redes Ethernet possam atender a restrições de comunicação em tempo real. Esse método consiste em se atribuir dinamicamente a cada estação da rede uma porção da banda de acordo com a carga atual da rede. Em Kweon *et al.* [13], limita-se o tempo de acesso ao meio estatisticamente através da limitação da taxa de chegada de pacotes na camada de controle de acesso ao meio (MAC).

Em Ploplys *et al.* [2], é implementado um SCR usando redes sem fio, IEEE 802.11b. Tem-se como objetivo, a estabilização de um pêndulo com base rotativa sob diversas condições de utilização da rede. Para realizar a comunicação sobre essa rede utiliza-se o protocolo UDP (*User Datagram Protocol*) que não é orientado a conexão, ou seja, quando os dados são recebidos pelo nó destino não é enviada nenhuma mensagem de reconhecimento para o nó emissor. Dessa forma consegue-se limitar o atraso quando as condições da rede deterioram. Foi mostrado que, utilizando um controle por realimentação de estados, é possível estabilizar o pêndulo sob diferentes taxas de transmissão e diferentes condições da rede (representada pela razão sinal ruído).

## 2.2.2 Projeto de Controladores e Mecanismos de Compensação

Ao projetar um controlador para SCR deve-se levar em conta a presença de atrasos e possivelmente, a indisponibilidade da informação no momento em que ela se faz necessária para o cálculo do sinal de controle ou no momento da atuação no processo.

Em Nilsson *et al.* [14], o atraso é levado em conta na formulação do problema de controle ótimo estocástico para SCR. Graças ao uso de rótulos que indicam o instante em que as mensagens foram geradas pode-se dispor do conhecimento sobre os atrasos anteriores e usar essa informação no cálculo do sinal de controle. Para resolver o

problema de controle ótimo, utilizam-se as técnicas convencionais para problemas de controle linear quadrático gaussiano (LQG).

Em Montestruque *et al.* [15, 16, 17], a idéia básica é utilizar um esquema de predição para auxiliar no cálculo do sinal de controle. Nesses trabalhos, considera-se um SCR no qual apenas as medições dos sensores são enviadas através de uma rede, já que o controlador está localizado junto ao processo. No esquema considerado, os dados provenientes dos sensores não são utilizados diretamente no cálculo do sinal de controle. Ao invés disso, eles são usados para atualizar o estado do controlador, que possui um modelo de predição do estado do processo. Com a utilização de um modelo de predição, ganha-se uma certa imunidade ao problema de uma eventual indisponibilidade dos dados dos sensores no momento do cálculo do sinal de controle. Além disso, pode-se aumentar o intervalo de amostragem dos sensores, diminuindo assim a utilização de banda na rede. O grande inconveniente desse método é que ele requer um modelo da planta bastante preciso para que ele funcione adequadamente.

Em Zhang *et al.* [5] é apresentado um método em que é feita uma estimativa do estado atual da planta no controlador. Essa estimativa visa corrigir o estado da planta que será usado para calcular o sinal de controle. No esquema considerado, o sensor e controlador estão sincronizados e as mensagens transmitidas possuem a informação sobre o instante em que elas foram geradas. Dessa forma, pode-se medir o atraso de transmissão entre o sensor e o controlador e usá-lo para estimar o estado atual da planta. A desvantagem desse método é que ele requer sincronização entre o sensor e o controlador, o que nem sempre é possível ser realizado.

### 2.2.3 Ferramentas de Análise de Desempenho

Uma das questões fundamentais a serem respondidas sobre um SCR diz respeito ao efeito de problemas como o atraso e a perda de pacotes no desempenho e na estabilidade do sistema. Contudo, para SCR, não há uma resposta única que atenda a todas as possíveis configurações dos sistemas existentes. Sendo assim, nos trabalhos existentes na literatura, para que um dado resultado seja formulado é necessário descrever o tipo de SCR que está sendo analisado e o conjunto de hipóteses consideradas na formulação do problema [6].

Em Zhang *et al.* [5] é analisado um SCR composto por um sensor, um controlador e um atuador. Nesse sistema, as medições do sensor e o sinal de controle calculado

pelo controlador, são enviados através da rede para o controlador e o atuador respectivamente. Considera-se ainda que o sensor é guiado pelo tempo e que o controlador e o atuador são guiados por eventos. Sendo assim, nesse modelo, a influência da rede sobre o sistema está representada pelo atraso sensor-controlador e pelo atraso controlador-atuador. O controle utilizado consiste em uma realimentação de estados com ganho proporcional fixo. Para analisar o sistema, utiliza-se a técnica de aumento de estado para obter um modelo de estados para o sistema em malha fechada. Através do cálculo dos autovalores do modelo obtido, são traçadas regiões de estabilidade para um determinado ganho do controlador. Nessas regiões, é mostrado o compromisso entre o atraso total e o período de amostragem na estabilidade do SCR.

Em Nilsson *et al.* [14], é analisado um SCR composto por um sensor, um controlador e um atuador. Como hipóteses, admite-se que: o sensor é guiado pelo tempo, o controlador e o atuador são guiados por eventos e que o atraso total é menor que o intervalo de amostragem. No modelo considerado, o atraso é caracterizado por uma variável aleatória com distribuição conhecida. Para analisar o sistema, utiliza-se um modelo de estado aumentado para o qual é calculada a covariância. A partir do cálculo da covariância, é apresentada uma condição necessária para que haja estabilidade estocástica do sistema. A partir das ferramentas de análise propostas, foram comparadas diversas estratégias de controle para diferentes distribuições do atraso. Verificou-se que para determinadas distribuições, somente as estratégias de controle que levam em conta a aleatoriedade do atraso permitem que o sistema em malha fechada seja estável.

## 2.3 Conclusões

Nesse capítulo, foram apresentadas as principais características e problemas referentes a Sistemas de Controle via Redes. Através da revisão bibliográfica realizada, pôde-se constatar que a presença de redes de comunicação em sistemas de controle ocasiona diversos tipos de problemas dentre os quais, o atraso na comunicação, desempenha um papel importante na análise desse tipo de sistema. Constatou-se também que as características do atraso são dependentes dos tipos de redes e protocolos empregados, bem como das hipóteses consideradas.

Dentre os trabalhos citados, os artigos de Zhang *et al.* [5] e Nilsson *et al.* [14] merecem atenção especial. Nesses artigos, foi utilizado um modelo de estado aumentado que se mostrou bastante conveniente para a análise da estabilidade do sistema. Além

disso, com o conjunto de hipóteses adotadas acerca do comportamento temporal do sistema pode-se trabalhar com a hipótese de que o atraso é aleatório. Essa hipótese é fundamentada pelas medições realizadas em Lian *et al.* [3].

Ao considerar um modelo de atraso aleatório e capturando a idéia das regiões de estabilidade [5], na qual calculam-se os autovalores a fim de verificar se eles representam modos estáveis, pode-se realizar uma análise da estabilidade baseada nas FDPs dos autovalores.

# Capítulo 3

## Redes de Comunicação

Neste capítulo são analisadas algumas redes de comunicação que estão sendo ou que tem possibilidade de serem utilizadas em SCR.

### 3.1 Introdução

As redes de comunicação foram introduzidas nos sistemas de controle digitais nos anos setenta, principalmente para atender à demanda da indústria automotiva. As razões para a sua introdução eram principalmente: a redução de custos de cabeamento, a modularização dos sistemas e a flexibilidade na configuração do sistema. Desde então, vários tipos de redes e protocolos foram desenvolvidos de modo a atender a uma demanda de aplicações crescente e diversificada. Exemplos de sistemas de controle que utilizam redes podem ser encontrados na automação industrial, em sistemas de veículo inteligentes e em aeronaves [1].

Os SCR representam uma evolução dos sistemas de controle digitais que utilizam redes de comunicação. Essa evolução se deu basicamente no ramo da eletrônica que permitiu integrar interfaces de rede aos sensores e atuadores além de permitir que esses dispositivos realizassem determinados tipos de processamento. A partir daí, esses dispositivos puderam ser ligados diretamente em rede, assim como mostrado no capítulo anterior e ilustrado na Figura 2.1.

Para o projeto de SCR estão sendo utilizadas tanto as redes projetadas para fins de controle na indústria como as redes projetadas para o tráfego de dados. As redes utilizadas para fins de controle são caracterizadas pelo transporte freqüente de uma grande quantidade de pequenos pacotes de dados entre um grande número de nós.

Além disso essas redes devem atender a requisitos temporais críticos. As redes para transmissão de dados, por outro lado, são utilizadas principalmente para a transmissão de grandes pacotes de dados (se comparados aos dados de uma aplicação de controle), os quais são geralmente transmitidos em rajadas com uma frequência relativamente baixa. Além disso, essas redes possuem taxas de transmissão mais altas que as rede de controle e nem sempre estão sujeitas a restrições de tempo real estrito [3]. Sendo assim, a escolha do tipo de rede irá depender dos parâmetros de desempenho que devem ser atendidos bem como das características topológicas do sistema.

Há uma imensa gama de protocolos existentes que podem ser usados em SCR, muitos dos quais são padrões proprietários. A seguir, são listados alguns tipos de protocolos que estão classificados em duas categorias principais, barramentos de campo e redes de propósito geral.

- Barramentos de campo (*Fieldbuses*) - FIP (*Factory Instrumentation Protocol*), PROFIBUS (*Process Fieldbus*), Foundation Fieldbus, CAN (*Controller Area Network*) e Devicenet;
- Redes de propósito geral - IEEE 802.3 (Ethernet), IEEE 802.11 e Bluetooth.

Dentre essas tecnologias, as utilizadas para redes sem fio, IEEE 802.11 e Bluetooth, vêm despertando um interesse crescente. Esse interesse se justifica pelo fato dos custos de cabeamento representarem uma grande parte do custo de um sistema de controle. Além disso, enquanto o custo dos sensores e atuadores tem diminuído ao longo dos anos, o custo do cabeamento tem permanecido praticamente constante [18]. Um outro atrativo dessas tecnologias é a possibilidade delas poderem ser usadas em redes ad hoc. As redes ad hoc são caracterizadas por não possuírem uma configuração pré-estabelecida, de modo que a sua topologia não é fixa. Essa característica juntamente com a mobilidade dos dispositivos do sistema permitem a instalação de sistemas de controle em ambientes hostis à presença humana e sujeitos a mudanças de configuração frequentes. Entretanto, essas tecnologias de comunicação sem fio apresentam alguns problemas que afetam o seu desempenho, tais como: propagação dos sinais através de múltiplos percursos, desvanecimento, forte queda na potência do sinal quando há obstáculos a serem ultrapassados e elevada taxa de erro de bit se comparadas a tecnologias de rede com fios [19].

No projeto de SCR, há dois requisitos fundamentais que precisam ser atendidos: atraso de transmissão limitado e garantia de transmissão das mensagens. Isso significa

que uma mensagem deve ser transmitida com sucesso num intervalo de tempo limitado. Uma falha na transmissão ou um atraso excessivo na comunicação entre um sensor e um controlador pode, por exemplo, levar a uma deterioração no desempenho do sistema ou até mesmo, torná-lo instável. Por essas razões, é necessário conhecer o perfil do atraso e as características dos protocolos da rede que se deseja utilizar a fim de que mecanismos de compensação para eventuais problemas possam ser projetados.

Para um determinado tipo de rede, existe um conjunto de protocolos que permite que haja comunicação entre dois ou mais nós. Esses protocolos são organizados em camadas, objetivando principalmente a redução na complexidade total do projeto. Para fins de padronização, a ISO (*International Standards Organization*) elaborou o modelo de referência OSI (*Open Systems Interconnection*) com o objetivo de garantir a interconexão entre sistemas abertos à comunicação com outros sistemas. O modelo OSI é organizado em sete camadas, como pode ser observado na Figura 3.1. Dentre as sete camadas, a segunda camada (Enlace de Dados) tem uma grande importância para os SCR. Essa importância se deve ao fato da subcamada MAC (Controle de Acesso ao Meio) ser responsável pela arbitragem do acesso a um canal compartilhado. Ou seja, se dois nós desejam transmitir ao mesmo tempo, cabe à subcamada MAC decidir qual nó terá o direito de transmitir. Por essa razão, é necessário compreender o funcionamento dessa subcamada a fim de determinar se as mensagens transmitidas no SCR serão transmitidas com sucesso num tempo limitado. Maiores detalhes sobre o modelo OSI podem ser encontrados em Tanenbaum [20].

Na seqüência desse capítulo, alguns desses protocolos serão descritos e analisados no tocante ao controle de acesso ao meio e às características do atraso temporal esperado.

## 3.2 Ethernet

Ethernet é um dos padrões para redes locais mais utilizados no mundo. Esse padrão forma a base do padrão IEEE 802.3 para redes locais, de modo que em muitos casos usa-se o termo Ethernet para se referir ao padrão IEEE 802.3. O padrão IEEE 802.3 abrange um conjunto de protocolos referentes à camada física e à subcamada MAC do modelo OSI. Com o padrão Ethernet pode-se transmitir dados a velocidades de 10Mbit/s até 10Gbit/s (*Gigabit Ethernet*). Embora não tenha sido projetada para uso em comunicações em tempo real, as redes Ethernet tornaram-se bastante atrativas para uso em sistemas de controle em tempo real em razão da sua larga utilização e

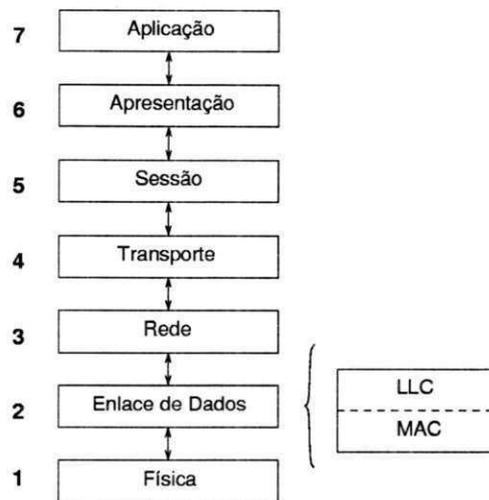


Figura 3.1: Modelo de Referência OSI. O modelo é organizado em sete camadas, sendo que a camada de Enlace de Dados é composta pelas subcamadas MAC (*Medium Access Control*) e LLC (*Link Logical Control*).

de seus baixos custos de *hardware*. O empecilho na utilização das redes Ethernet em sistemas de controle está no seu mecanismo de controle de acesso ao meio que não permite prever nem limitar o tempo que uma estação leva para transmitir. A seguir descreve-se esse mecanismo.

### 3.2.1 Controle de Acesso ao Meio

Ethernet utiliza o protocolo CSMA/CD (Acesso Múltiplo Sensível à Portadora com Detecção de Colisão) para resolver o problema de contenção no meio de comunicação. Em linhas gerais, quando um nó quer transmitir, ele “escuta” o meio. Se o meio está ocupado, ele espera até que ele fique livre. Caso contrário, ele transmite imediatamente. Se dois ou mais nós detectam que o meio está livre e decidem transmitir simultaneamente, as mensagens irão colidir e conseqüentemente ficarão corrompidas. Contudo, ao transmitir, o nó também escuta o meio a fim de detectar se houve uma colisão. Caso uma colisão seja detectada, o nó aborta a sua transmissão e espera um intervalo de tempo aleatório para realizar a retransmissão. Esse intervalo de tempo aleatório é determinado através do algoritmo BEB (*Binary Exponential Backoff*).

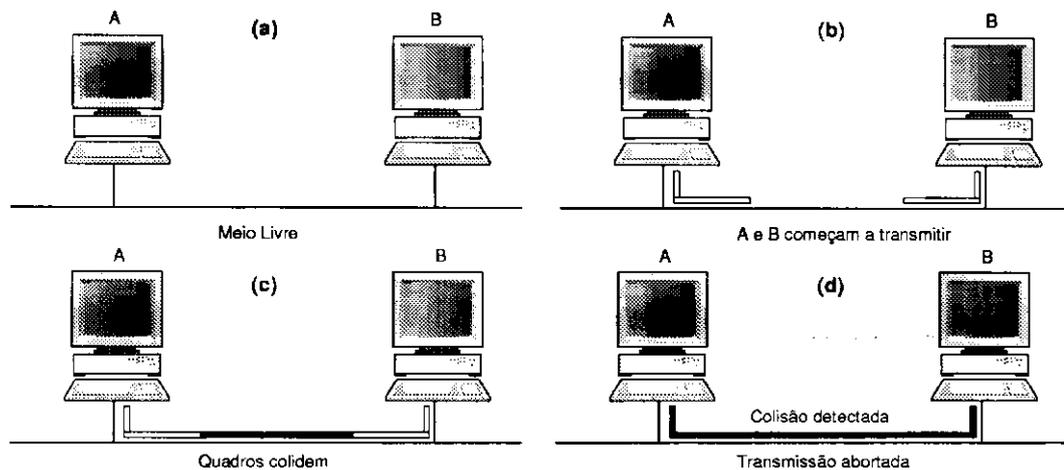


Figura 3.2: Protocolo CSMA/CD. (a) Os nós A e B escutam o meio; (b) A e B detectam o meio livre e começam a transmitir; (c) Ocorre colisão entre os quadros; (d) A colisão é detectada por ambos os nós, que abortam as suas respectivas transmissões.

### 3.2.2 Características do Atraso

Devido ao uso do algoritmo BEB, o atraso em redes Ethernet é em geral não determinístico. Entretanto, em situações em que a carga da rede é baixa, o atraso é praticamente constante, pois o número de colisões é bastante pequeno. Quando a taxa de utilização da rede cresce, o número de colisões também cresce. Conseqüentemente, o atraso aumenta bastante devido ao aumento do número de retransmissões. Além do aumento, as características não determinísticas do atraso também se acentuam devido ao tempo de espera aleatório para retransmissão.

Em Nilsson [1] foram realizados experimentos objetivando a caracterização do comportamento do atraso na transmissão de mensagens entre um sensor e um controlador e entre um controlador e um atuador ligados através de uma rede Ethernet, conforme ilustrado na Figura 3.3. No experimento, simulou-se um processo que era amostrado a cada intervalo  $h = 0,5s$ . Assim que os dados amostrados eram recebidos pelo controlador, este calculava o sinal de controle que era enviado através da rede ao atuador. Além do tráfego gerado pelo experimento, a rede continuava recebendo o tráfego normal de uma rede local. Para que o atraso pudesse ser calculado, todas as mensagens enviadas através da rede recebiam rótulos indicando o instante em que foram geradas.

Na figura 3.4 são mostradas medições do atraso em um horizonte de tempo de

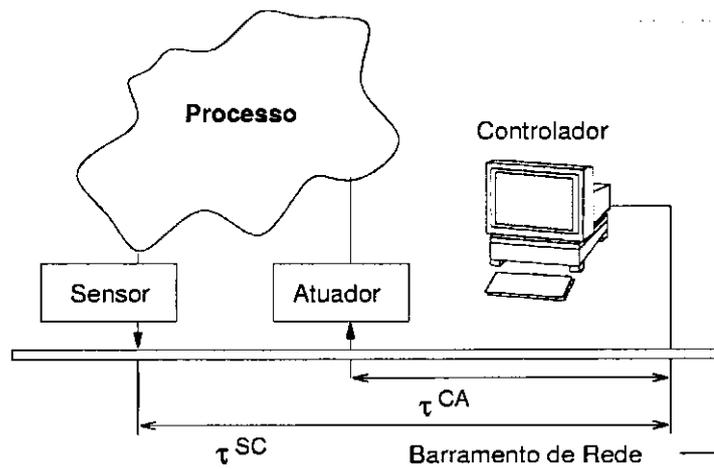


Figura 3.3: Diagrama de um SCR. Destaca-se nesta figura o atraso sensor-controlador  $\tau_{SC}$  e o atraso controlador-atuador  $\tau_{CA}$ .

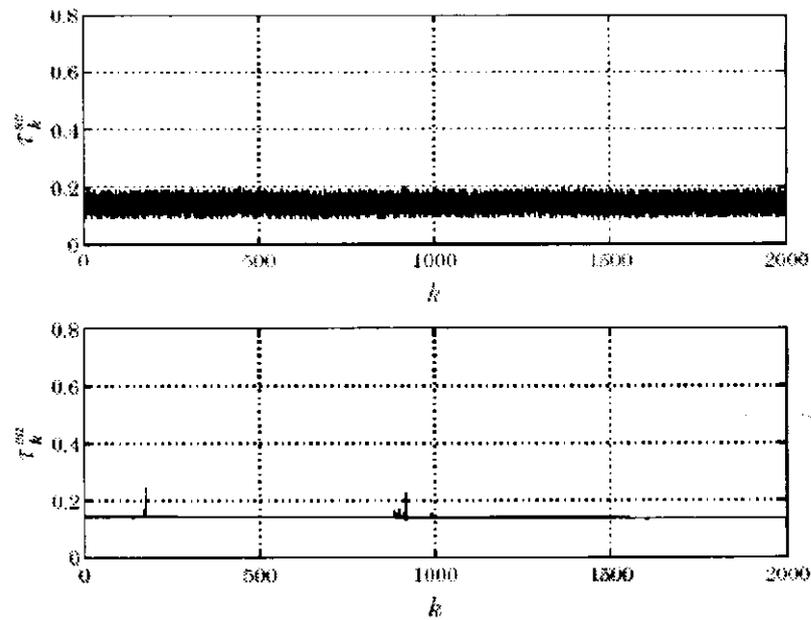


Figura 3.4: Medições do atraso (em segundos) num horizonte de 2000 amostras. Na figura superior, é mostrado o atraso sensor-controlador  $\tau_{SC}$  e na figura inferior é mostrado o atraso controlador-atuador  $\tau_{CA}$  (Figura retirada de Nilsson [1]).

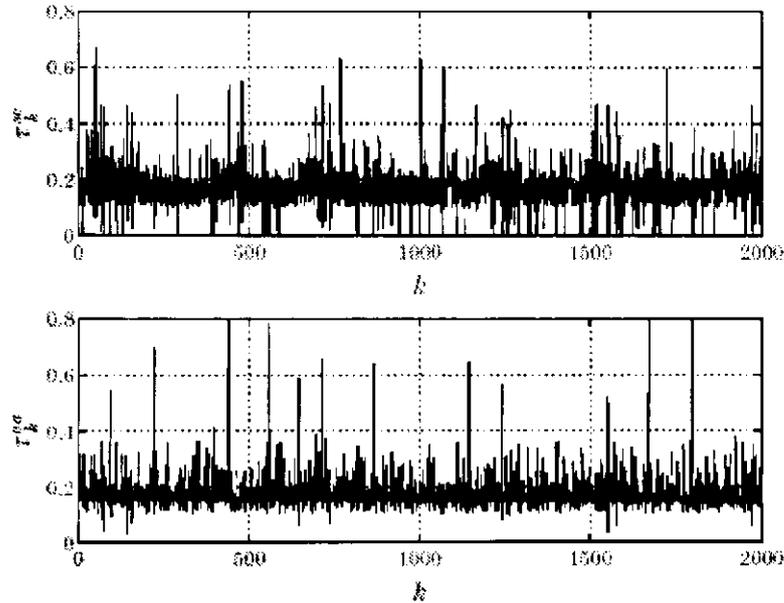


Figura 3.5: Medições do atraso (em segundos) num horizonte de 2000 amostras. Na figura superior, é mostrado o atraso sensor-controlador  $\tau_{SC}$  e na figura inferior é mostrado o atraso controlador-atuador  $\tau_{CA}$  (Figura retirada de Nilsson [1]).

2000 amostras quando a rede está sendo utilizada apenas pela aplicação de controle e pelo tráfego convencional da rede. Observa-se, que apesar do atraso entre o sensor e o controlador exibir um comportamento aleatório, a sua variação não é significativa, enquanto que o atraso entre o controlador e o atuador é praticamente constante.

Na Figura 3.5 tem-se a mesma aplicação de controle, porém as condições de utilização da rede foram alteradas. Além da aplicação de controle e do tráfego convencional da rede, foram inseridas duas aplicações que requerem uma utilização intensa da rede. Como consequência disso, há um aumento no número de colisões e de retransmissões, mudando consideravelmente o perfil do atraso. Como pode ser observado, o atraso controlador-atuador deixa de ser praticamente constante e passa a sofrer variações significativas. Em alguns casos, as medições do atraso são até bastante superiores ao intervalo de amostragem  $h = 0,5s$ .

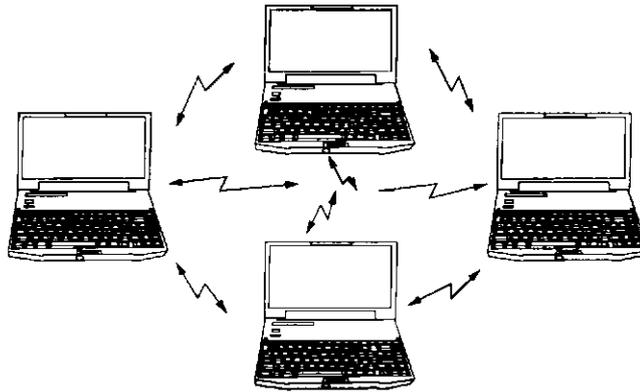


Figura 3.6: Configuração *ad-hoc*. Não existe uma estrutura fixa e todos os nós podem se comunicar uns com os outros.

### 3.3 Ethernet sem Fio

A utilização de redes sem fio para fins de controle é bastante atrativa por duas razões básicas: a inexistência de fios e cabos para conectar os dispositivos e a mobilidade e flexibilidade proporcionadas por esse tipo de rede. Dentre as tecnologias para redes sem fio, as soluções baseadas no padrão IEEE 802.11 (*Wireless Ethernet*) vêm sendo utilizadas para fins de controle com algumas modificações [21, 2]. O padrão IEEE 802.11 especifica a camada física e a subcamada MAC da camada de enlace de dados do modelo de referência OSI.

No padrão IEEE 802.11, há duas maneiras possíveis de configurar uma rede sem fio: *ad-hoc* e infraestrutura (*infrastructure*). Na configuração *ad-hoc*, conforme ilustrado da Figura 3.6, a rede não possui uma estrutura fixa e geralmente cada nó é capaz de se comunicar com todos os outros nós da rede. Por outro lado, na configuração chamada de infraestrutura, conforme ilustrado da Figura 3.7, existem pontos de acesso a rede, que são fixos, com os quais os nós móveis podem se comunicar.

#### 3.3.1 Controle de Acesso ao Meio

Numa rede Ethernet sem fio o mecanismo de acesso ao meio CSMA/CD não pode ser utilizado, porque não se pode admitir que todas as estações estão umas ao alcance das outras. Para contornar esse problema, utiliza-se o protocolo CSMA/CA (Acesso Múltiplo Sensível à Portadora com Mecanismos para evitar Colisão) para resolver o

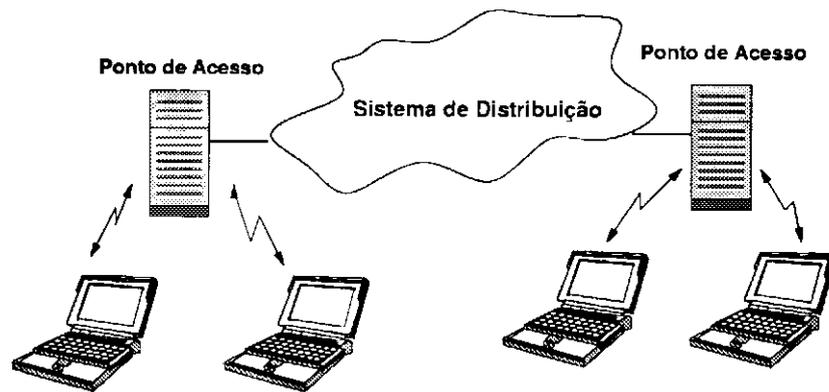


Figura 3.7: Configuração hierárquica. Os nós se comunicam através dos pontos de acesso.

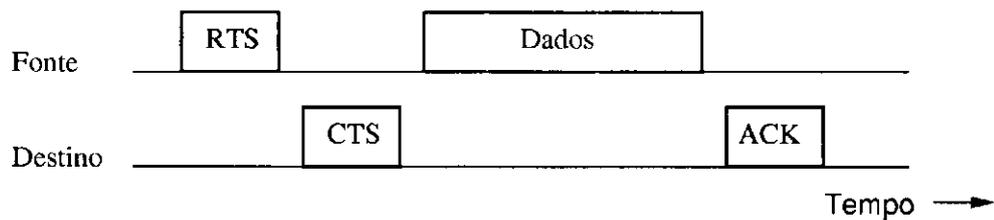


Figura 3.8: *Handshake* de quatro modos do protocolo CSMA/CA. RTS (*Request To Send*), CTS (*Clear To Send*) e ACK (*Acknowledgement*)

problema de acesso ao meio.

Os dispositivos que usam CSMA/CA utilizam um *handshake* de quatro modos, como indicado na Figura 3.8, para ganhar acesso ao meio de propagação a fim de assegurar que colisões sejam evitadas. Quando um nó deseja transmitir, ele envia um pacote RTS (*Request To Send* - Requisição para transmitir), endereçado ao nó desejado. Se o nó destino recebe o pacote e está apto a receber o restante da transmissão, ele responde com um pacote CTS (*Clear To Send* - Pronto para enviar). O nó que iniciou a transmissão envia então os dados para o nó destino, o qual realiza o reconhecimento de todos os pacotes recebidos retornando um pacote ACK (*Acknowledgement* - Reconhecimento) para cada pacote recebido.

### 3.3.2 Características do Atraso

Em Ploplys *et al.* [2] foram realizadas algumas simulações num SCR que utilizava uma rede sem fio IEEE 802.11b. Nas simulações realizadas, foi utilizado o protocolo UDP (*User Datagram Protocol*) - protocolo da camada de transporte do modelo OSI. Ao contrário do protocolo TCP (*Transmission Control Protocol*), o protocolo UDP não é orientado à conexão, ou seja, caso os dados não tenham sido recebidos não há retransmissão.

No SCR considerado, o processo consistia de um pêndulo com base rotativa que era amostrado a cada 4ms. Sob condições ideais de utilização da rede, ou seja, quando não há outros nós competindo pelo acesso ao meio, foi medido o atraso total. Esse atraso total é formado pelo atraso na comunicação entre o sensor e o controlador, pelo atraso computacional no controlador e pelo atraso na comunicação entre o controlador e o atuador. A partir das medições realizadas para o atraso total, foi construído um histograma, que é mostrado na Figura 3.9. Pode-se observar nessa figura, que a distribuição é praticamente normal com média 3,56ms e com desvio padrão de 0,06ms. Deve-se notar entretanto, que as condições de rede são normalmente não determinísticas e podem variar significativamente, o que pode aumentar consideravelmente o atraso e ocasionar até mesmo a perda de pacotes.

Um dos fatores que afetam consideravelmente as condições de transmissão numa rede sem fio é a distância entre os nós. Um aumento da distância diminui a Razão Sinal Ruído (RSR), o que leva o hardware de rede a diminuir a taxa de transmissão. Outros fatores que levam a uma deterioração na transmissão são o ruído do ambiente, a interferência eletromagnética e o tráfego adicional no canal sem fio.

## 3.4 DeviceNet

DeviceNet é uma rede de comunicação digital utilizada para conectar controladores industriais e dispositivos de entrada e saída. A rede DeviceNet segue o modelo de referência OSI utilizando na camada de enlace de dados o protocolo CAN (*Controller Area Network*) [22]. O protocolo CAN é um protocolo de comunicação serial desenvolvido principalmente para aplicações na indústria automotiva, mas que também é capaz de oferecer um bom desempenho em outras aplicações industriais com requisitos temporais críticos [3]. O protocolo CAN é otimizado para mensagens curtas e utiliza

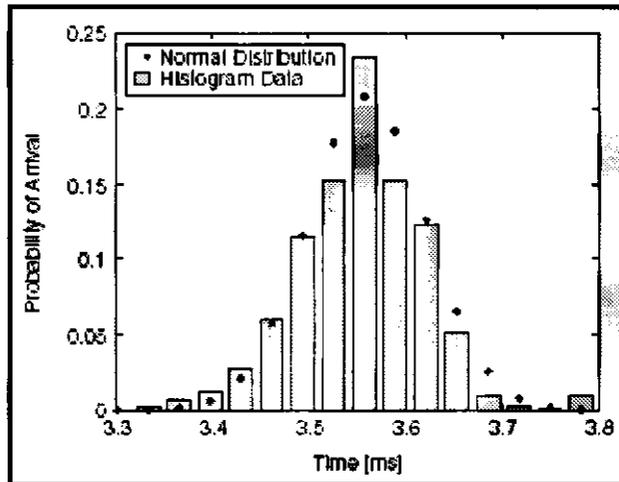


Figura 3.9: Histograma do atraso total sob condições de rede ideais. A distribuição do atraso é aproximadamente normal com média  $3,56ms$  e desvio padrão  $0,06ms$  (Figura retirada de Ploplys *et al.* [2]).

o método de acesso ao meio CSMA/AMP (Acesso Múltiplo Sensível à Portadora com Arbitragem por Prioridade de Mensagens).

### 3.4.1 Controle de Acesso ao Meio

O protocolo CAN é orientado a mensagens. Nesse protocolo, para cada mensagem atribui-se uma prioridade específica que é usada para arbitrar o acesso ao barramento no caso de transmissão simultânea. Cada mensagem a ser transmitida inicia com um campo de 11 (CAN - versão 2.0A) ou 29 (CAN - versão 2.0B) bits que identifica o nível de prioridade da mensagem. Quando um nó quer transmitir, ele espera até que o barramento esteja livre e começa a transmitir o seu identificador de prioridade bit a bit. Possíveis conflitos no acesso ao barramento são resolvidos durante a transmissão por um processo de arbitragem a nível de bit, ou seja, os bits do campo identificador de prioridade das mensagens que competem pelo barramento são comparados e o nó que tiver menor prioridade perde o direito de transmitir, enquanto que o de maior prioridade continua transmitindo. Com esse método, as transmissões de mais baixa prioridade são interrompidas assim que o mecanismo de arbitragem do barramento identifique que existe uma transmissão de maior prioridade a ser realizada.

### 3.4.2 Características do Atraso

Em Nilsson [1] foram realizados experimentos para identificar as características do atraso em uma rede com barramento CAN. Foi mostrado que em um barramento CAN, os atrasos são variáveis. Essa variação depende de como o barramento está sendo utilizado, da prioridade das outras mensagens que competem pelo meio e da periodicidade do envio de mensagens. Verificou-se que a atribuição de prioridades mais altas para uma determinada mensagem diminui o valor médio do atraso, mas esse atraso continua a ser variável. Por outro lado, uma mensagem com baixa prioridade pode sofrer um atraso ilimitado caso a rede esteja sendo bastante utilizada por processos de mais alta prioridade.

Para identificar as características do atraso numa rede com barramento CAN foi montada uma rede com quatro nós nos quais dois deles estavam envolvidos no controle de um processo via rede. Além desses nós, havia um nó com prioridade mais alta que os nós envolvidos no experimento com a finalidade de inserir tráfego extra na rede. Na Figura 3.10, são mostradas medições do atraso sensor-controlador e controlador-atuador. Nessa simulação, considerou-se um intervalo de amostragem de  $50ms$  e que o nó de mais alta prioridade (tráfego extra) transmite com um período que varia uniformemente entre  $40ms$  e  $80ms$ . Observa-se que ambos os atrasos medidos apresentam um comportamento aleatório. A partir de um histograma dos dados obtidos, pode-se construir um modelo simplificado para a FDP dos atrasos sensor-controlador e controlador-atuador. Esse modelo é mostrado na Figura 3.11.

## 3.5 ControlNet

ControlNet, juntamente com as redes MAP (*Manufacturing Automation Protocol*) e PROFIBUS são exemplos típicos de redes de controle que utilizam o mecanismo de passagem de ficha para resolver o problema de contenção no meio de comunicação. Uma das principais características dessas redes é o seu caráter determinístico, já que o tempo máximo de espera para enviar uma mensagem pode ser limitado pelo tempo de rotação da ficha. No caso da rede ControlNet, o mecanismo de passagem da ficha é implícito, ou seja, não existe uma ficha que trafega ao longo da rede. Ao invés disso, o protocolo usa uma identificação que é atribuída a cada nó para simular o mecanismo de passagem da ficha. Essa identificação consiste num número que varia de 0 a 99.

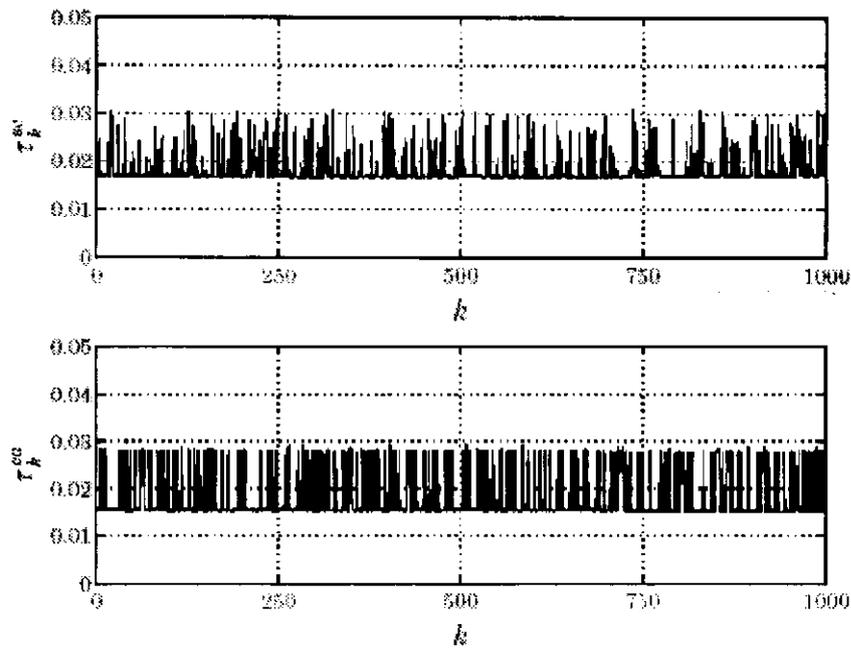


Figura 3.10: Medições do atraso (em segundos) num horizonte de 1000 amostras. Na figura superior, é mostrado o atraso sensor-controlador  $\tau_{SC}$  e na figura inferior é mostrado o atraso controlador-atuador  $\tau_{CA}$  (Figura retirada de Nilsson [1]).

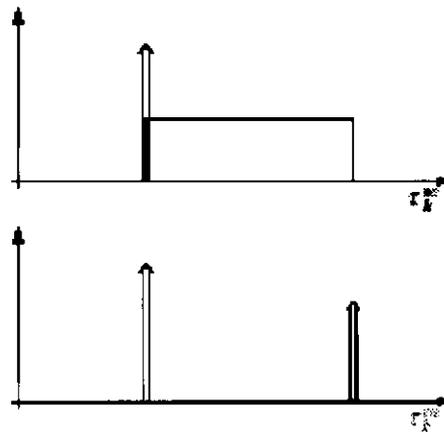


Figura 3.11: Modelo para a FDP do atraso numa rede que utiliza o protocolo CAN. Essas figuras se referem ao caso em que há um nó com prioridade mais alta que compete pelo barramento. A figura superior se refere à FDP do atraso sensor-controlador e a figura inferior se refere à FDP do atraso controlador-atuador (Figura retirada de Nilsson [1]).

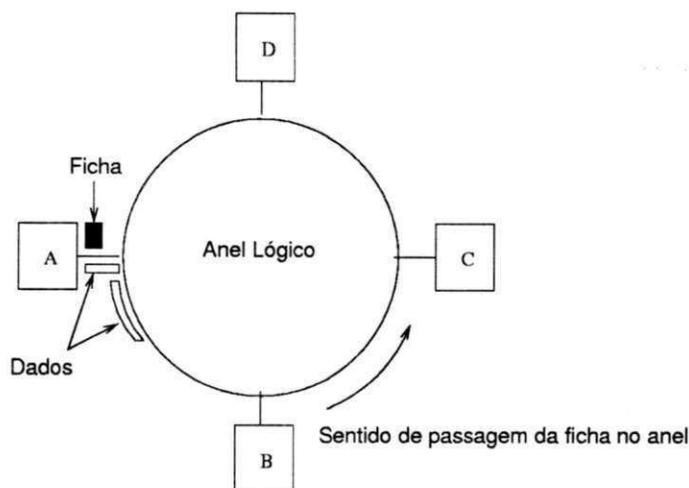


Figura 3.12: Esquema de funcionamento de uma rede com passagem de ficha. Apenas o nó que possui a ficha pode transmitir.

### 3.5.1 Controle de Acesso ao Meio

Assim como ocorre em redes em que a passagem de ficha é feita de forma explícita, numa rede ControlNet os nós da rede são dispostos logicamente no formato de um anel. Além disso, cada nó conhece o endereço de seu antecessor e de seu sucessor lógico. Durante a operação da rede, o nó com a ficha transmite quadros de dados até que eles acabem ou que o tempo que o nó deve ficar com a ficha se esgote, assim como mostrado na Figura 3.12. O nó então regenera a ficha e a retransmite para o seu sucessor lógico na rede. Se um nó não possui mensagens a serem enviadas, ele apenas passa a ficha para o nó sucessor. A localização física do sucessor não é importante porque a ficha é enviada ao vizinho lógico. Nesse tipo de rede, não há colisão entre as mensagens, pois apenas um nó pode transmitir por vez. O protocolo também garante um tempo máximo para que cada nó tenha acesso à rede e também oferece mecanismos para regenerar a ficha caso o seu possuidor pare de transmitir e não a passe adiante.

### 3.5.2 Características do Atraso

Uma rede ControlNet possui características determinísticas. Nessa rede, cada nó só pode transmitir enquanto estiver com a ficha e esse tempo é limitado. Dessa forma, conhecendo-se o período que cada nó transmite, o tempo que cada nó permanece com a ficha e a quantidade de nós na rede, determina-se com exatidão o tempo que um nó levará para ter acesso ao meio de transmissão. Caso essas informações não sejam

conhecidas, é no mínimo conhecido o tempo máximo para se ter acesso ao meio que é caracterizado pela rotação da ficha no anel lógico.

### **3.6 Conclusões**

Nesse capítulo, foram analisados alguns tipos de redes de comunicação que podem ser utilizadas em SCR. Verificou-se que, embora algumas redes não tenham sido projetadas para atender a requisitos de tempo real estrito, elas podem, sob determinadas condições, ser usadas em SCR. Esse é o caso das redes Ethernet e das redes que usam o barramento CAN. Uma outra constatação é que o atraso envolvido na comunicação entre os elementos do SCR é na maioria das vezes aleatório. Com isso, ao considerar-se um SCR cujos controladores e atuadores são guiados por eventos, passa-se a trabalhar com modelos que não são mais invariantes no tempo e que, conseqüentemente, são mais difíceis de serem analisados.

## Capítulo 4

# Sistemas de Controle via Redes com Atraso Aleatório

Nesse capítulo é apresentada a contribuição desse trabalho. O capítulo inicia com o modelo do sistema que será analisado. Em seguida é apresentado o método de análise de estabilidade baseado na FDP dos autovalores do sistema em malha fechada.

### 4.1 Modelo do Sistema

Como foi mencionado anteriormente, em um SCR os elementos do sistema de controle estão diretamente ligados a uma rede de comunicação, que é responsável pela comunicação entre eles. O modelo de SCR a ser analisado ao longo dessa dissertação está ilustrado na Figura 4.1. Nesse modelo, considera-se um sistema formado por um nó sensor, um nó controlador, um nó atuador, uma rede de comunicação e um processo a ser controlado. É importante frisar que o nó sensor realiza algumas funções adicionais além da simples leitura de uma variável do processo, ou seja, esse nó também pode realizar determinados tipos de processamento seguido do encapsulamento dos dados a fim de que esses possam ser transmitidos adequadamente através da rede. O mesmo é válido para os demais nós do sistema. De agora em diante, para efeito de simplicidade, utiliza-se apenas as palavras sensor, controlador e atuador para referir-se a nó sensor, nó controlador e nó atuador, respectivamente.

Assim como foi considerado em Nilsson *et al.* [1], considera-se que o sensor é guiado pelo tempo e que o controlador e o atuador são guiados por evento. Isso quer dizer que a cada intervalo de tempo com duração  $h$ , as leituras do sensor são amostradas

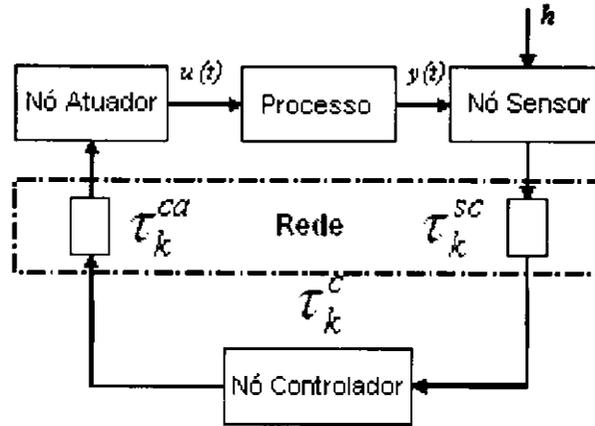


Figura 4.1: Diagrama de um SCR com um sensor, um controlador e um atuador. A malha de controle é fechada através da rede.

e enviadas ao controlador que começa a calcular o sinal de controle tão logo receba os dados da leitura. Após calcular o sinal de controle, o controlador o envia para o atuador que o aplica ao processo assim que ele é recebido.

A influência da rede sobre o sistema está representada pelo atraso sensor-controlador e controlador-atuador assim como mostrado na Figura 4.1. Em geral o atraso devido ao processamento no sensor e no atuador é bem inferior ao atraso devido à rede, de modo que para efeito de análise consideram-se apenas os três tipos seguintes de atraso.

- Atraso referente à comunicação sensor-controlador  $\tau_k^{sc}$
- Atraso referente ao tempo de computação do sinal de controle no controlador,  $\tau_k^c$
- Atraso referente à comunicação controlador-atuador,  $\tau_k^{ca}$

Sem perda de generalidade, o atraso no controlador,  $\tau_k^c$ , pode ser inserido no termo de atraso controlador-atuador,  $\tau_k^{ca}$ . Sendo assim, o atraso total induzido pela rede entre o sensor e o atuador pode ser representado por  $\tau_k = \tau_k^{sc} + \tau_k^{ca}$ . Admite-se também, como hipótese, que o atraso total,  $\tau_k$ , é menor que o intervalo de amostragem,  $h$ . Essa condição garante que amostras sucessivas cheguem na ordem em que foram geradas. Caso o atraso total seja superior ao intervalo de amostragem, pode-se aumentar esse último a fim de que o modelo adotado continue válido.

Assim como foi admitido em trabalhos anteriores [23], considera-se que os termos de atraso são aleatórios e caracterizados por uma FDP. Além disso, admite-se que

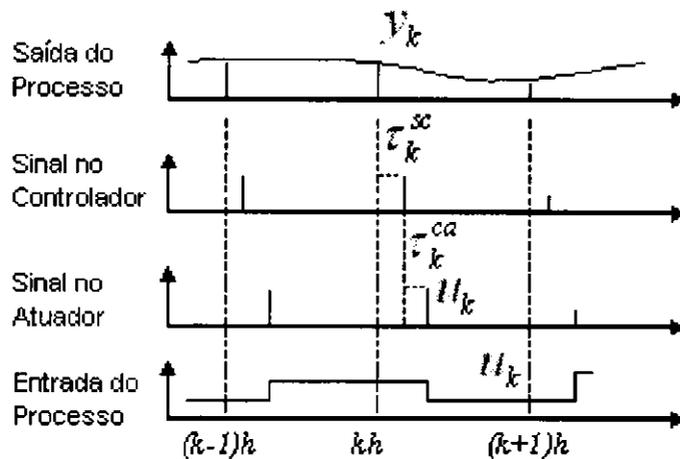


Figura 4.2: Diagrama temporal onde são mostrados os instantes da amostragem no sensor (linhas verticais pontilhadas) e os instantes de chegada de dados no controlador e no atuador (barras verticais). Os símbolos  $y_k$ ,  $u_k$ ,  $\tau_k^{SC}$  e  $\tau_k^{CA}$  representam a saída do processo, o sinal de controle, o atraso sensor-controlador e o atraso controlador-atuador no instante de tempo  $kh$ , respectivamente.

atrasos sucessivos são independentes e que estes também são independentes do estado do processo e de eventuais termos de ruído pertencentes ao modelo do processo. A hipótese de atraso aleatório é fundamentada pelo estudo realizado sobre alguns tipos de redes mostrado no capítulo 3 e também pela hipótese de atuação guiada por eventos. Caso a atuação seja guiada pelo tempo [2], apesar do atraso entre os componentes do sistema ser aleatório, o modelo do SCR é determinístico. Isso se deve ao fato do sinal de controle só poder ser aplicado em instantes determinados, mesmo que ele esteja previamente disponível. Embora um atraso constante torne a análise do SCR mais simples, há uma perda de desempenho do sistema, já que o sinal de controle é submetido a um atraso adicional além do atraso controlador-atuador induzido pela rede.

A partir das hipóteses realizadas tem-se na Figura 4.2 uma ilustração da evolução no tempo do sistema. Pode-se observar na figura que durante um intervalo de tempo de duração  $h$ , há no máximo dois sinais de controle diferentes a serem aplicados ao processo. Isso é uma consequência direta da hipótese que limita o atraso total máximo a um intervalo de amostragem.

### 4.1.1 Formulação Matemática

Considera-se que o processo a ser controlado é representado por um modelo de estado contínuo dado pela equação seguinte:

$$dx = Ax(t)dt + Bu(t)dt + v(t)dt. \quad (4.1)$$

Na qual  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  representa o estado do processo,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ , o sinal de entrada,  $A$  e  $B$  são matrizes de dimensões apropriadas e  $v(t) \in \mathbb{R}^n$  é o ruído branco com média nula e covariância incremental  $R_v$ .

É importante frisar que apesar do modelo (4.1) permitir múltiplas entradas e múltiplas saídas, considera-se que todas as entradas ou todas as saídas sofrem o mesmo atraso. Isso significa que no caso de haver vários sensores, as suas medições têm que ser transmitidas do mesmo nó. Para os atuadores isso quer dizer que todos os atuadores devem estar conectados ao mesmo nó.

Tendo em vista o modelo e as hipóteses definidas anteriormente, é mais conveniente trabalhar com um modelo discreto do sistema do que com um modelo contínuo. O equivalente discreto do modelo dado pela equação (4.1), utilizando um segurador de ordem zero, é obtido integrando-o sobre um intervalo de amostragem assim como mostrado em Aström *et al.* [24]. As equações do modelo discreto são então apresentadas a seguir.

$$x(kh + h) = \Phi x(kh) + \Gamma_0(\tau_k^{sc}, \tau_k^{ca})u(kh) + \Gamma_1(\tau_k^{sc}, \tau_k^{ca})u(kh - h) + v(kh), \quad (4.2)$$

$$y(kh) = Cx(kh) + w(kh). \quad (4.3)$$

Sendo que,

$$\Phi = e^{Ah}, \quad (4.4)$$

$$\Gamma_0(\tau_k^{sc}, \tau_k^{ca}) = \int_0^{h - \tau_k^{sc} - \tau_k^{ca}} e^{As} B ds, \quad (4.5)$$

$$\Gamma_1(\tau_k^{sc}, \tau_k^{ca}) = \int_{h - \tau_k^{sc} - \tau_k^{ca}}^h e^{As} B ds. \quad (4.6)$$

Os termos  $v(kh)$  e  $w(kh)$  são processos estocásticos decorrelacionados de ruído branco gaussiano com média nula e variância  $R_1$  e  $R_2$ , respectivamente, sendo que a variância de  $R_1$  é dada por:

$$R_1 = E\{v(kh)v^T(kh)\} = \int_0^h e^{A(h-s)} R_v e^{A^T(h-s)} ds. \quad (4.7)$$

A equação (4.2) leva em conta o fato que o atraso total é menor que o intervalo de amostragem. Caso isso não seja válido, termos adicionais são acrescentados assim como mostrado em Aström *et al.*[24].

### Problema de Regulação

Um problema de controle no qual o objetivo é manter o estado próximo do estado zero é chamado de problema de regulação. Para resolver esse tipo de problema para o modelo de estados discreto dado pelas equações (4.2) e (4.3), pode-se utilizar um controlador linear cujo modelo de estados é dado por:

$$x^c(kh + h) = \Phi^c(\tau_k)x^c(kh) + \Gamma^c(\tau_k)y(kh), \quad (4.8)$$

$$u(kh) = C^c(\tau_k)x^c(kh) + D^c(\tau_k)y(kh). \quad (4.9)$$

Nesse modelo,  $x^c$  representa o estado do controlador. O aparecimento de  $\tau_k$  em  $\Phi^c$ ,  $\Gamma^c$ ,  $C^c$  e  $D^c$  no modelo do controlador significa que o controlador pode utilizar a informação referente ao atraso para calcular o sinal de controle.

A partir das equações (4.2)- (4.9) pode-se construir um modelo de estado aumentado para o sistema em malha fechada, que é dado por:

$$z_{k+1} = \Phi(\tau_k)z_k + \Gamma(\tau_k)e_k. \quad (4.10)$$

No qual,

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_k^c \\ u_{k-1} \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$\Phi(\tau_k) = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma_0(\tau_k)D^c(\tau_k)C & \Gamma_0(\tau_k)C^c(\tau_k) & \Gamma_1(\tau_k) \\ \Gamma^c(\tau_k)C & \Phi^c(\tau_k) & 0 \\ D^c(\tau_k)C & C^c(\tau_k) & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

$$\Gamma(\tau_k) = \begin{bmatrix} I & \Gamma_0(\tau_k)D^c(\tau_k) \\ 0 & \Gamma^c(\tau_k) \\ 0 & D^c(\tau_k) \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

$$e_k = \begin{bmatrix} v_k \\ w_k \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

A variância  $R$  de  $e_k$  é dada por:

$$R = E(e_k e_k^T) = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

## 4.2 Ferramentas de Análise

Como foi mencionado em capítulos anteriores, os atrasos variam em geral de uma transmissão a outra. Desse modo, os métodos padrões de análise para sistemas lineares invariantes no tempo não podem mais ser aplicados. A seguir, são descritos alguns métodos que permitem analisar SCR do tipo descrito na seção anterior. Esses métodos são: a análise da covariância, o cálculo de uma função de custo quadrático e a análise da FDP dos autovalores do sistema. Os dois primeiros métodos foram obtidos de Nilsson [1], enquanto o último segue o desenvolvimento iniciado em Nascimento *et al.* [23].

### 4.2.1 Cálculo da Covariância

Para o cálculo da covariância, considera-se o modelo de estados dado pela equação (4.10), onde  $\{\tau_k\}$  é um processo aleatório descorrelacionado com  $\{e_k\}$ . A forma de  $\Phi(\tau_k)$  e  $\Gamma(\tau_k)$  é determinada pelo processo, pela rede de comunicação e pela estrutura do controlador. Admite-se ainda que  $\tau_k$  tem uma distribuição conhecida e que para valores diferentes de  $k$ , os atrasos são independentes.

A covariância do estado do sistema é definida como:

$$P_k = E_{\mathcal{Y}_{k-1}}(z_k z_k^T). \quad (4.16)$$

Sendo que,

$$\mathcal{Y}_k = \{\tau_0, \dots, \tau_k, e_0, \dots, e_k\}, \quad (4.17)$$

representa as componentes aleatórias do modelo considerado até o instante de tempo  $k$ .

Iterando-se a equação (4.16) tem-se:

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= E_{\mathcal{Y}_k}(z_{k+1} z_{k+1}^T) \\ &= E_{\mathcal{Y}_k}((\Phi(\tau_k)z_k + \Gamma(\tau_k)e_k)(\Phi(\tau_k)z_k + \Gamma(\tau_k)e_k)^T) \\ &= E_{\mathcal{Y}_k}(\Phi(\tau_k)z_k z_k^T \Phi(\tau_k)^T + \Gamma(\tau_k)e_k e_k^T \Gamma(\tau_k)^T) \\ &= E_{\tau_k}(\Phi(\tau_k)P_k \Phi(\tau_k)^T + \Gamma(\tau_k)R\Gamma(\tau_k)^T). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Nesse desenvolvimento, levou-se em conta que  $\tau_k$ ,  $z_k$  e  $e_k$  são independentes e que  $e_k$  tem média zero.

Uma outra forma de apresentar o resultado obtido na equação (4.18) é através de produtos de Kronecker, sendo assim, a covariância pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \text{vec}(P_{k+1}) &= E_{\tau_k}(\Phi(\tau_k) \otimes \Phi(\tau_k))\text{vec}(P_k) + \text{vec}E_{\tau_k}(\Gamma(\tau_k)R\Gamma(\tau_k)^T) \\ &= \mathcal{A}\text{vec}(P_k) + \mathcal{G}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Sendo que,

$$\mathcal{A} = E_{\tau_k}(\Phi(\tau_k) \otimes \Phi(\tau_k)), \quad (4.20)$$

$$\mathcal{G} = E_{\tau_k}(\Gamma(\tau_k) \otimes \Gamma(\tau_k))\text{vec}(R). \quad (4.21)$$

Nessa notação,  $\otimes$  representa o produto de Kronecker e  $\text{vec}(P_k)$  representa a forma vetorial da matriz  $P_k$ , ou seja, para uma matriz  $P_k$  dada por:

$$P_k = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Na qual  $P_1, P_2, \dots, P_n$  são vetores coluna, a forma vetorial de  $P_k$  é dada por:

$$\text{vec}(P_k) = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Nessa representação, também foi usado a seguinte propriedade:

$$\text{vec}(AYB) = (B^T \otimes A)\text{vec}(Y). \quad (4.24)$$

Onde  $A$ ,  $Y$  e  $B$  são matrizes de dimensões  $m \times n$ ,  $n \times p$  e  $p \times q$ , respectivamente.

A partir da equação (4.19) tem-se que a estabilidade do momento de segunda ordem  $E(z_k^T z_k)$  é garantida se o raio espectral da matriz  $\mathcal{A}$  é menor que um. O raio espectral de uma matriz  $A$  de dimensões  $n \times n$  com autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  é definido como:

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|. \quad (4.25)$$

Se  $\rho(\mathcal{A}) < 1$ , então a iteração da equação (4.19) é estável, de modo que a covariância estacionária definida pela equação (4.26) pode ser calculada resolvendo-se a equação linear (4.27).

$$P^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k. \quad (4.26)$$

$$\text{vec}(P^\infty) = E_{\tau_k}(\Phi(\tau_k) \otimes \Phi(\tau_k))\text{vec}(P^\infty) + \text{vec}E_{\tau_k}(\Gamma(\tau_k)R\Gamma(\tau_k)^T). \quad (4.27)$$

## 4.2.2 Função de Custo Quadrática

Na teoria de controle linear quadrático gaussiano (*LQG-control*) [25] é de grande importância calcular funções de custo do tipo  $E(z_k^T S(\tau_k) z_k)$ . Esse cálculo pode ser feito da maneira seguinte:

$$E_{\mathcal{Y}_k}(z_k^T S(\tau_k) z_k) = \text{tr} E_{\mathcal{Y}_k}(z_k^T S(\tau_k) z_k) = \text{tr}(E_{\tau_k} S(\tau_k) E_{\mathcal{Y}_{k-1}} z_k z_k^T). \quad (4.28)$$

Quando  $k \rightarrow \infty$  tem-se que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E(z_k^T S(\tau_k) z_k) = \text{tr}(E_{\tau_k} S(\tau_k) P^\infty) \quad (4.29)$$

Para calcular uma função de custo do tipo  $E(x_k^T S_{11} x_k + u_k^T S_{22} u_k)$ , é necessário fazer algumas manipulações para que o formalismo da equação (4.28) possa ser utilizado, já que  $u_k$  não é um elemento do vetor de estados  $z_k$ . Sendo assim, o sinal de controle  $u_k$  pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} u_k &= C^c(\tau_k) x_k^c + D^c(\tau_k)(C x_k + w_k) \\ &= \begin{bmatrix} D^c(\tau_k)C & C^c(\tau_k) & 0 \end{bmatrix} z_k + D^c(\tau_k) w_k. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Levando em conta que  $\tau_k$  e  $w_k$  são independentes e que  $w_k$  tem média zero, a função de custo pode ser escrita como:

$$E_{\mathcal{Y}_k}(x_k^T S_{11} x_k + u_k^T S_{22} u_k) = E_{\mathcal{Y}_k}(z_k^T S(\tau_k) z_k) + J_1. \quad (4.31)$$

Sendo que,

$$S(\tau_k) = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (D^c(\tau_k)C)^T \\ C^c(\tau_k)^T \\ 0 \end{bmatrix} S_{22} \begin{bmatrix} D^c(\tau_k)C & C^c(\tau_k) & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

$$J_1 = \text{tr}\left(E_{\tau_k}\{D^c(\tau_k)^T S_{22} D^c(\tau_k)\} R_2\right). \quad (4.33)$$

## 4.2.3 Cálculo da FDP dos Autovalores do Sistema

Em trabalho anterior [23], foi proposto um método para análise da estabilidade de SCR baseado na FDP dos autovalores do sistema em malha fechada. Naquele artigo, foi analisado um modelo simples de primeira ordem sem ruído no qual o atraso era modelado por uma distribuição gama conhecida a priori. O objetivo era obter expressões analíticas para o cálculo da probabilidade de se ter modos instáveis. Também

foram feitas simulações a fim de verificar como a FDP dos autovalores se modificava sob variação do período de amostragem e do ganho do controlador. A seguir são apresentados os principais resultados desse trabalho.

Considera-se um processo de primeira ordem cujo modelo de estado contínuo é dado por:

$$\dot{x} = ax(t) + u(t). \quad (4.34)$$

Admite-se ainda, que o sistema é instável em malha aberta, ou seja, que  $a > 0$  e que a lei de controle consiste numa realimentação de estado com ganho constante. Amostrandose o sistema e aplicando-se a formulação matemática definida anteriormente, tem-se:

$$x(kh + h) = \Phi x(kh) + \Gamma_0(\tau_k)u(kh) + \Gamma_1(\tau_k)u(kh - h), \quad (4.35)$$

$$y(kh) = x(kh). \quad (4.36)$$

Sendo que,

$$\Phi = e^{ah}, \quad (4.37)$$

$$\Gamma_0(\tau_k) = \frac{1}{a}(e^{a(h-\tau_k)} - 1), \quad (4.38)$$

$$\Gamma_1(\tau_k) = \frac{1}{a}(e^{ah} - e^{a(h-\tau_k)}), \quad (4.39)$$

$$\tau_k = \tau_k^{SC} + \tau_k^{CA}. \quad (4.40)$$

Para o tipo de análise realizada, considerou-se o atraso total  $\tau_k$  no lugar dos atrasos sensor-controlador,  $\tau_k^{SC}$ , e controlador-atuador,  $\tau_k^{CA}$ . O atraso total,  $\tau_k$ , é modelado por uma distribuição gama com parâmetros  $\mu$  e  $b$  dada pelas seguintes equações:

$$f_{\tau_k}(\tau_k) = \frac{\mu^b}{\Gamma(b)} \tau_k^{b-1} e^{-\mu\tau_k}, \quad \tau_k \in [0, \infty) \quad (4.41)$$

$$\Gamma(b) = \int_0^{\infty} s^{b-1} e^{-s} ds. \quad (4.42)$$

O modelo do controlador é dado por  $u(k) = -Kx(k)$ , em que  $K$  é o ganho do controlador. Sendo assim, o modelo de estado aumentado para o sistema em malha fechada é dado por:

$$z_{k+1} = \Phi(\tau_k)z_k. \quad (4.43)$$

Sendo que,

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$\Phi(\tau_k) = \begin{bmatrix} \Phi - \Gamma_0(\tau_k)K & \Gamma_1(\tau_k) \\ -K & 0 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Observando-se a equação (4.43) verifica-se que o sistema é variante no tempo, pois a matriz  $\Phi(\tau_k)$  é dependente de  $\tau_k$ , que é aleatório e varia para cada instante  $kh$ . Como os pólos do sistema são obtidos resolvendo-se a equação característica  $\det(\lambda I - \Phi(\tau_k))$ , eles também variam com o tempo. Para sistemas lineares invariantes no tempo, a estabilidade é garantida se os pólos do sistema permanecem dentro do círculo unitário. Porém, para sistemas variantes no tempo, é necessário uma condição adicional para que a estabilidade seja garantida.

Para que o sistema dado pela equação (4.43) seja uniformemente estável, é necessário que o maior autovalor da matriz  $\Phi(\tau_k)^T \Phi(\tau_k)$  satisfaça, para cada instante  $k$ , a condição dada pela equação (4.46) para uma constante  $\gamma$  finita e para todo  $k$  e  $j$  tais que  $k \geq j$ .

$$\prod_{i=j}^k \lambda_{max}^{\frac{1}{2}}(i) \leq \gamma. \quad (4.46)$$

Como os pólos do sistema são funções do atraso total, eles são também variáveis aleatórias e são caracterizados por FDPs. Para efeito de cálculo, ao invés de calcular a FDP dos autovalores, calcula-se a FDP dos seus valores absolutos a fim de eliminar o problema de ser trabalhar com números complexos. Essas FDPs podem então ser calculadas a partir do procedimento seguinte:

1. Calculam-se as raízes da equação característica referente à matriz  $\Phi(\tau_k)$ ;
2. Calculam-se os módulos das raízes obtidas;
3. Aplica-se o método clássico de obtenção da FDP de uma função de uma variável aleatória, que pode ser encontrado em Viniotis [26].

Seguindo esse procedimento, que é detalhado a seguir, pode-se encontrar expressões analíticas para as FDPs dos autovalores da matriz (4.45).

## Raízes da Equação Característica

A matriz indicada pela equação (4.45) pode ser reescrita na forma seguinte:

$$\Phi(\tau_k) = \begin{bmatrix} \Phi - \Gamma_0(\tau_k)K & \Gamma_1(\tau_k) \\ -K & 0 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$= \begin{bmatrix} (K\varphi + \beta) & \varphi \\ -K & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Sendo que,

$$\varphi = \frac{1}{a}(e^{ah} - e^{a(h-\tau_k)}), \quad (4.49)$$

$$\beta = e^{ah} - \frac{K}{a}e^{ah} + \frac{K}{a}. \quad (4.50)$$

Os autovalores do sistema em malha fechada são calculados resolvendo-se a equação característica mostrada a seguir:

$$\det(\lambda I - \Phi(\tau_k)) = \lambda^2 - (K\varphi + \beta)\lambda + K\varphi = 0 \quad (4.51)$$

Resolvendo-se essa equação tem-se:

$$\lambda_1(\eta) = \eta + \sqrt{\eta^2 - 2\eta + \beta}, \quad (4.52)$$

$$\lambda_2(\eta) = \eta - \sqrt{\eta^2 - 2\eta + \beta}. \quad (4.53)$$

Em que,

$$\eta = \frac{1}{2}(K\varphi + \beta) \quad (4.54)$$

Deve-se notar que  $\lambda_1(\eta)$  e  $\lambda_2(\eta)$  podem assumir valores complexos, o que dificulta a obtenção das suas FDPs. Entretanto, como o interesse é na análise da estabilidade, é suficiente analisar os valores absolutos desses dois autovalores, já que autovalores com módulo superior a um indicam instabilidade.

Ao considerar-se o caso em que  $\eta^2 - 2\eta + \beta$  possui duas raízes reais, i.e.,  $\eta_1 = 1 - \sqrt{1 - \beta}$  e  $\eta_2 = 1 + \sqrt{1 - \beta}$  são reais, os módulos dos autovalores são dados pelas seguintes expressões:

$$|\lambda_1(\eta)| = \begin{cases} \sqrt{2\eta - \beta} & \eta_1 < \eta < \eta_2 \\ |\eta + \sqrt{\eta^2 - 2\eta + \beta}| & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.55)$$

$$|\lambda_2(\eta)| = \begin{cases} \sqrt{2\eta - \beta} & \eta_1 < \eta < \eta_2 \\ |\eta - \sqrt{\eta^2 - 2\eta + \beta}| & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.56)$$

Se  $\eta^2 - 2\eta + \beta$  não possui raízes reais, a análise é bem mais simples que no caso anterior, pois nesse caso  $\eta_1$  e  $\eta_2$  são sempre números reais, de modo que os seus módulos são dados por:

$$|\lambda_1(\eta)| = \left\{ |\eta + \sqrt{\eta^2 - 2\eta + \beta}| \quad \forall \eta \right. \quad (4.57)$$

$$|\lambda_2(\eta)| = \left\{ |\eta - \sqrt{\eta^2 - 2\eta + \beta}| \quad \forall \eta \right. \quad (4.58)$$

Deve-se observar que os valores absolutos dos autovalores, assim como indicado nas equações (4.55) e (4.56), são funções da variável  $\eta$ , que por sua vez é função do ganho do controlador  $K$ , do parâmetro do processo  $a$ , do intervalo de amostragem  $h$  e do atraso total  $\tau_k$ . Uma vez fixados os parâmetros  $K$ ,  $a$  e  $h$ , os valores absolutos dos dois autovalores são apenas funções do atraso total  $\tau_k$ , que é uma variável aleatória com distribuição gama com parâmetros  $\mu$  e  $b$  dada pelas equações (4.41) e (4.42).

### Obtenção das FDPs

Para obter a FDP de  $|\lambda_1|$  e  $|\lambda_2|$ , aplica-se o procedimento de obtenção da FDP de uma função de uma variável aleatória mostrado em Viniotis [26] e indicado a seguir.

Para uma dada variável aleatória  $X$ , com FDP  $f_X(x)$  e uma transformação  $Y = g(X)$ , a FDP da variável aleatória  $Y$  é dada por:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^n f_X(x_i) \cdot \frac{1}{|dg(x_i)/dx|} \quad (4.59)$$

Na qual os termos  $x_i$  são as raízes reais da equação  $y - g(x) = 0$  resolvida para  $x$ .

Em geral, as funções  $|\lambda_1|$  e  $|\lambda_2|$  não possuem uma forma regular, como pode-se notar nas Figuras 4.3 e 4.4, o que dificulta a obtenção das suas FDPs. A alternativa para contornar esse problema é obter a FDP para cada um dos três intervalos indicados nessas figuras. Sendo assim o domínio de  $|\lambda_1|$ ,  $\mathcal{D}_{|\lambda_1|}$ , pode ser particionado em  $\mathcal{D}_{|\lambda_1|} = \mathcal{D}_{|\lambda_1|}^1 \cup \mathcal{D}_{|\lambda_1|}^2 \cup \mathcal{D}_{|\lambda_1|}^3$ , sendo que:

$$\mathcal{D}_{|\lambda_1|}^1 = \left[ |\eta| \Big|_{\eta=\eta_1}, |\eta + \sqrt{\eta^2 - 2\eta + \beta}| \Big|_{\eta=\frac{\beta}{2}} \right),$$

$$\mathcal{D}_{|\lambda_1|}^2 = \left[ |\eta + \sqrt{\eta^2 - 2\eta + \beta}| \Big|_{\eta=\frac{\beta}{2}}, \right. \\ \left. |\eta + \sqrt{\eta^2 - 2\eta + \beta}| \Big|_{\eta=\eta_2} \right),$$

$$\mathcal{D}_{|\lambda_1|}^3 = \left[ |\eta + \sqrt{\eta^2 - 2\eta + \beta}| \Big|_{\eta=\eta_2}, \right. \\ \left. |\eta + \sqrt{\eta^2 - 2\eta + \beta}| \Big|_{\eta=\frac{K}{a}e^{ah} + \beta} \right).$$

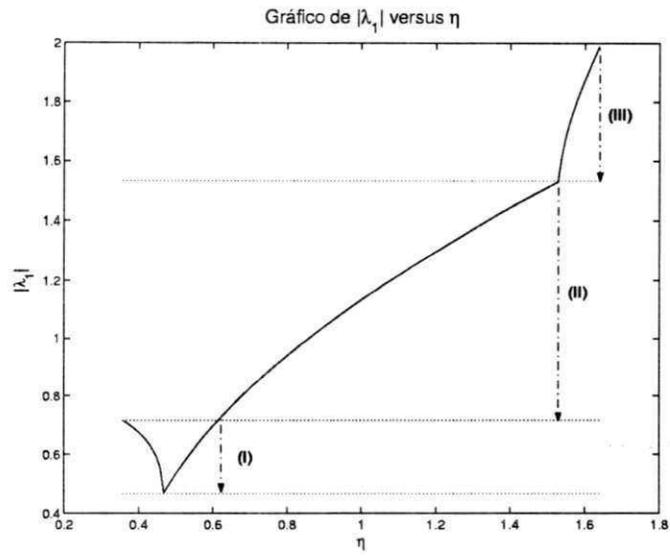


Figura 4.3: Gráfico de  $|\lambda_1|$  versus  $\eta$  para  $a = 1$ ,  $h = 0,25$  e  $K = 2$ .

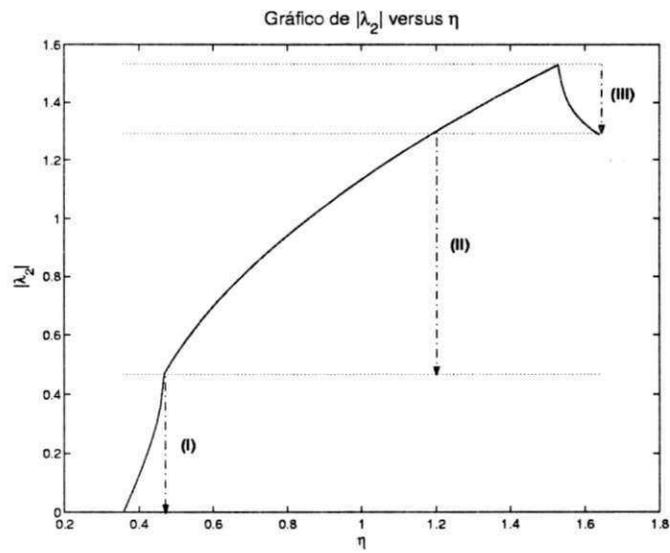


Figura 4.4: Gráfico de  $|\lambda_2|$  versus  $\eta$  para  $a = 1$ ,  $h = 0,25$  e  $K = 2$ .

De modo similar, para  $|\lambda_2|$  tem-se que  $\mathcal{D}_{|\lambda_2|} = \mathcal{D}_{|\lambda_2|}^1 \cup \mathcal{D}_{|\lambda_2|}^2 \cup \mathcal{D}_{|\lambda_2|}^3$ , sendo que:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{|\lambda_2|}^1 &= \left[ |\eta - \sqrt{\eta^2 - 2\eta + \beta}|_{\eta=\frac{g}{2}}, |\eta|_{\eta=\eta_1} \right), \\ \mathcal{D}_{|\lambda_2|}^2 &= \left[ |\eta|_{\eta=\eta_1}, |\eta - \sqrt{\eta^2 - 2\eta + \beta}|_{\eta=\frac{\kappa}{\alpha}e^{ah} + \beta} \right), \\ \mathcal{D}_{|\lambda_2|}^3 &= \left[ |\eta - \sqrt{\eta^2 - 2\eta + \beta}|_{\eta=\frac{\kappa}{\alpha}e^{ah} + \beta}, |\eta|_{\eta=\eta_2} \right).\end{aligned}$$

Aplicando-se o procedimento dado pela equação (4.59), tem-se que a FDP de  $|\lambda_1|$  é dada por:

$$f_{|\lambda_1|}(|\lambda_1|) = f_{\eta}(\eta) \cdot \sqrt{2\eta - \beta} \Big|_{\eta=\eta^a} + f_{\eta}(\eta) \cdot \left| \frac{\sqrt{\eta^2 - 2\eta + \beta}}{\eta - 1 + \sqrt{\eta^2 - 2\eta + \beta}} \right|_{\eta=\eta^b} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned}|\lambda_1| &\in \mathcal{D}_{|\lambda_1|}^1 \\ f_{|\lambda_1|}(|\lambda_1|) &= f_{\eta}(\eta) \cdot \sqrt{2\eta - \beta} \Big|_{\eta=\eta^a} \quad (4.61) \\ |\lambda_1| &\in \mathcal{D}_{|\lambda_1|}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{|\lambda_1|}(|\lambda_1|) &= f_{\eta}(\eta) \cdot \left| \frac{\sqrt{\eta^2 - 2\eta + \beta}}{\eta - 1 + \sqrt{\eta^2 - 2\eta + \beta}} \right|_{\eta=\eta^c} \quad (4.62) \\ |\lambda_1| &\in \mathcal{D}_{|\lambda_1|}^3\end{aligned}$$

Nas quais,

$$\begin{aligned}\eta^a &= \frac{|\lambda_1|^2 + \beta}{2} \\ \eta^b &= \frac{(|\lambda_1|^2 - \beta) - |\lambda_1| \sqrt{|\lambda_1|^2 - \beta}}{2(|\lambda_1|^2 - \beta)} \\ \eta^c &= \frac{(|\lambda_1|^2 - \beta) + |\lambda_1| \sqrt{|\lambda_1|^2 - \beta}}{2(|\lambda_1|^2 - \beta)}\end{aligned}$$

De modo similar, a FDP de  $|\lambda_2|$  é dada por:

$$f_{|\lambda_2|}(|\lambda_2|) = f_{\eta}(\eta) \cdot \left| \frac{\sqrt{\eta^2 - 2\eta + \beta}}{1 - \eta + \sqrt{\eta^2 - 2\eta + \beta}} \right|_{\eta=\eta^e} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned}|\lambda_2| &\in \mathcal{D}_{|\lambda_2|}^1 \\ f_{|\lambda_2|}(|\lambda_2|) &= f_{\eta}(\eta) \cdot \sqrt{2\eta - \beta} \Big|_{\eta=\eta^d} \quad (4.64) \\ |\lambda_2| &\in \mathcal{D}_{|\lambda_2|}^2\end{aligned}$$

$$f_{|\lambda_2|}(|\lambda_2|) = f_{\eta}(\eta) \cdot \sqrt{2\eta - \beta} \Big|_{\eta=\eta^d} + f_{\eta}(\eta) \cdot \left| \frac{\sqrt{\eta^2 - 2\eta + \beta}}{1 - \eta + \sqrt{\eta^2 - 2\eta + \beta}} \right|_{\eta=\eta^f} \quad (4.65)$$

$$|\lambda_2| \in \mathcal{D}_{|\lambda_2|}^3$$

Nas quais,

$$\begin{aligned}\eta^d &= \frac{|\lambda_2|^2 + \beta}{2} \\ \eta^e &= \frac{(|\lambda_2|^2 - \beta) - |\lambda_2| \sqrt{|\lambda_2|^2 - \beta}}{2(|\lambda_2|^2 - \beta)} \\ \eta^f &= \frac{(|\lambda_2|^2 - \beta) + |\lambda_2| \sqrt{|\lambda_2|^2 - \beta}}{2(|\lambda_2|^2 - \beta)}\end{aligned}$$

Nas expressões anteriores,  $f_\eta(\eta)$  é a FDP da variável auxiliar  $\eta$  que é dada pela equação:

$$f_\eta(\eta) = C \left( \ln \frac{g(\eta)}{K} \right)^{b-1} g(\eta)^{\frac{1}{a}-1}, \quad \eta \in \left[ \frac{\beta}{2}, \frac{1}{2} \left( \frac{K}{a} e^{ah} + \beta \right) \right) \quad (4.66)$$

Na qual,

$$\begin{aligned}g(\eta) &= K - ae^{-ah}(2\eta - \beta) \\ C &= (-1)^{b-1} \frac{2\mu^b e^{-ah}}{K\Gamma(b)a^{b-1}}\end{aligned}$$

O procedimento descrito anteriormente permite a obtenção de expressões analíticas para as FDPs dos valores absolutos dos autovalores do sistema em malha fechada. Essas FDPs variam de acordo com a distribuição do atraso, o intervalo de amostragem e com o ganho do controlador. Apesar desse método fornecer expressões analíticas para a FDP, a sua complexidade é um fator que o limita a SCR de dimensão dois (processo de primeira ordem com atraso total inferior a um intervalo de amostragem), já que o cálculo dos módulos das raízes do polinômio característico para ordens superiores nem sempre é possível analiticamente.

#### 4.2.4 Estimativa da FDP dos Autovalores do Sistema

Pode-se verificar que apesar do modelo analisado anteriormente ser bastante simples, as expressões analíticas obtidas para a FDP dos autovalores são bastante complicadas. Quando se consideram processos de dimensões superiores com ou sem modelo de ruído, é difícil, senão impossível, obter expressões analíticas para as FDPs dos autovalores do sistema. Por essa razão, é apresentado a seguir um método através do qual são obtidas estimativas da FDP ao invés de suas expressões analíticas exatas.

Existem inúmeros métodos de estimação de FDPs. Dentre esses, o método da janela de Parzen [27] possui algumas características que motivam a sua utilização, tais como:

a possibilidade de estimar a FDP a medida que os dados estão sendo gerados e a geração de estimativas contínuas diferenciáveis. A primeira dessas características é de grande importância, pois permite adequar as estimativas a uma eventual variação na forma da FDP estimada. O método da janela de Parzen utiliza uma soma de funções, chamadas de núcleos (*kernels*), para estimar a FDP. Nesse método, os núcleos gaussianos são bastante utilizados, pois são contínuos e diferenciáveis, daí a sua utilização corrente em processamento de sinais em algoritmos de estimação de entropia [28, 29, 30, 31].

Para um processo aleatório  $\{e\}$  com um conjunto de realizações  $e_1, \dots, e_N$ , a estimativa da FDP da variável aleatória  $e$  pelo método da janela de Parzen com núcleos gaussianos é dada por:

$$f_e(\xi) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G(\xi - e_i, \sigma^2). \quad (4.67)$$

Sendo que,  $\xi$  pertence ao domínio em que a FDP é definida e  $G$  é uma função gaussiana com média nula e variância  $\sigma^2$  calculada no ponto  $\xi - e_i$ , assim como mostrado a seguir.

$$G(x, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.68)$$

A escolha da variância  $\sigma^2$  é feita de modo empírico. Com uma variância alta tem-se uma forma mais suave para a FDP enquanto que com uma variância mais baixa tem-se algumas irregularidades na forma da FDP. Na Figura 4.5 é mostrado um exemplo de estimação da FDP utilizando núcleos gaussianos. Nesse exemplo, utilizou-se a função `unifrnd` do programa Matlab para gerar uma seqüência de números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo  $[-1, 1]$ . A partir dessa seqüência de números, foi calculada a estimativa da FDP no intervalo  $[-4, 4]$  para dois valores de  $\sigma$ . Observa-se na figura que com um menor valor para  $\sigma$ , a estimativa captura mais detalhes da FDP real, porém a sua forma é mais irregular.

Se a distribuição é variante no tempo, pode-se ainda calcular a estimativa da FDP para uma janela de dados de tamanho  $L$  a fim de acompanhar as suas variações. A estimativa com uma janela de tamanho  $L$  é dada por:

$$f_e(\xi) = \frac{1}{L} \sum_{i=k-L}^k G(\xi_k - e_i, \sigma^2). \quad (4.69)$$

Para obter a FDP dos valores absolutos dos pólos do sistema dado pela equação (4.10), procede-se da maneira seguinte:

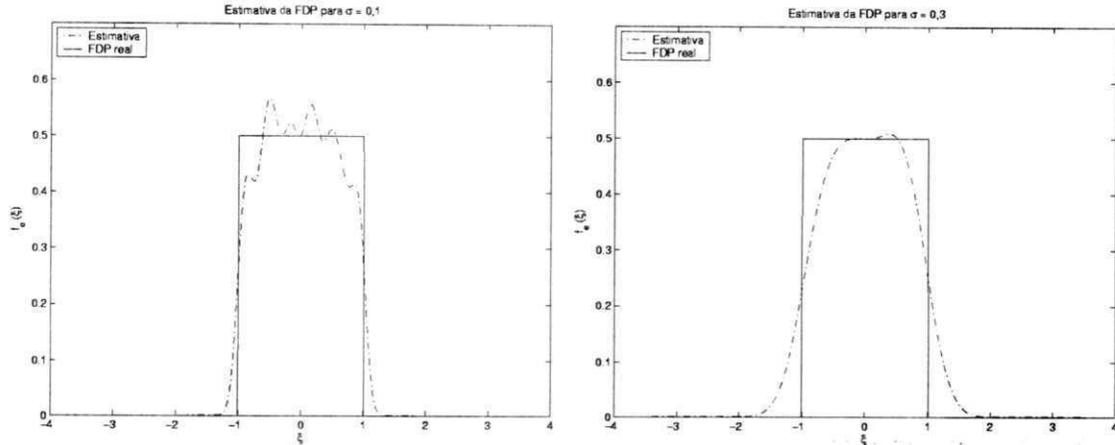


Figura 4.5: Estimativa da FDP para diferentes valores de  $\sigma$ . Na esquerda  $\sigma = 0,1$  e na direita  $\sigma = 0,3$ .

1. Atribui-se uma condição inicial para o vetor  $z(k)$ ;
2. Para cada índice  $k$  calculam-se os módulos dos autovalores da matriz  $\Phi(\tau_k)$ ;
3. Aplica-se a equação (4.67) para cada conjunto de autovalores.

Caso a distribuição se modifique ao longo do tempo, pode-se fazer uma estimativa a cada instante  $k$  substituindo a equação (4.67) pela equação (4.69).

### 4.3 Influência do Atraso em SCR

Como foi mencionado anteriormente, o atraso tende a degradar o desempenho do sistema de controle e pode até mesmo desestabilizá-lo. Nesta seção, são mostrados dois exemplos que ilustram a influência do atraso em SCR. O primeiro exemplo foi retirado de Ploplys *et al* [2] e consiste no controle de um pêndulo com base rotativa. O segundo exemplo foi retirado de Nilsson [1] e consiste na verificação da estabilidade para dois tipos de perfil de atraso (atraso constante e atraso aleatório uniformemente distribuído) para um modelo de um pêndulo invertido. Embora o primeiro exemplo não utilize um modelo aleatório para o atraso, ele serve para ilustrar de forma prática os efeitos do atraso em sistemas de controle.

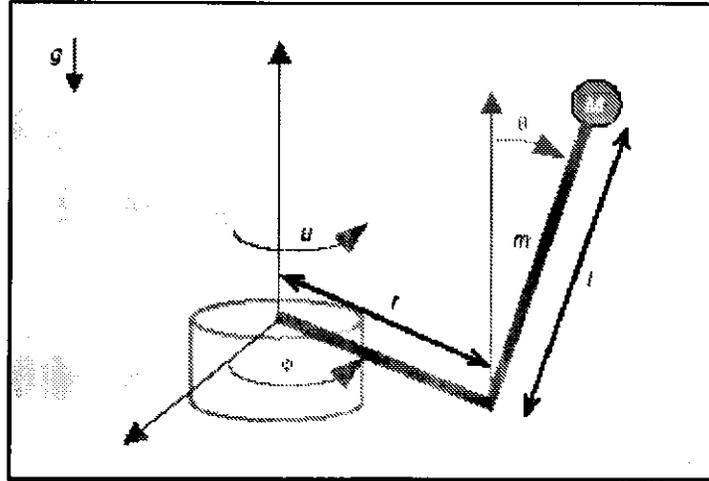


Figura 4.6: Pêndulo com base rotativa. O objetivo de controle é manter o braço vertical na posição  $\theta = 0$  através de um torque aplicado no braço horizontal (Figura retirada de Ploplys *et al.* [2]).

### 4.3.1 Pêndulo com Base Rotativa

A análise realizada neste exemplo difere um pouco da que foi mostrada anteriormente, pois considera-se que o atuador é guiado pelo tempo, ou seja, mesmo que a informação vinda do controlador chegue antes no atuador, ela só é aplicada no instante de amostragem seguinte. Com isso, o sistema não é mais variante no tempo, de modo que as técnicas convencionais de controle podem ser utilizadas.

Considera-se um pêndulo com a base rotativa assim como mostrado na Figura 4.6. A atuação no pêndulo se dá através de um torque aplicado na base rotativa, movendo o braço horizontal através de um ângulo  $\phi$ . No final do braço horizontal, há um pêndulo montado que balança livremente fazendo um ângulo  $\theta$  em um plano normal ao braço horizontal. O objetivo é manter o pêndulo próximo da posição  $\theta = 0$ . O modelo em espaço de estado linearizado para esse sistema é dado por:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.70)$$

Sendo que,

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 63,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -33,31 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -520,72 \\ 0 \\ 804,13 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

O modelo dado pela equação (4.70) é discretizado com uma frequência de amostragem de 200 Hz, resultando em:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \quad (4.72)$$

Sendo que,

$$A_d = \begin{bmatrix} 1,0008 & 0,005 & 0 & 0 \\ 0,3164 & 1,0008 & 0 & 0 \\ -0,00004 & 0 & 1 & 0,005 \\ -0,1666 & -0,0004 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} -0,0065 \\ -2,6043 \\ 0,0101 \\ 4,0210 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

Os autovalores do modelo discreto são:

$$\text{eig}(A_d) = \begin{bmatrix} 1,00 \\ 1,00 \\ 0,96 \\ 1,04 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

O projeto do controlador é feito através de técnicas LQR (Regulador Linear Quadrático), que consistem na obtenção do sinal de controle através da minimização de uma função de custo dada por:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} x^T Q x + u^T R u \quad (4.75)$$

Na qual, os parâmetros de ponderação  $Q$  e  $R$  são dados por:

$$Q = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad R = 1.000. \quad (4.76)$$

A minimização da função de custo dada pela equação (4.75) resulta no vetor de ganho  $K$  dado por:

$$K = \begin{bmatrix} -2,094 & -0,378 & -0,117 & -0,092 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

Caso a rede não estivesse presente (atraso nulo), com uma realimentação de estados  $u_k = -Kx_k$ , os pólos do sistema em malha fechada seriam dados pelos autovalores da

matriz  $A_d - B_dK$  que valem:

$$eig(A_d - B_dK) = \begin{bmatrix} 0,414 \\ 0,9870 + 0,0119i \\ 0,9870 - 0,0119i \\ 0,9866 \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

Comparando os dois conjuntos de autovalores, equações (4.74) e (4.78), verifica-se que com a realimentação de estados, todos os pólos estão localizados dentro do círculo unitário. Quando o sinal de controle só pode ser aplicado no instante de amostragem seguinte (atraso total igual a um intervalo de amostragem), a dinâmica do processo agora é dada por:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \quad (4.79)$$

$$u_k = -K x_{k-1} \quad (4.80)$$

Cujo modelo de estado aumentado é dado por:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d & B_d K \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

Os autovalores do sistema dado pela equação (4.81) são dados por:

$$eig\left(\begin{bmatrix} A_d & B_d K \\ I & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0,5205 + 0,5961i \\ 0,5205 - 0,5961i \\ 0,9870 + 0,0119i \\ 0,9870 - 0,0119i \\ 0,9866 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

Devido à adição de um atraso igual a um intervalo de amostragem, o sistema passa a apresentar cinco autovalores não nulos ao invés de quatro. Os três autovalores com maior parte real (dinâmica mais lenta) são preservados, enquanto que no lugar do autovalor 0,414 surge um par complexo conjugado  $0,5205 \pm 0,5961i$  que se traduz por uma resposta mais lenta e oscilatória. Sendo assim, apesar da estabilidade continuar sendo mantida, a inserção de atrasos no sistema torna a convergência do estado mais lenta e oscilatória.

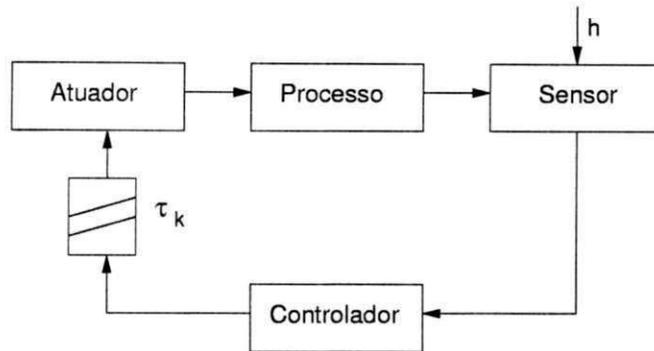


Figura 4.7: Diagrama de um SCR cujo processo é representado por um modelo de um pêndulo invertido.

### 4.3.2 Pêndulo Invertido

Neste exemplo, aplica-se a metodologia proposta ao longo desse capítulo para analisar um SCR com atraso aleatório. O diagrama do SCR considerado é mostrado na Figura 4.7. Nessa figura, há um processo que é amostrado periodicamente com intervalo de amostragem  $h$  e cuja influência da rede sobre o sistema é representada pelo atraso  $\tau_k$ . O processo a ser controlado é um pêndulo invertido, representado pela função de transferência seguinte:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - 1}U(s). \quad (4.83)$$

Discretizando-se o modelo do processo e admitindo que o ruído branco  $v_k$  afeta o estado do processo, tem-se:

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma_0(\tau_k)u_k + \Gamma_1(\tau_k)u_{k-1} + \sqrt{h}v_k, \quad (4.84)$$

$$y_k = Cx_k. \quad (4.85)$$

Sendo que,

$$\begin{aligned} x_k &= \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{bmatrix}, \\ \Phi &= \begin{bmatrix} \cosh(h) & \sinh(h) \\ \sinh(h) & \cosh(h) \end{bmatrix}, \\ \Gamma_0(\tau_k) &= \begin{bmatrix} \sinh(h - \tau_k) \\ \cosh(h - \tau_k) - 1 \end{bmatrix}, \\ \Gamma_1(\tau_k) &= \begin{bmatrix} \sinh(h) - \sinh(h - \tau_k) \\ \cosh(h) - \cosh(h - \tau_k) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O termo  $v_k$  é o ruído branco com variância um e média zero. O fator  $\sqrt{h}$  surge da amostragem do ruído branco contínuo com intervalo de amostragem  $h$ .

Para controlar o processo, utiliza-se um controlador LQ (Linear Quadrático) que minimiza a seguinte função de custo:

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k^2 + u_k^2). \quad (4.86)$$

Para o projeto do controlador LQ, utiliza-se o atraso nominal  $\tau_k = \tau_M = h/2$ . Sendo assim, o modelo utilizado no projeto do controlador é dado por:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_{1(M)} \\ 0_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_{0(M)} \\ 1 \end{bmatrix} u_k, \quad (4.87)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix}. \quad (4.88)$$

Sendo que,  $\Gamma_{0(M)}$  e  $\Gamma_{1(M)}$  representam os vetores  $\Gamma_0(\tau_k)$  e  $\Gamma_1(\tau_k)$  calculados para  $\tau_k = \tau_M$ , respectivamente.

O resultado da minimização da função de custo, equação (4.86), é uma lei de controle do tipo:

$$u_k = -L \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} l_{x(2 \times 1)} & l_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

Na qual o vetor de ganho  $L$  pode ser obtido utilizando a função `lqry` do programa Matlab com os parâmetros do modelo descritos pelas equações (4.87) e (4.88).

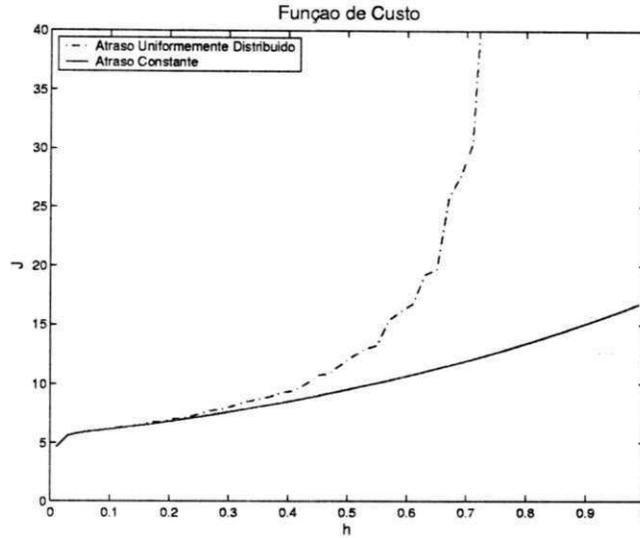


Figura 4.8: Função de Custo.

Substituindo o sinal de controle dado pela equação (4.89) na equação (4.84) obtém-se um modelo de estado aumentado do tipo dado pela equação (4.10), no qual:

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix}, \quad (4.90)$$

$$e_k = \begin{bmatrix} v_k \end{bmatrix}. \quad (4.91)$$

$$\Gamma(\tau_k) = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} \\ 0_{1 \times 2} \end{bmatrix}, \quad (4.92)$$

$$\Phi(\tau_k) = \begin{bmatrix} \Phi - \Gamma_0(\tau_k)l_x & \Gamma_1(\tau_k) - \Gamma_0(\tau_k)l_u \\ -l_x & -l_u \end{bmatrix}. \quad (4.93)$$

A partir do modelo de estado aumentado, pode-se analisar o comportamento do sistema para duas situações: atraso constante igual a  $\tau_M$  e atraso uniformemente distribuído no intervalo  $[0, h]$ . Na Figura 4.8 é mostrado o gráfico da função de custo  $J$  em função do intervalo de amostragem  $h$ . Observa-se nessa figura que quando o atraso é constante, o custo permanece limitado para toda a faixa de valores de  $h$  (intervalo  $[0, 1]$ ). Entretanto, quando o atraso é uniformemente distribuído, o custo não é mais limitado para uma faixa de valores de  $h$ , ou seja, a lei de controle utilizada não alcança o objetivo de minimizar a função de custo  $J$ . Essa observação pode ser confirmada através do cálculo do raio espectral da matriz  $\mathcal{A}$  (equação (4.20)) para diferentes valores de  $h$  como mostrado na Figura 4.9. Observa-se nessa figura que o raio espectral é

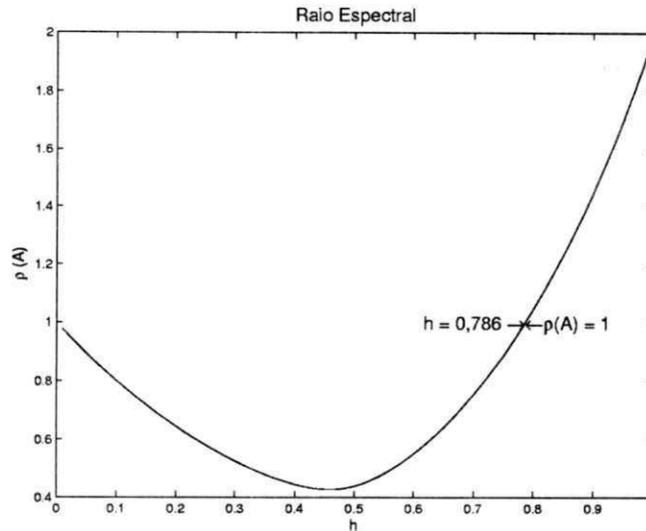


Figura 4.9: Raio espectral da matriz  $\mathcal{A}$  em função do intervalo de amostragem  $h$ .

maior que um para valores de  $h$  superiores a 0,786, e portanto, a covariância do estado não converge para um valor estacionário.

Pode-se concluir com esse exemplo, que no projeto de controladores não se pode negligenciar a aleatoriedade do atraso. Como pôde ser verificado, o controlador dimensionado para o atraso médio não conseguiu estabilizar o sistema quando o atraso era uniformemente distribuído.

## 4.4 Conclusões

Nesse capítulo foram apresentadas algumas ferramentas empregadas na análise de Sistemas de Controle via Redes sujeitos a atrasos aleatórios. A aleatoriedade do atraso está ligada ao tipo de rede utilizado, bem como às características temporais dos sensores, controladores e atuadores. Pôde-se também observar que a análise de SCR com atraso aleatório é bem mais complexa do que aquela feita para sistemas com atrasos nulos ou constantes. Devido a essa complexidade, não se pode utilizar a ampla gama de resultados disponíveis tanto para a análise quanto para o projeto de sistemas lineares invariantes no tempo. Por essa razão, recorre-se a medidas como o raio espectral, a covariância e a FDP dos autovalores para poder avaliar questões relativas ao desempenho e à estabilidade desse tipo de sistema.

Foi também observado, nesse capítulo, através de exemplos, o modo como o atraso

influencia os sistemas de controle. Pôde-se observar que com o atraso, a resposta do sistema pode se tornar mais lenta e oscilatória, ou ainda, o sistema pode se tornar instável sob determinadas condições.

# Capítulo 5

## Resultados

Neste capítulo são analisados alguns exemplos de SCR de acordo com a metodologia teórica definida nos capítulos anteriores.

### 5.1 Processo de Primeira Ordem sem Ruído

Em Nascimento *et al.* [23] foi analisado um processo de primeira ordem cujo modelo de estados é dado pelas equações (5.1) e (5.2) ou pelo modelo discreto equivalente dado pelas equações (5.3) e (5.4). O objetivo aqui é estender a análise realizada, através da utilização das ferramentas citadas no capítulo 4. Particularmente, pretende-se verificar a estabilidade e o desempenho do sistema em malha fechada para diferentes estratégias de controle.

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t) \quad (5.1)$$

$$y(t) = x(t) \quad (5.2)$$

$$x_{k+1} = e^{ah}x_k + \frac{1}{a}(e^{a(h-\tau_k)} - 1)u_k + \frac{1}{a}(e^{ah} - e^{a(h-\tau_k)})u_{k-1} \quad (5.3)$$

$$y_k = x_k \quad (5.4)$$

Para fechar a malha é necessário calcular o sinal de controle  $u_k$  utilizando o estado do processo  $x_k$  ou a variável de saída  $y_k$ . Dependendo de como o sinal de controle é calculado, obtém-se valores diferentes para as covariâncias e funções de custo, bem como para a FDP dos modos do sistema. A seguir, são mostradas algumas maneiras de calcular  $u_k$  e as respectivas análises de covariância, função de custo e de FDP.

### 5.1.1 Realimentação de Estados Desconsiderando a Rede

#### Projeto do Controlador

Uma alternativa para projetar o controlador é desconsiderar a presença da rede no seu projeto aliado ao uso de técnicas LQR. Ao desconsiderar-se a presença da rede (atraso nulo), as equações de estado se reduzem a

$$x_{k+1} = e^{ah}x_k + \frac{1}{a}(e^{ah} - 1)u_k, \quad (5.5)$$

$$y_k = x_k. \quad (5.6)$$

Cuja representação matricial é dada por

$$x_{k+1} = A_d x(k) + B_d u_k, \quad (5.7)$$

$$y_k = C_d x_k. \quad (5.8)$$

Na qual,

$$A_d = e^{ah}, \quad B_d = \frac{1}{a}(e^{ah} - 1), \quad C_d = 1.$$

A lei de controle que minimiza a função de custo dada pela equação

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k, \quad (5.9)$$

sujeita às equações (5.7) e (5.8) é dada por  $u_k = -Kx_k$ , na qual o ganho  $K$  é obtido resolvendo-se uma equação algébrica de Ricatti discreta, assim como mostrado em Dorato *et al.* [25] e indicado nas equações (5.10) e (5.11). As matrizes  $Q$  e  $R$  são escolhidas de acordo com as características desejadas. Por exemplo, quando se deseja minimizar as componentes de  $x_k$  aumenta-se o valor dos elementos de  $Q$  e quando se deseja minimizar as componentes de  $u_k$  aumenta-se o valor dos elementos de  $R$ . Numericamente, o ganho  $K$  pode ser obtido usando a função `dlqr` do Matlab tendo como parâmetros as matrizes  $A_d$ ,  $B_d$ ,  $Q$  e  $R$ .

$$P = Q + A_d^T P A_d - A_d^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A_d, \quad (5.10)$$

$$K = (R + B^T P B)^{-1} (B^T P A) \quad (5.11)$$

## Covariância

Inserindo-se o sinal de controle calculado nas equações (5.3) e (5.4), tem-se:

$$x_{k+1} = e^{ah}x(k) - \frac{K}{a}(e^{a(h-\tau_k)} - 1)x_k + \frac{1}{a}(e^{ah} - e^{a(h-\tau_k)})u_{k-1}, \quad (5.12)$$

$$y_k = x_k. \quad (5.13)$$

Cuja representação matricial é dada por:

$$z_{k+1} = \Phi(\tau_k)z_k. \quad (5.14)$$

Na qual,

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

$$\Phi(\tau_k) = \begin{bmatrix} e^{ah} - \frac{K}{a}(e^{a(h-\tau_k)} - 1) & \frac{1}{a}(e^{ah} - e^{a(h-\tau_k)}) \\ -K & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

A covariância do vetor de estados  $z_k$  é calculada iterando-se a expressão seguinte:

$$\text{vec}(P_{k+1}) = \mathcal{A}\text{vec}(P_k). \quad (5.17)$$

Na qual,

$$\mathcal{A} = E_{\tau_k}(\Phi(\tau_k) \otimes \Phi(\tau_k)). \quad (5.18)$$

Se o raio espectral de  $\mathcal{A}$  é menor que um, ou seja, se todos os autovalores de  $\mathcal{A}$  estão dentro do círculo unitário, então a expressão da covariância dada pela equação (5.17) converge para um valor estacionário  $P^\infty$ , que nesse caso é uma matriz nula, como pode ser facilmente verificado. Isso significa que o estado irá convergir para um valor constante, pois a covariância estacionária é nula.

### 5.1.2 Realimentação de Estados Considerando o Atraso Médio

#### Projeto do Controlador

Ao invés de desconsiderar-se a presença da rede, pode-se utilizar o atraso esperado, ou atraso médio, para calcular o sinal de controle. Considerando-se o atraso médio  $\tau_M$ , as equações do sistema podem ser escritas como:

$$x_{k+1} = e^{ah}x(k) + \frac{1}{a}(e^{a(h-\tau_M)} - 1)u_k + \frac{1}{a}(e^{ah} - e^{a(h-\tau_M)})u_{k-1}, \quad (5.19)$$

$$y_k = x_k. \quad (5.20)$$

Cuja representação matricial é dada por

$$\xi_{k+1} = A_d \xi(k) + B_d u_k, \quad (5.21)$$

$$y_k = C_d \xi_k. \quad (5.22)$$

Sendo que,

$$\xi = \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} e^{ah} & \frac{1}{a}(e^{ah} - e^{a(h-\tau_M)}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_d = \begin{bmatrix} \frac{1}{a}(e^{a(h-\tau_M)} - 1) \\ 1 \end{bmatrix}, C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A função de custo a ser minimizada é dada pela equação

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} y_k^T Q y_k + u_k^T R u_k, \quad (5.23)$$

sujeita às equações (5.21) e (5.22). O resultado dessa minimização é uma realimentação de estados  $u_k = -K \xi_k = -(K_x x_k + K_u u_{k-1})$ , na qual o ganho  $K$  é obtido resolvendo-se uma equação algébrica de Ricatti discreta. Numericamente, o ganho  $K$  pode ser obtido através da função `lqry` do Matlab, tendo como parâmetros as matrizes  $A_d$ ,  $B_d$ ,  $C_d$ ,  $Q$  e  $R$ .

### Covariância

Inserindo-se o sinal de controle calculado nas equações (5.3) e (5.4), tem-se:

$$x_{k+1} = \left( e^{ah} - \frac{K_x}{a}(e^{a(h-\tau_k)} - 1) \right) x_k +$$

$$+ \frac{1}{a}(e^{ah} - e^{a(h-\tau_k)} - (e^{a(h-\tau_k)} - 1)K_u) u_{k-1}, \quad (5.24)$$

$$y_k = x_k. \quad (5.25)$$

Cuja representação matricial é dada por:

$$z_{k+1} = \Phi(\tau_k) z_k. \quad (5.26)$$

Na qual,

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

$$\Phi(\tau_k) = \begin{bmatrix} e^{ah} - \frac{K_x}{a}(e^{a(h-\tau_k)} - 1) & \frac{1}{a}(e^{ah} - e^{a(h-\tau_k)} - K_u(e^{a(h-\tau_k)} - 1)) \\ -K_x & -K_u \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

A covariância do vetor de estados  $z_k$  é calculada iterando-se a expressão seguinte:

$$\text{vec}(P_{k+1}) = \mathcal{A} \text{vec}(P_k). \quad (5.29)$$

Na qual,

$$\mathcal{A} = E_{\tau_k}(\Phi(\tau_k) \otimes \Phi(\tau_k)). \quad (5.30)$$

Analogamente ao caso anterior, se o raio espectral de  $\mathcal{A}$  é menor que um, então a expressão da covariância dada pela equação (5.17) converge para um valor estacionário  $P^\infty$ , que nesse caso é uma matriz nula, como pode ser facilmente verificado.

### 5.1.3 Simulações

Nas simulações seguintes, considera-se que o atraso é uma variável aleatória uniformemente distribuída com FDP dada por:

$$f_{\tau_k}(\tau_k) = \begin{cases} \frac{1}{l_2 - l_1} & \tau_k \in [l_1, l_2] \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (5.31)$$

Sendo que,  $l_1 \geq 0$  e  $l_2 \leq h$ . O valor médio para o atraso, considerando essa distribuição, é dado por  $\tau_M = (l_1 + l_2)/2$ . A fim de verificar a convergência do vetor de estados para essa distribuição, é necessário calcular a matriz  $\mathcal{A}$  para diferentes valores de  $l_1$ ,  $l_2$  e  $h$ . A matriz  $\mathcal{A}$  é calculada da seguinte maneira:

$$\mathcal{A} = E_{\tau_k}(\Phi(\tau_k) \otimes \Phi(\tau_k)) = \frac{1}{l_2 - l_1} \int_{l_1}^{l_2} \Phi(\tau_k) \otimes \Phi(\tau_k) d\tau_k$$

Essa integral foi resolvida simbolicamente no Matlab para diferentes valores de  $l_1$ ,  $l_2$  e  $h$ , tendo como parâmetro do processo  $a = 10$ . Para tal parâmetro, o período de amostragem deve variar entre 0,010 e 0,025 de acordo com uma regra prática de amostragem retirada de Aström *et al.* [24]. Dentro desses limites de amostragem, é apresentado nas tabelas 5.1 e 5.2 os valores dos raios espectrais para os dois tipos de projeto de controlador analisados. Em ambas as tabelas, considerou-se  $Q = 10$  e  $R = 10$  como ponderações para as funções de custo. Observa-se que, em todos os casos considerados, o raio espectral é inferior a um, de modo que a covariância converge para zero, já que não há modelo de ruído.

A estimativa da FDP dos modos do sistema pode ser obtida facilmente aplicando-se o método proposto no capítulo 4. Os resultados simulados para o caso em que o

Tabela 5.1: Raio espectral da matriz  $\mathcal{A}$  para o caso em que a rede é desconsiderada no projeto do controlador.

h	$l_1 = 0, l_2 = h/2$	$l_1 = h/2, l_2 = h$	$l_1 = 0, l_2 = h$
0,010	0,8074	0,7824	0,7958
0,015	0,7151	0,6466	0,6860
0,020	0,6231	0,4387	0,5627
0,025	0,5287	0,4003	0,4235

Tabela 5.2: Raio espectral da matriz  $\mathcal{A}$  para o caso em que o atraso médio é considerado no projeto do controlador.

h	$l_1 = 0, l_2 = h/2$	$l_1 = h/2, l_2 = h$	$l_1 = 0, l_2 = h$
0,010	0,8180	0,8180	0,8181
0,015	0,7399	0,7399	0,7405
0,020	0,6695	0,6695	0,6711
0,025	0,6062	0,6062	0,6099

atraso é uniformemente distribuído no intervalo  $[0, h]$ , considerando as duas formas de projeto do controlador, são mostrados nas Figuras 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4. As estimativas das FDPs foram obtidas usando núcleos com  $\sigma = 0,025$ . Pode-se observar que as FDPs permanecem na região de estabilidade em todos os casos. Isso já era esperado, já que o valor do raio espectral para essas situações é inferior a um. Observa-se também que com a lei de controle que utiliza o atraso médio, a FDP dos autovalores se torna mais concentrada (menor variância). Uma outra observação interessante, é que a medida que o intervalo de amostragem aumenta, as FDPs tendem a se espalhar num intervalo maior. Essas observações podem também ser verificadas para outros intervalos da distribuição, assim como mostrado nas Figuras 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8 para  $\tau_k \sim [0, h/2]$  e nas Figuras 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12 para  $\tau_k \sim [h/2, h]$ . Comparando os três intervalos da distribuição do atraso, verifica-se que as FDPs são mais dispersas para o intervalo  $[0, h]$  como era esperado.

Na Figura 5.13 são mostradas as variáveis do sistema, o estado do processo e o sinal de controle, para o caso em que a rede é negligenciada no cálculo do controlador. Para essa simulação, foi aplicada uma perturbação no estado inicial do sistema a fim de observar as propriedades de convergência do sistema. Deve-se observar que ambas as variáveis convergem para zero, o que está de acordo com o resultado da covariância

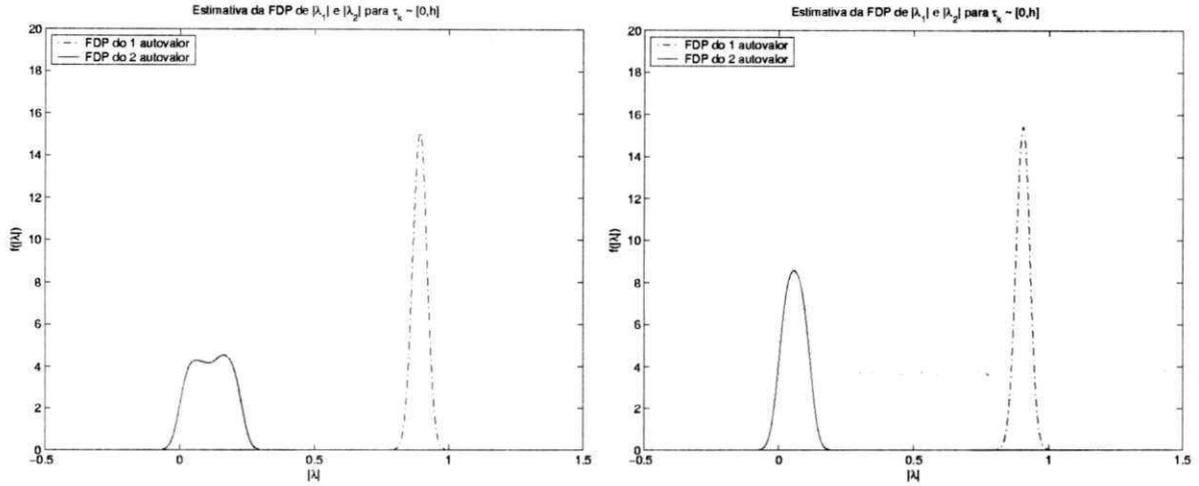


Figura 5.1: Estimativa da FDP dos autovalores para  $h = 0,010$  com  $\tau_k \sim [0, h]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio.

estacionária nula.

## 5.2 Processo de Primeira Ordem com Ruído

Neste exemplo, é acrescentado uma perturbação ao modelo analisado no exemplo anterior. Considera-se agora um processo físico dado pelas seguintes equações:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t) + v(t), \quad (5.32)$$

$$y(t) = x(t). \quad (5.33)$$

Sendo que  $v(t)$  é um termo de ruído branco com média nula e covariância incremental  $R_v$ .

O equivalente discreto desse modelo é descrito por:

$$x_{k+1} = e^{ah}x_k + \frac{1}{a}(e^{a(h-\tau_k)} - 1)u_k + \frac{1}{a}(e^{ah} - e^{a(h-\tau_k)})u_{k-1} + v_k, \quad (5.34)$$

$$y_k = x_k. \quad (5.35)$$

No qual  $v_k$  é um processo estocástico gaussiano branco com média nula e covariância  $R_1$  dada por:

$$R_1 = E\{v_k v_k^T\} = \int_0^h e^{(h-s)} R_v e^{(h-s)} ds = R_v \int_0^h e^{2(h-s)} ds = \frac{R_v}{2}(e^{2h} - 1). \quad (5.36)$$

O controlador pode ser projetado sem levar em conta o termo de ruído, analogamente ao que foi feito anteriormente.

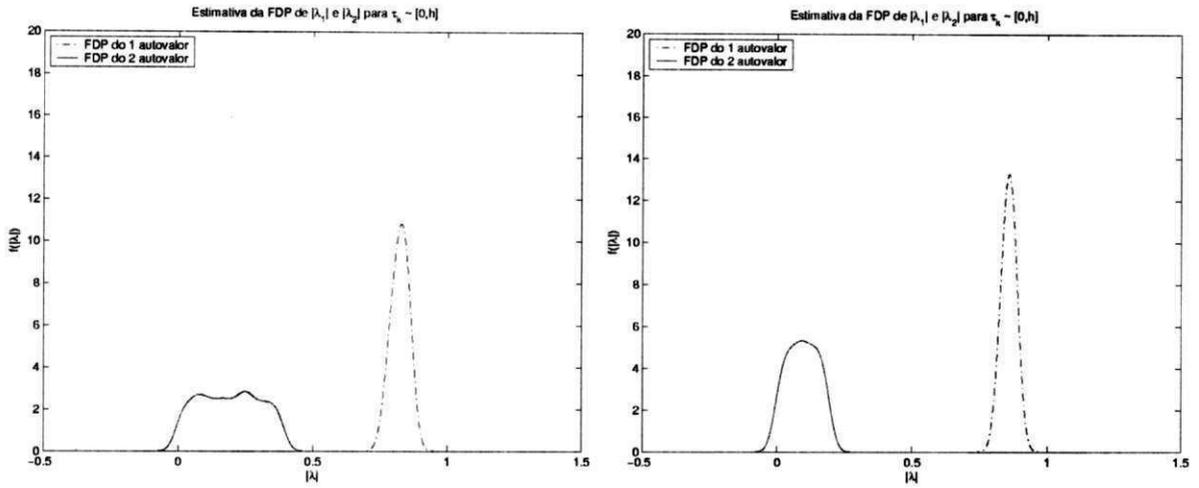


Figura 5.2: Estimativa da FDP dos autovalores para  $h = 0,015$  com  $\tau_k \sim [0, h]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio.

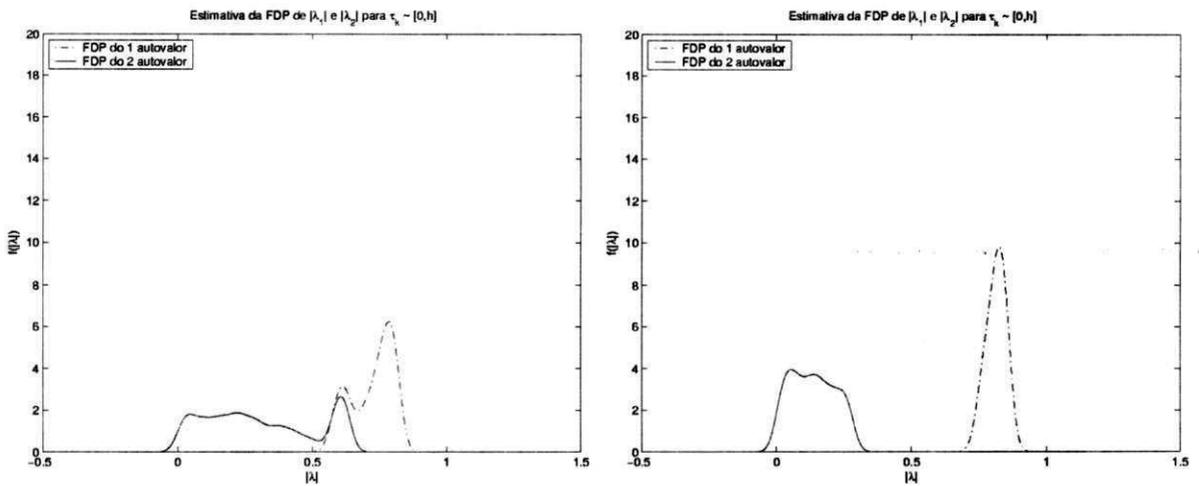


Figura 5.3: Estimativa da FDP dos autovalores para  $h = 0,020$  com  $\tau_k \sim [0, h]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio.

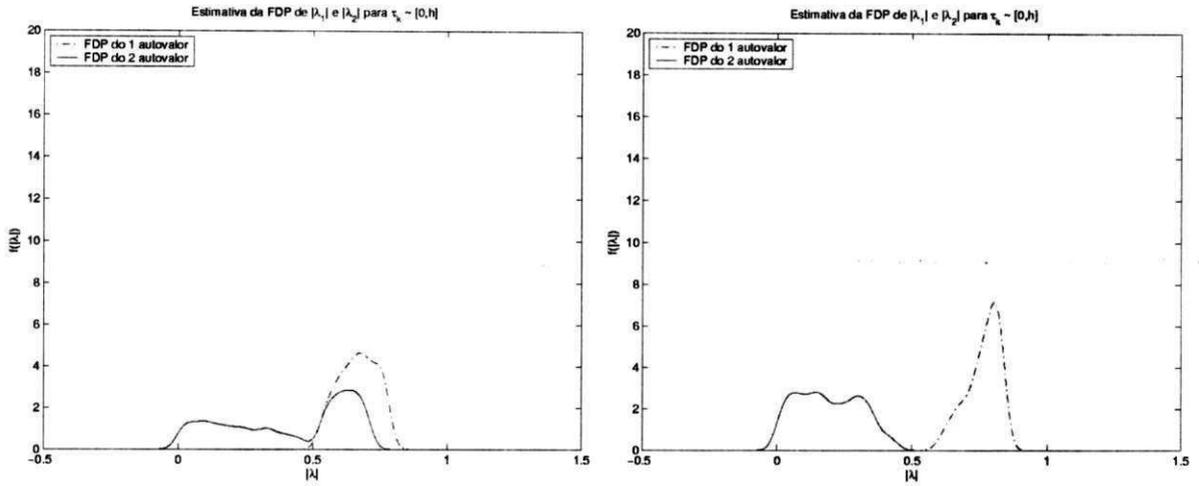


Figura 5.4: Estimativa da FDP dos autovalores para  $h = 0,025$  com  $\tau_k \sim [0, h]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio.

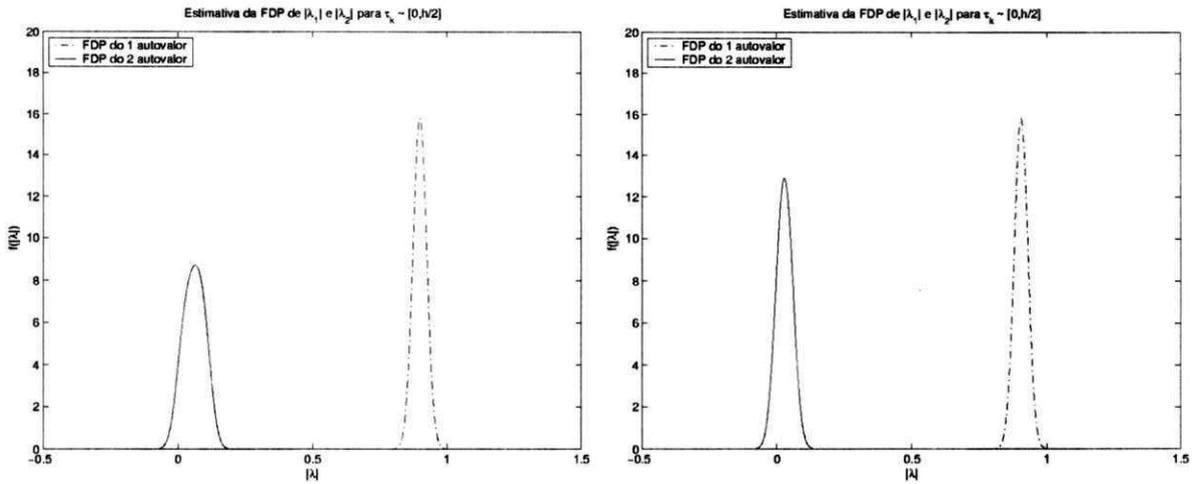


Figura 5.5: Estimativa da FDP dos autovalores para  $h = 0,010$  com  $\tau_k \sim [0, h/2]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio.

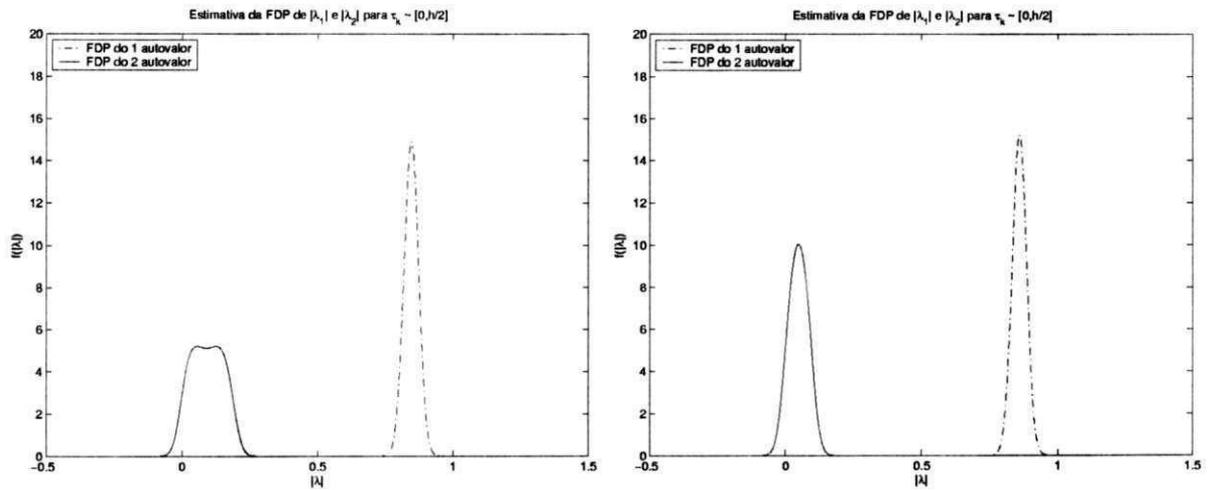


Figura 5.6: Estimativa da FDP dos autovalores para  $h = 0,015$  com  $\tau_k \sim [0, h/2]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio.

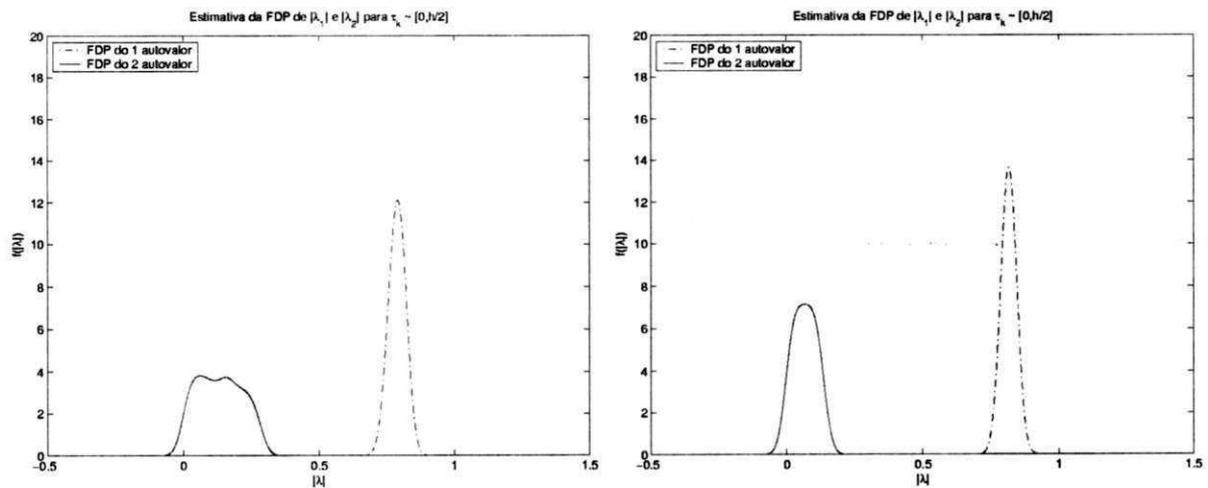


Figura 5.7: Estimativa da FDP dos autovalores para  $h = 0,020$  com  $\tau_k \sim [0, h/2]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio.

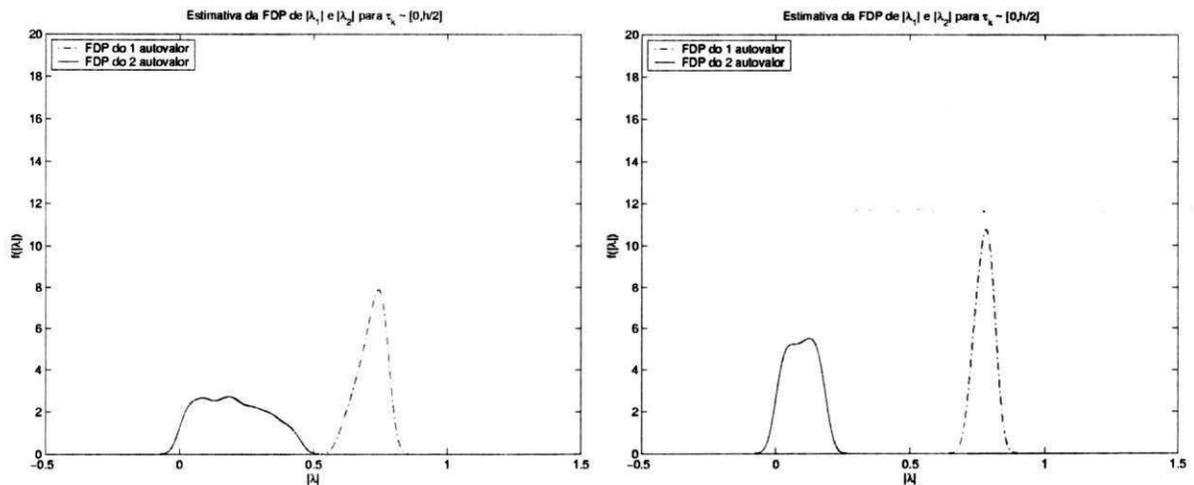


Figura 5.8: Estimativa da FDP dos autovalores para  $h = 0,025$  com  $\tau_k \sim [0, h/2]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio.

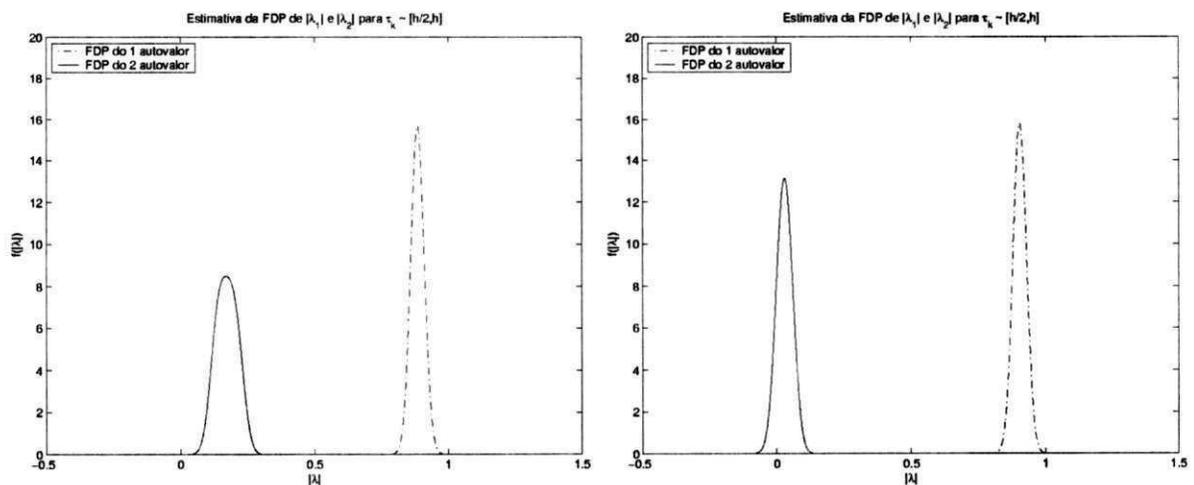


Figura 5.9: Estimativa da FDP dos autovalores para  $h = 0,010$  com  $\tau_k \sim [h/2, h]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio.

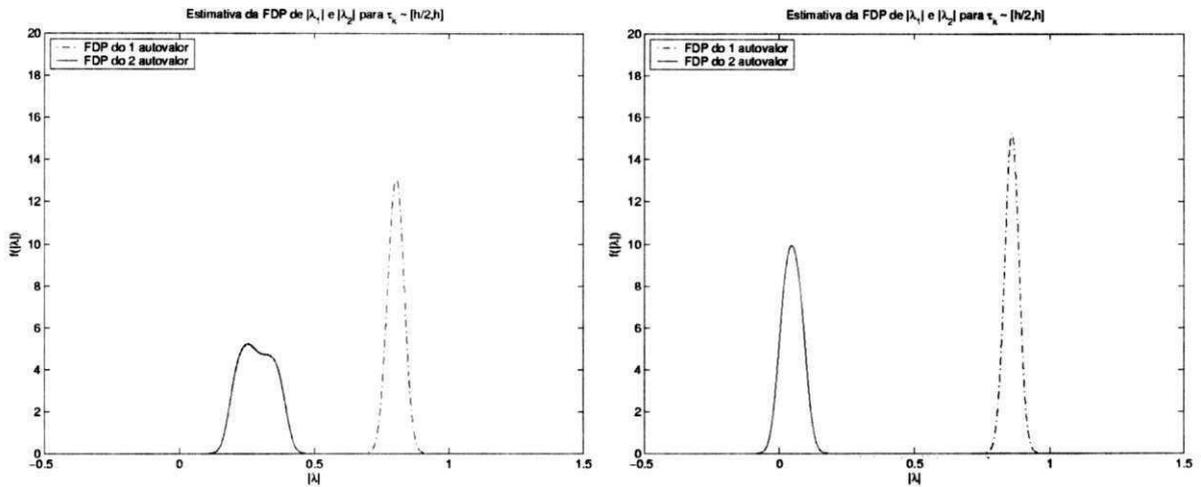


Figura 5.10: Estimativa da FDP dos autovalores para  $h = 0,015$  com  $\tau_k \sim [h/2, h]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio.

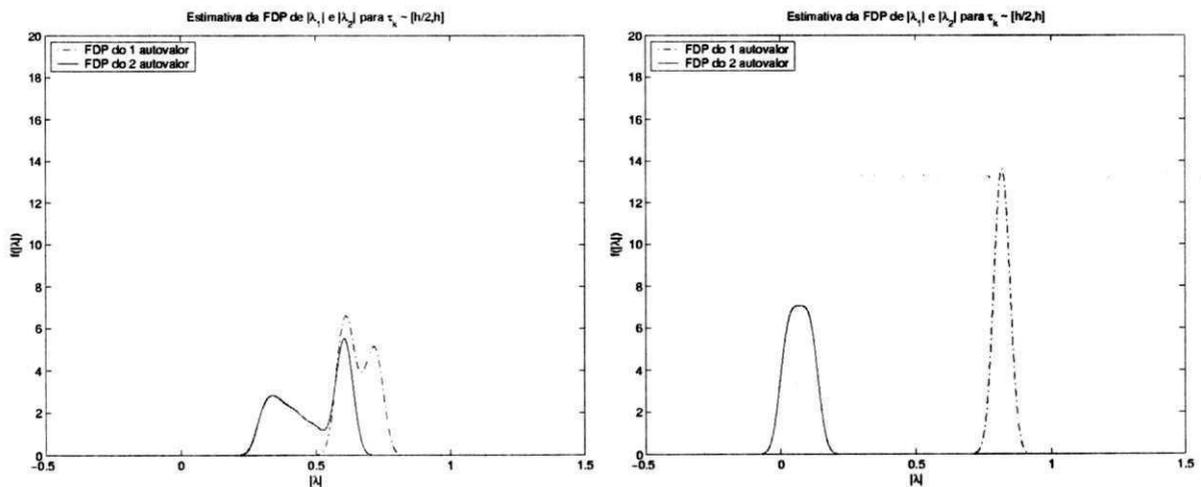


Figura 5.11: Estimativa da FDP dos autovalores para  $h = 0,020$  com  $\tau_k \sim [h/2, h]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio.

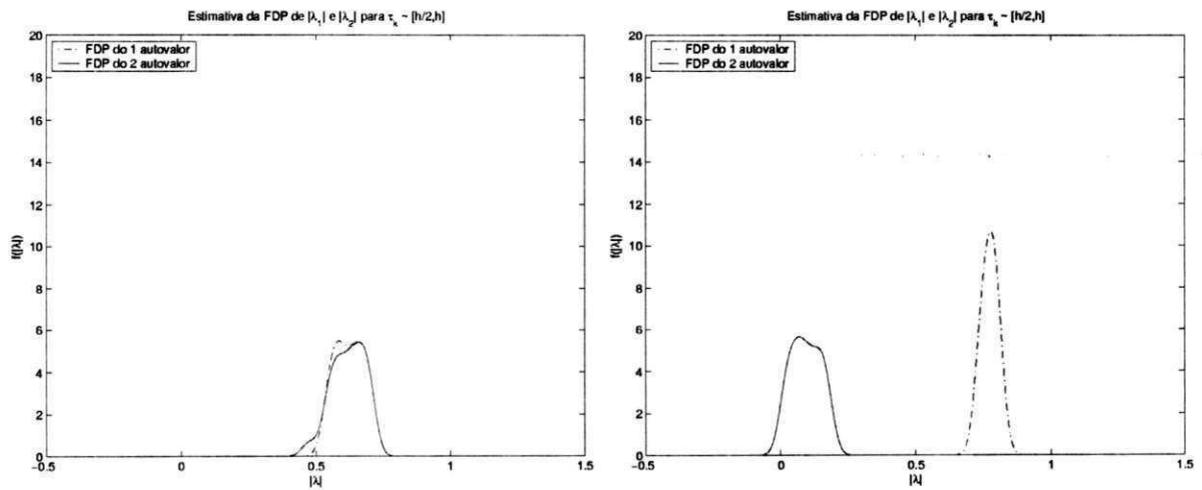


Figura 5.12: Estimativa da FDP dos autovalores para  $h = 0,025$  com  $\tau_k \sim [h/2, h]$ . Na figura da esquerda, é usada a lei de controle que desconsidera a rede. Na figura da direita, é usada a lei de controle que considera o atraso médio.

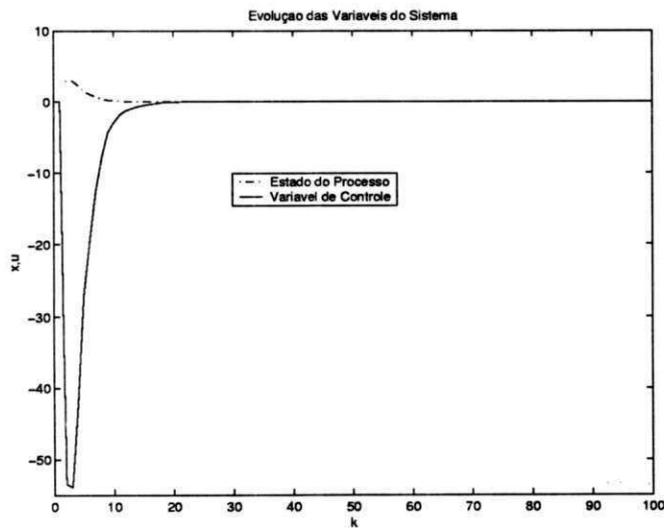


Figura 5.13: Evolução das variáveis do sistema após a aplicação de uma perturbação no estado inicial do processo. Para essa simulação, considerou-se  $h = 0,025$  e o controlador projetado negligenciando a rede.

### 5.2.1 Realimentação de Estados Desconsiderando a Rede

Ao projetar-se o controlador de acordo com as equações (5.5) a (5.9) obtém-se um sinal de controle da forma  $u_k = -Kx_k$ , que inserido nas equações (5.34) e (5.35) resultam em:

$$x_{k+1} = e^{ah}x_k - \frac{K}{a}(e^{a(h-\tau_k)} - 1)x_k + \frac{1}{a}(e^{ah} - e^{a(h-\tau_k)})u_{k-1} + v_k, \quad (5.37)$$

$$y_k = x_k. \quad (5.38)$$

Cuja representação matricial é dada por:

$$z_{k+1} = \Phi(\tau_k)z_k + \Gamma e_k. \quad (5.39)$$

Sendo que,

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix}, \quad (5.40)$$

$$e_k = \begin{bmatrix} v_k \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

$$\Phi(\tau_k) = \begin{bmatrix} e^{ah} - \frac{K}{a}(e^{a(h-\tau_k)} - 1) & \frac{1}{a}(e^{ah} - e^{a(h-\tau_k)}) \\ -K & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

$$R = E(e_k e_k^T) = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

A covariância pode ser então calculada através da expressão:

$$vec(P_{k+1}) = \mathcal{A}vec(P_k) + \mathcal{G}. \quad (5.45)$$

Sendo que,

$$\mathcal{A} = E_{\tau_k}(\Phi(\tau_k) \otimes \Phi(\tau_k)), \quad (5.46)$$

$$\mathcal{G} = E_{\tau_k}(\Gamma \otimes \Gamma)vec(R). \quad (5.47)$$

Se  $\rho(\mathcal{A}) < 1$  então a covariância estacionária pode ser calculada resolvendo-se a equação:

$$vec(P^\infty) = \mathcal{A}vec(P^\infty) + \mathcal{G}. \quad (5.48)$$

## 5.2.2 Realimentação de Estados Considerando o Atraso Médio

Ao considerar-se o atraso médio, utilizam-se as equações (5.19) a (5.23) no projeto do controlador, o que resulta em um sinal de controle da forma  $u_k = -K\xi_k = -(K_x x_k + K_u u_{k-1})$ . Inserindo-se o sinal de controle nas equações (5.32) e (5.33) tem-se:

$$x_{k+1} = \left( e^{ah} - \frac{1}{a}(e^{a(h-\tau_k)} - 1)K_x \right) x_k + \frac{1}{a}(e^{ah} - e^{a(h-\tau_k)} - (e^{a(h-\tau_k)} - 1)K_u) u_{k-1} + v_k, \quad (5.49)$$

$$y_k = x_k. \quad (5.50)$$

Cuja representação matricial é dada por:

$$z_{k+1} = \Phi(\tau_k) z_k + \Gamma e_k. \quad (5.51)$$

Na qual,

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix}, \quad (5.52)$$

$$e_k = \begin{bmatrix} v_k \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.53)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.54)$$

$$\Phi(\tau_k) = \begin{bmatrix} e^h - K_x(e^{(h-\tau_k)} - 1) & e^h - e^{(h-\tau_k)} - K_u(e^{(h-\tau_k)} - 1) \\ -K_x & -K_u \end{bmatrix}. \quad (5.55)$$

$$R = E(e_k e_k^T) = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.56)$$

A covariância é calculada através das equações (5.45) e (5.48).

## 5.2.3 Simulações

Nas simulações seguintes consideram-se os mesmos parâmetros utilizados para o caso sem ruído, ou seja,  $a = 10$ ,  $h \in \{0,010; 0,015; 0,020; 0,025\}$  e  $\tau_k$  uniformemente distribuído no intervalo  $[l_1, l_2]$ . Como o projeto dos controladores para ambos os casos não levam em conta o termo de ruído, os ganhos dos controladores são obtidos utilizando as mesmas matrizes de projeto para o caso sem ruído. As matrizes  $\Phi(\tau_k)$  também

continuam as mesmas, de modo que as matrizes  $\mathcal{A}$  também são análogas e conseqüentemente os valores para os raios espectrais continuam sendo dados pelas Tabelas 5.1 e 5.2.

Como  $\rho(\mathcal{A}) < 1$  para os casos considerados, a covariância estacionária é calculada resolvendo-se a equação seguinte:

$$vec(P^\infty) = \mathcal{A}vec(P^\infty) + \mathcal{G} = (I - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{G}. \quad (5.57)$$

Na qual,

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= E_{\tau_k}(\Gamma \otimes \Gamma)vec(R) = \left( \int_{l_1}^{l_2} \Gamma \otimes \Gamma d\tau_k \right) vec(R) \\ &= (l_2 - l_1)(\Gamma \otimes \Gamma)vec(R) = \begin{bmatrix} (l_2 - l_1)R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Considerando uma covariância incremental  $R_v$  igual a 0,1 tem-se que  $R_1 = 0,0324$ . As matrizes de covariância estacionária, calculadas para um atraso uniformemente distribuído no intervalo  $[0, h]$  e considerando os dois tipos de controlador, são mostradas a seguir para os valores de  $h$  utilizados anteriormente.

$$\begin{aligned}
h = 0,010 \therefore P_{SR}^{\infty} &= \begin{bmatrix} 0,0001 & -0,0011 \\ -0,0011 & 0,0225 \end{bmatrix}, \\
P_{AM}^{\infty} &= 1.0 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} -0,0703 & 0,2468 \\ 0,2468 & -0,7539 \end{bmatrix}, \\
h = 0,015 \therefore P_{SR}^{\infty} &= \begin{bmatrix} 0,0001 & -0,0017 \\ -0,0017 & 0,0360 \end{bmatrix}, \\
P_{AM}^{\infty} &= 1.0 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} -0,0984 & 0,3305 \\ 0,3305 & -0,8843 \end{bmatrix}, \\
h = 0,020 \therefore P_{SR}^{\infty} &= \begin{bmatrix} 0,0002 & -0,0024 \\ -0,0024 & 0,0516 \end{bmatrix}, \\
P_{AM}^{\infty} &= 1.0 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} -0,1227 & 0,3959 \\ 0,3959 & -0,9087 \end{bmatrix}, \\
h = 0,025 \therefore P_{SR}^{\infty} &= \begin{bmatrix} 0,0002 & -0,0032 \\ -0,0032 & 0,0700 \end{bmatrix}, \\
P_{AM}^{\infty} &= 1.0 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} -0,1438 & 0,4467 \\ 0,4467 & -0,8429 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Pode-se observar, que em geral, os termos da matriz de covariância são maiores para intervalos de amostragem maiores. Além disso, os termos da matriz de covariância para o caso em que o atraso médio é considerado são bem menores do que no caso no qual o atraso é desconsiderado.

No que se refere a FDP dos autovalores, não há mudanças na sua forma em relação ao caso sem ruído, visto que para calculá-las é necessário apenas a matriz  $\Phi(\tau_k)$  que permanece a mesma.

### 5.3 Conclusões

Neste capítulo foram analisados dois exemplos de SCR. Preferiu-se trabalhar com um sistema de primeira ordem a fim de evitar uma complexidade numérica desnecessária para o propósito desse texto. O método proposto, através do qual são obtidas estimativas da FDP dos autovalores do sistema, permitiu estender os resultados obtidos em Nascimento *et al.* [23] para distribuições de probabilidade do atraso mais gerais. As

conclusões obtidas analisando a FDP mostraram-se coerentes com outros resultados disponíveis na literatura.

# Capítulo 6

## Conclusões

O trabalho realizado teve como objetivo acrescentar novas ferramentas de análise para Sistemas de Controle via Redes que apresentam atrasos de comunicação aleatórios entre os elementos do sistema. No modelo analisado, o sistema não era invariante no tempo, o que impossibilitava a utilização da ampla gama de resultados disponíveis para sistemas LTI.

Ao longo dessa dissertação foi realizado um estudo sobre SCR. Foram analisados algumas questões relativas ao nível de rede, dentre as quais o atraso de comunicação recebeu uma análise mais detalhada. Pôde-se observar que o atraso ocasiona uma série de problemas que devem ser resolvidos a fim de que o desempenho do sistema possa ser satisfatório. A partir de um modelo escolhido, realizou-se a formulação matemática do sistema para em seguida analisá-lo de acordo com as ferramentas propostas.

A principal contribuição desse trabalho foi a proposição de uma ferramenta de análise de estabilidade baseada na FDP dos autovalores do sistema em malha fechada. Com a ferramenta proposta, é possível calcular ou estimar as FDPs dos modos do sistema. A partir daí, tem-se uma descrição do comportamento probabilístico do sistema e, conseqüentemente a sua influência na estabilidade do sistema. Aliado ao uso dessa ferramenta, foi também utilizado o cálculo da covariância do modelo de estado do sistema para lidar com os modelos com ruído.

Para trabalhos futuros pretende-se:

- investigar um método de amostragem baseado em eventos [32] (amostragem de Lebesgue) no lugar da amostragem periódica convencional;
- realizar a modelagem de sistemas reais a fim de aplicar a metodologia de análise desenvolvida nessa dissertação;
- analisar as situações nas quais existem vários sensores ou atuadores em localizações diferentes;
- investigar a FDP da saída do processo.

# Bibliografia

- [1] Johan Nilsson. *Real-Time Control Systems with Delays*. PhD thesis, Lund Institute of Technology, 1998.
- [2] Nicholas J. Ploplys, Paul A. Kawka, and Andrew G. Alleyne. Closed-loop control over wireless networks. *IEEE Control Systems Magazine*, 24(3):58–71, June 2004.
- [3] Feng-Li Lian, James R. Moyne, and Dawn M. Tilbury. Performance evaluation of control networks: Ethernet, controlnet, and devicenet. *IEEE Control Systems Magazine*, 21(1):66–83, February 2001.
- [4] Max M. D. Santos, Fernando H. Ataíde, and Francisco Vasques. O impacto do atraso na comunicação de sistema de controle via redes. In *III Congresso Brasileiro de Computação (CBComp 2003)*, pages 869–885, 2003.
- [5] Wei Zhang, Michael S. Branicky, and Stephen M. Phillips. Stability of networked control systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 21(1):84–99, February 2001.
- [6] Mo-Yuen Chown and Yodyium Tipsuwan. Network-based control systems: A tutorial. In *The 27th Annual Conference of the Industrial Electronics Society*, volume 3, pages 1593–1602. IEEE, 2001.
- [7] Nicola Elia and Sanjoy K. Mitter. Stabilization of linear systems with limited information. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(9):1384–1400, September 2001.
- [8] Daniel Liberzon. On stabilization of linear systems with limited information. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(2):304–307, February 2003.
- [9] David F. Delchamps. Stabilizing a linear system with quantized state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(8):916–924, August 1990.

- [10] Eduardo Tovar and Francisco Vasques. Real-time fieldbus communications using profibus networks. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 46(6):1241–1251, December 1999.
- [11] Kyung Chang Lee and Suk Lee. Performance evaluation of switched ethernet for networked control systems. In *IEEE 2002 28th Annual Conference of the Industrial Electronics Society*, volume 4, pages 3170–3175. IEEE, November 2002.
- [12] L. Lo Bello, M. Lorefice, O. Mirabella, and S. Oliveri. Performances analysis of ethernet networks in the process control. In *Proceedings of the 2000 IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, pages 655–660, Cholula, Puebla, Mexico, December 2000.
- [13] Seok-Kyu Kwon and Kang G. Shin. Statistical real-time communication over ethernet. *IEEE Transactions On Parallel And Distributed Systems*, 14(3):322–335, March 2003.
- [14] Johan Nilsson, Bo Bernhardsson, and Björn Wittenmark. Stochastic analysis and control of real-time systems with random time delays. *Automatica*, 34(1):57–64, January 1998.
- [15] Luis A. Montestruque and Panos J. Antsaklis. State and output feedback control in model-based networked control systems. In *Proceedings of 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1620–1625, Las Vegas, Nevada, December 2002.
- [16] Luis A. Montestruque and Panos J. Antsaklis. On the model-based control of networked systems. *Automatica*, 39(10):1837–1843, October 2003.
- [17] Luis A. Montestruque and Panos J. Antsaklis. Stochastic stability for model-based networked control systems. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 4119–4124, Denver, Colorado, June 2003.
- [18] Thurston Brooks. Wireless technology for industrial sensor and control networks. In *Sicon'01 Sensors for Industry Conference*, pages 73–77, 2001.
- [19] Stefan Mahlke. Virtual wired control networks: A wireless approach with bluetooth. In *IEEE Africon 2002*, pages 269–272, 2002.

- [20] Andrew S. Tanenbaum. *Redes de Computadores*. Editora Campus, 4th edition, 1997.
- [21] Hong Ye, Gregory C. Walsh, and Linda Bushnell. Wireless local area networks in the manufacturing industry. In *Proceedings of the 2000 American Control Conference*, volume 4, pages 2363–2367, Chicago, Illinois, June 2000.
- [22] Open DeviceNet Vendor Association (ODVA). Devicenet - technical overview. [http://www.odva.org/10\\_2/05\\_tech/PUB00026R1.pdf](http://www.odva.org/10_2/05_tech/PUB00026R1.pdf), 2004.
- [23] Edmar J. Nascimento, A.M.N. Lima, and F.M. Assis. Stability of networked control systems: An analysis of control delay based on probability density functions. In *Proceedings of the 11th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing*, Salvador, Bahia, Brazil, April 2004. To Be Published.
- [24] K.J. Åström and B. Wittenmark. *Computer-Controlled Systems*. Prentice Hall, 3rd edition, 1997.
- [25] P. Dorato, C. Abdallah, and V. Cerone. *Linear-Quadratic Control: An Introduction*. Prentice Hall, 1st edition, 1995.
- [26] Yannis Viniotis. *Probability and Random Processes for Electrical Engineers*. McGraw-Hill, 1998.
- [27] Emanuel Parzen. On estimation of a probability density function and mode. *The Annals of Mathematical Statistics*, 33(3):1065–1076, September 1962.
- [28] Ignacio Santamaría, Deniz Erdogmus, and Jose C. Principe. Entropy minimization for supervised digital communications channel equalization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(5):1184–1192, May 2002.
- [29] Deniz Erdogmus and Jose C. Principe. An error-entropy minimization algorithm for supervised training of nonlinear adaptive systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(7):1780–1786, July 2002.
- [30] Deniz Erdogmus and Jose C. Principe. Generalized information potential criterion for adaptive system training. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 13(5):1035–1044, September 2002.

- [31] Deniz Erdogmus, Kenneth E. Hild, and Jose C. Principe. Online entropy manipulation: Stochastic information gradient. *IEEE Signal Processing Letters*, 10(8):242–245, August 2003.
- [32] K.J. Åström and B.M. Bernhardsson. Comparison of Riemann and Lebesgue Sampling for First Order Stochastic Systems. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2011–2016, Las Vegas, Nevada, USA, December 2002.