



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Rafaela Laranjeira

Estudo dos espectros de potências cosmológicos linear da matéria e angular de 21-cm

Campina Grande, Paraíba, Brasil

2021

Rafaela Laranjeira

**Estudo dos espectros de potências cosmológicos linear da
matéria e angular de 21-cm**

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Professor Dr. Francisco de Assis de Brito

Campina Grande, Paraíba, Brasil

2021

L318e Laranjeira, Rafaela.
Estudo dos espectros de potências cosmológicos linear da matéria e angular de 21-cm / Rafaela Laranjeira. – Campina Grande, 2020.
167 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2020.
"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito".
Referências.

1. Cosmologia. 2. Linha de 21-cm. 3. BAOS. 4. Espectros de Potências Cosmológicos. I. Brito, Francisco de Assis de. II. Título.

CDU 523.11(043)

RAFAELA LARANJEIRA

**ESTUDO DOS ESPECTROS DE POTÊNCIAS COSMOLÓGICAS
LINEAR DA MATÉRIA E ANGULAR DE 21CM**

Dissertação aprovada em 30/10/2019

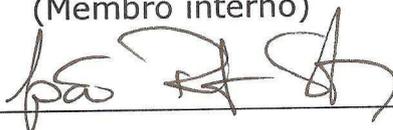
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Unidade Acadêmica de Física – UFCG
(Presidente)



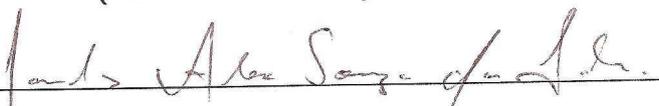
Prof. Dr. Amílcar Rabelo de Queiroz
Unidade Acadêmica de Física – UFCG
(Membro interno)



Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos
Unidade Acadêmica de Física – UFCG
(Membro interno)



Prof. Dr. Luciano Barosi de Lemos
Unidade Acadêmica de Física – UFCG
(Membro interno)



Prof. Dr. Carlos Alex de Sousa Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba - CG
(Membro externo)

A minha família.

Agradecimentos

- Ao Professor Dr. Francisco de Assis de Brito, pela orientação, paciência e competência com que conduziu este trabalho.
- A todos os professores desta Unidade Acadêmica de Física que contribuíram com a minha formação.
- Ao prof. Dr. Lúcio Fábio que me orientou durante a graduação, me incentivou a fazer o mestrado e contribuiu para que eu pudesse vir realizá-lo.
- Aos meus amigos Girlandia, Joesley, Thaís, Raissa, Carol, Felipe, Romário, Isabelle, Ronaldo, Júlio e Ewerton que junto comigo compartilharam momentos de aprendizados, angústias (provas), conquistas e sempre se disponibilizaram para ajudar em dúvidas que surgiram durante o trabalho.
- A minha mãe, irmã e aos familiares pelo apoio e incentivo durante esse percurso.
- Ao meu amigo Luiz que me acompanhou durante toda essa trajetória, pelo carinho, torcida e paciência de todas as horas.
- Aos amigos da graduação que me ajudaram financeiramente para que eu pudesse me locomover do Amazonas aqui para Campina Grande.
- Aos colegas de pós-graduação e funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade.
- A CAPES pelo suporte financeiro.
- A todos que de forma direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

Resumo

O espectros de potências cosmológicos observáveis contêm uma gama de informações sobre a evolução do Universo. São usados para restringir parâmetros cosmológicos por meio da extração dos dados, por exemplo, as Oscilações Acústicas Bariônicas e assim, investigar as características das componentes escuras, principalmente a energia escura, considerada como a responsável pela fase atual de expansão do Universo. Em vista disto, nosso estudo fornece os fundamentos teóricos básicos necessários para entendimento e formulação dos espectros de potências: linear da matéria e angular de 21-cm. Ao longo desta dissertação abordamos os princípios básicos da cosmologia, observações cosmológicas, Oscilações Acústicas Bariônicas e a linha de 21-cm. Além disso, discutimos sobre a teoria das flutuações cosmológicas lineares, em que encontramos a função de crescimento de perturbações de matéria e apresentamos as equações de Boltzmann. Obtemos as expressões matemáticas dos espectros de potência linear da matéria e angular de 21-cm, relatamos alguns experimentos que fornecem (ou fornecerão) dados para modelar estes espectros e que ajudam a aprimorar os valores dos parâmetros cosmológicos. Mostramos *fittings* de espectros de potências que reproduzimos e alguns obtidos por outros trabalhos. Apresentamos definições de espectros de potências de um Modelo Cosmológico de Interação entre matéria escura e energia escura que pretendemos estudar futuramente, a fim de analisar o crescimento de estruturas em larga escala.

Palavras-chave: Espectro de potência linear da matéria. Espectro de potência angular de 21-cm. Linha de 21-cm. Oscilações Acústicas Bariônicas.

Abstract

The spectra of observable cosmological powers contain a range of information about the evolution of the Universe. They are used to restrict cosmological parameters through data extraction, for example, the Baryonic Acoustic Oscillations and thus, investigate the characteristics of dark components, mainly dark energy, considered as responsible for the current phase of expansion of the Universe. In view of this, our study provides the basic theoretical foundations necessary for understanding and formulating the power spectra: linear of matter and angular of 21-cm. Throughout this dissertation we approach the basic principles of cosmology, cosmological observations, Baryonic Acoustic Oscillations and the 21-cm line. In addition, we discuss the theory of linear cosmological fluctuations, in which we find the function of growth of matter disturbances and present the Boltzmann equations. We obtain the mathematical expressions of the linear power spectra of matter and angular 21-cm, we report some experiments that provide (or will provide) data to Model these spectra and that help to improve the values of the cosmological parameters. We show textitfittings of power spectra that we have reproduced and some obtained by other works. We present definitions of power spectra of a Cosmological Model of Interaction between dark matter and dark energy that we intend to study in the future, in order to analyze the growth of large-scale structures.

Keywords: Linear power spectrum of matter. 21-cm angular power pectrum. 21-cm line. Baryonic Acoustic Oscillations.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Diagrama de Hubble da Relação velocidade-distância entre galáxias.	32
Figura 2 – Distribuição atual dos componentes do Universo.	35
Figura 3 – Evolução das densidades em função do fator de escala.	39
Figura 4 – Evolução das densidades em função do redshift.	40
Figura 5 – Geometria associada à definição da distância de diâmetro angular.	43
Figura 6 – Geometria associada à definição de distância de luminosidade.	44
Figura 7 – Evolução do campo escalar sobre o potencial para inflação.	48
Figura 8 – Flutuações da radiação cósmica de fundo de microondas.	51
Figura 9 – Comportamento das curvas de SNIa em baixos redshifts.	52
Figura 10 – Oscilação Acústica Bariônica.	55
Figura 11 – Escala característica do Horizonte sonoro.	55
Figura 12 – Sobreposição de anéis do mesmo raio característico L	56
Figura 13 – História do Universo.	57
Figura 14 – Transição entre níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de HI.	58
Figura 15 – Mapa 3D da distribuição das galáxias em função do redshift.	61
Figura 16 – Evolução do raio de Hubble.	70
Figura 17 – Função de correlação de larga escala.	92
Figura 18 – Evolução linear do potencial gravitacional $\Phi(\vec{k}, a)$	96
Figura 19 – Fração de densidade do HI.	102
Figura 20 – Cobertura das pesquisas BOSS e e-BOSS.	108
Figura 21 – História do Universo com assinatura das BAOs.	112
Figura 22 – Gráfico da relação distância-redshifts de várias medições de BAO.	112
Figura 23 – Design do radiotelescópio BINGO.	113
Figura 24 – Vista topográfica da Serra do Urubu.	114
Figura 25 – Espectro de potência linear da matéria em diferentes redshifts.	115
Figura 26 – Espectros de potência da matéria em $z = 0$ e $\Omega_{m,0}h^2$ fixo.	115
Figura 27 – Espectro de potência da matéria fixando $\Omega_{b,0}h^2$ e variando $\Omega_{c,0}h^2$	116
Figura 28 – Espectro de potência linear da matéria em $z = 0$	117
Figura 29 – Espectro de potência da matéria médio para o Modelo Λ CDM.	118
Figura 30 – Taxa de crescimento das perturbações de matéria fixando $k \sim 1$	130
Figura 31 – Espectro de potência da matéria para Modelos IDE, Λ CDM e Halofit.	131
Figura 32 – Espectro de potência da matéria para o Modelo de Interação IA.	132
Figura 33 – Espectro de potência linear da matéria para o Modelo IB.	132
Figura 34 – Espectro de potência da matéria para o Modelo II.	133
Figura 35 – Espectro de potência angular de 21-cm.	134

Lista de tabelas

Tabela 1 – Parâmetros cosmológicos para Modelos Λ CDM.	114
Tabela 2 – Modelos de Interação IDE.	123
Tabela 3 – Valores prioris para constante de acoplamento dos Modelos de IDE. . .	129
Tabela 4 – Parâmetros cosmológicos para Modelos de Interação.	130

Sumário

	INTRODUÇÃO	21
1	COSMOLOGIA BÁSICA	25
1.1	Equação de Campo da Relatividade Geral	25
1.2	Modelo Cosmológico Padrão	27
1.2.1	Universo homogêneo e isotrópico	27
1.2.2	Métrica FLRW	28
1.2.3	Tensor energia-momento	30
1.3	Equações de Friedmann	31
1.4	O desvio para o vermelho cosmológico e idade do Universo	31
1.5	Parâmetros de densidade	34
1.6	Componentes do Universo e Cenário de Evolução	35
1.6.1	Equações de estado	36
1.6.2	Radiação	37
1.6.3	Matéria	37
1.6.4	Energia Escura	38
1.7	Medidas de Distâncias	41
1.8	Inflação Cósmica	45
1.8.1	Condições para Inflação	46
1.9	Observações Cosmológicas	50
1.9.1	Radiação Cósmica de Fundo de Microondas	50
1.9.2	Super Novas do tipo Ia (SNIa)	51
1.9.3	Oscilações Acústicas dos Bárions	52
1.9.3.1	Régua-padrão Estatística	54
1.9.4	A linha de 21 cm	57
1.9.4.1	O átomo de HI	57
1.9.4.2	Linha de Emissão do HI de 21 cm	58
2	FLUTUAÇÕES COSMOLÓGICAS	61
2.1	Dinâmica da Flutuações	62
2.1.1	Espaço-tempo perturbado	62
2.1.2	Escolha de Gauge	64
2.1.3	Perturbações Escalares	65
2.2	Evolução da perturbações	66
2.2.1	Função de Crescimento e taxa de crescimento	70
2.2.2	Um fluido de Matéria	71

2.2.3	Dois Fluidos: matéria e radiação	73
2.2.4	Matéria e constante cosmológica	74
2.3	Equações de Boltzmann	76
2.3.1	Fótons	78
2.3.2	Matéria Escura Fria	83
2.3.3	Bárions	85
2.3.4	Neutrinos	86
2.3.5	Condições iniciais adiabáticas	87
3	ESPECTROS DE POTÊNCIAS COSMOLÓGICOS	89
3.1	Espectro de potência linear da matéria	89
3.1.1	Definição	89
3.1.2	Função de correlação	90
3.1.3	Relação entre espectro de potência e função de correlação	91
3.1.4	Espectro de potência linear das perturbações de matéria	94
3.1.4.1	Evolução do potencial gravitacional	95
3.1.4.2	Função de Transferência	96
3.1.4.3	Função de Crescimento	98
3.2	Espectro de potência angular de 21-cm	100
3.2.1	Temperatura do brilho de 21-cm	100
3.2.2	Espectro de potência angular da linha de 21 cm	102
3.3	Pesquisas Cosmológicas	105
3.3.1	Sloan Digital Sky Survey	106
3.3.2	WiggleZ Dark Energy Survey	108
3.3.3	6dF Galaxy Survey	109
3.3.4	Dark Energy Survey	110
3.3.5	Mapeamento de Intensidade de 21 cm	110
3.3.5.1	Baryon acoustic oscillations from Integrated Neutral Gas Observations (BINGO)	112
3.4	Espectros de potências de Modelos Cosmológicos	114
3.4.1	Espectro de potência da matéria do Modelo Λ CDM	114
3.4.2	Modelo Cosmológico IDE	119
3.4.3	Formalismo perturbativo	123
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	135
	REFERÊNCIAS	137

APÊNDICE A – VARIACÃO DA MÉTRICA, VARIACÃO DA AÇÃO S_M E SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL NO WOFRAM MATHEMATICA 149

A.1 Variação da métrica 149
 A.2 Variação da ação S_M 150
 A.3 Símbolos de Christoffel no Wofram mathematica 150

APÊNDICE B – PERTURBAÇÃO DE QUANTIDADES FÍSICAS E FUNÇÃO DE CRESCIMENTO NO UNIVERSO CONTENDO MATÉRIA E CONSTANTE COSMOLÓGICA 151

B.1 Tensores e equações no tempo conforme 151
 B.2 Perturbação das quantidades tensoriais 152
 B.3 Símbolos de Christoffel para métrica perturbada no tempo cósmico 152
 B.4 Perturbação dos Símbolos de Christoffel no tempo conforme 152
 B.5 Perturbação do Tensor de Ricci e escalar de Ricci 153
 B.6 Perturbação do Tensor de Einstein 153
 B.7 Transformadas de Fourier das Perturbações 153
 B.7.1 Perturbação na temperatura dos fótons 153
 B.8 Equação de Boltzmann de 1ª ordem 154
 B.9 Termo de colisão dos fótons 155
 B.10 Equação de Boltzmann para fótons 157
 B.11 Relações 158
 B.12 Função de crescimento no Universo contendo matéria e constante cosmológica 158

APÊNDICE C – EOS EFETIVA PARA INTERAÇÃO, RELAÇÃO ENTRE ρ_c E ρ_d E CÓDIGO DO CAMB PARA OS ESPECTROS DE POTÊNCIAS DA MATÉRIA LINEAR 161

C.1 Obtenção da EoS efetiva para interação 161
 C.2 Relação entre $\bar{\rho}_c$ e $\bar{\rho}_d$ 161
 C.3 Código do CAMB para os espectros de potências da matéria linear 162

Introdução

A Cosmologia moderna é um ramo de estudo da física que possibilita o entendimento sobre a formação e evolução do Universo, por meio de propostas e análises de Modelos Cosmológicos e de dados observacionais, é possível reconstituir o passado, bem como estabelecer o futuro do Universo. Ela é baseada na *Relatividade Geral* (RG) instituída por Albert Einstein em 1915, que fornece um aparato matemático indispensável para sua formulação e o *Princípio Cosmológico*. A teoria e observação são indissociáveis para uma explicação consistente sobre o Universo. Devido desenvolvimento das tecnologias a Cosmologia Observacional pôde progredir ainda mais, pois propiciaram outros instrumentos de observações astronômicas.

Experimentos atuais [1, 2, 3] indicam que para distâncias superiores à aproximadamente 100 Mpc, ou seja, escalas suficientemente largas, o Universo é plano e o Princípio Cosmológico é válido. Nestas condições não existe posição, nem direção privilegiada, isto é, o Universo é homogêneo e isotrópico, ou em outras palavras, as propriedades do Universo são as mesmas para todos os observadores. Mas estudos mostram que as estruturas cósmicas (galáxias, aglomerados e superaglomerados de galáxias) que observamos hoje são resultados de instabilidades gravitacionais (pequenas flutuações quânticas que foram amplificadas), causadas pelas inhomogeneidades da matéria e anisotropias da radiação que ocorreram nos períodos iniciais do Universo [4]. Pouco se sabe sobre a origem destas instabilidades, uma possível explicação para o crescimento das mesmas é advinda da *Inflação Cósmica*.

No estudo sobre a formação das estruturas em larga escala, o conjunto de dados observacionais: Supernovas do tipo Ia (SNIa), valor atual da taxa de expansão do Universo H_0 e Radiação Cósmica de Fundo de Microondas (CMB¹), apontam que o Universo é composto por aproximadamente 95% de constituintes invisíveis [4]. Tais constituintes são denominados por *Matéria Escura* (ME) e *Energia Escura* (EE), compondo o chamado *Setor Escuro*.

Segundo os dados do satélite Planck [2], a ME equivale à aproximadamente 27% da densidade total de energia, não exerce pressão e não interage eletromagneticamente, o que dificulta sua detecção direta. A EE é encarada como a principal responsável pela expansão acelerada, compreendendo aproximadamente 68% da densidade total, ou seja, domina a fase atual do Universo, que conhecemos pouco de suas características. Sendo assim, a tarefa de entender sobre ME e EE é um dos problemas da ciência contemporânea, cuja resolução é fundamental para compreendermos as características e evolução do Universo.

¹ Do inglês *Cosmic Microwave Background*.

O progresso recente na investigação de características da EE e restrição de parâmetros cosmológicos veio do estudo e análise do chamado *espectro de potência angular* que é uma quantidade importante prevista nas teorias de formação das estruturas em grande escala. Esse espectro consiste na medida da amplitude (tamanho) das flutuações quânticas iniciais em função da escala angular e contém informações cosmológicas desde os tempos iniciais do Universo. A quantidade de informações contidas no espectro de potência angular está diretamente relacionada à precisão dos parâmetros cosmológicos restringidos pelo uso do *espectro de potência linear da matéria*, que é suficiente para descrever completamente o campo de densidade do período de observação no regime linear.

Para compreendermos o formalismo de obtenção dos espectros de potências para Modelos Cosmológicos faz-se necessário abordar os seguintes tópicos: cosmologia básica, teoria de perturbações cosmológicas, equações de Boltzmann, expansão de Fourier em harmônicos esféricos, parâmetro de Hubble dependente do Modelo Cosmológico e técnicas computacionais para montar o *fit*². Existem *surveys*³ cosmológicas que observam o céu a fim de, analisar a distribuição da matéria através das medições de distâncias de milhões de galáxias por meio de seus *redshifts*⁴. Alguns de seus objetivos são obter dados que possam auxiliar no estudo das propriedades do espectro de potência.

Métodos de filtragem de informações, como o sinal das Oscilações Acústicas Bariônicas (BAOs⁵) [5, 6, 7, 8], que são impressões deixadas na distribuição de matéria visível no período primordial do Universo [9], conhecidas também como ecos primordiais. As BAOs são consideradas um novo dado observacional utilizado para tornar os valores dos parâmetros cosmológicos de Modelos confiáveis, definidas como uma escala (régua-padrão) da distribuição das galáxias e aglomerados de galáxias.

Uma fonte de detecção das BAOs provém da observação dos átomos de hidrogênio neutro (HI), o elemento mais simples e abundante no Universo, que emite uma radiação característica amplamente estudada e medida, a *linha de 21-cm*. O nome desta técnica é Mapeamento de Intensidade do HI de 21-cm e vem sendo implementada em alguns países, inclusive futuramente no Brasil, por meio do *Projeto BINGO*⁶. O BINGO é um radiotelescópio que capturará o sinal de HI no *redshift* entre $z \simeq [0, 13 - 0, 48]$ e que será construído na Serra do Urubu, na Estado Paraíba [10]. É possível modelar o *espectro de potência angular da linha de 21-cm*, para descrever as previsões acerca da evolução do Universo.

Atualmente, o Modelo que se ajusta aos dados observacionais é o Modelo Λ CDM

² Ajuste. Estes ajustes podem ser analíticos ou numéricos.

³ Pesquisas.

⁴ Desvios para o vermelho.

⁵ Do inglês *Baryon Acoustic Oscillations*.

⁶ *Baryon acoustic oscillations In Neutral Gas Observations*, tradução: Oscilações Acústicas Bariônicas em Observações do Gás Neutro.

(*Lambda Cold Dark Matter*⁷) frequentemente chamado de *Modelo Cosmológico Padrão*, que apresenta o *problema da constante cosmológica* e o *problema da coincidência cósmica*, que favorecem a busca por Modelos Alternativos. Um deles consiste em considerar que a ME e EE não são componentes que evoluem de forma independente, mas com uma interação de natureza fenomenológica (não gravitacional) que provoca uma troca de energia entre elas [11], este Modelo é chamado de Modelo IDE⁸ e minimiza o problema da coincidência cósmica. As pesquisas atuais e futuras têm como objetivo estabelecer um Modelo Cosmológico robusto através dos espectros de potências, que restrinjam os parâmetros cosmológicos e os Modelos de Interação.

Neste âmbito, nosso objetivo é fornecer os fundamentos teóricos básicos para formular o espectro de potência linear da matéria e o espectro de potência angular da radiação de 21-cm. Sendo assim, esta dissertação foi dividida em 4 (quatro) capítulos descritos a seguir.

No primeiro capítulo, abordamos conceitos sobre a Cosmologia Básica, como as Equações de Einstein que descrevem a dinâmica entre a geometria do Universo e matéria, o Modelo Cosmológico Padrão e as equações de Friedmann que sustentam o princípio cosmológico de homogeneidade e isotropia. Comentamos sobre as principais fontes de medidas de distâncias, entre as quais o redshift e tratamos das definições de parâmetros de densidade, dos elementos que compõem o Universo e brevemente sobre a teoria inflacionária. Discorremos sobre observações cosmológicas que são usadas para estimar parâmetros e medir distâncias, dentre as quais duas: Oscilações Acústicas dos Bárions e a linha de 21-cm do HI.

No capítulo 2, mostramos as equações de fundo cosmológico escritas com base na teoria linear de perturbações e encontramos a função de crescimento das perturbações de matéria. Apresentamos as equações de Boltzmann, que descrevem como as componentes do Universo evoluem onde há interações não gravitacionais.

No capítulo 3, retratamos sobre os espectros de potências, no qual tratamos sobre a função de correlação, uma quantidade importante para explicar como duas áreas de grandes volumes no céu interferem uma na outra e que possui relação com o espectro de potência. Relatamos sobre a função de transferência para definição do espectro de potência linear da matéria e está associado ao potencial gravitacional, como as duas formas desta função mais usadas. Encontramos as formas matemáticas do espectro de potência linear da matéria e angular de 21-cm. Comentamos sobre algumas pesquisas que modelam espectros de potências de acordo com as informações coletadas, destacando o projeto BINGO, que futuramente irá mapear o céu usando a técnica de Mapeamento de Intensidade observando a linha de hidrogênio neutro de 21-cm.

⁷ Matéria Escura Fria.

⁸ Interacting Dark Energy.

Ainda no terceiro capítulo, mostramos 3 (três) *fittings* de espectros de potências linear da matéria que conseguimos reproduzir utilizando as resoluções do CAMB⁹ para o Modelo Λ CDM com parâmetros do Planck 2018 [2] comparados com valores fictícios. Introduzimos o Modelo Cosmológico IDE, apresentamos as características de fundo e perturbadas, com as principais funções para modelar os espectros de potências, como função de Hubble, função expansão e equação de segunda ordem das perturbações de matéria escura, onde acrescentamos uma contribuição do estudo de crescimento de estruturas cósmicas.

No capítulo 4, escrevemos nossas considerações finais do desenvolvimento do trabalho e proposta de estudo futuro.

⁹ Code for Anisotropies in the Microwave Background.

1 Cosmologia Básica

Iniciamos com a obtenção das equações de campo da Relatividade Geral. Em seguida, apresentamos rapidamente o Modelo Cosmológico Padrão e suas principais características. Utilizamos a métrica FRLW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker) para resolver as equações de Einstein e como solução encontramos as equações de Friedmann. Apresentamos as definições de desvio para o vermelho, dos parâmetros de densidades das componentes do Universo como um cenário de evolução, das definições de distâncias cosmológicas, do período de inflação cósmica e as condições para que ele ocorra. Finalizamos destacando algumas observações cosmológicas que podem ser usadas como sonda para estudar a estrutura e formação do Universo, bem como, dos espectros de potências.

1.1 Equação de Campo da Relatividade Geral

Para compreender a evolução macroscópica do Universo se faz necessário a teoria da Relatividade Geral¹ e uma alternativa para isso é obter as chamadas **Equações de campo de Einstein ou da Relatividade Geral**, que descrevem a relação entre geometria do espaço-tempo e conteúdo de matéria.

O ponto de partida para as equações de campo é através do princípio da mínima ação [13], no qual é estabelecido que uma ação S é estacionária frente a pequenas variações dos elementos dinâmicos do sistema em questão, ou seja,

$$\delta S = 0. \quad (1.1)$$

Vamos considerar a ação é um funcional da forma [13]:

$$S = \frac{1}{16\pi G} S_{EH} + S_M, \quad (1.2)$$

onde $G = 6,67408 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ é a constante gravitacional de Newton², S_{EH} é a ação de Einstein-Hilbert que possui os termos relacionados a geometria e S_M é a ação de matéria que inclui o campo escalar. As formas explícitas das ações anteriores são dadas por,

$$S_{EH} = - \int \sqrt{-g} R d^n x, \quad (1.3)$$

e

$$S_M = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_M d^n x, \quad (1.4)$$

¹ A teoria da Relatividade Geral foi proposta em 1915 por Albert Einstein (1879 – 1955) que foi um importante físico teórico alemão. Para estudos mais profundos recomendamos a leitura dos livros *Introducing Einstein's Relativity*[12] e *Introduction to General Relativity Spacetime and Geometry*[13].

² O valor desta constante é os mais recente disponível recomendado pelo Committee on Data for Science and Technology (CODATA) de 2014 [14]

em que a integral é feita sobre n volume, R é o escalar de Ricci, \mathcal{L} a densidade lagrangeana, $g = \det(g_{\mu\nu})$ é o determinante do tensor métrico covariante $g_{\mu\nu}$ e os índices gregos variam de 0 à 3, o que corresponde as coordenadas temporal e espaciais.

Aplicando o princípio variacional (1.1) na ação (1.2), temos:

$$\delta S = \int \frac{1}{16\pi G} [\delta\sqrt{-g}(16\pi G\mathcal{L}_M - R) + \sqrt{-g}(16\pi G\delta\mathcal{L}_M - \delta R)] d^n x = 0. \quad (1.5)$$

Variando com respeito a métrica contravariante $g^{\mu\nu}$ e utilizando o resultado do Apêndice A.1, o primeiro termo resulta em:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}; \quad (1.6)$$

e para as variações do segundo termo, temos:

$$\delta R = \delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = \delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

$$\delta\mathcal{L}_M = \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}, \quad (1.8)$$

no qual $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci e o termo $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ de (1.7) não contribuirá para (1.5), pois torna uma integral de superfície, que anula em todo o espaço [13]. Assim,

$$\delta S = \int \frac{1}{16\pi G} \left[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(16\pi G\mathcal{L}_M - R) + \left(16\pi G \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} - R_{\mu\nu} \right) \right] \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} d^n x = 0, \quad (1.9)$$

que também pode ser escrita como,

$$\delta S = \int \frac{1}{16\pi G} \left[-\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) - 8\pi G \left(g_{\mu\nu}\mathcal{L}_M - 2\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} \right) \right] \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} d^n x = 0. \quad (1.10)$$

Portanto, encontramos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G \left(g_{\mu\nu}\mathcal{L}_M - 2\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} \right), \quad (1.11)$$

onde definimos o tensor de Einstein e o tensor energia-momento³, respectivamente como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.12)$$

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\mathcal{L}_M - 2\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.13)$$

Desta maneira, obtemos as *Equações de campo de Einstein*:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.14)$$

³ A demonstração deste termo pode ser vista no Apêndice A.2.

ou ainda,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (1.15)$$

em que Λ é um parâmetro repulsivo denominado de Constante Cosmológica que foi introduzido por Albert Einstein para modelar um Universo estacionário[15]. Com as observações de Hubble⁴ percebeu-se que o Universo está em expansão acelerada. Tempos depois para tornar as equações da cosmologia consistentes com as observações das estruturas em largas escalas, radiação cósmica de fundo de microondas e super novas do tipo Ia [1, 17, 18], reconsiderou-se a constante cosmológica novamente, como sendo uma candidata responsável pela expansão do Universo.

Portanto, o lado esquerdo de (1.15) define a curvatura do espaço-tempo e o lado direito desta equação carrega informação sobre as fontes de gravitação: massa, energia, momento, carga elétrica entre outros. A curvatura e fonte são partes indissociáveis.

1.2 Modelo Cosmológico Padrão

O Modelo Cosmológico Padrão⁵, pressupõe que o Universo foi criado a partir de um estado inicial extremamente denso e quente⁶, há cerca de 14 bilhões de anos. O Modelo Padrão é sustentado pelo Princípio Cosmológico: o Universo é considerado isotrópico e homogêneo em escalas muito grandes (> 100 Mpc), pela Relatividade Geral de Einstein e que as fontes de gravitação (conteúdo de matéria) podem ser descritas como um fluido perfeito.

1.2.1 Universo homogêneo e isotrópico

A cosmologia moderna é baseada no **Princípio Cosmológico**: “em cada período, o Universo apresenta o mesmo aspecto em todos os pontos, com exceção das irregularidades locais”[12, p. 312]. Basicamente, as propriedades não dependem da direção e não existe uma posição privilegiada quando avaliadas em grandes escalas (escalas maiores que ~ 100 Mpc, compostas por aglomerados de galáxias [19]), ou seja, o Universo é homogêneo e isotrópico.

⁴ Edwin Powell Hubble (1889 – 1953) foi um astrônomo estadunidense que observou o afastamento das galáxias, definindo assim que as mesmas se afastam umas das outras com uma velocidade proporcional a distância elas [16].

⁵ Também chamado de “Modelo Cosmológico de Concordância” ou “Modelo Λ CDM” (CDM é a sigla em inglês para Matéria Escura Fria).

⁶ “O Big Bang”.

1.2.2 Métrica FLRW

O Ansatz mais geral para um espaço-tempo homogêneo e isotrópico é a **métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker**⁷ (FLRW),

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (1.16)$$

onde $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$ é o elemento de ângulo sólido, t é o tempo cósmico e (r, θ, ϕ) são as coordenadas espaciais comóveis⁸, $a(t)$ o fator de escala que descreve como o Universo evolui no tempo, convencionamos $c = 1$ e k é uma constante relacionada a curvatura espacial, tal que

$$\begin{cases} k = -1, & \text{(Universo aberto)} \\ k = 0, & \text{(Universo plano)} \\ k = 1, & \text{(Universo fechado)}. \end{cases} \quad (1.17)$$

O tensor métrico covariante e contravariante podem ser escritos respectivamente nas suas representações matriciais como:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left(1, -\frac{a^2}{(1 - kr^2)}, -a^2 r^2, -a^2 r^2 \text{sen}^2\theta \right), \quad (1.18)$$

$$g^{\mu\nu} = \text{diag} \left(1, -\frac{(1 - kr^2)}{a^2}, -\frac{1}{a^2 r^2}, -\frac{1}{a^2 r^2 \text{sen}^2\theta} \right). \quad (1.19)$$

Com a métrica definida podemos calcular as propriedades geométricas do espaço-tempo. Usando os tensores métricos (1.18) e (1.19) encontramos os Símbolos de Christoffel mediante [13],

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\beta g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha g_{\beta\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}), \quad (1.20)$$

⁷ Alexander Alexandrovich Friedmann (1888 – 1925) foi um o matemático e meteorologista russo que apresentou uma solução das equações de Einstein nas quais o Universo estava em expansão. Georges Henri Édouard Lemaître (1894 – 1966), ao analisar e resolver as equações da relatividade geral chega às mesmas conclusões. Howard Percy Robertson (1903 – 1961) mostrou que o Universo era homogêneo e isotrópico, e que dessa forma era também espacialmente plano, infinito e estava se expandindo. Arthur Geoffrey Walker (1909 – 2001) chegou a mesma conclusão de que o Universo está se expandindo. Para saber um pouco mais sobre o papel de cada um deles veja a referência “Introdução Matemática aos Modelos Cosmológicos” [20].

⁸ Segundo [21], “um sistema de coordenadas comóveis é aquele que acompanha a expansão do Universo, tal que um observador estacionário que participa desta expansão terá a mesma coordenada em todos os instantes”.

onde os termos não nulos são dados por⁹:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^0 &= \frac{\dot{a}a}{(1 - kr^2)}, \\
\Gamma_{22}^0 &= \dot{a}ar^2, \\
\Gamma_{33}^0 &= \dot{a}ar^2 \text{sen}^2\theta, \\
\Gamma_{10}^1 &= \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{30}^3 = \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}, \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{(1 - kr^2)}, \\
\Gamma_{22}^1 &= -r(1 - kr^2), \\
\Gamma_{33}^1 &= -r(1 - kr^2)\text{sen}^2\theta, \\
\Gamma_{33}^2 &= -\cos\theta \text{sen}\theta, \\
\Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \\
\Gamma_{32}^3 &= \Gamma_{23}^3 = \cot\theta,
\end{aligned} \tag{1.21}$$

onde utilizamos as seguintes notações:

$$\dot{a} \equiv \frac{da}{dt}, \quad \partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha}. \tag{1.22}$$

Usando os símbolos de Christoffel acima (1.21), calculamos o Tensor de Ricci que é uma contração do Tensor de Riemann¹⁰ [22],

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta}^\mu = \partial_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\mu\alpha}^\mu + \Gamma_{\mu\gamma}^\mu \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma - \Gamma_{\beta\gamma}^\mu \Gamma_{\mu\alpha}^\gamma, \tag{1.25}$$

cujos elementos não nulos são:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\
R_{11} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \\
R_{22} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \\
R_{33} &= r^2 \text{sen}^2\theta(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k).
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Através destes resultados encontramos os elementos de um tensor misto diagonal de Ricci [12]:

$$R_\nu^\mu = g^{\mu\lambda} R_{\lambda\nu}, \tag{1.27}$$

⁹ Os símbolos de Christoffel podem ser encontrados usando as entradas (A.3) para o software Wolfram Mathematica escrito por Leonard Parker, disponível em <<http://web.physics.ucsb.edu/~gravitybook/mathematica.html>>, onde as entradas para o tensor de Ricci podem ser vistas também nesta página no arquivo "Curvatura e a Equação de Einstein".

¹⁰ O tensor de Riemann deve satisfazer as identidades de Bianchi:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0, \tag{1.23}$$

$$\nabla_k R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\kappa\mu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\kappa} = 0. \tag{1.24}$$

$$\begin{aligned} R_0^0 &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_1^1 &= R_2^2 = R_3^3 = -\frac{(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)}{a^2}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

podemos então obter o escalar de curvatura por meio do traço do tensor de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu_\mu = -6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right). \quad (1.29)$$

Usando (1.28) e (1.29) determinamos os elementos do Tensor misto diagonal de Einstein,

$$G_\nu^\mu = R_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu R, \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} G_0^0 &= 3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right), \\ G_j^i &= \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{k}{a^2} \right) \delta_j^i. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Com isso, temos as propriedades geométricas da equação de Einstein (1.15), devendo agora definirmos os termos associados a fonte de gravitação.

1.2.3 Tensor energia-momento

Os termos relacionados aos componentes fonte de curvatura supondo que o Universo é preenchido por um fluido ideal, cujo tensor energia-momento é dado por [23]:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (1.32)$$

$$T_\nu^\mu = (\rho + p)u^\mu u_\nu - p\delta_\nu^\mu, \quad (1.33)$$

onde ρ é a densidade de energia, p a pressão, u^μ a 4-velocidade tal que, para um fluido em repouso é $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ e está sujeita ao vínculo $u^\mu u_\mu = 1$. O traço do tensor energia-momento é dado por,

$$T = T^\mu_\mu = \rho - 3p. \quad (1.34)$$

Devido a isotropia, densidade e pressão são funções exclusivamente do tempo, então o tensor energia-momento assume a forma:

$$T_\nu^\mu = \text{diag}(\rho(t), -p(t), -p(t), -p(t)). \quad (1.35)$$

As equações de Einstein para o vácuo são idênticas as suas derivadas covariantes¹¹, isto indica que o tensor energia-momento também é covariantemente conservado, ou seja,

$$\nabla_\mu G_\nu^\mu = \nabla_\mu T_\nu^\mu = 0. \quad (1.36)$$

¹¹ Isso pode ser comprovado aplicando as identidades de Bianchi.

1.3 Equações de Friedmann

As equações de campo de Einstein (1.15) escritas na forma diagonal mista são dadas por [15],

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\mu}R = 8\pi GT_{\nu}^{\mu} + \Lambda\delta_{\nu}^{\mu}, \quad (1.37)$$

substituindo (1.31) e (1.35) nesta expressão, as componentes $0 - 0$ e $i - j$ nos fornecem duas equações conhecidas como Equações de Friedmann,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (1.38)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.39)$$

Essas equações são consideradas duas das mais importantes da cosmologia, pois descrevem a evolução do fator de escala e a dinâmica de um Universo homogêneo e isotrópico, ou seja, reproduzem as principais características do Universo. A equação (1.39) representa a aceleração. Pode-se observar que se ρ e p são positivos a expansão do Universo é desacelerada ($\ddot{a} < 0$) e quando $p < -\frac{\rho}{3}$ a expansão é acelerada ($\ddot{a} > 0$).

Pela conservação do tensor energia-momento, temos

$$\nabla_{\mu}T_{\nu}^{\mu} = \partial_{\mu}T_{\nu}^{\mu} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu}T_{\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}T_{\alpha}^{\mu} = 0, \quad (1.40)$$

cuja componente 0 implica em,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (1.41)$$

que expressa a conservação de energia de um fluido cósmico em um sistema comóvel. Para $\nu = i$, encontramos $\nabla p = 0$, o que garante que a pressão não depende da posição no espaço [24].

1.4 O desvio para o vermelho cosmológico e idade do Universo

Como mencionamos anteriormente, à princípio acreditava-se que o Universo fosse estático, contudo Edwin Hubble descobriu em 1929, por meio da estimativa da distância média de 22 galáxias [25], conforme Figura 1, que as mesmas estavam se afastando uma das outras com uma velocidade proporcional a distâncias entre elas e que o Universo está em expansão.

A maioria das informações cosmológicas que temos acesso são obtidas através da observação da luminosidade emitida por objetos e fenômenos cosmológicos [26]. As medições das distâncias das galáxias realizadas por Hubble foram por meio da análise do

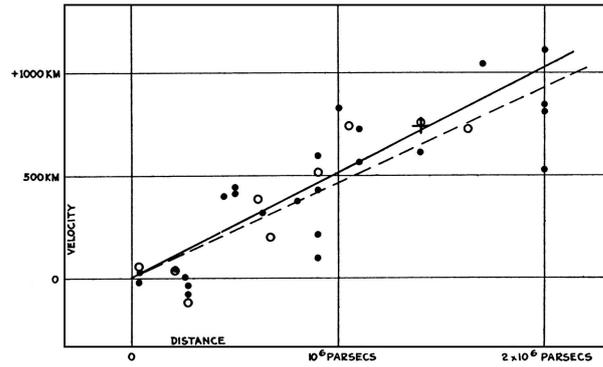


Figura 1 – Diagrama original de Hubble da Relação velocidade-distância entre galáxias. A linha completa representa melhor as medidas de velocidade e distância de galáxias individuais que são os discos pretos. A linha tracejada corresponde a solução para às combinações das galáxias em grupos, os círculos. A cruz indica a velocidade média de 22 galáxias cujas distâncias não puderam ser estimadas individualmente. Nota-se um erro de Hubble apenas na unidade de medida da velocidade que deveria ser Km/s . Fonte: [25]

redshift (desvio para o vermelho), que resultou na chamada: *Lei de Hubble*, uma relação linear entre o redshift z e a distância d das galáxias até nós, dada por [27]:

$$z = \frac{H_0}{c}d, \quad (1.42)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo e H_0 é uma constante de proporcionalidade denominada como constante de Hubble. Usando a fórmula aproximada para o efeito Doppler¹² $v = cz$, podemos escrever a Lei de Hubble da forma,

$$v = H_0d, \quad (1.43)$$

onde se tem a relação entre velocidades de recessão v e distância d .

Duas grandezas definidas a partir dessas relações é a distância de Hubble,

$$D_{H0} \equiv \frac{c}{H_0}. \quad (1.44)$$

e o tempo de Hubble,

$$T_{H0} \equiv \frac{1}{H_0}, \quad (1.45)$$

Estas quantidades definem a escala do Universo, e muitas das vezes são consideradas as unidades geométricas com $c = T_{H0} = D_{H0} = 1$.

A lei de Hubble pode ser enunciada como: “quanto mais longe uma galáxia se encontra, mais rápido ela se afasta de nós” e maior é comprimento de onda observado (e maior é o redshift também). Sendo assim, definimos o redshift z em função dos comprimentos de onda observado λ_0 e o emitido λ pela fonte, deste modo, podemos

¹² O Efeito Doppler recebe este nome em homenagem a Christian Andreas Doppler (1803 – 1853) que foi um físico austríaco, que descreveu teoricamente este fenômeno, onde é percebida uma mudança na frequência de ondas quando emitidas ou refletidas por um objeto que está em movimento com relação ao observador.

redefinir o fator de escala como¹³:

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1, \quad (1.46)$$

onde v é a velocidade relativa, $a(t_0) = 1$ no tempo da observação t_0 e t é o tempo da emissão da luminosidade. Se $z > 0$, temos o redshift, caso $z < 0$ chamamos de blueshift. A maioria das galáxias possuem $z > 0$ [28].

Como não é possível medirmos o tempo t diretamente, devido à não existência de equipamentos para isto, é mais conveniente usarmos o redshift z como variável das equações que descrevem a dinâmica do Universo em expansão, logo:

$$a = \frac{1}{1 + z}, \quad (1.47)$$

temos o fator de escala em função do redshift. Para os dias atuais, convencionou-se $a = 1$, então $z = 0$. Em um Universo em expansão, o fator de escala cresce com o tempo, assim, a medida que regredimos ao passado, a diminui, o que significa que z aumenta [26].

Podemos definir o Parâmetro de Hubble como,

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.48)$$

O valor atual é conhecido como Constante de Hubble H_0 e representa a taxa de expansão do Universo. Por conveniência, é expresso em termo adimensional h ,

$$H_0 \equiv h \cdot 100 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}. \quad (1.49)$$

É fundamental a determinação do seu valor mais exato possível para que se possa elaborar um Modelo Cosmológico mais acurado, pois a constante de Hubble está relacionada com várias outras grandezas cosmológicas, como por exemplo, as distâncias físicas entre objetos astronômicos, a idade do Universo e sua densidade de energia [29]. De acordo com as últimas observações do satélite Planck¹⁴ [2],

$$H_0 = 67,27 \pm 0,60 \quad \text{km} \cdot \text{s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}, \quad \rightarrow \quad h = 0,6727 \pm 0,60. \quad (1.50)$$

Este é um valor dependente do Modelo Cosmológico¹⁵. Há uma questão interessante que pode ser investigada no futuro chamada crise do H_0 , que consiste na discrepância entre os valores dessa constante obtidos por meio de observações do Universo primordial e tardio [30].

¹³ Na referência [27] esta expressão é obtida com detalhes na seção 8.4.1.

¹⁴ Planck (<<https://www.esa.int/Planck>>) é a missão da ESA (Agência Espacial Europeia) para observar a radiação cósmica de fundo do Universo.

¹⁵ O Planck fornece os melhores valores com base no Modelo Λ CDM, considerado um dos mais consistentes para descrever a dinâmica do Universo.

Derivando (1.47) com respeito ao tempo e em seguida comparando com (1.48), temos:

$$\frac{dt}{a} = -\frac{dz}{H}, \quad (1.51)$$

substituindo (1.47) na expressão acima achamos,

$$dt = -\frac{dz}{(1+z)H(z)}, \quad (1.52)$$

então, podemos obter a expressão que representa a idade do Universo para qualquer z ,

$$t(z) = \int_z^\infty \frac{dz'}{(1+z')H(z')}, \quad (1.53)$$

onde $H(z)$ depende dos parâmetros de densidade dos componentes do Universo, ou seja, é dependente do Modelo Cosmológico.

1.5 Parâmetros de densidade

Nas equações de Friedmann (1.38) e (1.39) os termos de pressão e densidade de energia estão relacionados aos componentes do Universo, por este motivo podemos reescrevê-las como [19],

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_{i=1}^n \rho_i - \frac{k}{a^2}, \quad (1.54)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \sum_{i=1}^n (\rho_i + 3p_i). \quad (1.55)$$

$$\dot{\rho}_i + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_i + p_i) = 0, \quad (1.56)$$

em que o índice i representa cada componente.

De acordo com as observações recentes o Universo é aproximadamente plano [1, 2]. Então, da primeira equação de Friedmann (1.54) considerando $k = 0$ (caso em que o Universo é plano), definimos a **densidade crítica**,

$$\rho_{cr} \equiv \frac{3}{8\pi G} H^2. \quad (1.57)$$

Essa é a densidade necessária para frear a expansão do Universo, logo $H = H_0$.

É conveniente expressarmos a densidade de energia dos componentes do Universo como uma relação entre sua densidade ρ_i e ρ_{cr} , chamamos de **parâmetro de densidade**,

$$\Omega_i(a) \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{cr}}. \quad (1.58)$$

Usando (1.57) e (1.58) podemos escrever a equação de Friedmann (1.54) como,

$$H^2 = H_0^2 \left(\sum_i \Omega_i - \frac{k}{H_0^2 a^2} \right), \quad (1.59)$$

$$H^2 = H_0^2 [\Omega_t + \Omega_k(a)], \quad (1.60)$$

de onde podemos definir o **parâmetro de densidade total** $\Omega_t \equiv \sum_i \Omega_i$, além do chamado **parâmetro de curvatura** Ω_k , cuja forma explícita é:

$$\Omega_k \equiv -\frac{k}{H_0^2 a^2}. \quad (1.61)$$

Através de (1.59) temos que a geometria do espaço está relacionada à distribuição de densidade total,

$$\begin{cases} 0 < \Omega_t < 1 \Rightarrow k < 0 & \text{(Aberto)}, \\ \Omega_t = 1 \Rightarrow k = 0 & \text{(Plano)}, \\ \Omega_t > 1 \Rightarrow k > 0 & \text{(Fechado)}. \end{cases} \quad (1.62)$$

De maneira geral, para o caso espacialmente plano temos:

$$\Omega_t + \Omega_k(a) = 1. \quad (1.63)$$

1.6 Componentes do Universo e Cenário de Evolução

Pelo Modelo Cosmológico padrão as componentes do Universo são descritas por: matéria bariônica, ME e EE [31], cujos valores percentuais são apresentados na Figura 2. Destaca-se a análise de cada componente como um cenário de evolução, uma vez que as mesmas evoluem de maneiras diferentes no decorrer do tempo cósmico.

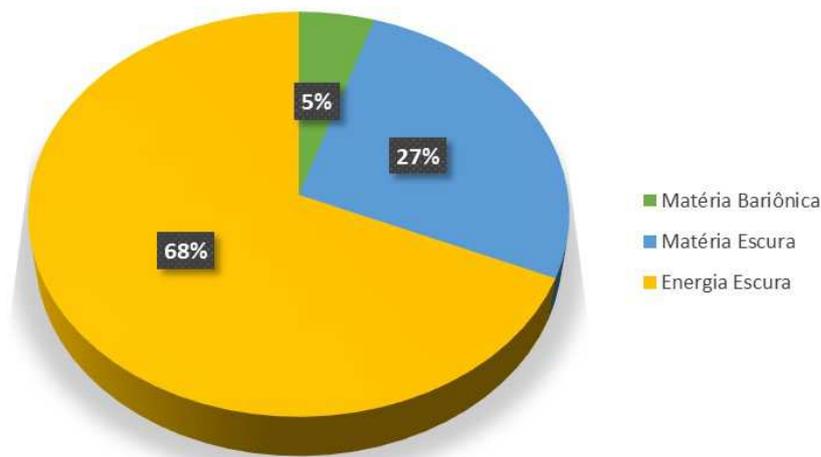


Figura 2 – Distribuição atual dos componentes do Universo segundo os dados do Planck 2018 [2] (TT,TE,EE+lowE). Essas porcentagens indicam que a constante de Hubble atual equivale a aproximadamente $67,27 \pm 0,60$. Temos que matéria bariônica é $\Omega_{b,0} h^2 = 0,02236 \pm 0,00015$, ME $\Omega_{c,0} h^2 = 0,1202 \pm 0,0014$ e EE é $\Omega_{\Lambda,0} = 0,6834 \pm 0,0084$. Hoje a radiação possui uma ordem de grandeza muito pequena, sendo assim, sua contribuição não é considerada neste gráfico.

1.6.1 Equações de estado

Assumindo que cada componente possui uma equação de estado que relaciona sua pressão e sua densidade de energia, dada por [23],

$$p_i = \omega_i \rho_i, \quad \longrightarrow \quad \omega_i = \frac{p_i}{\rho_i}, \quad (1.64)$$

onde ω_i é uma constante adimensional que depende do tipo de componente que domina a expansão. Substituindo esta relação na equação da conservação de energia (1.56) obtemos,

$$\dot{\rho}_i + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_i(1 + \omega_i) = 0, \quad (1.65)$$

a equação acima pode ser reescrita da forma,

$$\frac{1}{\rho_i} \frac{d\rho_i}{dt} = -3(1 + \omega_i) \frac{1}{a} \frac{da}{dt}. \quad (1.66)$$

Integrando ambos os lados,

$$\int \frac{d\rho_i}{\rho_i} = -3(1 + \omega_i) \int \frac{da}{a}, \quad (1.67)$$

encontramos:

$$\rho_i = \rho_{i,0} a^{-3(1+\omega_i)}, \quad (1.68)$$

onde o índice $i, 0$ refere-se o valor atual de densidade da componente em questão. Essa equação descreve como cada componente evolui com o fator de escala [17].

Podemos achar ainda, a relação de dependência temporal do fator de escala através da equação de Friedmann (1.54), usando a lei de potência $a \propto t^q$ [32], de forma que:

$$q^2 t^{2q-2} \propto t^{-q(1+3\omega_i)} \implies q = \frac{2}{3}, \quad (1.69)$$

onde consideramos $\omega_i \neq 1$, assim:

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+\omega_i)}}. \quad (1.70)$$

No caso em que $\omega_i = 1$ temos:

$$a(t) \propto e^{Ht}, \quad (1.71)$$

onde o fator de escala nessa forma exponencial descreve um regime de inflação do Universo.

Da equação de aceleração (1.39), para um Universo acelerado $\ddot{a} > 0$, devemos ter:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho_i(1 + 3\omega_i)a \implies \omega_i < -\frac{1}{3}. \quad (1.72)$$

Definimos o **parâmetro desaceleração** como:

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}}{a} \frac{1}{H^2}. \quad (1.73)$$

Esse parâmetro auxilia no entendimento da mudança da taxa de expansão do Universo. Para um Modelo Cosmológico contendo apenas matéria bariônica, ME e radiação¹⁶ implica em um parâmetro de desaceleração positivo. Contudo, esse parâmetro é negativo, resultando em um Universo acelerado, sendo necessário a inclusão de mais uma componente, a EE, que postula-se ser a responsável por essa aceleração.

1.6.2 Radiação

A radiação¹⁷ (r) é uma componente do Universo que pode ser modelada como um fluido relativístico, por exemplo, um gás de fótons e neutrinos em equilíbrio térmico, cuja equação de estado é descrita por [32],

$$\omega_r = \frac{1}{3} \implies p_r = \frac{1}{3}\rho_r. \quad (1.74)$$

Consequentemente, a expressão (1.68) é dada por:

$$\rho_r = \rho_{r,0}a^{-4}, \quad (1.75)$$

substituindo (1.75) em (1.58), a densidade de radiação torna-se,

$$\rho_r = \frac{3H_0^2}{8\pi G}\Omega_{r,0}a^{-4}. \quad (1.76)$$

A evolução do fator de escala (1.70) com o tempo é dada por,

$$a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}. \quad (1.77)$$

Aqui temos um caso de expansão desacelerada, pois $\ddot{a} \propto -t^{-\frac{3}{2}}$.

1.6.3 Matéria

De acordo com o Modelo Cosmológico Λ CDM¹⁸ a componente de matéria (m) pode ser dividida em duas: a *matéria bariônica*¹⁹ (b) e a *matéria escura fria*²⁰ (c). Então, podemos representá-las de forma conjunta, pois essas componentes possuem o mesmo parâmetro de estado (equação de estado semelhantes) [34],

$$\omega_m = 0 \implies p_m = 0. \quad (1.78)$$

¹⁶ A radiação possui ordem grandeza muito pequena e considera-se sua contribuição dentro da parcela de matéria bariônica.

¹⁷ Incluímos nesta componente todas as partículas relativísticas da natureza, em especial fótons e neutrinos.

¹⁸ O Modelo é de grande aceitação, pois é capaz de prever a aceleração do Universo a partir de um efeito antigravitacional promovido pela constante cosmológica [33].

¹⁹ Composto pela distribuição de galáxias no cenário cósmico.

²⁰ Matéria não bariônica que não interage com radiação, detectada apenas gravitacionalmente.

Que consistem em um gás não relativístico com pressão desprezível, por terem a velocidade muita baixa $v^2 \ll c^2$ [35]. Sua evolução com o fator de escala é obtida através da equação (1.68),

$$\rho_m = \rho_{m,0} a^{-3}, \quad (1.79)$$

e através de (1.58) obtemos sua relação com o parâmetro atual de densidade de matéria,

$$\rho_m = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \Omega_{m,0} a^{-3} \quad (1.80)$$

no qual,

$$\Omega_{m,0} = \Omega_{c,0} + \Omega_{b,0}, \quad (1.81)$$

onde $\Omega_{c,0}$ é o parâmetro de densidade atual da ME e $\Omega_{b,0}$ o parâmetro de densidade atual de matéria bariônica.

O fator de escala (1.70) assume a forma,

$$a(t) \propto t^{2/3}. \quad (1.82)$$

Percebemos que neste caso o Universo se encontra numa fase de expansão, pois $\dot{a} \propto t^{-1/3}$ é positivo, contudo essa expansão se torna desacelerada devido, $\ddot{a} \propto -t^{-4/3}$ ser negativo.

Fazendo um comparativo entre as densidades (1.80) e (1.76) nos instantes iniciais do Universo a radiação dominava a expansão, entretanto com seu decaimento mais acentuado, hoje em dia sua contribuição para Ω_m se tornou desprezível [32, 34].

1.6.4 Energia Escura

Com a descoberta de que o Universo está em expansão acelerada um Modelo contendo apenas radiação, matéria bariônica e ME não é capaz de descrever esse fenômeno [26]. Foi então necessário a inclusão de uma constante cosmológica Λ nas equações de campo de Einstein, para tornar as equações de Friedmann eficientes para este caso. Esta constante representa a presença de uma EE que é considerada como a principal responsável por esta aceleração [26, 34].

Supõe-se que a EE seja um fluido ideal homogêneo, a equação de estado é:

$$\omega_\Lambda = -1 \implies p_\Lambda = -\rho_\Lambda, \quad (1.83)$$

onde o fato da pressão ser negativa é o que causa a expansão acelerada [34]. Desta maneira, usando a equação (1.68), a densidade de EE é escrita como,

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda,0} = \text{constante}. \quad (1.84)$$

Identificamos a densidade de EE na equação de Friedmann (1.54) como [32]:

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (1.85)$$

e a sua relação com o parâmetro densidade de EE atual é:

$$\rho_\Lambda = \frac{3H_0^2}{8\pi G}\Omega_{\Lambda,0}. \quad (1.86)$$

A equação de Friedmann (1.38) com apenas densidade de EE quando integrada nos fornece uma evolução exponencial do fator de escala,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} \implies a(t) \propto e^{Ht}, \quad (1.87)$$

portanto temos um período de expansão extremamente acelerada, uma vez que, \dot{a} e \ddot{a} são positivos [34].

Na Figura 3, podemos visualizar a evolução de ρ_i em função do fator de escala $a(t)$ conforme o Universo se expande. Inicialmente o Universo era dominado por radiação, sendo a componente principal responsável pela expansão, este período ficou conhecido como Era do predomínio da Radiação, onde ocorreram a inflação cosmológica, quebra da simetria eletrofraca, plasma quark-glúon, a síntese de bárions e mésons, desacoplamento dos neutrinos primordiais, a nucleossíntese (formação dos primeiros prótons e neutrões) e a ionização [19]. Em seguida, a matéria assume o protagonismo, dando início a Era de predomínio da matéria, promovendo assim, a recombinação (síntese dos primeiros átomos neutros), desacoplamento dos fótons primordiais e a formação estruturas [19]. Hoje em dia a constante cosmológica (EE) é a componente dominadora da evolução e expansão do Universo.

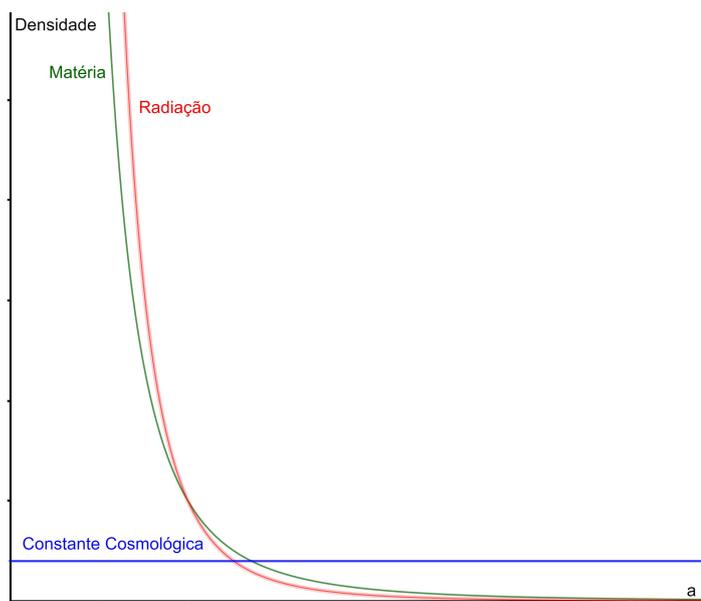


Figura 3 – Evolução das densidades de radiação, matéria e constante cosmológica em função do fator de escala $a(t)$, conforme o Universo se expande.

Em termos dos parâmetros de densidade atuais a equação (1.59) torna-se:

$$\begin{aligned} H^2 &= H_0^2 \left(\frac{\Omega_{k,0}}{a^2} + \frac{\Omega_{b,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{c,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \Omega_{\Lambda,0} \right), \\ H &= H_0 \left(\frac{\Omega_{b,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{c,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.88)$$

As informações sobre o histórico de expansão estão contidos na **função expansão** $E(a)$, definida por:

$$H = H_0 E(a), \quad (1.89)$$

$$E(a) = \left(\frac{\Omega_{b,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{c,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} \right)^{1/2} \quad (1.90)$$

onde $E(a)$ pode ser escrita em termos do redshift usando a relação: $a = 1/(1+z)$. Sendo assim, a equação (1.89) se torna,

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_{b,0}(1+z)^3 + \Omega_{c,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0} \right], \quad (1.91)$$

$$\begin{aligned} H &= H_0 \left[\Omega_{b,0}(1+z)^3 + \Omega_{c,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0} \right]^{1/2}, \\ H &= H_0 E(z). \end{aligned} \quad (1.92)$$

Então, a idade atual do Universo t_0 (tomando $z = 0$) e substituindo (1.91) na equação (1.53) é,

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz'}{(1+z')E(z')}. \quad (1.93)$$

Na Figura 4 vemos a evolução das componentes do Universo em função do redshift.

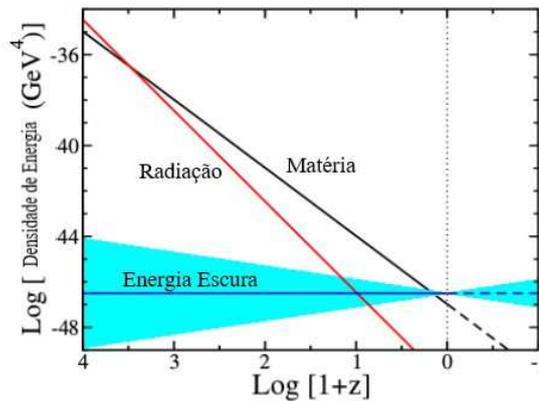


Figura 4 – Evolução da densidade de energia de Matéria, radiação e EE em função do redshift, onde $\omega_d = -1 \pm 0, 2$. Fonte: [36].

Vale lembrar que a EE pode ser representada por um parâmetro diferente da constante cosmológica (Λ), que denominamos como d . Nesta situação, o parâmetro de

Hubble (1.88) é escrito como:

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{b,0}(1+z)^3 + \Omega_{c,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{d,0}(1+z)^{3(1+\omega_d)} \right], \quad (1.94)$$

ainda considerando o parâmetro de estado como constante. No caso em que $\omega \neq \text{constante}$ temos,

$$\rho_d = \frac{\rho_{d,0}}{a^3} e^{-3 \int_1^a \frac{\omega_d(a')}{a'} da'}, \quad (1.95)$$

que pode ser usada se uma expressão analítica para ω_d for conhecida.

Os valores atuais dos parâmetros²¹ $\Omega_{b,0}$, $\Omega_{c,0}$, $\Omega_{d,0}$, H_0 são estimados por meio de observações e seus melhores valores podem ser encontrados no WMAP [1] e Planck [2].

1.7 Medidas de Distâncias

Neste tópico, abordaremos sobre algumas definições de distâncias utilizadas no contexto cosmológico, que posteriormente atuarão como ponte entre teoria e observação. A obtenção do valor numérico destas distâncias é possível por meio de observações, sendo considerado como um dos objetivos mais importantes em astronomia e cosmologia obtê-los com precisão, uma vez que, elas possuem dependência do fator de escala [37].

Distância própria

A distância própria D_p entre dois observadores é definida como o comprimento geodésico entre os dois pontos em um tempo t fixo (ou fator de escala fixo) [38], sendo uma grandeza invariante. Inicialmente, vamos tomar a métrica FLRW (1.16) com $t = \text{constante}$ e por conveniência, consideremos a mudança de variável [26],

$$\frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \implies d\chi(r), \quad (1.96)$$

onde χ é a distância comóvel (será definida a seguir) e seu valor depende da constante de curvatura,

$$\chi(r) = \begin{cases} \sin^{-1}r, & k = 1 \\ r, & k = 0 \\ \sinh^{-1}r, & k = -1. \end{cases} \quad (1.97)$$

Empregando $d\chi^2 = dr^2/(1 - kr^2)$ podemos reescrever a métrica FLRW como,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[d\chi^2 + f_k^2(\chi)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)], \quad (1.98)$$

²¹ São chamados de parâmetros livres, pois seus valores dependem das estimações de observações. O parâmetro de densidade de radiação e curvatura, geralmente são assumidos como zero, pois possuem uma ordem muito pequena.

em que $f_k(\chi)$ é a função inversa de (1.97), conhecida como distância métrica,

$$f_k(\chi) \equiv \begin{cases} \sin\chi, & k = 1 \\ \chi, & k = 0 \\ \sinh\chi, & k = -1. \end{cases} \quad (1.99)$$

Podemos então, estabelecer o conceito de distância própria, a qual é definida como,

$$dD_p^2 = a^2(t)[d\chi^2 + f_k^2(\chi)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)]. \quad (1.100)$$

É comum separarmos a distância própria em radial e transversas definidas a seguir.

Distância própria radial - Em virtude da isotropia consideramos, $\theta = \phi = \text{constante}$, logo

$$D_p = a(t)\chi. \quad (1.101)$$

Distância própria transversa - Consideramos, $\chi = \phi = \text{constante}$, assim,

$$D_p = a(t)f_k(\chi)\Delta\theta, \quad (1.102)$$

onde $\Delta\theta$ é a separação angular entre os dois pontos. Para o Universo plano temos:

$$D_p = a(t)\chi\Delta\theta. \quad (1.103)$$

Distância Comóvel

É a distância medida por um observador comóvel que participa da expansão, cuja definição é [38],

$$D_c \equiv \frac{D_p}{a(t)} = \chi, \quad (1.104)$$

ou seja, é o elemento que multiplica o termo de ângulo sólido independente do tempo. Quando o fator de escala é 1, ela é equivalente a distância própria (1.101), permanecendo constante à medida que o tempo evolui.

Para um feixe luminoso, temos $ds^2 = 0$. Considerando que ele foi emitido na distância comóvel χ , viajando radialmente, com $\theta = \phi = \text{constante}$, num Universo plano, pela métrica (1.16) encontramos,

$$d\chi = \frac{c}{a(t)}dt, \quad (1.105)$$

para medirmos a distância comóvel percorrida pelos fótons emitidos no tempo t_1 até o momento da observação t_0 , devemos integrar a expressão anterior e usar as relações (1.51) e (1.91), resultando em,

$$\int_{\chi}^0 d\chi' = c \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a} = -\frac{c}{H_0} \int_z^0 \frac{dz'}{E(z')}, \quad (1.106)$$

deste modo obtemos,

$$\chi(z) = D_{H0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad (1.107)$$

onde D_{H0} é o valor atual da distância de Hubble.

Distância de diâmetro angular

Podemos medir a distância de diâmetro angular d_A de um objeto extragaláctico que emitiu sua luminosidade no tempo t_1 e que foi observada em t_0 , conhecendo seu tamanho angular $\Delta\theta$, que nada mais é que seu tamanho aparente, usando a equação euclidiana para sua distância,

$$d_A = \frac{D}{\Delta\theta}, \quad (1.108)$$

onde D é a distância própria transversa, que normalmente é conhecida²². A Figura 5 ilustra geometricamente esta definição.

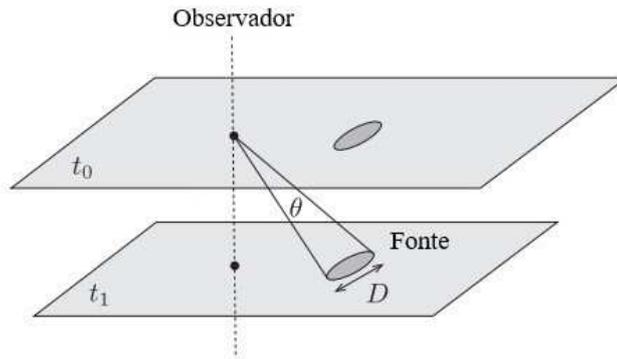


Figura 5 – Geometria associada à definição da distância de diâmetro angular. Fonte: [39].

Substituindo (1.102) na equação acima, escrevemos a distância do diâmetro angular da seguinte forma [26]:

$$d_A = \frac{a(t) f_k(\chi) \Delta\theta}{\Delta\theta} = a f_k(\chi), \quad (1.109)$$

por conseguinte, substituindo (1.47), achamos:

$$d_A = \frac{f_k(\chi)}{(1+z)}. \quad (1.110)$$

onde $f_k(\chi)$ é dada por (1.99). No Universo plano resulta em:

$$d_A = \frac{\chi(r)}{(1+z)}. \quad (1.111)$$

²² Essa medida de distância própria obtida por meio de observações das *réguas-padrão*, objetos com tamanhos conhecidos, um exemplo são as Oscilações Acústicas de Bárions (BAO), falaremos delas mais a frente.

Distância de Luminosidade

A distância de luminosidade estima o afastamento de um objeto luminoso comparando a intensidade observada com a emitida [26]. Ela utiliza o fato de existirem velas-padrão, uma classe de objetos que possuem luminosidade intrínseca bem conhecida como, por exemplo, as Supernovas tipo Ia²³, com luminosidade absoluta L (energia por unidade de tempo) emitida.

Consideremos uma fonte de luminosidade conforme Figura 6, podemos definir o fluxo observado F (energia por unidade de tempo por área de recepção) de forma euclidiana como:

$$F = \frac{L}{4\pi\chi^2}. \quad (1.112)$$

Neste ponto, consideramos a fonte à uma distância comóvel χ fixa. No momento em que

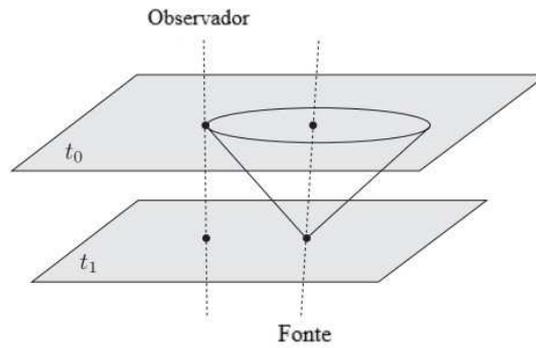


Figura 6 – Geometria associada à definição de distância de luminosidade. Fonte: [39]

a luz atinge a Terra, a área apropriada é de uma esfera desenhada ao redor da supernova. Em um espaço-tempo FLRW, esse resultado é modificado pelos seguintes fatores:

- A taxa de chegada dos fótons na Terra é menor do que a taxa que eles são emitidos pelo fator de escala, $\frac{1}{1+z}$.
- A energia recebida dos fótons é menor que a energia emitida, sendo que eles foram emitidos pelo mesmo fator de escala $\frac{1}{1+z}$.

Desta maneira, temos

$$F = \frac{L}{4\pi f_k^2(\chi)(1+z)^2} \equiv \frac{1}{4\pi d_L^2}, \quad (1.113)$$

usando a equação (1.110) obtemos distância de luminosidade:

$$d_L = f_k(\chi)(1+z),$$

²³ São eventos explosivos de estrelas que completaram seu ciclo de vida e possuem uma luminosidade característica conhecida superior as das galáxias, pois suas magnitudes em estado de brilho máximo possuem aproximadamente o mesmo valor, sendo utilizadas para determinar distâncias cosmológicas [40].

para um Universo plano ficamos com:

$$d_L = \chi(r)(1 + z). \quad (1.114)$$

Distância esfericamente média

Essa é uma medida importante para estimar a distância de diâmetro angular, a distância de Hubble ou o raio das BAOs, definida como [41]:

$$D_V \equiv \left[(1 + z)^2 d_A^2(z) \frac{cz}{H(z)} \right]^{1/3}. \quad (1.115)$$

E é o caminho mais curto ao longo de uma superfície esférica.

1.8 Inflação Cósmica

A cosmologia FLRW descrita anteriormente, teve êxito ao prever a expansão do Universo, a existência da radiação cósmica de fundo de microondas (RCFM) e a abundância de elementos leves nos primeiros instantes do Universo. Mas, ela se tornou incompleta, por não explicar características importantes que foram observadas posteriormente. Por exemplo, porque o Universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas? Sendo que, o Universo primitivo era composto de muitas regiões do espaço causalmente desconectadas, esse é o chamado *problema do horizonte*. Em pequenas escalas, pode-se observar através das flutuações de temperatura da RCFM não-homogeneidades no espaço, com isto, verificou-se que em tempos remotos estas inhomogeneidades eram ainda menores, indicando um Universo inicial homogêneo, este é o *problema da planura*. Também era previsto a abundância de monopolos magnéticos que aparecem devido a quebra espontânea de simetria, contudo isto não é observado. Além disto, o Modelo Padrão não conseguia explicar a origem das flutuações de densidade que permitiram o surgimento das estruturas que observamos hoje [39, 24].

Alan Guth²⁴, em 1981 propôs um novo Modelo Cosmológico chamado *Inflação Cósmica*, que explica muitas características do nosso Universo, inclusive fornece respostas aos problemas do Modelo Padrão. Hoje, depois de 30 anos de desenvolvimento, análises e contribuições de outros físicos esta teoria é considerada a melhor alternativa para descrever a evolução do Universo [42].

A inflação cósmica consiste em uma fase de expansão extraordinariamente acelerada (exponencialmente) que teria ocorrido nos primeiros instantes de vida do Universo, conduzida por um campo escalar, chamado *ínflaton* ϕ , no qual foi capaz de diluir qualquer curvatura inicial do Universo, resolvendo o problema da planura e expandir drasticamente o

²⁴ Nasceu em Nova Jersey no ano de 1947, seu estudo está relacionado a aplicação da física teórica de partículas na análise do Universo inicial [42].

horizonte de partículas, permitindo o contato causal de regiões que hoje são desconectadas, o que resolve o problema do horizonte. Os monopolos magnéticos foram diluídos durante o período inflacionário [32], de tal forma que seus valores ínfimos não são perceptíveis no Universo atual [43, 44].

A equação de Friedmann (1.54) para um Universo plano se torna:

$$H^2 = \frac{\rho}{3M_{pl}^2}, \quad (1.116)$$

onde ρ é densidade do campo escalar e foi introduzida a *massa de Planck*:

$$M_{pl} \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G}} = 2,4 \times 10^{18} \text{GeV},$$

onde \hbar é a constante de Planck reduzida e G é constante gravitacional de Newton.

1.8.1 Condições para Inflação

Antes de discutirmos sobre a dinâmica do campo escalar para gerar o período inflacionário vamos definir algumas condições para que também ocorra esta fase.

Para análise do problema do horizonte trabalhamos com a definição do *horizonte de partículas*²⁵ [24],

$$\chi(\tau) \equiv \tau - \tau_i = \int_{\tau_i}^{\tau} \frac{dt}{a} = \int_{a_i}^a \frac{da}{a\dot{a}} = \int_0^a \frac{d \ln a}{aH}, \quad (1.117)$$

em que τ é o tempo conforme ou comóvel, onde $dt = a d\tau$. Temos ainda que, $a_i \equiv 0$ corresponde a singularidade do Big Bang, sendo $\tau(0) = 0$. Enquanto, para o problema da planura, considerando uma possível contribuição da curvatura temos,

$$(\Omega - 1) = -\frac{k}{(Ha)^2}. \quad (1.118)$$

Em ambos os casos, percebe-se que a expansão do Universo está relacionada com a evolução do *raio comóvel de Hubble* $(aH)^{-1}$.

- **Expansão acelerada:** A principal condição para haver inflação é ter um Universo acelerado, $\ddot{a} > 0$. Então, usando (1.116) podemos escrever a segunda equação de Friedmann como,

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{1}{6M_{pl}^2}(\rho + 3p) = -\frac{H^2}{2} \left(1 + 3\frac{p}{\rho}\right). \quad (1.119)$$

Devemos portanto, ter uma pressão negativa, tal que

$$\rho + 3p < 0 \implies p < -\frac{1}{3}\rho. \quad (1.120)$$

²⁵ A distância máxima que um fóton pode viajar desde o início do Universo até um observador.

Assim, para o raio de Hubble no Universo primordial temos,

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0, \quad (1.121)$$

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \dot{a}^{-1} = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \quad (1.122)$$

- **Parâmetro Hubble de Rolagem lenta:** Alternativamente, podemos escrever (1.122) como,

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = -\frac{1}{a} \left[1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right] = -\frac{1}{a}(1 - \epsilon), \quad (1.123)$$

onde definimos o *parâmetro slow-roll* (rolagem lenta):

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} < 1. \quad (1.124)$$

Este parâmetro garante que o ínflaton role lentamente através de sua energia potencial.

- **Expansão quase de Sitter²⁶:** O Universo de de Sitter é uma solução das Equações de Campo da Relatividade Geral para o caso de um espaço-tempo homogêneo e isotrópico dominado por uma constante cosmológica positiva Λ , ou seja, atende as características de (1.83), sendo considerado um caso muito especial do Universo de Friedmann, cujo fator de escala tem a forma [45],

$$a(t) = a_0 e^{H_\Lambda t}, \quad (1.125)$$

que descreve a evolução do espaço no decorrer do tempo durante a expansão, com o parâmetro de Hubble independente do tempo dado por,

$$H_\Lambda = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda} = \text{constante}.$$

Pelo fato da componente que conduz a inflação possuir densidade constante este Modelo produz uma inflação eterna, o que está fora das observações. Os Modelos atuais satisfatórios consideram que a fase inflacionária é dirigida por um campo escalar que sob certas condições se comporta aproximadamente como uma constante cosmológica [24], obtendo portanto uma expansão que cresce exponencialmente.

Dinâmica do Campo escalar

Considerando o campo escalar ínflaton $\phi(t, \vec{x})$ real, sua evolução é descrita pela equação²⁷,

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (1.126)$$

²⁶ Willem de Sitter(1872 – 1934) matemático, físico e astrônomo holandês.

²⁷ Essa expressão é obtida por meio da conservação do tensor energia-momento em função do campo escalar.

que é a chamada *equação de movimento do inflaton*. O termo $3H\dot{\phi}$ é responsável por amortecer a chegada do campo no seu mínimo potencial, sendo um elemento de fricção [39].

Mecanismo de Slow-Roll

Uma característica importante para haver inflação é a rolagem lenta do campo escalar ϕ através do potencial suficientemente plano até alcançar o estado de menor energia e a oscilar ao redor deste (Figura 7).

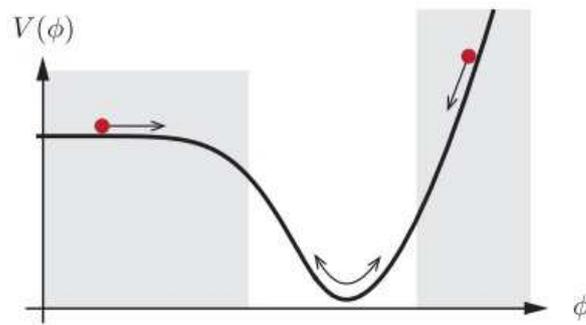


Figura 7 – Durante o período inflacionário o Universo se expande exponencialmente. Quando o campo escalar chega perto do mínimo do potencial, ele começa a oscilar, perdendo sua energia por atrito, acontecendo assim o período de reaquecimento. As partes sombreadas equivalem ao Universo em expansão. Fonte: [39].

- 1ª condição slow-roll,

$$\dot{\phi}^2 < V(\phi) \implies \frac{\dot{\phi}^2}{2} \ll V(\phi), \quad (1.127)$$

Essa condição é necessária, mas não suficiente. Pois, é preciso que a energia cinética do campo permaneça subdominante durante toda a inflação, ou seja, o potencial deve ser sempre superior.

Para que o Universo retorne a sua evolução ordinária, quente e desacelerada em relação a inflação, esta expansão deve ser rápida, o que favorece um tipo de uma expansão exponencial. Dentro do mecanismo slow-roll, isto acontece se o potencial do inflaton for aproximadamente constante,

$$V(\phi) \simeq \text{constante} \implies a(t) \propto e^{Ht}, \quad (1.128)$$

isso induz uma fase aproximada de de Sitter.

- 2ª Condição slow-roll:

Diferenciando (1.127) com respeito ao tempo obtemos:

$$\ddot{\phi} \ll V'(\phi), \quad (1.129)$$

aplicando na equação de Klein-Gordon encontramos,

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi), \quad (1.130)$$

assim a 2ª condição pode ser reescrita como

$$|\ddot{\phi}| \ll 3H|\dot{\phi}|, \quad (1.131)$$

a partir disto, vemos que o potencial aproximadamente plano realmente domina a energia cinética do campo escalar durante a inflação.

Parâmetros Slow-Roll

As condições acima mencionadas podem ser resumidas nos *parâmetros Slow-Roll*. Da 1ª condição temos o *primeiro parâmetro slow-roll* [39]:

$$\epsilon \simeq \frac{M_{pl}^2}{2} \left[\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right]^2 \ll 1. \quad (1.132)$$

Para 2ª condição, devemos impor que a aceleração do campo escalar seja muito pequena. Então, o *segundo parâmetro slow-roll* é tal que,

$$|\eta| \equiv M_{pl}^2 \frac{V''(\phi)}{V(\phi)} \ll 1. \quad (1.133)$$

Portanto, inflação ocorre quando há rolamento lento da energia cinética pelo potencial, obedecendo estes parâmetros, $\epsilon \ll 1$ e $|\eta| \ll 1$. O período de expansão exponencial termina quando estas condições são violadas, ou seja [24],

$$\epsilon(\phi_f) \approx 1, \quad \eta(\phi_f) \approx 1. \quad (1.134)$$

em que ϕ_f é o valor do campo no fim da inflação cósmica.

Número de e-folds

O número de e-folds²⁸ N é uma parametrização de tempo, usada para definir a quantidade de vezes que a potência do fator de escala cresce com o fator e [24]. Por definição,

$$dN \equiv d \ln a, \quad \implies \quad N = \int_{a_i}^{a_f} d \ln a = \int_{t_i}^{t_f} H dt, \quad (1.135)$$

²⁸ Folds - do português “dobras”.

onde t_i é o início da inflação e t_f é o final, eles são definidos como $\epsilon(t_i) = \epsilon(t_f) \equiv 1$. Para o regime slow-roll temos,

$$N = \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon} M_{pl}} d\phi, \quad (1.136)$$

onde $\phi_i = \phi(t_i)$ é o valor do campo no início da inflação.

Para resolver o problema da planura e horizonte é estabelecido um número mínimo de e-folds. De acordo com as maiores escalas observadas da CMB, elas são produzidas sobre $N_{CMB} \sim 60$ antes do final da inflação, que é o valor mínimo de N [39]. Um Modelo Inflacionário bem-sucedido requer,

$$N > N_{CMB} \implies N > 60. \quad (1.137)$$

O comportamento exato do fator de escala, do ínflaton e o valor de N dependem da forma do potencial $V(\phi)$.

1.9 Observações Cosmológicas

Nesta seção trataremos de forma qualitativa sobre os *observáveis cosmológicos*: Radiação Cósmica de Fundo de Microondas (CMB²⁹), Super Novas do tipo Ia (SNIa), Oscilações Acústicas Bariônicas (BAOs) e a linha de 21-cm do hidrogênio neutro (HI) usados para estimar parâmetros importantes na astronomia e cosmologia, que posteriormente são aplicados aos estudos dos espectros de potências.

1.9.1 Radiação Cósmica de Fundo de Microondas

As radiações da CMB são uma das fontes mais ricas de informações sobre o Universo primordial, pois se originam da *última superfície de espalhamento* (ou desacoplamento), quando o Universo tinha aproximadamente 375 mil anos. Nos primeiros instantes supostamente o Universo era muito denso e com altíssima temperatura. Neste período os bárions (principalmente prótons, elétrons livres, nêutrons) e fótons estavam acoplados formando um único plasma, pois os fótons eram espalhados continuamente pelo grande número de elétrons livres.

Devido a expansão, o Universo começou a esfriar chegando a uma temperatura de aproximadamente $T_* = 2,725 \pm 0,020$ K [46], permitindo a interação entre elétrons e prótons, criando assim as primeiras partículas de átomos neutros³⁰. Houve uma diminuição dos elétrons livres impedindo o espalhamento dos fótons³¹, que desacoplaram-se dos bárions, aproximadamente no redshift $z_* = 1090,97$ [1] e desde então viajam livremente no Universo.

²⁹ Do inglês: Cosmic Microwave Background radiation.

³⁰ O mais abundante é o átomo de hidrogênio neutro (HI) formando neste período.

³¹ Resumidamente, a taxa de espalhamento dos fótons se tornou menor que a taxa de expansão.

Esses fótons carregam informações sobre os processos astrofísicos, interações entre partículas, flutuações primordiais de temperatura geradas pela inflação, formação das primeiras estruturas e etc. Todos esses processos podem ser estudados através das medidas do espectro da CMB³², polarização e sua distribuição espacial no céu.

O Wilkinson Microwave Anisotropy Probe³³ (WMAP) [1] mapeou as flutuações de temperatura da CMB quando o Universo era jovem, cerca de 375 mil anos, condensadas na Figura 8. Os padrões nas imagens são usados para tentar entender o que aconteceu antes do desacoplamento e explicar os acontecimentos nos bilhões de anos desde o início do Universo.

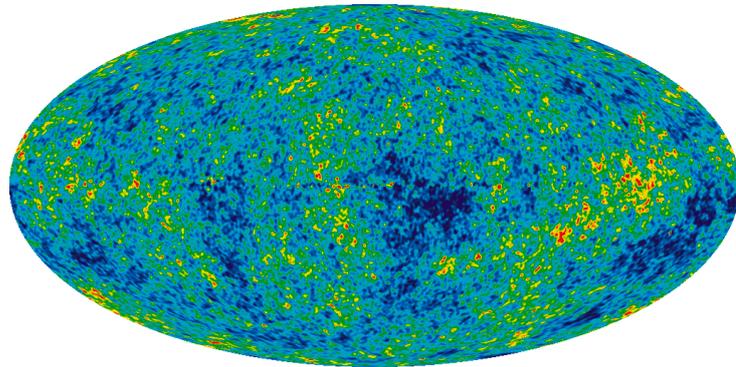


Figura 8 – Flutuações da temperatura da CMB de quando o Universo tinha aproximadamente 375 mil anos. As regiões vermelhas são mais quentes e densas. Fonte: WMAP/NASA.

Resumidamente, a CMB fornece uma janela de observação mais direta para o Universo primordial e permite descrever as características observadas hoje. Para uma revisão mais completa sobre as anisotropias da radiação cósmica de microondas indicamos a referência “*CMB anisotropy science: a review*” [47].

1.9.2 Super Novas do tipo Ia (SNIa)

As Supernovas (SN) são caracterizadas por explosões de estrelas em seus estágios finais de vida, causando uma grande emissão de radiação. Emitindo uma luminosidade extremamente intensa, equivalente à de uma galáxia inteira [13], observadas no céu como uma fonte pontual de radiação, atinge um pico de luminosidade e em seguida vai enfraquecendo, até o fenômeno desaparecer. Essa observação é feita através da curva de luz emitida.

Elas são classificadas de acordo com suas linhas espectrais de absorção e as que não possuem linhas de hidrogênio em seu espectro são chamadas de super novas do tipo I [48]. Dentro da classe de SNI, existe as super novas tipo Ia (SNIa), cujas luminosidades absolutas são aproximadamente constantes no pico de brilho observado. Esse fato possibilita a

³² Hoje a CMB é detectada equivalentemente como um espectro de corpo negro, com temperatura do período de desacoplamento.

³³ Sonda da anisotropia de microondas Wilkinson.

determinação das distâncias até as SNIa. Assim, as SNIas são um tipo de velas-padrão pelas quais pode-se medir as luminosidades observacionalmente e aferir as distâncias cosmológicas, como a distância de luminosidade d_L .

Descobriu-se que a magnitude absoluta está correlacionada com a largura da curva de luz, ou seja, as supernovas tipo Ia tem curvas de luz mais largas [49]. Medindo ao mesmo tempo a magnitude aparente e a curva de luz, é possível, portanto, prever a magnitude absoluta.

O pico (corrigido) da magnitude absoluta M é o mesmo para qualquer SNIa (Figura 9). Sob a suposição de velas-padrão, podemos determinar a distância de luminosidade de uma supernova medindo sua magnitude aparente m usando a relação,

$$m = M + 25 + 5\log_{10}d_L(z), \quad (1.138)$$

em unidades de Mpc.

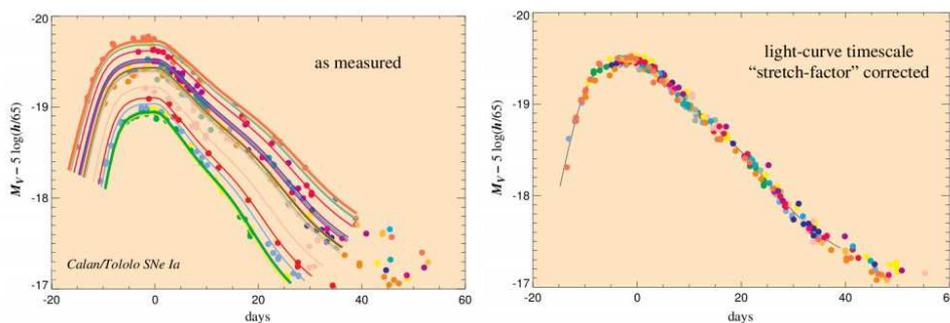


Figura 9 – Comportamento das curvas de SNIa em baixos redshifts. A figura à esquerda mostra que o aumento da luminosidade está relacionado a uma dilatação da curva de luz, vemos uma pequena variação da magnitude entre as SNIa. A figura à direita mostra a curva padronizada após a correção (brilho máximo e duração) [48].

Sendo assim, as SNIa são observáveis importantíssimos para medir distâncias cosmológicas e determinar a taxa de expansão do Universo [48].

1.9.3 Oscilações Acústicas dos Bárions

As oscilações acústicas dos bárions (BAOs) são ondas “congeladas” do período de desacoplamento entre matéria e radiação, que representam uma escala de agregação preferida na distribuição das galáxias, sendo consideradas como uma régua-padrão [9]. Elas têm sido usadas como umas das ferramentas cosmológicas poderosas e promissoras para a restrição de parâmetros cosmológicos. Em particular, nos ajudam a determinar o histórico de expansão do Universo, bem como investigar as características da EE [50].

Durante os primeiros 300-400 mil anos do Universo, as componentes de matéria bariônica e radiação formavam um plasma³⁴ denso e quente, composto por elétrons, núcleos

³⁴ O Plasma é definido como uma coleção globalmente neutra de partículas com carga se movendo livremente [51].

e fótons, este período é conhecido como *era plasma* [51]. Ao longo desta época, tínhamos um Universo ionizado, a radiação e os bárions estavam fortemente acoplados³⁵.

Devemos ter uma escala de tempo do espalhamento de Thomson muito menor que a escala de tempo da expansão do Universo $t_H(z) = H(z)^{-1}$. Observa-se uma transferência de momento contínua entre matéria bariônica e radiação, ou seja, os fótons são espalhados frequentemente, fazendo com que elas estejam em equilíbrio térmico. Se definirmos o tempo (caminho) médio dos fótons entre dois espalhamentos Thomson por [51],

$$t_s = \frac{1}{\sigma_T n_e}, \quad (1.139)$$

onde σ_T é a seção de choque do espalhamento e n_e é a densidade numérica dos elétrons livres, sendo que n_e deve ser muito grande para que tenhamos $t_s \ll t_H$, assim, fótons e bárions são acoplados com as temperaturas evoluindo da mesma maneira. Podemos definir a *taxa de espalhamento* como,

$$\Gamma = \frac{c}{t_s} = n_e \sigma_T c,$$

em que $n_e = n_b = n_{b0}(1+z)^3$ para um Universo ionizado, onde n_b é a densidade numérica dos bárions e n_{b0} é o valor atual da densidade numérica dos bárions e c é a velocidade da luz no vácuo, logo,

$$\Gamma = \frac{c}{t_s} = n_{b0} \sigma_T c (1+z)^3. \quad (1.140)$$

Os fótons permanecem acoplados aos elétrons enquanto a taxa de espalhamento Γ for maior que a taxa de expansão H . Durante esta fase os fótons não conseguem circular livremente, devido sofrerem o espalhamento pelos elétrons, o que caracteriza um Universo opaco³⁶. Uma vez que, $\Gamma < H$, os elétrons são diluídos rapidamente pela expansão, fazendo com que não haja mais interação entre eles e os fótons.

Uma consequência do acoplamento entre bárions e fótons, é que qualquer perturbação no plasma primordial produz oscilações que comportam-se como ondas acústicas, por causa da gravidade e pressão dos fótons. Se considerarmos uma única perturbação em uma região esférica da densidade do plasma, ela se propagará para fora como uma onda acústica com velocidade [51],

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3(1+R)}}, \quad (1.141)$$

onde $R \equiv \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}$ é a razão entre as densidades dos bárions e fótons, sendo que c_s pode assumir no máximo o valor de $1/\sqrt{3}$ [51]. Uma ilustração para uma única fonte de perturbação é apresentada na Figura³⁷ 10.

Com a expansão do Universo a temperatura e densidade do plasma bárion-fóton diminuiram, fazendo ocorrer o momento da recombinação quando o Universo deixou de

³⁵ Formando o *fluido bárion-fóton*.

³⁶ A radiação ainda não havia se espalhado pelo Universo.

³⁷ Fonte: <<https://newscenter.lbl.gov/2009/10/27/evolving-search-2/>>;

ser ionizado e tornou-se neutro. Supondo que inicialmente os bárions capturaram elétrons e formaram apenas hidrogênio [52],



no qual H simboliza o hidrogênio, γ o fóton, p o próton e e^- o elétron. Estes são os principais processos da dinâmica de equilíbrio dos bárions, onde a reação da esquerda para a direita, é chamada de *fotoionização*. O processo no sentido oposto é conhecido como *recombinação*, formando um átomo de hidrogênio. Por convenção, consideramos este último processo como sendo o instante em que 50% de matéria bariônica está em forma de átomos de hidrogênio neutro, tal que $t_{rec} \sim 360.000$ anos, o que corresponde à $z_{rec} \sim 1090$ [53].

Os fótons têm seu caminho livre médio aumentado devido à diminuição da densidade numérica dos elétrons. Em algum momento, o tempo de espalhamento médio do fóton se torna maior do que o tempo de Hubble $H^{-1}(z)$, definindo o evento de desacoplamento³⁸ entre fótons e bárions no redshift $z_* \sim 1090$ [2]. Este desacoplamento marca a emissão da CMB que observamos hoje. Os bárions ainda sofrem o espalhamento Compton³⁹ por um certo tempo, o fim deste período é denominado *época de arrasto*⁴⁰, marcado pelo redshift $z_{drag} \sim 1060$ [2]. Após os efeitos sobre bárions cessarem, eles não se propagam mais como uma onda sonora, deixando uma casca esférica em excesso ao redor de cada perturbação inicial (Figura 10). O redshift de arrasto é definido como [54],

$$\begin{aligned} z_{drag} &= 1291 \frac{(\Omega_{m,0} h^2)^{0,251}}{1 + 0,659(\Omega_{m,0} h^2)^{0,828}} [1 + b_1 (\Omega_{b,0} h^2)^{b_2}], \\ b_1 &= 0,313 (\Omega_{m,0} h^2)^{-0,419} [1 + 0,607 (\Omega_{m,0} h^2)^{0,674}], \\ b_2 &= 0,238 (\Omega_{m,0} h^2)^{0,223}. \end{aligned} \quad (1.143)$$

E o raio de arrasto (raio da casca) r_{drag} é definido como o horizonte de som acústico r_s [54],

$$r_s = \int_0^{t(z_{drag})} c_s(1+z) dt = \frac{2}{3k_{eq}} \sqrt{\frac{6}{R_{eq}}} \ln \frac{\sqrt{1+R_{drag}} + \sqrt{R_{drag}+R_{eq}}}{1 + \sqrt{R_{eq}}}, \quad (1.144)$$

onde $R_d \equiv R(z_d)$ e $R_{eq} \equiv R(z_{eq})$, são as razões entre as densidades dos bárions e fótons nos respectivos redshifts. O valor atual do horizonte sonoro de acordo com Planck 2018 [2] é $r_s = 147$ Mpc.

1.9.3.1 Régua-padrão Estatística

O raio característico da casca esférica (horizonte de som) é impresso na distribuição de matéria do Universo como um excesso de densidade formando uma escala. A ME se

³⁸ Os bárions deixam de sentir a pressão da radiação.

³⁹ Simplificadamente, os fótons são mais numerosos e param de “sentir” os bárions antes que os bárions parem de “senti-lós” ao redor deles.

⁴⁰ Do inglês *drag epoch*;

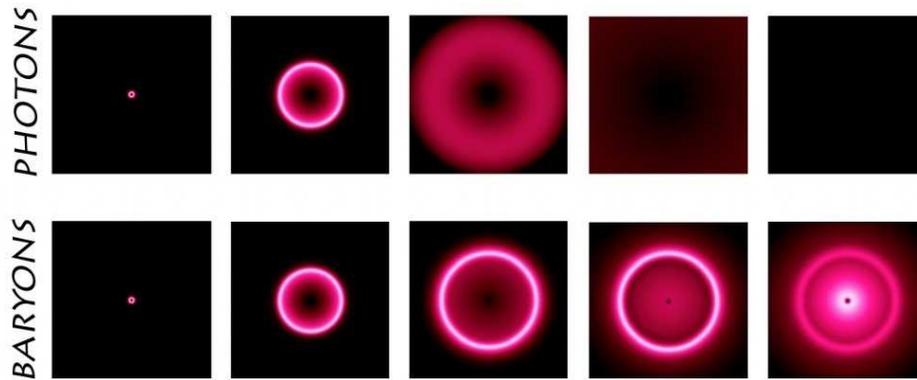


Figura 10 – Fenômeno de uma única oscilação acústica bariônica, mostrando a evolução de bárions e fótons. O Universo inicial era composto do plasma bárion-fóton (vale ressaltar que ME fazia parte do fluido); Imagine uma única perturbação, como uma pedra jogada em um lago: bárions e fótons se propagam como ondas, viajando através do plasma em uma onda sonora. Com o resfriamento do Universo, prótons e elétrons começaram a se recombinar e formaram os átomos neutros, os fótons escaparam e o Universo tornou-se transparente, enquanto os bárions congelaram-se e pouco à pouco foram sendo atraídos para halos de ME para formar as galáxias. A perturbação original e seu eco moldaram um tipo de régua-padrão chamada oscilação acústica bariônica. Imagem: Martin White.

aglomera preferencialmente nesta escala. Há, portanto, uma probabilidade aumentada de que uma galáxia se forme em algum lugar que tenha super densidade remanescente da onda de bárions em qualquer lugar da casca [9].

A característica mais interessante da BAO na função de correlação⁴¹ (veremos no capítulo 4) é que a posição do pico nas coordenadas comóveis praticamente não muda, desde a fase recombinação. De modo que o tamanho físico do horizonte sonoro é afetado apenas pela expansão do Universo (Figura 11).

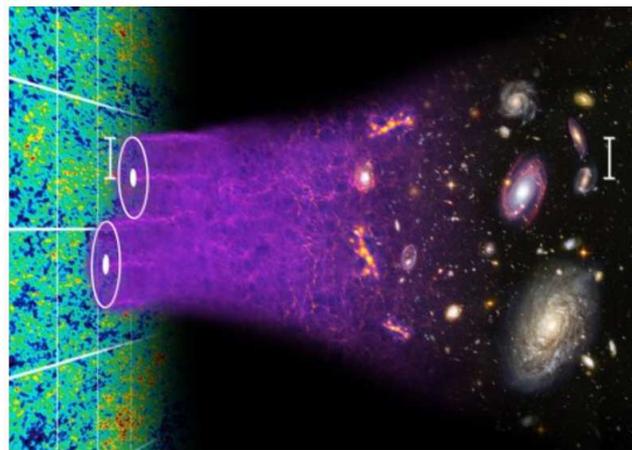


Figura 11 – Escala característica do Horizonte sonoro. Fonte: [55].

Isso significa que a escala BAO r_s , pode ser usada como uma régua-padrão estatística (SSR⁴²) para medições cosmológicas de distância, taxa de expansão e restringir parâmetros, semelhante ao conceito de usar supernovas do tipo Ia como velas-padrão.

⁴¹ É uma função que relaciona duas regiões ou mais e descreve como uma influência na outra.

⁴² Do inglês *Statistical Standard Rulers*

- *Velas-padrão*: são objetos cuja magnitude absoluta, ou luminosidade, é conhecida ou, alternativamente, cuja luminosidade varia com o redshift de uma maneira bem compreendida;
- *Réguas-padrão*: são objetos de tamanho absoluto conhecido, ou cuja relação de tamanho-redshift é bem reconhecida.

A diferença das BAOs em relação às supernovas é que elas não são um único objeto mensurável no céu. São sinais fracos distribuídos em grandes volumes, sendo portanto, necessárias medições estatísticas [9].

Para ilustrar a ideia subjacente às SSR, imagine que todas as galáxias foram posicionadas nas interseções de uma grade tridimensional regular de espaçamento conhecido L . As medidas de distâncias do diâmetro angular $D_A(z)$ seriam triviais e teríamos a taxa de expansão $H(z)$ medida em um conjunto discreto de redshifts correspondentes aos pontos médios entre as galáxias.

Agora imagine que começamos a inserir aleatoriamente galáxias nessa grade regular. Como o número de galáxias distribuídas aleatoriamente aumenta, o padrão da grade regular rapidamente se tornará difícil de enxergar a olho nu (Figura 12). Mas, o padrão da grade subjacente ainda pode ser detectável estatisticamente [9].

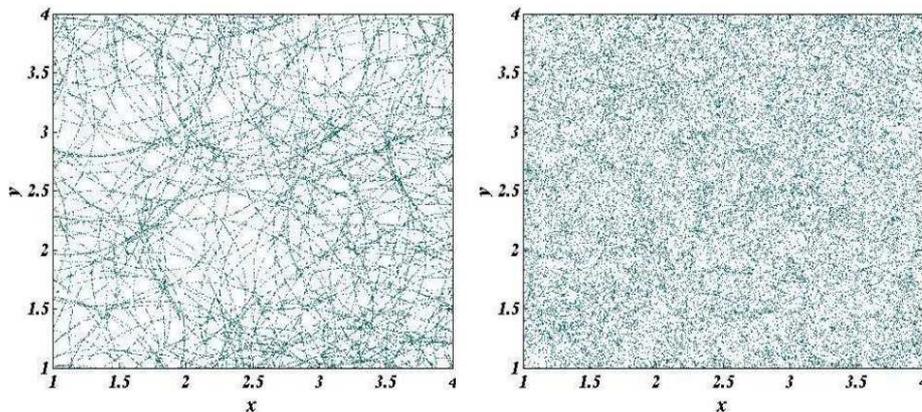


Figura 12 – Sobreposição de anéis do mesmo raio característico L . Na imagem a esquerda é possível visualizar a escala radial preferida da distribuição de galáxias. Na imagem da direita a sobreposição de anéis no plano “esconde” visualmente a escala característica, a medida que o número de anéis aumenta e a amostragem de cada anel individual é reduzida. Fonte: [9].

Contudo, reconstruir essa escala constitui um dos desafios da Cosmologia Moderna, onde devem ser usadas as definições de transformadas de Fourier, remoção de ruídos etc, e antes de tudo isto, é necessário entender as funções estatísticas básicas que são utilizadas.

1.9.4 A linha de 21 cm

Descobrir o que aconteceu nos primeiros bilhões de anos da história do Universo é um dos desafios da Cosmologia Moderna. A linha de 21 cm do átomo de hidrogênio é considerada um rastreador conveniente dos eventos ocorridos nesse período, pois carrega informações sobre a formação das primeiras estrelas e galáxias.

1.9.4.1 O átomo de HI

O átomo de Hidrogênio é o elemento mais leve, simples e abundante do Universo, está presente em todas as direções e compõe a maior parte ($\sim 75\%$) da matéria bariônica [56], ou seja, é um dos principais constituintes de qualquer galáxia ou aglomerados. Estima-se que ele foi produzido nos primeiros 3 minutos do Universo, sendo condensado nas seguintes formas: hidrogênio ionizado (HII), neutro (HI) e molecular (H_2). Acredita-se que o HI neutro tenha se formado após a recombinação $z \sim 1.090$.

É portanto, um indicador de informações sobre a evolução das estruturas desde a época da recombinação ($z \sim 1.090$) até o período da reionização ($z \sim 7$) [57], isso vai desde a *idade das trevas*⁴³ até a formação das primeiras estrelas, um período ainda com poucas informações observacionais. Na Figura 13, pode ser vista a evolução cósmica após o Big Bang até atualidade, onde é mostrado desde quando temos a linha de 21-cm.

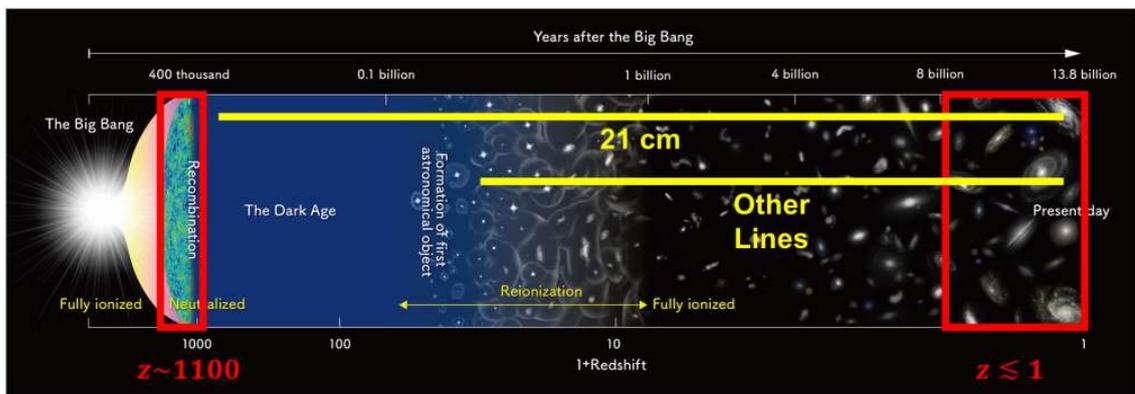


Figura 13 – História do Universo. Os quadros vermelhos mostram os períodos observados pela CMB (à esquerda) e por pesquisas com galáxias (à direita). O mapa mostra alguns dos períodos mais importantes da história cósmica, incluindo o nascimento das primeiras galáxias durante a idade das trevas, a época da reionização e o crescimento das galáxias nas formas que vemos hoje. Linhas amarelas mostram os períodos acessíveis a pesquisas de mapeamento de intensidade: para a linha de 21 cm (em cima) e a outras linhas (em baixo), por exemplo o CO (Monóxido de carbono), Ly α e muitas outras. Fonte: Imagem original de NAOJ [58] modificada por [59].

Todos os átomos ou moléculas emitem ou absorvem radiação em comprimentos de onda específicos devido as transições entre seus estados atômicos ou moleculares. O sinal do HI de 21-cm (linha de 21-cm) é observado por fontes astrofísicas no redshift de emissão e é usado como meio de restringir parâmetros cosmológicos.

⁴³ Dark Ages.

Espera-se a linha de 21-cm forneça informações preciosas sobre as condições iniciais do Universo. Além disso, o estudo das propriedades da linha de 21-cm quando combinados com dados de surveys é considerado um indicador de distâncias cosmológicas, da velocidade de rotação dos discos galácticos e da distribuição da densidade do hidrogênio neutro.

1.9.4.2 Linha de Emissão do HI de 21 cm

O átomo de hidrogênio neutro (HI) emite uma linha espectral no comprimento de onda de $\lambda = 21,11$ cm. Mais precisamente, o spin do elétron no hidrogênio neutro pode sofrer uma transição conhecida como *spin-flip*⁴⁴ onde a propriedade de rotação muda, passando a ser oposto ao do próton no átomo de HI, fazendo com que o átomo vá para um estado de energia mais baixo e emita um fóton de 21 cm, apresentado de maneira simplificada na Figura 14. O oposto também pode ocorrer, ou seja, absorção de um fóton. Isto é, o spin do elétron pode mudar passando a ter mesma orientação que o do próton, trazendo o átomo para um estado de maior energia. Essa transição ocorre entre dois níveis hiperfinos⁴⁵ do estado fundamental do átomo de hidrogênio neutro.

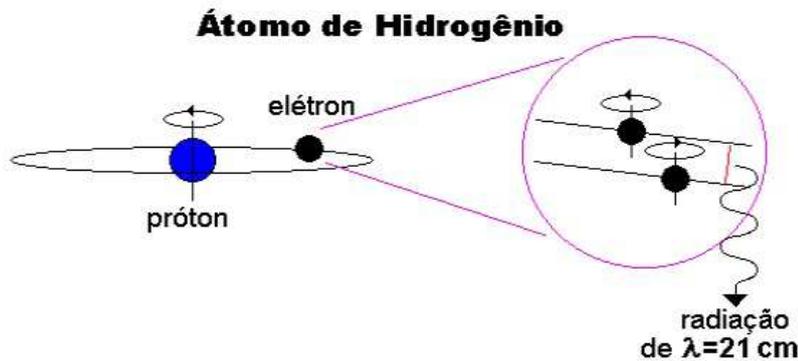


Figura 14 – Transição entre níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de hidrogênio neutro. Os spins do elétron e do próton no átomo de hidrogênio neutro em seu estado fundamental, podem ser paralelos (mesmo sentido de rotação) ou anti-paralelos (sentidos opostos). Fonte: [61].

A energia do fóton emitido equivale à diferença de energia entre os dois níveis, $E_{21} = 5,9 \times 10^{-6} = h\nu_{21}$ eV, o que corresponde a uma frequência de aproximadamente, $\nu_{21} = 1420,4$ MHz. Devido a expansão cósmica, a linha de 21-cm em escalas extragalácticas é medida em um desvio para vermelho (redshift) de acordo com a relação [62],

$$\lambda(z) = \lambda_{21}(1 + z). \quad (1.145)$$

O *spin-flip* pode ocorrer devido as colisões entre diferentes partículas, por exemplo, entre dois átomos de hidrogênio ou um átomo de hidrogênio e um elétron (ou um próton)

⁴⁴ Giro de spin.

⁴⁵ Níveis hiperfinos de energia de um átomo produzem separações em outras linhas espectrais de frequências muito próximas, devido a interação do momento magnético de spin do núcleo com o momento magnético dos elétrons [60].

[62]. Sendo assim, a linha de emissão 21-cm é criada aproximadamente no mesmo período de formação das BAOs. Deste modo, podemos reconstruir as BAOs e retirar informações cosmológicas por meio da observação desta linha.

As observações da linha 21 cm nos fornecem características sobre as galáxias e o período de reionização, além disto, pode nos informar sobre a física fundamental, pois parte do sinal rastreia o campo de densidade, fornecendo informações sobre as massas de neutrinos e as condições iniciais desde a época inicial da inflação cósmica na forma do espectro de potência de 21-cm [62].

As análises usando a linha de 21-cm são feitas medindo o fluxo que chega originado das galáxias que emitem o HI. Este fluxo corresponde à uma temperatura de brilho T_b para vários redshifts e ângulos no céu [63]. De forma similar à CMB, como resultado se tem uma série de mapas do céu com flutuações da temperatura T_b . Mais à frente apresentamos a expressão matemática dessa temperatura, que será importante para definição do espectro de potência angular do HI.

2 Flutuações Cosmológicas

Anteriormente vimos o Modelo FLRW para um Universo homogêneo e isotrópico (Modelo Padrão Cosmológico), que facilita o estudo da dinâmica do Universo. Mas por causa da homogeneidade, galáxias ou outras estruturas não podem ser formadas, pois quando observamos suas distribuições no Universo, notamos não homogeneamente [3]. Na Figura 15 observamos regiões mais densas em comparação com a densidade média de matéria e imensos vazios, de modo que as inhomogeneidades são mais evidenciadas em pequenas escalas¹ (menores que 100 Mpc).

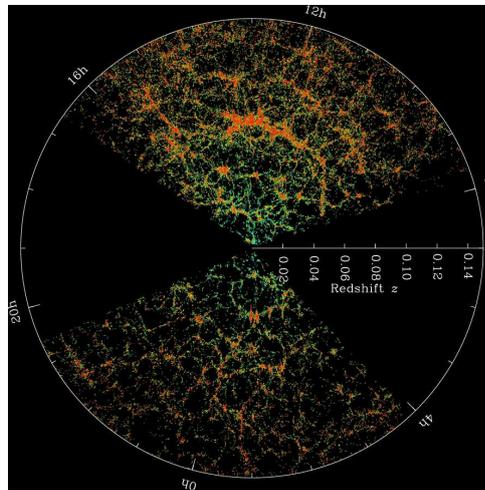


Figura 15 – Mapa 3D da distribuição das galáxias em função do redshift. Cada ponto é uma galáxia e a região em preto é a nossa galáxia. A paleta de cores mostra a densidade local. Fonte: M. Blanton e SDSS III.

De acordo com as flutuações da CMB, apresentadas na Figura 8, o Universo primordial era muito mais homogêneo do que hoje, com média de inhomogeneidade da ordem de 10^{-5} [1], significa que as flutuações de densidade iniciais eram muito pequenas² e supostamente foram amplificadas durante o período inflacionário [64].

Para entendermos como todas as estruturas se formaram e evoluíram com o tempo, precisamos considerar as não-homogeneidades no campo de densidade primordial. Os termos que descrevem as inhomogeneidades e anisotropias são encontrados por meio de uma expansão em primeira ordem das equações da cosmologia introduzidas no capítulo 1, sobre o estado de ordem zero (não-perturbado ou de fundo cosmológico).

A evolução dessas perturbações de densidades primordiais resulta da interação

¹ Isso significa que a homogeneidade é percebida a partir de quando olhamos grandes números de grupos de aglomerados de galáxias, ou seja, observamos o Universo em larga escala.

² Um exemplo simples para entender melhor essa ordem das inhomogeneidades é o seguinte: Imagine que você tenha um monitor de computador que inicialmente está desligado, em seguida ele é iniciado, mas é colocado na tela suspensa, dificilmente será possível identificar as diferenças entre as duas situações.

entre campos de densidade dos diferentes componentes do Universo e a métrica espaço-temporal. Essa interação é governada pelas equações de Einstein perturbadas e pelas equações de Boltzmann. Para obtermos as expressões matemáticas usaremos como base a teoria de perturbações lineares³, uma das mais importantes na cosmologia para explicar o crescimento e evolução das perturbações primordiais [45], uma vez que, se tratam de quantidades muito pequenas.

2.1 Dinâmica da Flutuações

A métrica FLRW para um Universo plano é dada por:

$$d\bar{s}^2 = dt^2 - a^2(t) [dr^2 + r^2 d\Omega^2], \quad (2.1)$$

frequentemente chamamos *espaço-tempo de fundo* (do inglês *background*). Introduzindo a seguinte transformação na métrica,

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.2)$$

em que η é o tempo conforme, ficamos com,

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2(\eta) [d\eta^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j], \quad (2.3)$$

onde $x^\mu = (\eta, r, \theta, \phi)$ e adotamos $c = 1$. Os símbolos de Christoffel, tensor e escalar de Ricci, tensor de Einstein, tensor energia-momentum e equação de Friedmann desta métrica estão expostos no Apêndice B.1. A partir da equação anterior vemos que o tensor métrico deste elemento de linha tem a forma,

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \text{diag}(a^2, -a^2, -a^2, -a^2). \quad (2.4)$$

Essa mudança de variável é relevante, pois o fator de escala se torna um fator conforme e além disso, a métrica FLRW escrita no tempo conforme é similar a métrica de Minkowski multiplicada por $a(\eta)$.

2.1.1 Espaço-tempo perturbado

A perturbação de uma determinada quantidade é dada pela diferença entre o valor que tal quantidade assume no espaço real (perturbado) e o valor de fundo [26]. Para a perturbação da métrica temos,

$$\delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

³ Para estudos mais detalhados veja *Teoria de perturbações Cosmológicas* [65].

Daqui em diante os termos com barra superior denotarão equações da cosmologia padrão não-perturbadas. O elemento de linha para um espaço-tempo perturbado torna-se,

$$ds^2 = [\bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}(x^\lambda)] dx^\mu dx^\nu, \quad (2.6)$$

tal que $|\delta g_{\mu\nu}| \ll |\bar{g}_{\mu\nu}|$.

É conveniente reescrevermos as equações de campo da relatividade para as perturbações partindo das equações de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu},$$

contraíndo com a métrica $g^{\mu\nu}$ obtemos o valor do escalar de Ricci,

$$R = -8\pi GT, \quad (2.7)$$

onde usamos o fato de $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$. Assim, obtemos:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \quad (2.8)$$

variando esta equação, determinamos

$$\delta R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(\delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta g_{\mu\nu}\bar{T} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\delta T \right). \quad (2.9)$$

Usando a equação (2.7) e o escalar de Ricci (B.2), encontramos a perturbação da equação de Einstein em 1ª ordem, calculada no tempo conforme, ou seja,

$$\delta R_{\mu\nu} + 3 \left(\frac{\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2}{a^2} \right) \delta g_{\mu\nu} = 8\pi G \left(\delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\delta T \right), \quad (2.10)$$

na qual $\mathcal{H} = aH$ e $\mathcal{H}' = \partial\mathcal{H}/\partial\eta$. As definições dos elementos geométricos perturbados desta equação se encontram no Apêndice B.2.

Segundo Mukhanov 2005 [45], a contribuição perturbativa $\delta g_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico composto por 10 equações linearmente independentes, que pode ser dividido em 3 categorias: escalares (Ψ), vetoriais (C_i) e tensoriais (γ_{ij}). Tais componentes são definidas segundo,

$$\begin{aligned} \delta g_{00} &= 2a^2\Psi, \\ \delta g_{0i} &= 2a^2C_i, \\ \delta g_{ij} &= a^2\gamma_{ij}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Devemos decompor essas perturbações em partes irreduzíveis⁴, procedimento este que resulta em:

$$\begin{aligned} \delta g_{00} &= 2a^2\Psi, \\ \delta g_{0i} &= 2a^2(\partial_i B + \hat{S}_i), \\ \delta g_{ij} &= a^2(-2\Phi\delta_{ij} + 2\partial_i\partial_j E + \partial_j\hat{F}_i + \partial_i\hat{F}_j + \hat{D}_{ij}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

⁴ Uma abordagem mais detalhada sobre esta decomposição pode ser vista nas referências [45][26][24].

Logo, a parte temporal já se encontrava na sua forma irreduzível, pois depende apenas do escalar Ψ . Enquanto δg_{0i} é função do 3-vetor \hat{S}_i de divergência nula $\partial_i \hat{S}^i = 0$ e pelo divergente do escalar B . O termo δg_{ij} tem dependência com os escalares Φ e E , o 3-vetor \hat{F}_i e o tensor simétrico \hat{D}_{ij} , que possuem propriedades de divergência nula: $\partial_i \hat{F}^i = 0$, $\partial_i \hat{D}^i_j = 0$ e traço nulo $\hat{D}^i_i = 0$.

Essa é a chamada decomposição SVT⁵ (escalar-vetorial-tensorial) e mostra-se como uma ferramenta útil para estudar a evolução das perturbações, pois os modos escalares, vetoriais e tensoriais não se misturam e podem ser analisados individualmente. Cada um destes modos produzirá efeitos distintos, descritos como [26, 45]:

Modos escalares: São perturbações ocasionadas pelas inhomogeneidades na densidade de energia, que exibem uma instabilidade gravitacional e dão origem às estruturas do Universo. Essas perturbações são escritas como,

$$\delta g_{\mu\nu}^{(e)} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 2\Psi & \partial_i B \\ \partial_i B & -2(\Phi\delta_{ij} - \partial_i\partial_j E) \end{pmatrix}; \quad (2.13)$$

Modos vetoriais: São perturbações relacionadas aos movimentos rotacionais do fluido cosmológico, responsáveis por produzir campos magnéticos e costumam decair rapidamente, não tendo assim interesse cosmológico. A perturbação do tensor métrico é escrita como,

$$\delta g_{\mu\nu}^{(v)} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 0 & \hat{S}_i \\ \hat{S}_i & \partial_i \hat{F}_i + \partial_i \hat{F}_j \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Modos tensoriais: São perturbações que produzem as ondas gravitacionais. Na aproximação linear, as ondas gravitacionais não induzem nenhuma perturbação no fluido perfeito. Essas perturbações são escritas como,

$$\delta g_{\mu\nu}^{(t)} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{D}_{ij} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Somando as perturbações do tensor métrico definidas acima e o tensor métrico de fundo (2.4), podemos escrever a métrica (2.6) da seguinte forma,

$$ds^2 = a^2(\eta)[(1 + 2\Psi)d\eta^2 + 2(\partial_i B + \hat{S}_i)dx^i d\eta - (1 + 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j + (2\partial_i\partial_j E + \partial_j \hat{F}_i + \partial_i \hat{F}_j + \hat{D}_{ij})dx^i dx^j]. \quad (2.16)$$

2.1.2 Escolha de Gauge

Para analisarmos as perturbações cosmológicas ocorridas na densidade de energia, precisamos estudar a diferença da evolução destas perturbações num mesmo ponto do

⁵ do inglês - scale-vector-tensor.

espaço-tempo físico (não homogêneo e anisotrópico, onde ocorrem as perturbações), e no espaço-tempo homogêneo e isotrópico descrito pela métrica de fundo FLRW. Quando fazemos esta comparação percebemos que estamos lidando com geometrias diferentes. Logo, se faz necessário uma transformação de coordenadas entre os dois referenciais, ou seja, uma transformação de calibre (ou transformação de Gauge), para descrever de forma unívoca o mesmo ponto em dois espaço-tempos perturbados. Esta correspondência é chamada de *escolha de gauge* [45].

As perturbações são definidas num mesmo ponto como:

$$\delta Q(\eta, x^\mu) = Q(\eta, x^\mu) - \bar{Q}(\eta, x^\mu), \quad (2.17)$$

sendo \bar{Q} a quantidade não perturbada.

Sob as transformações de gauge as perturbações de um escalar s , um 4-vetor v^μ e tensores $T_{\mu\nu}$ (covariante) e $T^{\mu\nu}$ (contravariante) são definidas das seguintes formas:

$$\begin{aligned} \delta s|_{(A)} &= \delta s|_{(B)} - \partial_\mu \bar{s} \delta x^\mu \\ \delta v^\mu|_{(A)} &= \delta v^\mu|_{(B)} - \partial_\lambda \delta x^\mu \bar{v}^\lambda - \partial_\lambda \bar{v}^\lambda \delta x^\lambda \\ \delta T_{\mu\nu}|_{(A)} &= \delta T_{\mu\nu}|_{(B)} - \partial_\nu \delta x^\beta \bar{T}_{\mu\beta} - \partial_\mu \delta x^\alpha \bar{T}_{\alpha\nu} - \partial_\rho \bar{T}_{\mu\nu} \delta x^\rho \\ \delta T^{\mu\nu}|_{(A)} &= \delta T^{\mu\nu}|_{(B)} + \partial_\beta \delta x^\nu \bar{T}^{\mu\beta} + \partial_\alpha \delta x^\mu \bar{T}^{\alpha\nu} - \partial_\rho \bar{T}^{\mu\nu} \delta x^\rho, \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde \bar{s} , \bar{v}^μ , $\bar{T}_{\mu\nu}$ e $\bar{T}^{\mu\nu}$ são elementos de fundo FLRW, enquanto A e B são sistemas de coordenadas perturbados genéricos [24, 26].

Aplicando a transformação de gauge no tensor métrico perturbado $g_{\mu\nu}$, nota-se que no novo sistema de coordenadas as perturbações também podem ser divididas em variações escalares, vetoriais e tensoriais. Desta maneira, podemos analisá-las separadamente [45]. A partir de então, apenas as perturbações escalares serão consideradas, pois elas são as responsáveis pela formação das estruturas em largas escalas.

2.1.3 Perturbações Escalares

Considerando a contribuição das perturbações escalares na métrica (2.16), descritas pelos campos Ψ , Φ , B e E , temos

$$ds^2 = a^2(\eta)[(1 + 2\Psi)d\eta^2 + 2\partial_i B dx^i d\eta + (2\partial_i \partial_j E - (1 + 2\Phi)\delta_{ij})dx^i dx^j]. \quad (2.19)$$

Essa métrica pode ser reescrita no *gauge Newtoniano*⁶, onde $E = B = 0$. Assim,

$$ds^2 = a^2(\eta)[(1 + 2\Psi)d\eta^2 - (1 + 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j]. \quad (2.20)$$

⁶ É uma escolha de calibre que deixa o elemento de linha FLRW sem termos cruzados, ou seja, possui apenas as componentes temporais e espaciais.

Para o caso particular em que $\Psi = \Phi$, ficamos com uma variável de perturbação, então nos deparamos com a generalização do potencial gravitacional Newtoniano⁷. Outro motivo para escolha deste gauge é que o elemento de linha implica em dilatações no tempo e espaço devido a perturbação.

O próximo passo é encontrar os tensores perturbados, cujos resultados estão no Apêndice B, para então, calcular as equações de Einstein e em seguida obter o tensor energia-momento perturbado. Ao fazer isto, completa-se a descrição da dinâmica das perturbações.

2.2 Evolução da perturbações

Consideremos pequenas flutuações em torno da densidade média dos constituintes do Universo primordial,

$$\begin{aligned}\rho(\vec{x}, t) &= \bar{\rho}(t) + \delta\rho(\vec{x}, t), \\ \rho(\vec{x}, t) &= \bar{\rho}(t) + \bar{\rho}(t)\delta(\vec{x}, t), \\ \rho(\vec{x}, t) &= \bar{\rho}(t)[1 + \delta(\vec{x}, t)],\end{aligned}\tag{2.21}$$

onde $\delta(\vec{x}, t) \ll 1$, $\bar{\rho}(t)$ é a densidade média descrita pela cosmologia padrão e $\delta\rho = \bar{\rho}\delta$. Assim, o contraste de densidade pode ser escrito como,

$$\delta(\vec{x}, t) = \frac{\rho(\vec{x}, t)}{\bar{\rho}(t)} - 1.\tag{2.22}$$

Trabalhamos no regime linear, então as perturbações são calculadas perturbando até primeira ordem o espaço-tempo FLRW descrito pela métrica (2.20).

Partimos da hipótese de fluidos não interagentes⁸ e depois faremos uma breve discussão para casos em que ME e EE estão acopladas no setor escuro. As equações a seguir podem ser usadas para descrever a evolução de um único fluido ou mais.

A 4-velocidade total perturbada é dada por [66]:

$$\begin{aligned}U^\mu &= [a^{-1}(1 - \Psi), a^{-1}v^i], \\ U_\mu &= g_{\mu\nu}U^\nu = [a(1 + \Psi), -av_i].\end{aligned}\tag{2.23}$$

onde v^i é a 3-velocidade e a 4-velocidade está sujeita ao vínculo $U_\mu U^\mu = 1$.

Consideramos o tensor energia-momento não-perturbado para um fluido perfeito com 4-velocidade $\bar{u}^\mu = (1, 0, 0, 0)$, equação de estado⁹ e velocidade do som adiabática como

⁷ O que justifica o nome deste sistema de coordenadas, como *gauge Newtoniano*.

⁸ Neste caso, o tensor energia-momento total será dado pela soma dos tensores energia-momento de cada fluido, cada um sendo covariantemente conservado [34].

⁹ A pressão é uma função da densidade de energia e da entropia, $p(\rho, S)$, mas as perturbações observadas na CMB são compatíveis com a previsão de perturbações adiabáticas [67], desta forma podemos descartar os termos relacionados a entropia. Consideraremos apenas fluidos barotrópicos, ou seja, $p(\rho)$ a pressão é uma função apenas da densidade.

[68],

$$\omega = \bar{p}/\bar{\rho}, \quad (2.24)$$

$$c_s^2 = \frac{\bar{p}'}{\bar{\rho}'} = \omega - \frac{\omega'}{3\mathcal{H}(1+\omega)}, \quad (2.25)$$

assim temos:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{\mu\nu} &= (\bar{\rho} + \bar{p})\bar{u}_\mu\bar{u}_\nu - \bar{p}\bar{g}_{\mu\nu} = \bar{\rho}(1+\omega)\bar{u}_\mu\bar{u}_\nu - \omega\bar{\rho}\bar{g}_{\mu\nu}, \\ \bar{T}_\nu^\mu &= \bar{\rho}(1+\omega)\bar{u}^\mu\bar{u}_\nu - \omega\bar{\rho}\delta_\nu^\mu, \end{aligned} \quad (2.26)$$

perturbando essa equação,

$$\begin{aligned} \delta T_\nu^\mu &= \delta\rho\bar{u}^\mu\bar{u}_\nu + \delta p\bar{u}^\mu\bar{u}_\nu + (\bar{\rho} + \bar{p})\delta U^\mu\bar{u}_\nu + (\bar{\rho} + \bar{p})\bar{u}^\mu\delta U_\nu - \delta p\delta_\nu^\mu, \\ \delta T_\nu^\mu &= \bar{\rho}[\delta(1+c_s^2)\bar{u}^\mu\bar{u}_\nu + (1+\omega)(\delta U^\mu\bar{u}_\nu + \bar{u}^\mu\delta U_\nu) - c_s^2\delta_\nu^\mu], \end{aligned} \quad (2.27)$$

aqui introduzimos a velocidade do som¹⁰ $c_s^2 \equiv \delta p/\delta\rho$. Usando a parte perturbada das equações (2.23), juntamente com a 4-velocidade de fundo, encontramos:

$$\begin{aligned} \delta T_0^0 &= \bar{\rho}\delta, \\ \delta T_i^0 &= (\bar{\rho} + \bar{p})a^{-1}\delta U_i = -\bar{\rho}(1+\omega)v_i, & \delta T_0^i &= \bar{\rho}(1+\omega)v^i, \\ \delta T_j^i &= -c_s^2\bar{\rho}\delta\delta_j^i. \end{aligned} \quad (2.28)$$

O tensor energia-momento total perturbado é escrito como:

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \bar{\rho}(1+\delta), \\ T_i^0 &= -\bar{\rho}(1+\omega)v_i, & T_0^i &= \bar{\rho}(1+\omega)v^i \\ T_j^i &= -\bar{\rho}(\omega + c_s^2\delta)\delta_j^i. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Usamos $\delta\rho \equiv \bar{\rho}\delta$ e δp para descrever as grandezas perturbadas.

O tensor energia-momento (2.29) satisfaz a lei da conservação,

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T_\nu^\mu &= 0, \\ \partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\mu\rho}^\mu T_\nu^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\rho T_\rho^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Substituindo nessa equação, o tensor energia-momento total perturbado (2.29) e os símbolos de Christoffel totais perturbados, com (B.1) e (B.4) no Apêndice B, obtemos as equações da conservação de energia que descrevem a evolução das perturbações e da velocidade. Calculando primeiro para $\nu = 0$, temos:

$$\begin{aligned} (\delta\rho)' + (\bar{\rho} + \bar{p})(\partial_i v^i - 3\Phi') + 3\mathcal{H}(\delta\rho + \delta p) &= 0, \\ \bar{\rho}'\delta + \bar{\rho}\delta' + \bar{\rho}(\partial_i v^i - 3\Phi')(1+\omega) + 3\mathcal{H}\bar{\rho}\delta(1+c_s^2) &= 0, \\ \delta' + 3\mathcal{H}(c_s^2 - \omega)\delta + (\theta - 3\Phi')(1+\omega) &= 0, \end{aligned} \quad (2.31)$$

¹⁰ A velocidade do som nesta forma é depende do gauge, e é escrita desta maneira mais geral devido aos processos dissipativos que geram perturbações de entropia no fundo cosmológico, contudo nós desprezamos essas perturbações.

onde $\theta \equiv \partial_i v^i$ é a divergência da velocidade e a aspa significa derivada com respeito ao tempo conforme η . Utilizamos a equação de ordem zero,

$$\bar{\rho}' + 3\mathcal{H}\bar{\rho}(1 + \omega) = 0, \quad (2.32)$$

para obtermos a equação (2.31) que é de 1ª ordem e chamada de equação da continuidade perturbada. Outra relação é:

$$\frac{\omega'}{(1 + \omega)} = -3\mathcal{H}(c_s^2 - \omega), \quad (2.33)$$

Calculando para as coordenadas espaciais $\nu = i$, a equação de conservação (2.30) fornece:

$$\begin{aligned} -[v'_i(\bar{\rho} + \bar{p})]' - (\bar{\rho} + p_\lambda)(4\mathcal{H}v_i + \partial_i\Psi) - \partial_i\delta p &= 0, \\ -v'_i - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}(1 + \omega)}v_i - \frac{\bar{p}'}{\bar{\rho}(1 + \omega)}v_i - \frac{\partial_i\delta p}{\bar{\rho}(1 + \omega)} - 4\mathcal{H}v_i - \partial_i\Psi &= 0, \\ -v'_i + 3\mathcal{H}v_i - \frac{\omega'\bar{\rho}}{\bar{\rho}(1 + \omega)}v_i + 3\mathcal{H}\omega v_i - \frac{\partial_i\delta p}{\bar{\rho}(1 + \omega)} - 4\mathcal{H}v_i - \partial_i\Psi &= 0, \\ v'_i + \left[\mathcal{H}(1 - 3\omega) + \frac{\omega'}{(1 + \omega)} \right] v_i + \frac{c_s^2}{(1 + \omega)}\partial_i\delta + \partial_i\Psi &= 0, \end{aligned} \quad (2.34)$$

em que usou-se as equações (2.32) e (2.33).

Para a divergência, temos:

$$\theta' + \left[\mathcal{H}(1 - 3\omega) + \frac{\omega'}{(1 + \omega)} \right] \theta + \frac{c_s^2}{(1 + \omega)}\nabla^2\delta + \nabla^2\Psi = 0, \quad (2.35)$$

essa equação descreve a evolução da velocidade de um fluido cosmológico.

Escrevendo as equações de Einstein perturbadas através de,

$$\delta G_\nu^\mu = 8\pi G\delta T_\nu^\mu, \quad (2.36)$$

e usando os tensores perturbados (B.6) e (2.28) encontramos:

$$(00) \longrightarrow \nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Psi + \Phi') = 4\pi G a^2 \bar{\rho}\delta \quad (2.37)$$

$$(0i) \longrightarrow \nabla^2(\Phi' + \mathcal{H}\Psi) = -4\pi G a^2 \bar{\rho}(1 + \omega)\theta, \quad (2.38)$$

$$(i = j) \longrightarrow \Phi'' + \mathcal{H}(2\Phi' + \Psi') + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi G a^2 c_s^2 \bar{\rho}\delta, \quad (2.39)$$

$$(i \neq j) \longrightarrow \Psi = \Phi. \quad (2.40)$$

Para facilitar escrevemos as equações encontradas anteriormente no espaço de Fourier, usando as seguintes relações:

$$\nabla_j \longrightarrow ik^j, \quad (2.41)$$

$$\nabla^2 \equiv \nabla_i \nabla^i \longrightarrow -k^2, \quad (2.42)$$

onde k é o número de onda comóvel que se mantém fixo para cada modo de Fourier. As perturbações também são expandidas em função de suas transformadas de Fourier, no Apêndice B.7 e utilizando a equação (2.40)¹¹, obtemos:

$$\delta' + 3\mathcal{H}(c_s^2 - \omega)\delta = -(\theta - 3\Phi')(1 + \omega), \quad (2.43)$$

$$\theta' + \left[\mathcal{H}(1 - 3\omega) + \frac{\omega'}{(1 + \omega)} \right] \theta = \frac{c_s^2 k^2}{(1 + \omega)} \delta + k^2 \Phi, \quad (2.44)$$

$$k^2 \Phi + 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Phi') = -4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta, \quad (2.45)$$

$$k^2(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) = 4\pi G a^2 \bar{\rho}(1 + \omega)\theta, \quad (2.46)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi G a^2 c_s^2 \bar{\rho} \delta, \quad (2.47)$$

onde $\theta = ik^j v_j$. Todas essas equações são úteis para entendermos como as perturbações evoluem.

Substituindo $\delta\rho = \frac{\delta p}{c_s^2}$ na equação de Einstein (00), depois igualando-a com a equação de Einstein (ij) e usando o fato de $\Phi = \Psi$, encontramos a equação que descreve a evolução do potencial gravitacional:

$$\begin{aligned} \Phi'' + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\Phi' - c_s^2 \nabla^2 \Phi + [2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2(1 + 3c_s^2)]\Phi &= 0, \\ \Phi'' + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\Phi' + c_s^2 k^2 \Phi + [2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2(1 + 3c_s^2)]\Phi &= 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

No espaço de Fourier todas as equações de perturbações irão depender do número de onda k (deixaremos isto implícito) e do parâmetro conforme de Hubble \mathcal{H} . Temos uma relação do comprimento de onda conforme da perturbação e do número de onda, dada por: $\lambda \propto \frac{1}{k}$, mais precisamente $k = \frac{2\pi a}{\lambda}$. Com base nisto é interessante definirmos dois regimes:

- **Modo de super-horizonte** (ou super-Hubble): os comprimentos de ondas são maiores que o raio de Hubble: $\lambda > H^{-1}$;
- **Modo de sub-horizonte** (ou sub-Hubble): os comprimentos de onda são menores de o raio de Hubble: $\lambda < H^{-1}$.

Na Figura 16 é possível visualizar a evolução do raio de Hubble para três comprimentos de ondas fictícios. O tempo em que um modo de Fourier sai do raio do Hubble depende do número de onda. Eles voltarão a entrar no raio do Hubble mais tarde, durante as épocas dominadas pela radiação ou pela matéria, porque o raio do Hubble se comporta de maneira diferente durante essas épocas¹²:

- **Inflação cósmica:** $H^{-1} \simeq \text{constante}$;

¹¹ Neste caso, reconhecemos a variável Φ como um análogo ao potencial gravitacional newtoniano.

¹² No período inflacionário, todos os modos são sub-Hubble, isto é uma característica específica deste cenário, sem ele seria inviável a formação de estruturas.

- Era de dominação da radiação: $H^{-1} \propto a^2$;
- Era de dominação da Matéria: $H^{-1} \propto a^{3/2}$.

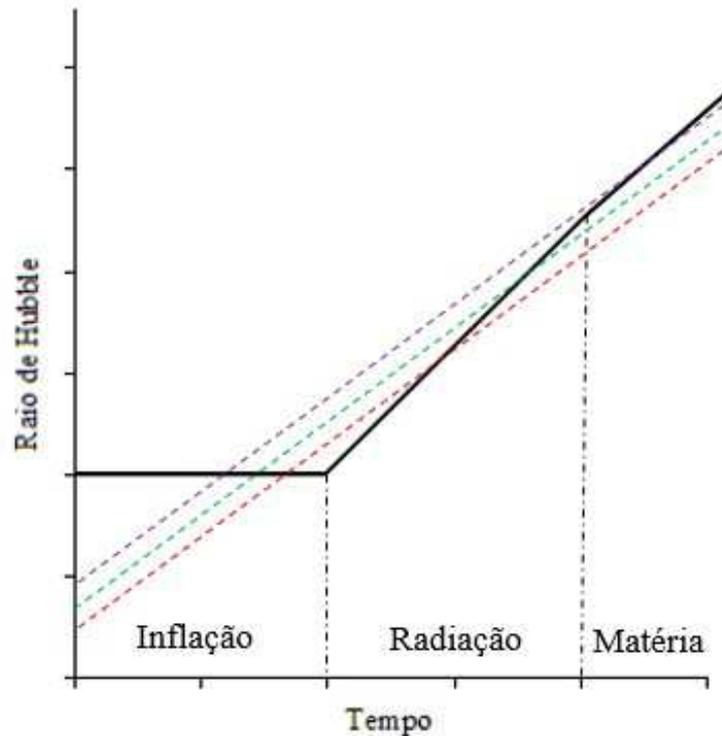


Figura 16 – Evolução do raio de Hubble H^{-1} (linha sólida preta) versus o tempo fator de escala a durante o período de inflação cósmica, era da radiação e era da matéria. As linhas tracejadas são os modos de Fourier onde os números de onda são λ_1 (linha vermelha), λ_2 (linha verde) $> \lambda_1$ e λ_3 (linha roxa) $> \lambda_2$.

O comprimento de onda que entra no raio de Hubble no período de equivalência é denotado por: λ_{eq} . Quando o comprimento de onda se torna menor que o raio de Hubble, as interações entre os componentes acontecem, favorecendo a formações de estruturas cósmicas. Podemos perceber que as perturbações crescem dependendo da expansão do Universo.

2.2.1 Função de Crescimento e taxa de crescimento

De acordo com a teoria das perturbações lineares, as flutuações com comprimentos de onda muito menores que o horizonte de Hubble (sub-horizonte), ou seja, $k \gg \mathcal{H}$, crescerão indefinidamente na densidade de energia se não houver uma força que impeça a atração causada pela gravidade. Esse colapso termina em algum momento, se o fluido possuir pressão, significa que durante a era da radiação não houve possibilidade das perturbações crescerem o suficiente para formar as estruturas [69].

Aqui neste tópico iremos abordar sobre a função de crescimento, que descreve a evolução das flutuações e taxa de crescimento que mede o quanto as perturbações foram amplificadas, sendo elas de extrema importância em nosso estudo. Para isto devemos avaliar a partir da era de dominação da matéria.

Iniciando pelo fato de estarmos estudando modos de sub-horizonte ($k \gg \mathcal{H}$), a equação (2.45) se torna:

$$k^2\Phi = -4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta, \quad (2.49)$$

que corresponde a equação de Poisson. Com as definições de densidade crítica (1.57) e parâmetro de densidade (1.58) podemos encontrar a relação,

$$k^2\Phi = -\frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Omega_m\delta_m. \quad (2.50)$$

Para fluidos não interagentes (evoluem de forma independente) podemos usar o parâmetro de Hubble (1.94). Derivando com relação do tempo conforme temos,

$$\Phi' = -\frac{3}{2}\frac{\mathcal{H}^2}{k^2}\left(\frac{2\Omega_m\mathcal{H}'}{\mathcal{H}} + \Omega_m\frac{\delta'_m}{\delta_m}\right)\delta_m. \quad (2.51)$$

2.2.2 Um fluido de Matéria

Considerando um fluido¹³ sem pressão e que tenha uma pequena velocidade do som no nível perturbativo,

$$\omega = 0, \quad (2.52)$$

$$c_s^2 \ll 1. \quad (2.53)$$

Usando (2.52) e (2.53) em (2.44),

$$\theta'_m + \mathcal{H}\theta_m - c_{s,m}^2 k^2 \delta_m - k^2 \Phi, = 0, \quad (2.54)$$

e utilizando (2.52), (2.53) e (2.51) em (2.43),

$$\begin{aligned} \delta'_m + \theta_m - 3\Phi' &= 0, \\ \delta'_m + \theta_m + \frac{9}{2}\frac{\mathcal{H}^2}{k^2}\left(\frac{2\Omega_m\mathcal{H}'}{\mathcal{H}} + \Omega_m\frac{\delta'_m}{\delta_m}\right)\delta_m &= 0, \\ \delta'_m + \theta_m &= 0. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Agora derivando com relação ao tempo conforme a equação (2.55), depois substituindo θ'_m (2.54) e (2.50), achamos:

$$\delta''_m - \mathcal{H}\theta_m + k^2\Phi + c_{s,m}^2 k^2 \delta_m = 0, \quad (2.56)$$

$$\delta''_m + \mathcal{H}\delta'_m + \left(c_{s,m}^2 k^2 - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Omega_m\right)\delta_m = 0, \quad (2.57)$$

¹³ Aqui vamos tratar de um caso genérico contendo um único fluido de matéria e depois generalizar para casos mais reais.

essa equação¹⁴ nos mostra que se: $c_{s,m}^2 k^2 - \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \Omega_m > 0$, a perturbação não crescerá [69]. Quando $c_{s,m} k \ll \mathcal{H}$, as perturbações crescem livremente, assim encontramos a expressão que descreve as evoluções das perturbações de matéria,

$$\delta_m'' + \mathcal{H} \delta_m' - \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \Omega_m \delta_m = 0. \quad (2.58)$$

Vemos que a equação diferencial acima é de segunda ordem, então possui duas soluções possíveis e não envolve derivadas com relação as coordenadas espaciais para $\delta(\eta, \vec{x})$, o que permite decompor a solução da seguinte forma,

$$\delta_m(\eta, \vec{x}) = \epsilon_m^+(\vec{x}) D_m^+(\eta) + \epsilon_m^-(\vec{x}) D_m^-(\eta), \quad (2.59)$$

onde D_m^- é o modo de decaimento¹⁵ e D_m^+ o modo de crescimento, ϵ_m^+ e ϵ_m^- são funções arbitrárias para o campo de contraste de densidade em algum momento, escolhidas de acordo com a normalização dos modos de crescimento e decaimento, por exemplo:

$$\epsilon_m^+(\vec{x}) \longrightarrow \frac{\delta_{m,0}(\vec{x})}{D_{m,0}^+}, \quad (2.60)$$

onde $\delta_{m,0}(\vec{x})$ é a perturbação de densidade no tempo atual e $D_{m,0}^+$ é a função de crescimento da matéria hoje, convencionada como $D_{m,0}^+ = 1$. É comum escrevermos as expressões cosmológicas em função do redshift z ou fator de escala a ,

$$\begin{aligned} \delta_m(z, \vec{x}) &= \frac{\delta_{m,0}(\vec{x})}{D_{m,0}^+} D_m^+(z), \\ &= \delta_{m,0}(\vec{x}) D_m^+(z) = \delta_{m,0}(\vec{x}) D(z), \end{aligned} \quad (2.61)$$

onde nós suprimimos o índices + e m da função de crescimento, escrevendo apenas $D(z)$ para deixar a expressão mais limpa. Portanto,

$$\delta_m \propto D(z) \quad \text{ou} \quad D(a). \quad (2.62)$$

É conveniente definir a *taxa de crescimento* linear adimensional de matéria [52],

$$f(a) \equiv \frac{d \ln \delta_m}{d \ln a}, \quad \text{ou} \quad f(a) \equiv \frac{d \ln D}{d \ln a}. \quad (2.63)$$

essa taxa determina o fluxo da velocidade peculiar e as distorções de redshifts. Em escalas lineares, as velocidades peculiares são obtidas através da equação de continuidade (2.55), onde podemos escrever em função de f usando a relação (B.64), logo:

$$\mathcal{H} f \delta_m + \theta_m = 0. \quad (2.64)$$

¹⁴ No limite de Minkowski $\mathcal{H} \rightarrow 0$ essa expressão se reduz a equação clássica para um fluido $\delta'' + c_s^2 k^2 \delta = 0$.

¹⁵ Nos últimos tempos, o modo de decaimento de torna irrelevante, pois a solução de crescimento é dominante.

As vezes é melhor escrever a equação (2.58) no tempo cósmico t , através das relações (B.62) e (B.63). Assim,

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - \frac{3}{2}\Omega_m H^2 \delta_m = 0, \quad (2.65)$$

ou através do número de e-folds $N = \ln a$ como:

$$\frac{d^2 \delta_m}{dN^2} + \left(\frac{d\mathcal{H}}{dN} + 1 \right) \frac{d\delta_m}{dN} - \frac{3}{2}\Omega_m \delta_m = 0, \quad (2.66)$$

onde usamos a relação $\delta_m(\ln a) \equiv \delta_m/\mathcal{H}$. Pela relação (B.65) temos:

$$\frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\omega \quad (2.67)$$

utilizamos a notação ($'$) para $d()/dN$. Então, para $\omega = 0$ e $\Omega_m = 1$ (Universo de Einstein d'Sitter) temos,

$$\delta_m'' - \frac{1}{2}\delta_m' - \frac{3}{2}\delta_m = 0, \quad (2.68)$$

cujas soluções são do tipo: $\delta_m = Ae^{nN} = Aa^n$, onde A e n são constantes. Logo,

$$\delta_m(a) = A_1 a + A_2 a^{-3/2}, \quad (2.69)$$

a função de crescimento é: $D(a) = A_1 a$. E em termos do tempo cósmico: $D(t) = A_1 t^{3/2}$. Isso quer dizer que as perturbações crescem proporcionalmente com o fator de escala. Para um Universo vazio a função de crescimento é: $D(a) = \text{constante}$, não há crescimento.

2.2.3 Dois Fluidos: matéria e radiação

Para um Universo contendo radiação ($\omega = 1/3$ e $c_s^2 \ll 1$) e matéria ($\omega = 0$ e $c_s^2 \ll 1$), a matéria é composta por ME e matéria bariônica que possuem a mesma equação de estado, de forma que interagem apenas gravitacionalmente, encontramos um conjunto de equações para as perturbações e velocidade das duas componentes, seguimos a mesma abordagem feita para o caso de apenas uma componente na seção anterior. Então,

$$\delta'_m = -\theta_m + 3\Phi', \quad (2.70)$$

$$\theta'_m = -\mathcal{H}\theta_m + k^2(c_s^2\delta + \Phi), \quad (2.71)$$

$$\delta'_r = -\frac{4}{3}(\theta_r + 3\Phi'), \quad (2.72)$$

$$\theta'_r = k^2 \left(\frac{3}{4}c_s^2\delta_r - \Phi \right), \quad (2.73)$$

$$k^2(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) = -4\pi G a^2 (1 + \omega_{ef}) \bar{\rho}_t \theta_t, \quad (2.74)$$

$$k^2\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) = -4\pi G a^2 \bar{\rho}_t \delta_t, \quad (2.75)$$

onde o sub-índice t é para denotar a quantidade total das funções,

$$\bar{\rho}_t \delta_t = \bar{\rho}_m \delta_m + \bar{\rho}_r \delta_r, \quad (2.76)$$

$$\omega_{ef} = \frac{\bar{\rho}_r/3}{\bar{\rho}_m + \bar{\rho}_r}, \quad (2.77)$$

$$\theta_t = \theta_m + \theta_r. \quad (2.78)$$

No sub-Hubble ($k \gg \mathcal{H}$) temos:

$$k^2 \Phi = -\frac{3}{2} \mathcal{H}^2 (\Omega_m \delta_m + \Omega_r \delta_r). \quad (2.79)$$

De forma similar à (2.58) nós encontramos as equações para perturbações de sub-horizonte das componentes de matéria e radiação,

$$\delta_m'' + \mathcal{H} \delta_m' - \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 (\Omega_m \delta_m + \Omega_r \delta_r) = 0, \quad (2.80)$$

$$\delta_r'' + \frac{k^2}{3} \delta_r = 0. \quad (2.81)$$

As soluções são semelhantes as encontradas anteriormente, pois para a era da radiação $\Omega_m \approx 0$ e $\Omega \approx 1$. E as perturbações de radiação oscilam em torno de zero, assim a média da radiação é $\langle \delta_r \rangle \approx 0$ [69] e quando aplicada na primeira equação temos: $\Omega_m \delta_m + \Omega_r \delta_r \approx 0$, restando apenas:

$$\delta_m'' + \mathcal{H} \delta_m' \approx 0, \quad (2.82)$$

cujas soluções são dadas por [69]:

$$\delta_m = C_1 + C_2 \int a^{-1} d\eta, \quad (2.83)$$

vemos que a solução fornece uma função de decaimento com correção logarítmica dada pela integral, fazendo com que as perturbações de matéria evoluam apenas levemente.

Durante a era de dominação da matéria temos: $|\Omega_m \delta_m| \gg |\Omega_r \delta_r|$, fornecendo uma solução similar à (2.69),

$$\delta_m \propto a. \quad (2.84)$$

Outro ponto importante é que a matéria é composta por bárions e ME, pois ambas possuem as equações de perturbações semelhantes, contudo os bárions correspondem a uma pequena fração da densidade de matéria: $|\Omega_c \delta_c| \gg |\Omega_b \delta_b|$. Fazendo com que as perturbações para os bárions se acoplem as de ME¹⁶, de modo que poderíamos escrever δ_m como δ_c .

2.2.4 Matéria e constante cosmológica

Para os Modelos onde considera-se a contribuição da matéria e uma constante cosmológica diferente de zero, a solução de (2.58) é dada por [70]:

$$D(a) = \frac{5\Omega_{m,0}}{2} \frac{H(a)}{H_0} \int_0^a \frac{da'}{(a'H(a')/H_0)^3}, \quad (2.85)$$

¹⁶ Isso explica o motivo pelo qual os bárions caem no poço potencial de ME [69].

onde $H(a)$ é dado por (1.88). Essa análise é feita na fase atual de expansão do Universo, então a formulação matemática é expressa em termo dos valores atuais parâmetros cosmológicos, de modo que negligenciamos a influência da radiação. Fizemos a demonstração desta equação no Apêndice B.12.

A taxa de crescimento para este Modelo pode ser escrita como [71]:

$$f(\Omega_m, \Omega_\Lambda) \approx \Omega_m^{5/2} \quad (2.86)$$

para $0,001 \leq \Omega_m \leq 1$.

A equação de crescimento (2.85) é muito usada nos estudos sobre estrutura em larga-escala e implementada em códigos que resolvem as equações cosmológicas acopladas como o CLASS¹⁷ e CAMB¹⁸. Casos em que se considera a contribuição de todas as componentes ou Modelos em que interagem de forma não-gravitacional¹⁹ só podem ser resolvidas computacionalmente, pois temos um número muito grande de equações acopladas.

Fizemos uma abordagem bem geral a respeito das equações de perturbações e de velocidade das componentes do Universo, levamos em consideração somente casos em que a interação é apenas gravitacional. Contudo, no estudo de perturbações existem um conjunto de equações para as componentes que podem levar em conta interações não gravitacionais, como por exemplo, antes do desacoplamento, quando os bárions e fótons formavam o fluido fóton-bárion. Que podem ser usadas para analisar a formação de elementos leves, a recombinação de prótons e elétrons em átomos de hidrogênio neutros e muito mais. Neste caso, as distribuições de probabilidade dos fluidos no espaço de fase não são mais descritas por:

$$f(t, p) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{T}\right) \pm 1}, \quad (2.87)$$

onde $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ é a energia relativística, μ o potencial químico e T a temperatura do fluido. O sinal positivo (+) é a distribuição de Bose-Einstein (BE) usada para descrever partículas tipo bóson, como os fótons e o sinal negativo (-) é a distribuição de Fermi-Dirac para partículas tipo Férmions, como os bárions.

A distribuição de probabilidade será função²⁰ do tempo, posição e momento, $f_i(x^\mu, P^\mu)$. Deste modo, o tensor energia-momento se torna,

$$T_\nu^\mu = g_i \int \frac{d\vec{P}}{(2\pi)^3 \sqrt{-g}} \frac{P^\mu P_\nu}{P^0} f_i(t, \vec{x}, \vec{p}), \quad (2.88)$$

onde g_i é a degeneração das componentes, \vec{P} é o vetor de momento, P^μ é o 4-momento e f_i é a função distribuição das componentes.

¹⁷ <<http://class-code.net/>>;

¹⁸ <<https://camb.readthedocs.io/en/latest/>>;

¹⁹ Como o Modelo de interação no setor escuro. Falaremos dele mais à frente.

²⁰ A forma dessa função será estruturada a seguir.

2.3 Equações de Boltzmann

As equações de Boltzmann²¹ são um dos pontos principais para a descrição de perturbações no Universo em expansão. Elas descrevem a evolução da função de distribuição de partículas no espaço de fase. Basicamente, fornecem informações sobre as propriedades dos componentes que compõem o Universo. Essas equações são complementares as equações de Einstein.

Iremos fazer uma abordagem simplificada, evidenciando os pontos principais para a obtenção das equações. Este tópico é baseado nas referências [5, 72, 73] com pequenas mudanças com relação a assinatura da métrica utilizada.

Considerando uma distribuição geral de partículas f dependente da 4-posição x^μ e do 4-momento P^μ que são variáveis implícitas do tempo t , uma versão simplificada da equação de Boltzmann relaciona a variação temporal de f com um termo de colisão,

$$\frac{df}{dt} = C[f], \quad (2.89)$$

em que C é uma constante de proporcionalidade e $[f]$ é um funcional que define os elementos de colisão, criação e aniquilação. Sendo assim, o lado direito leva em consideração todas as interações entre as partículas. Na ausência de colisão temos,

$$\frac{df}{dt} = 0, \quad (2.90)$$

O lado esquerdo é uma derivada total com relação ao tempo, o que faz aparecer os elementos relacionados a expansão do Universo e as perturbações da métrica.

Devemos expressar a derivada total de $f(x^\mu, P^\mu)$ em termos das derivadas parciais. Para isto, precisamos explicitar a 4-posição,

$$x^\mu = (t, x^i), \quad (2.91)$$

e o 4-momento, que para uma partícula de massa m deve obedecer ao vínculo,

$$P_\mu P^\mu = m^2, \quad (2.92)$$

fazendo assim, com que ele possua somente três coordenadas independentes.

Definindo a magnitude do momento próprio²²,

$$p^2 \equiv -g_{ij}P^iP^j, \quad (2.93)$$

e o versor direção de propagação, $\hat{n}^i \equiv P^i/|P|$, que obedece as seguintes propriedades:

$$\hat{n}_i = \hat{n}^i, \quad \delta_{ij}\hat{n}^i\hat{n}^j = 1. \quad (2.94)$$

²¹ Ludwig Eduard Boltzmann (1844 - 1906) foi um físico austríaco, que teve grande prestígio por seus estudos no ramo da termodinâmica estatística.

²² O sinal negativo é devido a assinatura da métrica que estamos considerando (+, -, -, -).

Estabelecemos o 3-momento,

$$P^i = ||P||\hat{n}^i. \quad (2.95)$$

e usando a métrica perturbada para um Universo plano no gauge Newtoniano²³:

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 + 2\Psi \\ g_{0i} &= 0 \\ g_{ij} &= -a^2(1 + 2\Phi)\delta_{ij}, \end{aligned} \quad (2.96)$$

podemos encontrar a parte espacial P^i do 4-momento em termos da magnitude de momento próprio p . Devemos primeiramente encontrar $||P||$,

$$\begin{aligned} p^2 \equiv -g_{ij}P^iP^j &= a^2(1 + 2\Phi)\delta_{ij}(||P||\hat{n}^i)(||P||\hat{n}^j), \\ &= a^2(1 + 2\Phi)(\delta_{ij}\hat{n}^i\hat{n}^j)||P||^2, \end{aligned} \quad (2.97)$$

utilizando (2.94) e isolando $||P||$, achamos²⁴

$$||P|| = \frac{p}{a\sqrt{1 + 2\Phi}} \approx \frac{p}{a}\left(1 - \frac{1}{2}2\Phi\right) = \frac{p}{a}(1 - \Phi). \quad (2.98)$$

As perturbações nos tempos e escalas de nosso interesse são muito pequenas, deste modo tratamos Φ e Ψ também como quantidades pequenas, descartando assim, todos os termos de ordem superior a 1.

Substituindo (2.98) em (2.95),

$$P^i = \frac{p}{a}(1 - \Phi)\hat{n}^i, \quad (2.99)$$

encontramos a parte espacial do 4-momento.

Agora, vamos achar a componente zero P^0 . Usaremos o vínculo (2.92) imposto pela massa,

$$\begin{aligned} P_\mu P^\mu = m^2 \longrightarrow m^2 &= g_{\mu\nu}P^\nu P^\mu = g_{00}P^0P^0 + g_{ij}P^iP^j, \\ m^2 &= (1 + 2\Psi)(P^0)^2 - p^2, \\ P^0 &= \frac{\sqrt{m^2 + p^2}}{\sqrt{(1 + 2\Psi)}}, \end{aligned} \quad (2.100)$$

fazendo uma expansão de Taylor no termo $(1 + 2\Psi)^{-1/2}$, chegamos em:

$$P^0 \approx \sqrt{m^2 + p^2} \left(1 - \frac{1}{2}2\Psi\right) = \sqrt{m^2 + p^2}(1 - \Psi), \quad (2.101)$$

²³ Por conveniência, vamos usar as coordenadas escritas no tempo cósmico t e depois fazer a mudança para o tempo conforme.

²⁴ Fizemos uma expansão de Taylor $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + \dots$ no termo $(1 + 2\Phi)^{-1/2}$.

Portanto, o quadrimomento para uma partícula de massa m no gauge Newtoniano é dado por,

$$P^\mu = \left(\sqrt{m^2 + p^2}(1 - \Psi), \frac{p}{a}(1 - \Phi)\hat{n}^i \right), \quad (2.102)$$

para partículas sem massa, por exemplo, os fótons temos:

$$P^\mu = \left(p(1 - \Psi), \frac{p}{a}(1 - \Phi)\hat{n}^i \right). \quad (2.103)$$

Notamos que P^μ pode ser descrito por p e \hat{n}^i , logo, a derivada total da função distribuição se torna,

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial P^\mu} \frac{dP^\mu}{dt}, \\ \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \hat{n}^i} \frac{d\hat{n}^i}{dt}. \end{aligned} \quad (2.104)$$

o último termo não contribui para as perturbações, pois é mínimo de 2ª ordem, uma vez que a derivada de f com respeito a \hat{n}^i é um elemento no mínimo de 1ª ordem e a variação de \hat{n}^i com relação à t somente irá mudar se for de 1ª ordem. Assim,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt}. \quad (2.105)$$

Nosso interesse a partir deste ponto é encontrar as equações de Boltzmann para os componentes cosmológicos importantes para nosso estudo.

2.3.1 Fótons

Levando em consideração a definição de 4-momento,

$$P^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \left(\frac{dt}{d\lambda}, \frac{dx^i}{d\lambda} \right), \quad (2.106)$$

onde λ parametriza o caminho da partícula (aqui não iremos explicitá-lo), a variação da 3-posição com respeito ao tempo cósmico t do segundo termo de (2.105) pode ser escrita como:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dt}{d\lambda} = \frac{P^i}{P^0}. \quad (2.107)$$

Utilizando o 4-momento para fótons (2.103) na expressão acima,

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \frac{(p/a)(1 - \Phi)\hat{n}^i}{p(1 - \Psi)} \approx (1 - \Phi)(1 + \Psi) \frac{\hat{n}^i}{a}, \\ &\approx (1 + \Psi - \Phi) \frac{\hat{n}^i}{a}, \end{aligned} \quad (2.108)$$

onde nós expandimos o termo $(1 - \Psi)^{-1}$ para chegarmos neste resultado.

O próximo passo é calcular dp/dt , para isto precisamos da equação da geodésica, que iremos escrever em função do 4-momento,

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} &= 0 \\ \frac{dP^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu P^\alpha P^\beta &= 0,\end{aligned}\tag{2.109}$$

Calculando para $\mu = 0$,

$$\begin{aligned}\frac{dP^0}{d\lambda} &= -\Gamma_{\alpha\beta}^0 P^\alpha P^\beta, \\ \frac{dt}{d\lambda} \frac{dP^0}{dt} &= -\Gamma_{00}^0 P^0 P^0 - 2\Gamma_{0i}^0 P^0 P^i - \Gamma_{ij}^0 P^i P^j, \\ P^0 \frac{d}{dt} [p(1 - \Psi)] &= -\Gamma_{00}^0 (P^0)^2 - 2\Gamma_{0i}^0 P^0 P^i - \Gamma_{ij}^0 P^i P^j, \\ \frac{d}{dt} [p(1 - \Psi)] &= -\Gamma_{00}^0 P^0 - 2\Gamma_{0i}^0 P^i - \Gamma_{ij}^0 \frac{P^i P^j}{P^0}, \\ (1 - \Psi) \frac{dp}{dt} + p \frac{d}{dt} (1 - \Psi) &= -\Gamma_{00}^0 P^0 - 2\Gamma_{0i}^0 P^i - \Gamma_{ij}^0 \frac{P^i P^j}{P^0}, \\ (1 - \Psi) \frac{dp}{dt} - p \frac{d\Psi}{dt} &= -\left(\Gamma_{00}^0 P^0 + 2\Gamma_{0i}^0 P^i + \Gamma_{ij}^0 \frac{P^i P^j}{P^0} \right), \\ \frac{dp}{dt} &= p \frac{d\Psi}{dt} - \left(\Gamma_{00}^0 P^0 + 2\Gamma_{0i}^0 P^i + \Gamma_{ij}^0 \frac{P^i P^j}{P^0} \right), \\ \frac{dp}{dt} &\approx (1 + \Psi) p \frac{d\Psi}{dt} - (1 + \Psi) \left(\Gamma_{00}^0 P^0 + 2\Gamma_{0i}^0 P^i + \Gamma_{ij}^0 \frac{P^i P^j}{P^0} \right), \\ \frac{dp}{dt} &\approx p \frac{d\Psi}{dt} - \left[(1 + \Psi) \Gamma_{00}^0 P^0 + 2(1 + \Psi) \Gamma_{0i}^0 P^i + (1 + \Psi) \Gamma_{ij}^0 \frac{P^i P^j}{P^0} \right],\end{aligned}\tag{2.110}$$

Usando os símbolos de Christoffel expostos no Apêndice B.3 encontramos,

$$(1 + \Psi) \Gamma_{00}^0 = (1 + \Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial t} \approx \frac{\partial \Psi}{\partial t},\tag{2.111}$$

$$(1 + \Psi) \Gamma_{0i}^0 = (1 + \Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \approx \frac{\partial \Psi}{\partial x^i},\tag{2.112}$$

$$\begin{aligned}\frac{(1 + \Psi) \Gamma_{ij}^0}{P^0} &= \frac{(1 + \Psi) a^2 \left[H + 2H(\Phi - \Psi) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]}{p(1 - \Psi)}, \\ &\approx \frac{a^2}{p} \left[(1 + \Psi)(1 + \Psi)(H + 2H(\Phi - \Psi)) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right], \\ &\approx \frac{a^2}{p} \left[H + 2H(\Phi - \Psi) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + 2\Psi H \right], \\ &\approx \frac{a^2}{p} \left(H + 2H\Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right).\end{aligned}\tag{2.113}$$

Substituindo estes termos em (2.110),

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= p \frac{d\Psi}{dt} - \frac{\partial\Psi}{\partial t} P^0 + 2 \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} P^i + \frac{a^2}{p} \left(H + 2H\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) P^i P^j, \\
&= p \frac{d\Psi}{dt} - \frac{\partial\Psi}{\partial t} p(1 - \Psi) - 2 \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} \frac{p}{a} (1 - \Phi) \hat{n}^i - \frac{a^2}{p} \left(H + 2H\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) \frac{p^2}{a^2} (1 - \Phi)^2 \hat{n}^i \hat{n}^j \delta_{ij}, \\
&= p \frac{d\Psi}{dt} - \frac{\partial\Psi}{\partial t} p - 2 \frac{p}{a} \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} \hat{n}^i - p \left(H + 2H\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) (1 - 2\Phi), \\
&= p \left(\frac{d\Psi}{dt} - \frac{\partial\Psi}{\partial t} \right) - 2 \frac{p}{a} \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} \hat{n}^i - p \left(H + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right), \tag{2.114}
\end{aligned}$$

sabendo que,

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt}, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = \frac{d\Psi}{dt} - \frac{\partial\Psi}{\partial t}, \tag{2.115}$$

e usando (2.108), finalmente:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= p \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} - 2 \frac{p}{a} \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} \hat{n}^i - p \left(H + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right), \\
\frac{dp}{dt} &= \frac{p}{a} (1 + \Psi - \Phi) \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} \hat{n}^i - 2 \frac{p}{a} \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} \hat{n}^i - p \left(H + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right), \\
\frac{dp}{dt} &= \frac{p}{a} \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} \hat{n}^i - 2 \frac{p}{a} \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} \hat{n}^i - p \left(H + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right), \\
\frac{dp}{dt} &= -\frac{p}{a} \hat{n}^i \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} - p \left(H + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right), \tag{2.116}
\end{aligned}$$

Essa equação descreve a variação do momento dos fótons à medida que eles se movem através de um Universo FLRW perturbado. Percebemos então, que os fótons perdem energia devido à expansão e ação dos potenciais.

Desta maneira, substituindo (2.108) e (2.116) na equação de Boltzmann da distribuição de fótons (2.105), temos:

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} (1 + \Psi - \Phi) \frac{\hat{n}^i}{a} - p \left(H + \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} \frac{\hat{n}^i}{a} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial p}, \\
\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\hat{n}^i}{a} - p \left(H + \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} \frac{\hat{n}^i}{a} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial p}, \tag{2.117}
\end{aligned}$$

lembrando que usamos o fato da dependência de f com a direção \hat{n}^i é no mínimo de 1ª ordem, por isso, desprezamos alguns termos da equação acima. Enfim, essa expressão leva diretamente às equações que governam as anisotropias.

No Universo não perturbado, os fótons com temperatura T possuem a função de distribuição de Bose-Einstein (BE),

$$f^{(0)}(t, p) = \frac{1}{\exp(p/T) - 1}, \tag{2.118}$$

onde o índice (0) é para descrever que a função f é de ordem-zero (sem perturbação). No fundo cosmológico, T é uma função que depende somente do tempo cósmico t e não do espaço²⁵.

Precisamos fazer uma perturbação de 1ª ordem na temperatura T sobre o estado de ordem-zero. Escrevendo então,

$$f(t, \vec{x}, p, \hat{n}) = \frac{1}{\exp \left\{ \frac{p}{T(t)[1+\Theta(t, \vec{x}, \hat{n})]} \right\} - 1}, \quad (2.119)$$

onde a perturbação para esta função é dada por Θ , que também podemos chamar de $\delta T/T$, conforme provamos no Apêndice B.7.1. As informações de anisotropias e inomogeneidades estão contidas neste termo. Assumimos que Θ não depende do módulo p do momento linear, uma vez que a principal interação neste dado período se deva ao espalhamento Compton, em que esta quantidade permanece inalterada. Como a perturbação Θ é pequena, vamos fazer uma expansão de Taylor na função f (mantendo apenas termos até a primeira ordem) ao redor de $f^{(0)}$,

$$\begin{aligned} f &\simeq \frac{1}{e^{p/T} - 1} + \frac{e^{p/T} p}{(e^{p/T} - 1)^2 T^2} T \Theta, \\ f &\simeq \frac{1}{e^{p/T} - 1} + \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{1}{e^{p/T} - 1} \right] T \Theta = f^{(0)} - p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \Theta, \end{aligned} \quad (2.120)$$

em que usamos (2.118) e o fato de: $T \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}$.

Conforme mostramos no Apêndice B.8, utilizando (2.120) em (2.117) encontramos a equação de Boltzmann de 1ª ordem,

$$\frac{df^{(1)}}{dt} = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} \frac{\hat{n}^i}{a} + \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{\hat{n}^i}{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right), \quad (2.121)$$

em que os dois primeiros termos são relacionados as anisotropias, os dois últimos relacionam-se com os efeitos gravitacionais da métrica.

Agora precisamos encontrar o termo de colisão, para isto iremos calcular $C[f(p)]$ que descreve as interações envolvidas com os fótons. Basicamente, estamos interessados no período em que os fótons estavam interagindo com bárions, mais precisamente, com os elétrons. Isto se dá devido ao espalhamento Compton que influencia diretamente na função de distribuição dos fótons. A interação que estamos lidando é a seguinte:

$$e^-(\vec{q}) + \gamma(\vec{p}) \quad \longleftrightarrow \quad e^-(\vec{q}') + \gamma(\vec{p}'), \quad (2.122)$$

onde o momento próprio de cada partícula está explícito como \vec{q} e \vec{p} . O objetivo aqui é saber como ocorre a mudança na função de distribuição dos fótons com momento \vec{p} . Temos que interligar a interação acima com todos os momentos: \vec{q} , \vec{q}' e \vec{p}' .

²⁵ Nós ignoramos o termo de potencial químico.

Neste caso, o termo de colisão é dado por[72]:

$$\begin{aligned}
C[f(\vec{p})] &= \frac{1}{p} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_e(q)} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_\gamma(p')} \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3 2E_e(q')} \times \\
&\times |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^3(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}' - \vec{q}') \delta[E_\gamma(p) + E_e(q) - E_\gamma(p') - E_e(q')] \times \\
&\times [f_e(q')f_\gamma(p') - f_e(q)f_\gamma(p)], \tag{2.123}
\end{aligned}$$

no qual as funções delta de Dirac englobam a conservação de energia-momento, $E_\gamma(p)$ e $E_e(q)$ são as energias relativísticas e não-relativísticas, respectivamente. $|\mathcal{M}|^2$ é a amplitude de espalhamento, é também considerada como a probabilidade de uma interação ocorrer. O termo $f_e(q')f_\gamma(p') - f_e(q)f_\gamma(p)$ garante que elétrons e fótons são criados por meio da interação fóton-elétron.

No Apêndice B.9 mostramos que a equação acima se reduz à:

$$\begin{aligned}
C[f(\vec{p})] &= \frac{\pi}{4m_e^2 p} \int \frac{f_e(q)d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 p'} |\mathcal{M}|^2 \left[\delta(p - p') + \frac{\vec{q} \cdot (\vec{p} - \vec{p}')}{m_e} \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'} \right] \times \\
&\times [f_\gamma(p') - f_\gamma(p)]. \tag{2.124}
\end{aligned}$$

O próximo passo é definir a amplitude de espalhamento $|\mathcal{M}|^2$ que possui uma parte isotrópica e anisotrópica²⁶. Utilizando o termo isotrópico que relaciona-se com a seção de choque de Thomson σ_T através de: $|\mathcal{M}|^2 = 8\pi\sigma_T m_e^2$ e fazendo algumas manipulações matemáticas obtemos o termo de colisão dos fótons relativo ao espalhamento Compton não-relativístico [72, 74],

$$C[f(\vec{p})] = -n_e \sigma_T p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} [\Theta_0(t, \vec{x}) - \Theta(t, \vec{x}, \hat{n}) + \hat{n} \cdot \vec{v}_b], \tag{2.125}$$

onde $\Theta_0(t, \vec{x})$ é uma perturbação que representa o desvio do monopolo da anisotropia de temperatura,

$$\Theta_0(t, \vec{x}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \Theta(t, \vec{x}, \hat{n}), \tag{2.126}$$

e \vec{v}_b é o campo de velocidade dos bárions, que devido ao forte acoplamento por causa do espalhamento Coulomb entre elétrons, prótons e bárions, faz com que eles se comportem como um único fluido, temos então,

$$\vec{v}_e \approx \vec{v}_p \approx \vec{v}_b \equiv \frac{1}{n_e} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\vec{q}}{E(\vec{q})} f_e(t, \vec{x}, \vec{q}), \tag{2.127}$$

ou seja, o campo de velocidade dos elétrons é aproximadamente o campo de velocidade dos prótons, que é semelhante a \vec{v}_b . O termo n_e é a densidade do número de partículas dos elétrons.

²⁶ Mais detalhes matemáticos e definições sobre isto podem ser encontrados em [74].

Inserindo (2.125) na função distribuição dos fótons (2.121), depois reescrevendo no espaço de Fourier, para facilitar os cálculos e deixar a equação com uma aparência mais “amigável”, conforme pode ser visto no Apêndice B.10 obtemos,

$$\Theta' + ik\mu\Theta + ik\mu\Phi + \Phi' = -\tau'_{op}(\Theta_0 - \Theta + \mu v_b), \quad (2.128)$$

que é a equação de Boltzmann para os fótons, onde k é o número de onda ($k = |\vec{k}|$), μ é o cosseno diretor entre o vetor de onda \vec{k} e a direção dos fótons \hat{n} , τ_{op} é a profundidade óptica e v_b é o módulo da velocidade dos bárions. Escrevemos a expressão acima no tempo conforme η . Incluímos a notação: $' = \partial/\partial\eta$.

Acrescentando o termo de dependência angular, a expressão geral pode ser obtida seguindo o mesmo procedimento que fizemos, mas usando a amplitude completa (parte isotrópica e anisotrópica). Assim:

$$\Theta' + ik\mu\Theta + ik\mu\Phi + \Phi' = -\tau'_{op}(\Theta_0 - \Theta + \mu v_b - \frac{\mathcal{P}_2(\mu)}{2}\Pi), \quad (2.129)$$

onde Π depende do campo de polarização [72].

De forma similar, derivamos as equações de Boltzmann dos outros componentes do Universo, por exemplo: ME e bárions, neste caso é possível calcularmos uma equação para descrição da evolução da velocidade.

2.3.2 Matéria Escura Fria

Considerando uma partícula de matéria escura de massa m , a equação de Boltzmann é calculada de forma similar a subseção anterior, contudo usaremos o 4-momento (2.102), onde definimos como um dos graus de liberdade da partícula a energia não-relativística,

$$E = \sqrt{m^2 + p^2}, \quad (2.130)$$

ficamos então com,

$$P^\mu = \left(E(1 - \Psi), \frac{p}{a}(1 - \Phi)\hat{n}^i \right). \quad (2.131)$$

Usamos assim E como uma variável dependente, tornando assim a derivada total da função distribuição para ME f_c ,

$$\frac{df_c}{dt} = \frac{\partial f_c}{\partial t} + \frac{\partial f_c}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f_c}{\partial E} \frac{dE}{dt} + \frac{\partial f_c}{\partial \hat{n}^i} \frac{d\hat{n}^i}{dt}. \quad (2.132)$$

Da mesma forma que fizemos anteriormente para (2.117), podemos achar:

$$\frac{df_c}{dt} = \frac{\partial f_c}{\partial t} + \frac{p}{E} \frac{\partial f_c}{\partial x^i} \frac{\hat{n}^i}{a} - p \left(\frac{p}{E} H + \frac{p}{E} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{\hat{n}^i}{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \frac{\partial f_c}{\partial E}. \quad (2.133)$$

Por definição, ME não interage com outros componentes do Universo [72], por este motivo o termo de colisão é nulo. Então, a equação de Boltzmann para matéria não-relativística é,

$$\frac{\partial f_c}{\partial t} + \frac{p}{E} \frac{\partial f_c}{\partial x^i} \frac{\hat{n}^i}{a} - p \left(\frac{p}{E} H + \frac{p}{E} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{\hat{n}^i}{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \frac{\partial f_c}{\partial E} = 0. \quad (2.134)$$

Multiplicando esta equação por $d^3p/(2\pi)^3$ e integrando,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_d + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^i} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_d \frac{p}{E} \hat{n}^i - \left(H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_c}{\partial E} \frac{p^2}{E} - \\ - \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_c}{\partial E} p \hat{n}^i = 0, \end{aligned} \quad (2.135)$$

onde podemos desprezar o último termo por ser de ordem superior a 1, pois a integral sob à direção de propagação \hat{n}^i é diferente de zero se for pelo menos de 1ª ordem e temos a derivada de Ψ que é também de 1ª ordem. Para simplificar, escrevemos:

$$n_c = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_d, \quad (2.136)$$

$$\vec{v}_c = \frac{1}{n_c} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_c \frac{p}{E} \hat{n}^i. \quad (2.137)$$

onde n_c é a densidade numérica de ME e \vec{v}_c o campo de velocidade. Assim,

$$\frac{\partial n_c}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial (n_c \vec{v}_c)}{\partial x^i} - \left(H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_c}{\partial E} \frac{p^2}{E} = 0, \quad (2.138)$$

usando o resultado obtido em [72], onde é feita uma mudança de variável e resolvendo a integral por partes:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_c}{\partial E} \frac{p^2}{E} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p \frac{\partial f_c}{\partial p} \quad (2.139)$$

$$= -3n_c \quad (2.140)$$

para a última integral, temos:

$$\frac{\partial n_c}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial (n_c \vec{v}_c)}{\partial x^i} + 3n_c \left(H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.141)$$

A equação de ordem zero é,

$$\frac{\partial \bar{n}_c}{\partial t} + 3\bar{n}_c H = 0, \quad (2.142)$$

tal que, encontramos a relação:

$$\bar{n}_c a^3 = \text{cte.} \quad (2.143)$$

Para nós chegarmos na equação de 1ª ordem é necessário expandirmos n_c ,

$$n_c = \bar{n}_c [1 + \delta_c(\vec{x}, t)], \quad (2.144)$$

em que $\delta_c(\vec{x}, t)$ é um fator de 1ª ordem, chamado de *contraste de densidade numérica* de ME.

Substituindo (2.144) em (2.141), depois utilizando a equação de ordem zero (2.142), achamos:

$$\frac{\partial \delta_c}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial \vec{v}_c}{\partial x^i} + 3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (2.145)$$

Observamos que temos duas variáveis de perturbações: δ_c e \vec{v}_c , então precisamos de uma equação para podermos calcular essas variáveis. Portanto, calculamos a expressão de 1ª ordem para o momento, partindo da equação de Boltzmann (2.134) que multiplicamos por $\frac{p}{(2\pi)^3} \frac{\hat{n}^i}{E} d^3p$, integramos e depois eliminamos termos de 2ª ordem. Obtemos,

$$\frac{\partial n_c \vec{v}_c}{\partial t} + 4H n_c \vec{v}_c + \frac{n_c}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = 0. \quad (2.146)$$

Não observamos termos de ordem zero nesta equação, então podemos fazer $n_c \approx \bar{n}_c$ e utilizar (2.142), então chegamos a:

$$\frac{\partial \vec{v}_c}{\partial t} + H \vec{v}_c + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = 0. \quad (2.147)$$

Por conveniência, reescrevemos as equações (2.145) e (2.147) em função do tempo conforme, passamos para o espaço de Fourier, utilizando as mesmas definições feitas para os fótons no Apêndice B.10. Logo,

$$\delta'_c + ikv_c + 3\Phi' = 0, \quad (2.148)$$

$$v'_c + \frac{a'}{a} v_c + ik\Psi' = 0, \quad (2.149)$$

essas são as equações de Boltzmann perturbadas para ME.

2.3.3 Bárions

As mesmas definições de δ_c e \vec{v}_c para ME podem ser usadas para bárions²⁷. Como elétrons e prótons estão fortemente acoplados pelo espalhamento Coulomb, temos:

$$\rho_b \equiv \rho_e = \rho_p = \bar{\rho}_p [1 + \delta_p(\vec{x}, t)], \quad (2.150)$$

pelo mesmo motivo a velocidade dos bárions é,

$$\vec{v}_b \equiv \vec{v}_e = \vec{v}_p, \quad (2.151)$$

e a densidade numérica dos bárions também,

$$n_b \equiv n_e = n_p. \quad (2.152)$$

²⁷ Usaremos o subscrito "b" para as funções dos bárions (que valem tanto para elétrons como para prótons).

Além do espalhamento de Coulomb, os bárions (b) interagem com fótons (γ) através do espalhamento de Compton, fazendo que apareça mais um termo de colisão relacionado a essa interação.

Seguindo os mesmos procedimentos matemáticos feitos anteriormente para matéria escura, encontramos²⁸ para os bárions,

$$\delta'_b + ikv_b + 3\Phi' = 0, \quad (2.153)$$

aqui já escrevemos no espaço de Fourier e no tempo conforme. Vemos que esta equação perturbada dos bárions é idêntica a (2.148).

Para encontrarmos a segunda equação que descreve o campo de velocidade, seguimos as mesmas características feitas para ME então [72]),

$$v'_b + \frac{a'}{a}v_b + ik\Psi = \tau' \frac{1}{\mathcal{R}}(3i\Theta_1 + v_b), \quad (2.154)$$

onde definimos a razão [72],

$$\mathcal{R} = \frac{3\bar{\rho}_b}{4\bar{\rho}_\gamma}, \quad (2.155)$$

e o primeiro momento,

$$\Theta_1 = i \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \mu \Theta(\mu). \quad (2.156)$$

A equação (2.154) se diferencia de (2.149) devido a interação eletromagnética entre bárions e fótons.

2.3.4 Neutrinos

Para neutrinos sem massa não há termos de colisão na equação de Boltzmann. Então, de forma análoga, que para fótons, encontramos [72],

$$\mathcal{N}' + i\mu k\mathcal{N} + i\mu k\Psi + \Phi' = 0, \quad (2.157)$$

onde \mathcal{N} é a perturbação da temperatura dos neutrinos. No caso de neutrinos massivos, o lado esquerdo da equação de Boltzmann será dado pela Eq. (2.117), contudo, ao contrário dos bárions, os neutrinos são partículas relativísticas, não podemos desprezar termos de 2ª ordem ou superior. Não iremos tratar disto nesta dissertação.

²⁸ O termo de colisão será nulo, pois o número de elétrons é conservado e ao fazermos a integração em todos os momentos notamos que há uma comparação entre o número de elétrons criados com o número de elétrons aniquilados.

2.3.5 Condições iniciais adiabáticas

Para resolver o sistema de equações de Boltzmann são necessárias impor condições iniciais²⁹ muito específicas: adiabáticas ou isocurvaturas, sobre o potencial e a entropia, que modificam as equações de Boltzmann. Não iremos nos ater aos detalhes destas formulações, indicamos as referências [72, 73]. Para fins de nosso estudo, assumimos condições adiabáticas, onde [73]:

$$\Phi(k, \eta_i) = \Phi_P(k), \quad (2.158)$$

$$\Phi' = 0, \quad (2.159)$$

$$S = S' = 0, \quad (2.160)$$

por estas definições vemos que é definido um valor inicial para o potencial imediatamente depois da inflação. Quando o potencial assume este valor, a amplitude das flutuações é chamada de **espectro de potência primordial**.

Os termos perturbativos se tornam [72]:

$$\frac{1}{3}\delta_c = \frac{1}{3}\delta_b = \frac{1}{4}\delta_\gamma = \frac{1}{4}\delta_\nu = -\Phi + A_\gamma \quad (2.161)$$

onde $\Theta_0 = \frac{1}{4}\delta_\gamma$, $\mathcal{N} = \frac{1}{4}\delta_\nu$ e A_γ é uma função dependente da escala k ³⁰.

Calculando as equações de Einstein usando as funções de distribuição de cada componente encontramos [72]:

$$k^2\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) = 4\pi G a^2(\bar{\rho}_m\delta_m + 4\bar{\rho}_r\Theta_{r,0}), \quad (2.162)$$

$$k^2(\Phi + \Psi) = -32\pi G a^2(\bar{\rho}_r\Theta_{r,2}), \quad (2.163)$$

$$k^2(-\Phi' + \mathcal{H}\Psi) = 4\pi G a^2\left(\bar{\rho}_m v_m + \frac{4}{3}\bar{\rho}_r v_r\right), \quad (2.164)$$

onde,

$$\bar{\rho}_m\delta_m = \bar{\rho}_b\delta_b + \bar{\rho}_c\delta_c, \quad (2.165)$$

$$\bar{\rho}_r\Theta_{r,0} = \bar{\rho}_\gamma\Theta_0 + \bar{\rho}_\nu\mathcal{N}_0, \quad (2.166)$$

$$\bar{\rho}_r\Theta_{r,2} = \bar{\rho}_\gamma\Theta_2 + \bar{\rho}_\nu\mathcal{N}_2, \quad (2.167)$$

$$\bar{\rho}_m v_m = \bar{\rho}_b v_b + \bar{\rho}_c v_c, \quad (2.168)$$

$$\bar{\rho}_r v_r = \bar{\rho}_\gamma v_\gamma + \bar{\rho}_\nu v_\nu. \quad (2.169)$$

Combinado as equações de Einstein acima, podemos escrever uma equação algébrica para o potencial [72],

$$k^2\Phi = \left[\bar{\rho}_m\delta_m + 4\bar{\rho}_r\Theta_{r,0} + \frac{3\mathcal{H}}{k}(i\bar{\rho}_m v_m + \bar{\rho}_r\Theta_{r,1})\right], \quad (2.170)$$

essa equação será usada para derivar equações próximo capítulo.

²⁹ Essas condições são para um período logo após a inflação, super-horizonte.

³⁰ Seu valor é fornecido pela inflação e está relacionado a perturbação de curvatura primordial [5].

3 Espectros de Potências Cosmológicas

Os espectros de potências são medidas de suma importância na Cosmologia e estão diretamente ligados a parte observacional. Eles contém uma série de informações sobre o Universo, dentre elas, sobre a distribuição de matéria e EE, através da análise das Oscilações Acústicas Bariônicas (BAOs) extraídas dos mesmos.

Neste capítulo veremos a definição de espectro de potência, sua relação com a função de correlação das galáxias, mostraremos como obter a formulação analítica do espectro de potência linear da matéria e o espectro de potência angular de 21 cm. Além disso, apresentaremos alguns *fittings* destes espectros que conseguimos reproduzir e outros disponíveis na literatura. Por último, mostraremos algumas equações fundamentais para obtenção dos espectros de potências para o Modelo Cosmológico de Interação de EE (IDE), que serão utilizadas em estudos futuros.

As referências bases para elaboração deste capítulo foram: [5, 19, 72, 73].

3.1 Espectro de potência linear da matéria

3.1.1 Definição

O *espectro de potência* $P(k)$ (ou densidade espectral de energia, ou ainda densidade espectral de potência) é definido como a média do quadrado da amplitude dos modos de Fourier¹ da perturbação de densidade, dado por [75],

$$P(k) \equiv \langle |\delta(\vec{k})|^2 \rangle, \quad (3.1)$$

a partir disto, podemos obter informações sobre o contraste de densidade de matéria δ_m para cada escala k . Temos que $k = |\vec{k}|$ é o módulo do vetor de onda \vec{k} e descreve o número de onda, utiliza-se como uma escala. O $\langle \rangle$ denota uma média de ensemble (conjunto).

Pela isotropia temos, $P(k) = P(|\vec{k}|)$. Normalmente, quando analisa-se fenômenos com características de “ruídos”, o principal foco de estudos é a amplitude das flutuações em função da escala.

No trabalho [76], é possível entender o papel dos ruídos e flutuações nos processos gravitacionais e cosmológicos, como também, a importância para compreensão sobre o surgimento do Universo e formação de todas as estruturas que o compõe. Uma característica

¹ Flutuações são melhores descritas matematicamente através dos modos de Fourier. Para um único modo de Fourier as perturbações não são correlacionadas com as de outro, visto que a média para um dado modo é zero: $\langle \delta(\vec{x}) \rangle = 0$.

dos ruídos cósmicos captados aleatoriamente é que os mesmos podem ser considerados como brancos, contudo, pode aparecer em detecções outro tipo, o ruído colorido [76].

3.1.2 Função de correlação

Dadas duas pequenas regiões dV_1 e dV_2 contidas em uma pequena região do Universo dV , para analisar a distribuição de matéria (por exemplo, galáxias²) e extrair informações das mesmas, precisamos saber como estas regiões se relacionam e como as distribuições influenciam uma na outra. Visto que, elas se originaram do mesmo processo físico, não sendo portanto, independentes e não estão distribuídas aleatoriamente³. Assim, há um desvio da aleatoriedade das galáxias. Precisamos saber como esse desvio é definido.

Para isto, definimos a *densidade da matéria total* no Universo em termos de densidade média $\bar{\rho}$ e da perturbação local [77],

$$\rho(\vec{x}) = \bar{\rho}(1 + \delta(\vec{x})), \quad (3.2)$$

onde $\delta(\vec{x})$ é o contraste de densidade dado por,

$$\delta(\vec{x}) \equiv \frac{\rho(\vec{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}. \quad (3.3)$$

Calculando a variância entre as densidades de matéria total em dV_1 e dV_2 temos [78],

$$\begin{aligned} \langle \rho(\vec{r}_1)\rho(\vec{r}_2) \rangle &= \bar{\rho}^2 \langle [(\delta(\vec{r}_1) + 1)(\delta(\vec{r}_2) + 1)] \rangle, \\ &= \bar{\rho}^2 (1 + \langle \delta(\vec{r}_1)\delta(\vec{r}_2) \rangle), \\ &= \bar{\rho}^2 (1 + \xi(\vec{r}_{12})), \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde usamos o fato de $\langle \delta(\vec{x}) \rangle = 0$ e definimos a *função de correlação* (ou função de 2-pontos, ou ainda função de correlação de 2-pontos),

$$\xi(\vec{r}_{12}) \equiv \langle \delta(\vec{r}_1)\delta(\vec{r}_2) \rangle. \quad (3.5)$$

Vemos que as flutuações de densidade dependem da posição, sendo \vec{r}_1 a distância da origem do sistema de observação até dV_1 e \vec{r}_2 a distância até dV_2 . A função (3.5) quantifica o que foi descrito inicialmente nesta subseção, pois as duas distribuições estão correlacionadas.

Assumindo um Universo estatisticamente homogêneo, ou seja, o valor esperado de um campo de densidade é o mesmo em todos os pontos do espaço, temos:

$$\xi(\vec{r}_{12}) = \xi(\vec{r}_{21}) = \xi(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad (3.6)$$

² Podemos nos referir também como partículas, tal como são tratadas em larga escala.

³ Se reúnem em galáxias, aglomerados ou estruturas ainda maiores.

agora fazendo mudanças de variáveis por pura conveniência [5],

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_{12}, \quad \text{e} \quad \vec{x} \equiv \vec{r}_1, \quad (3.7)$$

a função de correlação (3.5) é reescrita como,

$$\xi(\vec{r}) = \langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle. \quad (3.8)$$

Por meio da isotropia estatística, a função de correlação não deve depender da direção⁴, então temos: $\xi(\vec{r}) = \xi(r)$, isto significa que ela possui simetria esférica.

O *Sloan Digital Sky Surveys* (SDSS)⁵ que é uma ambiciosa pesquisa de levantamentos de dados astronômicos operando desde 2000 [79], possui como um de seus objetivos a observação de imagens e espectros anisotrópicos. Essa colaboração, forneceu dados para construção de uma função de correlação que mostra um pico acústico bem definido em uma separação comóvel r de $100h^{-1}\text{Mpc}$ [8], conforme pode ser visto na Figura 17. Os resultados mostram que dada uma galáxia formada em pico de densidade, existe uma probabilidade maior de encontrar uma outra galáxia a uma distância de $100h^{-1}\text{Mpc}$, o que é aproximadamente igual ao horizonte acústico na época da recombinação $r_s \approx 150\text{Mpc}$ [29].

Pode-se observar que $\xi(r)$ possui valores maiores para separações r menores que $50h^{-1}\text{Mpc}$, uma explicação para este fenômeno é a força gravitacional, que atrai matéria para o pico de densidade, fazendo com que seja mais provável encontrar uma galáxia próxima do pico [29]. Portanto, a função de correlação fornece um meio de caracterizar a estrutura da distribuição da matéria no Universo.

A função de correlação e o espectro de potência contêm as mesmas informações em princípio, pois são transformadas de Fourier uma da outra.

3.1.3 Relação entre espectro de potência e função de correlação

As estatísticas do campo de densidade são frequentemente assumidas como gaussianas, pois torna os cálculos mais simples. Assim, no regime de perturbações lineares podemos expandir as variáveis de perturbações no espaço de Fourier, como a soma de ondas planas, por exemplo, o contraste de densidade $\delta(\vec{x})$ se torna,

$$\delta(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \delta(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \delta(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{k}, \quad (3.9)$$

$$\delta(\vec{k}) = \frac{1}{V} \int_V \delta(\vec{x})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{x}, \quad (3.10)$$

⁴ Quer dizer que a função de correlação pode ser determinada pela média sobre os produtos de densidade para um grande número de pares de pontos com determinada separação r . Neste caso, há uma equivalência entre média de conjunto e média espacial, chamada de *ergodicidade* do campo. Somente com isso a função de correlação (e todas as outras propriedades estatísticas) em nosso Universo pode ser medida, porque realizamos apenas uma única observação [78].

⁵ Tradução: *Pesquisas sobre o céu digital Sloan*, detalhes sobre a mesma podem ser encontradas no site <<https://www.sdss.org/surveys/>>

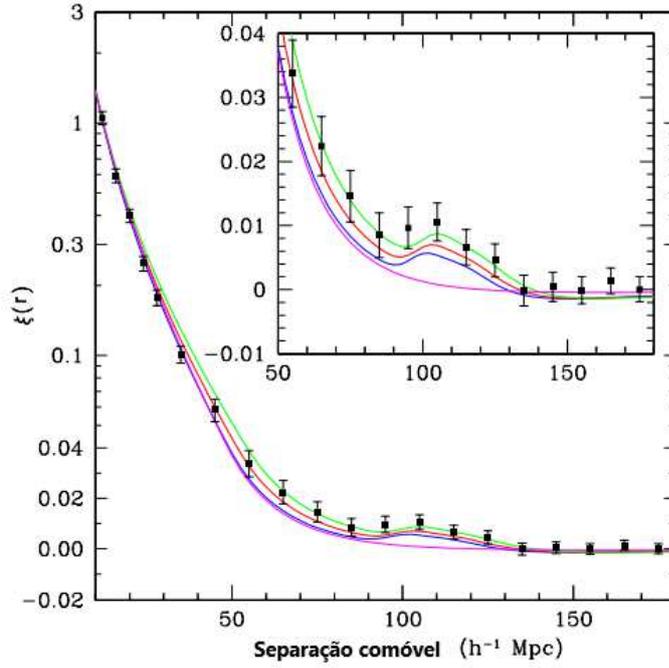


Figura 17 – Função de correlação de larga escala com amostra de 46.748 galáxias com redshifts entre $0,72 < z < 0,47$ construída com dados do SDSS. É feita para Modelos Cosmológicos com $\Omega_{m,0}h^2 = 0,12$ (linha verde), $0,13$ (linha vermelha) e $0,14$ (linha azul), todos com $\Omega_{b,0} = 0,024$ e $n_s = 0,98$ com um leve pico acústico em $100h^1$ Mpc. A linha violeta representa o modelo CDM puro com $\Omega_{m,0}h^2 = 0,105$, que não possui pico acústico. Fonte: [8].

onde V é o volume. Do ponto de vista observacional, somos capazes de sondar uma realização em um determinado volume finito. Contudo, quando o volume é suficientemente grande recuperamos as transformadas de Fourier usuais [73],

$$\delta(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \delta(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{k}, \quad (3.11)$$

$$\delta(\vec{k}) = \int_V \delta(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{x}, \quad (3.12)$$

Temos que $\delta(\vec{x})$ é real e possui média nula, isto é,

$$\delta(\vec{x}) = \delta^*(\vec{x}) \longrightarrow \delta^*(\vec{k}) = \delta(-\vec{k}), \quad (3.13)$$

$$\langle \delta(\vec{x}) \rangle = 0 \longrightarrow \langle \delta(\vec{k}) \rangle = 0, \quad (3.14)$$

onde o símbolo $*$ representa o conjugado.

Utilizando as expansões de Fourier e as propriedades acima, a função de correlação

do campo de densidade pode ser escrita como,

$$\begin{aligned}
\xi(\vec{r}) &= \langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle \\
&= \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \right)^2 \langle \int d^3\vec{k}d^3\vec{k}'\delta(\vec{k})\delta(\vec{k}')e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}e^{i\vec{k}'\cdot(\vec{x}+\vec{r})} \rangle, \\
&= \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \right)^2 \int d^3\vec{x} \int d^3\vec{k}d^3\vec{k}' \langle \delta(\vec{k})\delta(\vec{k}') \rangle e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}}, \\
&= \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \right)^2 \int d^3\vec{k}d^3\vec{k}' \langle \delta(\vec{k})\delta(\vec{k}') \rangle e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \int d^3\vec{x} e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}}, \\
&= \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \right)^2 \int d^3\vec{k}d^3\vec{k}' \langle \delta(\vec{k})\delta(\vec{k}') \rangle e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} + \vec{k}'), \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \langle \delta(\vec{k})\delta(\vec{k}) \rangle e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \langle |\delta(\vec{k})|^2 \rangle e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \\
\xi(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} P(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \langle \delta(\vec{x})\delta^*(\vec{x} + \vec{r}) \rangle, \tag{3.15}
\end{aligned}$$

onde usamos a definição (3.1) e

$$\int d^3\vec{x} e^{\pm i(\vec{k}\pm\vec{k}')\cdot\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} \pm \vec{k}'), \tag{3.16}$$

sendo δ^3 a função delta de Dirac. Bem como, utilizamos o teorema ergódico, em que a média do ensemble pode ser escrita com a média espacial [80].

Vimos que $P(k)$ é a transformada de Fourier da função de correlação. Pela propriedade de ortogonalidade dos modos de Fourier podemos expressar o espectro de potência $P(k)$ em termos de $\xi(\vec{x})$, na forma

$$P(k) = \int d^3\vec{x} \xi(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \tag{3.17}$$

Fazendo uma integração angular podemos reescrever a função de correlação (3.15) e o espectro de potência (3.17) como [73],

$$\xi(r) = \int_0^\infty \frac{k^2 P(k)}{2\pi^2} \frac{\text{sen}(kr)}{kr} dk, \tag{3.18}$$

$$P(k) = 2\pi \int_0^\infty r^2 \frac{\text{sen}(kr)}{kr} \xi(r) dr. \tag{3.19}$$

O espectro de potência tem dimensão de volume, nesse caso é útil definir uma quantidade adimensional, tal que:

$$\Delta^2(k) \equiv \frac{k^3 P(k)}{2\pi^2}, \tag{3.20}$$

chamado de *espectro de potência adimensional*. Essa quantidade é uma função importante na teoria da formação de estruturas, pois mede a contribuição de perturbações por unidade

de intervalo logarítmico do número de onda k , para a variação da densidade de flutuações de matéria.

Usando a definição (3.17) e as mesmas propriedades aplicadas para encontrar (3.15), achamos a correlação entre dois modos de Fourier diferentes. Considerando dois pontos \vec{x} e \vec{x}' separados por \vec{r} a correlação é [73],

$$\langle \delta(\vec{k})\delta^*(\vec{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') P(\vec{k}). \quad (3.21)$$

Os cálculos foram feitos para $\delta(\vec{k}, 0)$, ou seja, redshift $z = 0$. Na maioria das vezes o interesse é analisar um regime para algum outro redshift.

Em escalas lineares, no período de dominação da matéria, as flutuações de densidade de matéria podem ser escritas como funções separáveis,

$$\delta(\vec{k}, z) = D(z)\delta(\vec{k}), \quad (3.22)$$

assim, tomando dois redshifts z e z' , a correlação entre os modos é:

$$\langle \delta(\vec{k}, z)\delta^*(\vec{k}', z') \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') D(z)D^*(z)P(\vec{k}), \quad (3.23)$$

onde $D(z)$ é a *função de crescimento* das flutuações que depende do Modelo Cosmológico.

Nos últimos anos, o espectro de potência tornou-se a escolha comum para analisar estruturas em grandes escalas, pois para diferentes modos de Fourier do campo de densidade linear ele se torna estatisticamente independente das teorias cosmológicas.

3.1.4 Espectro de potência linear das perturbações de matéria

Vamos relacionar o espectro de potência com as flutuações de densidade de matéria. Isto fornece uma descrição observacional em larga escala, pois mostra a amplitude das flutuações em diferentes escalas de comprimento.

Primeiramente, no Universo primordial as flutuações na densidade matéria $\bar{\rho}_m \delta_m(\vec{k}, a)$ eram muito pequenas, com o passar do tempo elas foram amplificadas pela gravidade [4]. Um mistério que ainda perdura é como elas se originaram, uma possível explicação é que são flutuações quânticas impulsionadas em escalas macroscópicas pelo *ínflaton*⁶ $\Phi(\vec{k}, a_i)$, o potencial gravitacional primordial [32].

Considerando a era de predomínio da matéria, a flutuação de densidade total é tal que,

$$\sum \delta\rho \simeq \delta\rho_m = \bar{\rho}_m \delta_m, \quad \bar{\rho}_m \delta_m = \bar{\rho}_b \delta_b + \bar{\rho}_c \delta_c. \quad (3.24)$$

O potencial gravitacional $\Phi(\vec{k}, a)$ para um certo momento do Universo e o contraste de densidade da matéria $\delta_m(\vec{k}, a)$ estão relacionados pela equação de Poisson⁷. Escrevendo no

⁶ Potencial gravitacional gerado no período da inflação.

⁷ É a equação de Einstein obtida por meio da componente (00).

espaço de Fourier e considerando o limite de sub-horizonte⁸ $k\eta \gg 1$, tal que, $\mathcal{H}/k \approx 0$, assim [72]:

$$\begin{aligned} k^2\Phi &= 4\pi G a^2 (\bar{\rho}_m \delta_m + 4\bar{\rho}_r \Theta_{r,0}), \\ k^2\Phi &\approx 4\pi G a^2 \bar{\rho}_m \delta_m, \\ \Phi &\approx \frac{4\pi G}{k^2} a^2 \bar{\rho}_m \delta_m, \quad a \gg a_T, \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde a_T é o fator de escala tardio, ou seja, de um período pouco depois da equivalência radiação-matéria.

Usando a relação com o parâmetro de densidade crítica atual,

$$\bar{\rho}_m = \rho_{m,0} a^{-3}, \quad \Omega_{m,0} = \frac{\rho_{m,0}}{\rho_{cr,0}} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{m,0}, \quad (3.26)$$

$$\bar{\rho}_m = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \Omega_{m,0} a^{-3}. \quad (3.27)$$

Substituindo (3.27) em (3.25) obtemos,

$$\delta_m(\vec{k}, a) = \frac{2k^2 a}{3H_0^2 \Omega_{m,0}} \Phi(\vec{k}, a). \quad (3.28)$$

De forma sistemática, o potencial gravitacional $\Phi(\vec{k}, a)$ é escrito em termos do potencial primordial criado no período inflacionário [72],

$$\Phi(\vec{k}, a) \propto \Phi(\vec{k}, a_i) \times T(k) \times D(a), \quad (3.29)$$

sendo $T(k)$ e $D(a)$, respectivamente chamadas: *função de transferência* e *função de crescimento*.

3.1.4.1 Evolução do potencial gravitacional

Dependendo da escala das perturbações o potencial gravitacional evolui de forma diferente durante a transição de domínio da radiação para fase de matéria, conforme pode ser visto na Figura 18. Para um melhor entendimento podemos dividir em três estágios segundo o período de equivalência a_{eq} :

- Era da radiação ($a \ll a_{eq}$): basicamente todos os modos estão fora do horizonte de partículas e os potenciais são dados como constantes.
- Equivalência radiação-matéria ($a \sim a_{eq}$): os modos em larga-escala (pequenos comprimentos de onda) demoram a entrar no horizonte e evoluem de forma diferente dos modos de pequena-escala (grandes comprimentos de onda) que entram no horizonte antes da equivalência. O potencial em larga-escala sofre um forte amortecimento na sua amplitude de oscilação.

⁸ É basicamente o período em que as perturbações já estão dentro do horizonte de partículas, do Universo observável. Para o período de dominação da radiação (super-horizonte) temos: $\mathcal{H} = \eta^{-1}$

- Era da matéria ($a \gg a_{eq}$): todos os modos evoluem de forma semelhante, independentes de escala, neste caso o potencial permanece constante.

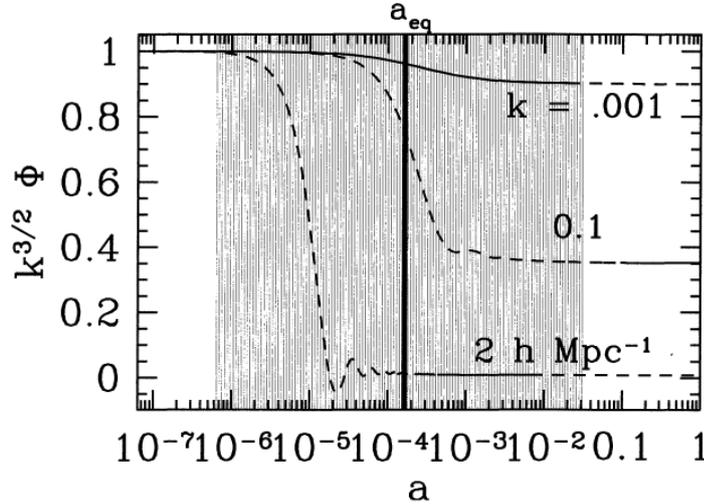


Figura 18 – Evolução linear do potencial gravitacional $\Phi(\vec{k}, a)$. A linha tracejada indica que o modo entrou no horizonte. A evolução através da região sombreada é descrita pela função de transferência. Aqui os bárions foram negligenciados, $\Omega_{m,0} = 1$ e $h = 0.5$. Fonte: [72].

3.1.4.2 Função de Transferência

Para descrever a evolução de cada número de onda k (ou perturbações) que cruza o horizonte durante a época de transferência que vai desde a era da radiação até o começo da era de matéria, define-se [72]:

$$T(k) \equiv \frac{\Phi(\vec{k}, a)}{\Phi_{LS}(\vec{k}, a)}, \quad a \gg a_{eq}, \quad (3.30)$$

chamada *função de transferência*, onde $a = a_T$ é um tempo pouco depois deste regime de transferência. Essa função depende do potencial gravitacional em larga-escala Φ_{LS} que decresce pelo fator 9/10 do potencial primordial $\Phi(\vec{k}, a_i) = \Phi_P(\vec{k})$ [72],

$$\Phi_{LS}(\vec{k}, a_T) = \frac{9}{10} \Phi_P(\vec{k}), \quad (3.31)$$

assim (3.30) pode ser escrita como,

$$T(k) = \frac{10}{9} \frac{\Phi(\vec{k}, a_T)}{\Phi_P(\vec{k})}. \quad (3.32)$$

De maneira geral, pode-se obter a função de transferência numericamente resolvendo as equações de Boltzmann para cada modo k , mas aqui faremos apenas uma descrição qualitativa visando a curva do espectro de potência.

Uma forma popular foi proposta por Bardeen, Bond, Kaiser e Szalay (BBKS) [81]:

$$T_{BBKS}(x) = \frac{\ln(1 + 0.17x)}{0.171x} [1 + 0.28x + (1.18x)^2 + (0.339x)^3 + (0.490x)^4]^{-0.25}, \quad (3.33)$$

onde $x \equiv k/k_{eq}$ e $k_{eq} = (0.073\Omega_{m,0}h)h \text{ Mpc}^{-1}$ é o número de onda que entrou no raio de Hubble na igualdade entre radiação e matéria.

A função de transferência em larga-escala ($k/k_{eq} \ll 1$) e para pequena-escala ($k/k_{eq} \gg 1$), é respectivamente:

$$T(x) \simeq 1, \quad (3.34)$$

$$T(x) \propto \frac{\ln(k)}{k^2}. \quad (3.35)$$

Um melhor ajuste para equação (3.33) foi fornecido por Eisenstein&Hu em [54], eles separam bárions e ME na função de transferência total,

$$T(k) = \left(\frac{\Omega_{b,0}}{\Omega_{m,0}} \right) T_b(k) + \left(\frac{\Omega_{c,0}}{\Omega_{m,0}} \right) T_c(k). \quad (3.36)$$

Para ME a função de transferência é dada por,

$$T_c \rightarrow \alpha_c \frac{\ln(1.8\beta_c q)}{14.2q^2}, \quad (3.37)$$

onde:

$$q = (k/\text{Mpc}^{-1})\Theta_{2.7}^2(\Omega_{m,0}h^2)^{-1} = \frac{k}{13.41k_{eq}}, \quad (3.38)$$

$$\alpha_c = a_1^{\Omega_{b,0}/\Omega_{m,0}} a_2^{-(\Omega_{b,0}/\Omega_{m,0})^3}, \quad (3.39)$$

$$a_1 = (46.9\Omega_{m,0}h^2)^{0.670} [1 + (32.1\Omega_{m,0}h^2)^{-0.532}],$$

$$a_2 = (12.0\Omega_{m,0}h^2)^{0.424} [1 + (45.0\Omega_{m,0}h^2)^{-0.582}],$$

$$\beta_c^{-1} = 1 + b_1 [(\Omega_{c,0}/\Omega_{m,0})^{b_2} - 1], \quad (3.40)$$

$$b_1 = 0.944 [1 + (458\Omega_{m,0}h^2)^{-0.708}]^{-1}$$

$$b_2 = (0.395\Omega_{m,0}h^2)^{-0.0266},$$

temos que $\Omega_{m,0} \gg \Omega_{b,0}$, então $\frac{\Omega_{b,0}}{\Omega_{m,0}} \rightarrow 0$ e $\alpha_c, \beta_c \rightarrow 1$, desta forma a função (3.37) possui a dependência abaixo,

$$T_c \sim \frac{\ln(k)}{k^2}. \quad (3.41)$$

em pequenas-escalas.

Para matéria bariônica a função de transferência é escrita como,

$$T_b \rightarrow \alpha_b \frac{\sin(kr_s)}{kr_s} \mathcal{D}(k), \quad (3.42)$$

onde,

$$\alpha_b = 2.07k_{eq}r_s(1 + R_{drag})^{-3/4}G\left(\frac{1 + z_{eq}}{1 + z_{drag}}\right), \quad (3.43)$$

$$G(y) = y\left[-6\sqrt{1+y} + (2+3y)\ln\left(\frac{\sqrt{1+y}+1}{\sqrt{1+y}-1}\right)\right], \quad (3.44)$$

$$\mathcal{D}(k) \sim \frac{\ln(k)}{k^2(1+kr_s)} + \frac{e^{-(k/k_{Silk})^{1.4}}}{1+(kr_s)^{-3}}, \quad (3.45)$$

temos que r_s é o horizonte de som acústico dado por (1.144), onde R a razão entre as densidades dos bárions e fótons,

$$R \equiv \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma} = 31.5\Omega_{b,0}h^2\Theta_{2.7}^{-4}(z/10^3)^{-1}. \quad (3.46)$$

O termo $\mathcal{D}(k)$ descreve o efeito *Silk Damping*⁹: um amortecimento das perturbações para pequenas-escalas ocasionadas pela saída aleatória dos fótons de regiões supercondensadas, é equivalente à dizer que o acoplamento fóton-bárion não é perfeito. Escrevemos a escala Silk como [54]:

$$k_{Silk} = 1.6(\Omega_{b,0}h^2)^{0.52}(\Omega_{m,0}h^2)^{0.73}[1 + (10.4\Omega_{m,0}h^2)^{-0.95}]\text{Mpc}^{-1}. \quad (3.47)$$

Temos ainda que,

$$k_{eq} = 7.46 \times 10^{-2}\Omega_{m,0}h^2\Theta_{2.7}^{-2}\text{Mpc}^{-1}, \quad (3.48)$$

$$z_{eq} = 2.50 \times 10^4\Omega_{m,0}h^2\Theta_{2.7}^{-4}, \quad (3.49)$$

onde z_{drag} é o redshift na época de arrasto, definido em (1.143) e z_{eq} do período de equivalência.

3.1.4.3 Função de Crescimento

No Modelo Cosmológico Padrão o potencial gravitacional permanece constante durante a era da matéria, mas depois que o Universo entrou na época da aceleração cósmica é esperado que varie [75]. No regime linear, a teoria perturbativa prediz que os modos no período de dominação da matéria são funções separáveis, de forma que a evolução temporal possa ser estabelecida de maneira independente da escala. Assim, o contraste de densidade da matéria pode ser escrito conforme equação (3.22),

$$\delta_m(\vec{k}, a) = \delta_m(\vec{k})D(a), \quad (3.50)$$

onde $D(a)$ é a *função de crescimento*, que descreve a evolução temporal dos potenciais após o regime da função de transferência. Define-se [72],

$$\frac{D(a)}{a} \equiv \frac{\Phi(a)}{\Phi(a_T)}, \quad a \gg a_T. \quad (3.51)$$

⁹ Amortecimento de Silk.

Na era dominada por matéria o potencial é constante, então $D(a) \simeq a$, portanto usando (3.51) e (3.32) convencionam-se uma forma geral para o potencial (3.29),

$$\Phi(\vec{k}, a) = \frac{9}{10} \Phi_P(\vec{k}) T(k) \frac{D(a)}{a}. \quad (3.52)$$

Desse jeito a flutuação de densidade da matéria (3.28) se torna,

$$\delta_m(\vec{k}, a) = \frac{3}{5} \frac{k^2}{H_0^2 \Omega_{m,0}} \Phi_P(\vec{k}) T(k) D(a). \quad (3.53)$$

Calculando o espectro de potência (3.23) para flutuação de densidade de matéria,

$$P_m(k) = \langle \delta_m(\vec{k}, a) \delta_m^*(\vec{k}', a) \rangle = \left(\frac{3}{5} \frac{k^2}{H_0^2 \Omega_{m,0}} \right)^2 T(k) T(k') D^2(a) \langle \Phi_P(\vec{k}) \Phi_P^*(\vec{k}') \rangle. \quad (3.54)$$

A variância do potencial primordial é dado por (3.21),

$$\langle \Phi_P(\vec{k}) \Phi_P^*(\vec{k}') \rangle = (2\pi)^3 P_{\Phi_P}(k) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (3.55)$$

a função delta de Dirac δ tem o objetivo de reforçar a independência dos diferentes modos e $P_{\Phi_P}(k)$ é espectro de potência primordial. A teoria inflacionária prevê que [72],

$$P_{\Phi_P}(k) \equiv \frac{50\pi^2}{9k^3} \left(\frac{k}{H_0} \right)^{n_s-1} \delta_H^2 \left(\frac{\Omega_{m,0}}{D(a=a_0)} \right)^2, \quad (3.56)$$

onde δ_H é a amplitude do potencial no horizonte de cruzamento e n_s é o índice espectral¹⁰ cujo valor é aproximadamente 1, ou seja, corresponde a um espectro escalar-invariante.

Desta maneira, a expressão (3.54) é escrita [5],

$$\begin{aligned} \langle \delta_m(\vec{k}, a) \delta_m^*(\vec{k}', a) \rangle &= \left(\frac{3}{5} \frac{k^2}{H_0^2 \Omega_{m,0}} \right)^2 T(k) T(k') D^2(a) (2\pi)^3 P_{\Phi_P}(k) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \\ &= \left(\frac{3}{5} \frac{k^2}{H_0^2 \Omega_{m,0}} \right)^2 T(k) T(k') D^2(a) (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \times \\ &\quad \times \left[\frac{50\pi^2}{9k^3} \left(\frac{k}{H_0} \right)^{n_s-1} \delta_H^2 \left(\frac{\Omega_{m,0}}{D(a=a_0)} \right)^2 \right], \\ &= \left(\frac{3}{5} \frac{k^2}{H_0^2 \Omega_{m,0}} \right)^2 T^2(k) D^2(a) \left[\frac{50\pi^2}{9k^3} \left(\frac{k}{H_0} \right)^{n_s-1} \delta_H^2 \left(\frac{\Omega_{m,0}}{D(a=a_0)} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Assim, o espectro de potência da matéria assume a forma:

$$P_m(k, a) = \langle \delta_m(\vec{k}, a) \delta_m^*(\vec{k}', a) \rangle = 2\pi^2 \delta_H^2 \frac{k^{n_s}}{H_0^{n_s+3}} T^2(k) \left(\frac{D(a)}{D(a_0)} \right)^2. \quad (3.58)$$

¹⁰ Mede como as perturbações se alteram com a escala.

Observamos que essa expressão pode ser pensada como o desvio padrão da distribuição relativa as perturbações de matéria, pois os espectros de potências dependem de como são estabelecidos os valores esperados das perturbações de matéria.

É conveniente escrevermos,

$$A \equiv \frac{2\pi^2\delta_H^2}{H_0^{n_s+3}}, \quad (3.59)$$

$$D(a_0) = 1. \quad (3.60)$$

Portanto, simplificamos (3.58) para,

$$P_m(k, a) = Ak^{n_s}T^2(k)D^2(a), \quad (3.61)$$

este é o espectro de potência linear da matéria (ou galáxias) pode ser usado para estudar as contribuições fracionárias da densidade de matéria em diferentes escalas. Ele contém todas as informações sobre a estrutura em larga escala e, portanto, é útil na medição das propriedades do Universo [82].

De maneira geral, o espectro primordial pode ser escrito como: $P_\Phi(k) = Ak^{n_s}$, sendo aproximadamente linear de acordo com a teoria inflacionária, onde $n_s \approx 1$.

Nas próximas seções mostraremos os fittings do espectro de potência da matéria disponíveis na literatura para os Modelos Cosmológicos Λ CDM e IDE.

3.2 Espectro de potência angular de 21-cm

3.2.1 Temperatura do brilho de 21-cm

A linha de 21-cm é usada como uma sonda das nuvens de gás do HI ao longo da linha de visão para alguma fonte de rádio de fundo. A medição da intensidade luminosa advinda de uma dada nuvem de gás em unidades de temperatura é escrita pela relação [62],

$$T_b = \frac{c^2}{2k_B\nu^2}I_\nu, \quad (3.62)$$

onde c é a velocidade da luz, I_ν é a intensidade intrínseca da radiação observada na frequência ν , k_B é a constante de Boltzmann e T_b é a temperatura de brilho.

A temperatura de brilho de 21-cm T_{21} , está relacionada com a função de distribuição de fótons f por [83],

$$k_B T_{21} = \frac{(h_p c)^3 E f}{2}, \quad (3.63)$$

onde h_p é a constante de Planck, k_B é a constante de Boltzmann, E é a energia que está relacionada com o redshift z e com a energia da emissão do fóton de 21-cm E_{21} através de,

$$1 + z = \frac{E_{21}}{E}. \quad (3.64)$$

A função distribuição dos fótons é escrita como [83],

$$f(E, \hat{n}^i) = \frac{3}{16\pi} \frac{n_{HI} A_{10} (1+z)}{E_{21}^2} \left| \frac{d\lambda}{dz} \right|, \quad (3.65)$$

em que n_{HI} é a densidade numérica de hidrogênio neutro, a taxa de emissão espontânea é $A_{10} = 2\pi\alpha\nu_{21}^3 h_p^2 / (3c^4 m_e^2) \approx 2,869 \times 10^{-15} s^{-1}$, λ é o parâmetro afim de propagação dos fótons e \hat{n}^i é o vetor unitário ao longo da linha de visão.

Assim, substituindo (3.64) e (3.65) na expressão (3.63), chegamos na equação para a temperatura do brilho de 21-cm,

$$T_{21}(z, \hat{n}^i) = \frac{3}{32\pi} \frac{(h_p c)^3 n_{HI} A_{10}}{k_B E_{21}} \left| \frac{d\lambda}{dz} \right|. \quad (3.66)$$

Ignorando as perturbações, temos que:

$$\left| \frac{dz}{d\lambda} \right| = (1+z) H(z) E_{21}, \quad (3.67)$$

e a temperatura do brilho (observada) no fundo homogêneo e isotrópico é dada por [83],

$$\begin{aligned} \bar{T}_{21}(z) &= \frac{3(h_p c)^3 \bar{n}_{HI} A_{10}}{32\pi k_B E_{21}^2 (1+z) H(z)}, \\ \bar{T}_{21}(z) &= 0,188 K h \Omega_{HI}(z) \frac{(1+z)^2}{E(z)}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

no qual usamos a relação $E(z) = \frac{H(z)}{H_0}$ e Ω_{HI} é o parâmetro de densidade do hidrogênio neutro no Universo em unidades da densidade crítica atual $\Omega_{HI} \equiv (1+z)^{-3} \frac{\rho_{HI}(z)}{\rho_{cr,0}}$. Na Figura 19, pode-se ver a fração de densidade do HI e como sua determinação é complicada, por isso consideramos [84],

$$\Omega_{HI} b_{HI} = 0,62_{-0,15}^{+0,23} \times 10^{-3}, \quad (3.69)$$

onde b_{HI} é o parâmetro bias, que admitimos ser uma constante independente de escalas e relaciona o contraste de densidade das galáxias δ_g com o contraste de densidade de matéria δ_m , tal que [72],

$$b_{HI} \equiv \delta_g / \delta_m. \quad (3.70)$$

Para fins deste trabalho, consideramos $b_{HI} = 1$. Isto implica que o espectro de potência da matéria está relacionado ao espectro de potência das galáxias [5]:

$$P_g(k) = b^2 P_m(k). \quad (3.71)$$

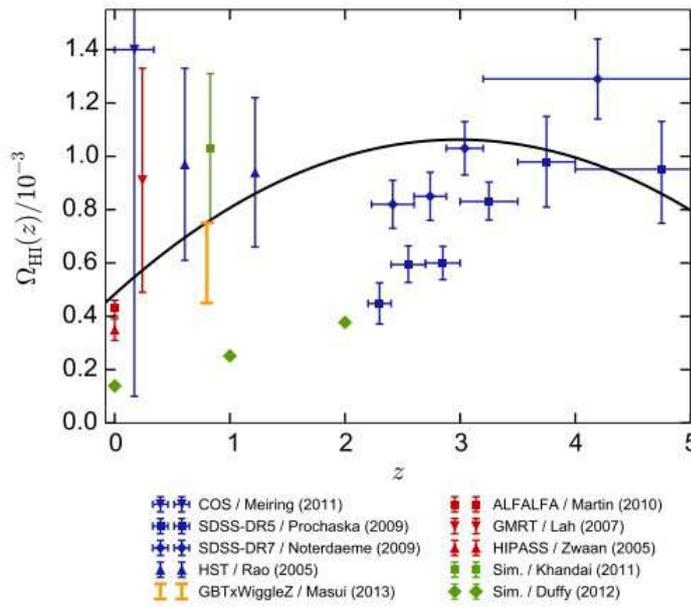


Figura 19 – Fração de densidade do HI no Universo em função do redshift. Fonte: [85].

3.2.2 Espectro de potência angular da linha de 21 cm

Essa seção é baseada em [5] e [86]. Assumimos que flutuações na densidade do HI são as únicas causadoras de perturbações na temperatura de 21 cm observada, ou seja, ignoramos os efeitos¹¹ de *Distorção Espacial do Redshift*, *Sachs-Wolfe* e *lentes gravitacionais*.

Temos que as flutuações na temperatura de brilho de 21 cm em uma dada direção \hat{n} é [5, 86],

$$\delta T_{21}(\chi(z)\hat{n}, z) = \bar{T}_{21}(z)\delta_{HI}(\chi(z)\hat{n}, z), \quad (3.72)$$

onde $\chi(z)$ é a distância comóvel dada por (1.107) e $\delta_{HI} = \delta\rho_{HI}/\rho_{HI}$ é o contraste de densidade do HI.

Tomando a transformada de Fourier do $\delta_{HI}(\hat{n})$,

$$\delta_{HI}(\chi(z)\hat{n}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \delta_{HI}(\vec{k}, z) e^{i\chi(z)\vec{k}\cdot\hat{n}}, \quad (3.73)$$

agora expandindo o fator exponencial em harmônicos esféricos¹² encontramos,

$$\begin{aligned} \delta_{HI}(\chi(z)\hat{n}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \delta_{HI}(\vec{k}, z) \left(4\pi i^l \sum_{l,m} j_l(\chi(z)k) Y_{lm}(\hat{n}) Y_{lm}^*(\hat{k}) \right), \\ &= \sum_{l,m} \left(4\pi i^l \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \delta_{HI}(\vec{k}, z) j_l(\chi(z)k) Y_{lm}(\hat{n}) Y_{lm}^*(\hat{k}) \right), \end{aligned} \quad (3.74)$$

¹¹ Considerar esses efeitos astrofísicos faz com que apareçam mais termos nas equações descritas nesta subseção, que torna a formulação teórica desafiadora, tanto de cunho matemático, quanto interpretativo. Para o objetivo deste trabalho, a abordagem feita à seguir já basta para tratarmos da informações cosmológicas de nosso interesse.

¹² Chamado também de expansão de Rayleigh.

na qual j_l é a função esférica de Bessel de ordem l e $Y_{lm}(x)$ os harmônicos esféricos.

Substituindo (3.74) em (3.72) obtemos,

$$\delta T_{21}(\chi(z)\hat{n}, z) = 4\pi\bar{T}_{21}(z) \sum_{l,m} i^l \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \delta_{HI}(\vec{k}, z) j_l(\chi(z)k) Y_{lm}(\hat{n}) Y_{lm}^*(\hat{k}). \quad (3.75)$$

Pode-se projetar a flutuação (3.72) em uma dada direção \hat{n} no céu e fazer a observação para uma determinada faixa de redshifts Δz por meio de [5, 86],

$$\delta T_{21}(\hat{n}) = \int_{\Delta z} dz W(z) \delta T_{21}(\chi(z)\hat{n}, z), \quad (3.76)$$

em que usamos a chamada função janela $W(z)$, que neste caso, fornece informações sobre detectabilidade do sinal de 21 cm. Admitimos que,

$$W(z) = \begin{cases} 1/\Delta z, & \text{se } z \in \Delta z, \\ 0, & \text{se } z \notin \Delta z. \end{cases} \quad (3.77)$$

Usando (3.75) em (3.76) achamos,

$$\begin{aligned} \delta T_{21}(\hat{n}) &= \int_{\Delta z} dz W(z) \left(4\pi\bar{T}_{21}(z) \sum_{l,m} i^l \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \delta_{HI}(\vec{k}, z) j_l(\chi(z)k) Y_{lm}(\hat{n}) Y_{lm}^*(\hat{k}) \right), \\ &= \sum_{l,m} \left(4\pi i^l \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \int_{\Delta z} dz W(z) \bar{T}_{21}(z) \delta_{HI}(\vec{k}, z) j_l(\chi(z)k) Y_{lm}^*(\hat{k}) \right) Y_{lm}(\hat{n}), \\ &= \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\hat{n}). \end{aligned} \quad (3.78)$$

onde a_{lm} são os coeficientes dos harmônicos esféricos escritos como,

$$a_{lm} = 4\pi i^l \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \int_{\Delta z} dz W(z) \bar{T}_{21}(z) \delta_{HI}(\vec{k}, z) j_l(\chi(z)k) Y_{lm}^*(\hat{k}). \quad (3.79)$$

O espectro de potência angular é definido pelo ensemble médio [86],

$$C_l \equiv \langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle, \quad (3.80)$$

logo [5],

$$C_l = (4\pi)^2 \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3} \left(\int_{\Delta z, \Delta z'} dz dz' K(\vec{k}, z) K^*(\vec{k}', z') \langle \delta_{HI}(\vec{k}, z), \delta_{HI}^*(\vec{k}', z') \rangle \right), \quad (3.81)$$

compactamos em $K(\vec{k}, z)$ os seguintes termos,

$$K(\vec{k}, z) \equiv i^l W(z) \bar{T}_{21}(z) j_l(k\chi(z)) Y_{lm}^*(\hat{k}). \quad (3.82)$$

Considerando o HI como um traçador de matéria, escrevemos [5]:

$$b_{HI}(\vec{k}, z) = \frac{\delta_{HI}(\vec{k}, z)}{\delta_m(\vec{k}, z)} \longrightarrow \delta_{HI}(\vec{k}, z) = b_{HI}(\vec{k}, z) \delta_m(\vec{k}, z). \quad (3.83)$$

Assim,

$$P_{21}(k, z) = \langle \delta_{HI}(\vec{k}, z) \delta_{HI}^*(\vec{k}', z') \rangle = b_{HI}(\vec{k}, z) b_{HI}^*(\vec{k}', z') \langle \delta_m(\vec{k}, z) \delta_m^*(\vec{k}', z') \rangle, \quad (3.84)$$

onde $P_{21}(k, z)$ é o espectro de potência linear de 21 cm. usando o fato que podemos escrever as flutuações como funções separáveis,

$$\delta_m(\vec{k}, z) \equiv \delta_{\vec{k}}(z) = D(z) \delta_{\vec{k}}, \quad (3.85)$$

onde $D(z)$ é a função de crescimento definida anteriormente. Encontramos,

$$P_{21}(k, z) = \langle \delta_{HI}(\vec{k}, z) \delta_{HI}^*(\vec{k}', z') \rangle = b_{HI}(\vec{k}, z) b_{HI}^*(\vec{k}', z') D(z) D^*(z') \langle \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}'}^* \rangle. \quad (3.86)$$

O termo $\langle \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}'}^* \rangle$ é a transformada de fourier da função de correlação de dois pontos dada por (3.21). Logo,

$$P_{21}(k, z) = \langle \delta_{HI}(\vec{k}, z) \delta_{HI}^*(\vec{k}', z') \rangle = b_{HI}(k, z) b_{HI}^*(k', z') D(z) D^*(z') (2\pi)^3 \delta_D^3(\vec{k} - \vec{k}') P_m(k), \quad (3.87)$$

no qual $P_m(k)$ é o espectro de potência da matéria.

Substituindo (3.87) em (3.81) e utilizando a relação,

$$\int d^3 \vec{k}' b_{HI}^*(k', z') K^*(\vec{k}', z') \delta_D(\vec{k} - \vec{k}') = b_{HI}^*(k, z') K^*(\vec{k}, z'), \quad (3.88)$$

obtemos,

$$C_l = (4\pi)^2 \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \int_{\Delta z, \Delta z'} dz dz' b_{HI}(k, z) b_{HI}^*(k, z') K(\vec{k}, z) K^*(\vec{k}, z') D(z) D^*(z') P_m(k).$$

Como foi estabelecido anteriormente o parâmetro bias b_{HI} é constante assim,

$$b_{HI}(k, z) b_{HI}^*(k, z') = b_{HI}^2.$$

Portanto, obtemos [5, 86],

$$\begin{aligned} C_l &= \frac{2b_{HI}^2}{\pi} \int_{\Delta z} dz W(z) \bar{T}_{21}(z) D(z) \int_{\Delta z'} dz' (k, z') W^*(z') \bar{T}_{21}^*(z') D^*(z') \times \\ &\quad \times \int d^3 \vec{k} P_m(k) j_l(k\chi(z)) j_l(k\chi(z')) Y_{lm}(\hat{k}) Y_{lm}^*(\hat{k}'), \\ C_l &= \frac{2b_{HI}^2}{\pi} \int_{\Delta z} dz W(z) \bar{T}_{21}(z) D(z) \int_{\Delta z'} dz' W(z') \bar{T}_{21}(z') D(z') \times \\ &\quad \times \int k^2 dk P_m(k) j_l(k\chi(z)) j_l(k\chi(z')). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Para pequenos intervalos de redshifts que são usualmente chamados de *Bins*, Δz_i e Δz_j , centrados nos redshifts z_i e z_j , o *espectro de potência angular cruzado* é [5]:

$$\begin{aligned} C_l^{ij} &= \frac{2b_{HI}^2}{\pi} \int_{\Delta z_i} dz W(z) \bar{T}_{21}(z) D(z) \int_{\Delta z_j} dz' W(z') \bar{T}_{21}(z') D(z') \times \\ &\quad \times \int k^2 dk P_m(k) j_l(k\chi(z)) j_l(k\chi(z')). \end{aligned} \quad (3.90)$$

Admitimos que estamos em um regime de céu plano, para que possamos usar a aproximação de Limber [87] e retirar a dependência em k , visto que:

$$k\chi(z) \approx \sqrt{l(l+1)} \approx l + 1/2 + \mathcal{O}(1/l). \quad (3.91)$$

A função de Bessel nesta aproximação é [88],

$$j_l(k\chi(z)) \longrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2(l+1/2)}} \delta_D((l+1/2) - k\chi(z)) = \sqrt{\frac{\pi}{2l+1}} \frac{\delta_D\left(\frac{(l+1/2)}{\chi(z)} - k\right)}{\chi(z)}, \quad (3.92)$$

logo,

$$\int dk k^2 P_m(k) j_l(k\chi(z)) j_l(k\chi(z')) \simeq \frac{\pi}{2\chi^2(z)} P_m\left(\frac{l+1/2}{\chi(z)}\right) \delta_D(\chi(z) - \chi(z')). \quad (3.93)$$

Usando a relação de distância comóvel $cdz = H(z)d\chi(z)$, encontramos:

$$\delta_D(\chi(z) - \chi(z')) = \frac{\delta_D(z - z')}{\left\| \frac{d\chi(z)}{dz} \right\|} = \frac{\delta_D(z - z')}{cH^{-1}}, \quad (3.94)$$

deste modo substituindo (3.94) em (3.93), depois (3.93) em (3.90) e fazendo uso da função delta de Dirac para resolver a integral sobre dz' , chegamos em:

$$C_l = \frac{b_{HI}^2}{c} \int_{\Delta z} dz H(z) \left[\frac{W(z) \bar{T}_{21}(z) D(z)}{\chi(z)} \right]^2 P_m\left(\frac{l+1/2}{\chi(z)}\right),$$

onde $H(z) = H_0 E(z)$. Deduzimos [5],

$$C_l = \frac{H_0 b_{HI}^2}{c} \int_{\Delta z} dz E(z) \left[\frac{W(z) \bar{T}_{21}(z) D(z)}{\chi(z)} \right]^2 P_m\left(\frac{l+1/2}{\chi(z)}\right), \quad (3.95)$$

descreve o *espectro de potência angular de 21 cm* observado. Esta equação leva a um grande ganho computacional, pois as três integrais iniciais são reduzidas a apenas uma [5]. A função $P_m\left(\frac{l+1/2}{\chi(z)}\right)$ é dada por (3.61), $D(z)$ é a função de crescimento e $E(z)$ é a função expansão. Esse espectro é geralmente representado sob a forma: $l(l+1)C_l/2\pi$.

Um dos observáveis mais estudados por meio dos espectros de potências é o pico da BAO, cuja precisão da escala e localização permite restringir a distância do diâmetro angular, a função Hubble e Modelos de EE. O pico da BAO é/foi alvo de várias pesquisas, inclusive algumas ainda em construção, por exemplo as pesquisas de 21 cm.

3.3 Pesquisas Cosmológicas

Para explorar completamente os processos físicos envolvidos na evolução do Universo e retirar as informações cosmológicas são necessários obtenção e análises de dados “reais”

(observados) que possam ser utilizados para validar as formulações teóricas. Isto é, existe a necessidade de investigar a distribuição de matéria (galáxias) no Universo. Assim, várias *surveys* (pesquisas) com galáxias foram concluídas nos últimos tempos e outras estão em processo de construção e desenvolvimento. Os resultados destas pesquisas influenciam os desdobramentos dos Modelos Cosmológicos e a descrição da formação de estruturas.

As pesquisas normalmente usam o espectro de luz emitido pelas galáxias, incluindo linhas de absorção e emissão, para avaliar a distância até nós e estimar o redshift. Por meio disto, são capazes de fornecer estimativas confiáveis de parâmetros cosmológicos, como também, podem ajudar a desvendar à natureza da EE e outros problemas que cercam os Modelos atuais. Sendo assim, obtendo os espectros de galáxias (aglomerados e etc) consegue-se extrair uma gama de informações cosmológicas.

Devido os crescentes avanços tecnológicos nas últimas décadas as pesquisas foram amplamente impulsionadas pela criação de instrumentações, telescópios, radiotelescópios, espectrógrafos¹³ e etc, que propiciam a observação simultânea de várias galáxias e sondam áreas mais profundas do céu na busca de dados sobre o Universo primordial. Por isso, vamos fazer uma breve descrição sobre as principais pesquisas que tem/tiveram por objetivo coletar dados para modelar os espectros de potências estudados nesta dissertação, para assim investigar a BAO, como também EE, ME entre outros pontos.

3.3.1 Sloan Digital Sky Survey

O Sloan Digital Sky Survey (SDSS) é uma colaboração internacional que conta com centenas de cientistas em dezenas de instituições, entrou em atividade no ano de 2000, desde lá passou por várias modificações e aprimoramentos, hoje está em sua quarta versão, o SDSS-IV. Os resultados obtidos até o momento ajudaram a criar mapas tridimensionais do Universo com muitos mais detalhes, com imagens multicoloridas cobrindo aproximadamente um terço do céu e modelando espectros para mais de três milhões de objetos astronômicos [55]. Todos as medidas, imagens, espectros e detalhes técnicos das fases do SDSS estão disponíveis para qualquer pessoa online no site <<https://www.sdss.org/science/data-release-publications/>>.

Os projetos anteriores: SDSS I (2000-2005), SDSS II (2005-2008) e SDSS III (2008-2014), resumidamente proporcionaram a criação de um mapa uniforme e bem calibrado do Universo em larga escala, descobriram mais de 500 supernovas tipo Ia, propiciaram uma compreensão mais profunda da história do Universo, mediram a taxa de expansão do Universo, como também puderam mapear os movimentos e a composição de mais de 250 mil estrelas da Via Láctea. Todos as fases tiveram subprojetos de pesquisas cujos objetivos foram buscar informações específicas do Universo.

¹³ É um instrumento astronômico que dispersa a luz de um objeto em seus comprimentos de onda, formando um espectro registrado por meio de uma fotografia.

O SDSS I foi a primeira pesquisa à detectar a escala característica das oscilações acústicas bariônicas (BAOs) que foram “impressas” no início do Universo. Desde então, um de seus esforços é medir a escala das BAOs com mais precisão e o principal responsável por esta área de pesquisa é subprojeto BOSS (Baryon Oscillation Spectroscopic Survey) um espectrógrafo implementado no SDSS III.

A fase do projeto em andamento é o SDSS-IV, iniciou suas observações em 2014 e pretende buscar dados até 2020. Ele conta com subprojetos responsáveis por fazer pesquisas em distâncias diversas e redshifts de períodos específicos da evolução do Universo. Como por exemplo:

- **e-BOSS** (Extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey) - É uma pesquisa cosmológica de galáxias, em particular, quasares para investigar a fase inicial da história do Universo que ainda não foi explorada, isso equivale a um período que o Universo tinha menos de três bilhões de anos. Seus resultados ajudarão a melhorar as restrições e natureza da EE, bem como procuram detectar os efeitos dos neutrinos e determinar a escala de sua massa. Suas observações juntamente com o projeto inicial BOSS estão restritas nos redshifts vistas na Figura 20.
- **APOGEE-2** (APO¹⁴ Galaxy Evolution Experiment 2) - É uma pesquisa espectroscópica no infravermelho da nossa galáxia nos hemisférios norte e sul. Busca dados espectrais que possam contribuir para explicação mais precisa sobre a formação de estrelas, conteúdo químico da Via Láctea, dinâmica do halo da nossa galáxia, entre outros paradigmas.
- **MaNGA** (Mapping Nearby Galaxies at APO) - É uma pesquisa cujo objetivo é a obtenção de espectros em toda a face das galáxias alvo, usando feixes de fibra projetados de maneira personalizada. Isso é feito pela primeira vez, pois, até hoje o SDSS obteve espectros apenas no centro das galáxias. O intuito desta observação é compreender a “história de vida” das galáxias atuais, através da coleta de “pistas” impressas desde o seu nascimento e desenvolvimento, irá explorar também o crescimento, fusão e morte de estrelas. Ao final produzirá mapas bidimensionais com as informações obtidas.

Instrumentação

Vamos citar os principais instrumentos usados nas pesquisas do SDSS [55]:

- Telescópio Sloan Foundation de 2,5m no Observatório Apache Point;

¹⁴ Apache Point Observatory - É um observatório astronômico, localizado nas Montanhas do Sacramento, no novo México nos Estados Unidos.

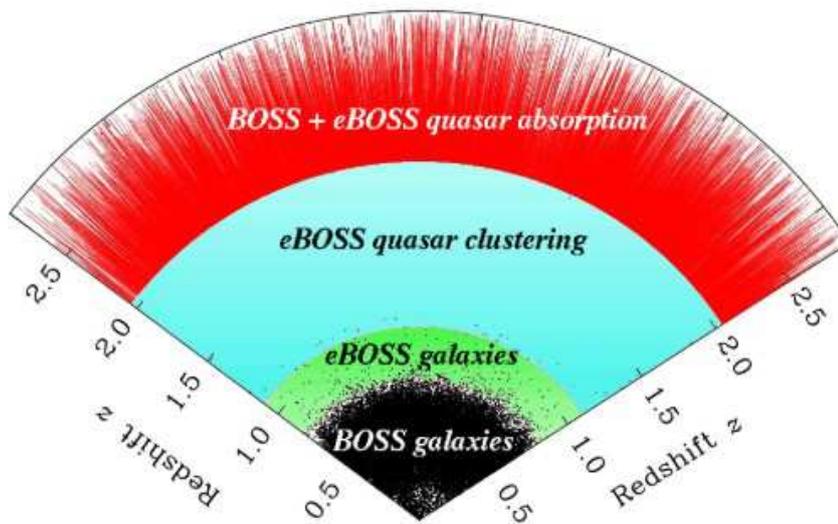


Figura 20 – Coberta das pesquisas BOSS e e-BOSS. Fonte: [55].

- Telescópio Irénée du Pont no Observatório Las Campanas [89];
- Telescópio NMSU de 1 metro no Observatório Apache Point;
- Espectrógrafos:
 - eBOSS / BOSS;
 - APOGEE: O APOGEE-1 (Telescópio Sloan Foundation) e o APOGEE-2 (Telescópio Irénée du Pont);
 - MaNGA;
 - MARVELS.
- Câmera com 30 CCDs¹⁵ fotométricos e 24 CCDs astrométricos, dentre outras características.

3.3.2 WiggleZ Dark Energy Survey

O WiggleZ Dark Energy Survey (2006-2011) foi um levantamento astronômico de espectros de galáxias na faixa de $0,2 < z < 1,0$, realizado no Telescópio Anglo-Australiano (AAT) de 3,9m no Observatório Siding Spring, localizado em Nova Gales do Sul, Austrália. Recebeu este nome “Wiggle” (Mexer) em virtude da medição da escala das BAOs na distribuição de galáxias, fazendo referência ao deslocamento dos bárions até determinada escala.

¹⁵ São sensores semicondutores que capturam imagens, basicamente é formado por um circuito integrado composto por uma matriz de capacitores acoplados. Essas peças são de grande importância na produção das imagens digitais de alta resolução, usados em imagens de satélites, equipamentos médico-hospitalares e na astronomia.

Teve como alvo as galáxias da linha de emissão azul, cujo um objetivo subjacente da pesquisa foi melhorar a compreensão da EE, usando medidas das BAOs, fornecer dados do crescimento das estruturas utilizando distorções do redshift. Os resultados da pesquisa [90] podem ser usados em conjunto com as medições da CMB para fornecer estimativas mais precisas da composição do Universo e parâmetros cosmológicos.

Instrumentação

- Espectrógrafo AAOmega: é um espectrógrafo de feixe duplo com sistema de campo de dois graus (2dF), projetado para permitir a aquisição de até 392 espectros simultâneos de objetos em qualquer lugar dentro de um campo de dois graus no céu. Cobre comprimentos de onda de 370 nm à 950 nm e a resolução espectral de 1.000 a 8.000 no modo multi-objeto.

3.3.3 6dF Galaxy Survey

A 6dF Galaxy Survey¹⁶ (2001-2006) [91] foi uma pesquisa de desvio para o vermelho conduzida pelo Observatório Anglo-Australiano (AAO) com o telescópio Schmidt de 1,24 m, localizado ao lado do telescópio anglo-australiano de 3,9 m no Observatório Siding Spring, Austrália.

Os principais objetivos foram: medir os redshifts e velocidades peculiares de uma amostra selecionada de galáxias no infravermelho próximas as áreas digitalizadas pelo 2MASS¹⁷. Coletou 136.304 espectros, 110.256 redshifts ao sul do céu e um catálogo de 125.071 galáxias. O desvio para o vermelho médio da pesquisa foi de $z = 0,052$. Com seus resultados é possível restringir os parâmetros cosmológicos e assim como as demais citadas até o momento, detectou um sinal de oscilação acústica bariônica (BAO).

Instrumentação

- Espectrógrafo de fibra de múltiplos objetos do Campo de Seis Graus (6dF).

Todos as pesquisas acima são feitas por meio da análise do espectro de radiação eletromagnética, emitido por objetos astronômicos, tiveram resultados muito satisfatórios e que são usados em diversos estudos. Essas observações são espectroscópicas, mas temos também pesquisas fotométricas, como por exemplo: Dark Energy Survey (DES¹⁸) [93].

¹⁶ Pesquisa de galáxias de campo de seis graus.

¹⁷ Two Micron All Sky Survey (1997-2001) mapeou o céu inteiro em três faixas de infravermelho mais próximas [92].

¹⁸ <<https://www.darkenergysurvey.org>>

3.3.4 Dark Energy Survey

A Dark Energy Survey (DES) (2013-Atuando) é uma colaboração internacional com mais de 400 cientistas espalhados em instituições nos Estados Unidos, Espanha, Reino Unido, Brasil, Alemanha, Suíça e Austrália, foi projetada para investigar a origem do Universo acelerado, ou seja, com o objetivo de explicar a natureza da EE, medindo a história de 14 bilhões de anos de expansão cósmica com alta precisão. Seus primeiros resultados [93] equivalentes ao período de 2013-2016 foram divulgados em 2018.

A pesquisa mapeou centenas de milhões de galáxias, detectou milhares de supernovas e buscou padrões de estrutura cósmica, na faixa de redshifts $0,2 < z < 1,3$, que revelarão possivelmente a natureza da misteriosa energia escura.

Dentre suas diversas estimativas¹⁹ a colaboração obteve a função de correlação e mediu a escala das BAOs da distribuição de galáxias para redshift 1 [94].

Instrumentação

A colaboração construiu e está usando uma câmera digital extremamente sensível de 570 megapixels e 2.2 graus do campo de visão, chamada DECam, composta por cinco lentes, um sistema de posicionamento e alinhamento Hexapod, um obturador, um conjunto de filtros de cores e um gerador de imagens digitais. Essa câmera está montada no telescópio Victor M. Blanco de 4 metros, localizado no Observatório Interamericano Cerro Tololo, no Chile.

3.3.5 Mapeamento de Intensidade de 21 cm

Além das pesquisas já mencionadas, outra maneira de investigar características do Universo é observando os espectros eletromagnéticos na faixa de rádio, pois as galáxias, em especial os quasares, emitem fortemente ondas de rádio. Essa observação é feita por meio de radiotelescópios que capturam essas ondas que não podem ser vista a olho nu. Devido a grande quantidade de Hidrogênio neutro (HI) no Universo e ao fato dele emitir radiação na faixa de rádio no comprimento de onda de aproximadamente 21 cm, que pode ser detectada facilmente pelos radiotelescópios, esta radiação indica uma fonte promissora sobre a estrutura das galáxias. Em virtude disto, projetos de pesquisa para observações do HI, mais especificamente a linha de emissão de 21 cm, para usar como um rastreador de campo de matéria tem sido desenvolvidos com a introdução de uma técnica muito promissora para este fim: o Mapeamento de Intensidade de 21 cm (IM²⁰) [63].

A técnica IM irá ajudar a mapear grandes áreas do Universo e alguns dos objetivos é fornecer medidas das estruturas 3D, complementar os dados da CMB [63], medir fenômenos

¹⁹ Que podem ser encontradas em <<https://des.ncsa.illinois.edu/releases/y1a1>>.

²⁰ Intensity Mapping.

em escalas extremamente grandes [95] para obter informações relacionadas ao Universo primitivo, fazer correções relativísticas gerais à função de correlação de matéria [96], medir as oscilações acústicas com mais precisão [97] e testar Modelos de EE [98].

As pesquisas de IM podem ser realizadas mais rapidamente que as pesquisas ópticas de redshifts (convencionais), pois é possível mapear volumes significativamente maiores, fornecendo excelentes restrições ao longo da linha de visão radial, com baixa resolução angular²¹. Abaixo citamos alguns radiotelescópios que usam a técnica de IM do HI ou irão aplicá-la no futuro:

- CHIME²² - Operando desde setembro de 2018 no Canadá, com alcance de frequência 400 – 800 MHz e redshifts 0,8 – 2,5;
- FAST²³ - Em fase de testes desde 2016, localizado na China, com alcance de frequência de 70MHz - 3 GHz e redshifts 0,5 – 2,5 ;
- SKA²⁴ - projeto de construção do maior radiotelescópio do mundo com mais de 1 km quadrado de área de coleta, com núcleos localizados na Austrália e África do Sul, a previsão é iniciar as observações oficiais em 2022, com alcance de frequências: 50 MHz-350 MHz e de 350 MHz - 15,3 GHz. Tem como meta ser o primeiro a fazer medições detalhadas das condições sob as quais as primeiras estrelas e galáxias formaram-se, e da época de reionização.
- TIANLAI²⁵ é um projeto de radiotelescópio planejado por cientistas da China, Canadá, França e USA, destinado a detectar EE em $0 < z < 2,5$, na frequência 0,4-1,4 GHz, medindo as BAOs no espectro de potência da estrutura em larga escala, por meio do IM do HI no Universo após a época da reionização [99], está localizado na China e iniciou as observações no final de 2016.
- BINGO²⁶ - é um radiotelescópio que usará a técnica de IM e está em processo de construção aqui no Brasil. Os detalhes técnicos da pesquisa podem ser vistos no trabalho de “*The BINGO telescope: a new instrument exploring the new 21-cm cosmology window*” [100] (C.A. Wuensche e collaboration BINGO, 2018). Iremos comentar um pouco mais desta promissora pesquisa no próximo subtópico.

²¹ A resolução angular é relação entre o comprimento de onda da radiação observada e o diâmetro de abertura do telescópio ou radiotelescópio.

²² Canadian Hydrogen Intensity Mapping Experiment - <<https://chime-experiment.ca/>>;

²³ Five-hundred-meter Aperture Spherical radio Telescope - <fast.bao.ac.cn>;

²⁴ Square Kilometre Array - <<https://www.skatelescope.org/>>.

²⁵ A palavra Tianlai significa som “celestial” - <<http://tianlai.bao.ac.cn>>;

²⁶ Baryon acoustic oscillations from Integrated Neutral Gas Observations - <<http://www.bingotelescope.org>>;

Na Figura 21, podemos ver os possíveis alcances das pesquisas de mapeamento de intensidade da linha de 21 cm e os períodos correspondentes que poderemos extrair informações.

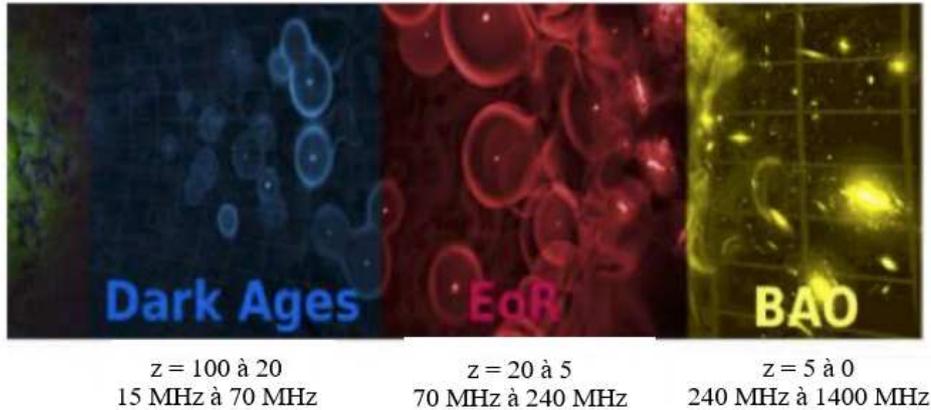


Figura 21 – História do Universo com assinatura das BAOs desde a época da recombinação e os redshifts dos períodos de observações da linha de 21 cm com radiotelescópios. O BINGO está interessado em observar o fenômeno das BAOs depois da reionização ($z < 5$), mais precisamente $0,13 < z < 0,48$. Fonte: [100].

Na Figura 22, notamos que o BINGO, TIANLAI e CHIME são pesquisas complementares, pois juntamente cobrem uma ampla faixa de desvio para o vermelho.

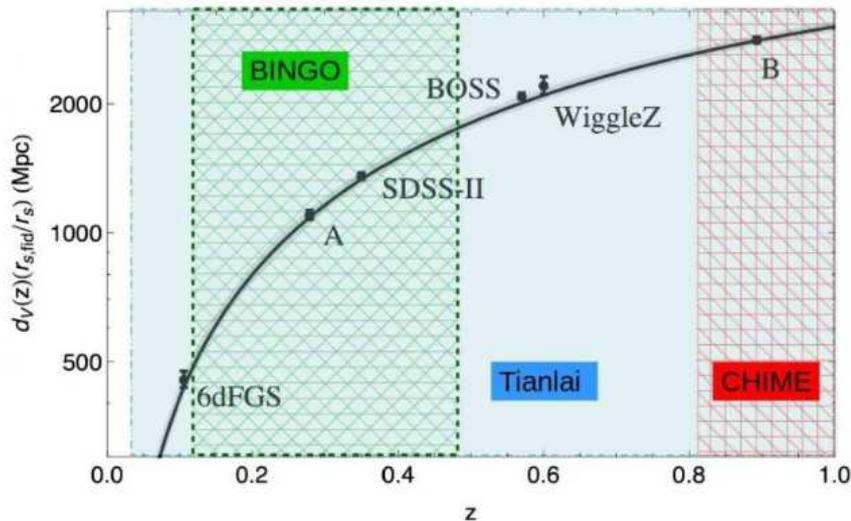


Figura 22 – Gráfico da relação distância-redshifts de várias medições de BAO em redshifts de pesquisas espectroscópicas convencionais e IM. Fonte: Site BINGO, com imagem adaptada de [101].

3.3.5.1 Baryon acoustic oscillations from Integrated Neutral Gas Observations (BINGO)

Este tópico é baseado nas referências [100] e “*Baryon acoustic oscillations from Integrated Neutral Gas Observations: Radio frequency interference measurements and telescope site selection*” [10] (M. W. Peel e etal, 2018). O primeiro trabalho descreve os detalhes técnicos do radiotelescópio como: alcance de frequência, redshifts, design do

telescópio, cornetas, angulação etc. Enquanto o segundo, descreve detalhes de medições para escolha do melhor lugar para construção do radiotelescópio.

O BINGO é uma colaboração internacional entre o Reino Unido, Brasil, Uruguai e Suíça, cuja proposta é a construção de um radiotelescópio de prato único dedicado as observações do sinal de HI em $z \lesssim 0,5$, especificamente no intervalo $0,13 < z < 0,5$, com alcance de frequência entre 980 MHz-1260 MHz, usando a técnica de IM para captar informações, mensurar a escala das BAOs e restringir parâmetros de EE [100].

O design óptico do telescópio conta com dois espelhos parabólicos de aproximadamente 40 m e 50 cornetas (Figura 23), irá cobrir uma faixa de 15 graus do céu a cada 24 horas. Teve um planejamento baseado na simplicidade de construção das peças e montagem da estrutura, almejando um baixo custo em relação as outras pesquisas existentes e obtenção de resultados num intervalo de tempo competitivo na ciência [100].



Figura 23 – Design do radiotelescópio BINGO. Fonte: Jornal da USP.

O local escolhido para construção do radiotelescópio foi na Serra do Urubu, uma região do Município de Aguiar, no Estado da Paraíba. Essa escolha levou em consideração análises de sinais de interferência na faixa de frequência que BINGO irá operar, evitando assim fontes terrestres próximas, como telefones celulares, transmissores de TV ou rádio, e os sinais de aeronaves e satélites, ou seja, o local é protegido das Interferências de Radiofrequências (RFI) [10].

Com os dados fornecidos pelas pesquisas é possível reconstruir o pico das BAOs com utilização de métodos específicos, como por exemplo, os aplicados nos trabalhos: [102, 103, 104] e fazer restrições de parâmetros cosmológicos, como da EE e de uma possível interação no setor escuro [105]. Os dados podem ser usados para estudar a função de correlação, espectro de potência da matéria, espectro de potência angular da CMB e

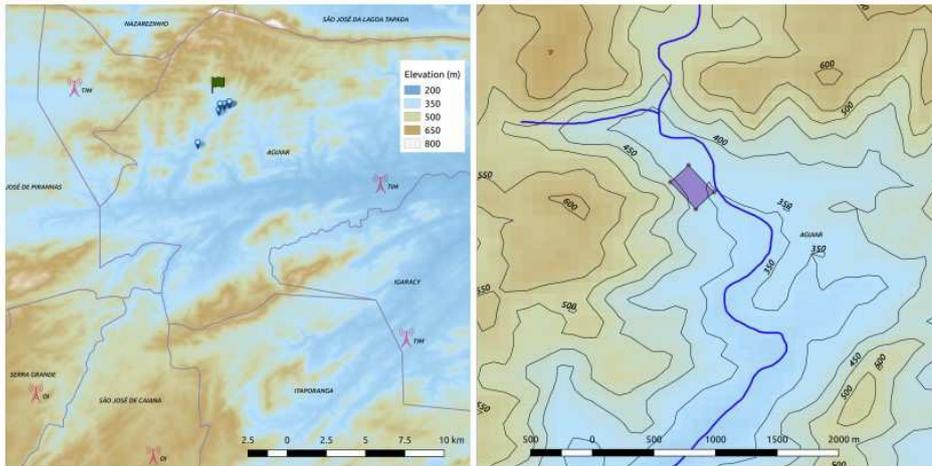


Figura 24 – Vista topográfica da Serra do Urubu. O painel a esquerda mostra as antenas de distribuição de dados móveis mais próximas com indicação da Telecom, bem como as áreas onde foram feitos testes de RFI (contendo marcadores) e o local da instalação do BINGO (contendo a bandeira verde). o painel a direita mostra o sítio do BINGO de forma ampliada. As elevações foram obtidas a partir de dados da NASA. Fonte: [10].

de 21 cm para extração de informações.

3.4 Espectros de potências de Modelos Cosmológicos

Nesta seção vamos apresentar alguns espectros de potências da matéria que reproduzimos para o Modelo Λ CDM utilizando o código CAMB [106] e outros modelados por pesquisas citadas anteriormente.

3.4.1 Espectro de potência da matéria do Modelo Λ CDM

Na Figura 25 mostramos o espectro de potência linear da matéria para $z = 0$ do Modelo Λ CDM com valores dos parâmetros cosmológicos do Planck 2018 [63], conforme Tabela 1. Nesta figura podemos ver a mudança do espectro ao utilizarmos redshifts diferentes. Como na teoria linear, com o aumento do redshift observamos apenas um deslocamento da curva de $P(k)$ para baixo.

Tabela 1 – Parâmetros cosmológicos para modelos Λ CDM. Fonte: [2].

Parâmetros	Valores
$\Omega_{b,0}h^2$	0.02242
$\Omega_{c,0}h^2$	0.11933
H_0	67.66 km s ⁻¹ Mpc ⁻¹
n_s	0.9665
A_s	2.105×10^{-9}

A Figura 26 mostra $P(k)$ com parâmetro de densidade de matéria total $\Omega_{m,0}h^2$ fixado e variamos $\Omega_{c,0}h^2$ e $\Omega_{b,0}h^2$, tal que, a curva azul mostra o espectro de potência com

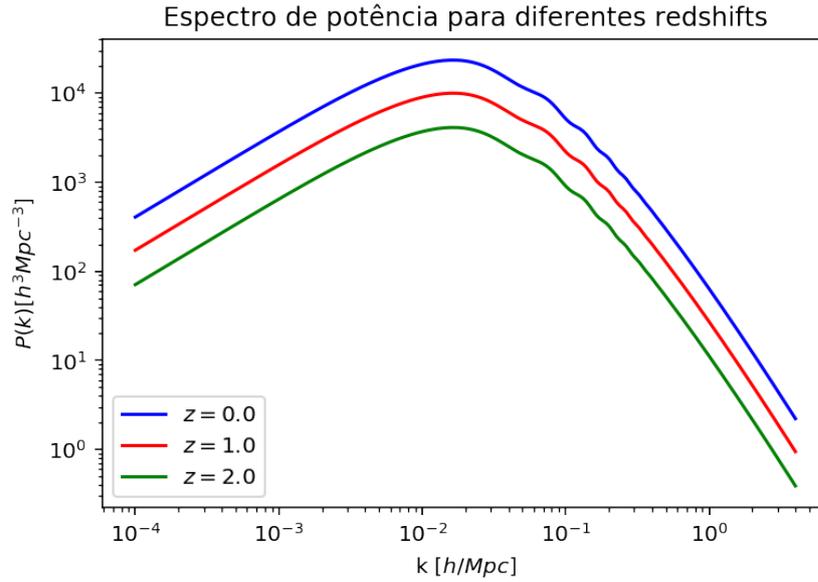


Figura 25 – Espectro de potência linear da matéria em diferentes redshifts. Usamos o código CAMB [106] para gerar este espectro, onde utilizamos os melhores valores dos parâmetros cosmológicos (combinação de TT,TE,EE+lowE+lensing+BAO) para o Modelo Λ CDM do Planck 2018 [2] com $\omega = -1$.

os valores do Planck 2018 [2], ou seja é o espectro de potência “real” da matéria. A curva verde se aproxima de um Modelo Cosmológico sem matéria bariônica, quase sem oscilações. A curva vermelha é um exemplo com muito mais matéria bariônica do que é observado, assim, mostra mais oscilações. Com isto, podemos perceber que a amplitude e o alcance das oscilações em $P(k)$ dependem diretamente da quantidade de matéria bariônica $\Omega_b h^2$. Contudo, notamos ainda que com o passar do tempo todos evoluem de forma igual, uma vez que fixamos $\Omega_m h^2$ e sendo a função de crescimento $D(z)$ dependente deste parâmetro de densidade de matéria total.

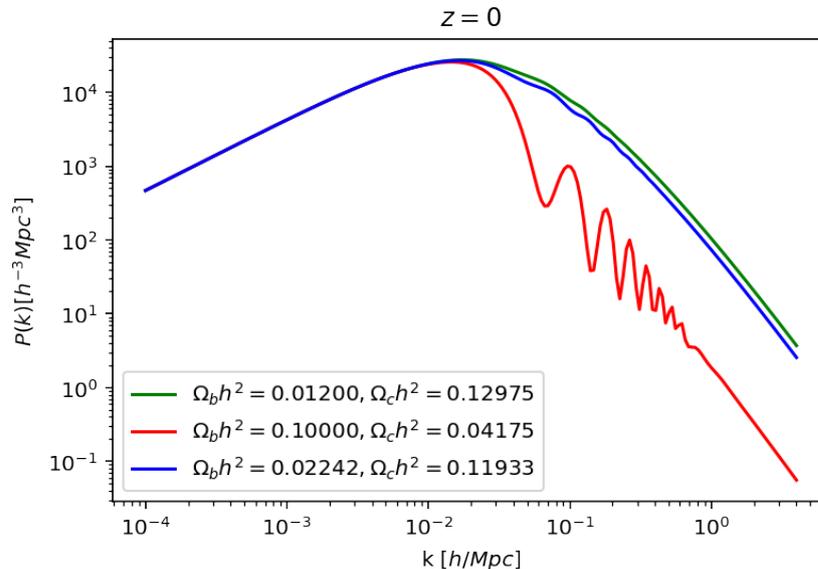


Figura 26 – Espectros de potência da matéria em $z = 0$ e $\Omega_m h^2$ fixo. As curvas foram feitas com o auxílio do código CAMB [106].

Os efeitos relacionados a mudança do parâmetro de ME $\Omega_{c,0}h^2$ e consequentemente de EE, pois: $\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{c,0}$, podem ser vistas na Figura 27, onde fixamos o parâmetro de densidade dos bárions como $\Omega_{b,0}h^2 = 0,02242$. A diminuição do parâmetro de densidade da matéria total modifica a escala da última superfície de espalhamento, fazendo com que ocorra mais tarde do que é observado hoje.

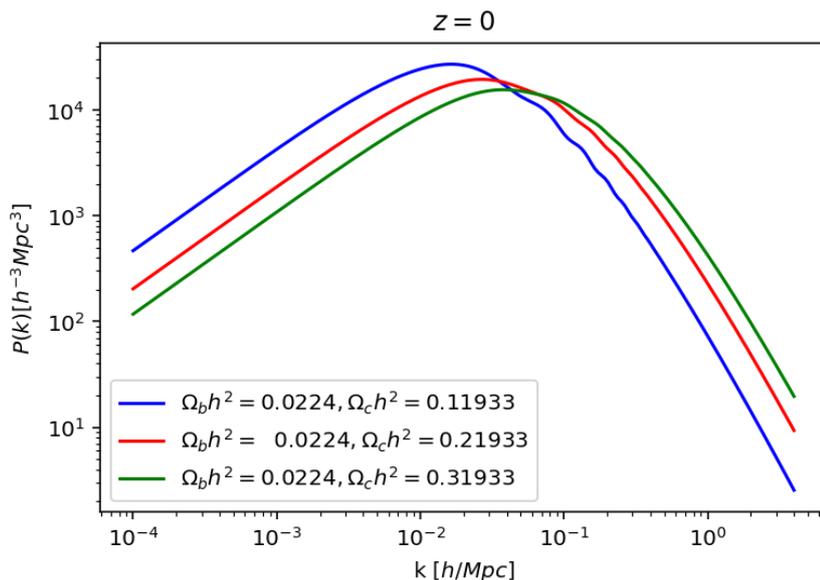


Figura 27 – Espectro de potência da matéria fixando o parâmetro de densidade matéria bariônica e variando o parâmetro de densidade de ME, para o Modelo Λ CDM. Figura feita com o CAMB [106].

Todos os espectros de potências lineares da matéria que reproduzimos estão de acordo como os encontrados na referência [19].

A Figura 28 mostra os espectros de potências da matéria para os valores dos parâmetros da Tabela 1 e o espectro observado por algumas *surveys*, como também mostra o desvio dos espectros obtidos pelas *surveys* em relação ao Modelo Λ CDM.

Vamos ver o que pode-se estabelecer por meio da forma do espectro de potência da matéria. À medida que o k aumenta, o comprimento de onda diminui, a taxa de crescimento das perturbações de matéria se torna menor, pois, possui uma dependência logarítmica, sua potência é suprimida e no espectro de potência da matéria aparecem amplitudes de flutuações. A escala característica na qual ocorre a mudança (amplitude máxima) é definida por λ_{eq} , comprimento de onda do período de equivalência radiação-matéria, isto significa que $P(k)$ atinge seu máximo um pouco antes do início da recombinação (antes do desacoplamento dos fótons).

Os picos dos espectros de potências representam os picos das BAOs, a partir de cada um deles é possível estimar certos parâmetros cosmológicos, por exemplo, Ω_0 que é a densidade total de matéria atual, H_0 , $\Omega_{b,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$. A posição, altura e distância entre os picos são modificadas de acordo com os valores destes parâmetros. Quanto maior

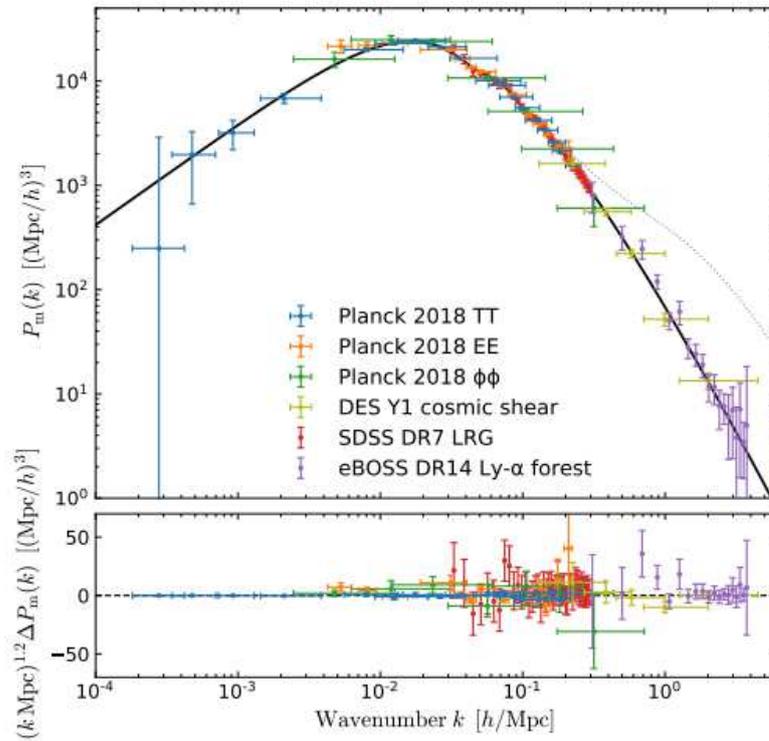


Figura 28 – Espectro de potência linear da matéria em $z = 0$. A linha sólida é para o Modelo Λ CDM usando o melhor fit do Planck 2018 [2] e os demais símbolos coloridos são para denotar os espectros gerados pelos surveys descritos na legenda. Na ilustração de baixo temos os desvios do espectro de potência da matéria obtidos pelos surveys em relação ao Λ CDM. Fonte: [7].

for a densidade total de matéria do Universo, menor será a amplitude dos espectros de potências. A posição dos picos está relacionada ao período em que as oscilações se formaram e também está diretamente ligada aos valores dos parâmetros cosmológicos. Alguns trabalhos que fazem um estudo mais detalhados da física presente nos espectros de potências e o significado de cada pico são [107, 108].

As oscilações presentes nos espectros de potências podem fornecer informações sobre as condições iniciais do Universo, a geometria e densidade de bárions, bem como, é possível fazer teste de consistência para refinar parâmetros dependentes do Modelo Cosmológico em questão.

O espectro de potência da matéria linear é, portanto, um ótimo traçador de como as galáxias e aglomerados estão distribuídas e quando começaram a se formar, de acordo com o que é observado hoje. Implicando que a matéria bariônica sente o mesmo potencial que a ME nos tempos tardios, após se separar da radiação.

As oscilações acústicas dos bárions (BAO) se propagaram desde o período de equivalência radiação-matéria até o desacoplamento da radiação, ou seja, elas estiveram presentes no Universo primordial, então é possível detectar na amplitude do espectro de potência da matéria, um distinto pico na escalas correspondentes ao horizonte sonoro r_s .

No trabalho [6], foram usados espectros de potência da matéria de 22.923 quasares

de altos redshifts do SDSS - BOSS, nos quais observaram-se a existência de BAOs, cujos resultados fortalecem ainda mais o Modelo Λ CDM (contendo ME e EE). Eles detectaram um pico com amplitude distinta, mais alargado, próximo à $-1,7 \log_{10} \text{Mpc}^{-1}$, correspondendo ao horizonte de som em $r_s = 160 \text{Mpc}$, como pode ser vista na Figura 29. Por mais que, o pico seja “raso”, ele mostra um aumento estatisticamente significativo na amplitude, que estaria ausente no espectro de potência se as BAOs não estivessem presentes no Universo primitivo [6].

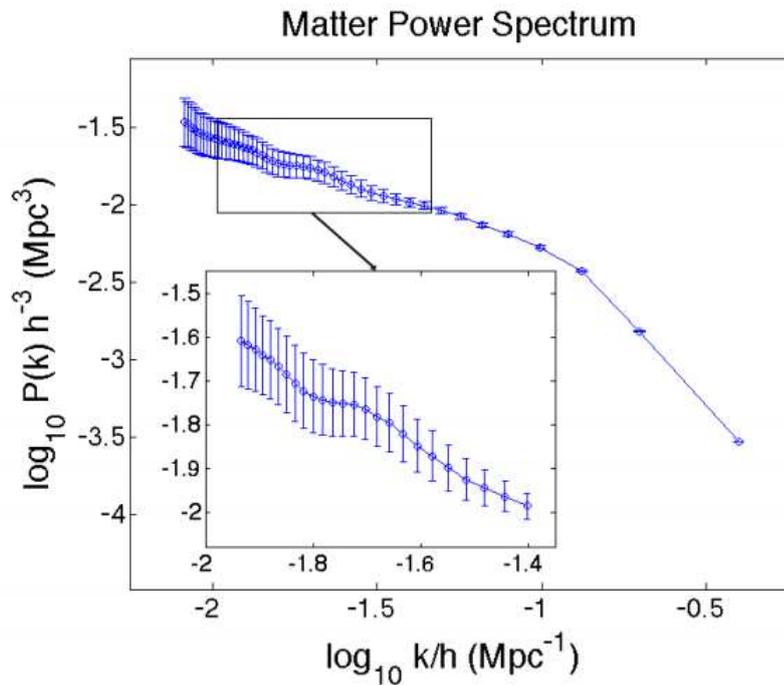


Figura 29 – O espectro de potência da matéria médio de todos os espectros de 741 pratos combinados, para o Modelo Λ CDM. É possível ver o pico detectado com maior clareza. As barras de erro são iguais à variação da potência em todos os pratos em cada escala. Fonte: [6].

Tendo visto os fundamentos básicos sobre o espectro de potência linear da matéria e espectro de potência angular de 21 cm, uma proposta para continuar nossos estudos é obter o *fit* do espectro de potência angular de 21 cm usando o código CAMB, tanto para o Modelo Λ CDM, quanto para outros Modelos. Bem como, pretendemos introduzir neste código as equações do Modelo Cosmológico de Interação no setor escuro, que devido a possibilidade de pesquisas futuras das BAOs está sendo bastante estudado. Visto que, possivelmente esse Modelo resolve problemas do Modelo Cosmológico Padrão e consegue descrever as características vistas no Universo.

Na próxima seção vamos abordar detalhes básicos da formulação deste Modelo Cosmológico e mostraremos alguns *fittings* de espectros de potências encontrados na literatura.

3.4.2 Modelo Cosmológico IDE

Na busca por explicar todas as características do Universo, principalmente sobre a causa da expansão acelerada, buscam-se Modelos Alternativos ao Modelo Cosmológico Padrão (Λ CDM), como, Quintessência [109], K-essence [110], campos Chameleon [111] e teoria de Horndeski [111], muitos dos quais descrevem a EE como um campo escalar. Além disto, eles tentam corrigir os problemas do Modelo Padrão que são bem conhecidos, sendo um deles o problema da coincidência cósmica²⁷.

Um Modelo Cosmológico que está em crescente estudo é o *Modelo de Interação de EE*²⁸ (IDE), que considera um possível acoplamento entre matéria escura (ME) e energia escura (EE), e que resolve o problema da coincidência cosmológica. Além de fornecer uma explicação condizente para a fase acelerada do Universo, para uma revisão recomendamos [113].

É importante comentar que, a Relatividade Geral não fornece restrições quanto a existência e forma de interações como, por exemplo: não gravitacionais. Se esse acoplamento existir, poderá afetar a compreensão da dinâmica do Universo. Contudo, na formulação dos Modelos de IDE ainda não está claro em que momento podem existir interações entre as duas componentes, que operam em fases distintas do Universo. Em princípio, podemos assumir que a origem da interação entre EE-ME está relacionada ao surgimento da dinâmica do espaço-tempo [114].

A partir daqui vamos tratar sobre os principais pontos de formulação do Modelo, considerando as referências [11, 115], fazendo uma abordagem de tópicos importantes que podem ser usados em estudos futuros e apresentando alguns resultados obtidos nos trabalhos [116, 117], sobre *fittings* de espectros de potência da matéria e espectros de potência angulares de 21-cm.

O Modelo de Interação de Energia Escura (IDE)

Assumimos que a interação no setor escuro é de natureza fenomenológica [117]. Desta maneira, pode ser escrita de forma covariante por meio de um 4-vetor $Q_{(\lambda)}^\nu$, que representa a interação no setor escuro, tal que, o subscrito λ refere-se ao fluido composto de ME (c) e EE (d). Assim, o tensor energia-momento para este sistema com essas duas componentes acopladas satisfaz a lei de covariância [117],

$$\nabla_\mu T_{(\lambda)}^{\mu\nu} = Q_{(\lambda)}^\nu. \quad (3.96)$$

No qual impomos a conservação através de,

$$\sum_\lambda Q_\lambda^\nu = Q_c^\nu + Q_d^\nu = 0. \quad (3.97)$$

²⁷ O fato observacional de que os valores atuais das densidades da EE e da ME são da mesma ordem de magnitude [112].

²⁸ Ou interação no setor escuro.

Considerando o caso em que o fluido é ideal, as componentes espaciais do tensor energia-momento são nulas no fundo homogêneo e isotrópico, logo, o 4-vetor $Q_{(\lambda)}^\nu$ é dado por,

$$Q_{(\lambda)}^\nu = \left(\frac{Q_\lambda}{a}, 0, 0, 0 \right)^T, \quad (3.98)$$

onde o super-índice T designa a matriz transposta e o termo Q_λ é a taxa de transferência da densidade de energia²⁹, tal que, a direção da transferência é [118],

$$\begin{aligned} Q_\lambda > 0 &\implies \text{matéria escura} \longrightarrow \text{energia escura}, \\ Q_\lambda < 0 &\implies \text{energia escura} \longrightarrow \text{matéria escura}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

O tensor energia-momento de fundo é escrito como,

$$\bar{T}_{(\lambda)}^{\mu\nu} = (\bar{\rho}_{(\lambda)} + \bar{p}_{(\lambda)})\bar{u}_{(\lambda)}^\mu \bar{u}_{(\lambda)}^\nu - \bar{g}^{\mu\nu} \bar{p}_{(\lambda)}. \quad (3.100)$$

A taxa de interação obedece ao vínculo,

$$Q_{(\lambda)}^2 \equiv g_{\mu\nu} Q_{(\lambda)}^\mu Q_{(\lambda)}^\nu. \quad (3.101)$$

A evolução temporal é expressa pela *equação de balanço energético* da interação que é obtida por meio da conservação de energia (3.96). Calculando para $\nu = 0$, resulta em [117],

$$\bar{\rho}'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(1 + \omega_\lambda)\bar{\rho}_\lambda = a^2\bar{Q}_\lambda^0, \quad (3.102)$$

$$\bar{\rho}'_c + 3\frac{a'}{a}\bar{\rho}_c = a^2\bar{Q}_c^0 = a\bar{Q}_c, \quad (3.103)$$

$$\bar{\rho}'_d + 3\frac{a'}{a}\bar{\rho}_d(1 + \omega) = a^2\bar{Q}_d^0 = a\bar{Q}_d, \quad (3.104)$$

onde $(')$ está descrevendo a derivada com respeito ao tempo conforme e ω_λ é a EoS das componentes de EE e ME, tal que $\omega_c = 0$ e $\omega_d = \omega$. Desta forma, o Universo é composto pelo fluido interagente no setor escuro, além dos bárions também (o efeito da radiação é desprezado para a fase atual), que interagem com o fluido de forma gravitacional:

$$\bar{\rho}'_b + 3\frac{a'}{a}\bar{\rho}_b = 0.$$

Assumindo que a taxa de interação é [11],

$$\begin{aligned} \bar{Q}_c^\mu &= a^{-1}(\bar{Q}_c, 0), \\ \bar{Q}_d^\mu &= -a^{-1}(Q_c, 0) = -\bar{Q}_c^\mu, \end{aligned} \quad (3.105)$$

ou seja,

$$\bar{Q}_d = -\bar{Q}_c. \quad (3.106)$$

²⁹ Quando $Q_\lambda = 0$ retomamos o caso sem interação.

Podemos escrever a interação como combinação linear de escalares no espaço FLRW, como por exemplo, das densidades de energias ρ_c e ρ_d , expansão de Hubble $H = \dot{a}/a$, ou alguma outra função escalar. Uma parametrização simples é, assumirmos que a interação é proporcional à densidade de energia de ME e/ou EE, e a taxa de expansão [117],

$$\begin{aligned}\bar{Q}_c &= 3H(\xi_1\bar{\rho}_c + \xi_2\bar{\rho}_d), \\ \bar{Q}_d &= -3H(\xi_1\bar{\rho}_c + \xi_2\bar{\rho}_d),\end{aligned}\tag{3.107}$$

em que ξ_1 e ξ_2 são coeficientes de acoplamento adimensionais.

A presença do acoplamento acarreta uma contribuição extra para as equações de estado efetiva (ω_{ef}) de fundo das duas componentes (conforme mostramos no Apêndice C.7), que toma a forma,

$$\omega_{(\lambda),ef} = \omega_{(\lambda)} - \frac{aQ_{(\lambda)}}{3\mathcal{H}\bar{\rho}_{(\lambda)}},\tag{3.108}$$

onde $\mathcal{H} \equiv aH$. Assim, para ME e EE temos,

$$\begin{aligned}\omega_{c,ef} &= -\frac{a\bar{Q}_c}{3\mathcal{H}\bar{\rho}_c}, \\ \omega_{d,ef} &= \omega - \frac{a\bar{Q}_d}{3\mathcal{H}\bar{\rho}_d}.\end{aligned}\tag{3.109}$$

A taxa de expansão do Universo para cada tipo de interação é determinada pela equação (1.59), que obtemos a partir da primeira equação de Friedmann. Podemos também escrevê-lá da seguinte forma,

$$H^2(z) = \frac{H_0^2}{\rho_{cr,0}}(\rho_b + \rho_c + \rho_d),\tag{3.110}$$

onde $\rho_{cr,0}$ é a densidade crítica atual e consideramos um Universo composto por bárions (b), ME (c) e EE (d). A densidade de matéria bariônica é escrita como,

$$\rho_b = \rho_{b,0}(1+z)^3.\tag{3.111}$$

Caso I: $Q = 3H\xi_2\rho_d$

Quando o acoplamento é proporcional à densidade de EE, $Q = 3H\xi_2\bar{\rho}_d$ ($Q = \bar{Q}_c = -\bar{Q}_d$), ou seja, $\xi_1 = 0$, as EoS efetivas para este caso são dada por,

$$\omega_{c,ef} = -\xi_2/r, \quad \omega_{d,ef} = \omega + \xi_2.\tag{3.112}$$

onde r é a relação entre as densidades de ME e EE dada no Apêndice C.2.

Resolvendo as equações (3.104), (3.103) por meio de integração obtemos [119],

$$\begin{aligned}\rho_d &= \rho_{d,0}(1+z)^{3(1+\omega+\xi_2)}, \\ \rho_c &= \left\{ \rho_{c,0} + \rho_{d,0} \frac{\xi_2}{\xi_2 + \omega} [1 - (1+z)^{3(\omega+\xi_2)}] \right\} (1+z)^3.\end{aligned}\tag{3.113}$$

Substituindo (3.111) e (3.113) em (3.110) e escrevendo em função dos parâmetros de densidade atuais temos,

$$H^2(z) = H_0^2 \left[\left(\Omega_{m,0} + \Omega_{d,0} \frac{\xi_2}{\xi_2 + \omega} \right) (1+z)^3 + \frac{\omega}{\xi_2 + \omega} \Omega_{d,0} (1+z)^{3(1+\omega+\xi_2)} \right], \quad (3.114)$$

em que $\Omega_{m,0} = \Omega_{b,0} + \Omega_{c,0}$ é o parâmetro atual da densidade de matéria. E a função expansão é:

$$E(z) = \left[\left(\Omega_{m,0} + \Omega_{d,0} \frac{\xi_2}{\xi_2 + \omega} \right) (1+z)^3 + \frac{\omega}{\xi_2 + \omega} \Omega_{d,0} (1+z)^{3(1+\omega+\xi_2)} \right]^{1/2}. \quad (3.115)$$

Caso II : $Q = 3H\xi_1\rho_c$

Temos $\xi_2 = 0$, então as Eos são:

$$\omega_{c,ef} = -\xi_1, \quad \omega_{d,ef} = \omega + \xi_1 r. \quad (3.116)$$

e as densidade de ME e EE (3.103) e (3.104) podem ser escritas como [119],

$$\begin{aligned} \rho_c &= \rho_{c,0} (1+z)^{3(1-\xi_1)}, \\ \rho_d &= \rho_{d,0} (1+z)^{3(1+\omega)} + \rho_{c,0} \frac{\xi_1}{\xi_1 + \omega} \left[(1+z)^{3(1+\omega)} - (1+z)^{3(1-\xi_1)} \right]. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Incluindo (3.111) e (3.117) em (3.110) de forma similar a anterior, obtemos,

$$H^2(z) = H_0^2 \left[\Omega_{b,0} x^3 + \Omega_{c,0} x^{3(1-\xi_1)} + \Omega_{c,0} \frac{\xi_1}{\xi_1 + \omega} \left[x^{3(1+\omega)} - x^{3(1-\xi_1)} \right] + \Omega_{d,0} x^{3(1+\omega)} \right] \quad (3.118)$$

onde $x = (1+z)$.

A função expansão portanto é:

$$E(z) = \left[\Omega_{b,0} x^3 + \Omega_{c,0} x^{3(1-\xi_1)} + \Omega_{c,0} \frac{\xi_1}{\xi_1 + \omega} \left[x^{3(1+\omega)} - x^{3(1-\xi_1)} \right] + \Omega_{d,0} x^{3(1+\omega)} \right]^{1/2}. \quad (3.119)$$

Caso III: $Q = 3H\xi(\bar{\rho}_c + \bar{\rho}_d)$

Consideramos $\xi_1 = \xi_2 = \xi$, as Eos são da forma,

$$\omega_{c,ef} = -\xi(1+1/r), \quad \omega_{d,ef} = \omega + \xi(r+1). \quad (3.120)$$

E as soluções das equações (3.103) e (3.104) são [119],

$$\begin{aligned} \rho_c &= C_1(1+z)^{\gamma_1} + C_2(1+z)^{\gamma_2} \\ \rho_d &= \frac{1}{2\xi} [-C_1(A+B) + C_2(B-A)(1+z)^{-3B}](1+z)^{\gamma_1}, \end{aligned} \quad (3.121)$$

onde,

$$C_1 = \frac{1}{2B}[(B - A)\rho_{c,0} - 2\xi\rho_{d,0}], \quad C_2 = \frac{1}{2B}[(B + A)\rho_{c,0} + 2\xi\rho_{d,0}], \quad (3.122)$$

$$A = \omega + 2\xi, \quad B = \sqrt{\omega(\omega + 4\xi)} \quad (3.123)$$

$$\gamma_1 = \frac{3}{2}(2 + \omega + B), \quad \gamma_2 = \frac{3}{2}(2 + \omega - B). \quad (3.124)$$

Utilizando (3.121) em (3.110) encontramos ,

$$H^2(z) = H_0^2\{\Omega_{b,0}(1+z)^3 + (1/2\xi)\{\Omega_{C_1}[2\xi - (A+B) - \Omega_{C_2}(A-B)(1+z)^{-3B}]\}(1+z)^{\gamma_1} + \Omega_{C_2}(1+z)^{\gamma_2}\}, \quad (3.125)$$

em que,

$$\Omega_{C_1} = \frac{1}{2B}[\Omega_{c,0}(B - A) - 2\xi\Omega_{d,0}], \quad \Omega_{C_2} = \frac{1}{2B}[\Omega_{c,0}(B + A) + 2\xi\Omega_{d,0}].$$

A função expansão é dada por:

$$E(z) = \{\Omega_{b,0}x^3 + (1/2\xi)\{\Omega_{C_1}[2\xi - (A+B) - \Omega_{C_2}(A-B)x^{-3B}]\}x^{\gamma_1} + \Omega_{C_2}x^{\gamma_2}\}^{1/2} \quad (3.126)$$

onde $x = (1 + z)$.

Vemos claramente que, a ME em Modelo de Interação não obedece a evolução padrão que é proporcional à $(1 + z)^3$, o que afeta o parâmetro de Hubble.

Estes Modelos tem instabilidades em relação às perturbações de curvatura e EE, dependendo dos valores do termo de acoplamento (ξ_1 e ξ_2) e da equação de estado ω . Sendo assim, alguns valores devem ser evitados [120]. Além disto, a densidade de EE é sempre positiva, ao longo de toda a evolução cósmica, desde seu momento inicial. Devemos garantir que o mesmo acontece com a ME. Portanto, deve-se trabalhar com 4 Modelos de Interação, conforme foram definidos acima e com as restrições dadas pela Tabela 2.

Tabela 2 – Modelos de Interação IDE. Fonte: [11]

Modelo	$Q = \bar{Q}_c = -\bar{Q}_d$	EoS da EE	$\omega_{c,ef}$	$\omega_{d,ef}$	Restrições
IA	$3\xi_2 H \bar{\rho}_d$	$-1 < \omega < 0$	$-\xi_2/r$	$\omega + \xi_2$	$\xi_2 < -2\omega\Omega_c$
IB	$3\xi_2 H \bar{\rho}_d$	$\omega < -1$	$-\xi_2/r$	$\omega + \xi_2$	$\xi_2 < -2\omega\Omega_c$
II	$3\xi_1 H \bar{\rho}_c$	$\omega < -1$	$-\xi_1$	$\omega + \xi_1 r$	$0 < \xi_1 < -\omega/4$
III	$3\xi H(\bar{\rho}_c + \bar{\rho}_d)$	$\omega < -1$	$-\xi(1 + 1/r)$	$\omega + \xi(r + 1)$	$0 < \xi < -\omega/4$

3.4.3 Formalismo perturbativo

Vamos mostrar as equações das perturbações de densidade de energia e velocidade para as componentes do setor escuro que se reduzam à forma de fundo em um Universo FLRW.

Um tensor de transferência total pode ser decomposto em duas partes [11],

$$Q'_\lambda = Q_\lambda U^\nu + F'_\lambda, \quad U_\nu F'_\lambda = 0, \quad (3.127)$$

$$Q_\lambda = \bar{Q}_\lambda + \delta Q_\lambda, \quad (3.128)$$

onde \bar{Q}_λ é a taxa de transferência da densidade de energia no fundo cosmológico, δQ_λ é a perturbação em 1ª ordem de \bar{Q}_λ , $F'_\lambda = a^{-1}(0, -\partial^i f_\lambda)$ é a taxa de transferência de densidade de momento³⁰, em que f_λ é o potencial de transferência de momento e U^ν é a 4-velocidade total dada por (2.23).

Assim, o tensor de transferência total é escrito na forma covariante como [118]:

$$\begin{aligned} Q_0^\lambda &= a[\bar{Q}_\lambda(1 + \Phi) + \delta Q_\lambda], \\ Q_i^\lambda &= -a\partial_i[f_\lambda + \bar{Q}_\lambda v], \end{aligned} \quad (3.129)$$

aqui usamos o fato de $\Phi = \Psi$ (que obtemos pelas equações de Einstein). A componente tipo tempo possui dependência da perturbação da métrica FLRW e da perturbação da taxa de transferência. Enquanto, as componentes espaciais dependem dos potenciais de transferência de momento.

No fundo homogêneo e isotrópico a taxa de transferência é escrita conforme (3.105), em que a transferência de momento desaparece.

Pela conservação de energia e momento devemos ter:

$$\sum_\lambda \delta Q_\lambda = \sum_\lambda f_\lambda = 0. \quad (3.130)$$

Assim, a parte perturbada das equações de densidade e velocidade são obtidas através de,

$$\delta \nabla_\mu T_{\nu(\lambda)}^\mu = \partial_\mu \delta T_{\nu(\lambda)}^\mu + \bar{\Gamma}_{\mu\rho}^\mu \delta T_{\nu(\lambda)}^\rho + \delta \Gamma_{\mu\rho}^\mu \bar{T}_{\nu(\lambda)}^\rho - \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho \bar{T}_{\rho(\lambda)}^\mu - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho \delta T_{\rho(\lambda)}^\mu = \delta Q_\nu^\lambda,$$

$$\delta \nabla_\mu T_{0(\lambda)}^\mu = a^2 \delta Q_0^\lambda, \quad (3.131)$$

$$\delta \nabla_\mu T_{i(\lambda)}^\mu = -a^2 \delta Q_i^\lambda, \quad (3.132)$$

onde δQ_0^λ e δQ_i^λ são os termos de 1ª ordem de (3.129). Contudo, não iremos expandir estes termos de perturbação, encontraremos as próximas equações de forma generalizada.

Escrevendo as equações obtidas por meio de (3.131) e (3.132) de acordo com a notação do espaço de Fourier e no gauge Newtoniano, encontramos³¹:

$$\begin{aligned} (\delta\rho_\lambda)' + 3\mathcal{H}(\delta P_\lambda + \delta\rho_\lambda) - 3(\bar{\rho}_\lambda + \bar{p}_\lambda)\Phi' + (\bar{\rho}_\lambda + \bar{p}_\lambda)\theta_\lambda &= a^2 \delta Q_0^\lambda, \\ (\bar{\rho}'_\lambda + \bar{p}'_\lambda)v_i^\lambda + (\bar{\rho}_\lambda + \bar{p}_\lambda)(v_i^\lambda)' + 4\mathcal{H}(\bar{\rho}_\lambda + \bar{p}_\lambda)v_i^\lambda + (\bar{\rho}_\lambda + \bar{p}_\lambda)\partial_i\Phi + \partial_i\delta P_\lambda &= a^2 \delta Q_i^\lambda, \end{aligned} \quad (3.133)$$

³⁰ O sinal negativo é devido a escolha de assinatura da métrica utilizada (+, -, -, -).

³¹ Nós ignoramos termos relacionados ao momento anisotrópico.

onde pela relação (3.98) podemos escrever: $a^2\delta Q_0^\lambda = a\delta Q_\lambda$ e $a^2\delta Q_i^\lambda = 0$.

Vamos introduzir a velocidade do som $c_{s(\lambda)}^2 = \delta p/\delta\rho$ de um fluido interagente, para relacionar a perturbação de densidade $\delta\rho$ e pressão δp . A ME é tratada como um fluido adiabático³², ou seja, velocidade do som nula. Para EE, devemos impor a condição $c_{s(d)}^2 > 0$, a fim de evitar instabilidades, tal que,

$$c_{s(d)}^2 = 1, \quad c_{a(d)}^2 = \omega = \text{const.} < 0, \quad (3.134)$$

em que $c_{a(d)}^2$ é a velocidade adiabática da EE.

Usaremos as relações:

$$c_{s(\lambda)}^2 = \frac{\bar{p}'_\lambda}{\bar{\rho}'_\lambda}, \rightarrow \frac{\omega'_\lambda}{1 + \omega_\lambda} = -(c_{s(\lambda)}^2 - \omega_\lambda) \left(3\mathcal{H} + \frac{a\bar{Q}_\lambda}{\bar{\rho}_\lambda(1 + \omega_\lambda)} \right), \quad (3.135)$$

$$\bar{\rho}'_\lambda = -3\mathcal{H}\bar{\rho}_\lambda(1 + \omega_\lambda) - a\bar{Q}_\lambda. \quad (3.136)$$

Portanto, encontramos as equações³³ gerais para as perturbações de densidade δ e velocidade θ [121]:

$$\delta'_\lambda + \left[3\mathcal{H}(c_{s(\lambda)}^2 - \omega_\lambda) - \frac{a\bar{Q}_\lambda}{\bar{\rho}} \right] \delta_\lambda + (1 + \omega_\lambda)(\theta_\lambda - 3\phi') = \frac{a\delta Q_\lambda}{\bar{\rho}_\lambda} \quad (3.137)$$

$$\theta'_\lambda + \left[\mathcal{H}(1 - 3\omega_\lambda) - \frac{a\bar{Q}_\lambda}{\bar{\rho}_\lambda} + \frac{\omega'_\lambda}{1 + \omega_\lambda} \right] \theta_\lambda - \frac{c_{s(\lambda)}^2}{(1 + \omega_\lambda)} k^2 \delta_\lambda - k^2 \phi = 0. \quad (3.138)$$

Essas expressões devem ser adicionadas ao sistema de equações com todas as outras componentes do Universo, vistas no capítulo 2 e as equações de Einstein.

Precisamos encontrar a equação de segunda ordem para as perturbações de densidade, que é combinação das duas equações acima. Primeiramente, levamos em consideração que em escalas de sub-horizonte, as perturbações de EE são desprezíveis, pois a formação de estruturas começa quando a era da radiação termina e a era da matéria inicia. Sendo assim, podemos desprezar ϕ' por ser muito pequeno na eq. (3.137). E de maneira geral, podemos escrever a função procurada em termos das perturbações de ME (δ_c), pois, $\delta_c \gg \delta_b$.

Então, a equação de Poisson (2.45) se reduz à [121],

$$k^2 \phi = -\frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \Omega_c \delta_c. \quad (3.139)$$

Para ME temos: $\omega_c = c_s^2 = 0$, agora isolando θ_c , depois derivando com relação ao tempo

³² Não troca calor com outros componentes do Universo.

³³ Já escritas no espaço de Fourier.

conforme temos,

$$\begin{aligned}\delta'_c + \theta_c &= \frac{a\bar{Q}^c}{\bar{\rho}_c}\delta_c + \frac{a\delta Q^c}{\bar{\rho}_c}, \\ \theta_c &= \frac{a\bar{Q}^c}{\bar{\rho}_c}\delta_c + \frac{a\delta Q^c}{\bar{\rho}_c} - \delta'_c,\end{aligned}\quad (3.140)$$

$$\theta'_c = \left(\frac{a\bar{Q}^c}{\bar{\rho}_c}\right)' \delta_c + \left(\frac{a\bar{Q}^c}{\bar{\rho}_c}\right) \delta'_c + \left(\frac{a\delta Q^c}{\bar{\rho}_c\delta_c}\right)' \delta_c + \left(\frac{a\delta Q^c}{\bar{\rho}_c\delta_c}\right) \delta'_c - \delta''_c, \quad (3.141)$$

substituindo (3.141) e (3.139) em (3.138),

$$\left(\frac{a\bar{Q}^c}{\bar{\rho}_c}\right)' \delta_c + \left(\frac{a\bar{Q}^c}{\bar{\rho}_c}\right) \delta'_c + \left(\frac{a\delta Q^c}{\bar{\rho}_c\delta_c}\right)' \delta_c + \left(\frac{a\delta Q^c}{\bar{\rho}_c\delta_c}\right) \delta'_c - \delta''_c + \mathcal{H}\theta_c + \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Omega_c\delta_c = \frac{a\bar{Q}^c}{\bar{\rho}_c}\theta_c,$$

incorporando (3.140) na equação acima e organizando, achamos:

$$\begin{aligned}\delta''_c &- \left[\left(\frac{a\bar{Q}^c}{\bar{\rho}_c} - \frac{a\delta Q^c}{\bar{\rho}_c\delta_c} \right) - \left(\mathcal{H} - \frac{a\bar{Q}^c}{\bar{\rho}_c} \right) \right] \delta'_c - \\ &- \left\{ \left[\left(\frac{a\bar{Q}^c}{\bar{\rho}_c} \right)' - \left(\frac{a\delta Q^c}{\bar{\rho}_c\delta_c} \right)' \right] + \left(\mathcal{H} - \frac{a\bar{Q}^c}{\bar{\rho}_c} \right) \left(\frac{a\bar{Q}^c}{\bar{\rho}_c} - \frac{a\delta Q^c}{\bar{\rho}_c\delta_c} \right) + \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Omega_c \right\} \delta_c = 0,\end{aligned}\quad (3.142)$$

para “enxugar” essa expressão, representamos alguns termos por:

$$\mathcal{Q} \equiv \frac{a\bar{Q}^c}{\bar{\rho}_c} - \frac{a\delta Q^c}{\bar{\rho}_c\delta_c}, \quad \mathcal{K} \equiv \mathcal{H} - \frac{a\bar{Q}^c}{\bar{\rho}_c}.\quad (3.143)$$

Logo, obtemos [121]:

$$\delta''_c - (\mathcal{Q} - \mathcal{K})\delta'_c - \left(\mathcal{Q}' + \mathcal{K}\mathcal{Q} + \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Omega_c \right) \delta_c = 0,\quad (3.144)$$

Vamos encontrar as equações de segunda ordem para cada tipo de interação:

- $Q \propto \rho_d$

No fundo cosmológico temos: $Q = \bar{Q}_c = -\bar{Q}_d = -3H\xi_2\bar{\rho}_d$, assim, $a\bar{Q}_c = -3\mathcal{H}\xi_2\bar{\rho}_d$.

Nesse tipo de interação de EE acoplada, temos somente uma parte não perturbada, relacionada a ME, pois estamos negligenciando a influência da EE na densidade total. Assim, pela equação (3.103) temos:

$$\bar{\rho}'_c + 3\mathcal{H}\bar{\rho}_c = 3\mathcal{H}\xi_2\bar{\rho}_c \frac{(1 - \Omega_c)}{\Omega_c},\quad (3.145)$$

sendo:

$$\frac{a\bar{Q}_c}{\bar{\rho}_c} = -3\mathcal{H}\xi_2 \frac{(1 - \Omega_c)}{\Omega_c}, \quad \frac{a\delta Q_c}{\bar{\rho}_c\delta_c} = 0,\quad (3.146)$$

onde nós usamos a definição de parâmetro de densidade $\Omega_i = \bar{\rho}_i/\rho_{cr,0}$ e $\Omega_d = 1 - \Omega_c$

Deste modo, a eq. (3.144) para evolução das perturbações de ME equivale à [121],

$$\delta_c'' + \left[1 + 6\xi_2 \frac{(1 - \Omega_c)}{\Omega_c} \right] \mathcal{H} \delta_c' - \left(\Omega_c - 2\xi_2 \frac{(1 - \Omega_c)}{\Omega_c} \left(1 + \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} + 3\xi_2 \frac{(1 - \Omega_c)}{\Omega_c} - \frac{\Omega_c'}{\mathcal{H}\Omega_c} \frac{1}{(1 - \Omega_c)} \right) \right) \delta_c = 0. \quad (3.147)$$

A evolução padrão é recuperada quando $\xi_2 = 0$, tal que: $\delta_c'' + \mathcal{H} \delta_c' - \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \Omega_c \delta_c = 0$. Devido à presença da interação, o coeficiente de δ_c na eq. (3.147) se torna positivo à medida que Ω_c diminui, levando a um regime decrescente da perturbação.

- $Q \propto \rho_c$

No fundo temos $a\bar{Q}_c = -3\mathcal{H}\xi_1\bar{\rho}_c$, logo,

$$\bar{\rho}_c' + 3\mathcal{H}\bar{\rho}_c = 3\mathcal{H}\xi_1\bar{\rho}_c, \quad (3.148)$$

e os termos de interação das equações perturbadas para ME são,

$$\frac{a\bar{Q}_c}{\bar{\rho}_c} = \frac{\delta Q_c}{\bar{\rho}_c \delta_c} = -3\mathcal{H}\xi_1. \quad (3.149)$$

Neste caso, a eq. (3.147) é [121]:

$$\delta_c'' + (1 + 3\xi_1)\mathcal{H}\delta_c' - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Omega_c = 0. \quad (3.150)$$

- $Q \propto \rho_c + \rho_d$

No fundo temos, $a\bar{Q}_c = -3\mathcal{H}\xi(\bar{\rho}_c + \bar{\rho}_d)$, logo:

$$\frac{a\bar{Q}_c}{\bar{\rho}_c} = -3\mathcal{H}\xi \left(1 + \frac{(1 - \Omega_c)}{\Omega_c} \right), \quad (3.151)$$

$$\frac{\delta Q_c}{\bar{\rho}_c \delta_c} = -3\mathcal{H}\xi. \quad (3.152)$$

Obtemos portanto, a equação da perturbação de ME, dada por:

$$\delta_c'' + \left[\mathcal{H} + 3\mathcal{H}\xi \left(1 + \frac{(1 - \Omega_c)}{\Omega_c} \right) \right] \delta_c' + \left\{ \frac{3\mathcal{H}\xi}{\Omega_c} \left[\left(\frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}} - \mathcal{H} + 3\mathcal{H}\xi \left(1 - \frac{(1 - \Omega_c)}{\Omega_c} \right) \right) (1 - \Omega_c) - \frac{\Omega_c'}{\Omega_c} \right] - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Omega_c \right\} \delta_c = 0. \quad (3.153)$$

Essa equação de perturbação é uma contribuição original deste trabalho, cujas aplicabilidades podem ser: estudar o crescimento das estruturas cósmicas, taxa de crescimento das perturbações de matéria, como feito em [4] e ainda, comparar as previsões usando este

Modelo Cosmológico (nesse caso em especial) com as observações feitas por grandes *surveys* sobre as estruturas em larga escala, conforme [121]. Pretendemos ainda, implementá-la no código CAMB para visualizar as curvas dos espectros de potências e analisar outras características do Universo.

As funções de crescimento $D(z)$ (ou $D(a)$) para as equação de perturbações encontradas anteriormente podem ser determinadas numericamente através de análises computacionais, assim como uma solução para a fase atual do Universo (considerado a contribuição de EE). As equações de interação podem ser introduzidas no CAMB, isto requer conhecimentos em Python ou Fortran.

Taxa de crescimento das perturbações

Para estudarmos os efeitos esperados no espectro de potência da matéria, precisamos analisar a evolução do contraste de densidade da ME por meio da taxa de crescimento $f(z)$, encontrada através das equações perturbadas.

Agora, bárions e ME evoluem de forma diferente. Para matéria bariônica a equação da continuidade é (2.153), que pode ser escrita como:

$$\delta'_b + \theta_b = 0, \quad (3.154)$$

e a ME interagente:

$$\delta'_c + \theta_c = \frac{a\bar{Q}_c}{\bar{\rho}_c}\delta_c + \frac{a\delta Q_c}{\bar{\rho}_c}. \quad (3.155)$$

A perturbação de matéria total é:

$$\delta_m = \frac{\bar{\rho}_b\delta_b + \bar{\rho}_c\delta_c}{\bar{\rho}_m}, \quad (3.156)$$

calculando sua derivada com respeito ao tempo conforme e substituindo (3.154) e (3.155) temos:

$$\delta'_m = -\delta_m \frac{a\bar{Q}_c}{\bar{\rho}_m} + \frac{a\delta Q_c}{\bar{\rho}_m} + \frac{(\bar{\rho}_b\theta_b + \bar{\rho}_c\theta_c)}{\bar{\rho}_m}. \quad (3.157)$$

Reescrevendo essa equação usando (B.64) e as equações de fundo (3.102) para cada componente, encontramos [120]:

$$\begin{aligned} \frac{d\ln\delta_m}{d\ln a} \mathcal{H}\delta_m &= -\delta_m \frac{a\bar{Q}_c}{\bar{\rho}_m} + \frac{a\delta Q_c}{\bar{\rho}_m} + \frac{(\bar{\rho}_b\theta_b + \bar{\rho}_c\theta_c)}{\bar{\rho}_m}, \\ f \equiv \frac{d\ln\delta_m}{d\ln a} &= \frac{\mathcal{H}^{-1}}{\delta_m} \left(-\delta_m \frac{a\bar{Q}_c}{\bar{\rho}_m} + \frac{a\delta Q_c}{\bar{\rho}_m} + \frac{(\bar{\rho}_b\theta_b + \bar{\rho}_c\theta_c)}{\bar{\rho}_m} \right), \end{aligned} \quad (3.158)$$

onde os índices m, b, c denotam matéria total³⁴, bárions e ME, respectivamente. Essa expressão nos mostra a dependência da interação no setor escuro, pois a ME não evolui de

³⁴ Excluindo os neutrinos.

maneira similar a matéria bariônica. Se a interação for nula, recaímos no Modelo Padrão. A taxa de crescimento é uma função do número de onda k e do desvio para o vermelho z , tal que: $f = f(k, z)$.

Para visualizar como a interação escura afeta o crescimento das estruturas veja na Figura 30. Nesta figura mostramos as evoluções de f para os Modelos de Interação. Percebemos que o fator de crescimento dos modelos de EE interagindo pode se comportar de maneiras muito diferentes em comparação com o Modelo Λ CDM. Na maioria dos Modelos de EE, a formação de estrutura termina quando a expansão acelerada começa.

Para o Modelo IA, a taxa de crescimento f pode induzir um crescimento de perturbações da matéria, mesmo no presente regime acelerado. A taxa de crescimento é sempre maior do que em Λ CDM, especialmente em redshifts baixos, quando a EE começa a dominar, nesse ponto esse efeito se torna mais evidente (ver Figura 30).

Enquanto para os Modelos IB e III, o fator de crescimento pode ter um valor negativo no presente, se o acoplamento for forte o suficiente [120]. Para o Modelo IB (linha roxa, com valores mais ajustados da Tabela 4), a taxa de crescimento é um pouco menor, em relação ao Λ CDM e como ele possui constante de acoplamento positiva, de acordo com a Tabela 3 de valores piores, significa que há menos EE no passado em comparação ao Modelo Λ CDM, pois ME é convertida em EE conforme o tempo evolui.

Para o Modelo II, a mudança é muito sutil quando os parâmetros de melhor ajuste da Tabela 4 são usados, pois a densidade de ME não depende significativamente da densidade de energia de EE, contudo, seu desvio de comportamento padrão depende principalmente do valor da interação, por exemplo, para $\omega = -1$ a curva se desloca mais para baixo, conforme Figura 30.

Tabela 3 – Valores prioris para constante de acoplamento dos Modelos de IDE. Fonte: [120].

Parâmetros	Modelo IA	Modelo IB	Modelo II	Modelo III
ξ_i	$[-0,4;0]$	$[0;0,4]$	$[0;0,01]$	$[0;0,01]$

Espectros de potência da matéria para Modelos IDE

Essa seção é baseada nas referências [116, 122] que mostram os espectros de potências da matéria para os Modelos IDE comparados com Modelos sem interação.

Usando o formalismo de perturbações visto nos capítulos 2 e 3, podemos estudar a influência da interação entre ME e EE no setor escuro observando o espectro de potência da matéria $P(k)$.

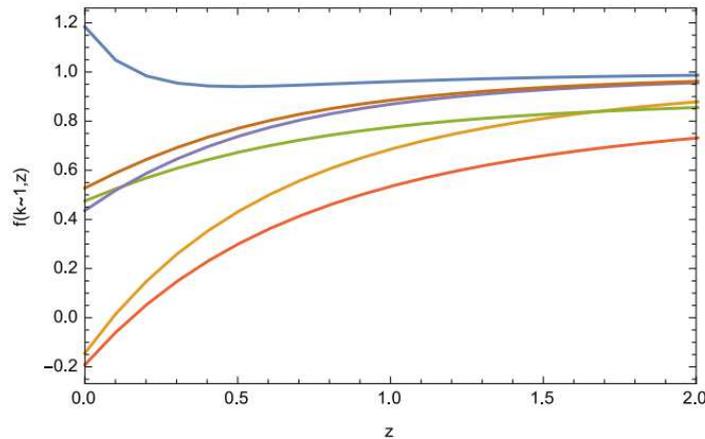


Figura 30 – Taxa de crescimento das perturbações de matéria, fixando $k \sim 1$. A linha azul é para o Modelo IDE IA, a linha laranja para o Modelo IDE IB, linha verde para o Modelo II e linha vermelha para o Modelo IDE III, essas curvas foram geradas para $\xi_i = 0, 1$ e para $\omega = -1$. A linha roxa é com os valores de parâmetros de melhor ajuste da Tabela 4 para o Modelo IDE IB e linha marrom é para $\xi_i = 0$, que recai na evolução padrão do Modelo Λ CDM assumindo valores do Planck 2015 [53]. Fonte: [120]

Tabela 4 – Parâmetros cosmológicos para Modelos de interação (Planck+BAO+SNIa+H0).
Fonte: [120].

Parâmetros	IDE IA	IDE IB	IDE II	IDE III
$\Omega_{b,0}h^2$	0,02223	0,02224	0,02228	0,02228
$\Omega_{c,0}h^2$	0,0792	0,1351	0,1216	0,1218
$100\theta_{MC}$	1,043	1,04	1,041	1,041
τ	0,08204	0,081	0,07728	0,07709
$\ln(10^{10} A_s)$	3,099	3,097	3,088	3,087
n_s	0,9645	0,9643	0,9624	0,9624
ω	-0,9191	-1,088	-1,104	-1,105
ξ_1	-	-	0,0007127	0,000735
ξ_2	-0,1107	0,05219	-	0,000735
H_0	68,18 km/sMpc ⁻¹	68,35 km/sMpc ⁻¹	68,91 km/sMpc ⁻¹	68,88 km/sMpc ⁻¹
$\Omega_{m,0}$	0,2204	0,3384	0,3045	0,3053

Os espectros de potência da matéria da Figura 31 correspondem aos Modelos IDE³⁵ descritos anteriormente, onde foram utilizados os parâmetros cosmológicos da Tabela 4. Também na Figura 31, é mostrado tanto o espectro de potência linear, quanto o não-linear³⁶, como também para os Modelos Λ CDM e Halo³⁷. O que pode-se perceber é, apenas uma mudança na posição do pico da curva do espectro para cada Modelo.

³⁵ Estes espectros podem ser gerados através dos principais códigos CAMB [106], CLASS ou ComputePk<<https://www.benjissi.xyz/computePk>>, fazendo modificações no código fonte para incorporar equações de interação no setor escuro.

³⁶ Não iremos avançar nossos estudos nesta área. Na referência [122] é possível encontrar alguns detalhes sobre este espectro de potência da matéria não-linear.

³⁷ É um Modelo Cosmológico popular usado para descrever a distribuição não-linear de matéria, que acabam formando regiões super densas, tal que em certo momento se estabilizam criando os "halos", onde posteriormente a matéria bariônica é atraída para seu centro, dando início a formação das galáxias. Detalhes sobre este Modelo podem ser visto na referência [123], capítulo 4.

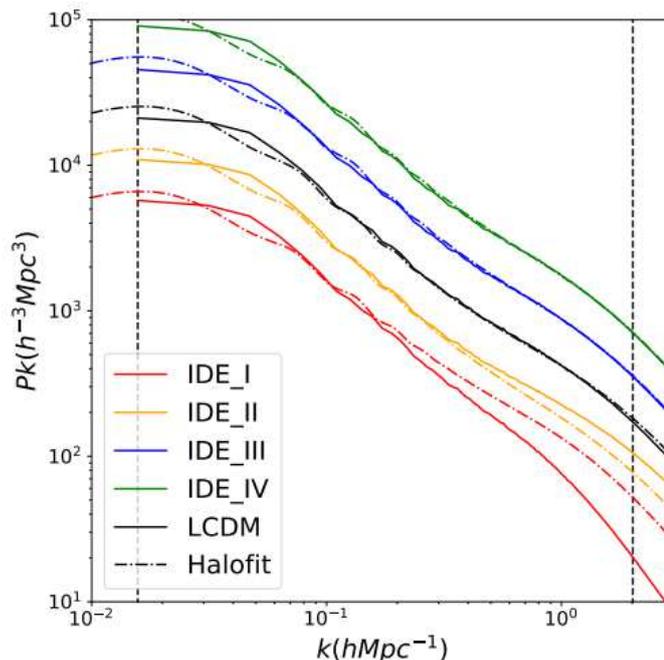


Figura 31 – Espectro de potência da matéria para Modelos IDE, Λ CDM e Halofit. A figura mostra os espectros de potência da matéria especificamente no intervalo de escalas em que observam-se oscilações. As linhas tracejadas são os espectros de potência da matéria não-linear. (IDE IA = IDE_I , IDE IB = IDE_{II} , IDE II = IDE_{III} , IDE III = IDE_{IV}). Fonte: [122].

Para as escalas de k muito grandes (além do horizonte), o espectro de potência não é afetado pela interação, como seria de esperar, devido a interação ser projetada para afetar apenas em escalas de sub-horizontes [116]. À medida que avançamos em escalas menores, dois regimes distintos podem ser identificados, que é a era da matéria e era da radiação. Em escalas suficientemente pequenas, há supressão do espectro de potência da matéria que não depende de k . Em escalas intermediárias, nota-se oscilações que dependem de k .

De acordo com a referência [11], alterações nos valores da EoS de EE influenciam o espectro de potência angular da CMB principalmente para escalas l -baixos de uma maneira sutil, assim, modifica a amplitude geral do espectro de potência da matéria levemente. Por esse motivo, na referência [116] é mostrada apenas as mudanças causadas pela variação da constante de acoplamento nos espectros de potências.

Para o Modelo IA, note-se pela Tabela 3 dos parâmetros cosmológicos prioris que a constante de interação deve ser negativa. Isso significa que existe um fluxo de energia se convertendo de ME para EE e que a densidade de energia da ME é maior no passado em comparação com o Modelo Λ CDM. Essa quantidade extra de ME influencia a evolução das perturbações da matéria, levando a mais formação de estruturas, como pode ser visto na Fig. 30, sobre a taxa de crescimento. Neste Modelo, conforme Figura 32, o espectro de potência da matéria apresenta mudanças relacionadas aos valores da constante de acoplamento, quanto menor for essa constante, mais o espectro se aproximará de um Modelo sem oscilações.

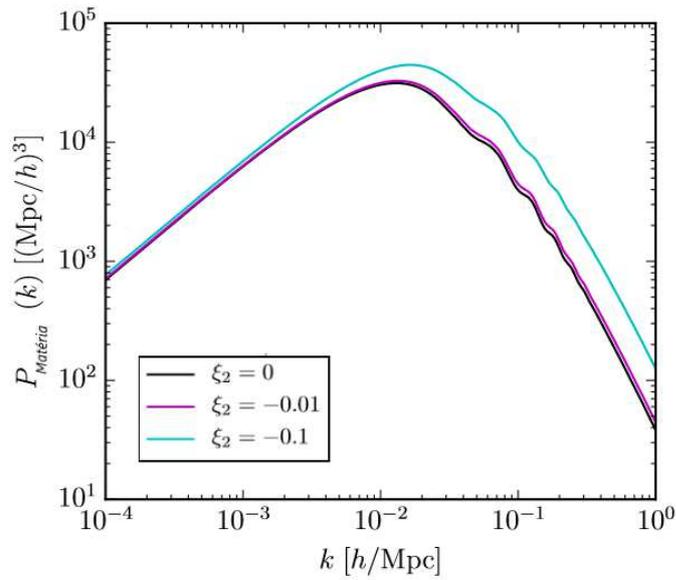


Figura 32 – Espectro de potência da matéria para três diferentes parâmetros de acoplamento ξ_2 para o Modelo de interação IA. Fonte:[116].

Nos Modelos IB e II para valores das constantes de acoplamento grandes ($\xi_1 = \xi_2 = 0.1$), as mudanças nos picos acústicos dos espectros de potências em comparação com o Modelo sem interação ($\xi_1 = \xi_2 = 0$) são muito “pronunciadas”, como podem ser vistas nas Figuras 33 e 34, principalmente para o Modelo II, pois de acordo com a Tabela 3, o valores da constante de acoplamento mais aceitáveis para este Modelo estão dentro do intervalo $[0, 0.01]$, portanto, valores de acoplamentos grandes podem ser facilmente descartados por meio das observações. No entanto, em geral, pequenos acoplamentos introduzem mudanças sutis, muitas vezes mais difíceis de serem distinguidas de outros Modelos [116].

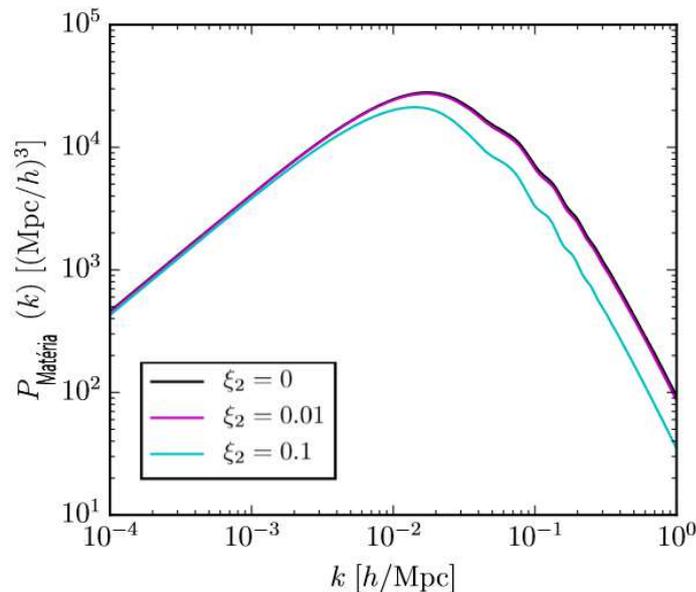


Figura 33 – Espectro de potência linear da matéria para três diferentes parâmetros de acoplamento ξ_2 para o Modelo IB. Para $\xi_2 = 0$ sem interação. Fonte: [116].

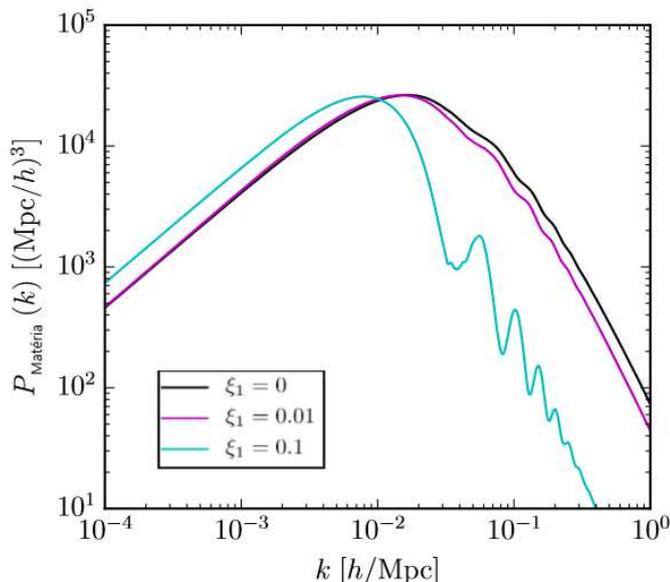


Figura 34 – Espectro de potência da matéria para três diferentes parâmetros de acoplamento ξ_1 para o Modelo II, onde $\xi_1 = 0$ é para o Modelo sem interação. Fonte: [116].

A partir das considerações anteriores, os pequenos valores das constantes de acoplamento são preferidos pelas observações, embora, com pequena significância. Essas mudanças sutis se comportam de maneira diferente, dependendo do Modelo escolhido, por isso, é importante visualizar e entender como cada Modelo afeta as características dos espectros de potências. O Modelo II apresenta um efeito mais evidente para um valor da constante de acoplamento grande, como podemos ver na Fig. 34. Essa escolha de valor grande não é realista, por isso é excluída por observações, mas serve para ilustrar os efeitos que a interação tem nos espectros de potências e a possível degeneração entre o termo de acoplamento e $\Omega_{c,0}$ [116].

As mudanças nos espectros de potência dos Modelos de IDE podem ser reproduzidas alterando $h^2\Omega_{c,0}$ ou por uma EoS de EE ω diferente, essas mudanças também mostram a degenerescência entre a constante de acoplamento, $h^2\Omega_{c,0}$ e a EoS de EE [116].

É possível restringir parâmetros cosmológicos usando Modelos, isto é feito utilizando dados observáveis complementares e analisando os espectros de potências. Para os Modelos de interação utilizando um conjunto de dados observáveis CMB, BAO, o crescimento de estrutura, como lentes fracas e aglomeração de galáxias³⁸, consegue-se restringir os parâmetros, e ainda eliminar as degenerescência entre ξ , $h^2\Omega_{c,0}$ e ω [116].

³⁸ Na ref. [116] é feito isso, contudo, com apenas CMB e BAO, desse jeito a degenerescência não é completamente removida.

Espectro de potência angular de 21-cm

Neste tópico, mostraremos os espectros de potência angular de 21-cm³⁹ para os Modelos de Interação e Λ CDM de acordo com a referência [117].

A Figura 35 mostra os espectros de potências angulares de 21-cm, centrados em $z = 3$ para os Modelos de modelos de EE: Λ CDM, ω CDM⁴⁰ e IDE. A valores das constantes de acoplamento ξ_1 e ξ_2 nos Modelos IDE são ajustados para uma magnitude semelhante aos valores de melhor ajuste dos dados do Planck 2015 [53]. Os desvios observados nos espectros de potências angulares dos Modelos IDE para o Λ CDM demonstram uma forte dependência de escala e podem chegar a 20% em pequenas escalas angulares [117].

Além disso, as oscilações em torno de $l = 100$ indicam também a escala da BAO na presença de interação escura, com mudanças significativas em relação ao Modelo Λ CDM.

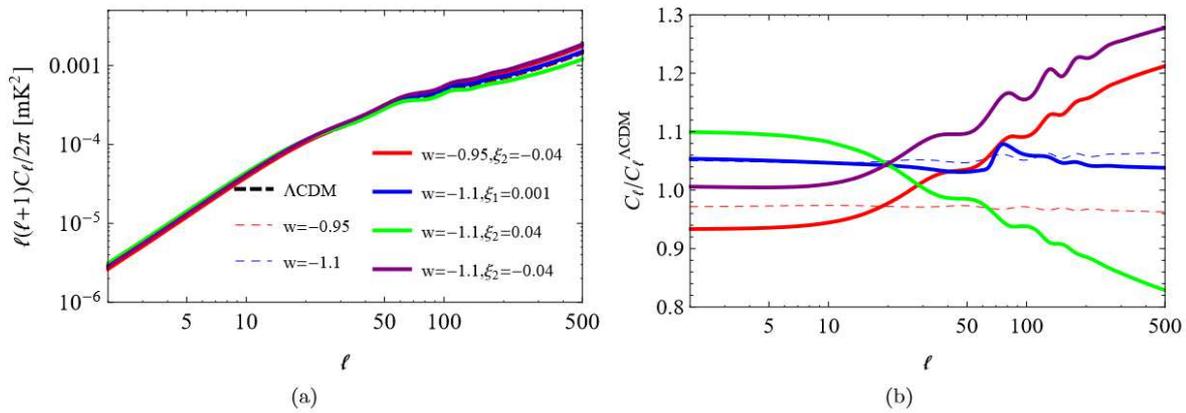


Figura 35 – Espectro de potência angular de 21-cm para uma janela de $\Delta\nu = 20$ MHz centrada em $z = 3$, com frequência equivalente à $\nu = 1092$ MHz (quadro à esquerda). Razão entre os espectros de potência angular dos Modelos de IDE (e ω CDM) em relação ao Modelo Λ CDM (quadro a direita). A linha sólida vermelha é para o Modelo IA, a linha sólida verde para o Modelo IB, a linha sólida azul para o Modelo II e roxa para o Modelo III. [117].

³⁹ Para reproduzir estes *fittings*, assim como para os espectros de potências da matéria é necessário fazer uma modificação no código CAMB, introduzindo as equações da dinâmica de Modelos de interação, isso demanda conhecimentos de programação em Python ou Fortran90.

⁴⁰ Este é um Modelo de extensão do Λ CDM, aqui a EE é descrita por um fluido com equação de estado $\omega = p/\rho$, com $\omega = cte$ tal que, $\omega < -1/3$. Não iremos nos aprofundar neste Modelo.

4 Considerações Finais

As observações cosmológicas mostram que o Universo é composto por um quantidade considerável de componentes escuras: matéria escura e energia escura, cerca de 95% da densidade total. Elas foram postuladas apenas devido aos efeitos gravitacionais. Pesquisas cosmológicas de alta tecnologia tem buscado informações de períodos em que o Universo era ainda jovem, para investigar fontes de dados que possam fornecer uma compreensão mais consolidada sobre a evolução cósmica, como por exemplo, observações da linha de 21-cm do HI, para extrair as oscilações acústicas bariônicas, e assim as características das componentes escuras.

Foi possível apresentar espectros de potência da matéria linear (e não-linear), função de correlação, espectros de potência angulares, como da linha de 21-cm e comparar com os espectros teóricos para avaliar a concordância de Modelos ou propor novos e estimar parâmetros cosmológicos. O primeiro passo para avançar é entender os fundamentos básicos dos observáveis que foram analisados.

Abordamos a teoria das perturbações cosmológicas lineares dentro da qual é definida a função de Crescimento das perturbações de matéria, que é uma quantidade necessária para nosso estudo, essa função é dependente do Modelo Cosmológico e em cada período do Universo evolui de forma diferente. Estudamos também sobre as Equações de Boltzmann que descrevem como as componentes do Universo evoluem, essas equações são resolvidas pelo código CAMB que fornece um espectro de potência da matéria linear.

Reproduzimos os espectros de potências da matéria para o Modelo Λ CDM usando parâmetros atuais do Planck 2018 [2], todos eles estão de acordo com os resultados apresentados na literatura [19].

Apresentamos o Modelo Cosmológico IDE de forma generalizada que podemos utilizar no CAMB para reproduzir os espectros e adicionamos uma contribuição, em que a interação é proporcional a matéria escura e energia escura. Tal interação é importante para analisar a taxa de crescimento das perturbações cosmológicas e como isso influencia na dinâmica da evolução do Universo.

Este trabalho pode ser utilizado como material alternativo do radiotelescópio BINGO, por conter de maneira geral tópicos relacionados a parte observacional e teórica, em especial, os espectros de potências, dos quais são extraídas as Oscilações Acústicas Bariônicas. Pretendemos continuar os estudos nesta área, aperfeiçoando os conhecimentos computacionais para geração de espectros de potência angular de 21-cm, implementação do Modelo IDE e métodos de extração das Oscilações Acústicas Bariônicas, assim como, fazer análises sobre o formação de estruturas em larga escala.

Referências

- 1 HINSHAW, G. et al. *Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results*. 2012. Disponível em: <arXiv:1212.5226[astro-ph.CO]>. Citado 7 vezes nas páginas 21, 27, 34, 41, 50, 51 e 61.
- 2 COLABORATION, P. *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*. 2018. Disponível em: <arXiv:1807.06209[astro-ph.CO]>. Citado 11 vezes nas páginas 21, 24, 33, 34, 35, 41, 54, 114, 115, 117 e 135.
- 3 SHADAB, A. et al. *The Eleventh and Twelfth Data Releases of the Sloan Digital Sky Survey: Final Data from SDSS-III*. 2015. Disponível em: <arXiv:1501.00963[astro-ph.IM]>. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 61.
- 4 MARTTENS, R. V.; RIBEIRO, F.; ZIMDAHL, W. *Perturbações cosmológicas e a taxa de crescimento das flutuações da matéria*. *Rev. Bras. Ensino Fís.*, v. 34, n. 1, p. 1–9, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 21, 94 e 127.
- 5 MARINS, A. R. *Observações da linha de 21 cm do hidrogênio: Um ajuste fenomenológico para extração das oscilações acústicas dos bárions do espectro de potência angular*. Dissertação de mestrado em física. Universidade de São Paulo, 2018. Citado 11 vezes nas páginas 22, 76, 87, 89, 91, 99, 101, 102, 103, 104 e 105.
- 6 EVERETT, S. et al. *Detection of Baryonic Acoustic Oscillations in the Matter Power Spectrum*. *DePaul Discoveries*, v. 4, n. 1, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 22, 117 e 118.
- 7 CHABANIER, S.; PALANQUE-DELABROUILLE, N. *Matter power spectrum: from Ly α forest to CMB scales*. 2019. Disponível em: <arXiv:1905.08103v2>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 117.
- 8 EISENSTEIN, D. J. et al. *Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation of sdss luminous red galaxies*. 2005. Disponível em: <arXiv:astro-ph/0501171v1>. Citado 3 vezes nas páginas 22, 91 e 92.
- 9 BASSET, B. A.; HLOZEK, R. *Baryon Acoustic Oscillations*. 2009. Disponível em: <arXiv:0910.5224v1[astro-ph.CO]>. Citado 4 vezes nas páginas 22, 52, 55 e 56.
- 10 PEEL, M. W. et al. *Baryon acoustic oscillations from Integrated Neutral Gas Observations: Radio frequency interference measurements and telescope site selection*. 2018. Disponível em: <arXiv:1811.09464>. Citado 4 vezes nas páginas 22, 112, 113 e 114.
- 11 HE, J.-H. *Testing the interaction between dark energy and dark matter via latest observations*. 2011. Disponível em: <arXiv:1012.3904v3[astro-ph.CO]>. Citado 7 vezes nas páginas 23, 119, 120, 123, 124, 131 e 162.
- 12 D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford: Clarendon press. [S.l.: s.n.], 1992. Citado 3 vezes nas páginas 25, 27 e 29.
- 13 CARROLL, S. M. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison-wesley professional. [S.l.: s.n.], 2003. Citado 4 vezes nas páginas 25, 26, 28 e 51.

- 14 CODATA. *Newtonian Consta of Gravitation*. [s.n.], 23/02/2019. Disponível em: <<https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?bg>>. Citado na página 25.
- 15 SCHUTZ, B. F. *A First Course in General Relativity*. 2^a. ed. [S.l.: s.n.], 2009. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 31.
- 16 AMOROSO, R. et al. *Gravitation and Cosmology: From the Hubble Radius to the Planck Scale*. [S.l.: s.n.], 2002. Citado na página 27.
- 17 MO, H.; BOSCH, F.; WHITE, S. *Galaxy Formation and Evolution*. [S.l.: s.n.], 2010. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 36.
- 18 FIXSEN, D. J. et al. *Cosmic microwave background dipole spectrum measured by the COBE FIRAS*. *Astrophys.* [S.l.: s.n.], 1994. Citado na página 27.
- 19 SOUZA, A. L. B. de. *Oscilações acústicas bariônicas*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas, 2018. Citado 6 vezes nas páginas 27, 34, 39, 89, 116 e 135.
- 20 DELBEM, N. F. *Introdução Matemática aos Modelos Cosmológicos*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", 2010. Citado na página 28.
- 21 RODRIGUES, M. G. *Estruturas Causais*. *Revista Brasileira de Ensino da Física*, v. 35, n. 1, p. 1312, 2013. Citado na página 28.
- 22 FERRARO, R. *Einstein's Space-Time: An Introduction to Special and General Relativity*. Springer. [S.l.: s.n.], 2007. Citado na página 29.
- 23 WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Johnwiley&sons. [S.l.: s.n.], 1972. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 36.
- 24 FREITAS, R. C. de. *Perturbações cosmológicas de origens quântica e clássica: oscilações no espectro de potência e o condensado de Bose-Einstein*. Tese de doutorado. Universidade Federal do Espírito Santo, 2014. Citado 7 vezes nas páginas 31, 45, 46, 47, 49, 63 e 65.
- 25 HUBBLE, E. *A Relations Between Distance and Radial Velocity Among Extra-Galactic Nebulae*. *Proc. N. A. S.*, v. 5, p. 169–173, 1929. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.
- 26 MORAIS, E. M. de. *Ajustes dos Parâmetros Cosmológicos de um Modelo de Unificação de Matéria Escura e Energia Escura*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Alfenas, 2016. Citado 10 vezes nas páginas 31, 33, 38, 41, 43, 44, 62, 63, 64 e 65.
- 27 LAMBOURNE, R. J. A. *Relativity, Gravitation and Cosmology*. 1^a. ed. [S.l.: s.n.]. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.
- 28 RIBEIRO, A. M. *Modelos Cosmológicos de energia Escura: Aspectos teóricos e vínculos observacionais*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Itajubá, 2013. Citado na página 33.
- 29 NETO, G. P. da S. *Estimating cosmological parameters from observational data*. *Sociedade Brasileira de Física*, v. 40, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 91.

- 30 CHEN, G. C.-F. et al. A sharp view of H0licow: H0 from three time-delay gravitational lens systems with adaptive optics imaging. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press (OUP), v. 490, n. 2, p. 1743–1773, Set 2019. ISSN 1365-2966. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stz2547>>. Citado na página 33.
- 31 FERREIRA, P. da C. *Estudo da Interação no Setor Escuro Através do Parâmetro de Hubble*. Tese de doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2014. Citado na página 35.
- 32 LIDDLE, A. *An Introduction to Modern Cosmology*. 2ª. ed. [S.l.: s.n.]. Citado 5 vezes nas páginas 36, 37, 38, 46 e 94.
- 33 BATISTA, C. E. M. *Perturbações Primordiais de Densidade em Gravitação com Fase Conjugada*. Dissertação de Mestrado, 1995. Citado na página 37.
- 34 FUNÕ, A. R. *Perturbações da matéria num modelo cosmológico com interações no setor escuro*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Espírito Santo, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 37, 38, 39 e 66.
- 35 PERKINS, D. *Particles Astrophysics*. 2ª. ed. [S.l.: s.n.]. Citado na página 38.
- 36 FRIEMAN, J.; TURNER, M.; HUTERER, D. *Dark Energy and the Accelerating Universe*. 2008. Disponível em: <[arXiv:0803.0982\[astro-ph\]](https://arxiv.org/abs/0803.0982)>. Citado na página 40.
- 37 HOGG, D. W. *Distance measures in cosmology*. 2000. Disponível em: <[arXiv:astro-ph/9905116](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9905116)>. Citado na página 41.
- 38 SILVA, L. C. da; CALVÃO, M. O. *Distâncias em Cosmologia*. Revisão. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.
- 39 BAUMANN, D. *Part III Mathematical Tripos: Cosmology*. Lecture, 2015. Citado 6 vezes nas páginas 43, 44, 45, 48, 49 e 50.
- 40 LIMA, H. J. F. *Estudo Observacional de Duas candidatas a progenitoras de supernovas do tipo Ia*. Dissertação de Mestrado. Universidade do Vale do Paraíba, 2013. Citado na página 44.
- 41 TSUJIKAWA, S. *Dark energy: investigation and modeling*. 2010. Disponível em: <[arXiv:1004.1493v1\[astro-ph.CO\]](https://arxiv.org/abs/1004.1493v1)>. Citado na página 45.
- 42 PHYSICS, M. D. of. *Alan Guth*. 2016. Disponível em: <https://web.mit.edu/physics/people/faculty/guth_alan.html>. Citado na página 45.
- 43 GUTH, A. H. *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*. *Physical Review D*, v. 23, n. 2, 1981. Citado na página 46.
- 44 LAZARIDES, G. *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*. *Physical Review D*, v. 23, n. 2. Citado na página 46.
- 45 MUKHANOV, V. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge: University press. [S.l.: s.n.], 2005. Citado 5 vezes nas páginas 47, 62, 63, 64 e 65.
- 46 SMOOT, G. F. *Dark energy: investigation and modeling*. 1999. Disponível em: <[arXiv:astro-ph/9902027v1](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9902027v1)>. Citado na página 50.

- 47 CHALLINOR, A. *CMB anisotropy science: a review*. 2012. Disponível em: <arXiv:1210.6008[astro-ph.CO]>. Citado na página 51.
- 48 PERLMUTTER, S. et al. *Cosmology from Type Ia Supernovae*. 1998. Disponível em: <arXiv:astro-ph/9812473v1>. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 52.
- 49 PHILLIPS, M. M. *The absolute magnitudes of Type IA supernovae*. *Astrophysical Journal, Part 2 - Letters (ISSN 0004-637X)*, vol. 413, no. 2, p. L105-L108, 08/1993. Disponível em: <DOI:10.1086/186970>. Citado na página 52.
- 50 SEO, H.-J.; EISENSTEIN, D. J. *Probing Dark Energy with Baryonic Acoustic Oscillations from future large galaxy redshift surveys*. 2003. Disponível em: <arXiv:astro-ph/0307460v1>. Citado na página 52.
- 51 GRASSI, A. *Baryon Acoustic Oscillations And Primordial Non-Gaussianities With Weak Lensing*. Tese de doutorado - Faculties of the Natural Sciences and Mathematics of the Ruperto-Carola-University of Heidelberg, Germany, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 53.
- 52 PEEBLES, P. J. E. *Principles of Physical Cosmology*. [S.l.: s.n.], 1993. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 72.
- 53 PLANCK, C. Planck 2015 results. xiii. cosmological parameters. 2015. Disponível em: <arXiv:1502.01589[astro-ph.CO]>. Citado 3 vezes nas páginas 54, 130 e 134.
- 54 EISENSTEIN, D. J.; HU, W. *Baryonic Features in the Matter Transfer Function*. *The Astrophysical Journal*, v. 496, n. 2, 1998. Disponível em: <arXiv:astro-ph/9709112>. Citado 3 vezes nas páginas 54, 97 e 98.
- 55 SDDS, C. *SDSS - O Data Release 15*. Acessado em: 22/08/2019. Disponível em: <https://www.sdss.org/surveys/>. Citado 4 vezes nas páginas 55, 106, 107 e 108.
- 56 VILLAESCUSA-NAVARRO, F. et al. *Modeling the neutral hydrogen distribution in the post-reionization Universe: intensity mapping*. 2014. Disponível em: <arXiv:1405.6713v2[astro-ph.CO]>. Citado na página 57.
- 57 FIALKOVA, A.; LOEB, A. *The 21-cm Signal from the Cosmological Epoch of Recombination*. 2013. Disponível em: <arXiv:1311.4574v2[astro-ph.CO]>. Citado na página 57.
- 58 NAOJ. *National Astronomical Observatory of Japan*. Disponível em: <https://www.nao.ac.jp>. Citado na página 57.
- 59 BREYSSE, P. C. *High-Redshift Astrophysics And Cosmology With Intensity Mapping*. 2017. Citado na página 57.
- 60 COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOE, F. *Quantum Mechanics*. [S.l.: s.n.], 1997. Citado na página 58.
- 61 FILHO, K. de S. O.; SARAIVA, M. de F. O. *Astronomia e Astrofísica: O meio interestelar*. 03 de abril de 2019. Disponível em: <http://astro.if.ufrgs.br/ism/ism.htm>. Citado na página 58.

- 62 PRITCHARD, J. R.; LOEB, A. *21 cm cosmology in the 21st century. Reports on Progress in Physics*, v. 75, n. 8, p. 086901, Ago 2012. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2012RPPh...75h6901P>>. Citado 3 vezes nas páginas 58, 59 e 100.
- 63 OBULJEN, A. *Large-Scale Structure with 21cm Intensity Mapping*. Tese de doutorado em Astrofísica, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 59, 110 e 114.
- 64 VENNIN, V. *Cosmological Inflation: Theoretical Aspects and Observational Constraints*. Tese de doutorado em física. l'Universite Pierre et Marie Curie, 2014. Citado na página 61.
- 65 JUNIOR, E. K. *Teoria de perturbações Cosmológicas*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Londrina, 2016. Citado na página 62.
- 66 CHALLINOR, A. *Part-III Cosmology. Notes Introduction to Cosmology*, 2009. Citado na página 66.
- 67 SOUZA, R. E. de. *Introdução à cosmologia*. 2004. Citado na página 66.
- 68 BEAN, R.; DORÉ, O. *Probing dark energy perturbations: the dark energy equation of state and speed of sound as measured by WMAP*. 2003. Disponível em: <[arXiv:astro-ph/0307100v2](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0307100v2)>. Citado na página 67.
- 69 PORTO, C. D. *Growth of cosmological perturbations in Dark Energy universes. XXIII Doctoral school in Physics-Università degli Studi di Roma TRE*. Citado 3 vezes nas páginas 70, 72 e 74.
- 70 HEATH, D. J. *The growth of density perturbations in zero pressure Friedmann-Lemaitre universes. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 179, p. 351–358, 1977. Citado na página 74.
- 71 BERNARDEAU, F. et al. *Large-Scale Structure of the Universe and Cosmological Perturbation Theory*. 2001. Disponível em: <[arXiv:astro-ph/0112551](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0112551)>. Citado na página 75.
- 72 DODELSON, S. *Modern Cosmology*. Academic press. [S.l.: s.n.], 2003. Citado 12 vezes nas páginas 76, 82, 83, 84, 86, 87, 89, 95, 96, 98, 99 e 101.
- 73 PIATTELLA, O. F. *Lecture Notes in Cosmology*. 2018. Disponível em: <[arXiv:1803.00070v1](https://arxiv.org/abs/1803.00070v1)[astro-ph.CO]>. Citado 6 vezes nas páginas 76, 87, 89, 92, 93 e 94.
- 74 BARROS, G. *Perturbações das equações de Einstein-Boltzmann com aplicação a flutuações na temperatura da radiação cósmica de fundo*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 82 e 157.
- 75 AMENDOLA, L.; SHINJI, T. *Dark Energy: Theory and Observations*. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 89 e 98.
- 76 HU, B. lok; MATA CZ, A. *Quantum Noise in Gravitation and Cosmology*. 1993. Disponível em: <[arXiv:astro-ph/9312012](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9312012)>. Citado 2 vezes nas páginas 89 e 90.
- 77 NORMAN, M. L. *Simulating Galaxy Clusters*. 2010. Disponível em: <[arXiv:1005.1100v1](https://arxiv.org/abs/1005.1100v1)[astro-ph.CO]>. Citado na página 90.

- 78 SCHNEIDER, P. *An introduction: Extragalactic Astronomy and Cosmology*. [S.l.]: Springer, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 90 e 91.
- 79 YORK, D. G. et al. *The Sloan Digital Sky Survey: Technical Summary*. *THE ASTRONOMICAL JOURNAL*, n. 120, p. 1579–1587, 2000. Disponível em: <arXiv:1312.0003[astro-ph.CO]>. Citado na página 91.
- 80 LYTH, D. H.; LIDDLE, A. R. *The Primordial Density Perturbation: Cosmology, Inflation and the Origin of Structure*. Revised edition. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. Citado na página 93.
- 81 BARDEEN, J. M. et al. *The statistics of peaks of Gaussian random fields*. *Astrophysical Journal*, v. 304, p. 15–61, 1986. Citado na página 96.
- 82 DON, P. H. M. *Measuring Cosmological Parameters using matter power spectrum from galaxy redshift survey data*. Tese de doutorado de Física. University of Oklahoma, 2013. Citado na página 100.
- 83 HALL, A.; BONVIN, C.; CHALLINOR, A. *Testing General Relativity with 21 cm intensity mapping*. *Phys.Rev.D*, v. 87, p. 064026, 2013. Disponível em: <arXiv:1212.0728v2[astro-ph.CO]>. Citado 2 vezes nas páginas 100 e 101.
- 84 SWITZER, K. W. M. E. R. et al. *Determination of $z \approx 0.8$ neutral hydrogen fluctuations using the 21 cm intensity mapping auto-correlation*. 2013. Disponível em: <arXiv:1304.3712[astro-ph.CO]>. Citado na página 101.
- 85 SANTOS, M. G. et al. *Cosmology with a SKA HI intensity mapping survey*. 2015. Disponível em: <arXiv:1501.03989v1[astro-ph.CO]>. Citado na página 102.
- 86 BATTYE, R. A. et al. *HI intensity mapping : a single dish approach*. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc*, v. 434, n. 2, p. 1239–1256, 2013. Disponível em: <arXiv:1209.0343[astro-ph.CO]>. Citado 3 vezes nas páginas 102, 103 e 104.
- 87 LOVERDE, M.; AFSHORDI, N. *Extended Limber Approximation*. *Phys.Rev.*, v. 78, n. 12, Dez. 2008. Disponível em: <arXiv:0809.5112[astro-ph]>. Citado na página 105.
- 88 LEMOS, P.; EFSTATHIOU, G. *The effect of Limber and flat-sky approximations on galaxy weak lensing*. Abr 2017. Disponível em: <arXiv:1704.01054v1[astro-ph.CO]>. Citado na página 105.
- 89 GUNN AND, a. a. a. a. J. E. *The 2.5 M Telescope Of The Sloan Digital Sky Survey*. *The Astronomical Journal*, n. 131, p. 2332–2359, 2006. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/500975/pdf>. Citado na página 108.
- 90 PARKINSON, a. D. *The WiggleZ Dark Energy Survey: Final data release and cosmological results*. *Cosmology and Nongalactic Astrophysics*, 2012. Disponível em: <arXiv:1210.2130>. Citado na página 109.
- 91 JONES AND, a. a. a. a. D. H. *The 6dF Galaxy Survey: Final Redshift Release (DR3) and Southern Large-Scale Structures*. *Cosmology and Nongalactic Astrophysics*, 2009. Disponível em: <arXiv:0903.5451[astro-ph.CO]>. Citado na página 109.

- 92 JARRETT, a. T. *2MASS Extended Source Catalog: Overview and Algorithms*. *Astrophysics*, n. 119, p. 2498–2531, 2000. Disponível em: <arXiv:astro-ph/0004318>. Citado na página 109.
- 93 ABBOTT, a. T. M. C. *The Dark Energy Survey Data Release 1*. n. 119, p. 2498–2531, 2018. Disponível em: <arXiv:1801.03181[astro-ph.IM]>. Citado 2 vezes nas páginas 109 e 110.
- 94 COLLABORATION, D. *Dark Energy Survey Year 1 Results: Measurement of the Baryon Acoustic Oscillation scale in the distribution of galaxies to redshift 1*. 2017. Disponível em: <arXiv:1712.06209v2[astro-ph.CO]>. Citado na página 110.
- 95 CAMERA, S.; FERREIRA, P. G.; FERRAMACHO, L. *Cosmology on Ultralarge Scales with Intensity Mapping of the Neutral Hydrogen 21 cm Emission: Limits on Primordial Non-Gaussianity*. 2013. Disponível em: <arXiv:1305.6928[astro-ph.CO]>. Citado na página 111.
- 96 MAARTENS, R. et al. *Relativistic corrections and non-Gaussianity in radio continuum surveys*. 2012. Disponível em: <arXiv:1206.0732[astro-ph.CO]>. Citado na página 111.
- 97 VILLAESCUSA-NAVARRO, F.; VIEL, M. *Baryonic acoustic oscillations from 21cm intensity mapping: the Square Kilometre Array case*. 2016. Disponível em: <arXiv:1609.00019[astro-ph.CO]>. Citado na página 111.
- 98 CHANG, T.-C. et al. *Baryon Acoustic Oscillation Intensity Mapping as a Test of Dark Energy*. 2008. Disponível em: <arXiv:0709.3672[astro-ph]>. Citado na página 111.
- 99 WU, F. et al. *Tianlai: a 21cm radio telescope array for BAO and dark energy, status and progress*. 2015. Disponível em: <http://inspirehep.net/record/1589795/files/1589498_315-318.pdf>. Citado na página 111.
- 100 WUENSCHÉ, C. A.; COLLABORATION the B. *The BINGO telescope: a new instrument exploring the new 21-cm cosmology window*. 2018. Disponível em: <arXiv:1803.01644[astro-ph.IM]>. Citado 3 vezes nas páginas 111, 112 e 113.
- 101 ANDERSON, L. et al. *The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Baryon Acoustic Oscillations in the Data Release 9 Spectroscopic Galaxy Sample*. 2012. Disponível em: <arXiv:1203.6594v1[astro-ph.CO]>. Citado na página 112.
- 102 EISENSTEIN, D. J.; SIRKO, E.; SPERGEL, D. *Improving Cosmological Distance Measurements by Reconstruction of the Baryon Acoustic Peak*. 2006. Disponível em: <arXiv:astro-ph/0604362>. Citado na página 113.
- 103 DICKINSON, C. *BINGO - A novel method to detect BAOs using a total-power radio telescope*. 2014. Disponível em: <arXiv:1405.7936[astro-ph.IM]>. Citado na página 113.
- 104 CHAVEZ, H. O. C. *Large Scale Structures in photometric and spectroscopic surveys*. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/T.43.2019.tde-07052019-084133>. Citado na página 113.

- 105 WANG, B. et al. *Dark matter and dark energy interactions: theoretical challenges, cosmological implications and observational signatures*. 2016. Disponível em: <arXiv:1603.08299[astro-ph.CO]>. Citado na página 113.
- 106 LEWIS, A.; CHALLINOR, A.; LASENBY, A. Efficient computation of cmb anisotropies in closed frw models. *Astrophys. J*, v. 538, n. 473, 2000. Disponível em: <astro-ph/9911177>. Citado 4 vezes nas páginas 114, 115, 116 e 130.
- 107 PAGE, L. et al. First-year wilkinson microwave anisotropy probe(wmap) observations: Interpretation of the tt and te angular power spectrum peaks. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, IOP Publishing, v. 148, n. 1, p. 233–241, Sep 2003. ISSN 1538-4365. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1086/377224>. Citado na página 117.
- 108 ATRIO-BARANDELA, F. et al. Observational matter power spectrum and the height of the second acoustic peak. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 559, n. 1, p. 1–8, Sep 2001. ISSN 1538-4357. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1086/322280>. Citado na página 117.
- 109 TSUJIKAWA, S. *Quintessence: A Review*. 2013. Disponível em: <arXiv:1304.1961[gr-qc]>. Citado na página 119.
- 110 ARMENDARIZ-PICON, C.; MUKHANOV, V.; STEINHARDT, P. J. *Essentials of k-essence*. 2000. Disponível em: <arXiv:astro-ph/0006373>. Citado na página 119.
- 111 KHOURY, J. *Chameleon Field Theories*. 2013. Disponível em: <arXiv:1306.4326[astro-ph.CO]>. Citado na página 119.
- 112 VELTEN, H.; MARTTENS, R. vom; ZIMDAHL, W. *Aspects of the cosmological "coincidence problem"*. 2014. Disponível em: <arXiv:1410.2509[astro-ph.CO]>. Citado na página 119.
- 113 WANG, B. et al. *Dark Matter and Dark Energy Interactions: Theoretical Challenges, Cosmological Implications and Observational Signatures*. 2016. Disponível em: <arXiv:1603.08299v2[astro-ph.CO]>. Citado na página 119.
- 114 KHURSHUDYAN, M.; KHURSHUDYAN, A. Z. *Some Interacting Dark Energy Models. Symmetry*, 2018. Citado na página 119.
- 115 HE, J.-H.; WANG, B.; ABDALLA, E. *Stability of the curvature perturbation in dark sectors' mutual interacting models*. 2018. Disponível em: <arXiv:0807.3471v2[gr-qc]>. Citado na página 119.
- 116 SANTOS, L. et al. *Constraining interacting dark energy with CMB and BAO future surveys*. Disponível em: <arxiv:1707.06827>. Citado 5 vezes nas páginas 119, 129, 131, 132 e 133.
- 117 XU, X.; MA, Y.-Z. *Constraining the interaction between dark sectors with future HI intensity mapping observations*. , 2017. Disponível em: <arXiv:1710.03643v2[astro-ph.CO]>. Citado 4 vezes nas páginas 119, 120, 121 e 134.
- 118 VÄLIVIITA, J.; MAJEROTTO, E.; MAARTENS, R. *Large-scale instability in interacting dark energy and dark matter fluids*. 2008. Disponível em: <arXiv:0804.0232[astro-ph]>. Citado 2 vezes nas páginas 120 e 124.

- 119 CAMPO, S. del; HERRERA, R.; PAVON, D. *H(z) diagnostics on the nature of dark energy*. 2011. Disponível em: <arXiv:1103.5492[astro-ph.CO]>. Citado 2 vezes nas páginas 121 e 122.
- 120 COSTA, A. A. et al. *Constraints on interacting dark energy models from Planck 2015 and redshift-space distortion data*. 2017. Disponível em: <arxiv:1605.04138>. Citado 4 vezes nas páginas 123, 128, 129 e 130.
- 121 MARCONDES, R. J. F. et al. *Analytic study of the effect of dark energy-dark matter interaction on the growth of structures*. Disponível em: <arXiv:1605.05264[astro-ph.CO]>. Citado 4 vezes nas páginas 125, 126, 127 e 128.
- 122 ZHANG, J. et al. *The First Constraint From Sdss Galaxy-Galaxy Weak Lensing Measurements On Interacting Dark Energy Models*. 2019. Disponível em: <arXiv:1807.05522v2[astro-ph.CO]>. Citado 3 vezes nas páginas 129, 130 e 131.
- 123 MARTINS, J. S. *O modelo de Halos e o Espectro de potência da Matéria Escura Morna*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista, 2015. Citado na página 130.

Apêndices

APÊNDICE A – Variação da métrica, Variação da ação S_M e Símbolos de Christoffel no Wofram mathematica

A.1 Variação da métrica

Usando a definição de ortogonalidade da métrica:

$$g^{\nu\lambda}g_{\mu\nu} = \delta_{\mu}^{\lambda}, \quad (\text{A.1})$$

aplicando o princípio da mínima ação,

$$\begin{aligned} \delta(g^{\nu\lambda}g_{\mu\nu}) &= 0, \\ \delta g^{\nu\lambda}g_{\mu\nu} + g^{\nu\lambda}\delta g_{\mu\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

multiplicando pela métrica $g_{\lambda\sigma}$ e contraindo índices,

$$\begin{aligned} \delta g^{\nu\lambda}g_{\lambda\sigma}g_{\mu\nu} + g^{\nu\lambda}g_{\lambda\sigma}\delta g_{\mu\nu} &= 0, \\ \delta_{\sigma}^{\nu}\delta g_{\mu\nu} &= -\delta g^{\nu\lambda}g_{\lambda\sigma}g_{\mu\nu}, \\ \delta g_{\mu\sigma} &= -\delta g^{\nu\lambda}g_{\lambda\sigma}g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Escrevendo um determinante qualquer g em termos da expansão em cofatores,

$$g = A^{(\mu)\nu}g_{(\mu)\nu}, \quad (\text{A.4})$$

onde $g_{(\mu)\nu}$ são os elementos de uma fila (ou coluna) qualquer e $A^{(\mu)\nu}$ são os respectivos cofatores, o índice (μ) indica que não há soma. O cofator é definido da forma,

$$A^{\mu\nu} = gg^{\mu\nu}. \quad (\text{A.5})$$

Tendo feito as definições acima, podemos calcular a variação de $\sqrt{-g}$ com respeito a $g^{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g}\delta g, \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta g, \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Substituindo (A.3) nesta equação, achamos a identidade que gostaríamos de provar:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.7})$$

A.2 Variação da ação S_M

$$S_M = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_M, \quad (\text{A.8})$$

$$\delta S_M = \int (\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}_M + \sqrt{-g} \delta \mathcal{L}_M) d^n x, . \quad (\text{A.9})$$

Variando com respeito a métrica $g^{\mu\nu}$, temos,

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.10})$$

$$\delta \mathcal{L}_M = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.11})$$

Usando estes resultados em (A.9), obtemos:

$$\delta S_M = \int \left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \mathcal{L}_M + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \right) d^n x, \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = \int \left(g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} \right) d^n x. \quad (\text{A.13})$$

Portanto,

$$\frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}}. \quad (\text{A.14})$$

A.3 Símbolos de Christoffel no Wolfram mathematica

```
Clear[coord,metric,inversemetric,affine,t,r,θ ,ϕ]
```

```
n=4;
```

```
coord={t,r,θ ,ϕ };
```

```
metric = {{1,0,0,0},{0,-(a[t]^2)/(1-c r^2),0,0},{0,0,-a[t]^2 r^2,0}, {0,0,0,-a[t]^2 r^2 sin
```

```
[θ ]^2}};
```

```
metric//MatrixForm
```

```
inversemetric =Simplify[Inverse[metric]]
```

```
inversemetric//MatrixForm
```

```
affine :=affine = Simplify[Table[(1/2)*Sum[(inversemetric[[i,s]])*(D[metric[[s,j]],
```

```
coord[[k]]+D[metric[[s,k]],coord[[j]]]-D[metric[[j,k]],coord[[s]]]),{s,1,n},{i,1,n},{j,1,n},
```

```
{k,1,n}]]
```

```
listaffine :=Table[If[UnsameQ[affine[[i,j,k]],0],{ToString[Γ [i,j,k]],affine[[i,j,k]]},
```

```
{i,1,n},{j,1,n}, {k,1,n}]
```

```
TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[listaffine],Null],2], TableSpacing→ {2,2}]
```

APÊNDICE B – Perturbação de quantidades físicas e Função de Crescimento no Universo contendo matéria e Constante Cosmológica

B.1 Tensores e equações no tempo conforme

Símbolos de Christoffel não nulos

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{00}^0 &= \frac{a'}{a}, \\ \bar{\Gamma}_{ij}^0 &= \frac{a'}{a}\delta_{ij}, \\ \bar{\Gamma}_{j0}^i &= \frac{a'}{a}\delta_j^i,\end{aligned}\tag{B.1}$$

Tensores de Ricci não nulos e Escalar de Ricci

$$\begin{aligned}\bar{R}_0^0 &= -3\frac{\mathcal{H}'}{a^2}, \\ \bar{R}_j^i &= -\frac{1}{a^2}(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\delta_j^i, \\ \bar{R} &= -6\left(\frac{\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2}{a^2}\right)\end{aligned}\tag{B.2}$$

Tensor de Einstein

$$\begin{aligned}\bar{G}_0^0 &= 3\frac{\mathcal{H}^2}{a^2}, \\ \bar{G}_j^i &= \left(2\frac{\mathcal{H}'}{a^2} + \frac{\mathcal{H}}{a^2}\right)\delta_j^i,\end{aligned}\tag{B.3}$$

Equações de Friedmann

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k a^2,\tag{B.4}$$

$$2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 = -a^2 8\pi G a^2 \bar{\rho},\tag{B.5}$$

B.2 Perturbação das quantidades tensoriais

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}[\bar{g}^{\alpha\rho}(\partial_{\mu}\delta g_{\rho\nu} + \partial_{\nu}\delta g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}\delta g_{\mu\nu})] - \frac{1}{2}[\delta g^{\alpha\rho}(\partial_{\mu}\bar{g}_{\rho\nu} + \partial_{\nu}\bar{g}_{\rho\mu} - \partial_{\rho}\bar{g}_{\mu\nu})], \quad (\text{B.6})$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}(\delta\Gamma_{\rho\nu}^{\alpha}) - \partial_{\nu}(\delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha}) + \bar{\Gamma}_{\alpha\lambda}^{\alpha}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) + (\delta\Gamma_{\alpha\lambda}^{\alpha})\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} - \bar{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\alpha}(\delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda}) - (\delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha})\bar{\Gamma}_{\alpha\mu}^{\lambda}, \quad (\text{B.7})$$

$$\delta R = \bar{g}^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} - \delta g^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu}. \quad (\text{B.8})$$

B.3 Símbolos de Christoffel para métrica perturbada no tempo cósmico

Os cálculos foram feitos no Software Mathematica seguidos de algumas manipulações simples, expansões de Taylor e generalizações para chegar nos resultados abaixo.

$$\Gamma_{00}^0 \approx \frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad (\text{B.9})$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{i0}^0 \approx \frac{\partial\Psi}{\partial x^i}, \quad (\text{B.10})$$

$$\Gamma_{ji}^0 = \Gamma_{ij}^0 \approx a(t)^2 \left(\frac{H}{a} + \frac{2H}{a}(\Phi - \Psi) + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) \delta_{ij}, \quad (\text{B.11})$$

$$\Gamma_{00}^i \approx \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} \frac{1}{a^2}, \quad (\text{B.12})$$

$$\Gamma_{0j}^i = \Gamma_{j0}^i \approx (H + \dot{\Phi}) \delta_{ij}, \quad (\text{B.13})$$

$$\Gamma_{jk}^i \approx \frac{\partial\Phi}{\partial x^j} \delta_{ik} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^k} \delta_{ij} - \frac{\partial\Phi}{\partial x^i} \delta_{jk}. \quad (\text{B.14})$$

B.4 Perturbação dos Símbolos de Christoffel no tempo conforme

$$\delta\Gamma_{00}^0 = \Psi', \quad (\text{B.15})$$

$$\delta\Gamma_{0i}^0 = \partial_i\Psi, \quad (\text{B.16})$$

$$\delta\Gamma_{00}^i = \delta^{ij}\partial_j\Psi, \quad (\text{B.17})$$

$$\delta\Gamma_{ij}^0 = [\Phi' + 2\mathcal{H}(\Phi - \Psi)]\delta_{ij}, \quad (\text{B.18})$$

$$\delta\Gamma_{j0}^i = \Phi'\delta_j^i, \quad (\text{B.19})$$

$$\delta\Gamma_{jk}^i = \partial_j\Phi\delta_k^i + \partial_k\Phi\delta_j^i - \partial^i\Phi\delta_{ik}, \quad (\text{B.20})$$

B.5 Perturbação do Tensor de Ricci e escalar de Ricci

$$\delta R_0^0 = \frac{1}{a^2}(3\mathcal{H}\Phi' + \nabla^2\Phi + 3\Psi'' + 3\mathcal{H}\Psi'), \quad (\text{B.21})$$

$$\delta R_i^0 = \frac{2}{a^2}(\partial_i\Phi' + \mathcal{H}\partial_i\Psi),$$

$$\delta R_j^i = -a^{-2}\{[\Phi'' + \nabla^2\Phi - 2(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)(\Phi + \Psi) - \mathcal{H}\Psi' - 5\mathcal{H}\Phi']\delta_{ij} + \partial_i\partial_j(\Phi - \Psi)\},$$

$$\delta R = \frac{1}{a^2}[2\nabla^2\Psi - 4\nabla^2\Phi + 12(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Psi + 6\Phi''(\Psi' + 3\Phi')]. \quad (\text{B.22})$$

B.6 Perturbação do Tensor de Einstein

$$\delta G_0^0 = \frac{2}{a^2}[\nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Psi + \Phi')], \quad (\text{B.23})$$

$$\delta G_i^0 = \frac{2}{a^2}\partial_i(\Phi' + \mathcal{H}\Psi), \quad (\text{B.24})$$

$$\delta G_j^i = -\frac{2}{a^2}\left\{\left[\Phi'' + \mathcal{H}(2\Phi' + \Psi') + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \frac{1}{2}\nabla^2(\Psi - \Phi)\right]\delta_j^i + \frac{1}{2}\partial_i\partial_j(\Phi - \Psi)\right\}$$

B.7 Transformadas de Fourier das Perturbações

$$\Psi(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \Phi_k, \quad (\text{B.25})$$

$$\Phi(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \Psi_k, \quad (\text{B.26})$$

$$\delta(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \delta_k, \quad (\text{B.27})$$

$$\theta(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \theta_k, \quad (\text{B.28})$$

No espaço de Fourier, por conveniência assumimos que as perturbações podem ser escritas como somas de ondas planas, tal que:

$$A(\vec{r}) \longrightarrow e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} A_k, \quad (\text{B.29})$$

onde A é uma perturbação qualquer.

B.7.1 Perturbação na temperatura dos fótons

Dada a função distribuição de Bose-Einstein,

$$f_{BE}(t, p) = \frac{1}{\exp(p/T) - 1}, \quad (\text{B.30})$$

onde desprezamos o potencial químico μ . Pela conservação de f_{BE} temos,

$$\frac{df_{BE}}{dt} = 0, \quad (\text{B.31})$$

logo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\exp(p/T) - 1} \right] &= 0, \\ \frac{\left(p \frac{dT}{dt} - T \frac{dp}{dt} \right) \exp(p/T)}{T^2 (\exp(p/T) - 1)^2} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Sabendo que,

$$\exp(p/T) \neq 0, \quad (\text{B.33})$$

$$T \neq 0, \quad (\text{B.34})$$

Então:

$$\begin{aligned} p \frac{dT}{dt} - T \frac{dp}{dt} &= 0, \\ \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} &= \frac{1}{T} \frac{dT}{dt}, \quad \rightarrow \frac{\delta p}{p} = \frac{\delta T}{T} \equiv \Theta, \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

o termo Θ quantifica a perturbação na temperatura. Essa perturbação é considerada muito pequena.

B.8 Equação de Boltzmann de 1ª ordem

A equação de Boltzmann é escrita conforme (2.117):

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\hat{n}^i}{a} - p \left(H + \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{\hat{n}^i}{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial p},$$

substituindo a função f (2.120) na expressão acima e calculando as derivadas parciais:

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} - p \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \Theta - p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \frac{\partial \Theta}{\partial t}, \quad (\text{B.36})$$

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x^i} \frac{\hat{n}^i}{a} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x^i} \frac{\hat{n}^i}{a} - p \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \frac{\hat{n}^i}{a} \Theta - p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} \frac{\hat{n}^i}{a}, \quad (\text{B.37})$$

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial p} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} - p \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \Theta - p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \frac{\partial \Theta}{\partial p}. \quad (\text{B.38})$$

Agora escrevendo a equação (2.117) apenas com termos de ordem-zero, ou seja, negligenciamos Ψ , Φ e a contribuição de Θ , temos:

$$\frac{df^{(0)}}{dt} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} - Hp \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p},$$

como não existem termos de colisão de ordem-zero,

$$\frac{df^{(0)}}{dt} = 0, \quad \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} - Hp \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} = 0. \quad (\text{B.39})$$

Utilizando o conjunto de equações (B.36)(B.37)(B.38) e (B.39), podemos estabelecer a equação de Boltzmann somente com termos de 1ª ordem,

$$\frac{df}{dt} = \frac{df^{(1)}}{dt} = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} \frac{\hat{n}^i}{a} + \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{\hat{n}^i}{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right). \quad (\text{B.40})$$

B.9 Termo de colisão dos fótons

O termo de colisão dos fótons é dado por (2.123):

$$\begin{aligned} C[f(\vec{p})] &= \frac{1}{p} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_e(q)} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_\gamma(p')} \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3 2E_e(q')} \times \\ &\quad \times |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^3(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}' - \vec{q}') \delta[E_\gamma(p) + E_e(q) - E_\gamma(p') - E_e(q')] \times \\ &\quad \times [f_e(q') f_\gamma(p') - f_e(q) f_\gamma(p)], \end{aligned}$$

utilizando as seguintes condições:

- Os fóton tem energia dada por: $E = p$;
- Podemos escrever a energia dos elétrons no limite não-relativístico como:

$$E_e(\vec{q}) = m_e + \frac{q^2}{2m_e},$$

mas, no denominador podemos utilizar apenas $E_e(\vec{q}) = m_e$;

- Eliminando q' através do uso da função δ -tridimensional,

$$\begin{aligned} &\int d^3q' \delta^3(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}' - \vec{q}') \delta[E_e(p) + E_\gamma(q) - E_e(p') - E_\gamma(q')] [f_e(q') f_\gamma(p') - f_e(q) f_\gamma(p)] = \\ &= \delta[E_e(p) + E_\gamma(q) - E_e(p') - E_\gamma(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}')] [f_e(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}') f_\gamma(p') - f_e(q) f_\gamma(p)]. \quad (\text{B.41}) \end{aligned}$$

Encontramos:

$$\begin{aligned} C[f(\vec{p})] &= \frac{\pi}{4m_e^2 p} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 p'} |\mathcal{M}|^2 \delta[E_\gamma(p) + E_e(q) - E_\gamma(p') - E_e(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}')] \times \\ &\quad \times [f_e(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}') f_\gamma(p') - f_e(q) f_\gamma(p)], \\ C[f(\vec{p})] &= \frac{\pi}{4m_e^2 p} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 p'} |\mathcal{M}|^2 \left[p + \frac{q^2}{2m_e} - p' - \frac{(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}')^2}{2m_e} \right] \times \\ &\quad \times [f_e(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}') f_\gamma(p') - f_e(q) f_\gamma(p)]. \quad (\text{B.42}) \end{aligned}$$

Mais na frente iremos fazer uma aproximação na função δ , para isto precisaremos expandir o termo,

$$\begin{aligned} E_e(q) - E_e(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}') &= \frac{q^2}{2m_e} - \frac{(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}')^2}{2m_e}, \\ &= \frac{q^2}{2m_e} - \frac{\vec{q} \cdot \vec{q}}{2m_e} - \frac{2\vec{q} \cdot \vec{p}}{2m_e} + \frac{2\vec{q} \cdot \vec{p}'}{2m_e} + \frac{2\vec{p} \cdot \vec{p}'}{2m_e} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}'}{2m_e} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{2m_e}, \\ &= \frac{qp' \cos \alpha}{m_e} + \frac{pp' \cos \beta}{m_e} - \frac{qp \cos \gamma}{m_e} - \frac{p'^2}{2m_e} - \frac{p^2}{2m_e}, \end{aligned}$$

considerando $p/m_e \ll 1$ e $p'/m_e \ll 1$,

$$E_e(q) - E_e(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}') = qm_e \left[\frac{p' \cos \alpha}{m_e^2} - \frac{p \cos \gamma}{qm_e^2} + \frac{pp' \cos \beta}{qm_e^2} - \frac{p'^2}{2qm_e^2} - \frac{p^2}{2qm_e^2} \right],$$

podemos descartar os três últimos elementos, pois são de 2ª ordem. Usamos o fato de que no espalhamento Compton é transferida uma quantidade de energia pequena, com isso, o momento próprio é aproximadamente constante, $p \approx p'$. Assim,

$$E_e(q) - E_e(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}') \approx \frac{\vec{q} \cdot (\vec{p}' - \vec{p})}{m_e}, \quad (\text{B.43})$$

Expandindo a função delta em torno de $E_e(q') = E_e(q)$,

$$\begin{aligned} \delta \left[p + \frac{q^2}{2m_e} - p' - \frac{(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}')^2}{2m_e} \right] &= \delta [p + E_e(q) - p' - E_e(q')] \approx, \\ &\approx \delta(p - p') + [E_e(q') - E_e(q)] \frac{\partial \delta [p + E_e(q) - p' - E_e(q')]}{\partial E_e(q')} \Big|_{E_e(q')=E_e(q)}, \end{aligned}$$

$$\delta \left[p + \frac{q^2}{2m_e} - p' - \frac{(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}')^2}{2m_e} \right] \approx \delta(p - p') + [E_e(q') - E_e(q)] \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial E_e(q')},$$

substituindo (B.43) na expressão acima, encontramos uma aproximação em torno de $p - p'$,

$$\delta \left[p + \frac{q^2}{2m_e} - p' - \frac{(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}')^2}{2m_e} \right] \approx \delta(p - p') + \frac{\vec{q} \cdot (\vec{p}' - \vec{p})}{m_e} \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'}. \quad (\text{B.44})$$

Supondo que,

$$f_e(\vec{q} + \vec{p} - \vec{p}') \approx f_e(\vec{q}), \quad (\text{B.45})$$

e utilizando (B.44) em (B.42) achamos,

$$\begin{aligned} C[f(\vec{p})] &= \frac{\pi}{4m_e^2 p} \int \frac{f_e(q) d^3 q}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 p'} |\mathcal{M}|^2 \left[\delta(p - p') + \frac{\vec{q} \cdot (\vec{p}' - \vec{p})}{m_e} \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'} \right] \times \\ &\times [f_\gamma(p') - f_\gamma(p)]. \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

B.10 Equação de Boltzmann para fótons

Substituindo (2.125) na função distribuição dos fótons (2.121) obtemos,

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} \frac{\hat{n}^i}{a} + \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{\hat{n}^i}{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = n_e \sigma_T (\Theta_0 - \Theta + \hat{n} \cdot \vec{v}_b), \quad (\text{B.47})$$

é conveniente escrevermos a equação no tempo conforme η ,

$$d\eta \equiv \frac{dt}{a(t)}, \quad (\text{B.48})$$

assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial t} \frac{dt}{d\eta} + \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} \hat{n}^i + \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \hat{n}^i + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{dt}{d\eta} &= n_e \sigma_T \frac{dt}{d\eta} (\Theta_0 - \Theta + \hat{n} \cdot \vec{v}_b), \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} \hat{n}^i + \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \hat{n}^i + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= n_e \sigma_T a (\Theta_0 - \Theta + \hat{n} \cdot \vec{v}_b), \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

aqui temos uma equação diferencial parcial linear de acoplamento Θ para as variáveis Ψ , Φ e \vec{v}_b que também evoluem de forma linear.

Com objetivo de facilitar as manipulações matemáticas podemos reescrever a equação acima introduzindo a transformação de Fourier,

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \longrightarrow ik_j (\equiv k^j). \quad (\text{B.50})$$

Considerando um fluido irrotacional, a velocidade \vec{v}_b será dada na direção \hat{k} ,

$$\vec{v}_b = v_b \hat{k} = v_b \frac{k^i}{k}, \quad (\text{B.51})$$

em que v_b é o módulo da velocidade. Definindo ainda, o cosseno diretor,

$$\mu \equiv \hat{k} \cdot \hat{n} = \frac{\vec{k} \cdot \hat{n}}{k}, \quad (\text{B.52})$$

e a profundidade óptica,

$$\tau_{op}(\eta) \equiv \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta' \eta_e \sigma_T a = - \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta' \eta_e \sigma_T a, \quad (\text{B.53})$$

de maneira que,

$$\frac{\partial \tau_{op}}{\partial \eta} = -\eta_e \sigma_T a. \quad (\text{B.54})$$

Usando essas definições na equação (B.49) finalmente,

$$\Theta' + ik\mu\Theta + ik\mu\Phi + \Phi' = -\tau_{op}' (\Theta_0 - \Theta + \mu v_b), \quad (\text{B.55})$$

onde nós inserimos a seguinte notação: $' = \partial/\partial\eta$. Essa é a equação de Boltzmann para os fótons. Aqui não levamos em consideração a polarização, caso fizéssemos apareceria um termo a mais de correção, relacionado a anisotropia da temperatura, dado por[74],

$$C[f(\vec{p})] = \frac{\sigma_T n_e}{2} \mathcal{P}_2(\cos\theta) p \frac{\partial f}{\partial p} \Theta_2. \quad (\text{B.56})$$

Assim, faz-se necessário definirmos os multipolos da anisotropia:

$$\Theta_l \equiv \frac{1}{(-i)^l} \int \frac{d\mu}{2} \Theta(\mu) \mathcal{P}_l(\mu), \quad (\text{B.57})$$

no qual \mathcal{P}_l é o multipolo de Legendre de ordem l .

B.11 Relações

$$H = \frac{da}{dt} \frac{1}{a}, \quad (\text{B.58})$$

$$d \ln a = da/a, \quad (\text{B.59})$$

$$d \ln a = H dt, \quad (\text{B.60})$$

$$d\eta = dt/a, \quad (\text{B.61})$$

$$\mathcal{H} = aH, \quad (\text{B.62})$$

$$\frac{d\delta_m}{d\eta} = \frac{d\delta_m}{dt} a, \quad (\text{B.63})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d\delta_m}{d \ln a} H a, && \times \frac{\delta_m}{\delta_m}, \\ &= \frac{d \ln \delta_m}{d \ln a} \mathcal{H} \delta_m. \end{aligned} \quad (\text{B.64})$$

A segunda equação de Friedmann pode ser escrita como:

$$\mathcal{H}' = -\frac{4\pi G}{3} a^2 \bar{\rho}(1 + \omega) = -\frac{1}{2} \mathcal{H}^2 (1 + 3\omega). \quad (\text{B.65})$$

B.12 Função de crescimento no Universo contendo matéria e constante cosmológica

A equação (2.58) escrita no tempo cósmico e em função dos parâmetros atuais é:

$$\frac{d^2 \delta_m}{dt^2} + 2H \frac{d\delta_m}{dt} - \frac{3}{2} H_0^2 \Omega_{m,0} \frac{\delta_m}{a^3} = 0, \quad (\text{B.66})$$

como $\delta_m(t) \propto D(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 D}{dt^2} + 2H \frac{dD}{dt} - \frac{3}{2} H_0^2 \Omega_{m,0} \frac{D}{a^3} &= 0, \\ \ddot{D} + 2H \dot{D} - \frac{3}{2} H_0^2 \Omega_{m,0} \frac{D}{a^3} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.67})$$

Diferenciando duas vezes com respeito ao tempo cósmico a expressão,

$$H^2 = H_0^2 \left[\frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{(1 - \Omega_0)}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0} \right] \quad (\text{B.68})$$

onde $\Omega_0 = \Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0}$, encontramos:

$$2H\dot{H} = H_0^2 H \left[-4 \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} - 3 \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} - 2 \frac{(1 - \Omega_0)}{a^2} \right], \quad (\text{B.69})$$

$$\ddot{H} = H_0^2 H \left[8 \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{9}{2} \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + 2 \frac{(1 - \Omega_0)}{a^2} \right]. \quad (\text{B.70})$$

Somando as duas equações acima,

$$\ddot{H} + 2H\dot{H} = H_0^2 H \left[\frac{3}{2} \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + 4 \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} \right], \quad (\text{B.71})$$

como $\Omega_{r,0} \ll 1$, obtemos:

$$\ddot{H} + 2H\dot{H} = H_0^2 H \frac{3}{2} \frac{\Omega_{m,0}}{a^3}. \quad (\text{B.72})$$

Agora multiplicando por H a eq. (B.69) e por D a eq. (B.71), depois subtraindo as equações, nós temos:

$$\ddot{D}H - \ddot{H}D + 2H(\dot{D}H - \dot{H}D) = 0. \quad (\text{B.73})$$

Sabendo que:

$$D\ddot{H} = \frac{d(D\dot{H})}{dt} - \dot{H}\dot{D}, \quad (\text{B.74})$$

$$H\ddot{D} = \frac{d(H\dot{D})}{dt} - \dot{D}\dot{H}, \quad (\text{B.75})$$

$$2H(\dot{D}H - \dot{H}D) = 2 \frac{da}{dt} \frac{1}{a} (\dot{D}H - \dot{H}D) = \frac{1}{a^2} \frac{da^2}{dt} (\dot{D}H - \dot{H}D). \quad (\text{B.76})$$

A eq. (B.73) se torna:

$$a^2 \frac{d}{dt} (\dot{D}H - \dot{H}D) + \frac{da^2}{dt} (\dot{D}H - \dot{H}D) = 0, \quad (\text{B.77})$$

que recai na diferencial de:

$$\frac{d}{dt} \left[a^2 H^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{D}{H} \right) \right] = 0. \quad (\text{B.78})$$

Para obter a solução desta equação, vamos usar a variável $u = D/H$, assim:

$$u(t) = C_1 + C_2 \int \frac{1}{a^2 H^2} dt, \quad (\text{B.79})$$

$$D(t) = C_2 H \int \frac{1}{a^2 H^2} dt, \quad (\text{B.80})$$

onde C_1 e C_2 são constantes.

Usando a relação entre tempo t e redshift z :

$$dt = -\frac{1}{(1+z)H}dz, \quad (\text{B.81})$$

em seguinte escrevendo dz em função de a : $dz = -da/a^2$, temos:

$$dt = \frac{da}{aH(a)}, \quad (\text{B.82})$$

chegamos em,

$$D(a) = CH(a) \int_0^a \frac{1}{[a'H(a')]^3} da'. \quad (\text{B.83})$$

APÊNDICE C – EoS efetiva para interação, Relação entre ρ_c e ρ_d e Código do CAMB para os espectros de potências da matéria linear

C.1 Obtenção da EoS efetiva para interação

A equação de densidade de energia é:

$$\bar{\rho}'_\lambda + 3\mathcal{H}(1 + \omega_\lambda)\bar{\rho}_\lambda = a\bar{Q}_\lambda, \quad (\text{C.1})$$

$$(\text{C.2})$$

considerando a proporcionalidade de interação tal que,

$$\bar{Q}_\lambda = 3H\xi_\lambda\bar{\rho}_\lambda, \quad (\text{C.3})$$

temos,

$$\begin{aligned} \bar{\rho}'_\lambda + 3\mathcal{H}(1 + \omega_\lambda)\bar{\rho}_\lambda - 3aH\xi_\lambda\bar{\rho}_\lambda &= 0, \\ \bar{\rho}'_\lambda + 3\mathcal{H}(1\bar{\rho}_\lambda + \omega_\lambda\bar{\rho}_\lambda - \xi_\lambda\bar{\rho}_\lambda) &= 0, \\ \bar{\rho}'_\lambda + 3\mathcal{H}[1 + (\omega_\lambda - \xi_\lambda)]\bar{\rho}_\lambda &= 0, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

usando novamente a relação (C.3),

$$\xi_\lambda = \frac{\bar{Q}_\lambda}{H\xi_\lambda\bar{\rho}_\lambda}, \quad (\text{C.5})$$

encontramos:

$$\bar{\rho}'_\lambda + 3\mathcal{H}\left[1 + \left(\omega_\lambda - \frac{\bar{Q}_\lambda}{H\xi_\lambda\bar{\rho}_\lambda}\right)\right]\bar{\rho}_\lambda = 0. \quad (\text{C.6})$$

Então, a equação de estado efetiva se torna:

$$\omega_{\lambda,ef} = \omega_\lambda - \frac{a\bar{Q}_\lambda}{\mathcal{H}\xi_\lambda\bar{\rho}_\lambda}. \quad (\text{C.7})$$

C.2 Relação entre $\bar{\rho}_c$ e $\bar{\rho}_d$

Como atualmente a densidade de ME e EE são aproximadamente da mesma ordem, uma interação entre as duas componentes explica o por que desta igualdade. Assim, é definido a razão entre as densidades de ME e EE,

$$r = \frac{\bar{\rho}_c}{\bar{\rho}_d}, \quad (\text{C.8})$$

isto deve ser igual uma constante ($r \approx 1$), então

$$r' = \frac{\bar{\rho}'_c}{\bar{\rho}_d} - r \frac{\bar{\rho}'_d}{\bar{\rho}_d} = 0. \quad (\text{C.9})$$

Substituindo as interações (3.107) em (3.103) e (3.104), depois utilizando os resultados na expressão (C.9), encontramos a equação quadrática [11],

$$\xi_1 r^2 + (\xi_1 + \xi_2 + \omega)r + \xi_2 = 0, \quad (\text{C.10})$$

essa equação dirá como será a relação entre a densidade de ME e EE em termos da EoS de EE e dos parâmetros adimensionais dependendo do tipo de interação.

Quando o acoplamento é proporcional à densidade de EE, $\bar{Q} = 3H\xi_2\bar{\rho}_d$, ou seja, $\xi_1 = 0$, temos apenas uma raiz para a equação (C.10),

$$r = -\frac{\xi_2}{\xi_2 + \omega}. \quad (\text{C.11})$$

Agora para o acoplamento proporcional a densidade de ME ou setor escuro total, temos as seguintes soluções da equação (C.10),

$$\begin{aligned} (\xi_1 r)_1 &= -\frac{(\xi_1 + \xi_2 + \omega)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\xi_1 + \xi_2 + \omega)^2 - 4\xi_1\xi_2}, \\ (\xi_1 r)_2 &= -\frac{(\xi_1 + \xi_2 + \omega)}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\xi_1 + \xi_2 + \omega)^2 - 4\xi_1\xi_2}. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Para $Q = 3H\xi_1\bar{\rho}_c$, ou seja, $\xi_2 = 0$, temos

$$(\xi_1 r)_1 = 0, \quad (\xi_1 r)_2 = -(\xi_1 + \omega). \quad (\text{C.13})$$

Com o acoplamento $Q = 3H\xi(\bar{\rho}_c + \bar{\rho}_d)$, onde consideramos $\xi_1 = \xi_2 = \xi$, temos os seguintes resultados para (C.12):

$$(\xi r)_1 \approx -\frac{\xi^2}{\omega} \approx \xi^2, \quad (\xi r)_2 \approx -(\omega + 2\xi). \quad (\text{C.14})$$

C.3 Código do CAMB para os espectros de potências da matéria linear

```
!pip install camb
```

```
↳ Collecting camb
  Downloading https://files.pythonhosted.org/packages/fd/8c/ce154d1348603fe26a6c49e5f
    |████████████████████████████████████████████████████████████████████████████████| 32.1MB 72kB/s
Requirement already satisfied: scipy>=1.0 in /usr/local/lib/python3.6/dist-packages (
Requirement already satisfied: six in /usr/local/lib/python3.6/dist-packages (from ca
Requirement already satisfied: sympy>=1.0 in /usr/local/lib/python3.6/dist-packages (
Requirement already satisfied: numpy>=1.13.3 in /usr/local/lib/python3.6/dist-package
Requirement already satisfied: mpmath>=0.19 in /usr/local/lib/python3.6/dist-packages
Building wheels for collected packages: camb
  Building wheel for camb (setup.py) ... done
  Created wheel for camb: filename=camb-1.0.8-cp36-none-any.whl size=933646 sha256=4d
  Stored in directory: /root/.cache/pip/wheels/14/ac/93/ff9362915e8fc8a8a74bb5ea99e06
Successfully built camb
Installing collected packages: camb
Successfully installed camb-1.0.8
```

```
%matplotlib inline
%config InlineBackend.figure_format = 'retina'
import sys, platform, os
import matplotlib
from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np

#Assume installed from github using "git clone --recursive https://github.com/cmbant/CAMB.
camb_path = os.path.realpath(os.path.join(os.getcwd(), '..'))
sys.path.insert(0,camb_path)
import camb
from camb import model, initialpower
print('Using CAMB %s installed at %s'%(camb.__version__,os.path.dirname(camb.__file__)))
```

```
↳ Using CAMB 1.0.8 installed at /usr/local/lib/python3.6/dist-packages/camb
```

```
#Now get matter power spectra at redshift 0
pars = camb.CAMBparams()
pars.set_cosmology(H0=67.66, ombh2=0.02242, omch2= 0.11933)
pars.InitPower.set_params(As=2.105 * 10**-9, ns=0.9665)
pars.set_matter_power(redshifts=[0.0], kmax = 4.0)
results = camb.get_results(pars)
kh, z, pk = results.get_matter_power_spectrum(minkh=1e-4, maxkh=4.0, npoints = 200)

#Now get matter power spectra at redshift 1.0
pars1 = camb.CAMBparams()
pars1.set_cosmology(H0=67.66, ombh2=0.02242, omch2= 0.11933)
pars1.InitPower.set_params(As=2.105 * 10**-9, ns=0.9665)
pars1.set_matter_power(redshifts=[1.0], kmax = 4.0)
results1 = camb.get_results(pars1)
kh1, z1, pk1 = results1.get_matter_power_spectrum(minkh=1e-4, maxkh=4.0, npoints = 200)

#Now get matter power spectra at redshift 2.0
pars2 = camb.CAMBparams()
pars2.set_cosmology(H0=67.66, ombh2=0.02242, omch2= 0.11933)
```

```

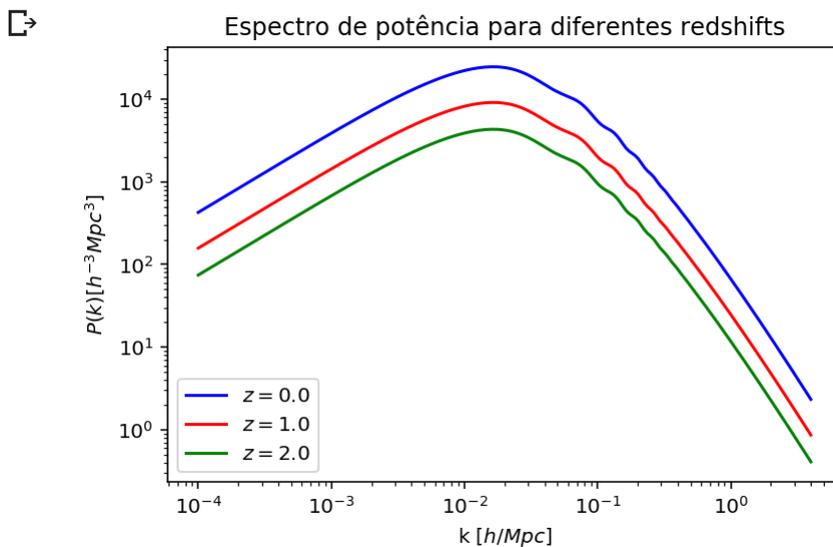
pars2.InitPower.set_params(As=2.105 * 10**-9, ns=0.9665)
pars2.set_matter_power(redshifts=[2.0], kmax = 4.0)
results2 = camb.get_results(pars2)
kh2, z2, pk2 = results2.get_matter_power_spectrum(minkh=1e-4, maxkh=4.0, npoints = 200)

```

```

for i, redshifts in enumerate(zip(z)):
    plt.loglog(kh, pk[i,:], 'k', color = 'blue')
    plt.loglog(kh1, pk1[i,:], 'k', color = 'red')
    plt.loglog(kh2, pk2[i,:], 'k', color = 'green')
plt.xlabel('k [h/Mpc]$');
plt.ylabel('$P(k) [h^{-3}Mpc^3]$');
plt.legend(['$z=0.0$', '$z=1.0$', '$z=2.0$'], loc='lower left');
plt.title('Espectro de potência para diferentes redshifts');

```



```

#Now get matter power spectra at redshift 0
pars = camb.CAMBparams()
pars.set_cosmology(H0=67.66, ombh2=0.01200, omch2=0.12975)
pars.InitPower.set_params(As=2.105 * 10**-9, ns=0.9665)
pars.set_matter_power(redshifts=[0.0], kmax = 4.0)
results = camb.get_results(pars)
kh, z, pk = results.get_matter_power_spectrum(minkh=1e-4, maxkh=4.0, npoints = 200)

pars1 = camb.CAMBparams()
pars1.set_cosmology(H0=67.66, ombh2=0.10000, omch2=0.04175)
pars1.InitPower.set_params(As=2.105 * 10**-9, ns=0.9665)
pars1.set_matter_power(redshifts=[0.0], kmax = 4.0)
results1 = camb.get_results(pars1)
kh1, z1, pk1 = results1.get_matter_power_spectrum(minkh=1e-4, maxkh=4.0, npoints = 200)

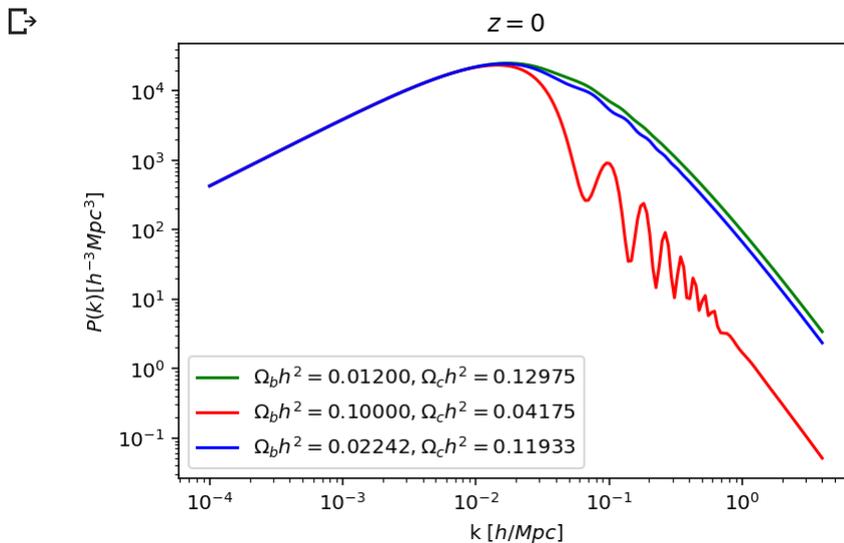
pars2 = camb.CAMBparams()
pars2.set_cosmology(H0=67.66, ombh2=0.02242, omch2=0.11933)
pars2.InitPower.set_params(As=2.105 * 10**-9, ns=0.9665)
pars2.set_matter_power(redshifts=[0.0], kmax = 4.0)
results2 = camb.get_results(pars2)
kh2, z2, pk2 = results2.get_matter_power_spectrum(minkh=1e-4, maxkh=4.0, npoints = 200)

```

```

for i, redshifts in enumerate(zip(z)):
    plt.loglog(kh, pk[i,:], 'k', color = 'green')
    plt.loglog(kh1, pk1[i,:], 'k', color = 'red')
    plt.loglog(kh2, pk2[i,:], 'k', color = 'blue')
plt.xlabel('k [h/Mpc]');
plt.ylabel('$P(k) [h^{-3}Mpc^3]$');
plt.legend(['$\Omega_b h^2=0.01200, \Omega_c h^2=0.12975$', '$\Omega_b h^2=0.10000, \Omega_c h^2=0.11933$']);
plt.title(' $z=0$ ');

```



```

#Now get matter power spectra at redshift 0
pars = camb.CAMBparams()
pars.set_cosmology(H0=67.66, ombh2=0.0224, omch2=0.11933)
pars.InitPower.set_params(As=2.105 * 10**-9, ns=0.9665)
pars.set_matter_power(redshifts=[0.0], kmax = 4.0)
results = camb.get_results(pars)
kh, z, pk = results.get_matter_power_spectrum(minkh=1e-4, maxkh=4.0, npoints = 200)

pars1 = camb.CAMBparams()
pars1.set_cosmology(H0=67.66, ombh2=0.0224, omch2=0.21933)
pars1.InitPower.set_params(As=2.105 * 10**-9, ns=0.9665)
pars1.set_matter_power(redshifts=[0.0], kmax = 4.0)
results1 = camb.get_results(pars1)
kh1, z1, pk1 = results1.get_matter_power_spectrum(minkh=1e-4, maxkh=4.0, npoints = 200)

pars2 = camb.CAMBparams()
pars2.set_cosmology(H0=67.66, ombh2=0.0224, omch2=0.31933)
pars2.InitPower.set_params(As=2.105 * 10**-9, ns=0.9665)
pars2.set_matter_power(redshifts=[0.0], kmax = 4.0)
results2 = camb.get_results(pars2)
kh2, z2, pk2 = results2.get_matter_power_spectrum(minkh=1e-4, maxkh=4.0, npoints = 200)

for i, redshifts in enumerate(zip(z)):
    plt.loglog(kh, pk[i,:], 'k', color = 'blue')
    plt.loglog(kh1, pk1[i,:], 'k', color = 'red')
    plt.loglog(kh2, pk2[i,:], 'k', color = 'green')

```

```
plt.xlabel('k [h/Mpc]');
plt.ylabel('$P(k) [h^{-3}Mpc^3]$');
plt.legend(['$\Omega_b h^2=0.0224, \Omega_c h^2=0.11933$', '$\Omega_b h^2=0.0224, \Omega_c h^2=0.21933$', '$\Omega_b h^2=0.0224, \Omega_c h^2=0.31933$']);
plt.title('$z=0$');
```

