Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Um Problema Elíptico do Tipo Côncavo e Convexo Envolvendo o Laplaciano Fracionário

por

Lucas da Silva †

sob orientação do

Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes.

Um Problema Elíptico do Tipo Côncavo e Convexo Envolvendo o Laplaciano Fracionário

por

Lucas da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto-UFCG

Diego Ferraz de Souza

Prof. Dr. Diego Ferraz De Souza-UFRN

Alânnio B. Nóbrega P/

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki-UFSCar

Alannio B. Nóbrega

Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega-UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Abril/2020

S586p Silva, Lucas da.
Um problema elíptico do tipo côncavo e convexo envolvendo o laplaciano fracionário / Lucas da Silva. – Campina Grande, 2020.
114 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2020.
"Orientação: Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega".
Referências.

1. Espaços de Sobolev Fracionário. 2. Problema Elíptico – Côncavo e Convexo. 3. Laplaciano Fracionário. 4. Método de Subsolução e Supersolução. I. Nóbrega, Alânnio Barbosa. II. Título.

CDU 517.956.2(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

Agradecimentos

Inicialmente, agradeço a Deus por ter me dado força durante essa caminhada que apesar de curta, muito árdua.

Agradeço a todos os meus familiares por acreditarem em mim, em especial aos meus pais: Paulo Sérgio da Silva e Lenilda Dias da Silva e aos meus amados irmãos: Sérgio da Silva e Pedro da Silva, por sempre me apoiarem e incentivarem para que pode-se da mais passo na minha caminhada profissional. Vocês são meu combustível nessa jornada.

A minha namorada, Daniela Enéas, por ter sido uma verdadeira companheira durante o curso. Estando presente ao meu lado nos momentos de alegria e de frustrações. Agradeço imensamente por ter entrado na minha vida, pois acho que sem seu apoio não conseguiria obter tanto sucesso.

Ao professor Alânnio Barbosa Nóbrega, pela compreensão, disponibilidade e orientação durante toda a produção desse trabalho. Agradeço de coração.

Agradeço aos professores, Diego Ferraz de Souza, Marco Aurélio Soares Souto e Olimpio Hiroshi Miyagaki, pelas correções e sugestões do trabalho.

Aos amigos que foram importantes na minha jornada desde a graduação, aqui dou-me o dever de listar alguns que são mais próximos: Bruno Santos , Jerfson Bruno e Lucas Diêgo, Ismael Sandro, Lucas Siebra, Luis Filipe e Renan Isneri.

Agradeço a todos os colegas da Pós-Graduação em Matemática da UFCG.

Ao grupo PET-MATEMÁTICA-UFCG, presto meus agradecimentos por ter sido fundamental na minha formação, em especial ao Tutor: Daniel Cordeiro de Morais Filho, por ter acreditado no meu potencial.

Agradeço a todos os professores e funcionários da UAMat.

Por fim, agradeço a CAPES, pelo suporte financeiro.

Dedicatória

Aos meus pais e irmãos.

Resumo

Neste trabalho, estudamos os espaços de Sobolev Fracionário e, através do método de Subsolução e Supersolução, buscamos mostrar a existência de solução positiva para um problema do tipo côncavo e convexo envolvendo o Laplaciano Fracionário em um domínio suave e limitado.

Palavras-Chave: Côncavo e Convexo, Espaços de Sobolev Fracionário, Laplaciano Fracionário, Método de Subsolução e Supersolução.

Abstract

In this work, we study the spaces of Fractional Sobolev and, through the method of Subsolution and Supersolution, we seek to show the existence of a positive solution to a concave and convex type problem involving the Fractional Laplacian in a smooth and limited domain.

Keywords: Concave and Convex, Spaces of Fractional Sobolev, Fractional Laplacian, Subsolution and Supersolution Method.

Conteúdo

Índice de notações

Segue uma lista das principais notações e siglas utilizadas no texto. Os símbolos usuais de operadores são admitidos como conhecidos, tais como os símbolos de inclusão, pertinência, derivação, integração e limite (inferior e superior). Alguns dos símbolos aqui listados também são definidos no texto.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave no $\mathbb{R}^N$; domínio refere-se a um conjunto aberto conexo
- $\mathbb{R}^{N+1}_+ = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$
- $C_\Omega = \Omega \times (0, +\infty)$, $\partial_L C_\Omega = \partial\Omega \times [0, +\infty)$, onde $\partial\Omega$ é a fronteira do conjunto Ω
- $|A|_\Omega$ é a medida de Lebesgue do subconjunto mensurável a Lebesgue $A \subset \Omega$
- D^α é a α derivada fraca de $u \in L^1(\Omega)$, onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)$ é um multiíndice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$
- $B_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^N : |x - y| < \delta\}$
- ω_N é a medida de Lebesgue da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$.
- $u^+(x) = \max\{0, u(x)\}$ e $u^-(x) = \max\{0, -u(x)\}$, onde $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável.
- $\langle\ ,\ \rangle_X$ produto interno de um espaço vetorial X
- $\|\cdot\|_X$ norma de um espaço vetorial norma X
- $divF$ denota o divergente do campo F;

- $[u]_W^{s,p}(\Omega)$ seminorma de Gagliardo de u em $W^{s,p}(\Omega)$
- $W^{m,p}(\Omega)$, espaços de Sobolev clássicos
- $W^{s,p}(\Omega)$ espaços de Sobolev fracionários
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ espaço de Schwartz
- $\mathcal{F}$ transformada de Fourier

Introdução

No estudo de Equações Diferenciais Parciais (E.D.P.), existem duas classes de operadores, os chamados operadores locais e não locais. Intuitivamente, operadores locais são operadores cujo seu valor numérico em cada ponto depende apenas de valores suficientemente próximos já os operadores não locais dependem basicamente do comportamento da função em todo domínio de definição. Um exemplo clássico de operador local é o Laplaciano. Nos últimos anos, operadores não locais têm recebido uma atenção significativa, um exemplo é o Laplaciano Fracionário, tais operadores têm forte conexão com problemas práticos, tendo em vista que constituem uma parte fundamental da modelagem e simulação de fenômenos complexos.

Os operadores não locais surgem em várias aplicações, como problemas de controle de fronteira, tratados por Duvaut e Lions em [30], finanças, abordados por Carr, Geman, Madan e Ygor em [24], fluidos eletromagnéticos, estudados por Mccay e Narasimhan em [41], processamento de imagens, abordados por Gilboa e Osher em [33], ciências materiais, exposto por Bates em [9], otimização, apresentado por Duvaut e Lions em [30], fluxo de meios porosos, dissertado por Cushman e Glinn em [25], turbulência, vide Bakunin em [5], peridinâmica, conforme apresentado por Silling em [54], teorias não locais de campos contínuos, tratados por Eringen em [31], entre outros.

Quando trabalhamos com uma E.D.P. envolvendo o Laplaciano, por exemplo,

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), \text{ em } \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ \quad u = 0, \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

buscamos através dos métodos variacionais soluções em um espaço rico em funções, que são os conhecidos espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, com $m \in \mathbb{N}$ e $p \geq 1$. No caso em que se trabalha com o operador Laplaciano Fracionário, introduzimos novos espaços de Sobolev que podem ser vistos como espaços intermediários entre $W^{m,p}(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$. Ao considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto qualquer, $s \in (0,1)$ e $p \in [1,\infty)$, definimos os espaços de Sobolev Fracionário, como sendo

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \ : \ \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}.$$

Assim como os espaços de Sobolev clássicos, estes novos espaços verificam boa parte das propriedades conhecidas, como por exemplo a de ser um espaço de Banach reflexivo. O caso especial como era de se esperar é quando $p = 2$, neste caso os espaços $W^{s,2}(\Omega)$ são Hilbert's, para todo $s \in (0,1)$.

Na literatura, ao considerar $s \in (0,1)$, o operador Laplaciano Fracionário $(-\Delta)^s$ atuando em funções em $\mathbb{R}^N$, é definido por

$$(-\Delta)^s u(x) = C(N,s) \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{(B_\epsilon(x))^c} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy \ , \tag{2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$. O domínio de definição para o operador Laplaciano fracionário é conhecido como espaço de Schwartz, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, que são compostos por funções $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ que tem decrescimento rápido no infinito, ou seja

$$p_k(\varphi) = \max_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + \|x\|^2)^k |D^\alpha \varphi(x)| < \infty,$$

para todo $k \in \mathbb{R}^N$. Uma outra maneira de definir o operador Laplaciano através transformadas de Fourier, isto é,

$$(-\Delta)^s u(x) = \mathcal{F}^{-1}\big(| \cdot |^{2s} (\mathcal{F}u)(\cdot)\big)(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{3}$$

Devido a densidade do espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ em $W^{s,2}(\mathbb{R}^N) \equiv H^s(\mathbb{R}^N)$, pode-se estender a definição (3), para funções atuando em $H^s(\mathbb{R}^N)$. Conforme observamos na definição (2), o operador Laplaciano fracionário é não local e, devido ao critério não local, problemas do tipo

$$(-\Delta)^s u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{4}$$

tornam-se complexos, pois grande parte da teoria de operadores locais não se aplica neste caso. Afim de contornar esse problema, recentemente, Caffarelli e Silvestre em [19], mostraram que o operador Laplaciano fracionário está intimamente relacionado com a solução de uma equação que tem natureza local na forma divergente. Mais precisamente, considerando $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ os autores se puseram a estudar o problema

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla w(x,y)) = 0, \text{ em } \mathbb{R}^{N+1}_+ \\ \qquad\qquad w(x,0) = u(x), \text{ em } \mathbb{R}^N \end{cases}. \tag{5}$$

Foi provado que a solução para esse problema é dado por uma função $w : \mathbb{R}^{N+1}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$w(\cdot,y) = u * P_{\frac{\alpha}{2}}(\cdot,y) \quad \text{ onde } P_{\frac{\alpha}{2}}(x,y) := c_{N,\alpha}\frac{y^\alpha}{(|x|^2+z^2)^{\frac{N+\alpha}{2}}}.$$

Aqui $c_{N,\alpha}$ é uma constante que depende de N e α. E com isso, pode-se provar

$$-k_s(-\Delta)^s u(x) = \lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha}u_y(x,y)$$

onde k_s é uma constante que depende de s e $s \in (0,1)$. A solução para o problema (5) é comumente chamada de extensão α-harmônica. Essa relação com o passar dos anos foi se mostrando importante para o estudo de problemas envolvendo o Laplaciano fracionário. Muitos resultados que foram sendo apresentados depois disso, como por exemplo, desigualdade de Hanack, conforme é exposto no trabalho de Caffarelli e Silvestre em [19], além disso, teorias de regularidade, princípios de máximo, entre outros. Aqui indicamos alguns trabalhos que ratificam a importância da relação, veja [16, 17, 19, 20, 45, 21, 29, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 53].

Quando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, a literatura trás diferentes maneiras distintas de definir a potência fracionária do operador Laplaciano. Uma das maneiras que adotaremos nesse trabalho toma-se como base [18, 11, 23, 55], onde considera-se (μ_j, φ_j), $j \in \mathbb{N}$, os autovalores e autofunções do operador $(-\Delta, H^1_0(\Omega))$, definimos o Laplaciano fracionário que também será denotado por $(-\Delta)^{\alpha/2}$, como sendo o operador

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u : H(\alpha/2,\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v = \sum b_j\varphi_j &\longmapsto \langle(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u, v\rangle = \sum_{j=1}^{\infty}\mu_j^{\frac{\alpha}{2}}a_jb_j. \end{aligned} \tag{6}$$

onde $b_j = \int_\Omega v\varphi_j dx$. e

$$u \in D((-\Delta)^s) := H(s,\Omega) = \big\{u \in L^2(\Omega) : \sum_{j=1}^{\infty}\mu_j^s a_j^2 < \infty, \text{ onde } a_j = \int_\Omega u\varphi_j dx\big\}.$$

Neste caso a caracterização apresentada por Caffarelli e Silvestre sofre algumas adaptações. Considerando $\alpha \in (0,2)$ e $u \in H(\alpha/2, \Omega)$, passamos a estudar o problema

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla w(x,y)) = 0, \text{ em } C_\Omega \\ \qquad w(x,y) = 0, \text{ em } \partial_L C_\Omega \\ \qquad w(x,0) = u(x), \text{ em } \Omega \end{cases}, \tag{7}$$

onde $C_\Omega := \Omega \times (0,\infty) \subset \mathbb{R}^{N+1}_+$ e $\partial_L C_\Omega = \partial\Omega \times [0,\infty)$. Assim como no problema (5) a solução de (7) também será chamada de extensão α-harmônica de u e será denotada por $w = E_\alpha(u)$. Além disso, $w \in X_0^\alpha(C_\Omega)$, onde

$$X_0^\alpha(C_\Omega) = \left\{ w \in H^1(C_\Omega, y^{1-\alpha}) : w = 0 \text{ em } \partial_L C_\Omega \right\}.$$

Esse problema de extensão tem uma única solução e com isso podemos definir o operador

$$\begin{aligned} H(\alpha/2,\Omega) &\longrightarrow H(-\alpha/2,\Omega) \\ u \quad &\longmapsto \frac{\partial w}{\partial \nu^\alpha} := \lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha}\frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned}$$

onde $w = E_\alpha(u)$ e $H(-\alpha/2,\Omega)$ é o dual topológico de $H(\alpha/2,\Omega)$. Esse operador verifica

$$\lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha}\frac{\partial w}{\partial y} = -k_\alpha(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u \in H(-\alpha/2,\Omega). \tag{8}$$

Como mencionamos no caso em que se define operador atuando em funções definidas no $\mathbb{R}^N$, a importância de (8) também se deve pela dificuldade em provar resultados de regularidade, princípios de máximo, entre outros resultados. Diversos trabalhos envolvendo o operador Laplaciano fracionário definido em (6) já foram publicados, como podemos ver em [11, 22, 23, 18, 6]. Nesta dissertação, nos propomos a estudar, seguindo o artigo de Brandle, Colorado, Pablo e Sánchez em [11], o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\alpha/2}u = \lambda u^q + u^p, & \text{em } \Omega; \\ \qquad u > 0, & \text{em } \Omega; \\ \qquad u = 0, & \text{em } \partial\Omega; \end{cases} \tag{P'_λ}$$

com $0 < \alpha < 2$, $0 < q < 1 < p < \dfrac{N+\alpha}{N-\alpha}$, $N > \alpha$, $\lambda > 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave e limitado. Tal problema foi motivado pelo problema clássico com não linearidade do tipo côncavo e convexo

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q + u^p, & \text{em } \Omega \\ u > 0, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{9}$$

que é devido a Ambrosetti, Brézis e Cerami [3], onde se mostra a existência e unicidade de solução para esse problema. Para seguir as ideias apresentadas em [3], usaremos a relação (8) para obter um problema equivalente a (P'_λ), a saber

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla u) = 0, & \text{em } C_\Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial_L C_\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu^\alpha} = \lambda u^q + u^p, & u > 0 \text{ em } \Omega \end{cases} \tag{P_λ}$$

Uma solução fraca para o problema (P_λ) será entendida como uma função $u \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ que verifica

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla u(x,y), \nabla \varphi(x,y)\rangle dxdy = \frac{1}{k_\alpha}\int_\Omega (\lambda u(x,0)^q + u(x,0)^p)\varphi(x,0)dx,$$

para toda função $\varphi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. E por sua vez definimos uma solução para o problema (P'_λ) como sendo o traço de uma solução para o problema (P_λ). Com isso, deixamos de trabalhar com (P'_λ) e passamos a estudar as soluções de (P_λ).

Uma outra maneira de definir um operador não local relacionado ao Laplaciano fracionário em um domínio limitado é estender adequadamente as funções definidas em Ω para todo o espaço $\mathbb{R}^N$ e usar o operador definido em (2). Neste sentido, alguns resultados também foram publicados, como por exemplo, Barrios, Colorado, Servadei e Soria em [7], mostraram a existência e unicidade de solução para o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\alpha/2} u = \lambda u^q + u^{2^*_\alpha - 1}, & \text{em } \Omega; \\ u > 0, & \text{em } \Omega; \\ u = 0, & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega; \end{cases}, \tag{10}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $\lambda > 0$, $0 < s < 1$ e $N > 2s$. Esse trabalho é motivado pelo artigo [6], onde os autores estudaram esse mesmo problema embora usando o Laplaciano fracionário definido em (6), ou seja, mostraram a existência e unicidade para o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\alpha/2}u = \lambda u^q + u^{2^*_\alpha - 1}, & \text{em } \Omega; \\ u > 0, & \text{em } \Omega; \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega; \end{cases} , \tag{11}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $\lambda > 0$, $0 < s < 1$ e $N > 2s$. O interessante é que as soluções de (10) e (11) podem ser diferentes, pois os operadores são diferentes. O que ocorre na verdade é que a definição espectral dado em (6) depende do domínio Ω considerado, já o operador não depende do domínio. Essa discussão é feita por Servadei e Valdinoci em [52].

Tendo levantado todas essas questões, dividimos nosso trabalho em 4 capítulos.

No **Capítulo 1** seguindo o artigo da Di Nezza, Palatucci e Valdinoci [29], definiremos os espaços de Sobolev fracionários $W^{s,p}(\Omega)$ por meio da seminorma de Gagliardo e em particular, quando $p = 2$, definiremos também através da transformada de Fourier e mostraremos que quando $s \in (0,1)$ as definições coincidem. Veremos que sob certas condições $W^{s,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach e reflexivo e apresentamos as relações existentes entre $W^{s,p}(\Omega)$ e $W^{s',p}(\Omega)$ para diferentes condições de s e s'. Ainda no Capítulo 1, nos voltamos a focar no espaço $H^s(\mathbb{R}^N)$ e no operador Laplaciano Fracionário estabelecendo relações entre eles.

O **Capítulo 2** dedicamos ao estudo do operador Laplaciano fracionário em domínios limitados. Seguindo de perto as ideias apresentadas por [23, 11, 18, 55], definimos o operador Laplaciano Fracionário e justificamos a relação (8). Além disso, apresentamos alguns resultados de regularidade para a solução do problema linear

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\alpha/2}u = g, & \text{em } \Omega; \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega; \end{cases} . \tag{12}$$

Esses resultados são obtidos ao considerar o problema

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla w) = 0, & \text{em } C_\Omega \\ w = 0, & \text{sobre } \partial_L C_\Omega \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu^\alpha} = g, & \text{em } \Omega \end{cases} , \tag{13}$$

que se torna equivalente a relação (8).

No **Capítulo 3** passamos a estudar a existência de solução para o problema (P'_λ). Mais precisamente, mostraremos o seguinte resultado.

Teorema 0.1 *Existe* $\Lambda > 0$ *tal que, para o problema* (P'_λ), *temos*

i) Se $0 < \lambda < \Lambda$, *então existe uma solução minimal. Além disso, a família de soluções minimais é crescente em relação a* λ.

ii) Se $\lambda = \Lambda$, *existe pelo menos uma solução.*

iii) Se $\lambda > \Lambda$, *não existe solução.*

Entretanto, afim de mostrar a veracidade desse Teorema, usaremos a relação (8) para transforma o problema (P'_λ) no problema

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla u) = 0, & \text{em } C_\Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial_L C_\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu^\alpha} = \lambda u^q + u^p, & u > 0 \text{ em } \Omega \end{cases} \tag{P_λ}$$

ou seja, as soluções de (P'_λ) são definidas como o traço em Ω de soluções de (P_λ). Tendo essa equivalência, é suficiente mostrar o Teorema 0.1 em termos das soluções de (P_λ). A demostração será feita através do método de Subsolução e Supersolução conforme é feito para o caso do Laplaciano em [3].

Destinamos o **Capítulo 4** a apresentação dos seguintes teoremas.

Teorema 0.2 *Seja* $0 < q < 1 < p < \frac{N+2}{N-\alpha}$. *Então, para todo* $\lambda \in (0, \Lambda)$ *o problema* (P'_λ) *tem uma segunda solução* $v_\lambda > u_\lambda$.

Teorema 0.3 *Existe no máximo uma solução para o problema* (P'_λ) *com norma pequena.*

Assim como no capítulo 3, evitamos trabalhar com o problema (P'_λ) e mostramos esses resultados através do problema (P_λ). Destacamos que para mostrar o Teorema 0.2, usamos técnicas variacionais, a saber o Teorema do passo da montanha.

Além dos capítulos, o trabalho conta com 4 apêndices, onde o primeiro deles destinamos ao estudo de problemas que são usados durante o texto. No segundo, trazemos um problema de valor inicial que será resolvido usando algumas propriedades das funções de Bessel. Já o terceiro, listamos alguns resultados clássicos dos espaços L^p

e outros envolvendo os métodos variacionais. Por fim, no último listamos dois princípios do máximo e uma desigualdade de Hardy parta os espaços de Sobolev fracionários.

Com o intuito de não ficarmos recorrendo à Introdução e de tornar os capítulos independentes, nos Capítulos 3 e 4, iremos enunciar novamente os Teoremas.

Capítulo 1

O Espaço de Sobolev Fracionário

Neste capítulo, seguindo Di Nezza, Palatucci e Valdinoci em [29], apresentamos os espaços de Sobolev fracionário $W^{s,p}(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$, estes generalizam os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, \infty)$. Provamos ainda algumas propriedades fundamentais destes espaços, tais como a completude, a reflexividade, além de definirmos o operador Laplaciano fracionário para funções atuando em $\mathbb{R}^N$.

1.1 Distribuições Temperadas e a Transformada de Fourier

Nessa seção, listamos algumas definições e alguns resultados envolvendo as distribuições temperadas e a transformada de Fourier. Todas as demonstrações das afirmações feitas nessa seção podem ser encontradas em Júnior e Valéria, [38].

1.1.1 Distribuições Temperadas

Uma função $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ diz-se *rapidamente decrescente no infinito*, quando para cada $k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$p_k(\varphi) = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + \|x\|^2)^k |D^\alpha \varphi(x)| < \infty,$$

que é equivalente a dizer que

$$\lim_{\|x\| \to \infty} p(x) D^\alpha \varphi(x) = 0$$

para todo polinômio p de n variáveis reais e $\alpha \in \mathbb{N}^N$.

O espaço das funções rapidamente decrescente no infinito é chamado *Espaço de Schawrtz*, o qual denotamos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Sobre esse espaço definimos a seguinte noção de convergência: uma sequência (φ_n) de funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ converge para 0, quando para todo $k \in \mathbb{N}$ a sucessão $(p_k(\varphi_n))$ converge para zero em $\mathbb{R}^N$. A sequência (φ_n) converge para φ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ se, $(p_k(\varphi_n - \varphi))$ converge para 0 em $\mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

As transformações lineares $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas no sentido da convergência definida em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ são denominadas *distribuições temperadas*. O espaço de todas as distribuições temperadas será representado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, ou seja, o dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Proposição 1.1 *O espaço $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) := C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Ver [42], página 17. ■

Observação 1.1.1 *A função $u(x) = e^{-\|x\|^2}$ pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ mas não pertence a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.*

Observação 1.1.2 *Se S é uma distribuição sobre $\mathbb{R}^N$ tal que existe $C > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo a condição*

$$|\langle S, \varphi \rangle| \le C p_k(\varphi),$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, segue-se da densidade de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, que S pode ser estendida como uma distribuição temperada.

Exemplo 1.1.1 *Seja $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$C = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|}{(1 + \|x\|^2)^k}\, dx < \infty$$

para algum $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$. Então $|\langle u, \varphi \rangle| \le C p_k(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Consequentemente, u é uma distribuição temperada.

1.1.2 Transformada de Fourier

Dada uma função $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$, define-se a sua transformada de Fourier como sendo a função $\mathcal{F}u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mathcal{F}u(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)} u(y) dy$$

onde $(x, y) = x_1y_1 + \cdots + x_Ny_N$. A aplicação $\tilde{\mathcal{F}}u(x) = \mathcal{F}u(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, é denominada transformada de Fourier inversa de u.

Desde que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset L^1(\mathbb{R}^N)$, para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, estão bem definidas $\mathcal{F}\varphi$, $\tilde{\mathcal{F}}u$ e pode-se ver que ambas são rapidamente decrescente no infinito. Além disso,

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad \tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

são isomorfismos contínuos e $\mathcal{F}^{-1} = \tilde{\mathcal{F}}$.

Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, tem-se

$$(\mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\psi)_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (\varphi, \psi)_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (\tilde{\mathcal{F}}\varphi, \tilde{\mathcal{F}}\psi)_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Agora, dada uma distribuição temperada T, define-se a sua transformada de Fourier do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle &= \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \\ \langle \tilde{\mathcal{F}}T, \varphi \rangle &= \langle T, \tilde{\mathcal{F}}\varphi \rangle, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Da continuidade da transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, segue-se que $\mathcal{F}T$ e $\tilde{\mathcal{F}}T$ são distribuições temperadas. Pode-se mostrar que na verdade

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad \tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$$

são isomorfismos contínuos sendo $\mathcal{F}^{-1} = \tilde{\mathcal{F}}$.

Seja $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $\mathcal{F}u_n$, $n \in \mathbb{N}$ as funções

$$\mathcal{F}u_n(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\|y\| \le n} e^{-i(x,y)} u(y) dy \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Mostra-se que $\mathcal{F}u_n \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e que $(\mathcal{F}u_n)$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^N)$. O limite em $L^2(\mathbb{R}^N)$ da sequência $(\mathcal{F}u_n)$ é denotado por $\mathcal{F}u$. Observa-se que $\mathcal{F}u$ e a transformada de u, u considerada como uma distribuição temperada, coincidem.

Teorema 1.2 (Teorema de Parseval) *As aplicações*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N) \quad e \quad \tilde{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$$

são isomorfismos tais que

$$\langle \mathcal{F}u, \mathcal{F}v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \langle \tilde{\mathcal{F}}u, \tilde{\mathcal{F}}v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

para todo $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

1.2 O Espaço de Sobolev Fracionário $W^{s,p}$

Sejam Ω um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^N$ e $s \in (0,1)$. Para todo $p \in [1,\infty)$, definimos os espaços de Sobolev Fracionário, denotado por $W^{s,p}(\Omega)$, como sendo

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \ : \ \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}. \tag{1.1}$$

Pode-se ver facilmente que (1.1) é um espaço vetorial. E mais, veremos que $W^{s,p}(\Omega)$ munido com a norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u|^p dx + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.2}$$

é um espaço de Banach. O termo

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}$$

é conhecido como seminorma de Gagliardo.

Exemplo 1.2.1 *A função $x \mapsto \ln x$ pertence a $W^{s,p}((0,1))$, quando $sp < 1$. Com efeito, vamos analisar inicialmente a seminorma $I = [\ln x]_{W^{s,p}((0,1))}$ onde $sp < 1$. Veja que fazendo a mudança $u = \frac{x}{y}$, obtemos*

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{|\ln x - \ln y|^p}{|x-y|^{sp+1}} dxdy = \int_0^1 y^{-sp} \int_0^{1/y} \frac{|\ln u|^p}{(1-u)^{sp+1}} dudy \\ &\leq \int_0^1 y^{-sp} \left(\int_0^1 \frac{|\ln u|^p}{(1-u)^{sp+1}} du + \int_1^{1/y} \frac{|\ln u|^p}{(1-u)^{sp+1}} du \right) dy = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Veja que a primeira integral em u no parênteses é convergente e a integral em y é convergente quando $sp < 1$. Sob essa condição garantimos a existência do termo I_1. Pelo teorema de Fubini, o termo I_2 pode ser visto como

$$I_2 = \int_0^1 y^{-sp} \int_1^{1/y} \frac{|\ln u|^p}{(1-u)^{sp+1}} dudy = \int_1^\infty \frac{|\ln u|^p}{(1-u)^{sp+1}} \left(\int_0^1 y^{-sp} dy \right) du.$$

Portanto, estudar I_2 é equivalente a estudar

$$\int_1^\infty \frac{|\ln u|^p}{(1-u)^{sp+1}} u^{sp-1} du,$$

que é convergente. Portanto, I_2 é convergente. O que dá a conclusão desejada.

A seguir, mostraremos que os espaços de Sobolev fracionário são completos com a norma definida em (1.2).

Proposição 1.3 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $s \in (0,1)$ e $p \in [1, \infty)$. Então, o espaço $(W^{s,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)})$ é de Banach.*

Demonstração: Para ver que (1.2) é norma, basta mostrar a desigualdade triangular, pois as demais condições são facilmente verificadas. Sejam $u, v \in W^{s,p}(\Omega)$, vejamos que a seminorma de Gagliardo satisfaz a desigualdade triangular. De fato, defina

$$\psi(x,y) = \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega)$$

e

$$\varphi(x,y) = \frac{v(x) - v(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
[u+v]_{W^{s,p}(\Omega)} &= \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|(u+v)(x) - (u+v)(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_\Omega \int_\Omega \left| \frac{(u+v)(x)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}} + \frac{(u+v)(x)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}} \right|^p dxdy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_\Omega \int_\Omega |\psi(x,y) + \varphi(x,y)|^p \, dxdy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|\psi + \varphi\|_{L^p(\Omega \times \Omega)} \\
&\leq \|\psi\|_{L^p(\Omega\times\Omega)} + \|\varphi\|_{L^p(\Omega\times\Omega)} \\
&= [u]_{W^{s,p}(\Omega)} + [u]_{W^{s,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que (1.2) é uma norma. Vejamos que $W^{s,p}(\Omega)$ é Banach. Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $W^{s,p}(\Omega)$. Logo, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$. Da mesma forma, definindo a sequência

$$v_n(x,y) = \frac{u_n(x) - u_n(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}}, \qquad (x,y) \in \Omega \times \Omega .$$

Temos que, $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega\times\Omega)$, então existem $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^p(\Omega \times \Omega)$, tais que

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^p(\Omega) \qquad \text{e} \qquad v_n \longrightarrow v \text{ em } L^p(\Omega \times \Omega).$$

Tomando $w(x,y) = \dfrac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}}$, com $x \neq y$ em $\Omega\times\Omega$, vamos justificar que $v = w$, donde seguirá o resultado. Como $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$, então a menos de subsequência $u_n \to u$, q.t.p em Ω. Assim, a menos de subsequência $v_n \to w$, q.t.p em $\Omega \times \Omega$. Desde que $v_n \to v$ em $L^p(\Omega \times \Omega)$ então, a menos de subsequência, $v_n \to v$, q.t.p em $\Omega \times \Omega$. Portanto $w = v$, q.t.p em $\Omega \times \Omega$. ■

Sabemos que os espaços de Sobolev clássicos são reflexivos para $1 < p < \infty$ e separáveis para $1 \leq p < \infty$. A seguir, provaremos que os espaços de Sobolev Fracionários também satisfazem estas propriedades.

Proposição 1.4 *Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e $s \in (0,1)$. Então, o espaço de Sobolev Fracionário $W^{s,p}(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração: Considere a aplicação

$$\begin{aligned} T : W^{s,p}(\Omega) &\longrightarrow L^p(\Omega) \times L^p(\Omega \times \Omega) \\ u \quad &\longmapsto \quad T(u) = (u, v) \end{aligned}$$

onde

$$v(x,y) = \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}}.$$

Pode-se mostrar facilmente que T é uma isometria sobre sua imagem. Portanto, concluímos que $W^{s,p}(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$. ■

Ao definir os espaços de Sobolev Fracionários, podemos ser levados a nos perguntar, o que ocorre entre os espaços $W^{s',p}(\Omega)$ e $W^{s,p}(\Omega)$ quando $s \leq s'$ com $s, t \in (0,1)$. A proposição a seguir, justificará que o espaço $W^{s',p}(\Omega)$ está imerso continuamente em $W^{s,p}(\Omega)$.

Proposição 1.5 *Sejam Ω um aberto em $\mathbb{R}^N$, $p \in [1,\infty)$ e $0 < s \leq s' < 1$. Então*

$$W^{s',p}(\Omega) \subset W^{s,p}(\Omega),$$

e existe uma constante $C = C(N,s,p) \geq 1$, tal que

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{s',p}(\Omega)}.$$

Demonstração: Seja $u \in W^{s',p}(\Omega)$. Nosso objetivo é estimar a seminorma

$$[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} = \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy + \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y| < 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy$$

Note que, fazendo a mudança $z = x - y$ e aplicando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy &= \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dydx \\ &= \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|z|\geq 1\}} \frac{|u(x)|^p}{|z|^{N+sp}}\, dzdx \\ &= \int_\Omega \left(\int_{\Omega \cap \{|z|\geq 1\}} \frac{1}{|z|^{N+sp}}\, dz \right) |u(x)|^p dx \\ &= \|u\|^p_{L^p(\Omega)} \left(\int_{\Omega \cap \{|z|\geq 1\}} \frac{1}{|z|^{N+sp}}\, dz \right)\end{aligned}$$

Como $N + sp > N$, segue que a função $f(z) = \dfrac{1}{|z|^{N+sp}}$ é integrável, onde $|z| \geq 1$. Daí,

$$\int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy = D(N,p,s)\|u\|^p_{L^p(\Omega)}. \tag{1.3}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy &\leq 2^{p-1} \left(\int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)|^p + |u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy \right) \\ &= 2^p D(N,p,s)\|u\|^p_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|\leq 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy \leq \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|\leq 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+s'p}}\, dxdy. \tag{1.4}$$

Combinando (1.4) e (1.5), obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy \leq\,& 2^p D(N,p,s)\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \\ &+ \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|\leq 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+s'p}}\, dxdy.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Portanto, pela desigualdade (1.6), segue que $u \in W^{s,p}(\Omega)$, ou seja, $W^{s',p}(\Omega) \subset W^{s,p}(\Omega)$. E ainda,

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{s',p}(\Omega)},$$

onde, $C = max\{(2^p D(N,p,s) + 1), 1\} \geq 1$.

■

Proposição 1.6 *Sejam Ω um domínio limitado e suave em $\mathbb{R}^N$, $p \in [1,\infty)$ e $0 < s < 1$. Então*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset W^{s,p}(\Omega),$$

e existe uma constante $C = C(N,s,p) \geq 1$, tal que

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Demonstração: Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Primeiro, fazendo a mudança de variáveis $z = y - x$ e aplicando o Teorema de Tonelli, nós obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}\int_{\Omega\cap\{|x-y|\leq 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy &\leq \int_{\Omega}\int_{B_1} \frac{|u(x)-u(z+x)|^p}{|z|^{N+sp}}\,dxdz \\
&= \int_{\Omega}\int_{B_1} \frac{|u(x)-u(z+x)|^p}{|z|^p}\frac{1}{|z|^{N+(s-1)p}}\,dxdz \\
&\leq \int_{\Omega}\int_{B_1} \left(\int_0^1 \frac{|\nabla u(x+tz)|}{|z|^{\frac{N}{p}+s-1}}dt\right) dzdx \\
&\leq \int_{\Omega}\int_{B_1}\int_0^1 \frac{|\nabla u(x+tz)|^p}{|z|^{N+p(s-1)}}\,dtdzdx
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Pela regularidade do domínio Ω, estenderemos a função u para uma função $\tilde{u} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ de modo que

$$\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ e } \|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

para alguma constante $C > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}\int_{B_1}\int_0^1 \frac{|\nabla u(x+tz)|^p}{|z|^{N+p(s-1)}}\,dtdzdx &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{B_1}\int_0^1 \frac{|\nabla \tilde{u}(x+tz)|^p}{|z|^{N+p(s-1)}}\,dtdzdx \\
&\leq \int_{B_1}\int_0^1 \frac{\|\nabla \tilde{u}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}}{|z|^{N+p(s-1)}}\,dtdz \\
&\leq C_1(N,s,p)\|\nabla \tilde{u}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq C_2(N,s,p)\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Por (1.6) e (1.7), obtemos

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega\cap\{|x-y|\leq 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy \leq C_2(N,s,p)\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{1.8}$$

Segue de (1.3), que

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega\cap\{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy \leq 2^p D(N,p,s)\|u\|^p_{L^p(\Omega)}. \tag{1.9}$$

Por fim, comparando (1.8) e (1.9), vemos que

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy \leq 2^p D(N,p,s)\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + C_2(N,s,p)\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{1.10}$$

Portanto, $u \in W^{s,p}(\Omega)$. Ainda de (1.10),

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \ ,$$

onde $C = max\{(2^p D(N,p,s)+1), C_2(N,s,p)\} \geq 1$.

■

Observação 1.6.1 *A condição de regularidade da fronteira não pode ser completamente desprezada. Para isso, construiremos uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ que não pertence a $W^{s,p}(\Omega)$. Seja $p \in (\frac{1}{s}, +\infty)$. Daí, podemos fixar*

$$k > \frac{p+1}{sp-1} \tag{1.11}$$

e, observe que $k > 1$. Vamos considerar o cúspide no plano

$$C := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0 \ \ e \ |x_2| \leq |x_1|^k\}$$

e tomemos as coordenadas polares em $\mathbb{R}^2 \setminus C$, isto é, $\rho = \rho(x) \in (0, \infty)$ e $\theta = \theta(x) \in (-\pi, \pi)$, com $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus C$.

Definimos a função $u(x) = \rho(x)\theta(x)$ e o domínio em forma de coração $\Omega := (\mathbb{R}^2 \setminus C) \cap B_1$, onde B_1 é a bola unitária centrada na origem. Podemos ver que Ω não é um domínio $C^{0,1}$. Portanto, vamos mostrar que $u \in W^{1,p}(\Omega) \setminus W^{s,p}(\Omega)$. De fato, note que

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}\big(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\big) = \frac{x_1}{\rho}.$$

Analogamente,

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{x_2}{\rho}.$$

Por outro lado, veja que pelas relações das coordenadas polares e as derivadas de ρ, obtidas acima, segue que

$$\begin{aligned}
1 = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \rho \cos\theta}{\partial x_1} &= \Big(\frac{\partial \rho}{\partial x_1}\Big)\cos\theta + \Big(\frac{\partial \cos\theta}{\partial x_1}\Big)\rho \\
&= \Big(\frac{\partial \rho}{\partial x_1}\Big)\cos\theta - \rho\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial x_1} \\
&= \Big(\frac{\partial \rho}{\partial x_1}\Big)\cos\theta - x_2\frac{\partial \theta}{\partial x_1} \\
&= \frac{x_1}{\rho}\cos\theta - x_2\frac{\partial \theta}{\partial x_1} \\
&= \frac{x_1^2}{\rho^2} - x_2\frac{\partial \theta}{\partial x_1} \\
&= 1 - \frac{x_2^2}{\rho^2} - x_2\frac{\partial \theta}{\partial x_1},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -\frac{x_2}{\rho^2}.$$

De modo inteiramente análogo, obtemos

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -\frac{x_1}{\rho^2}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial \rho\theta}{\partial x_1} = \Big(\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\Big)\theta + \Big(\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\Big)\rho = \frac{x_2}{\rho}\theta - \rho\frac{x_2}{\rho^2} = \rho^{-1}(x_1\theta - x_2).$$

Analogamente, vemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \rho^{-1}(x_2\theta + x_1).$$

Como consequência

$$\begin{aligned}
|\nabla u|^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 \\
&= \rho^{-2}(x_1\theta - x_2) + \rho^{-2}(x_2\theta + x_1) \\
&= \theta^2 + 1 \\
&\leq \pi^2 + 1.
\end{aligned}$$

Portanto, desde que Ω *é limitado e da estimativa acima, obtemos que* $|\nabla u| \in L^p(\Omega)$*. Como* $u \in L^p(\Omega)$*, então concluímos que* $u \in W^{1,p}(\Omega)$*. O que nos resta mostrar é* $u \notin W^{s,p}(\Omega)$ *e, para isso, veremos que a seminorma de Gagliardo não é finita.*

Lembrando que $k > \frac{p+1}{sp-1}$*, fixe* $r \in (0,1)$ *suficientemente pequeno. Defina para cada* $j \in \mathbb{N}$*,* $r_{j+1} := r_j - r_j^k$*, onde* $r_0 = r$*. Por indução, podemos provar que* (r_j) *é uma sequência estritamente decrescente e* $r_j > 0$*. Como consequência,* $r_j \in (0, r) \subset (0,1)$*. Assim, podemos definir*

$$l := \lim_{j\to\infty} r_{j+1}.$$

Assim, obtemos pela definição acima

$$l = \lim_{j\to\infty} r_{j+1} = \lim_{j\to\infty} r_j - r_j^k = l - l^k = 0.$$

Mais ainda, note que pela fórmula da Série Telescópica, segue que

$$\sum_{j=0}^{\infty} r_j^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n} r_j^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n} r_j - r_{j+1} = \lim_{n\to\infty} r_0 - r_{n+1} = r.$$

Agora, considere o subconjunto do $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$*, definido da seguinte forma*

$$D_j := \big\{(x,y) : x_1, y_1 \in (-r_j, -r_{j+1}),\ x_2 \in \big(|x_1|^k, 2|x_1|^k\big) \ e\ -y_2 \in \big(|y_1|^k, 2|y_1|^k\big)\big\}.$$

Diante disso, podemos ver que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \subset \big\{(x,y) : x_1, y_1 \in (-r, 0),\ x_2 \in \big(|x_1|^k, 2|x_1|^k\big) \ e\ -y_2 \in \big(|y_1|^k, 2|y_1|^k\big)\big\} \subset \Omega \times \Omega,$$

e a união é disjunta. Note que

$$r_{j+1} = r_j - r_j^k = r_j(1 - r_j^{k-1}) \geq r_j(1 - r^{k-1}) \geq \frac{r_j}{2},$$

para r *suficientemente pequeno. Assim, em particular para* $(x,y) \in D_j \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$*, pela definição dos* D_j'*s temos que* $x_1 \in (-r_j, r_{j+1})$ *e também que* $x_2 \in (|x_1|^k, 2|x_1|^k)$*. Dessa maneira,*

$$-r_j < x_1 < r_{j+1} = r_j - r_j^k \leq r_j.$$

Isto é,

$$|x_1| \leq r_j \leq 2r_{j+1}.$$

Por outro lado, argumentando-se como na prova de que $2r_{j+1} \leq 2|y_1|$*, temos que*

$$|x_1| \leq 2r_{j+1} \leq 2|y_1|.$$

Pelo mesmo raciocínio, podemos provar que

$$|y_1| \leq 2|x_1|.$$

Agora, veja que se $(x,y) \in D_j$*, então* $x_1 \in (-r_j, -r_{j+1})$*. Logo,* $x_1 + x_j \geq 0$*. Mais ainda, já que* $2r_{j+1} \leq 2|y_1|$*, então isto implica que* $-y_1 - r_j \geq 0$*. Em consequência, juntando estas duas desigualdades não negativas, conseguimos que* $r_{j+1} - r_j \leq x_1 - y_1$*. Do mesmo modo, provamos que* $x_1 - y_1 \leq r_j - r_{j+1}$*, desde que* $2r_{j+1} \leq 2y_1$ *e que* $x_1 \in (-r_j, r_{j+1})$*. Assim, obtemos que*

$$|x_1 - y_1| \leq r_j - r_{j+1} = r_j^k \leq 2^k r_{j+1}^k \leq 2^k |x_1|.$$

Novamente usando a definição de D_j*, veja que*

$$\begin{aligned} |x_2 - y_2| \leq |x_2| + |y_2| \leq 2|x_1|^k + 2|y_1|^k &= 2\big(|x_1|^k + |y_1|^k\big) \\ &\leq 2\big(2^k|x_1|^k + 2^k|y_1|^k\big) \\ &= 2^{k+2}|x_1|^k. \end{aligned}$$

Como consequência

$$|x-y| = \sup\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} \leq 2^{k+3}|x_1|^k. \tag{1.12}$$

Agora, veja também que para cada $x, y \in D_j$*, temos* $\theta(x) \geq \frac{\pi}{2}$ *e também* $\theta(x) \leq -\frac{\pi}{2}$*. Para verificar afirmação, veja que* $x_1 \in (-r, 0)$ *e além disso,* $x_2 \in (|x_1|^k, 2|x_1|^k)$*. Assim, segue que* $\theta(x) \geq \frac{\pi}{2}$*. Analogamente, desde que* $y_1 \in (-r, 0)$ *e também que* $-y_2 \in (|y_1|^k, 2|y_1|^k)$*, ou seja,* $\theta(x) \leq -\frac{\pi}{2}$*.*

Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned} u(x) - u(y) = \rho(x)\theta(x) - \rho(y)\theta(y) &\geq \rho(x)\theta(x) + \rho(y)\frac{\pi}{2} \\ &\geq \rho(x)\theta(x) \\ &= \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\frac{\pi}{2} \\ &\geq |x_1|\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Logo, usando este fato e por (1.12) *temos para todo* $(x, y) \in D_j$ *que*

$$\begin{aligned} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{2+sp}} \geq |x_1|^p \left(\frac{\pi}{2}\right)^p \frac{1}{\left|2^{k+3}|x_1|^k\right|^{2+sp}} &= |x_1|^{p-k(2+sp)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^p \frac{1}{2^{k+3(2+sp)}} \\ &= C|x_1|^{p-k(2+sp)}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Portanto, pelo teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned} \int\int_{D_j} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{2+sp}} dxdy &\leq \int\int_{D_j} C|x_1|^{p-k(2+sp)} dxdy \\ &= \int_{-2|y_1|^k}^{-|y_1|^k} \int_{|x_1|^k}^{2|x_1|^k} \int_{-r_j}^{-r_{j+1}} \int_{-r_j}^{-r_{j+1}} C|x_1|^{p-k(2+sp)} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\ &= \int_{-r_j}^{-r_{j+1}} \int_{-r_j}^{-r_{j+1}} \int_{|x_1|^k}^{2|x_1|^k} \int_{-2|y_1|^k}^{-|y_1|^k} C|x_1|^{p-k(2+sp)} dy_2 dx_2 dx_1 dy_1 \\ &= C \int_{-r_j}^{-r_{j+1}} \int_{-r_j}^{-r_{j+1}} |x_1|^{p-k(2+sp)} |x_1|^k |y_1|^k dx_1 dy_1. \\ &\geq C2^{-k} \int_{-r_j}^{-r_{j+1}} \int_{-r_j}^{-r_{j+1}} |x_1|^{p-ksp} dx_1 dy_1 \\ &\geq C2^{-k} \int_{-r_j}^{-r_{j+1}} \int_{-r_j}^{-r_{j+1}} r_j^{p-ksp} dx_1 dy_1 \\ &= C2^{-k} r_j^{p-ksp+2k} = C2^{-k} r_j^{k-\alpha}, \end{aligned}$$

com $\alpha = k(sp-1) - p > 1$*, visto* (1.11).

Portanto, segue-se que

$$\int\int_{D_j} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{2+sp}} dxdy \geq C2^{-k} r^{-\alpha} r_j^k.$$

Logo, usando o fato de que os $D_j's$ são disjuntos para cada $j \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{2+sp}}\,dxdy &\geq \int \int_{\bigcup_{j=0}^{\infty} D_j} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{2+sp}}\,dxdy \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \int \int_{D_j} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{2+sp}}\,dxdy \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} C2^{-k} r^{-\alpha} r_j^k \\
&= C2^{-k} r^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} r_j^k \\
&= C2^{-k} r^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Assim, desde que $\alpha > 1$, temos $1-\alpha < 0$ e portanto, fazendo $r \to 0$, obtemos que $[u]_{W^{s,p}(\Omega)} \to \infty$, mostrando que $u \notin W^{s,p}(\Omega)$.

Observação 1.6.2 *A definição (1.1) não pode ser estendida para o caso quando $s \geq 1$. Pela Proposição 2, em [12], segue que se, $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função que cumpre*

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\,dxdy < +\infty,$$

então u é constante.

Diante disso, daremos sentido a $W^{s,p}(\Omega)$ quando $s > 1$. Então, seja $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ com $s > 1$, escrevemos $s = m + \sigma$, onde $m \in \mathbb{Z}$ e $\sigma \in (0,1)$. Nesse caso, o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ é formado pelas funções $u \in W^{m,p}(\Omega)$ cuja derivada distribucional $D^\alpha u$, onde $|\alpha| = m$, pertence a $W^{\sigma,p}(\Omega)$, ou seja,

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) : D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega),\ \text{para todo } \alpha,\ \text{com } |\alpha| = m\}.$$

Pode-se ver facilmente que $W^{s,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^p_{W^{\sigma,p}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Corolário 1.7 *Sejam Ω um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^N$, $p \in [1,\infty)$ e $s' \geq s$. Então*

$$W^{s',p}(\Omega) \subset W^{s,p}(\Omega).$$

Demonstração: Consideremos $u \in W^{s',p}(\Omega)$. Mostraremos que $u \in W^{s,p}(\Omega)$. Para isso, vamos considerar $s = k + \sigma$ e $s' = k' + \sigma'$, onde $k, k' \in \mathbb{Z}$ e $\sigma, \sigma' \in (0,1)$.

Desde que $u \in W^{s',p}(\Omega)$, temos que $u \in W^{k',p}(\Omega)$ e $D^\alpha u \in W^{\sigma',p}(\Omega)$, com $|\alpha| = k'$. Sendo $s' \geq s$, podemos ter $k = k'$ ou $k' \geq k+1$. Suponha que $k = k'$, então claramente $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Mais ainda, desde que $s' \geq s$ e $k = k'$, então $\sigma' \geq \sigma$. Daí, pela Proposição 1.5, temos que

$$W^{\sigma',p}(\Omega) \subset W^{\sigma,p}(\Omega).$$

Mostrando que $D^\alpha u \in W^{\sigma',p}(\Omega)$ com $|\alpha| = k' = k$, ou seja, $W^{\sigma,p}(\Omega)$.

Agora, supondo que $k' \geq k+1$, temos de imediato que

$$W^{k'+\sigma',p}(\Omega) \subset W^{k',p}(\Omega) \subset W^{k+1,p}(\Omega).$$

Veja que $W^{k+1,p}(\Omega) \subset W^{k+\sigma,p}(\Omega)$. Pois, sendo Ω um aberto suave de $\mathbb{R}^N$, então pela proposição (1.6), temos que $W^{1,p}(\Omega) \subset W^{\sigma,p}(\Omega)$ desde que $\sigma \in (0,1)$. Assim, se $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$, em particular $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Por outro lado, $D^\alpha u \in W^{1,p}(\Omega)$. Logo, $D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega)$ sempre que $|\alpha| \leq k$. Em particular, $D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega)$ para $|\alpha| = k$. Portanto $u \in W^{k+\sigma,p}(\Omega)$. ■

Assim como no caso clássico em que s é inteiro, as funções do espaço de Sobolev fracionário $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ são aproximadas por funções suaves com suporte compacto.

Lema 1.8 *Seja $u \in W^{s,p}(\Omega)$, então para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, tem-se $u\varphi \in W^{s,p}(\Omega)$.*

Demonstração: Sejam $u \in W^{s,p}(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, é imediato que $u\varphi \in L^p(\Omega)$. Provaremos que

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|(u\varphi)(x) - (u\varphi)(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dxdy < +\infty.$$

Para isso, escrevemos a diferença como soma de dois termos, ou seja,

$$(u\varphi)(x) - (u\varphi)(y) = \varphi(x)(u(x) - u(y)) + u(y)(\varphi(x) - \varphi(y)), \quad \forall x, y \in \Omega.$$

O primeira parcela dará uma integral convergente, pois φ é limitada. Já a segunda parcela resulta na seguinte integral

$$J_p = \int_\Omega \int_\Omega \Big| \frac{u(y)(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x-y|^{s+\frac{N}{p}}} \Big|^p\, dxdy.$$

Usando a desigualdade do valor médio, obtemos

$$J_p \leq \|\varphi'\|_\infty^p \int_{B_\rho} |u(y)|^p \Big[\int_{B_\rho} |x-y|^{p(1-s)-N} dx \Big] dy,$$

onde B_ρ é uma bola que contém $supp\,\varphi$. Como

$$\int_{B_\rho} |x-y|^{p(1-s)-N} dx = \omega_N \frac{\rho^{p(1-s)}}{p(1-s)},$$

e daí,

$$J_p \leq Cp(1-s)\|u\|_p^p,$$

onde $C = \frac{\omega_N \|\varphi'\|_\infty^p}{p(1-s)}$. Portanto, $u\varphi \in W^{s,p}(\Omega)$.

■

Agora considere $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Teorema 1.9 *Para todo $s > 0$, o espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Ver Proposição 4.27 em [28]. ■

Denotamos por $W_0^{s,p}(\Omega)$, o fecho de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ segundo a norma $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$. Pelo Teorema (1.9), temos

$$W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N) = W^{s,p}(\mathbb{R}^N).$$

Em geral, para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $W_0^{s,p}(\Omega) \neq W^{s,p}(\Omega)$, isto é, $C_0^\infty(\Omega)$ não é denso em $W^{s,p}(\Omega)$. Além disso, é claro que as mesmas inclusões das proposições (1.5), (1.6) e corolário (1.9) continuam válidas para o espaço $W_0^{s,p}(\Omega)$.

Observação 1.9.1 *Para $s < 0$ e $p \in (1, \infty)$, nós definimos $W^{s,p}(\Omega)$ como sendo o dual de $W_0^{-s,p}(\Omega)$ onde $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.*

1.3 O espaço H^s e o operador Laplaciano Fracionário

Nesta seção, daremos foco ao caso em que $p = 2$, pois os espaços de Sobolev fracionários $W^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ e $W_0^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ são espaços de Hilbert. O produto interno definido nesses espaços é dado por

$$\langle u, v\rangle_{W^{s,2}(\mathbb{R}^N)} = \int_\Omega uv\, dx + \int_\Omega \int_\Omega \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy$$

Usualmente, denotamos os espaços $W^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ e $W_0^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ por $H^s(\mathbb{R}^N)$ e $H_0^s(\mathbb{R}^N)$, respectivamente.

Seja $s \in (0,1)$, definimos o operador $(-\Delta)^s$ para funções $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ por

$$(-\Delta)^s u(x) = C(N,s) \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{(B_\epsilon(x))^c} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy, \tag{1.14}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $C(N,s)$ uma constante positiva que depende de N e de s, precisamente dada por

$$C(N,s) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{N+2s}} d\zeta \right)^{-1}, \tag{1.15}$$

com $\zeta = (\zeta_1, \zeta')$, $\zeta' \in \mathbb{R}^{N-1}$.

O operador definido em (1.14) é chamado de Laplaciano fracionário. Geralmente, ao definir $(-\Delta)^s$, é adotada a abreviação de sentido do valor principal, mais precisamente

$$P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy := \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{(B_\epsilon(x))^c} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy.$$

Daqui por diante vamos escrever

$$(-\Delta)^s u(x) := C(N,s) P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy \tag{1.16}$$

A escolha da constante $C(N,s)$ será motivada pela Proposição 1.12. Vejamos que o limite em (1.16) existe para toda função $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, quando $s \in (0, \frac{1}{2})$. De fato, seja $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Sabemos que

$$|u(x)-u(y)| \leq |u(x)| + |u(y)| \leq \|u\|_\infty + \|u\|_\infty = 2\|u\|_\infty, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Além disso, como $|\nabla u|$ é uma função limitada em um conjunto limitado de $\mathbb{R}^N$, temos que u é Lipschitziana, donde existe $C > 0$ tal que $|u(x)-u(y)| \leq C|x-y|$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{N+2s}} dy &\leq C \int_{B_R(0)} \frac{|x-y|}{|x-y|^{N+2s}} dy + 2\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{(B_\epsilon(0))^c} \frac{1}{|x-y|^{N+2s}} dy \\
&\leq D \Big(\int_{B_R(0)} \frac{1}{|x-y|^{N+2s-1}} dy + \int_{(B_\epsilon(0))^c} \frac{1}{|x-y|^{N+2s}} dy \Big) \\
&= D \Big(\int_{B_R(x)} \frac{1}{|y|^{N+2s-1}} dy + \int_{(B_\epsilon(x))^c} \frac{1}{|y|^{N+2s}} dy \Big)
\end{aligned}$$

Tomando as coordenadas esféricas do $\mathbb{R}^N$, $y = r\omega$ com $r \in [0,\infty)$ e $\omega \in S^{N-1}$, temos $dy = r^{N-1} dr d\omega$. Daí,

$$\int_{B_R(x)} \frac{1}{|y|^{N+2s-1}} dy = \int_{S^{N-1}} \int_0^R \frac{r^{N-1}}{|r|^{N+2s-1}} dr d\omega = \omega_N \int_0^R \frac{1}{|r|^{2s}} dr$$

e

$$\int_{(B_\epsilon(x))^c} \frac{1}{|y|^{N+2s}}dy = \int_{S^{N-1}} \int_R^\infty \frac{r^{N-1}}{|r|^{N+2s}}drd\omega = \omega_N \int_R^\infty \frac{1}{|r|^{2s+1}}dr,$$

onde ω_N é a medida da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{N+2s}}dy \leq \omega_N D\Big(\int_0^R \frac{1}{|r|^{2s}}dr + \int_R^\infty \frac{1}{|r|^{2s+1}}dr\Big).$$

Como $s \in (0, \frac{1}{2})$, então o lado direto da desigualdade acima é finita.

Agora, vamos reescrever o operador Laplaciano fracionário de forma que esteja bem definido para todo $s \in (0,1)$.

Lema 1.10 *Sejam $s \in (0,1)$ e $(-\Delta)^s$ o operador Laplaciano fracionário definido por* (1.16)*. Para toda $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, temos*

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2}C(N,s)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{N+2s}}dy\ , \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.17}$$

Demonstração: Usando a definição (1.14) e fazendo $z = y - x$, temos

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s u(x) &= C(N,s)P.V.\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}dy \\ &= -C(N,s)P.V.\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(y)-u(x)}{|x-y|^{N+2s}}dy \\ &= -C(N,s)P.V.\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(z+x)-u(x)}{|x-y|^{N+2s}}dz.\end{aligned} \tag{1.18}$$

Além disso, substituindo $\tilde{z} = -z$, temos

$$\int_{(B_\epsilon(0))^c} \frac{u(z+x)-u(x)}{|z|^{N+2s}}dz = \int_{(B_\epsilon(0))^c} \frac{u(x-\tilde{z})-u(x)}{|\tilde{z}|^{N+2s}}d\tilde{z}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}2\int_{(B_\epsilon(0))^c} \frac{u(z+x)-u(x)}{|z|^{N+2s}}dz &= \int_{(B_\epsilon(0))^c} \frac{u(z+x)-u(x)}{|z|^{N+2s}}dz + \int_{(B_\epsilon(0))^c} \frac{u(x-z)-u(x)}{|z|^{N+2s}}dz \\ &= \int_{(B_\epsilon(0))^c} \frac{u(x+z)-u(x-z)-2u(x)}{|z|^{N+2s}}dz.\end{aligned} \tag{1.19}$$

Diante disso, renomeando z por y em (1.18) e (1.19), obtemos que

$$(-\Delta)^s u(x) = \frac{1}{2}C(N,s)P.V.\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y)-u(x-y)-2u(x)}{|y|^{N+2s}}dy. \tag{1.20}$$

Agora, nosso objetivo é remover a singularidade próximo da origem. Para isso, usaremos o fato de que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Logo, podemos tomar a sua expansão de Taylor com resto de Lagrange, ou seja,

$$u(x+y) = u(x) + Du(x)y + \frac{1}{2}D^2u(x)y^2$$

e

$$u(x-y) = u(x) - Du(x)y + \frac{1}{2}D^2u(x)y^2,$$

logo,

$$\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^2} = \frac{D^2u(x)y^2}{|y|^2},$$

ou seja,

$$u(x+y)+u(x-y)-2u(x) \leq D^2u(x)y^2 + \epsilon|y|^2 \leq \|D^2u\|_\infty |y|^2$$

Portanto,

$$\int_{B_\delta(0)} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{N+2s}}dy \leq \|D^2u\|_\infty \int_{B_\delta(0)} \frac{1}{|y|^{N+2s-2}}dy < \infty,$$

ou seja, sendo $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, podemos retirar a condição *P.V.* em (1.20).

■

1.3.1 Uma abordagem via Transformada de Fourier

Agora, apresentaremos uma maneira alternativa de definir o espaço $H^s(\mathbb{R}^N)$ via transformada de Fourier. Para $s \in (0,1)$, defina o seguinte espaço

$$\widehat{H}^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^{2s})|\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi < +\infty \right\}. \tag{1.21}$$

Mostraremos que o $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^N)$ e $H^s(\mathbb{R}^N)$ são equivalentes. Mas, antes, veremos que o Laplaciano fracionário $(-\Delta)^s$ pode ser visto como um pseudo operador diferenciável de símbolo $|\xi|^{2s}$. Inicialmente, vejamos que o seguinte lema

Lema 1.11 *Seja $s \in (0,1)$ e $C(N,s)$ a constante definida em* (1.15). *Então, para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$, temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-cos(\xi \cdot y)}{|y|^{N+2s}}dy = C(N,s)^{-1}|\xi|^2.$$

Demonstração: Primeiro, considere $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_N) \in \mathbb{R}^N$, então

$$\frac{1 - cos\zeta_1}{|\zeta|^{N+2s}} \leq \frac{|\zeta_1|^2}{|\zeta|^{N+2s}} \leq \frac{1}{|\zeta|^{N-2+2s}},$$

para ζ suficientemente próximo da origem. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - cos\zeta_1}{|\theta|^{N+2s}} d\zeta < +\infty.$$

Ademais,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - cos\zeta_1}{|\zeta|^{N+2s}} d\zeta > 0,$$

pois a função

$$f(\zeta) = \frac{1 - cos\zeta_1}{|\zeta|^{N+2s}}$$

se anula apenas em um conjunto de medida nula.

Agora, considere a função $I : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$I(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - cos(\xi \cdot y)}{|y|^{N+2s}} dy.$$

Vejamos qeu I é uma rotação invariante, isso é,

$$I(\xi) = I(|\xi| e_1) \tag{1.22}$$

onde e_1 é o vetor canônico de $\mathbb{R}^N$. De fato, suponha que $N = 1$, então (1.22) segue do fato de

$$I(-\xi) = I(\xi). \quad \text{(cosseno é um a função par)}$$

Vamos considerar $N \geq 2$ e considere a rotação R para a qual $R(|\xi| e_1) = \xi$ e denotemos por R^T a sua transposta. Então substituindo $\tilde{y} = R^T y$, obtemos

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - cos(R(|\xi| e_1) \cdot y)}{|y|^{N+2s}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - cos((|\xi| e_1) \cdot (R^T y))}{|y|^{N+2s}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - cos((|\xi| e_1) \cdot \tilde{y})}{|\tilde{y}|^{N+2s}} d\tilde{y} = I(|\xi| e_1). \end{aligned}$$

Provando (1.22). Como consequência disso, substituímos $\zeta = |\xi| y$ e vemos que

$$\begin{aligned} I(\xi) = I(|\xi| e_1) &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - cos(|\xi| \cdot y)}{|y|^{N+2s}} dy \\ &= \frac{1}{|\xi|^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - cos(\zeta_1 \cdot y)}{|\frac{\zeta}{|\xi|}|^{N+2s}} d\zeta \\ &= |\xi|^{2s} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{N+2s}} d\zeta, \end{aligned}$$

onde dizemos que $C(N,s)^{-1} := \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{N+2s}} d\zeta$, logo,

$$I(\xi) = C(N,s)^{-1} |\xi|^{2s}.$$

Provando o lema. ■

Proposição 1.12 *Sejam $s \in (0,1)$ e $(-\Delta)^s$ o operador Laplaciano fracionário. Então, para todo $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, temos*

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} (\mathcal{F}u)(\xi)), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{1.23}$$

Demonstração: Aqui vamos utilizar a definição de $(-\Delta)^s$ dada no lema (1.10). Vamos denotar $\mathcal{L}u$ a integral

$$\mathcal{L}u(x) = -\frac{1}{2} C(N,s) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{N+2s}} dy,$$

onde $C(N,s)$ e a constante em (1.15). É fácil ver que $\mathcal{L}$ é um operador linear.

No que segue, vamos procurar uma função $S : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ tal que

$$\mathcal{L}u = \mathcal{F}^{-1}(S(\mathcal{F}u)).$$

Vejamos que na verdade

$$S(\xi) = |\xi|^{2s}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

De fato, veja que

$$\begin{aligned} \frac{|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)|}{|y|^{N+2s}} \leq & \chi_{B_1(y)} \frac{|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)|}{|y|^{N+2s}} + \\ & + \chi_{(\mathbb{R}^N \setminus B_1(y))} \frac{|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)|}{|y|^{N+2s}} \\ \leq & 4 \left(\chi_{B_1(y)} \frac{\left(\sup_{B_1(x)} |D^2 u|\right)}{|y|^{N+2s-2}} + \right. \\ & \left. + \chi_{(\mathbb{R}^N \setminus B_1(y))} \frac{|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)|}{|y|^{N+2s}} \right) \in L^1(\mathbb{R}^{2N}). \end{aligned}$$

Daí, aplicando os Teoremas de Toneli e Fubini, obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}(\xi)(\mathcal{F}u)(\xi) = \mathcal{F}(\mathcal{L}u)(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{L}u(x) e^{-i(\xi,x)} dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \Big[-\frac{1}{2} C(N,s) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{N+2s}} dy \Big] e^{-i(\xi,x)} dx \\
&= -\frac{1}{2} C(N,s) (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{N+2s}} e^{-i(\xi,x)} dy dx \\
&= -\frac{1}{2} C(N,s) \int_{\mathbb{R}^N} \Big[(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{N+2s}} e^{-i(\xi,x)} dx \Big] dy \\
&= -\frac{1}{2} C(N,s) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|y|^{N+2s}} \big[e^{i(\xi,y)}(\mathcal{F}u)(\xi) + e^{-i(\xi,y)}(\mathcal{F}u)(\xi) - 2(\mathcal{F}u)(\xi) \big] dy \\
&= -\frac{1}{2} C(N,s) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{i(\xi,y)} + e^{-i(\xi,y)} - 2}{|y|^{N+2s}} (\mathcal{F}u)(\xi) dy \\
&= C(N,s) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-\cos(\xi,y)}{|y|^{N+2s}} dy (\mathcal{F}u)(\xi).
\end{aligned}
$$

Portanto, pelo Lema 1.11, segue que

$$
\mathcal{S}(\xi)(\mathcal{F}u)(\xi) = |\xi|^{2s}(\mathcal{F}u)(\xi),
$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$. Donde segue o resultado.

■

Proposição 1.13 *Seja $s \in (0,1)$. Então o espaço de Sobolev fracionário $H^s(\mathbb{R}^N)$ coincide com o espaço $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^N)$. Em particular, para toda $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$, temos*

$$
[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = 2C(N,s)^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi. \tag{1.24}
$$

Demonstração: Para cada $y \in \mathbb{R}^N$ fixado, usando a mudança de variáveis $z = x - y$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx \right) dy &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(z+y)-u(y)|^2}{|z|^{N+2s}} dz dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{u(z+y)-u(y)}{|z|^{\frac{N}{2}+s}} \right|^2 dy \right) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left\| \frac{u(z+\cdot)-u(\cdot)}{|z|^{\frac{N}{2}+s}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left\| \mathcal{F}\left(\frac{u(z+\cdot)-u(\cdot)}{|z|^{\frac{N}{2}+s}} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} dz,
\end{aligned}
$$

onde na última igualdade foi usada a identidade de Plancherel's. Daí,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \left\| \mathcal{F}\left(\frac{u(z+\cdot)-u(\cdot)}{|z|^{\frac{N}{2}+s}} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} dz &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|e^{i\xi\cdot z}-1|^2}{|z|^{N+2s}} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi dz \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(1-cos(\xi\cdot z))}{|z|^{N+2s}} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 dz d\xi \\
&= 2C(N,s)^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s}|\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dx\right) dy = 2C(N,s)^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s}|\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi. \tag{1.25}$$

A equivalência dos espaços $H^s(\mathbb{R}^N)$ e $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^N)$, segue de (1.25) e do fato de que

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

■

Pela proposição 1.12, somos levados a definir $(-\Delta)^s$ atuando no espaço $H^s(\mathbb{R}^N)$, da seguinte maneira: Para todo $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}(\mathcal{F}u)(\xi)), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{1.26}$$

Tendo conhecimento da definição acima,veremos a relação entre o operador Laplaciano Fracionário $(-\Delta)^s$ e o espaço de Sobolev Fracionário $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Proposição 1.14 *Sejam $s \in (0,1)$ e $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Então,*

$$[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = 2C(N,s)^{-1}\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{1.27}$$

Demonstração: A igualdade em (1.27) segue diretamente da definição em (1.26) e da Proposição (1.13). De fato,

$$\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\mathcal{F}(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \||\xi|^s\mathcal{F}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{2}C(N,s)[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^N)}.$$

■

Observação 1.14.1 *Como consequência das proposições* 1.12, 1.13 *e* 1.14 *as normas em $H^s(\mathbb{R}^N)$, dadas por*

$$\begin{aligned}
\|u\|_1 &= \left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx + \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right)^{\frac{1}{2}}, \\
\|u\|_2 &= \left(\int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^{2s})|(\mathcal{F}u)(\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
\|u\|_3 &= \left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx + \int_{\mathbb{R}^N}|\xi|^{2s}|(\mathcal{F}u)(\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

e

$$\|u\|_4 = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx + \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

são todas equivalentes.

Tendo em mãos a definição de $H^s(\mathbb{R}^N)$ via transformada de Fourier, iremos analisar o traço das funções de Sobolev.

Lema 1.15 *Seja $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e seja $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1})$. Se $\mathcal{F}v$ a transformada de v com respeito as primeiras $N-1$ variáveis, então*

$$u(x', 0) = v(x') \Longleftrightarrow \mathcal{F}v(\xi') = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(u)(\xi', \xi_N) d\xi_N.$$

Demonstração: Suponha que $u(x', 0) = v(x')$. Então

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}v(\xi') &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-i(\xi, x')} v(x') dx' \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-i(\xi, x')} u(x', 0) dx'.
\end{aligned}$$

Por outro lado, nós temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}u(\xi', \xi_N) d\xi_N &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\xi', \xi_N).(x', x_N)} u(x', x_N) dx' dx_N d\xi_N \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-i(\xi', x')} \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\xi_N, x_N)} u(x', x_N) dx_N d\xi_N \right] dx' \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-i(\xi', x')} [u(x', 0)] dx'.
\end{aligned}$$

Portanto, segue a implicação. A implicação contrária é imediato. ■

Observação 1.15.1 *No lema anterior, usamos o fato*

$$u(x', 0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\xi_N, x_N)} u(x', x_N) dx_N d\xi_N,$$

o qual é verdadeiro, pois, defina φ tal que $\varphi(x_N) = u(x', x_N)$. Como $\mathcal{F}(1) = \delta_0$, daí

$$\varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}(1), \varphi \rangle = \langle 1, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\varphi) \, d\xi_N.$$

Proposição 1.16 *Seja $s > \frac{1}{2}$, então a função $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ tem um traço v no hiperplano $\{x_N = 0\}$, de modo que $v \in H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})$. Além disso, o operador traço T é uma sobrejeção entre $H^s(\mathbb{R}^N)$ e $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})$.*

Demonstração: Inicialmente, vamos justificar que a aplicação

$$
\begin{aligned}
\tilde{T} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1}) \\
u &\longmapsto \tilde{T}u = v,
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
v : \mathbb{R}^{N-1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x' &\longmapsto v(x') = u(x', 0),
\end{aligned}
$$

é contínua, isto é, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|v\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq c\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}.$$

Usando a densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ em $H^s(\mathbb{R}^N)$, podemos estender o operador $\tilde{T}$ ao operador $T : H^s(\mathbb{R}^N) \longrightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})$ é a extensão de $\tilde{T}$ ao espaço $H^s(\mathbb{R}^N)$. Tal extensão seguirá por densidade.

Pelo Lema 1.15, temos

$$\mathcal{F}(v)(\xi') = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(u)(\xi', \xi_N) d\xi_N, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

Daí, usando Cauchy-Schawarz, obtemos

$$|\mathcal{F}(v)(\xi')|^2 \leq \Big(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\mathcal{F}(u)(\xi', \xi_N)|^2 d\xi_N \Big) \Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_N}{(1 + |\xi|^2)^s} \Big). \tag{1.28}$$

Fazendo a mudança de variável $\xi_N = t\sqrt{1 + |\xi'|^2}$, concluímos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_N}{(1 + |\xi|^2)^s} = \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 + |\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}}{\big((1 + |\xi'|^2)^s (1 + t^2)\big)^s} dt &= \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 + |\xi'|^2)^{\frac{1}{2} - s}}{(1 + t^2)^s} dt \\
&= c(s)(1 + |\xi'|^2)^{\frac{1}{2} - s},
\end{aligned} \tag{1.29}
$$

onde $c(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(1+t^2)^s}$. Por (1.28) e (1.29), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} (1 + |\xi'|^2)^{s - \frac{1}{2}} |\mathcal{F}(u)(\xi')|^2 d\xi' \leq \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\mathcal{F}(u)(\xi', \xi_N)|^2 d\xi_N d\xi'.$$

Mostrando que

$$\|v\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq c\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)},$$

para todo $s > \frac{1}{2}$.

Agora, mostraremos que o operador T é sobrejetivo. Para isso, mostremos que para toda função $v \in H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})$, a função u definida por

$$\mathcal{F}(u)(\xi', \xi_N) = \mathcal{F}v(\xi')\varphi\Big(\frac{\xi_N}{\sqrt{1+|\xi'|^2}}\Big)\frac{1}{\sqrt{1+|\xi'|^2}}, \tag{1.30}$$

com $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ e $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt = 1$, é tal que $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ e $Tu = v$. De fato, integrando (1.30) com respeito a $\xi_N \in \mathbb{R}$ e substituindo $\xi_N = t\sqrt{1+|\xi'|^2}$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}u(\xi'\xi_N)d\xi_N &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}v(\xi')\varphi\Big(\frac{\xi_N}{\sqrt{1+|\xi'|^2}}\Big)\frac{1}{\sqrt{1+|\xi'|^2}}d\xi_N \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}v(\xi')\varphi(t)dt = \mathcal{F}v(\xi')\end{aligned}$$

e pelo Lema 1.15, temos que $v = Tu$.

Por fim, vamos mostrar que $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$. De fato, de (1.30), para todo $\xi' \in \mathbb{R}^{N-1}$, segue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \big(1+|\xi|^2\big)^s|\mathcal{F}(u)(\xi', \xi_N)|^2 d\xi_N &= \int_{\mathbb{R}} \big(1+|\xi|^2\big)^s|\mathcal{F}(v)(\xi')|^2\Big|\varphi\Big(\frac{\xi_N}{\sqrt{1+|\xi'|^2}}\Big)\Big|^2\frac{1}{1+|\xi'|^2}d\xi_N \\ &= c(s)(1+|\xi'|^2)^{s\frac{1}{2}}|\mathcal{F}(v)(\xi')|^2,\end{aligned} \tag{1.31}$$

onde usamos a mudança de variável $\xi_N = t\sqrt{1+|\xi'|^2}$ e a constante $c(s) = \int_{\mathbb{R}}(1+t^2)^s|\varphi(t)|^2$. Finalmente, obtemos que $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ integrando (1.31) e $\xi' \in \mathbb{R}^{N-1}$. ■

Quando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e suave, também podemos definir um operador traço.

Teorema 1.17 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e suave e $\frac{1}{2} < s < 1$. Então, existe uma aplicação linear e contínua*

$$\begin{aligned} Tr : H^s(\Omega) &\longrightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ u \quad &\longmapsto \;Tr(u) = u\big|_{\partial\Omega}\end{aligned}$$

Demonstração: Ver Teorema 4.7.1 em [58]. ■

Capítulo 2

Laplaciano Fracionário em Domínios Limitados

Com base nos artigos [11, 23, 18], dedicamos esse capítulo ao estudo do operador Laplaciano fracionário em Domínios limitados e apresentaremos dois resultados de imersões e com isso, adaptamos a relação de Caffarelli e Silvestre [19], para o operador mencionado. Por fim, através da relação obtida, fazemos alguns comentários sobre a regularidade de um problema de um problema linear envolvendo o operador Laplaciano fracionário.

2.1 Laplaciano Fracionário em Domínios Limitados

Sejam $\{\mu_j\}$ e $\{\varphi_j\}$ os autovalores e as autofunções, respectivamente, do operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, isto é

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_j = \mu_j\varphi_j \text{ em } \Omega \\ \varphi_j = 0 \text{ em } \Omega \end{cases}, \tag{2.1}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Defina o espaço

$$H(\alpha/2, \Omega) = \Big\{u \in L^2(\Omega) : \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{\frac{\alpha}{2}} |\langle u, \varphi_j\rangle_{L^2(\Omega)}|^2 < \infty\Big\},$$

com norma

$$\|u\|_{H(\alpha/2,\Omega)} = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{\frac{\alpha}{2}} |\langle u, \varphi_j\rangle_{L^2(\Omega)}|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

e $H(-\alpha/2,\Omega)$ o seu dual topológico. Para todo $u \in H(\alpha/2,\Omega)$, $u = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\varphi_j$ com $a_j = \int_\Omega u\varphi_j dx$, definimos o Laplaciano fracionário que também será denotado por $(-\Delta)^{\alpha/2}$, como sendo o operador

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u : H(\alpha/2,\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v = \sum b_j\varphi_j &\longmapsto \langle(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u, v\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{\frac{\alpha}{2}} a_j b_j. \end{aligned} \tag{2.3}$$

e $b_j = \int_\Omega v\varphi_j dx$.

Note que $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ está bem definido, pois

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{\frac{\alpha}{2}} |a_j b_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{\frac{\alpha}{2}} |a_j|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{\frac{\alpha}{2}} |b_j|^2 = \|u\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)} + \|v\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)},$$

para todo u, $v \in H(\alpha/2,\Omega)$.

Lema 2.1 *Os autovalores e as autofunções de* $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ *em* Ω *com condições de Dirichlet na fronteira são dadas por* $\mu_j^{\frac{\alpha}{2}}$ *e* φ_j*, respectivamente, para todo* $j \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Pela definição do operador é imediato que $\mu_j^{\frac{\alpha}{2}}$ são autovalores e φ_j são autofunções correspondentes. Agora, mostraremos que são os únicos autovalores e autovetores. Sejam $u = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\varphi_j \in H(\alpha/2,\Omega)$ e $\lambda > 0$. Suponha que

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u - \lambda u = 0.$$

Então, para todo $j \in \mathbb{N}$, temos

$$\langle(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u, \varphi_j\rangle - \langle\lambda u, \varphi_j\rangle = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \mu_j^{\frac{\alpha}{2}} - \lambda = 0.$$

Portanto, $\lambda = \mu_j^{\frac{\alpha}{2}}$.

■

2.2 Imersões Contínuas e Compactas

Introduzimos um espaço que desempenhará um papel importante ao longo do trabalho para tratar com um problema envolvendo o operador $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$, em um domínio limitado. Seja Ω um domínio limitado e suave em $\mathbb{R}^N$. Denotamos o cilindro de Ω por

$$C_\Omega = \Omega \times (0,\infty)$$

e sua fronteira lateral por

$$\partial_L C_\Omega = \partial\Omega \times [0, \infty).$$

Os pontos no cilindro serão denotados por $(x, y) \in C_\Omega = \Omega \times (0, \infty)$.

Dado $\alpha \in (0, 2)$, definimos $L^2(C_\Omega, y^{1-\alpha})$ como o espaço de todas as funções mensuráveis definidas em C_Ω tal que

$$\|w\|_{L^2(C_\Omega, y^{1-\alpha})} = \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha} w^2 dxdy < \infty.$$

De forma similar, definimos o espaço de Sobolev

$$H^1(C_\Omega, y^{1-\alpha}) = \left\{ w \in L^2(C_\Omega, y^{1-\alpha}) : |\nabla w| \in L^2(C_\Omega, y^{1-\alpha}) \right\},$$

onde ∇w é o gradiente distribucional de w. Equipamos $H^1(C_\Omega, y^{1-\alpha})$ com a norma

$$\|w\|_{H^1(C_\Omega, y^{1-\alpha})} = \Big(\|w\|_{L^2(C_\Omega, y^{1-\alpha})} + \|\nabla w\|_{L^2(C_\Omega, y^{1-\alpha})} \Big). \tag{2.4}$$

Note que, tomando $\alpha = 0$, obtemos o espaço $H^1(C_\Omega)$ clássico.

Proposição 2.2 *O espaço $H^1(C_\Omega, y^{1-\alpha})$ equipado com a norma (2.4), é um espaço de Hilbert. Além disso, o conjunto $C^\infty(C_\Omega) \cap H^1(C_\Omega, y^{1-\alpha})$ é denso em $H^1(C_\Omega, y^{1-\alpha})$.*

Demonstração: Ver teorema 1, em [34]. ■

Agora, defina

$$X_0^\alpha(C_\Omega) = \{ w \in H^1(C_\Omega, y^{1-\alpha}) : w = 0 \text{ em } \partial_L C_\Omega \}.$$

Sob esse subespaço de $H^1(C_\Omega, y^{1-\alpha})$, vale uma desigualdade do tipo Poincaré que pode ser encontrada em [43], que nos fornece

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha} w^2 dxdy \leq C_\Omega \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha} |\nabla w|^2 dxdy,$$

onde C_Ω é uma constante positiva que depende apenas de Ω. Outra maneira de ver o espaço $X_0^\alpha(C_\Omega)$ é sugerido por Brandle, Colorado, Pablo e Sánchez, em [11], nesse artigo, esse espaço é definido como

$$X_0^\alpha(C_\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega \times [0, \infty))}^{\|\cdot\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)}}$$

O próximo passo que daremos é no sentido de provar a existência de um operador traço envolvendo os espaços $X_0^\alpha(C_\Omega)$ e $H^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega)$, ou seja, o operador

$$\begin{aligned} Tr_\Omega : X_0^\alpha(C_\Omega) &\longrightarrow H^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega) \\ w \quad &\longmapsto Tr_\Omega(w) = w(\cdot, 0) \end{aligned}$$

está bem definido e é contínuo.

Proposição 2.3 *Existe um operador traço de $X_0^\alpha(C_\Omega)$ em $H^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega)$. Além disso, esse operador é contínuo.*

Demonstração: Considere $\alpha \neq 1$. Partimos de um resultado da seção 5 de J. L. Lions em [39], onde mostrou-se que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|w(\cdot,0)\|^2_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^N)} \leq C \int_{\mathbb{R}^N \times (0,\infty)} y^{1-\alpha}(|w|^2 + |\nabla w|^2)dxdy, \tag{2.5}$$

sempre que o lado direito na desigualdade acima for finito.

Seja $v \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. Defina $w : \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$w(x,y) = \begin{cases} v(x,y), & (x,y) \in C_\Omega \\ \quad 0 \quad , & (x,y) \notin C_\Omega \end{cases} . \tag{2.6}$$

Pela desigualdade de Poincaré, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N \times (0,\infty)} y^{1-\alpha}(|w|^2 + |\nabla w|^2)dxdy = \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|v|^2 dxdy + \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla v|^2 dxdy < \infty.$$

Agora, veja que

$$\begin{aligned} \|w(\cdot,0)\|^2_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^N)} &= \left[\|w(\cdot,0)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|w(x,0) - w(y,0)|^2}{|(x,0)-(y,0)|^{N+2\alpha}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\ &= \left[\|v(\cdot,0)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|v(x,0) - v(y,0)|^2}{|(x,0)-(y,0)|^{N+2\alpha}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\ &= \|v(\cdot,0)\|^2_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Então, usando (2.5), (2.7) e a desigualdade de Poincaré, temos que

$$\begin{aligned} \|v(\cdot,0)\|^2_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega)} &\leq C \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|v|^2 dxdy + C \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla v|^2 dxdy \\ &\leq \tilde{C} \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla v|^2 dxdy < \infty. \end{aligned}$$

Assim, $v(\cdot,0) \in H^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega)$ e

$$\|v(\cdot,0)\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega)} \leq \tilde{C}\|v\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)}. \tag{2.8}$$

Portanto, fica bem definido o operador traço. Além disso, de (2.8) que

$$Tr_\Omega(X_0^\alpha(C_\Omega)) \subset H^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega).$$

O caso em que $\alpha = 1$ é imediato do Teorema 2.71 em [42], quando $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. Pois, basta tomar a extensão por 0 fora do cilindro.

■

Observação 2.3.1 *Conforme apresentado em Capella, Davilla, Dupaigne e Sire, o espaço $H(\alpha/2,\Omega)$ é na verdade*

$$H(\alpha/2,\Omega) = \begin{cases} H^{\alpha/2}(\Omega) = H_0^{\alpha/2}(\Omega), & se\ \alpha \in (0,1) \\ H_{00}^{1/2}(\Omega) & ,\ se\ \alpha = 1 \\ H_0^{\alpha/2}(\Omega) & ,\ se\ \alpha \in (1,2) \end{cases}.$$

onde o espaço $H_{00}^{1/2}(\Omega)$ é definido por

$$H_{00}^{1/2}(\Omega) = \left\{ u \in H^{1/2}(\Omega) : \int_\Omega \frac{u(x)^2}{d(x)} dx < \infty \right\}$$

e $d(x) = dist(x, \partial\Omega)$.

Portanto, para o caso $\alpha \in (0,1)$, a Proposição anterior, já nos diz que

$$Tr_\Omega(X_0^\alpha(C_\Omega)) \subset H(\alpha/2,\Omega).$$

Agora, sendo $\alpha \in (1,2)$, considere $v \in X_0^\alpha(C_\Omega)$, então existe $v_n \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ tal que $v_n \longrightarrow v$ em $X_0^\alpha(C_\Omega)$. Como existe $C > 0$ tal que

$$\|v_n(\cdot,0) - v(\cdot,0)\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega)} \leq C\|v_n - v\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)},$$

então $v_n(\cdot,0) \longrightarrow v(\cdot,0)$ em $H^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega)$. Como $v_n(\cdot,0) \in C_0^\infty(\Omega)$, então $u \in H_0^{\alpha/2}(\Omega)$. Portanto, $v(\cdot,0) \in H(\alpha/2,\Omega)$, ou seja

$$Tr_\Omega(X_0^\alpha(C_\Omega)) \subset H(\alpha/2,\Omega).$$

. O caso em que $\alpha = 1$ é estudado em [18].

Então, podemos concluir que

$$Tr_\Omega(X_0^\alpha(C_\Omega)) \subset H(\alpha/2,\Omega),$$

para todo $\alpha \in (0,2)$. A inclusão $H(\alpha/2,\Omega) \subset Tr_\Omega(X_0^\alpha(C_\Omega))$ pode ser vista no Lema B.8 do Apêndice B. Portanto, podemos concluir que

$$Tr_\Omega(X_0^\alpha(C_\Omega)) = H(\alpha/2,\Omega).$$

Agora, mostraremos algumas imersões envolvendo o espaço $X_0^\alpha(C_\Omega)$.

Lema 2.4 *O operador $Tr_\Omega : X_0^\alpha(C_\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < \frac{2N}{N-\alpha}$ é contínuo.*

Demonstração: Pela Proposição 2.3, o operador $Tr_\Omega : X_0^\alpha(C_\Omega) \longrightarrow H^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega)$ é contínuo, por outro lado, segue do Teorema 6.7, em [29], temos que o operador inclusão $i : H^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$ é contínuo para $[1, \frac{2N}{N-\alpha}]$. Portanto, $Tr_\Omega : X_0^\alpha(C_\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$ é compacto, para todo $[1, \frac{2N}{N-\alpha}]$.

$\blacksquare$

Lema 2.5 *O operador $Tr_\Omega : X_0^\alpha(C_\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < \frac{2N}{N-\alpha}$ é compacto.*

Demonstração: Segue do Teorema 4.54 em [28] que o operador inclusão $i : H^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$ é compacto, para todo $1 \leq q < \frac{2N}{N-\alpha}$. Como $Tr_\Omega : X_0^\alpha(C_\Omega) \longrightarrow H^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega)$ é contínuo, então, $Tr_\Omega : X_0^\alpha(C_\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$ é compacto, para todo $\left[1, \frac{2N}{N-\alpha}\right)$.

$\blacksquare$

2.3 A Extensão α-Harmônica

Motivados por Caffarelli e Silvestre em [19], o intuito dessa seção é mostrar que o operador definido em (2.3), está relacionado com um problema do tipo divergente. Para mostrar a relação, seguimos os artigos do Cabré e Tan em [18] e do Capella, Dacila, Dupaigne e Sire em [23], além de [11].

Dado $u \in H(\alpha/2,\Omega)$, considere o problema de extensão

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla w) = 0 \text{ em } C_\Omega \\ w = 0 \text{ sobre } \partial_L C_\Omega \\ w = u \text{ em } \Omega \end{cases} . \tag{2.9}$$

Uma solução fraca para o problema (2.9) é uma função $w \in M$, onde $M = \{v \in X_0^\alpha(C_\Omega) : v(x,0) = u(x) \text{ em } \Omega\}$ e verifica

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla w, \nabla \varphi\rangle dxdy = 0, \tag{2.10}$$

para toda função $\varphi \in C_0^\infty(C_\Omega)$. Mais adiante, veremos que existe um único $w \in M$ que verifica (2.10).

Definição 2.6 *Seja $u \in H(\alpha/2, \Omega)$. A solução fraca para o problema* (2.9) *é chamado extensão α-harmônica de u, a qual, denotamos por $w = E_\alpha(u)$.*

Agora, mostremos que de fato a extensão α-harmônica é única. Para isso, provaremos o seguinte teorema.

Teorema 2.7 *Seja $u \in H(\alpha/2, \Omega)$, existe uma única função $w = E_\alpha(u)$, extensão α-harmônica de u em C_Ω, isto é, existe um único $w \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ tal que w é solução fraca de*

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla w) = 0 \ \ em \ C_\Omega \\ w = 0 \ \ sobre \ \partial_L C_\Omega \\ w = u \ \ em \ \Omega \end{cases}, \tag{2.11}$$

e esta é dada por

$$E_\alpha(u)(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j(x)\psi(\mu_i^{1/2} y), \tag{2.12}$$

onde ψ resolve o problema

$$\begin{cases} \phi''(s) + \dfrac{1-\alpha}{s}\phi'(s) - \phi(s) = 0, \quad s > 0 \\ \phi(s) = 1 \\ -\lim\limits_{s\to\infty} s^{1-\alpha}\phi'(s) = k_\alpha \end{cases}. \tag{2.13}$$

Demonstração: Considere o funcional energia associado ao problema (2.11)

$$\begin{aligned} F : X_0^\alpha(C_\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto F(w) = \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla w|^2 dxdy. \end{aligned}$$

Pode-se mostrar que $F \in C^1(X_0^\alpha(C_\Omega), \mathbb{R})$ e

$$F'(w)(\varphi) = \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla w, \nabla \varphi\rangle dxdy,$$

para todo $\varphi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. Vamos ver que F assume um único mínimo sobre o conjunto M e daí, temos a única solução para o problema (2.11).

Para cada $w \in M$, temos

$$|F(w)| = \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla w|^2 dxdy = \|w\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} \geq \|w(\cdot,0)\|^2_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega)} = \|u\|^2_{H^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega)},$$

ou seja, F é limitado inferiormente em M. Tome $m = \inf\{F(w) : w \in M\}$ e $(w_n) \subset M$ tal que $F(w_n) \longrightarrow m$. Logo,

$$\|w_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} = F(w_n) \leq m,$$

pois, $\{F(w_n)\}$ é uma sequência limitada. Assim, $\{w_n\}$ é uma sequência limitada em $X_0^\alpha(C_\Omega)$, logo possui uma subsequência $w_{nj} \rightharpoonup w_0 \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ e daí, $w_{nj}(\cdot,0) \longrightarrow w_0(\cdot,0)$ em $L^2(\Omega)$, consequentemente,

$$\|u - w_0(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|w_{nj}(\cdot,0) - w_0(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Portanto, $u(x) = w_0(x,0)$, $q.t.p$ em Ω e assim, $w_0 \in M$. Então, $F(w_0) \geq m$. Por outro lado, pelas propriedades de convergência fraca, temos

$$\liminf_{n\to\infty} \|w_{nj}\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} \leq \|w_0\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)}.$$

Portanto, $F(w_0) \leq m$, dai, obtemos $F(w_0) = m$ e como $w_0 \in M$, segue que F admite um mínimo em M.

Agora, mostraremos que F possui um único mínimo. Então, sejam v_1, $v_2 \in M$ pontos de mínimo para o funcional F, veja que

$$\begin{aligned}
0 \leq & F\left(\frac{v_1 - v_2}{2}\right) \\
= & \frac{1}{4}\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla v_1 - \nabla v_2|^2 dxdy \\
= & \frac{1}{4}\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}(|\nabla v_1|^2 + |\nabla v_1|^2 - |\nabla v_1|^2 - 2\langle \nabla v_1, \nabla v_2\rangle + |\nabla v_2|^2 + |\nabla v_2|^2 - |\nabla v_2|^2) dxdy \\
= & \frac{1}{4}\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}(2|\nabla v_1|^2 + 2|\nabla v_2|^2) dxdy + \frac{1}{4}\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}(-|\nabla v_1|^2 - 2\langle \nabla v_1, \nabla v_2\rangle) dxdy - \\
& - \frac{1}{4}\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla v_2|^2 dxdy \\
= & \frac{1}{2}\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla v_1|^2 dxdy + \frac{1}{2}\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla v_2|^2 dxdy - \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\left|\nabla v_1 + \nabla v_2\right|^2 dxdy \\
= & \frac{1}{2}\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla v_1|^2 dxdy + \frac{1}{2}\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla v_2|^2 dxdy - \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\left|\frac{\nabla v_1 + \nabla v_2}{2}\right|^2 dxdy \\
= & \frac{F(v_1)}{2} + \frac{F(v_2)}{2} - F\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) \leq \frac{m}{2} + \frac{m}{2} - m,
\end{aligned}$$

então

$$F(\frac{v_1 - v_2}{2}) = 0.$$

Logo, $v_1 = v_2$, ou seja, F possui um único mínimo em M.

Mostraremos que w_0, mínimo de F em M, é a única solução do problema (2.11). Para este fim, vamos considerar

$$f(t) = F(w_0 + t\gamma) \quad \text{com } \gamma \in X_0^\alpha(C_\Omega) \text{ e } \gamma(\cdot, 0) = 0 \; q.t.p. \; \Omega.$$

Logo, $t = 0$ é um ponto de mínimo para f, então

$$f'(0) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 = f'(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{F(w_0 + t\gamma) - F(w_0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha} \left(\frac{|\nabla w_0|^2 - 2\langle \nabla w_0, \nabla(t\gamma)\rangle + |\nabla(t\gamma)|^2 - |\nabla w_0|^2}{t} \right) dxdy \\ &= \lim_{t\to 0} \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha} (-2\langle \nabla w_0, \nabla\gamma\rangle + t|\nabla\gamma|^2) dxdy \end{aligned}$$

e portanto,

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha} \langle \nabla w_0, \nabla\gamma\rangle dxdy = 0,$$

para todo $\gamma \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ e $\gamma(x, 0) = 0$ $q.t.p.$ em Ω.

Agora, veremos que se, w é solução fraca de (2.11), então w é mínimo de F, sobre M. De fato, se w é solução fraca de (2.11), então $w \in X_0^\alpha(C_\Omega)$, $w(x, 0) = u(x)$ $q.t.p.$ em Ω e

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha} \langle \nabla w, \nabla\varphi\rangle dxdy = 0, \tag{2.14}$$

para toda função $\varphi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ tal que $\varphi(\cdot, 0) = 0$ q.t.p em Ω. Suponha que w_0 é mínimo de F, então por (2.14), temos

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha} \langle \nabla(w - w_0), \nabla\varphi\rangle dxdy = 0, \tag{2.15}$$

para toda função $\varphi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ tal que $\varphi(\cdot, 0) = 0$ q.t.p em Ω. Daí, tome $\varphi = w - w_0 \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ e veja que $\varphi(\cdot, 0) = w(\cdot, 0) - w_0(\cdot, 0) = u(\cdot, 0) - u(\cdot, 0) = 0$. Então,

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha} |\nabla(w - w_0)|^2 dxdy = 0 \quad \Rightarrow \|w - w_0\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)} = 0 \quad \Rightarrow w = w_0.$$

Por fim, para ver a relação (2.12), vamos provar que a função

$$v(x,y) = \varphi_j(x)\psi(\mu_i^{\frac{1}{2}} y)$$

é a extensão α-harmônica de φ_j. De fato, é imediato que $v(x,0) = \varphi_j(x)$ para todo $x \in \Omega$ e $v(x,y) = 0$ em $\partial_L C_\Omega$. Além disso, como ψ é solução de (2.13), segue que

$$-div(y^{1-\alpha}\nabla v(x,y)) = 0 \text{ em } C_\Omega. \tag{2.16}$$

Então, para todo $\varphi \in C_0^\infty(C_\Omega)$, temos por (2.16)

$$\begin{aligned}\int_{C_\Omega} div(y^{1-\alpha}\varphi\nabla v)dxdy &= \int_{C_\Omega} div(y^{1-\alpha}\nabla v)\varphi dxdy + \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla v, \nabla\varphi\rangle dxdy \\ &= \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla v, \nabla\varphi\rangle dxdy\end{aligned}$$

Pelo Teorema do Divergente, segue que

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla v, \nabla\varphi\rangle dxdy = 0, \tag{2.17}$$

ou seja, v é solução fraca. Donde concluímos que $v = E_\alpha(\varphi_j)$. Para o caso geral, considere $u \in H(\alpha/2, \Omega)$ e

$$v(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j E_\alpha(\varphi_j)(x,y).$$

Por cálculos simples, usando o Lema $B.7$ e (2.17), mostramos que

$$-div(y^{1-\alpha}\nabla v(x,y)) = 0 \text{ em } C_\Omega.$$

Novamente, pelo Teorema do Divergente, garantimos que v é uma solução fraca. Portanto,

$$E_\alpha(u)(x,y) = v(x,y).$$

■

Corolário 2.8 *Para todo $u \in H(\alpha/2, \Omega)$, temos*

$$\|(-\Delta)^{\alpha/4}u\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{H_{\frac{\alpha}{2}}(\Omega)} = k_\alpha^{-1/2}\|E_\alpha(u)\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)}.$$

Demonstração: Basta ver $(B.21)$ e as definições das normas envolvidas. ■

Agora, definimos um operador que será fundamental para trabalhar com problemas envolvendo o Laplaciano fracionário em domínios limitados. Dado $u \in H(\alpha/2, \Omega)$, considere $w = E_\alpha(u)$, temos que $\lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha}\frac{\partial w}{\partial y} \in H(-\alpha/2, \Omega)$ onde

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha}\frac{\partial w}{\partial y} : H(\alpha/2, \Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \langle \lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha}\frac{\partial w}{\partial y}, \varphi\rangle = k_\alpha \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla w, \nabla\tilde{\varphi}\rangle dxdy, \end{aligned}$$

$w = E_\alpha(u)$, $\tilde{\varphi} = E_\alpha(\varphi)$ e

$$k_\alpha = \frac{2^{1-\alpha}\Gamma(1-\frac{1}{2}\alpha)}{\Gamma(\frac{1}{2}\alpha)}.$$

Proposição 2.9 *Seja $u \in H(\alpha/2, \Omega)$, então*

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u = -\frac{1}{k_\alpha}\lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha}\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{2.18}$$

onde $w = E_\alpha(u)$, no sentido fraco, ou seja,

$$\langle -\frac{1}{k_\alpha}\lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha}\frac{\partial w}{\partial y}, \varphi\rangle = \langle (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u, \varphi\rangle,$$

para todo $\varphi \in H(\alpha/2, \Omega)$.

Demonstração: Sejam $u = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\varphi_j$, $\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} b_j\varphi_j$ e sejam w, $\tilde{\varphi}$ as suas respectivas extensões α-harmônica dadas por

$$w(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\varphi_j(x)\psi(\lambda_j^{1/2}y) \quad \text{e} \quad \tilde{\varphi}(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j\varphi_j(x)\psi(\lambda_j^{1/2}y).$$

Pela ortogonalidade das autofunções, temos

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla w, \nabla\tilde{\varphi}\rangle dxdy = \frac{1}{k_\alpha}\sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \int_0^{\infty} y^{1-\alpha}[\lambda_j\psi(y)^2 + (\psi'(y))^2]dy.$$

Assim,

$$\langle -\frac{1}{k_\alpha}\lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha}\frac{\partial w}{\partial y}, \varphi\rangle = \frac{1}{k_\alpha}\sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \int_0^{\infty} y^{1-\alpha}[\lambda_j\psi(y)^2 + (\psi'(y))^2]dy, \tag{2.19}$$

então de (2.19) e da identidade $(B.16)$, segue que

$$\langle -\frac{1}{k_\alpha}\lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha}\frac{\partial w}{\partial y}, \varphi\rangle = \frac{1}{k_\alpha}\sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \Big[\lim_{b\to\infty} y^{1-\alpha}\psi'(y)\psi(y)\Big|_0^b\Big].$$

Portanto, segue de $(B.20)$ que

$$\langle -\frac{1}{k_\alpha}\lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha}\frac{\partial w}{\partial y}, \varphi\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{\frac{\alpha}{2}} a_j b_j = \langle (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u, \varphi\rangle.$$

Assim,

$$\langle (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u, \varphi\rangle = \langle -\frac{1}{k_\alpha}\lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha}\frac{\partial w}{\partial y}, \varphi\rangle,$$

para todo $\varphi \in H(\alpha/2, \Omega)$. ■

Usando essa caracterização envolvendo o Laplaciano fracionário, estudaremos um problema linear que será necessário para o desenrolar dos próximos capítulos.

2.4 Um Problema Linear

Seja g uma função regular e considere os problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u = g(x), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}. \tag{2.20}$$

Uma solução fraca de (2.20) é uma função $u \in H(\alpha/2, \Omega)$ satisfazendo

$$\int_\Omega (-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}} u(x) (-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}} \varphi(x) dx = \int_\Omega g(x)\varphi(x) dx, \tag{2.21}$$

para todo $\varphi \in H(\alpha/2, \Omega)$.

Usaremos a extensão α-harmônica e a relação (2.18) para reformular o problema (2.20) em um problema do tipo divergente. Para isso, considere o problema

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla w) = 0, & \text{em } C_\Omega \\ w = 0, & \text{sobre } \partial_L C_\Omega \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu^\alpha}(x) = g(x), & \text{em } \Omega \end{cases}, \tag{2.22}$$

onde

$$\frac{\partial w}{\partial \nu^\alpha}(x) = -\frac{1}{k_\alpha}\lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha}\frac{\partial w}{\partial y}(x, y).$$

Uma solução fraca para (2.22) é uma função $w \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ que verifica

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla w(x, y), \nabla\varphi(x, y)\rangle dxdy = k_\alpha \int_\Omega g(x)\varphi(x, 0) dx, \tag{2.23}$$

para toda função $\varphi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. Ora, sendo w a solução fraca de (2.22), é sabido que $w(\cdot,0) \in H(\alpha/2,\Omega)$, além disso, pela Proposição 2.9 segue que a função $u := w(\cdot,0)$ é solução fraca de (2.20). Por outro lado, é fácil verificar que se u é solução de (2.20) então u é o traço em Ω de uma solução de (2.22), isso se justifica usando novamente a Proposição 2.9 e o fato que $Tr_\Omega(X_0^\alpha(C_\Omega)) = H(\alpha/2,\Omega)$.

Portanto, o conceito de solução para o problema (2.20), daqui por diante, será dado através das soluções de (2.22), para não sobrar dúvidas, enunciaremos a seguir.

Definição 2.10 *Dizemos que $u \in H(\alpha/2,\Omega)$ é uma solução fraca para* (2.20) *se, u é o traço em Ω da função w que é solução fraca para o problema* (2.22).

No que segue, vamos assumir, sem perda de generalidade, que $k_\alpha = 1$, pois basta alterar a função g.

A seguir usaremos a conhecida técnica de interação de Moser para provar que a solução de (2.22), que existe, basta ver $(A.1)$, é limitada, desde que g satisfaça uma condição de integrabilidade.

Teorema 2.11 *Seja w uma solução para* (2.22). *Se $g \in L^r(\Omega)$, $r > \frac{N}{\alpha}$, então $w(\cdot,0) \in L^\infty(\Omega)$.*

Demonstração: Vamos supor sem perda de generalidade que $w \geq 0$, o caso geral é obtido de forma similar. Considere $\beta \geq 1$ e $K \geq k$ (k a ser escolhido) e defina as funções $\psi \in C^1([k,\infty))$ dado por

$$\psi(t) = \begin{cases} t^\beta - k^\beta, & t \in [k, M] \\ \beta K^{\beta-1}(t-K) + (K^\beta - k^\beta), & t > M \end{cases} . \tag{2.24}$$

e $v = w + k$, $\nu = v(\cdot,0)$. Escolha como função teste

$$\varphi = G(v) = \int_k^v |\psi'(s)|^2 ds, \text{ com } \nabla\varphi = |\psi'(v)|^2 \nabla v = |\psi'(v)|^2 \nabla w.$$

Observe que $|\psi'(v)| \leq \beta K^{\beta-1}$, assim

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha} |\nabla\varphi|^2 dxdy < \infty.$$

Então, $\varphi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. Daí, por um lado, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla w, \nabla \varphi\rangle dxdy &= \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla v, |\psi'(v)|\nabla v\rangle dxdy \\
&= \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla v|^2|\psi'(v)|^2 dxdy \\
&= \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla \psi(v)|^2 dxdy \qquad (2.25)\\
&\geq C\left(\int_\Omega |\psi(\nu)|^{\frac{2N}{N-\alpha}}dx\right)^{\frac{N-\alpha}{N}} \\
&= C\|\psi(\nu)\|^2_{L^{\frac{2N}{N-\alpha}}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

onde a contante $C > 0$, surge do Lema 2.4. Por outro lado, desde que ψ' é crescente , temos

$$
G(t) = \int_k^t |\psi'(s)|^2 ds \leq t|\psi'(t)|^2 = tG'(t),
$$

assim

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega g(x)\varphi(x,0)dx &= \int_\Omega g(x)G(\nu)dx \\
&\leq \int_\Omega g(x)\nu G'(\nu)dx \qquad (2.26)\\
&\leq \frac{1}{k}\int_\Omega g(x)\nu^2|\psi'(\nu)|^2 dx.
\end{aligned}
$$

Portanto, a desigualdade (2.25) junto com (2.26), leva a

$$
C\|\psi(\nu)\|^2_{\frac{2N}{N-\alpha}} \leq \frac{1}{k}\int_\Omega g(x)\nu^2|\psi'(\nu)|^2 dx. \qquad (2.27)
$$

Pela desigualdade de Holder, obtemos

$$
\|\psi(\nu)\|_{\frac{2N}{N-\alpha}} \leq \left(\frac{1}{Ck}\|g\|_r\right)^{\frac{1}{2}} \|(\nu\psi'(\nu))^2\|^{\frac{1}{2}}_{\frac{r}{r-1}} = \|\nu\psi'(\nu)\|_{\frac{2r}{r-1}}.
$$

Considere $k = C^{-1}\|g\|_r$. Fazendo $M \to +\infty$ na definição de ψ, temos pela desigualdade (2.27) que

$$
\|\nu\|_{\frac{2N\beta}{N-\alpha}} \leq \|\nu\|_{\frac{2r\beta}{r-1}}. \qquad (2.28)
$$

Como consequência, para todo $\beta \geq 1$, a inclusão $\nu \in L^{\frac{2r\beta}{r-1}}(\Omega)$ implica a inclusão mais forte $\nu \in L^{\frac{2N\beta}{N-\alpha}}(\Omega)$, uma vez que $\frac{2N\beta}{N-\alpha} > \frac{2r\beta}{r-1}$, pois $r > \frac{N}{\alpha}$. O resultado agora, segue da interação de Moser, partindo de

$$
\beta = \frac{N(r-1)}{r(N-\alpha)} > 1 \quad \text{e} \quad \nu \in L^{\frac{2N}{N-\alpha}}(\Omega).
$$

Dado $m \in \mathbb{N}$, temos por (2.28)

$$\|\nu\|_{\beta^m 2^*_\alpha} \leq \|\nu\|_{\beta^{m-1} 2^*_\alpha} \leq \|\nu\|_{\beta^{m-2} 2^*_\alpha} \leq \cdots \leq \|\nu\|_{2^*_\alpha}.$$

Como m é qualquer, então

$$\sup_{\Omega} \nu \leq \|\nu\|_{2^*_\alpha}.$$

Portanto, $\nu \in L^\infty(\Omega)$. ■

Corolário 2.12 *Ainda sob as hipóteses do Teorema* 2.11*, vale* $w \in L^\infty(C_\Omega)$*.*

Demonstração: Basta adaptar a demonstração do Teorema 8.16 em [32] e usar o Teorema 2.11. ■

Agora, será listado um resultado de regularidade que pode ser encontrado em [22], (Ver Lema 2.3), que será utilizado no decorrer do texto.

Teorema 2.13 *Sejam* $\sigma \in (0,1)$*,* Ω *um domínio regular e limitado de* $\mathbb{R}^N$*,* $g \in H(\alpha/2, \Omega)$ *e* $w \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ *uma solução de* (2.22)*.*

i) Se $g \in L^\infty(\Omega)$*, então* $w \in C^\sigma(\overline{C_\Omega})$*.*

ii) Se $g \in C^\sigma(\overline{\Omega})$ *e* $g\big|_{\partial\Omega} \equiv 0$*, então* $w \in C^{1,\sigma}(\overline{C_\Omega})$

iii) Se $g \in C^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ *e* $g\big|_{\partial\Omega} \equiv 0$*, então* $w \in C^{2,\sigma}(\overline{C_\Omega})$*.*

Capítulo 3

Um Problema Elíptico do Tipo Côncavo e Convexo

Neste capítulo, mostraremos a existência de solução para um problema envolvendo o Laplaciano Fracionário apresentado no artigo de Brandle, Colorado, Pablo e Sánchez em [11]. Mais precisamente, consideramos o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\alpha/2}u = \lambda u^q + u^p, & \text{em } \Omega; \\ u > 0, & \text{em } \Omega; \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega; \end{cases} \tag{3.1}$$

com $0 < \alpha < 2$, $0 < q < 1 < p < \dfrac{N+\alpha}{N-\alpha}$, $N > \alpha$, $\lambda > 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave, mostraremos que vale o seguinte teorema.

Teorema 3.1 *Existe* $\Lambda > 0$ *tal que, para o problema* (3.1)*, temos*

i) Se $0 < \lambda < \Lambda$*, então existe uma solução minimal. Além disso, a família de soluções minimais é crescente em relação a* λ*.*

ii) Se $\lambda = \Lambda$*, existe pelo menos uma solução.*

iii) Se $\lambda > \Lambda$*, não existe solução.*

Usando a caracterização do Laplaciano fracionário apresentada no Capítulo 2, podemos escrever o problema (3.1) na forma divergente, assim como foi feito no problema linear apresentado no capítulo 2. Então, entendemos por uma solução fraca para o problema (3.1) uma função $u(\cdot,0)>0$ que é o traço de u em $\Omega\times\{y=0\}$ de uma função u a qual é solução fraca para o problema

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla u)=0, & \text{em } C_\Omega \\ u=0, & \text{sobre } \partial_L C_\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu^\alpha}=\lambda u^q+u^p, & u>0 \text{ em } \Omega \end{cases} \tag{P_λ}$$

onde

$$\frac{\partial u}{\partial \nu^\alpha}:=-\frac{1}{k_\alpha}\lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha}\frac{\partial u}{\partial y} \quad . \tag{3.2}$$

Portanto, provaremos o Teorema 3.1 em termos da solução fraca de (P_λ). Aqui, entendemos por solução fraca para o problema (P_λ), uma função $u\in X_0^\alpha(C_\Omega)$ tal que

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle\nabla u(x,y),\nabla\varphi(x,y)\rangle dxdy=\frac{1}{k_\alpha}\int_\Omega(\lambda u(x,0)^q+u(x,0)^p)\varphi(x,0)dx,$$

para toda função $\varphi\in X_0^\alpha(C_\Omega)$.

Observação 3.1.1 *Como comentamos no Capítulo 2, omitiremos a constante k_α. Além desse fato, destacamos que por vezes denotaremos o traço da função u por u ou $u(\cdot,0)$.*

Associado ao problema (P_λ), temos o funcional energia

$$J_\lambda(u)=\frac{1}{2}\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla u|^2dxdy-\frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega u(x,0)^{q+1}dx-\frac{1}{p+1}\int_\Omega u(x,0)^{p+1}dx,$$

para todo $u\in X_0^\alpha(C_\Omega)$. Pode-se mostrar que $J_\lambda\in C^1(X_0^\alpha(C_\Omega),\mathbb{R})$, ainda mais,

$$J_\lambda'(u)(\varphi)=\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle\nabla u,\nabla\varphi\rangle dxdy-\int_\Omega(\lambda u(x,0)^q+u(x,0)^p)\varphi(x,0)dx, \tag{3.3}$$

para todo $\varphi\in X_0^\alpha(C_\Omega)$.

O problema (P_λ) é um caso particular do problema

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla u)=0, & \text{em } C_\Omega \\ u=0, & \text{sobre } \partial_L C_\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu^\alpha}=f(u), & u>0 \text{ em } \Omega \end{cases}, \tag{3.4}$$

onde f é contínua e satisfaz a condição de crescimento

$$0\le f(s)\le C(1+|s|^p) \text{ para algum } 1\le p<2_\alpha^*-1. \tag{3.5}$$

Uma solução para o problema (3.4) é uma função $u \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ tal que

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla u(x,y), \nabla \varphi(x,y)\rangle dxdy = \int_\Omega f(u(x,0))\varphi(x,0)dx,$$

para toda função $\varphi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. Diante disso, associado ao problema (3.4), temos o funcional energia

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla u|^2 dxdy - \int_\Omega F(u(x,0))dx, \tag{3.6}$$

para todo $u \in X_0^\alpha(C_\Omega)$, onde

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt.$$

Por simplicidade, vamos considerar $f(s) = 0$ para $s \leq 0$. Vale lembrar que o traço $u \in L^r(\Omega)$ para todo $1 \leq r \leq \frac{2N}{N-\alpha}$ se $N > \alpha$ e $1 < r \leq \infty$ se $N \leq \alpha$. Em particular, se $p \leq \frac{N+\alpha}{N-\alpha}$ e f verifica a condição de crescimento (3.5), então $F(u) \in L^1(\Omega)$, e o funcional é bem definido e limitado por baixo. Além disso, $J \in C^1(X_0^\alpha(C_\Omega), \mathbb{R})$ e

$$J'(u)(\varphi) = \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla u, \nabla \varphi\rangle dxdy - \int_\Omega f(u(x,0))\varphi(x,0)dx, \tag{3.7}$$

para toda função $\varphi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. Assim, pontos críticos para o funcional J são soluções para o problema (3.4).

Observação 3.1.2 *Quando f satisfaz o crescimento* (3.5) *o problema* (3.4) *pode ser visto como um problema variacional. Assim, como o caso clássico em que $\alpha = 1$, podemos usar o teorema dos multiplicadores de Lagrange para provar que, abaixo do expoente crítico, o ínfimo do conjunto*

$$\left\{\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla u|^2 dxdy : \ u \in X_0^\alpha(C_\Omega), \quad \int_\Omega F(u(x,0))dx = 1\right\}, \tag{3.8}$$

é atingido. Isso fornece uma solução não negativa de maneira padrão.

Seguindo de perto as ideias apresentadas por [3], mostraremos o Teorema 3.1 através do método de subsolução e supersolução.

3.1 Método de Subsolução e Supersolução

Definição 3.2 *Dizemos que $u \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ é uma subsolução de* (3.4) *se verifica*

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla u, \nabla \varphi\rangle dxdy \leq \int_\Omega f(u(x,0))\varphi(x,0)dx \tag{3.9}$$

para toda função $\varphi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ com $\varphi \geq 0$ em C_Ω e $\varphi(x,0) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$. Analogamente, temos a definição de supersolução.

O primeiro resultado que apresentamos é um procedimento clássico de subsolução e supersolução para obter uma solução para o problema (3.4). Para a sua prova, adaptamos a demonstração do Teorema 2.4 em [56].

Proposição 3.3 *Sejam u_1 uma subsolução e u_2 uma supersolução para o problema* (3.4). *Assuma que existam $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ verificando $-\infty < c_1 \leq u_1 \leq u_2 \leq c_2 < \infty$ em $\overline{C_\Omega}$. Então, existe uma solução $u \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ para o problema* (3.4) *tal que*

$$u_1 \leq u \leq u_2 \text{ em } C_\Omega \, . \tag{3.10}$$

Demonstração: Considere o conjunto

$$M = \{u \in X_0^\alpha(C_\Omega) : u_1 \leq u \leq u_2 \text{ em } C_\Omega \text{ e } u_1(\cdot, 0) \leq u(\cdot, 0) \leq u_2(\cdot, 0) \text{ em } \Omega\}.$$

Veja que M é fechado. De fato, considere $(u_n) \subset M$ e suponha que

$$u_n \to u \text{ em } X_0^\alpha(C_\Omega).$$

Recorde que $X_0^\alpha(C_\Omega)$ está imerso continuamente em $L^2(C_\Omega, y^{1-\alpha})$ e operador $tr_\Omega : X_0^\alpha(C_\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é contínuo, então a menos de subsequência $u_n(x, y) \to u(x, y)$, q.t.p em C_Ω e $u_n(x, 0) \to u(x, 0)$, q.t.p em Ω. Assim, $u \in M$. A convexidade do conjunto M é imediata. Logo M é fracamente fechado. Além disso, J é fracamente semicontínuo inferiormente. Portanto, pelo Teorema C.5, existe u_0 tal que

$$J(u_0) = \inf_{u \in M} J(u).$$

Agora, vejamos que $J'(u_0) = 0$. De fato, para $\epsilon > 0$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times [0, \infty))$, defina

$$v_\epsilon = \min\{u_2, \max\{u_1, u_0 + \epsilon\varphi\}\} \in M.$$

Podemos ver que $v_\epsilon = u_0 + \epsilon\varphi - \varphi^\epsilon + \varphi_\epsilon$, onde

$$\varphi^\epsilon = \max\{0, (u_0 + \epsilon\varphi - u_2)\} \quad e \quad \varphi_\epsilon = \max\{0, (u_1 - (\epsilon\varphi + u_0)\}.$$

Segue da convexidade de M que para $t \in (0, 1)$, temos $u_0 + t(v_\epsilon - u_0) \in M$, e daí

$$\begin{aligned} J'(u_0)(v_\epsilon - u_0) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{J(u_0 + t(v_\epsilon - u_0) - J(u_0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{J((1-t)u_0 + tv_\epsilon) - J(u_0)}{t} \geq 0. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$0 \leq J'(u_0)(v_\epsilon - u_0) = \epsilon J'(u_0)\varphi - J'(u_0)(\varphi^\epsilon) + J'(u_0)(\varphi_\epsilon)$$

desta forma,

$$J'(u_0)\varphi \geq \frac{1}{\epsilon}\left[J'(u_0)(\varphi^\epsilon) - J'(u_0)(\varphi_\epsilon)\right].$$

Agora, tendo em vista que u_2 é supersolução de (3.4), temos

$$\begin{aligned}
J'(u_0)(\varphi^\epsilon) &= J'(u_2)(\varphi^\epsilon) + \left[J'(u_0) - J'(u_2)\right](\varphi^\epsilon) \\
&\geq [J'(u_0) - J'(u_2)](\varphi^\epsilon) \\
&= \int_{C_\Omega^\epsilon} y^{1-\alpha}\langle \nabla(u_0 - u_2), \nabla(u_0 + \epsilon\varphi - u_2)\rangle dxdy \\
&- \int_{\Omega^\epsilon} (f(u_0(x,0)) - f(u_2(x,0)))(u_0 + \epsilon\varphi - u_2)(x,0)dx \\
&\geq \epsilon \int_{C_\Omega^\epsilon} y^{1-\alpha}\langle \nabla(u_0 - u_2), \nabla\varphi\rangle dxdy \\
&- \epsilon \int_{\Omega^\epsilon} |f(u_0(x,0)) - f(u_2(x,0))||\varphi(x,0)|dx
\end{aligned}$$

onde

$$C_\Omega^\epsilon = \{(x,y) \in C_\Omega : u_0(x,y) + \epsilon\varphi(x,y) \geq u_2(x,y) > u_0(x,y)\}$$

e

$$\Omega^\epsilon = \{x \in \Omega : u_0(x,0) + \epsilon\varphi(x,0) \geq u_2(x,0) > u_0(x,0)\}.$$

Como $|C_\Omega^\epsilon| \longrightarrow 0$ e $|\Omega^\epsilon| \longrightarrow 0$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$, temos pela continuidade absoluta da integral de Lebesgue que

$$J'(u_0)(\varphi^\epsilon) \geq o(\epsilon),$$

onde $\frac{o(\epsilon)}{\epsilon} \to 0$ quando $\epsilon \to 0$.

Analogamente, como u_1 é subsolução de (3.4),

$$
\begin{aligned}
J'(u_0)(\varphi_\epsilon) &= J'(u_1)(\varphi_\epsilon) + [J'(u_0) - J'(u_1)]\,(\varphi_\epsilon) \\
&\leq [J'(u_0) - J'(u_1)](\varphi_\epsilon) \\
&= \int_{C_\Omega^\epsilon} y^{1-\alpha}\langle \nabla(u_0 - u_1), \nabla(u_1 - u_0 - \epsilon\Phi)\rangle dxdy \\
&- \int_{\Omega^\epsilon} (f(u_0(x,0)) - f(u_1(x,0)))(u_1 - u_0 - \epsilon\varphi)(x,0)dx \\
&\leq -\epsilon \int_{C_{\Omega_\epsilon}} y^{1-\alpha}\langle \nabla(u_0 - u_2), \nabla(\varphi)\rangle dxdy \\
&- \epsilon \int_{\Omega_\epsilon} |f(u_0(x,0)) - f(u_2(x,0))||\varphi(x,0)|dx,
\end{aligned}
$$

onde

$$C_{\Omega_\epsilon} = \{(x,y) \in C_\Omega : u_0(x,y) + \epsilon\varphi(x,y) \leq u_1(x,y) < u_0(x,y)\}$$

e

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega : u_0(x,0) + \epsilon\varphi(x,0) \leq u_1(x,0) < u_0(x,0)\}.$$

Como $|C_{\Omega_\epsilon}| \to 0$ e $|\Omega_\epsilon| \to 0$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$, temos pela continuidade absoluta da integral de Lebesgue que

$$J'(u_0)(\varphi_\epsilon) \geq o(\epsilon)\ ,$$

onde $\frac{o(\epsilon)}{\epsilon} \to 0$ quando $\epsilon \to 0$. Recordando que

$$J'(u_0)\varphi \geq \frac{1}{\epsilon}\left[J'(u_0)(\varphi^\epsilon) - J'(u_0)(\varphi_\epsilon)\right],$$

temos

$$J'(u_0)\varphi \geq 0,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times [0,\infty))$. Portanto, $J'(u_0) = 0$.

■

O próximo resultado que será apresentado é um resultado de comparação para não linearidades concavas. A sua demonstração foi descrita em [11] e foi baseada em [14].

Proposição 3.4 *Assuma que* $\dfrac{f(t)}{t}$ *é decrescente para* $t > 0$ *e considere* $w_1, w_2 \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ *uma subsolução e supersolução positiva, respectivamente, para o problema* (3.4). *Então* $w_1 \leq w_2$ *em* $\overline{C_\Omega}$.

Demonstração: Por definição de sub e supersolução, temos

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla w_1, \nabla \varphi_1\rangle dxdy \leq \int_\Omega f(w(x,0))\varphi_1(x,0)dx$$

e

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla w_2, \nabla \varphi_2\rangle dxdy \geq \int_\Omega f(w(x,0))\varphi_2(x,0)dx,$$

para todas as funções testes φ_1 e φ_2 não negativas. Seja θ uma função suave não decrescente tal que $\theta(t) = 1$ para $t \geq 1$ e $\theta(t) = 0$ para $t \leq 0$. Defina

$$\theta_\epsilon(t) = \theta\Big(\frac{t}{\epsilon}\Big).$$

Note que $\theta_\epsilon(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Daí, considere

$$\varphi_1 = w_2\theta_\epsilon(w_1 - w_2), \quad \varphi_2 = w_1\theta_\epsilon(w_1 - w_2).$$

Facilmente, vemos que $\varphi_1,\ \varphi_2 \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ e $\varphi_1,\ \varphi_2 \geq 0$. Logo, substituindo nas definições acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega w_1w_2\Big(\frac{f(w_2)}{w_2} - \frac{f(w_1)}{w_1}\Big)\theta_\epsilon(w_1-w_2)dx &\leq \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla w_2, \nabla(w_1\theta_\epsilon(w_1-w_2))\rangle dxdy - \\
&\quad - \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla w_1, \nabla(w_2\theta_\epsilon(w_1-w_2))\rangle dxdy \\
&= \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla w_2, \nabla(w_1\theta_\epsilon(w_1-w_2))\rangle w_1\theta_\epsilon(w_1-w_2)dxdy - \\
&\quad - \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla w_1, \nabla(w_1\theta_\epsilon(w_1-w_2))\rangle w_2\theta_\epsilon(w_1-w_2)dxdy \\
&= \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla w_2, \nabla(w_1-w_2)\rangle w_1\theta'_\epsilon(w_1-w_2)dxdy - \\
&\quad - \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla w_1, \nabla(w_1-w_2)\rangle w_1\theta'_\epsilon(w_1-w_2)dxdy - \\
&\quad - \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla w_1, \nabla(w_1\theta_\epsilon(w_1-w_2))\rangle w_2\theta_\epsilon(w_1-w_2)dxdy + \\
&\quad + \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla w_1, \nabla(w_1-w_2)\rangle w_1\theta'_\epsilon(w_1-w_2)dxdy \\
&= \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla(w_2-w_1), \nabla(w_1-w_2)\rangle w_1\theta'_\epsilon(w_1-w_2)dxdy + \\
&\quad + \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla w_1, \nabla(w_1-w_2)\rangle (w_1-w_2)\theta'_\epsilon(w_1-w_2)dxdy \\
&= - \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\|\nabla(w_2-w_1)\|^2 w_1\theta'_\epsilon(w_1-w_2)dxdy + \\
&\quad + \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla w_1, \nabla(w_1-w_2)\rangle (w_1-w_2)\theta'_\epsilon(w_1-w_2)dxdy.
\end{aligned}$$

Veja que

$$-\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\|\nabla(w_2-w_1)\|^2 w_1\theta'_\epsilon(w_1-w_2)dxdy \leq 0,$$

daí,

$$\int_\Omega w_1w_2\Big(\frac{f(w_2)}{w_2}-\frac{f(w_1)}{w_1}\Big)\theta_\epsilon(w_1-w_2)dx \leq I_1,$$

onde

$$I_1=\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle\nabla w_1,\nabla(w_1-w_2)\rangle(w_1-w_2)\theta'_\epsilon(w_1-w_2)dxdy.$$

Afirmamos que vale a seguinte igualdade

$$(w_1-w_2)\theta'_\epsilon(w_1-w_2)(\nabla w_1-\nabla w_2)=\nabla[\gamma_\epsilon(w_1-w_2)], \tag{3.11}$$

onde $\gamma_\epsilon(t)=\int_0^t s\theta'_\epsilon(s)ds$. Supondo que (3.11) ocorre, segue

$$\begin{aligned}\int_\Omega w_1w_2\Big(\frac{f(w_2)}{w_2}-\frac{f(w_1)}{w_1}\Big)\theta_\epsilon(w_1-w_2)dx \leq I_1 &= \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle\nabla w_1,\nabla\gamma_\epsilon(w_1-w_2)\rangle dxdy\\ &\leq \int_\Omega f(w_1)\gamma_\epsilon((w_1-w_2))dxdy.\end{aligned}$$

Desde que $0\leq\gamma_\epsilon\leq\epsilon$, então

$$\int_\Omega w_1w_2\Big(\frac{f(w_2)}{w_2}-\frac{f(w_1)}{w_1}\Big)\theta_\epsilon(w_1-w_2)dx \leq \epsilon\int_\Omega f(w_1)dx = c\epsilon.$$

Logo,

$$\begin{aligned}&\int_{[w_1\leq w_2]} w_1w_2\Big(\frac{f(w_2)}{w_2}-\frac{f(w_1)}{w_1}\Big)\theta_\epsilon(w_1-w_2)dx+\\ &\qquad+\int_{[w_1>w_2]} w_1w_2\Big(\frac{f(w_2)}{w_2}-\frac{f(w_1)}{w_1}\Big)\theta_\epsilon(w_1-w_2)dx \leq c\epsilon.\end{aligned}$$

Observe que em $[w_1\leq w_2]$ temos $\theta_\epsilon(w_1-w_2)\equiv 0$. Assim,

$$\int_{[w_1>w_2]} w_1w_2\Big(\frac{f(w_2)}{w_2}-\frac{f(w_1)}{w_1}\Big)\theta_\epsilon(w_1-w_2)dx \leq c\epsilon.$$

Em $[w_1>w_2]$ temos

$$w_1w_2\Big(\frac{f(w_2)}{w_2}-\frac{f(w_1)}{w_1}\Big)\theta_\epsilon(w_1-w_2)\geq 0,$$

além disso, quando $\epsilon\to 0$, obtemos

$$w_1w_2\Big(\frac{f(w_2)}{w_2}-\frac{f(w_1)}{w_1}\Big)\theta_\epsilon(w_1-w_2)\longrightarrow w_1w_2\Big(\frac{f(w_2)}{w_2}-\frac{f(w_1)}{w_1}\Big).$$

Então, pelo teorema da convergência Monótona, segue que

$$\int_{[w_1>w_2]} w_1 w_2\Big(\frac{f(w_2)}{w_2}-\frac{f(w_1)}{w_1}\Big)dx \leq 0.$$

Sendo $\frac{f(w_2)}{w_2}-\frac{f(w_1)}{w_1}\geq 0$ em $[w_1>w_2]$, temos $med[w_1>w_2]=0$. Então,

$$w_1 \leq w_2, \quad \text{em } \Omega. \tag{3.12}$$

Por fim, sendo w_1 e w_2 sub e supersolução, segue que

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla(w_1-w_2),\nabla\varphi\rangle dxdy \leq \int_\Omega \big(f(w_1)-f(w_2)\big)\varphi\, dx \leq \int_\Omega \big|f(w_1)-f(w_2)\big|\varphi\, dx$$

para toda função $\varphi\in X_0^\alpha(C_\Omega)$ com $\varphi\geq 0$. Em particular, para $\varphi=(w_1-w_2)^+$, temos

$$\begin{aligned}\|(w_1-w_2)^+\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)} &= \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla(w_1-w_2),\nabla(w_1-w_2)^+\rangle dxdy\\ &\leq \int_\Omega \big|f(w_1)-f(w_2)\big|(w_1-w_2)^+\, dx = 0. \quad (\text{ ver } (3.12))\end{aligned}$$

Portanto, $(w_1-w_2)^+\equiv 0$, ou seja, $w_1-w_2=-(w_1-w_2)^-\leq 0$ em C_Ω.

■

3.2 Regularidade do Tipo Brézis e Kato

Agora, apresentamos um resultado de regularidade para não linearidades que satisfazem o crescimento dado por (3.5).

Proposição 3.5 *Suponha que f satisfaz* (3.5) *com $p<\frac{N+\alpha}{N-\alpha}$ e considere $u\in X_0^\alpha(C_\Omega)$ uma solução energia para o problema* (3.4). *Então $u\in L^\infty(C_\Omega)\cap C^\gamma(\overline{C}_\Omega)$ para algum $0<\gamma<1$.*

Demonstração: Assumiremos que $u\geq 0$, pois, a parte negativa segue o mesmo raciocínio. Consideremos a função teste $\varphi=u^{\beta-p}\in X_0^\alpha(C_\Omega)$, para $\beta>p+1$. Então, sendo u solução de (3.4), temos

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle\nabla u,\nabla(u^{\beta-p})\rangle dxdy = \int_\Omega f(u(x,0))u^{\beta-p}(x,0)dx.$$

Pelo crescimento (3.5), temos

$$\begin{aligned}\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle\nabla u,\nabla(u^{\beta-p})\rangle dxdy &\leq C\int_\Omega u^{\beta-p}(x,0)\big(1+u^p(x,0)\big)dx\\ &\leq C\int_\Omega u^{\beta-p}(x,0)dx+\int_\Omega u^{\beta-p}(x,0)dx \qquad (3.13)\\ &\leq C'\int_\Omega u^{\beta-p}(x,0)dx.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla u, \nabla (u^{\beta-p})\rangle dxdy = (\beta-p)\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}u^{\beta-p-1}|\nabla u|^2 dxdy$$
$$= (\beta-p)\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|u^{\frac{\beta-p-1}{2}}\nabla u|^2 dxdy$$

Como

$$\nabla u^{\frac{\beta-p+1}{2}} = \frac{\beta-p+1}{2}u^{\frac{\beta-p-1}{2}}\nabla u,$$

então

$$\begin{aligned}\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla u, \nabla (u^{\beta-p})\rangle dxdy &= 2(\beta-p)(\beta-p+1)\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla (u^{\frac{\beta-p+1}{2}})|^2 dxdy \\ &\geq M\left(\int_\Omega u^{(\beta-p+1)\frac{N}{N-\alpha}}(x,0)dx\right)^{\frac{N}{N-\alpha}},\end{aligned} \tag{3.14}$$

onde $M>0$. Comparando (3.13) e (3.14), obtemos

$$\left(\int_\Omega u^{(\beta-p+1)\frac{N}{N-\alpha}}(x,0)dx\right)^{\frac{N}{N-\alpha}} \leq M'\int_\Omega u^\beta(x,0)dx,$$

onde $M'>0$ Essa estimativa nos permite obter o seguinte processo interativo

$$\|u(\cdot,0)\|_{L^{\beta_{j+1}}(\Omega)} \leq \|u\|_{L^{\beta_j}(\Omega)}^{\beta_j/(\beta_j-p+1)},$$

com $\beta_{j+1} = \frac{N}{N-\alpha}(\beta_j+1-p)$. Para ter $\beta_{j+1}>\beta_j$ e precisamos ter $\beta_j > \frac{(p-1)N}{\alpha}$.

Desde que $u(\cdot,0)\in L^{2^*_\alpha}(\Omega)$, partimos de $\beta_0 = \frac{2N}{(N-\alpha)}$ e como $p<\frac{N+\alpha}{N-\alpha}$, obtemos $\beta_j > \frac{(p-1)N}{\alpha}$. Diante de um número finito de passos, conseguimos para $g(x)=f(u(x,0))$, a regularidade $g\in L^r(\Omega)$ para algum $r>\frac{N}{\alpha}$, visto que, podemos fazer o processo iterativo e f tem crescimento subcrítico. Agora, o resultado segue como consequência do Teorema 2.11 e do item *i)* do Teorema 2.13.

■

3.3 Existência de Solução

Nesta seção, mostraremos o Teorema 3.1 em termos da solução de (P_λ). Para facilitar a leitura, dividiremos a sua demonstração em lemas.

Lema 3.6 *Seja Λ definido por*

$$\Lambda = Sup\{\lambda>0 \ : \ \textit{o problema } (P_\lambda) \textit{ tem uma solução}\}.$$

Então, $0<\Lambda<\infty$.

Demonstração: Sejam $\mu_1^{\frac{\alpha}{2}}$ e φ_1 o primeiro autovalor e a autofunção associada do operador $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$, isto é

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\alpha/2}\varphi_1 = & \mu_1^{\frac{\alpha}{2}}\varphi_1 \quad , \quad \text{em } \Omega \\ \varphi_1 = & 0 \qquad , \quad \text{em } \partial\Omega \end{cases}.$$

Consideremos ψ a única solução positiva do problema

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla\psi) = & 0 \qquad , \quad \text{em } C_\Omega \\ \psi = & 0 \qquad , \quad \text{sobre } \partial_L C_\Omega \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\nu^\alpha} = & \mu_1^{\frac{\alpha}{2}}\varphi_1 \quad , \quad \text{em } \Omega \end{cases} \tag{3.15}$$

isto é,

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle\nabla\phi, \nabla\psi\rangle dxdy = \mu_1^{\frac{\alpha}{2}} \int_\Omega \phi(x,0)\varphi_1(x)dx, \tag{3.16}$$

para todo $\phi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. Seja λ tal que (P_λ) tem solução u, então

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle\nabla u, \nabla\varphi\rangle dxdy = \int_\Omega (\lambda(u(x,0))^q + (u(x,0))^p)\varphi(x,0)dx, \ \forall\varphi \in X_0^\alpha(C_\Omega) \ ,$$

em particular,

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle\nabla u, \nabla\psi\rangle dxdy = \int_\Omega (\lambda(u(x,0))^q + (u(x,0))^p)\varphi_1(x,0)dx \ . \tag{3.17}$$

Fazendo $\phi = u$ em (3.16), obtemos

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle\nabla u, \nabla\psi\rangle dxdy = \mu_1^{\frac{\alpha}{2}} \int_\Omega u(x,0)\varphi_1(x,0)dx. \tag{3.18}$$

Substituindo (3.18) em (3.17), ficamos com

$$\int_\Omega (\lambda(u(x,0))^q + (u(x,0))^p)\varphi_1(x,0)dx = \mu_1^{\frac{\alpha}{2}} \int_\Omega u(x,0)\varphi_1(x,0)dx. \tag{3.19}$$

Desde que existem constantes $c, \delta > 0$ tais que

$$\lambda t^q + t^p > c\lambda^\delta t \ , \quad \forall \ t > 0. \tag{3.20}$$

Então, comparando (3.19), (3.20), obtemos

$$c\lambda^\delta < \mu_1^{\frac{\alpha}{2}} \quad \Rightarrow \quad \lambda < \sqrt[\delta]{\frac{\mu_1^{\frac{\alpha}{2}}}{c}} \ .$$

Portanto, $\Lambda < +\infty$.

Mostraremos que $\Lambda > 0$. Seja g a única solução do problema

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla g) = & 0 \quad , \quad \text{em } C_\Omega \\ g = & 0 \quad , \quad \text{sobre } \partial_L C_\Omega \\ \dfrac{\partial g}{\partial \nu^\alpha} = & 1 \quad , \quad \text{em } \Omega \end{cases} , \tag{3.21}$$

que existe, basta ver $(A.1)$. Afirmamos que existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para todo $0 < \lambda \leq \lambda_0$, podemos encontrar $M = M(\lambda) > 0$, satisfazendo

$$M \geq \lambda M^q \|g\|^q_{L^\infty(\Omega)} + M^p \|g\|^p_{L^\infty(\Omega)}. \tag{3.22}$$

De fato, a desigualdade acima é equivalente a

$$1 \geq \lambda M^{q-1} \|g\|^q_{L^\infty(\Omega)} + M^{p-1} \|g\|^p_{L^\infty(\Omega)},$$

daí, defina

$$\begin{array}{rcll} f : (0,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ M & \longmapsto & f(M) & = \lambda M^{q-1} \|g\|^q_{L^\infty(\Omega)} + M^{p-1} \|g\|^p_{L^\infty(\Omega)} . \end{array}$$

Sendo assim, desejamos $f(M) \leq 1$. O mínimo de f ocorre num ponto M dado por

$$M(\lambda) := M = \lambda^{\frac{1}{p-q}} \left(\frac{1-q}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-q}} \|g\|^{-1}_{L^\infty(\Omega)} .$$

Além disso,

$$f(M(\lambda)) \longrightarrow 0 \quad \text{quando } \lambda \searrow 0 .$$

Logo, existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \lambda_0]$, temos $f(M(\lambda)) \leq 1$. Como consequência, vemos que Mg é uma supersolução para (P_λ). De fato, sabemos que

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha} \langle \nabla g, \nabla \psi \rangle dxdy = \int_\Omega \psi(x,0)dx, \quad \forall \psi \in X_0^\alpha(C_\Omega),$$

pois g é solução de (3.21), assim, de (3.22)

$$\begin{aligned} \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha} \langle \nabla Mg, \nabla \psi \rangle dxdy &= \int_\Omega M\psi(x,0)dx \\ &\geq \int_\Omega (\lambda (Mg)^q(x,0) + (Mg)^p(x,0))\psi dx \\ &\geq \int_\Omega \lambda (Mg)^q(x,0)\psi(x,0)dx \end{aligned} \tag{3.23}$$

para todo $\psi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ com $\psi \geq 0$. Provando que Mg é supersolução de (P_λ).

Por outro lado, ainda por (3.16)

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle\nabla\psi,\nabla v\rangle dxdy = \int_\Omega \mu_1^{\frac{\alpha}{2}}\varphi_1(x,0)v(x,0)dx\ , \quad \forall\, v\in X_0^\alpha(C_\Omega). \tag{3.24}$$

Então, considere $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon^{1-q}\varphi_1^{1-q} \leq \epsilon^{1-q}\|\varphi_1\|_{L^\infty(\Omega)}^{1-q} \leq \frac{\lambda}{\mu_1^{\frac{\alpha}{2}}}\ .$$

Logo,

$$\mu_1^{\frac{\alpha}{2}}\epsilon^{1-q}\varphi_1^{1-q} \leq \lambda\ ,$$

ou seja,

$$\mu_1^{\frac{\alpha}{2}}\epsilon\varphi_1 \leq \lambda\epsilon^q\varphi_1^q\ .$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle\nabla\epsilon\psi,\nabla v\rangle dxdy &= \int_\Omega \mu_1^{\frac{\alpha}{2}}\epsilon\varphi_1(x,0)v(x,0)dx \\ &\leq \int_\Omega \lambda\epsilon^q\varphi_1^q(x,0)v(x,0)\,dx \\ &\leq \int_\Omega (\lambda\epsilon^q\varphi_1^q(x,0)+\epsilon^p\varphi_1^p(x,0))v(x,0)\,dx\end{aligned} \tag{3.25}$$

para todo $v \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ com $v \geq 0$. Donde, concluímos que $\epsilon\psi$ é subsolução de (P_λ). Diminuindo $\epsilon > 0$ se necessário, vemos que $\epsilon\psi \leq Mg$. De fato, por (3.25) e (3.23) segue que $\epsilon\psi$ e Mg são subsolução e supersolução, respectivamente, para o problema (3.4) com $f(s) = \lambda s^q$. Então pela Proposição 3.4, segue que $\epsilon\psi \leq Mg$ em C_Ω. Pela Proposição 3.3, concluímos que existe uma solução u_λ de (P_λ) tal que $\epsilon\psi \leq u_\lambda \leq Mg$, para $\lambda \leq \lambda_0$. Da definição de Λ, segue que $0 < \lambda_0 \leq \Lambda$.

■

Lema 3.7 *Para todo $0 < \lambda < \Lambda$, o problema (P_λ) tem uma solução.*

Demonstração: Da definição de Λ segue que existe uma sequência (λ_k) de parâmetros reais tal que $\lambda_k \nearrow \Lambda$ e (P_{λ_k}) tem uma solução. Dado $\lambda < \Lambda$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda < \lambda_k < \Lambda$. Seja u_{λ_k} a solução de (P_{λ_k}), então

$$\begin{aligned}\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle\nabla u_{\lambda_k},\nabla\varphi\rangle dxdy &= \int_\Omega (\lambda_k(u_{\lambda_k}(x,0))^q + (u_{\lambda_k}(x,0))^p)\varphi(x,0)dx \\ &\geq \int_\Omega (\lambda(u_{\lambda_k}(x,0))^q + (u_{\lambda_k}(x,0))^p)\varphi(x,0)dx\end{aligned} \tag{3.26}$$

para todo $\varphi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ com $\varphi \geq 0$. Portanto, u_{λ_k} é uma supersolução de (P_λ). Análogo ao lema (3.7), existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon\psi \leq u_{\lambda_k} \ \text{ em } \ C_\Omega$$

e $\epsilon\psi$ é uma subsolução de (P_λ). Então, pelo proposição (3.3) o problema (P_λ) tem uma solução.

■

Definição 3.8 *Dizemos que $u \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ é solução minimal de (P_λ) se, $u \leq v$ em C_Ω para toda solução de (P_λ).*

Lema 3.9 *Para todo $0 < \lambda < \Lambda$, o problema (P_λ) tem uma solução minimal.*

Demonstração: Dado $\lambda \in (0, \Lambda)$, considere v_λ a única solução positiva do problema $(A.3)$, em particular, é subsolução para (3.4), com $f(t) = \lambda t^q$. Agora, considere u_λ uma solução de (P_λ) para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$. Nota-se que u_λ é supersolução para (3.4) também com $f(t) = \lambda t^q$, segue da Proposição 3.4 que $v_\lambda \leq u_\lambda$ em $\overline{C_\Omega}$. Vamos considerar v_1 uma solução do problema

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla v) = 0 & , \text{ em } C_\Omega \\ v = 0 & , \text{ sobre } \partial_L C_\Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu^\alpha} = \lambda v_0^q + v_0^p & , \text{ em } \Omega \end{cases} \tag{3.27}$$

onde $v_0 = v_\lambda$. Segue do princípio de comparação que $v_0 \leq v_1$ em C_Ω. Construímos indutivamente uma sequência $\{v_n\}$ que satisfaz

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla v_n) = 0 & , \text{ em } C_\Omega \\ v_n = 0 & , \text{ sobre } \partial_L C_\Omega \\ \dfrac{\partial v_n}{\partial \nu^\alpha} = \lambda v_{n-1}^q + v_{n-1}^p & , \text{ em } \Omega \end{cases} \tag{3.28}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ com

$$v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \cdots \leq v_n \leq \cdots \leq u_\lambda \quad \text{em } \overline{C_\Omega} \tag{3.29}$$

e

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla v_n, \nabla \varphi \rangle dxdy = \int_\Omega (\lambda v_{n-1}(x,0)^q + v_{n-1}(x,0)^p)\varphi(x,0)dx$$

para todo $\varphi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. Fazendo $\varphi = v_n$, obtemos

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla v_n|^2 dxdy = \int_\Omega (\lambda v_{n-1}(x,0)^q + v_{n-1}(x,0)^p)v_n(x,0)dx. \tag{3.30}$$

Por (3.29) e (3.30), temos que

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla v_n|^2 dxdy = \int_\Omega \lambda u_\lambda(x,0)^{q+1} + u_\lambda(x,0)^{p+1}dx \leq C$$

onde C é uma constante positiva. Portanto, (v_n) é uma sequência limitada em $X_0^\alpha(C_\Omega)$, então a menos de subsequência, existe $v \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ tal que

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } X_0^\alpha(C_\Omega) \quad \text{e} \quad v_n(\cdot,0) \to v(\cdot,0) \text{ em } L^r(\Omega)$$

para $1 \leq r < \frac{2N}{N-\alpha}$. Por construção $v > 0$ em $\Omega \times [0,\infty)$. Agora, mostraremos que v é solução para o problema (P_λ). Segue da convergência fraca e das propriedades de produto interno que

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla v_n, \nabla \phi\rangle dxdy \longrightarrow \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla v, \nabla \phi\rangle dxdy \tag{3.31}$$

para todo $\phi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$.

Por outro lado, como $v_n(\cdot,0) \to v(\cdot,0)$ em $L^r(\Omega)$ para todo $1 \leq r \leq 2_\alpha^*$, a menos de subsequência, existe $h \in L^r(\Omega)$ tal que

$$v_n(x,0) \longrightarrow v(x,0) \quad \text{e} \quad |v_n(x,0)| \leq h(x,0) \text{ q.t.p. em } \Omega\,. \tag{3.32}$$

Portanto, para todo $\phi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$, temos

$$(\lambda v_n^q(x,0) + v_n^p(x,0))|\phi(x,0)| \longrightarrow (\lambda v^q(x,0) + v^p(x,0))|\phi(x,0)| \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$\begin{aligned}(\lambda v_n^q(x,0) + v_n^p(x,0))|\phi(x,0)| &\leq (\lambda h^q(x,0) + h^p(x,0))|\phi(x,0)| \\ &= \lambda h^q(x,0)|\phi(x,0)| + h^p(x,0)|\phi(x,0)|\,,\end{aligned}$$

como $g(x) = \lambda h^q(x,0)|\phi(x,0)| + h^p(x,0)|\phi(x,0)| \in L^1(\Omega)$, segue do teorema da convergência dominada

$$\int_\Omega (\lambda v_n^q(x,0) + v_n^p(x,0))|\phi(x,0)|dx \longrightarrow \int_\Omega (\lambda v^q(x,0) + v^p(x,0))|\phi(x,0)|dx\,. \tag{3.33}$$

Sabendo que

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla v_n, \nabla \psi\rangle dxdy = \int_\Omega (\lambda v_{n-1}^q + v_{n-1}^p)|\varphi(x)|dx \tag{3.34}$$

então, segue de (3.31), (3.33) e (3.34) que v é solução para o problema (P_λ). Pela arbitrariedade de u_λ, concluímos que v é minimal.

■

Daqui por diante, denotaremos a solução mínima de (P_λ) por u_λ.

Lema 3.10 *As soluções são crescentes com relação a λ.*

Demonstração: Sejam $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \Lambda$ e u_{λ_1} a solução minimal de (P_{λ_1}), então

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla u_{\lambda_1}, \nabla \psi\rangle dxdy = \int_\Omega (\lambda_1 u_{\lambda_1}^q + u_{\lambda_1}^p)\psi(x,0)dx \geq \int_\Omega (\lambda_2 u_{\lambda_1}^q + u_{\lambda_1}^p)\psi(x,0)dx,$$

ou seja, u_{λ_1} é uma supersolução para (P_{λ_2}). Como no Lema 3.6, encontramos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que $\epsilon\psi$ é subsolução, onde ψ é solução para o problema

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla\psi) = 0 & , \text{ em } C_\Omega \\ \psi = 0 & , \text{ sobre } \partial_L C_\Omega \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\nu^\alpha} = \mu_1^{\frac{\alpha}{2}}\varphi_1 & , \text{ em } \Omega \end{cases} .$$

Pela Proposição 3.3, existe uma solução v para o problema (P_{λ_2}) tal que

$$\epsilon\psi \leq v \leq u_{\lambda_1}.$$

Sendo u_{λ_2} a solução minimal de (P_{λ_2}), segue que

$$u_{\lambda_2} \leq v \leq u_{\lambda_1}.$$

Pelo princípio do máximo, ver Teorema D.2, segue que $u_{\lambda_2} < u_{\lambda_1}$, ou seja, as soluções minimais são crescente com relação a λ.

■

Seguindo as ideias de Huang [36], estudaremos a existência de um mínimo para o funcional

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega u^{q+1}dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega u^{p+1}dx.$$

no conjunto

$$G_\lambda = \{u \in X_0^\alpha(C_\Omega) : 0 \leq u \leq u_\lambda \text{ em } C_\Omega \text{ e } 0 \leq u(\cdot,0) \leq u_\lambda(\cdot,0) \text{ em } \Omega\}$$

e $\lambda \in (0,\Lambda)$. A existência do dito mínimo é comprovada conforme feito na Proposição 3.3. Digamos que $\bar{u}_\lambda$ seja esse mínimo.

Considere v_0 a única solução positiva para o problema

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla v_0) = & 0 \quad , \text{ em } C_\Omega \\ v_0 = & 0 \quad , \text{ sobre } \partial_L C_\Omega \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial \nu^\alpha} = & v_0^q \quad , \text{ em } \Omega \end{cases}.$$

Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que $J_\lambda(\epsilon v_0) < 0$ e $\epsilon v_0 \in G_\lambda$, ou seja $\bar{u}_\lambda$. Do mesma maneira que é feita na Proposição 3.3, temos que $\bar{u}_\lambda$ é uma solução para (P_λ). Como u_λ é minimal, então $u_\lambda \leq \bar{u}_\lambda$. Portanto $u_\lambda = \bar{u}_\lambda$.

Desde que $u_\lambda \in G_\lambda$, para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega \times [0,\infty))$ com $\phi \geq 0$, existe $\gamma > 0$ tal que, para todo $0 < \epsilon < \gamma$, temos $u_\lambda - \epsilon\phi \in G_\lambda$ e com isso

$$J_\lambda(u_\lambda - \epsilon\phi) - J_\lambda(u_\lambda) \geq 0.$$

Para ver que tal escolha pode ser feita, basta notar que

$$u_\lambda - \epsilon\phi = \begin{cases} u_\lambda - \epsilon\phi, & \text{em } K \\ u_\lambda \quad , & \text{em } C_\Omega \setminus K \end{cases}$$

onde $K = Supt\ \phi$ e $\epsilon < \gamma = \dfrac{\min_K u_\lambda}{\max_K \phi}$, logo $0 \leq u_\lambda - \epsilon\phi \leq u_\lambda$. Expandindo em ϵ, obtemos

$$0 \leq J_\lambda(u_\lambda - \epsilon\phi) - J_\lambda(u_\lambda) = \epsilon J_\lambda'(u_\lambda)\phi - \frac{\epsilon^2}{2}J_\lambda''(u_\lambda)\phi^2 + o(\epsilon^2) = \frac{\epsilon^2}{2}J_\lambda''(u_\lambda)\phi^2 + o(\epsilon^2).$$

Consequentemente, $J_\lambda''(u_\lambda)\phi^2 \geq 0$ para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega \times [0,\infty))$, com $\phi \geq 0$. Agora, escrevendo $\phi = \phi^+ - \phi^-$ para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega \times [0,\infty))$, temos que $J_\lambda''(u_\lambda)\phi^2 \geq 0$. O que implica

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla\phi|^2 dxdy \geq \int_\Omega (q\lambda u_\lambda^{q-1} + p u_\lambda^{p-1})|\phi|^2 dx, \tag{3.35}$$

para todo $\phi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$.

Lema 3.11 *O problema (P_λ) tem pelo menos uma solução quando $\lambda = \Lambda$.*

Demonstração: Seja λ_n uma sequência tal que $\lambda_n \nearrow \Lambda$. Denotamos por $u_n = u_{\lambda_n}$ a solução minimal do problema (P_{λ_n}). Vejamos que $J_{\lambda_n}(u_n) < 0$. De fato, recorde que

$$J_{\lambda_n}(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - \frac{\lambda_n}{q+1}\|u_n(\cdot,0)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} - \frac{1}{p+1}\|u_n(\cdot,0)\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \tag{3.36}$$

Sendo, u_n solução minimal de (P_λ), temos

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla u_n, \nabla \phi\rangle dxdy = \int_\Omega (\lambda_n u_n^q(x,0) + u_n^p(x,0))\phi(x,0)dx\ . \tag{3.37}$$

para todo $\phi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. Daí,

$$\|u_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} = \lambda_n\|u_n(\cdot,0)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} + \|u_n(\cdot,0)\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)}\ . \tag{3.38}$$

Obtemos de (3.35), para $\phi = u_n$, a seguinte desigualdade

$$\|u_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - \lambda_n\|u_n(\cdot,0)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} - \|u_n(\cdot,0)\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \geq 0\ . \tag{3.39}$$

Substituindo (3.38) em (3.36), obtemos

$$\begin{aligned} J_{\lambda_n}(u_n) = {} & \frac{1}{2}\left(\lambda_n\|u_n(\cdot,0)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} + \|u_n(\cdot,0)\|_{L^{p+1}(\Omega)}\right) \\ & - \frac{\lambda_n}{q+1}\|u_n(\cdot,0)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} - \frac{1}{p+1}\|u_n(\cdot,0)\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \end{aligned} \tag{3.40}$$

Agora, combinando (3.38) e (3.39), ficamos com

$$\lambda_n\|u_n(\cdot,0)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} + \|u_n(\cdot,0)\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} - \lambda_n q\|u_n(\cdot,0)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} - p\|u_n(\cdot,0)\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \geq 0\ ,$$

isto é,

$$\lambda_n(1-q)\|u_n(\cdot,0)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} - (p-1)\|u_n(\cdot,0)\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \geq 0\ . \tag{3.41}$$

Assim,

$$\|u_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \leq \lambda_n\frac{(1-q)}{(p-1)}\|u_n\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)};. \tag{3.42}$$

De (3.40) e (3.42), temos

$$J_{\lambda_n}(u_n) \leq \lambda_n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\|u_n(\cdot,0)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} + \lambda_n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\left(\frac{1-q}{p-1}\right)\|u_n(\cdot,0)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}. \tag{3.43}$$

Veja que

$$\lambda_n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\|u_n(\cdot,0)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} + \lambda_n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\left(\frac{1-q}{p-1}\right)\|u_n(\cdot,0)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} < 0 \tag{3.44}$$

se, e somente se,

$$\lambda_n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\left(\frac{1-q}{p-1}\right)<\lambda_n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1}\right) \ , \tag{3.45}$$

que é equivalente

$$\frac{1}{p+1}<\frac{1}{q+1} \ . \tag{3.46}$$

O que é verdadeira pelo fato de que $0<q<1<p$. Portanto, $J_{\lambda_n}(u_n)<0$. Desde que

$$\|u_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)}-\lambda_n\|u_n(\cdot,0)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}-\|u_n(\cdot,0)\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)}=0 \ . \tag{3.47}$$

então, substituindo (3.47) em (3.36), obtemos

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\|u_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)}-\lambda_n\left(\frac{1}{q+1}-\frac{1}{p+1}\right)\|u_n(\cdot,0)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}<0 \ . \tag{3.48}$$

Da imersão contínua $X_0^\alpha(C_\Omega)\hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ e da convergência $\lambda_n\nearrow\Lambda$, temos

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\|u_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)}-\Lambda M\left(\frac{1}{q+1}-\frac{1}{p+1}\right)\|u_n\|^{q+1}_{X_0^\alpha(C_\Omega)}<0 \ . \tag{3.49}$$

Portanto, existe $C>0$ tal que

$$\|u_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)}<C$$

Sendo, assim, existe $u\in X_0^\alpha(C_\Omega)$ tal que, a menos de subsequência

$$u_n\rightharpoonup u \quad \text{em } X_0^\alpha(C_\Omega) \ . \tag{3.50}$$

Como $X_0^\alpha(C_\Omega)$ está imerso compactamente em $L^s(\Omega)$ para $1\le s<2^*_\alpha$, obtemos

$$u_n(\cdot,0)\longrightarrow u(\cdot,0) \quad \text{em } L^s(\Omega)\ , 1\le s<2^*_\alpha \ ,$$

de onde decorre que

$$u_n(x,0)\longrightarrow u(x,0) \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

e existe $h\in L^s(\Omega)\ , 1\le s<2^*_\alpha$ tal que

$$|u_n(x,0)|\le h(x,0) \quad \text{q.t.p. em } \Omega \ .$$

A convergência (3.50) implica que

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle\nabla u_n,\nabla\phi\rangle dxdy\longrightarrow\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle\nabla u,\nabla\phi\rangle dxdy \ , \quad \forall\ \phi\in X_0^\alpha(C_\Omega) \ . \tag{3.51}$$

Além disso, estamos em condições de aplicar o teorema da convergência Dominada de Lebesgue e com isso concluir que vale a seguinte convergência

$$\int_{\Omega}(\lambda_n u_n^q(x,0) + u_n^p(x,0))\phi(x,0)dx \longrightarrow \int_{\Omega}(\Lambda u^q(x,0) + u^p(x,0))\phi(x,0)dx \ , \qquad (3.52)$$

para todo $\phi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. De onde segue que

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla u, \nabla \phi \rangle dxdy = \int_{\Omega}(\Lambda u^q + u^p)\phi dx \ , \quad \forall\ \phi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$$

e, portanto, u é solução para (P_λ) quando $\lambda = \Lambda$.

■

Lema 3.12 *Para todo $\lambda > \Lambda$, o problema (P_λ) não tem solução.*

Demonstração: Sabemos que $\Lambda = supA$, onde $A = \{\lambda > 0 : (P_\lambda)$ tem solução $\}$. Suponha que existe $\tilde{\lambda} > \Lambda$, tal que $(P_{\tilde{\lambda}})$ tem solução. Então $\tilde{\lambda} \in A$ o que contradiz o fato de $\Lambda = supA$.

■

Capítulo 4

Multiplicidade de Solução para um Problema do Tipo Côncavo e Convexo

Ainda com base no artigo da Brandle, Colorado, Pablo e Sánchez em [11], mostraremos a existência de uma segunda solução para o problema (3.1) com relação as soluções do problema (P_λ), para todo $0 < \lambda < \Lambda$. Mas, antes disso, veremos que a solução encontrado no capítulo anterior é um mínimo local do funcional associado, J_λ.

4.1 Lema Preliminar

Seja $\lambda_0 \in (0, \Lambda)$ e considere $\lambda_0 < \lambda_1 < \Lambda$. Tome $\phi_0 = w_{\lambda_0}$, $\phi_1 = w_{\lambda_1}$, as soluções minimais para o problema (P_λ) com $\lambda = \lambda_0$ e $\lambda = \lambda_1$, já vimos no capítulo anterior que $\phi_0 \leq \phi_1$ em $\overline{C_\Omega}$. Defina

$$M = \{w \in X_0^\alpha(C_\Omega) : 0 \leq w(x,y) \leq \phi_1(x,y) \text{ em } C_\Omega \text{ e } 0 \leq w(x,0) \leq \phi_1(x,0) \text{ em } \Omega\}.$$

Como mostrado na Proposição 3.3, M é um subconjunto fechado e convexo de $X_0^\alpha(C_\Omega)$. Logo M é fracamente fechado. Além disso, J_{λ_0} é fracamente semicontínuo inferiormente e coercivo. Portanto, pelo Teorema C.5, existe $w_0 \in M$ tal que

$$J_{\lambda_0}(w_0) = \inf_{w \in M} J_{\lambda_0}(w)\ .$$

Seja v_0 a única solução positiva para o problema $(A.3)$ com $\lambda = 1$. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que $J_{\lambda_0}(\epsilon v_0) < 0$, $\epsilon v_0 \in M$ e então $w_0 \neq 0$. Portanto,

$J_{\lambda_0}(w_0) < 0$. Assim como na proposição (3.3), podemos justificar que w_0 é solução de (P_{λ_0}). Se $w_0 \neq w_{\lambda_0}$, então o resultado fica provado. Agora, se acontecer $w_0 \equiv w_{\lambda_0}$, vamos justificar que w_0 é um mínimo local de J_{λ_0}. Diante disso, enunciaremos o seguinte lema.

Lema 4.1 *A solução minimal w_0 é um mínimo local de J_{λ_0}.*

Demonstração: Suponha que w_0 não é um mínimo local de J_{λ_0} em $X_0^\alpha(C_\Omega)$. Então, existe uma sequência $\{v_n\} \subset X_0^\alpha(C_\Omega)$ tal que

$$\|v_n - w_0\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)} \to 0 \;\text{ e }\; J_{\lambda_0}(v_n) < J_{\lambda_0}(w_0). \tag{4.1}$$

Seja $w_n = (v_n - \phi_1)^+$ e $z_n = \max\{0, \min\{v_n, \phi_1\}\}$. Note que, $z_n \in M$ e

$$z_n(x,y) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } v_n(x,y) \leq 0 \\ v_n(x,y) & , \text{ se } 0 \leq v_n(x,y) \leq \phi_1(x,y) \\ \phi_1(x,y) & , \text{ se } \phi_1(x,y) \leq v_n(x,y) \end{cases}$$

Daí, considere os seguintes conjuntos

$$T_n = \{(x,y) \in C_\Omega : z_n(x,y) = v_n(x,y)\}, \quad S_n = supp(w_n) \quad ,$$
$$\tilde{T}_n = \overline{T}_n \cap \Omega, \quad \tilde{S}_n = S_n \cap \Omega$$

Note que $supt(v_n^+) = T_n \cup S_n$. Vejamos que

$$|\tilde{S}_n|_\Omega \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty. \tag{4.2}$$

De fato, dado $\epsilon > 0$ e para $\delta > 0$, consideramos

$$E_n = \{x \in \Omega : v_n(x,0) \geq \phi_1(x,0) \text{ e } \phi_1(x,0) > w_0 + \delta\},$$
$$F_n = \{x \in \Omega : v_n(x,0) \geq \phi_1(x,0) \text{ e } \phi_1(x,0) \leq w_0 + \delta\}$$

Usando o fato de que

$$\begin{aligned} 0 = |\{x \in \Omega : \phi_1(x,0) < w_0(x,0)\}| &= |\bigcap_{j=1}^{\infty} \{x \in \Omega : \phi_1(x,0) \leq w_0(x,0) + \frac{1}{j}\}| \\ &= \lim_{y \to 0} |\{x \in \Omega : \phi_1(x,0) \leq w_0(x,0) + \frac{1}{j}\}| \end{aligned}$$

obtemos, para j_0 suficientemente grande, que se $\delta < \frac{1}{j_0}$, então

$$|\{x \in \Omega : \phi_1(x,0) \leq w_0(x,0) + \frac{1}{j}\}| \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

Assim, concluímos que $|F_n|_\Omega \le \frac{1}{2}\epsilon$. Desde que $\|v_n - w_0\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)} \to 0$ quando $n \to \infty$, em particular $\|v_n - w_0\|_{L^2(\Omega)} \to 0$, daí, para $n \ge n_0$, temos

$$\frac{1}{2}\delta^2\epsilon \ge \int_\Omega |v_n - w_0|^2 dx \ge \int_{E_n} |v_n - w_0|^2 dx \ge \delta^2 |E_n|_\Omega \ ,$$

ou seja, $|E_n|_\Omega \le \frac{1}{2}\epsilon$. Desde que $\tilde{S}_n \subset F_n \cup E_n$, concluímos que $|\tilde{S}_n|_\Omega \le \epsilon$ para $n \ge n_0$. Assim, $|\tilde{S}_n|_\Omega \to 0$ quando $n \to 0$.

Note que

$$\begin{aligned}
J_{\lambda_0}(v_n) =& \frac{1}{2}\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla v_n|^2 dxdy - \int_\Omega F_{\lambda_0}(v_n(x,0))dx \\
=& \frac{1}{2}\int_{T_n} y^{1-\alpha}|\nabla z_n|^2 dxdy - \int_{\tilde{T}_n} F_{\lambda_0}(z_n(x,0))dx + \frac{1}{2}\int_{S_n} y^{1-\alpha}|\nabla v_n|^2 dxdy \\
& - \int_{\tilde{S}_n} F_{\lambda_0}(v_n(x,0))dx + \frac{1}{2}\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla v_n^-|^2 dxdy
\end{aligned}$$

Como, $w_n = \max\{0, w_n - \phi_1\}$, então $w_n = 0$ ou $w_n = v_n - \phi_1$. Daí,

$$\begin{aligned}
J_{\lambda_0}(v_n) =& \frac{1}{2}\int_{T_n} y^{1-\alpha}|\nabla z_n|^2 dxdy - \int_{\tilde{T}_n} F_{\lambda_0}(z_n(x,0))dx + \frac{1}{2}\int_{S_n} y^{1-\alpha}|\nabla(w_n + \phi_1)|^2 dxdy \\
& - \int_{\tilde{S}_n} F_{\lambda_0}(w_n(x,0) + \phi_1(x,0))dx + \frac{1}{2}\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla v_n^-|^2 dxdy \ .
\end{aligned}$$

Desde que,

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla z_n|^2 dxdy = \int_{T_n} y^{1-\alpha}|\nabla v_n|^2 dxdy + \int_{S_n} y^{1-\alpha}|\nabla \phi_1|^2 dxdy$$

e

$$\int_\Omega F_{\lambda_0}(z_n(x,0))dx = \int_{\tilde{T}_n} F_{\lambda_0}(v_n(x,0))dx + \int_{\tilde{S}_n} F_{\lambda_0}(\phi_1(x,0))dx \ ,$$

temos

$$\begin{aligned}
J_{\lambda_0}(v_n) =& \left(\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla z_n|^2 dxdy - \int_{S_n} y^{1-\alpha}|\nabla \phi_1|^2 dxdy\right) - \left(\int_\Omega F_{\lambda_0}(z_n(x,0))dx - \right. \\
& \left. - \int_{\tilde{S}_n} F_{\lambda_0}(\phi_1(x,0))dx\right) + \frac{1}{2}\int_{S_n} y^{1-\alpha}|\nabla(w_n + \phi_1)|^2 dxdy - \\
& - \int_{\tilde{S}_n} F_{\lambda_0}(w_n(x,0) + \phi_1(x,0))dx + \frac{1}{2}\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla v_n^-|^2 dxdy \\
=& J_{\lambda_0}(z_n) + \frac{1}{2}\int_{S_n} y^{1-\alpha}(|\nabla(w_n + \phi_1)|^2 - |\nabla \phi_1|^2)dxdy - \\
& - \int_{\tilde{S}_n} (F_{\lambda_0}(w_n(x,0) + \phi_1(x,0)) - F_{\lambda_0}(z_n(x,0)))dx
\end{aligned}$$

Sendo ϕ_1 uma supersolução de (P_{λ_0}), concluímos que

$$\begin{aligned}
J_{\lambda_0}(v_n) \geq & J_{\lambda_0}(z_n) + \frac{1}{2}\|w_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} + \frac{1}{2}\|v_n^-\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} \\
& - \int_\Omega (F_{\lambda_0}(w_n(x,0) + \phi_1(x,0)) - F_{\lambda_0}(\phi_1(x,0)) - f_{\lambda_0}(\phi_1(x,0))w_n(x,0))dx \\
\geq & J_{\lambda_0}(w_0) + \frac{1}{2}\|w_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} + \frac{1}{2}\|v_n^-\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} \\
& - \int_\Omega (F_{\lambda_0}(w_n(x,0) + \phi_1(x,0)) - F_{\lambda_0}(\varphi_1(x,0)) - f_{\lambda_0}(\phi_1(x,0))w_n(x,0))dx \ .
\end{aligned}$$

Por um lado, como $0 < q+1 < 2$, segue da Fórmula de Taylor com resto de Lagrange que

$$0 \leq \frac{1}{q+1}(w_n(\cdot,0) + \phi_1(\cdot,0))^{q+1} - \frac{1}{q+1}\phi_1^{q+1}(\cdot,0) - \phi_1^q(\cdot,0)w_n(\cdot,0) \leq \frac{1}{2}q\frac{w_n^2(\cdot,0)}{\phi_1^{1-q}(\cdot,0)}.$$

Considere v_0 a solução para o problema (A.3) com $\lambda = \lambda_0$. Por comparação, temos $v_0 \leq w_{\lambda_1}$ em $\overline{C_\Omega}$, assim

$$\lambda_0 \int_\Omega \frac{w_n^2(x,0)}{w_{\lambda_1}^{1-q}(x,0)}dx \leq \lambda_0 \int_\Omega \frac{w_n^2(x,0)}{w^{1-q}(x,0)}dx. \tag{4.3}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $(v_{n,k})_k \subset C_0^\infty(\Omega \times [0,\infty))$ tal que $v_{n,k} \to w_n$ em $X_0^\alpha(C_\Omega)$, quando $k \to \infty$. Como $\dfrac{(v_{n,k})^2}{v_0} \in X_0^\alpha(C_\Omega)$, então aplique a desigualdade de Picone, ver Teorema C.10, com $v = v_0$ e $u = v_{n,k}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla(v_{n,k})|^2 dxdy &\geq \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle\nabla\left(\frac{(v_{n,k})^2}{v_0}\right), \nabla v_0\rangle dxdy \\
&= \lambda_0 \int_\Omega \frac{(v_{n,k})^2(x,0)}{v_0(x,0)}{v_0}^q(x,0)dx
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Segue de (4.3) e (4.4) que

$$\begin{aligned}
\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla(v_{n,k})|^2 dxdy &\geq \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle\nabla\left(\frac{(v_{n,k})^2}{v_0}\right), \nabla v_0\rangle dxdy \\
&= \lambda_0 \int_\Omega \frac{(v_{n,k})^2(x,0)}{w_{\lambda_1}^{1-q}(x,0)}dx \ .
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Como $\dfrac{(v_{n,k}(x,0))^2}{(w_{\lambda_1}(x,0))^{1-q}} \to \dfrac{(w_n(x,0))^2}{(w_{\lambda_1}(x,0))^{1-q}}$ q.t.p. em Ω, quando $k \to \infty$, então passando ao limite em (4.5) e usando o Lema de Fatou, segue que

$$\lambda_0 \int_\Omega \frac{w_n^2(x,0)}{{\phi_1}^{1-q}(x,0)}dx \leq \|w_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} \ .$$

Por outro lado, desde que $p+1>2$,

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{p+1}(w_n(\cdot,0)+\phi_1(\cdot,0))^{p+1} - \frac{1}{p+1}\phi_1(\cdot,0)^{p+1} - \phi_1^p(\cdot,0)w_n(\cdot,0)\\
&= \frac{1}{p+1}\left[(p+1)(\phi_1(\cdot,0)+\theta_1 w_n(\cdot,0))^p w_n(\cdot,0)\right] - \phi_1(\cdot,0)w_n(\cdot,0)\\
&= \frac{1}{p+1}\left[(p+1)(\phi_1(\cdot,0)+\theta_1 w_n(\cdot,0))^p w_n(\cdot,0) - (p+1)\phi_1(\cdot,0)w_n(\cdot,0)\right]\\
&\leq \frac{(p+1)}{2}\left[(\phi_1(\cdot,0)+w_n(\cdot,0))^p w_n(\cdot,0) - \phi_1(\cdot,0)w_n(\cdot,0)\right]\\
&\leq \frac{1}{2}p(p+1)w_n^2(\cdot,0)(\theta_2 w_n(\cdot,0)+\phi_1(\cdot,0))^{p-1}\\
&\leq \frac{c(p)}{2}(\phi_1^{p-1}(\cdot,0)w_n^2(\cdot,0)+w_n^{p+1}(\cdot,0)) \ ,
\end{aligned}
$$

onde $\theta_1,\theta_2\in(0,1)$, assim,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\frac{1}{p+1}(w_n(x,0)+\phi_1(x,0))^{p+1} - \frac{1}{p+1}\phi_1^{p+1}(x,0) - \phi_1^p(x,0)w_n(x,0)\right)dx&\\
\leq c(p)\int_\Omega(\phi_1^{p-1}w_n^2(x,0)+w_n^{p+1}(x,0))dx&\\
\leq c(p)\left(\|\phi_1\|_\infty^{p-1}\int_\Omega w_n^2(x,0)dx + \int_\Omega w_n^{p+1}(x,0)dx\right)&\ .
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Aplicando a desigualdade de Holder e usando (4.2), obtemos

$$
\int_\Omega w_n^2(x,0)dx \leq (|\tilde{S}_n|_\Omega)^{\frac{\alpha}{N}}\left(\int_\Omega w_n^{\frac{2N}{N-\alpha}}(x,0)dx\right)^{\frac{N-\alpha}{N}} \leq o(1)\|w_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)}. \tag{4.7}
$$

Da mesma forma, como $p+1<2_\alpha^*$ temos

$$
\int_\Omega w_n^{p+1}(x,0)dx \leq (|\tilde{S}_n|_\Omega)^{\frac{2_\alpha^*-(p+1)}{2_\alpha^*}}\left(\int_\Omega w_n^{2_\alpha^*}(x,0)dx\right)^{\frac{1}{2_\alpha^*}} \leq o(1)\|w_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)}. \tag{4.8}
$$

Segue de (4.6), (4.7) e (4.8)

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{1}{p+1}\left((w_n(x,0)+\phi_1(x,0))^{p+1} - \phi_1^{p+1}(x,0)\right)dx - \int_\Omega \phi_1^p(x,0)w_n(x,0)dx&\\
\leq o(1)\|w_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)}&
\end{aligned}
$$

Como consequência

$$
\begin{aligned}
J_{\lambda_0}(v_n) &\geq J_{\lambda_0}(w_0) + \frac{1}{2}\|w_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)}(1-q-o(1)) + \frac{1}{2}\|v_n^-\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)}\\
&= J_{\lambda_0}(w_0) + \frac{1}{2}\|w_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)}(1-q-o(1)) + o(1).
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Desde que $q<1$, resulta de (4.1) e (4.9)

$$
J_{\lambda_0}(w_0) > J_{\lambda_0}(v_n) \geq J_{\lambda_0}(w_0)
$$

para $n\geq n_0$. Uma contradição, portanto w_0 é um mínimo local.

■

4.2 Estudo De Um Problema Equivalente

No que segue, consideremos $\lambda \in (0, \Lambda)$. Vamos procurar uma solução de (P_λ) da forma $u = u_\lambda + v$, onde u_λ é a solução encontrada no lema (3.9). Então, se u for solução de (P_λ), temos

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla u) = 0, & \text{em } C_\Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial_L C_\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu^\alpha} = \lambda u^q + u^p, & u > 0 \text{ em } \Omega \end{cases} \qquad (P_\lambda).$$

Daí,

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla(u_\lambda + v)) = 0, & \text{em } C_\Omega \\ u_\lambda + v = 0, & \text{sobre } \partial_L C_\Omega \\ \dfrac{\partial (u_\lambda + v)}{\partial \nu^\alpha} = \lambda(u_\lambda + v)^q + (u_\lambda + v)^p, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

que é equivalente

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla v) = 0, & \text{em } C_\Omega \\ v = 0, & \text{sobre } \partial_L C_\Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu^\alpha} = \lambda(u_\lambda + v)^q - \lambda u_\lambda^q + (u_\lambda + v)^p - u_\lambda^p, & \text{em } \Omega \end{cases}.$$

Defina

$$g_\lambda(s) = \begin{cases} \lambda(u_\lambda(\cdot,0) + s)^q - \lambda u_\lambda^q(\cdot,0) + (u_\lambda(\cdot,0) + s)^p - u_\lambda^p(\cdot,0), & \text{se } s \geq 0 \\ 0, & \text{se } s < 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

e observe que u é solução de (P_λ) se, e somente se, v é solução do problema

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla v) = 0 & , \text{ em } C_\Omega \\ v = 0 & , \text{ sobre } \partial_L C_\Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu^\alpha} = g_\lambda(v) & , \text{ em } \Omega \end{cases}. \tag{4.11}$$

Como a função g_λ dada em (4.10) é contínua, então a primitiva

$$G(t) = \int_0^t g_\lambda(s)ds$$

é derivável. Associado ao problema (4.11), temos o funcional

$$\begin{aligned}\tilde{J} : X_0^\alpha(C_\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ v &\longmapsto \tilde{J}(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - \int_\Omega G(v(x,0))dx.\end{aligned}$$

Pode-se mostrar que $\tilde{J} \in C^1(X_0^\alpha(C_\Omega), \mathbb{R})$ e

$$\tilde{J}'(v)(\varphi) = \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla v, \nabla \varphi\rangle dxdy - \int_\Omega g(v(x,0))\varphi(x,0)dx$$

para todo $v, \varphi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. Desta forma, se $v \in X_0^\alpha(C_\Omega)$, $u \neq 0$ é um ponto crítico de $\tilde{J}$, então u é uma solução do problema (4.11) e consequentemente $u = u_\lambda + v$ é uma segunda solução de (P_λ).

Lema 4.2 *$v = 0$ é um mínimo local de $\tilde{J}$ em $X_0^\alpha(C_\Omega)$.*

Demonstração: Seja v^+ e v^- a parte positiva e a negativa de v, respectivamente. Com o intuito de facilitar a leitura, da presente demonstração, será adotada a mesma notação para a função e seu traço, ou seja, $v^+ = v^+(\cdot, 0)$ e $v^+ = v^-(\cdot, 0)$. Sabemos que

$$F(u_\lambda + v^+) = \int_0^{u_\lambda + v^+} (\lambda s^q + s^p)ds = \frac{\lambda}{q+1}(u_\lambda + v^+)^{q+1} + \frac{1}{p+1}(u_\lambda + v^+)^{p+1}\ , \quad (4.12)$$

por outro lado

$$G(v) = \int_0^v g(s)ds \quad (4.13)$$

com

$$g_\lambda(s) = \begin{cases} \lambda(u_\lambda + s)^q - \lambda u_\lambda^q + (u_\lambda + s)^p - u_\lambda^p & , \ \text{se } s \geq 0 \\ 0 & , \ \text{se } s < 0 \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{aligned} G(v^+) = &\int_0^{v^+} [\lambda(u_\lambda + s)^q - \lambda u_\lambda^q + (u_\lambda + s)^p - u_\lambda^p]ds \\ = &\frac{\lambda}{q+1}(u_\lambda + v^+)^{q+1} - \frac{\lambda}{q+1}u_\lambda^{q+1} - \lambda u_\lambda^q v^+ \\ &+ \frac{1}{p+1}(u_\lambda + v^+)^{p+1} - \frac{1}{p+1}u_\lambda^{p+1} - u_\lambda^p v^+ \end{aligned}$$

e consequentemente

$$G(v^+) - F(u_\lambda + v^+) = -\frac{\lambda}{q+1}u_\lambda^{q+1} - \lambda u_0^q v^+ - \frac{1}{p+1}u_0^{p+1} - u_0^p v^+\ . \quad (4.14)$$

Sendo $v^+ = \max\{v, 0\}$ e $v^- = \min\{v, 0\}$, então $v = v^+ - v^-$ e vale

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|v\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} &= \frac{1}{2}\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla v^+|^2 dxdy + \frac{1}{2}\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla v^-|^2 dxdy \\ &= \frac{1}{2}\|v^+\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} + \frac{1}{2}\|v^-\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} .\end{aligned}$$

Agora, considere $A_1 = \{x \in \Omega : v(x, 0) \geq 0\}$ e $A_2 = \{x \in \Omega : v(x, 0) \leq 0\}$. Desta forma,

$$\int_\Omega G(v)dx = \int_\Omega \chi_{A_1} G(v)dx + \int_\Omega \chi_{A_2} G(v)dx \ ,$$

mas, para $x \in A_1$, temos $v(x) = v^+(x)$, enquanto que para $x \in A_2$, temos $G(v) = 0$. Logo,

$$\int_\Omega G(v)dx = \int_\Omega G(v^+)dx \ .$$

Donde segue,

$$\begin{aligned}\tilde{J}(v) =& \frac{1}{2}\|v^+\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} + \frac{1}{2}\|v^-\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - \int_\Omega G(v^+)dx \\ =& \frac{1}{2}\|v^+\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} + \frac{1}{2}\|v^-\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - \int_\Omega F(u_\lambda + v^+)dx \\ &+ \int_\Omega \left(\frac{\lambda}{q+1}u_\lambda^{q+1} + \lambda u_\lambda^q v^+ + \frac{1}{p+1}u_\lambda^{p+1} + u_\lambda^p v^+\right) dx \qquad (4.15) \\ =& \frac{1}{2}\|v^+\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} + \frac{1}{2}\|v^-\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - \int_\Omega F(u_\lambda + v^+)dx \\ &+ \int_\Omega F(u_0)dx + \int_\Omega \left(\lambda u_0^q + u_0^p\right) v^+ dx\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}J(u_\lambda + v^+) =& \frac{1}{2}\|u_\lambda + v^+\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - \int_\Omega F(u_\lambda + v^+)dx \\ =& \frac{1}{2}\|u_\lambda\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} + \frac{1}{2}\|v^+\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} + \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle\nabla u_\lambda, \nabla v^+\rangle dxdy \\ &- \int_\Omega F(u_\lambda + v^+)dx\end{aligned}$$

e sendo u_λ solução de (P_λ), obtemos

$$\begin{aligned}J(u_\lambda + v^+) =& \frac{1}{2}\|u_\lambda + v^+\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - \int_\Omega F(u_\lambda + v^+)dx \\ =& \frac{1}{2}\|u_\lambda\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} + \frac{1}{2}\|v^+\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} + \int_\Omega (\lambda u_\lambda^q + u_\lambda^p)v^+ dx \qquad (4.16) \\ &- \int_\Omega F(u_\lambda + v^+)dx\end{aligned}$$

Substituindo (4.16) em (4.15), segue que

$$\begin{aligned}\tilde{J}(v) &= \frac{1}{2}\|v^-\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)} + J(u_\lambda + v^+) - \frac{1}{2}\|u_\lambda\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} + \int_\Omega F(u_\lambda)dx \\ &= \frac{1}{2}\|v^-\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)} + J(u_\lambda + v^+) - J(u_\lambda)\end{aligned}$$

Como u_λ é um mínimo local de J em $X_0^\alpha(C_\Omega)$, então

$$\tilde{J}(v) \geq \frac{1}{2}\|v^-\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} \geq 0 = \tilde{J}(0) \tag{4.17}$$

desde que $\|v\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)} \leq \epsilon$. ■

No que segue, vejamos que qualquer sequência $(PS)_c$ (A definição de sequência $(PS)_c$, pode ser encontrada no Apêndice C) pode ser escolhida como uma sequência não negativa de funções. Para isso, mostraremos que se, $\{v_n\}$ é uma sequência $(PS)_c$ então $\{v_n\}$ é limitada e $\{v_n^+\}$ é também uma sequência limitada.

Lema 4.3 *Se $\{v_n\}$ uma sequência $(PS)_c$, $c \in \mathbb{R}$, então $\{v_n\}$ é limitada.*

Demonstração: Seja $\{v_n\}$ uma sequência $(PS)_c$, isto é,

$$\tilde{J}(v_n) \to c \ \text{ e } \ \tilde{J}'(v_n) \to 0.$$

Daí, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}\tilde{J}(v_n) - \frac{1}{p+1}\tilde{J}'(v_n)(u_\lambda + v_n^+) &\leq \tilde{J}(v_n) + \frac{1}{p+1}|\tilde{J}'(v_n)(u_\lambda + v_n^+)| \\ &\leq M_1 + \frac{1}{p+1}\|\tilde{J}'(v_n)\|_{(X_0^\alpha(C_\Omega))'}\|u_\lambda + v_n^+\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)} \\ &\leq M_2 + \|\tilde{J}(v_n)\|_{(X_0^\alpha(C_\Omega))'}\|v_n\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)} \\ &\leq M_2 + \|v_n\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)}\end{aligned} \tag{4.18}$$

para todo $n \geq n_0$. Agora, observe que

$$\begin{aligned}\tilde{J}(v_n) = \frac{1}{2}\|v_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - \Bigg[\int_\Omega \Bigg(&\frac{\lambda}{q+1}(u_\lambda + v_n^+)^{q+1} - \frac{\lambda}{q+1}u_\lambda^{q+1} - \lambda u_\lambda^q v_n^+ + \\ &+ \frac{(u_\lambda + v_n^+)^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}u_\lambda^{p+1} - u_\lambda^p v_n^+\Bigg)dx\Bigg]\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\tilde{J}'(v_n)(u_\lambda + v_n^+) &= \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle\nabla v_n, \nabla(u_\lambda + v^+)\rangle dxdy - \int_\Omega (\lambda(u_\lambda + v_n^+)^{q+1}dx \\ &\quad + \int_\Omega (\lambda u_\lambda^q(u_\lambda + v_n^+) - (u_\lambda + v_n^+)^{p+1} + u_\lambda^p(u_\lambda + v_n^+))dx \\ &= \|v_n^+\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} + \langle u_\lambda, v_n\rangle_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - \int_\Omega (\lambda(u_\lambda + v_n^+)^{q+1}dx \\ &\quad + \int_\Omega (\lambda u_\lambda^q u_\lambda + u_\lambda^q v_n^+ - (u_\lambda + v_n^+)^{p+1} + u_\lambda^p u_\lambda + u_\lambda^p v_n^+)dx\end{aligned}$$

Logo,

$$\tilde{J}(v_n)-\frac{1}{p+1}\tilde{J}'(v_n)(u_\lambda+v_n^+)\geq\frac{1}{2}\|v_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)}-\frac{\|v_n^+\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)}}{p+1}-\frac{\langle u_\lambda,v_n\rangle_{X_0^\alpha(C_\Omega)}}{p+1}+$$
$$+\lambda\left(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{q+1}\right)\int_\Omega(u_\lambda+v_n^+)^{q+1}dx+\lambda\left(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{q+1}\right)\int_\Omega u_\lambda^{q+1}dx$$
$$-\lambda\left(\frac{1}{p+1}-1\right)\int_\Omega u_\lambda^q v_n^+dx-\left(\frac{1}{p+1}-1\right)\int_\Omega u_\lambda^p v_n^+dx\ ,$$

assim,

$$\tilde{J}(v_n)-\frac{1}{p+1}\tilde{J}'(v_n)(u_\lambda+v_n^+)\geq\frac{1}{2}\|v_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)}-\frac{\|v_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)}}{p+1}-\frac{\|u_\lambda\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)}}{p+1}\|v_n\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)}-$$
$$-\lambda\left(\frac{1}{q+1}-\frac{1}{p+1}\right)\|u_\lambda+v_n^+\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}\lambda\left(\frac{1}{q+1}-\frac{1}{p+1}\right)\|u_\lambda\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}-$$
$$+\left(1-\frac{1}{p+1}\right)\lambda\|u_\lambda\|^q_{L^\infty(C_\Omega)}\|v_n^+\|_{L^1(\Omega)}+\left(1-\frac{1}{p+1}\right)\|u_\lambda\|^p_{L^\infty(C_\Omega)}\|v_n^+\|_{L^1(\Omega)}.$$

Note que

$$\|u_\lambda+v_n^+\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}\leq[\|u_\lambda\|_{L^{q+1}(\Omega)}+\|v_n^+\|_{L^{q+1}(\Omega)}]^{q+1}\leq 2^{q+1}[\|u_\lambda\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}+\|v_n\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}],$$

seque que

$$\tilde{J}(v_n)-\frac{1}{p+1}\tilde{J}'(v_n)(u_\lambda+v_n^+)\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\|v_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)}-M_1\|v_n\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)}-$$
$$-M_2\|u_\lambda\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}-M_2 2^{q+1}[\|u_\lambda\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}+\|v_n\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}]-$$
$$-M_3\|v_n^+\|_{L^1(\Omega)}-M_4\|v_n^+\|_{L^1(\Omega)},$$

onde M_i, $i=1,2,3,4$ são constantes positivas satisfazendo

$$M_1=\frac{\|u_\lambda\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)}}{p+1}\quad,\quad M_2=\lambda\left(\frac{1}{q+1}-\frac{1}{p+1}\right)\ ,$$
$$M_3=\lambda\left(1-\frac{1}{p+1}\right)\|u_\lambda\|^q_{L^\infty(\Omega)}\quad\text{e}\quad M_4=\left(1-\frac{1}{p+1}\right)\|u_\lambda\|^p_{L^\infty(\Omega)}\ .$$

usando a imersão Contínua $X_0^\alpha(C_\Omega)\hookrightarrow L^s(\Omega)$, $1\leq s\leq 2^*_\alpha$ e colocando os termos comuns em evidência encontramos uma desigualdade do tipo

$$\tilde{J}(v_n)-\frac{\tilde{J}'(v_n)(u_\lambda+v_n^+)}{p+1}\geq A\|v_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)}+B\|v_n\|^{q+1}_{X_0^\alpha(C_\Omega)}-C\|v_n\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)}-D \tag{4.19}$$

onde A,B,C e D são constantes positivas. Combinando (4.18) e (4.19), podemos concluir que a sequência $\{v_n\}$ é limitada.

■

Lema 4.4 *Se $\{v_n\}$ é uma sequência $(PS)_c$, então $\{v_n^+\}$ é também uma sequência $(PS)_c$.*

Demonstração: Sendo $\{v_n\}$ uma sequência $(PS)_c$, pelo Lema 4.3, $\{v_n\}$ é limitada e assim $\|v_n^-\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)} \leq \|v_n\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)} \leq M$, isto é, $\{v_n^-\}$ é também limitada, portanto

$$\tilde{J}'(v_n)(v_n^-) \longrightarrow 0 \, .$$

Por outro lado,

$$\tilde{J}'(v_n)(v_n^-) = \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla v_n, \nabla v_n^- \rangle dxdy - \Big[\int_\Omega (\lambda(u_\lambda + v_n^+)^q v_n^- - \lambda u_\lambda^q v_n^- + \\ + (u_\lambda + v_n^+)^p v_n^- - u_\lambda^p v_n^-) dx \Big] \, ,$$

então $\tilde{J}'(v_n)(v_n^-) = \|v_n^-\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)}$, assim, obtemos

$$\|v_n^-\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} \longrightarrow 0 \, .$$

Além disso, como $\|v_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} = \|v_n^+\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} + \|v_n^-\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)}$, deduzimos que

$$\|v_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} = \|v_n^+\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} + o_n(1) \, .$$

Daí,

$$\tilde{J}(v_n) = \tilde{J}(v_n^+) + o_n(1)$$

e

$$\tilde{J}'(v_n) = \tilde{J}'(v_n^+) + o_n(1) \, .$$

Consequentemente, se

$$\tilde{J}(v_n) \longrightarrow c \text{ e } \tilde{J}'(v_n) \longrightarrow 0 \, ,$$

então

$$\tilde{J}(v_n^+) \longrightarrow c \text{ e } \tilde{J}'(v_n^+) \longrightarrow 0 \, ,$$

mostrando que $\{v_n^+\}$ é uma sequência $(PS)_c$. ■

Proposição 4.5 *$\tilde{J}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo c.*

Demonstração: Seja $\{v_n\} \subset X_0^\alpha(C_\Omega)$ tal que $\tilde{J}(v_n) \longrightarrow c$ e $\tilde{J}'(v_n) \longrightarrow 0$ onde estamos consideramos $v_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desde que $\{v_n\}$ é limitada, existe $v \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ tal que

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } X_0^\alpha(C_\Omega) \, . \tag{4.20}$$

Daí, pela imersão compacta, segue que

$$v_n \longrightarrow v \text{ em } L^s(\Omega)$$

para $1 \leq s < 2^*_\alpha$. Como $q+1 < p+1 < 2^*_\alpha$ concluímos que

$$v_n \longrightarrow v \text{ em } L^{q+1}(\Omega)$$

e

$$v_n \longrightarrow v \text{ em } L^{p+1}(\Omega)$$

de onde obtemos, respectivamente

$$\int_\Omega (u_\lambda(x,0) + v_n(x,0))^{q+1} dx \longrightarrow \int_\Omega (u_\lambda(x,0) + v(x,0))^{q+1} dx \tag{4.21}$$

e

$$\int_\Omega (u_\lambda(x,0) + v_n(x,0))^{p+1} dx \longrightarrow \int_\Omega (u_\lambda(x,0) + v(x,0))^{p+1} dx \tag{4.22}$$

Além do mais, temos

$$\int_\Omega \lambda(u_\lambda(x,0))^q v_n(x,0) dx \longrightarrow \int_\Omega \lambda(u_\lambda(x,0))^q v(x,0) dx \tag{4.23}$$

e

$$\int_\Omega \lambda(u_\lambda(x,0))^p v_n(x,0) dx \longrightarrow \int_\Omega \lambda(u_\lambda(x,0))^p v(x,0) dx\ . \tag{4.24}$$

Seja

$$\begin{aligned} A_n = \langle v_n, u_\lambda \rangle_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - \Big[\int_\Omega \big(& \lambda(u_\lambda(x,0) + v_n(x,0))^{q+1} - \lambda u_\lambda(x,0)^{q+1} - \\ & -\lambda u_\lambda(x,0)^q v_n(x,0) + (u_\lambda(x,0) + V_n(x,0))^{p+1} - u_\lambda(x,0)^{p+1} + u_\lambda(x,0)^p v_n(x,0) \big)\, dx \Big] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A = \langle v, u_\lambda \rangle_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - \Big[\int_\Omega \big(& \lambda(u_\lambda(x,0) + v(x,0))^{q+1} - \lambda u_\lambda(x,0)^{q+1} - \\ & -\lambda u_\lambda(x,0)^q v(x,0) + (u_\lambda(x,0) + v(x,0))^{p+1} - u_\lambda(x,0)^{p+1} + u_\lambda(x,0)^p v(x,0) \big)\, dx \Big] \end{aligned}$$

Segue de $(4.20), (4.21), (4.22), (4.23)$ e (4.24) que $A_n \longrightarrow A$. Mas, observe que

$$\begin{aligned} \|v_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} &= -A_n + \|v_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} + A_n \\ &= -A_n + \tilde{J}'(v_n)(u_\lambda + v_n)\ , \end{aligned}$$

daí,

$$\|v_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} \longrightarrow -A \ ,$$

onde

$$\begin{aligned}\tilde{J}'(v_n)(u_\lambda + v_n) = &\|v_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} + \langle v_n, u_\lambda\rangle_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - \Big[\int_\Omega \big(\lambda(u_\lambda(x,0) + v_n(x,0))^{q+1} - \\ &- \lambda u_\lambda(x,0)^{q+1} - \lambda u_\lambda(x,0)^q v_n(x,0) + (u_\lambda(x,0) + v_n(x,0))^{p+1} - \\ &- u_\lambda(x,0)^{p+1} + u_\lambda(x,0)^p v_n(x,0)\big)\, dx\Big]\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}&\tilde{J}'(v_n)(u_\lambda + v) = \langle v_n, u_\lambda\rangle_{X_0^\alpha(C_\Omega)} + \langle v_n, v\rangle_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - \\ &- \Big[\int_\Omega (\lambda(u_\lambda(x,0) + v_n(x,0))^q(u_\lambda(x,0) + v(x,0)) - \lambda u_\lambda(x,0)^q(u_\lambda(x,0) + v(x,0)) + \\ &+ (u_\lambda(x,0) + v_n(x,0))^p(u_\lambda(x,0) + v(x,0)) - u_\lambda(x,0)^p(u_\lambda(x,0) + v(x,0)))\, dx\Big]\end{aligned}$$

e quando tomamos o limite de $n \longrightarrow +\infty$, encontramos $\|v\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} = -A$, mostrando que

$$\|v_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} \longrightarrow \|v\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} \ ,$$

Sendo $X_0^\alpha(C_\Omega)$ Hilbert, então é uniformemente convexo, assim $v_n \longrightarrow v$ em $X_0^\alpha(C_\Omega)$.

■

Teorema 4.6 *Seja* $0 < q < 1 < p < \frac{N+2}{N-\alpha}$. *Então, para todo* $\lambda \in (0, \Lambda)$ *o problema* (P_λ) *tem uma segunda solução* $v_\lambda > u_\lambda$.

Demonstração:

Anteriormente, provamos que $v = 0$ é um mínimo local de $\tilde{J}$ em $X_0^\alpha(C_\Omega)$. Vamos supor que $v = 0$ é um mínimo local estrito em $X_0^\alpha(C_\Omega)$. Pois, caso contrário, existiria um ponto crítico de $\tilde{J}$ não-nulo o qual seria uma solução do problema (4.11) e consequentemente uma segunda solução de (P_λ). Sendo assim, existem $r, \delta > 0$ tais que

$$\tilde{J}(u) \geq \delta > \tilde{J}(0) = 0 \quad \text{ para } \|u\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)} = r,$$

ou seja, $\tilde{J}$ verifica a primeira geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Para verificar a segunda geometria do Teorema do passo da Montanha, fixe $v \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ uma função não negativa. Então, para $t > 0$ temos

$$\begin{aligned}\tilde{J}(tv) \leq& \frac{1}{2}\|tv\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - \frac{1}{p+1}\|tv(\cdot,0)\|^{p+1}_{L^p(\Omega)} \\ =& \frac{1}{2}t^2\|v\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - \frac{t^{p+1}}{p+1}\|v(\cdot,0)\|_{L^{p+1}(\Omega)} \longrightarrow -\infty, \text{ quando } t \to \infty.\end{aligned}$$

Logo, existe $t^* > 0$ suficientemente grande tal que $\tilde{J}(t^*v) < 0$ e $\|t^*v\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)} > r$. Considere $v_1 = t^*v$ e conclua que $\tilde{J}(v_1) < 0$ com $v_1 \in (\overline{B}_r(0))^c$. Se $p < \frac{N+2}{N-\alpha}$, a Proposição (4.5) garante que $\tilde{J}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo c. Seja

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \tilde{J}(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X_0^\alpha(C_\Omega)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v_1\}.$$

Pelo Teorema do passo da Montanha, ver Teorema C.8, segue que, $c \geq \delta > 0$ é um valor crítico de $\tilde{J}$, isto é, existe $v \in X_0^\alpha(C_\Omega)$, $v \neq 0$ tal que $\tilde{J}(v) = c$ e $\tilde{J}'(v) = 0$, neste caso v é um ponto crítico de $\tilde{J}$ em $X_0^\alpha(C_\Omega)$.

■

4.3 Um Resultado de Unicidade

Nesta seção, provaremos um resultado de unicidade para soluções com uma norma pequena. Antes disso, estudaremos o seguinte lema

Lema 4.7 *Seja z as única solução do problema (A.3) com $\lambda = 1$. Então, existe uma constante $\beta > 0$ tal que*

$$\|\phi\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - q\int_\Omega z^{q-1}\phi^2 dx \geq \beta\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{4.25}$$

para todo $\phi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$.

Demonstração: Uma maneira de se obter z é através do problema de minimização que

$$\min\left\{\frac{1}{2}\|w\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - \frac{1}{q}\|w\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} \colon w \in X_0^\alpha(C_\Omega)\right\}.$$

Como consequência,

$$\|\phi\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - q\int_\Omega z^{q-1}\phi^2 dx \geq 0 \tag{4.26}$$

para todo $\phi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. Isto implica que o primeiro autovalor a_1 do problema linearizado

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla\phi) = & 0 \quad , \text{ em } C_\Omega \\ \phi = & 0 \quad , \text{ sobre } \partial_L C_\Omega \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\nu^\alpha} - qz^{q-1}\phi = & a_1\phi \quad , \text{ em } \Omega\times\{0\} \end{cases} \tag{4.27}$$

é não negativo. A existência de solução do problema (4.27) é análogo ao problema $(A.5)$, onde podemos supor que ϕ é estritamente positiva em C_Ω. Suponha que $a_1 = 0$, então existe $\phi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ com $\phi \geq 0$ tal que

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle\nabla\phi, \nabla z\rangle dxdy = q\int_\Omega z^q\phi(x,0)dx \tag{4.28}$$

Por outro lado, como z é solução de $(A.3)$ com $\lambda = 1$, temos

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle\nabla\varphi, \nabla z\rangle dxdy = q\int_\Omega z^q\varphi(x,0)dx \tag{4.29}$$

para todo $\varphi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. De (4.28) e (4.29), obtemos $q = 1$. O que é um absurdo. Então, $a_1 > 0$, o que prova (4.25).

■

Teorema 4.8 *Existe no máximo uma solução para o problema* (P_λ) *com norma pequena.*

Demonstração: Considere $A > 0$ tal que $pA^{p-1} < \beta$, onde β é dado em (4.25). Agora, vamos provar que o problema (P_λ) tem no máximo uma solução com norma em L^∞ menor que A. Vamos supor por contradição que (P_λ) tem uma segunda solução $w = u_\lambda + v$, verificando

$$\|w\|_{L^\infty(C_\Omega)} \leq A.$$

Como u_λ é a solução minimal, segue que $v > 0$ em $\Omega\times[0,\infty)$. Defina $\eta = \lambda^{\frac{1}{1-q}}z$, onde z é a solução para $(A.3)$ com $\lambda = 1$. Então η satisfaz

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla\eta) = & 0 \quad , \text{ em } C_\Omega \\ \eta = & 0 \quad , \text{ sobre } \partial_L C_\Omega \quad , \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial\nu^\alpha} = & \lambda\eta^q \quad , \text{ em } \Omega \end{cases} \tag{4.30}$$

Alem disso, u_λ é supersolução para o problema acima. Então, pelo Lema da comparação, Lema (3.4), aplicado com $f(t) = \lambda t^q$, η e u_λ, obtemos

$$u_\lambda \geq \eta = \lambda^{\frac{1}{1-q}} z \text{ em } \Omega \times \{0\} \ . \tag{4.31}$$

Desde que $w = u_\lambda + v$ é solução para (P_λ), temos em $\Omega \times \{0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u_\lambda + v)}{\partial \nu^\alpha} &= \lambda(u_\lambda + v)^q + (u_\lambda + v)^p \\ &\leq \lambda u_\lambda^q + \lambda q u_\lambda^{q-1} v + (u_\lambda + v)^p, \end{aligned}$$

onde a desigualdade é uma consequência da concavidade da função $f(t) = t^q$, isto é, $f(t) \leq f(a) + f'(a)(t-a)$ com $a, t \in \mathbb{R}$. Como consequência da desigualdade acima e de (4.31), podemos concluir

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \nu^\alpha} &\leq -\lambda u_\lambda^q - u_\lambda^p + \lambda u_\lambda^q + \lambda q u_\lambda^{q-1} v + (u_\lambda + v)^p \\ &\leq \lambda q z^{q-1} v - u_\lambda^p + (u_\lambda + v)^p \end{aligned}$$

Ainda da convexidade da função $f(t) = \lambda t^p$, temos

$$(u_\lambda + v)^p - u_\lambda^p \leq p(u_\lambda + v)^{p-1} v$$

e como $\|u_\lambda + v\|_{L^\infty(C_\Omega)} \leq A$, obtemos

$$(u_\lambda + v)^p - u_\lambda^p \leq pA^{p-1} v \ .$$

Tomando v como uma função teste e $\phi = v$ em (4.25), chegamos a

$$\beta \int_\Omega v(x,0)^2 dx \leq \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha} |\nabla v|^2 dx dy - q \int_\Omega z^{q-1} v(x,0)^2 dx \leq pA^{p-1} \int_\Omega v(x,0)^2 dx$$

e desde que $pA^{p-1} < \beta$, então, devemos ter $v \equiv 0$ em Ω, uma contradição, pois $v > 0$.

$\blacksquare$

Observação 4.8.1 *Esta prova também fornece o comportamento assintótico de u_λ próximo de $\lambda = 0$, ou seja, $u_\lambda \approx \lambda^{\frac{1}{1-q}} z$, onde z é a única solução para o problema (A.3) com $\lambda = 1$.*

Observação 4.8.2 *Da prova do lema (3.6) podemos concluir que $M(\lambda) \longrightarrow 0$ quando $\lambda \searrow 0$. Segue daí, que $\|u_\lambda\|_{L^\infty(C_\Omega)} \rightarrow 0$, pois sendo u_λ a solução minimal, temos $\|u_\lambda\|_{L^\infty(C_\Omega)} \leq CM(\lambda)$, portanto, para pequenos valores de λ a única solução de (P_λ) com $\|u\|_{L^\infty(C_\Omega)} \leq A$ é minimal.*

Apêndice A

Resultados Auxiliares

Neste apêndice, estudamos a existência de solução de alguns problemas utilizados no decorrer do texto.

A.1 Um Problema Linear

Seja $g \in L^2(\Omega)$, mostraremos que o problema

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla v) = 0, & \text{em } C_\Omega \\ v = 0, & \text{sobre } \partial_L C_\Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu^\alpha} = g(x), & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{A.1}$$

tem uma única solução. Uma solução para o problema acima é uma função $v \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ que compre

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla v, \nabla \psi\rangle dxdy = \int_\Omega g(x)\psi(x,0)dx, \tag{A.2}$$

para todo $\psi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. Defina o funcional $f : X_0^\alpha(C_\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ de modo que

$$f(\psi) = \int_\Omega g(x)\psi(x,0)dx.$$

Pode-se mostrar que $f \in (X_0^\alpha(C_\Omega))'$. Logo, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único $v \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ tal que

$$\langle v, \psi\rangle_{X_0^\alpha(C_\Omega)} = f(\psi),$$

ou seja, vale $(A.2)$.

A.2 Estudo do Problema Sublinear

Agora, mostraremos a existência e unicidade para o problema

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla w) = & 0 \quad , \quad \text{em } C_\Omega \\ w = & 0 \quad , \quad \text{sobre } \partial_L C_\Omega \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu^\alpha} = & \lambda w^q \quad , \quad w > 0 \text{ em } \Omega \end{cases} \tag{A.3}$$

onde $0 < q < 1$, $\lambda > 0$.

Existência: Seja g a única solução do problema

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla g) = & 0 \quad , \quad \text{em } C_\Omega \\ g = & 0 \quad , \quad \text{sobre } \partial_L C_\Omega \\ \dfrac{\partial g}{\partial \nu^\alpha} = & 1 \quad , \quad \text{em } \Omega \end{cases} \tag{A.4}$$

que existe, basta ver o problema $(A.1)$. Desde que $0 < q < 1$ então, dado $\lambda > 0$ fixado, analogamente ao que foi feito no Lema 3.6, existe $M = M(\lambda) > 0$ satisfazendo

$$M \geq \lambda^{\frac{1}{1-q}} \|g\|_\infty^{\frac{q}{1-q}},$$

ou seja,

$$M \geq \lambda^q \|g\|_\infty^q.$$

Como consequência, a função Mg será supersolução para o problema $(A.3)$. Além disso, podemos tomar $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, de modo que $\epsilon\psi$ é subsolução de $(A.3)$, onde ψ é a solução do problema (3.15), basta ver novamente o Lema 3.6. Então, pela Proposição (3.3), existe uma solução para $(A.3)$.

Unicidade: Para ver unicidade, basta aplicar a Proposição (3.4).

Seja w_λ a solução para o problema (1.12). Para ver a regularidade dessa solução encontrada, aplicamos a Proposição 3.5 e obtemos $w_\lambda \in L^\infty(C_\Omega) \cap C^\gamma(\overline{C_\Omega})$. Lembrando que a função $f(t) = t^q \in C^{0,q}([0,\infty))$ para todo $0 < q < 1$, então

$$g(x) = f(w_\lambda(x,0)) \in C^{0,q\gamma}(\overline{\Omega}).$$

Portanto, pelo Teorema de Regularidade 2.13, item $ii)$, temos que $w_\lambda \in C^{1,q\gamma}(\overline{C_\Omega})$.

A.3 Um problema de autovalor

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla\phi) = 0, & \text{em } C_\Omega \\ \phi = 0, & \text{sobre } \partial_L C_\Omega \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\nu^\alpha} - a\phi = \nu_1\phi, & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{A.5}$$

onde $a(x) = \lambda q(u_\lambda(x,0))^{q-1} + (u_\lambda(x,0))^{p-1}$ e u_λ é a solução minimal do problema (P_λ).

Usaremos o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, ver Teorema $C.9$, para provar a existência de solução para o problema $(A.5)$ acima. Uma solução fraca de $(A.5)$ é uma função $\phi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ tal que

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle\nabla\phi, \nabla\psi\rangle dxdy - \int_\Omega a(x)\phi(x,0)\psi(x,0)dx = \nu_1\int_\Omega \phi(x,0)\psi(x,0)dx \tag{A.6}$$

para todo $\psi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. Inicialmente, mostraremos que essa definição está bem posta, para isso, veremos que

$$\int_\Omega a(x)\phi(x,0)^2dx \le C\|\phi\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)}\ , \quad \forall\phi \in X_0^\alpha(C_\Omega). \tag{A.7}$$

Usando a desigualdade Hardy, ver Teorema D.3

$$\left\|\frac{\phi}{d^{\frac{\alpha}{2}}}\right\|_{L^2(\Omega)} \le A_1\|\phi\|_{H_0^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega)}$$

onde $d = dist(x, \partial\Omega)$, obtemos que

$$\int_\Omega a(x)\phi^2dx \le C\|\phi\|_{L^2(\Omega)}\|\phi\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)} \tag{A.8}$$

para todo $\phi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. De fato, assumiremos que existe uma constante $M > 0$ tais que

$$C_1d^\alpha \le \epsilon\varphi_1 \le u_\lambda,\ \text{para } \epsilon \approx 0^+,$$

onde φ_1 é a primeira autofunção do operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Daí,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \lambda q u_\lambda^{q-1}\phi^2dx = \lambda q\int_\Omega u_\lambda^q\left(\frac{\phi}{u_\lambda}\right)\phi dx &\le \lambda C_1\|u_\lambda\|^q_\infty\int_\Omega\left(\frac{\phi}{d^\alpha}\right)\phi dx \\ &\le A_2\left\|\frac{\phi}{d^{\frac{\alpha}{2}}}\right\|_{L^2(\Omega)}\|\phi\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hardy, concluímos

$$\int_\Omega \lambda q u_\lambda^{q-1}\phi^2 dx \leq C_1\|\phi\|_{H_0^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega)}\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3\|\phi\|_{L^2(\Omega)}\|\phi\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)}, \tag{A.9}$$

para todo $\phi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. Por outro lado, temos

$$\int_\Omega pu(x,0)^{p-1}\phi(x,0)^2 dx \leq p\|u(x,0)\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1}\int_\Omega \phi(\cdot,0)^2 dx \leq C_2\|\phi(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{A.10}$$

para todo $\phi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. Como $Tr_\Omega : X_0^\alpha(C_\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é contínuo, existe $C_3 > 0$ tal que

$$\int_\Omega pu(x,0)^{p-1}\phi(x,0)^2 dx \leq C_3\|\phi\|_{L^2(\Omega)}\|\phi\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)} \tag{A.11}$$

Combinando $(A.9)$ e $(A.11)$, obtemos a desigualdade $(A.8)$ e como consequência, temos

$$\int_\Omega a(x)\phi^2 dx \leq A\|\phi\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)}^2,$$

para todo $\phi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. Agora mostraremos que convergência fraca

$$\phi_n \rightharpoonup \phi \quad \text{em } X_0^\alpha(C_\Omega)\ .$$

implica na forte

$$\int_\Omega a(x)\phi_n(x,0)^2 dx \longrightarrow \int_\Omega a(x)\phi(x,0)^2 dx\ .$$

De fato, usando a imersão compacta $X_0^\alpha(C_\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos que, se $\phi_n \longrightarrow \phi$ em $X_0^\alpha(C_\Omega)$, então $\phi_n(\cdot,0) \longrightarrow \phi(\cdot,0)$ em $L^2(\Omega)$. Logo,

$$|\|\phi_n\|_{L^2(\Omega)} - \|\phi\|_{L^2(\Omega)}| \leq \|\phi_n - \phi\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0\,, \tag{A.12}$$

como

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega q\lambda u_\lambda(x,0)^{q-1}\phi_n(x,0)^2 dx \right.&- \left.\int_\Omega q\lambda u_\lambda(x,0)^{q-1}\phi(x,0)^2 dx\right| \\
&= \left|\int_\Omega q\lambda u_\lambda(x,0)^{q-1}(\phi_n(x,0)^2 - \phi(x,0)^2)dx\right| \\
&\leq \lambda\|u(\cdot,0)\|_\infty^q \int_\Omega \frac{|(\phi_n(x,0)-\phi(x,0))(\phi_n(x,0)+\phi(x,0))|}{u_\lambda(x,0)}dx \\
&\leq C4\int_\Omega \left|\frac{\phi_n(x,0)+\phi(x,0)}{\epsilon\varphi_1}\right| |\phi_n(x,0)-\phi(x,0)|dx \\
&\leq C5\int_\Omega \left|\frac{\phi_n(x,0)+\phi(x,0)}{d^\alpha}\right| |\phi_n(x,0)-\phi(x,0)|dx.
\end{aligned}$$

Portanto, pela desigualdade de Hardy D.3 e desigualdade de Holder, obtemos

$$\left|\int_\Omega q\lambda u_\lambda(x,0)^{q-1}\phi_n(x,0)^2dx - \int_\Omega q\lambda u\lambda(x,0)^{q-1}\phi(x,0)^2dx\right| \\ \leq C_1\left\|\frac{\phi_n(\cdot,0)+\phi(\cdot,0)}{d^{\frac{\alpha}{2}}}\right\|_{L^2(\Omega)}\|\phi_n(\cdot,0)-\phi(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{A.13}$$

Concluímos de $(A.12)$ e $(A.13)$ que

$$\int_\Omega q\lambda u_\lambda(x,0)^{q-1}\phi_n(x,0)^2dx \longrightarrow \int_\Omega q\lambda u\lambda(x,0)^{q-1}\phi(x,0)^2dx\ . \tag{A.14}$$

Por outro lado,

$$\left|p\int_\Omega u_\lambda^{p-1}(\phi_n^2-\phi^2)dx\right| \leq \left|p\|u\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1}\int_\Omega(\phi_n^2-\phi^2)dx\right| \\ \leq C_2\left|\int_\Omega \phi_n^2dx - \int_\Omega \phi^2dx\right|$$

e novamente de $(A.12)$

$$p\int_\Omega u_\lambda^{p-1}\phi_n^2dx \longrightarrow p\int_\Omega u^{p-1}\phi^2dx\ . \tag{A.15}$$

Agora, iniciaremos a prova da existência de solução para o problema $(A.5)$. Para isso, defina os seguintes funcionais

(i) $F(\phi)=\int_\Omega \phi(x,0)dx,$ para todo $\phi\in X_0^\alpha(\Omega)$

(ii) $J(\phi)=\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla\phi|^2dxdy-\int_\Omega a(x)\phi(x,0)^2dx,$ para todo $\phi\in X_0^\alpha(\Omega)$

e a variedade diferencial $M=\{\phi\in X_0^\alpha(\Omega): F(\phi)=1\}$.

No que segue, assumiremos que $F,J\in C^1(X_0^\alpha(C_\Omega),\mathbb{R})$ e além disso

$$J'(\phi)(\psi)=2\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle\nabla\phi,\nabla\psi\rangle dxdy - 2\int_\Omega a(x)\phi(x,0)\psi(x,0)dx$$

e

$$F'(\phi)\psi = 2\int_\Omega \phi(x,0)\psi(x,0)dx$$

para todo $\psi\in X_0^\alpha(C_\Omega)$. Notemos que $F'(\phi)\neq 0$ para todo $\phi\in M$, pois

$$F'(\phi)\phi = 2\int_\Omega \phi(x,0)^2dx = 2\neq 0\ .$$

Afirmação: Existe $\phi_0 \in M$ tal que $J(\phi_0) = \inf\limits_{M} J(\phi) = J_\infty$. De fato, por $(A.7)$, temos

$$\begin{aligned} J(\phi) &= \int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla\phi|^2 dxdy - \int_\Omega a(x)\phi^2(x,0)dx \\ &\geq \|\phi\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - C\|\phi\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)}\|\phi\|_{L^2(\Omega)} = \|\phi\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - C\|\phi\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)} \end{aligned}$$

para $\phi \in M$. Logo, existe o ínfimo J_∞ sobre M. Daí, existe $\{\phi_n\} \subset M$ tal que $J(\phi_n) \longrightarrow J_\infty$, quando J_∞. De onde segue que

$$\left(\|\phi_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - \int_\Omega a(x)\phi_n^2(x,0)dx \right) \leq M,$$

onde M é uma constante positiva. Temos também

$$0 \leq \int_\Omega a(x)\phi_n^2(x,0)dx \leq C\|\phi_n\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)}\|\phi_n\|_{L^2(\Omega)} = C\|\phi_n\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)},$$

ou seja,

$$\|\phi_n\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - c\|\phi_n\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - M \leq 0.$$

Logo, $\{\phi_n\}$ é uma sequência limitada. Portanto, existe $\{\phi_{nj}\} \subset \{\phi_n\}$ e $\phi_0 \in X_0^\alpha(C_\Omega)$ tal que

$$\phi_{nj} \rightharpoonup \phi_0 \quad \text{em} \quad X_0^\alpha(C_\Omega).$$

Daí,

$$\|\phi_{nj}\|^2_{L^2(\Omega)} \longrightarrow \|\phi_0\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{A.16}$$

Ora, como $\{\phi_{nj}\} \subset M$, então $\|\phi_{nj}\|^2_{L^2(\Omega)} = 1$, para todo j. Daí, $\|\phi_0\|^2_{L^2(\Omega)} = 1$, ou seja, $\phi_0 \in M$. Então, $J(\phi_0) \leq J_\infty$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} J(\phi_0) &= \|\phi_0\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - \int_\Omega a(x)\phi_0^2(x,0)dx \\ &\leq \liminf \|\phi_{nj}\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - \limsup \int_\Omega a(x)\phi_{nj}^2(x,0)dx \\ &\leq \liminf \|\phi_{nj}\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} + \liminf \int_\Omega -a(x)\phi_{nj}^2(x,0)dx \\ &\leq \liminf \left(\|\phi_{nj}\|^2_{X_0^\alpha(C_\Omega)} - \int_\Omega a(x)\phi_{nj}^2(x,0)dx \right) = J_\infty. \end{aligned}$$

Portanto $J(\phi_0) = J_\infty$. Mostrando a afirmação. Pelo Teorema dos Multiplicadores de Langrange, resulta que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(\phi_0) = \lambda F'(\phi_0),$$

ou seja,

$$J'(\phi_0)\varphi = \lambda F'(\phi_0)\varphi, \quad \forall \varphi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$$

e consequentemente

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}\langle \nabla\phi_0, \nabla\varphi\rangle dxdy - \int_\Omega a(x)\phi_0(x,0)\varphi(x,0)dx = \lambda \int_\Omega \phi(x,0)\varphi(x,0)dx, \quad \text{(A.17)}$$

para todo $\varphi \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. Donde segue que ϕ_0 é uma solução do problema $(A.5)$ e λ é o auto-valor correspondente. Fazendo $\varphi = \phi_0$ em $(A.17)$, obtemos $J(\phi_0) = \lambda$, ou seja,

$$\lambda = \min\{J(\phi) : \|\phi(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)} = 1\} = \min_M J(\phi). \quad \text{(A.18)}$$

Agora, seja ν um autovalor qualquer de $(A.5)$ e ϕ a auto-função associada. Temos

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla\phi|^2 dxdy - \int_\Omega a(x)\phi^2(x,0)dx = \nu \int_\Omega \phi^2(x,0). \quad \text{(A.19)}$$

Se $\phi \in M$, então $J(\phi) = \nu$, que implica

$$\lambda \leq \nu.$$

Por outro lado, se $\phi \notin M$, então $\phi' = \dfrac{\phi}{\|\phi\|_{L^2(\Omega)}} \in M$. Segue de $(A.18)$ que $\lambda \leq J(\phi')$, entretanto

$$\lambda \leq J(\phi') = \frac{\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla\phi|^2 dxdy - \int_\Omega a(x)\phi^2(x,0)dx}{\|\phi(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)}} = \frac{\nu \int_\Omega \phi(x,0)dx}{\|\phi(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)}} = \nu.$$

Portanto, concluímos que λ é o primeiro autovalor de $(A.5)$, o qual denotaremos por ν_1. Além disso, para todo

$$\nu_1 = \min_{\phi \in X_0^\alpha(C_\Omega)} \frac{\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha}|\nabla\phi|^2 dxdy - \int_\Omega a(x)\phi^2(x,0)dx}{\|\phi(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)}}. \quad \text{(A.20)}$$

Importante A função ϕ_0 pode ser escolhida como sendo não negativa, pois podemos trocar por $|\phi_0| \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. De fato, basta observar que $J(\phi_0) = J(|\phi_0|)$. Pelo princípio do máximo, ver Teorema D.2, obtemos, na verdade $\phi_0 > 0$ em $\overline{C_\Omega}$.

Apêndice B

Um Problema de Valor Inicial

Nesse apêndice, temos como objetivo trabalhar com um problema de valor inicial, este, será útil para justificar que o espaço $H(\alpha/2,\Omega)$ está contido na imagem do operador traço do espaço $X_0^\alpha(C_\Omega)$, que afirmamos na Observação 2.3.1. Boa parte dos cálculos realizados que serão apresentados foram retirados de [27]. Inicialmente, listamos alguns resultados que serão frequentemente usados.

Teorema B.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado. Então, o problema de autovalor*

$$-\Delta u = \mu u \ \text{em } \Omega, \ u \in H_0^1(\Omega)$$

possui um número infinito e enumerável de autovalores

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_i \leq \cdots$$

tais que

$$\mu_i \to \infty \ \text{quando } i \to \infty$$

e autofunções φ_i que constituem uma base ortonormal completa de $L^2(\Omega)$.

Demonstração: Ver Teorema 8.5.1 em [37].

■

Teorema B.2 (Lei de Weyl) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e*

$$0 < \mu_1 < \cdots < \mu_j < \cdots$$

os autovalores de operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$*. Então,*

$$\lim_{j\to 0} \frac{\mu_j}{4\pi^2\left(\frac{j}{\omega_N V}\right)^{\frac{2}{N}}} = 1$$

onde ω_N *é o volume da bola unitária em* $\mathbb{R}^N$ *e* V *é o volume de* Ω*.*

Demonstração: Ver [59], página 429.

■

Teorema B.3 *A função Gamma dada por*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt,$$

satisfaz

$$\Gamma(1-x)\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Demonstração: *Ver teorema* 2.12 *em* [44]

■

Conforme é exposto em ( ), mais precisamente na seção ( ), a equação

$$v''(s) + \frac{v'(s)}{s} - v(s)\Big(1 + \frac{\alpha^2}{s^2}\Big) = 0$$

é chamada de Equação de Bessel Modificada, e apresenta como soluções L.I. as funções

$$I_{\frac{\alpha}{2}}(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!\Gamma(\alpha+r+1)}\left(\frac{s}{2}\right)^{2r+\frac{\alpha}{2}}$$

e

$$K_{\frac{\alpha}{2}}(s) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{I_{-\frac{\alpha}{2}}(s) - I_{\frac{\alpha}{2}}(s)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)}\right).$$

Essas funções são chamadas de Funções de Bessel Modificada. A combinação linear de tais funções é a solução geral da equação de Bessel Modificada.

Teorema B.4 *As funções de Bessel modificadas* $I_{\frac{\alpha}{2}}$ *e* $K_{\frac{\alpha}{2}}$ *apresentam os seguintes comportamentos assintóticos*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{I_{\frac{\alpha}{2}}(x)}{\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}} = 1 \quad e \quad \lim_{x\to\infty} \frac{K_{\frac{\alpha}{2}}(x)}{\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x}} = 1.$$

Demonstração: Ver Teorema 4.21 em [10].

■

Teorema B.5 *A função de Bessel modificada $K^{\frac{\alpha}{2}}$ apresentada a seguinte propriedade,*

$$\frac{d}{dy}(y^n K_n(y)) = -y^n K_{n-1}(y)$$

para todo n não necessariamente inteiro.

Demonstração: Ver Teorema 4.16 em [10]. ■

Teorema B.6 *A função de Bessel modificada $K_{\frac{\alpha}{2}}$, satisfaz a seguinte propriedade,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{K_{\frac{\alpha}{2}}(x)}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\left(\frac{1}{2}x\right)^{-\frac{\alpha}{2}}} = 1.$$

Demonstração: Ver Propriedade 9.6.9 em [1]. ■

B.1 Um Problema de Valor Inicial

No que segue, vamos explicitar a solução para o problema

$$\begin{cases} \phi''(y) + \dfrac{1-\alpha}{y}\phi'(y) - \lambda\phi(y) = 0, \\ \phi(0) = 1, \\ \lim\limits_{y\to\infty} \phi(y) = 0 \end{cases}, \tag{B.1}$$

onde $\alpha \in (0,2)$ e $\lambda > 0$. A existência e unicidade de solução para esse problema pode ser encontrado em [52].

Considere $\psi(y) = y^{\frac{\alpha}{2}} v(\lambda^{1/2} y)$ para $y > 0$, onde v é uma função a determinar. Veja que,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(y) = \frac{\alpha}{2} y^{\frac{\alpha}{2}-1} v(\lambda^{\frac{1}{2}}) + y^{\frac{\alpha}{2}} v'(\lambda^{\frac{\alpha}{2}})\lambda^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{\alpha}{2}}\lambda\left[\frac{\alpha}{2y\lambda} v(\lambda^{\frac{1}{2}}y) + \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} v'(\lambda^{\frac{1}{2}}y)\right]$$

e

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(y) = y^{\frac{\alpha}{2}}\lambda\left[\frac{((\frac{\alpha}{2})^2 - \frac{\alpha}{2})}{y^2\lambda} v(\lambda^{\frac{1}{2}}y) + \frac{\alpha}{y\lambda^{\frac{1}{2}}} v'(\lambda^{\frac{1}{2}}y) + v''(\lambda^{\frac{1}{2}}y)\right].$$

Suponha que ψ satisfaz a primeira condição do problema $(B.1)$, então

$$\begin{aligned}
0 =& \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{(1-\alpha)}{y}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \lambda\psi \\
=& y^{\frac{\alpha}{2}}\lambda\left[\left(\frac{((\frac{\alpha}{2})^2 - \frac{\alpha}{2})}{y^2\lambda}v(\lambda^{\frac{1}{2}}y) + \frac{\alpha}{y\lambda^{\frac{1}{2}}}v'(\lambda_j^{\frac{1}{2}}y) + v''(\lambda^{\frac{1}{2}}y)\right) + \right. \\
&\left. + \frac{(1-\alpha)}{y}\left(\frac{\alpha}{2y\lambda}v(\lambda^{\frac{1}{2}}y) + \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}v'(\lambda^{\frac{1}{2}}y)\right) - v(\lambda^{\frac{1}{2}}y)\right] \\
0 =& \, y^{\frac{\alpha}{2}}\lambda\left[v''(\lambda^{\frac{1}{2}}y) + v'(\lambda^{\frac{1}{2}}y)\left(\frac{\alpha}{y\lambda^{\frac{1}{2}}} + \frac{(1-\alpha)^{\frac{1}{2}}}{y\lambda}\right) + \right. \\
&\left. + \frac{(1-\alpha)}{y}\frac{\alpha}{2y\lambda}v(\lambda^{\frac{1}{2}}y) - v(\lambda^{\frac{1}{2}}y)\left(1 + \frac{\frac{\alpha}{2} - (\frac{\alpha}{2})^2}{y^2\lambda}\right)\right] \\
=& y^{\frac{\alpha}{2}}\lambda\left[v''(\lambda^{\frac{1}{2}}y) + \frac{v'(\lambda^{\frac{1}{2}}y)}{y\lambda^{\frac{1}{2}}} - v(\lambda^{\frac{1}{2}}y)\left(1 + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{y^2\lambda}\right)\right] \\
=& y^{\frac{\alpha}{2}}\lambda\left[v''(\lambda^{\frac{1}{2}}y) + \frac{v'(\lambda^{\frac{1}{2}}y)}{y\lambda^{\frac{1}{2}}} - v(\lambda^{\frac{1}{2}}y)\left(1 + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{(y\lambda^{\frac{1}{2}})^2}\right)\right] \\
=& y^{\frac{\alpha}{2}}\lambda\left[v''(s) + \frac{v'(s)}{s} - v(s)\left(1 + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{(s)^2}\right)\right],
\end{aligned}$$

com $s = \lambda^{\frac{1}{2}}y$ e $y > 0$. Portanto, obtemos uma equação de Bessel modificada

$$v''(s) + \frac{v'(s)}{s} - v(s)\left(1 + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{(s)^2}\right) = 0, \tag{B.2}$$

para $s > 0$. Sabe-se que as funções $I_{\frac{\alpha}{2}}(\lambda^{\frac{1}{2}}y)$ e $K_{\frac{\alpha}{2}}(\lambda^{\frac{1}{2}}y)$, onde

$$I_{\frac{\alpha}{2}}(s) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!\Gamma(\alpha+r+1)}\left(\frac{s}{2}\right)^{2r+\frac{\alpha}{2}}$$

e

$$K_{\frac{\alpha}{2}}(s) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{I_{-\frac{\alpha}{2}}(s) - I_{\frac{\alpha}{2}}(s)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)}\right)$$

são soluções linearmente independente da equação $(B.2)$ e

$$C_1 I_{\frac{\alpha}{2}}(\lambda^{\frac{1}{2}}y) + C_2 K_{\frac{\alpha}{2}}(\lambda^{\frac{1}{2}}y), \tag{B.3}$$

para todo C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$, é a solução geral. Portanto, as funções

$$y^{\frac{\alpha}{2}}C_1 I_{\frac{\alpha}{2}}(\lambda^{\frac{1}{2}}y), \;\; y^{\frac{\alpha}{2}}C_2 K_{\frac{\alpha}{2}}(\lambda^{\frac{1}{2}}y) \text{ e } \;\; y^{\frac{\alpha}{2}}C_1 I_{\frac{\alpha}{2}}(\lambda^{\frac{1}{2}}y) + y^{\frac{\alpha}{2}}C_2 K_{\frac{\alpha}{2}}(\lambda^{\frac{1}{2}}y),$$

para todo C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$, satisfazem a primeira equação de $B.1$.

Vejamos que a função $y^{\frac{\alpha}{2}} I_{\frac{\alpha}{2}}(\lambda^{\frac{1}{2}} y)$ não satisfaz a terceira condição de $(B.1)$. De fato, pelo teorema $B.4$, temos

$$\lim_{s\to\infty} \frac{I_{\frac{\alpha}{2}}(s)}{\frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}}} = 1,$$

ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se, $s > \delta$, então

$$\begin{aligned} \left|1 - \frac{I_{\frac{\alpha}{2}}(s)}{\frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}}}\right| < \epsilon \quad &\Rightarrow\ 1 - \frac{I_{\frac{\alpha}{2}}(s)}{\frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}}} < \epsilon \\ &\Rightarrow\ (1-\epsilon)\frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}} < I_{\frac{\alpha}{2}}(s). \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon = \frac{1}{2}$, temos que

$$\frac{1}{2}\frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}} < |I_{\frac{\alpha}{2}}(s)|,$$

daí, fazendo $s = \lambda^{\frac{1}{2}} y$, temos

$$\frac{1}{2}\frac{e^{\lambda^{\frac{1}{2}} y}}{\sqrt{2\pi\lambda^{\frac{1}{2}} y}} < |I_{\frac{\alpha}{2}}(\lambda^{\frac{1}{2}} y)|.$$

Portanto,

$$\lim_{y\to\infty} y^{\frac{\alpha}{2}} |I_{\frac{\alpha}{2}}(\lambda^{\frac{1}{2}} y)| = \infty,$$

Por outro lado, sabendo que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{K_{\frac{\alpha}{2}}(s)}{\left(\frac{\pi}{2s}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-s}} = 1,$$

dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se, $s > \delta$, então

$$\left|\frac{K_{\frac{\alpha}{2}}(s)}{\sqrt{\frac{\pi}{2s}}e^{-s}} - 1\right| < \epsilon \quad \Rightarrow\ \frac{|K_{\frac{\alpha}{2}}(s)|}{\sqrt{\frac{\pi}{2s}}e^{-s}} < \epsilon + 1.$$

Tome $\epsilon = \frac{1}{2}$, logo

$$|K_{\frac{\alpha}{2}}(s)| < \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2s}}e^{-s}.$$

Fazendo $s = \lambda^{\frac{1}{2}} y$, segue que

$$y^{\frac{\alpha}{2}} |K_{\frac{\alpha}{2}}(s)|^2 < y^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda^{\frac{1}{2}} y}} e^{-\lambda^{\frac{1}{2}} y}\right)^2 = \frac{9\pi}{8} y^{(\frac{\alpha}{2}-1)} e^{-2\lambda^{\frac{1}{2}} y},$$

para $y > \lambda^{-\frac{1}{2}}\delta$. Assim,

$$\lim_{y\to\infty} y^{\frac{\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{2}}(\lambda^{\frac{1}{2}} y)^2 = 0,$$

ou seja, a função $y^{\frac{\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{2}}(\lambda^{\frac{1}{2}} y)^2$ cumpre a terceira condição. Portanto,

$$\psi(y) = y^{\alpha} C_2 K_{\frac{\alpha}{2}}(\lambda^{\frac{1}{2}} y),$$

onde C_2 é uma constante a determinar. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\psi(y) =& y^{\frac{\alpha}{2}} C_2 K_{\frac{\alpha}{2}}(\lambda^{\frac{1}{2}} y)\\
=& y^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\pi}{2}\left(\frac{I_{-\frac{\alpha}{2}}(\lambda^{\frac{1}{2}} y) - I_{\frac{\alpha}{2}}(\lambda^{\frac{1}{2}} y)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)}\right)\\
=& \frac{y^{\frac{\alpha}{2}} C_2 \pi}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)}\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!\Gamma(\frac{\alpha}{2}+r+1)}\left(\frac{\lambda_j^{\frac{1}{2}} y}{2}\right)^{2r-\frac{\alpha}{2}} - \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!\Gamma(\frac{\alpha}{2}+r+1)}\left(\frac{\lambda^{\frac{1}{2}} y}{2}\right)^{2r+\frac{\alpha}{2}}\right]\\
=& \frac{y^{\frac{\alpha}{2}} C_2 \pi}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\left(\frac{\lambda^{\frac{1}{2}} y}{2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}} + \frac{y^{\frac{\alpha}{2}} C_2 \pi}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r!\Gamma(\frac{\alpha}{2}+r+1)}\left(\frac{\lambda_j^{\frac{1}{2}} y}{2}\right)^{2r-\frac{\alpha}{2}} -\\
&- \frac{y^{\frac{\alpha}{2}} C_2 \pi}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!\Gamma(\frac{\alpha}{2}+r+1)}\left(\frac{\lambda_j^{\frac{1}{2}} y}{2}\right)^{2r+\frac{\alpha}{2}}\\
=& \frac{C_2 \pi}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\left(\frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}} + \frac{y^{\frac{\alpha}{2}} C_2 \pi}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r!\Gamma(\frac{\alpha}{2}+r+1)}\left(\frac{\lambda^{\frac{1}{2}} y}{2}\right)^{2r-\frac{\alpha}{2}} -\\
&- \frac{y^{\frac{\alpha}{2}} C_2 \pi}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!\Gamma(\frac{\alpha}{2}+r+1)}\left(\frac{\lambda^{\frac{1}{2}} y}{2}\right)^{2r+\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\psi(0) = \frac{\pi C_2 \lambda^{\frac{-\alpha}{4}}}{2^{1-\frac{\alpha}{2}}\sin(\frac{\alpha}{2}\pi)\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}.$$

A fim de que ψ satisfaça

$$\psi(0) = 1,$$

basta considerar

$$C_2 = \frac{2^{1-\frac{\alpha}{2}}\sin(\frac{\alpha}{2}\pi)\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{\pi\lambda^{\frac{-\alpha}{4}}}. \tag{B.4}$$

Portanto,

$$\psi(y) = y^{\frac{\alpha}{2}} C_2 K_{\frac{\alpha}{2}}(\lambda^{\frac{1}{2}} y),$$

onde C_2 é dado em $(B.4)$ é a solução para o problema $(B.1)$.

Lema B.7 *Dada a função* $u = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j \in L^2(\Omega)$, *segue que*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{j=1}^{\infty}[a_j C_2 y^{\frac{\alpha}{2}} \varphi_j(x) K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)] = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x_j}[a_j C_2 y^{\frac{\alpha}{2}} \varphi_j(x) K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)],$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\sum_{j=1}^{\infty}[a_j C_2 y^{\frac{\alpha}{2}} \varphi_j(x) K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)] = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}[a_j C_2 y^{\frac{\alpha}{2}} \varphi_j(x) K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)]$$

para $j = 1, \cdots, N$,

$$\frac{\partial}{\partial y}\sum_{j=1}^{\infty}[a_j C_2 y^{\frac{\alpha}{2}} \varphi_j(x) K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)] = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial y}[a_j C_2 y^{\frac{\alpha}{2}} \varphi_j(x) K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)],$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\sum_{j=1}^{\infty}[a_j C_2 y^{\frac{\alpha}{2}} \varphi_j(x) K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)] = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[a_j C_2 y^{\frac{\alpha}{2}} \varphi_j(x) K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)].$$

Demonstração: Considerando que as derivadas das autofunções φ_j são limitadas por uma constante M, logo

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\left[a_j C_2 y^{\frac{\alpha}{2}} \varphi_j(x) K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)\right]\right| &= \left|a_j C_2 y^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j}(x) K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)\right| \\ &\leq M y^{\frac{\alpha}{2}} |a_j||C_2||K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}})| y^{\frac{\alpha}{2}} \\ &\leq \frac{|a_j|^2}{2} + \frac{M^2 |C_2|^2 |K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)|^2 y^{\alpha}}{2}.\end{aligned}$$

Sendo

$$C_2 = \frac{2^{1-\frac{\alpha}{2}} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\pi \mu_j^{-\frac{\alpha}{4}}},$$

considere

$$C_2^2 = \frac{N_{\frac{\alpha}{2}}}{\mu_j^{-\frac{\alpha}{2}}},$$

com

$$N_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2^{2-\alpha} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) \Gamma^2(1 - \frac{\alpha}{2})}{\pi^2}.$$

Assim,

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\left[a_j C_2 y^{\frac{\alpha}{2}} \varphi_j(x) K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)\right]\right| \leq \frac{|a_j|^2}{2} + \frac{M^2 N_{\frac{\alpha}{2}} |K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)|^2 y^{\alpha}}{2\lambda_j^{-\alpha}}. \tag{B.5}$$

Como

$$\lim_{j\to\infty} \frac{K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)}{\left(\frac{\pi}{2\mu_j^{\frac{1}{2}}} y\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\mu_j^{\frac{1}{2}} y}} = 1,$$

então, dado $\epsilon = 1$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)|^2 < \left(\frac{2\pi}{\mu_j^{\frac{1}{2}} y}\right) e^{-\mu_j^{\frac{1}{2}} y} \quad \text{para } \; j > j_0. \tag{B.6}$$

Substituindo $(B.6)$ em $(B.5)$, obtemos

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\left[a_j C_2 y^{\frac{\alpha}{2}} \varphi_j(x) K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)\right]\right| \leq \frac{|a_j|^2}{2} + \frac{M^2 N_{\frac{\alpha}{2}} \pi e^{-2\mu_j^{\frac{1}{2}} y} y^{\alpha-1}}{2\mu_j^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}}. \tag{B.7}$$

Tome $k > 0$ e veja que

$$\lim_{j\to\infty} y^{\alpha-1} \frac{e^{-2\mu_j^{\frac{1}{2}} y}}{\mu_j^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}-k}} = 0,$$

ou seja, dado $\epsilon = 1$, existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$y^{\alpha-1} \frac{e^{-2\mu_j^{\frac{1}{2}} y}}{\mu_j^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}} < \frac{1}{\mu_j^k}, \qquad \text{para } \; j > j_1. \tag{B.8}$$

Daí, substituindo $(B.7)$ em $(B.8)$, obtemos

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\left[a_j C_2 y^{\frac{\alpha}{2}} \varphi_j(x) K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)\right]\right| \leq \frac{|a_j|^2}{2} + \frac{C_{\frac{\alpha}{2}}}{\mu_j^k} \tag{B.9}$$

com $C_{\frac{\alpha}{2}} = M^2 N_{\frac{\alpha}{2}} \pi$ e $j > \max\{j_0, j_1\}$. Daí, pelo Teorema $B.2$, dado $\epsilon = \frac{1}{2}$, existe $j_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} j > j_2 \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{2} 4\pi^2 \left(\frac{j}{\omega_N V}\right)^{\frac{2}{N}} < \mu_j \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{\mu_j} < \frac{(\omega_N V)^{\frac{2}{N}}}{4\pi^2} \frac{1}{j^{\frac{2}{N}}} \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{\mu_j^k} < \left[\frac{(\omega_N V)^{\frac{2}{N}}}{4\pi^2}\right]^k \frac{1}{j^{\frac{2k}{N}}} \quad . \end{aligned} \tag{B.10}$$

De $(B.9)$ e $(B.10)$, segue que

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\left[a_j C_2 y^{\frac{\alpha}{2}} \varphi_j(x) K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)\right]\right| \leq \frac{|a_j|^2}{2} + L_{N,\alpha,\Omega} \frac{1}{j^{\frac{2k}{N}}} \tag{B.11}$$

para $j > \max\{j_0, j_1, j_2\}$, onde $L_{N,\alpha,\Omega} = C_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{(\omega_N V)^{\frac{2}{N}}}{2\pi^2}\right)$.

Agora, escolha k tal que $\frac{2k}{N} > 1$. Logo, os dois termos do lado direito de $(B.11)$ são termos gerais de séries convergentes. Pelo teste M. de Weistrass, segue o resultado. De modo análogo para os demais.

■

Proposição B.8 *Seja $u \in H(\alpha/2, \Omega)$, então o conjunto*

$$M = \{w \in X_0^\alpha(C_\Omega) : w(x,0) = u(x), \ q.t.p \ em \ \Omega\}$$

é não vazio.

Demonstração: Dada a função

$$v(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j B_{j,\frac{\alpha}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} \varphi_j(x) K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_i^{\frac{1}{2}} y),$$

observe que $v(\cdot, 0) = u(\cdot)$ em Ω, pois, podemos ver a função v como

$$v(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \psi(y) \varphi_j(x),$$

onde $\psi(y) = B_{j,\frac{\alpha}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} \varphi_j(x) K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_i^{\frac{1}{2}} y)$. Daí,

$$v(x,0) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \psi(0) \varphi_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j(x) = u(x) \quad \text{ em } \ \Omega.$$

Agora, mostraremos que $v \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. De fato, veja que

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha} |\nabla v|^2 dxdy = \int_0^\infty y^{1-\alpha} \int_\Omega |\nabla_x v|^2 dxdy + \int_\Omega \int_0^\infty y^{1-\alpha} v_y^2 dxdy. \tag{B.12}$$

Pelo Lema anterior, temos

$$\int_\Omega |\nabla_x v|^2 dx = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j B_{j,\alpha}^2 y^\alpha a_j^2 K_{\frac{\alpha}{2}}^2(\mu_i^{\frac{1}{2}} y) \tag{B.13}$$

e

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_0^\infty y^{1-\alpha} v_y^2 dxdy &= \int_\Omega \int_0^\infty y^{1-\alpha} \left[\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j B_{j,\frac{\alpha}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} \varphi_j(x) K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_i^{\frac{1}{2}} y)\right)_y\right]^2 dxdy \\ &= \int_0^\infty y^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} a_j ((B_{j,\frac{\alpha}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_i^{\frac{1}{2}} y))_y)^2 dy.\end{aligned} \tag{B.14}$$

Daí, substituindo $(B.13)$, $(B.14)$ em $(B.12)$ e usando o fato de que $\psi(y) = B_{j,\frac{\alpha}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} \varphi_j(x) K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_i^{\frac{1}{2}} y)$, então

$$\begin{aligned}
\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha} |\nabla v|^2 dxdy &= \int_0^\infty y^{1-\alpha} \sum_{j=1}^\infty a_j^2 \left[\mu_j \left(B_{j,\frac{\alpha}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_i^{\frac{1}{2}} y) \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(B_{j,\frac{\alpha}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_i^{\frac{1}{2}} y) \right)_y \right)^2 \right] dy \\
&= \sum_{j=1}^\infty a_j^2 \int_0^\infty y^{1-\alpha} \left[\mu_j \psi(y)^2 + \psi'(y)^2 \right] dy \\
&= \sum_{j=1}^\infty {a_j}^2 \left[\int_0^\infty y^{1-\alpha} \mu_j \psi(y)^2 + \int_0^\infty y^{1-\alpha} \psi'(y)^2 dy \right].
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Usando a integração por partes e o fato de ψ ser solução

$$\begin{cases} \dfrac{(1-\alpha)}{y} \dfrac{\partial \psi}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \mu_j \psi = 0, \ y > 0 \\ \psi(0) = 1 \end{cases},$$

temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty y^{1-\alpha} \psi'(y)^2 dy &= \int_0^\infty y^{1-\alpha} \psi'(y) \psi'(y) dy \\
&= \lim_{b\to\infty} y^{1-\alpha} \psi'(y) \psi(y) \Big|_0^b - \int_0^\infty \psi(y) \left[(1-\alpha) y^{-\alpha} \psi'(y) + y^{1-\alpha} \psi''(y) \right] dy \\
&= \lim_{b\to\infty} y^{1-\alpha} \psi'(y) \psi(y) \Big|_0^b - \int_0^\infty \psi(y) (1-\alpha) y^{-\alpha} \psi'(y) - \\
&\quad - \int_0^\infty y^{1-\alpha} \psi(y) \left[-\frac{(1-\alpha)}{y} \psi'(y) + \lambda_j \psi(y) \right] dy \\
&= \lim_{b\to\infty} y^{1-\alpha} \psi'(y) \psi(y) \Big|_0^b - \mu_j \int_0^\infty y^{1-\alpha} \psi(y)^2 dy.
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Substituindo $(B.16)$ em $(B.15)$, obtemos

$$\int_{C_\Omega} y^{1-\alpha} |\nabla v|^2 dxdy = \sum_{j=1}^\infty a_j^2 \lim_{b\to\infty} y^{1-\alpha} \psi'(y) \psi(y) \Big|_0^b. \tag{B.17}$$

E ainda

$$\lim_{b\to\infty} y^{1-\alpha} \psi'(y) \psi(y) \Big|_0^b = \lim_{y\to\infty} y^{1-\alpha} \psi'(y) \psi(y) - \lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha} \psi'(y) \psi(y).$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha} \psi'(y) &= \lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha} y^{1-\alpha} \left(B_{j,\frac{\alpha}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{\alpha}{2}} y) \right)_y \\
&= \lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha} y^{1-\alpha} B_{j,\frac{\alpha}{2}} \mu_j^{-\frac{\alpha}{4}} \left((\mu_j^{\frac{1}{2}} y)^{\frac{\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{\alpha}{2}} y) \right)_y.
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Fazendo $z = \mu_j^{\frac{\alpha}{2}} y$, temos $y = \mu_j^{-\frac{1}{2}} z$,

$$\left(z^{\frac{\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{2}}(z)\right)_z = \left(z^{\frac{\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{2}}(z)\right)_y \frac{dy}{dz} = \mu_j^{-\frac{1}{2}} \left(z^{\frac{\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{2}}(z)\right)_y$$

e assim

$$\begin{aligned}\left((\mu_j^{\frac{1}{2}} y)^{\frac{\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)\right)_y =& \mu_j^{\frac{1}{2}} (z^{\frac{\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{2}}(z))_z \\ =& -\mu_j^{\frac{1}{2}} (z^{\frac{\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{2}-1}(z)) \\ =& -\mu_j^{\frac{1}{2}} (\mu_j^{\frac{1}{2}} y)^{\frac{\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{2}-1}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y),\end{aligned}$$

logo,

$$B_{j,\frac{\alpha}{2}} \mu_j^{-\frac{\alpha}{4}} \left((\mu_j y)^{\frac{\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)\right)_y = -B_{j,\frac{\alpha}{2}} \mu_j^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{2}-1}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y). \tag{B.19}$$

Substituindo $(B.19)$ em $(B.18)$, obtemos

$$\lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha} y^{1-\alpha} \psi'(y) = -B_{j,\frac{\alpha}{2}} \mu_j^{-\frac{1}{2}} \lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha} y^{1-\frac{\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{2}-1}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y).$$

Mas,

$$\begin{aligned} y^{1-\frac{\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{2}-1}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y) =& \frac{\pi}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}+r+2\right)} \left(\frac{\lambda_j^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{2r-\frac{\alpha}{2}+1} y^{2r-2\frac{\alpha}{2}+2} - \right. \\ & \left. - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+r\right)} \left(\frac{\mu_j^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{2r+\frac{\alpha}{2}-1} y^{2r} \right]\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha}\psi'(y) = -B_{j,\frac{\alpha}{2}} \mu_j^{-\frac{1}{2}} \left[-\frac{\pi}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(\frac{\mu_j^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1} \right] = k_\alpha \mu_j^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Logo,

$$\lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha}\psi'(y)\psi(y) = \lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha}\psi'(y) \lim_{y\to 0^+} y^{1-\alpha}\psi(y) = k_\alpha \mu_j^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Assim,

$$\lim_{b\to\infty} y^{1-\alpha}\psi'(y)\psi(y)\Big|_0^b = \lim_{y\to\infty} y^{1-\alpha}\psi'(y)\psi(y) - k_\alpha \mu_j^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Por outro lado, usando as aproximações das funções de Bessel, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to\infty} y^{1-\alpha}\psi'(y)\psi(y) &= \lim_{y\to\infty} y^{1-\alpha}\big(B_{j,\frac{\alpha}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)\big)_y \\
&= \lim_{y\to\infty} y^{1-\alpha} B_{j,\frac{\alpha}{2}}\big(y^{\frac{\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)\big)_y \\
&= \lim_{y\to\infty} y^{1-\alpha} B_{j,\frac{\alpha}{2}}\big(-y^{\frac{\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{2}-1}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)\big)_y \\
&= \lim_{y\to\infty}\left(y^{\frac{2+\alpha}{4}} B_{j,\frac{\alpha}{2}}\left(-\frac{\pi}{2\mu_j^{\frac{1}{2}} y}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\mu_j^{\frac{1}{2}} y}\right)\left(\frac{K_{\frac{\alpha}{2}-1}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y)}{\left(-\frac{\pi}{2\mu_j^{\frac{1}{2}} y}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\mu_j^{\frac{1}{2}} y}}\right) \\
&=0
\end{aligned}$$

e

$$\lim_{y\to\infty}\psi(y) = \lim_{y\to\infty} B_{j,\frac{\alpha}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} K_{\frac{\alpha}{2}}(\mu_j^{\frac{1}{2}} y) = \lim_{y\to\infty} B_{j,\frac{\alpha}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}}\left(-\frac{\pi}{2\mu_j^{\frac{1}{2}} y}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\mu_j^{\frac{1}{2}} y} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{b\to\infty} y^{1-\alpha}\psi'(y)\psi(y)\Big|_0^b = -k_\alpha \mu_j^{\frac{\alpha}{2}} \tag{B.20}$$

e por fim, dessa igualdade e de $(B.17)$, concluímos que

$$\|v\|_{X_0^\alpha(C_\Omega)} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2\big(-k_\alpha \mu_j^{\frac{\alpha}{2}}\big) = -k_\alpha \|u\|_{H(\alpha/2,\Omega)}, \tag{B.21}$$

pois, $u \in H(\alpha/2,\Omega)$. Portanto, $v \in X_0^\alpha(C_\Omega)$. ■

Apêndice C

Resultados Clássicos

Nesse apêndice fizemos uma coletânea com os principais resultados usados no decorrer do trabalho. Os resultados envolvendo os espaços L^p podem ser vistos em [13].

Teorema C.1 *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) Seja (f_n) uma sequência de funções $L^1(\Omega)$. Suponha que $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p em Ω e, além disso, existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que, para todo n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em Ω. Então, $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$.*

Teorema C.2 *(Teorema da Convergência Monótona) Seja (f_n) uma sequência monótona crescente de funções mensuráveis não negativas tal que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Então*

$$\int_\Omega f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

Seja $(\Omega_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ dois espaços de medida que são σ- finita. Pode-se definir de maneira padrão a estrutura do espaço de medida $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ no produto cartesiano $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

Teorema C.3 *(Teorema de Tonelli) Seja $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável satisfazendo*

$$\int_{\Omega_2} |F(x, y)| d\mu_2 < \infty \text{ para todo } x \in \Omega_1,$$

e

$$\int_{\Omega_1} d\mu_1 \int_{\Omega_2} |F(x, y)| d\mu_2 < \infty.$$

Então, $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Teorema C.4 *(Fubini) Assuma que* $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. *Então, para todo* $x \in \Omega_1$, $F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2)$ *e* $\int_{\Omega_2} F(x,y)d\mu_2 \in L^1_x(\Omega_1)$. *Similarmente, para todo* $x \in \Omega_2$, $F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1)$ *e* $\int_{\Omega_1} F(x,y)d\mu_1 \in L^1_y(\Omega_2)$. *Além disso,*

$$\int_{\Omega_1} d\mu_1 \int_{\Omega_2} F(x,y)d\mu_2 = \int_{\Omega_2} d\mu_2 \int_{\Omega_1} F(x,y)d\mu_1 = \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} F(x,y)d\mu_1 d\mu_2.$$

Teorema C.5 *Seja* X *um espaço de Banach reflexivo com norma* $\|\cdot\|$, *e considere* $M \subset X$ *um subconjunto fracamente fechado de* X. *Suponha que* $I : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *é coercivo e fracamente semicontínuo em* M *com respeito a* X. *Então,* I *é limitado inferiormente em* M *e o ínfimo é atingido em* M.

Demonstração: Ver Teorema 1.2 em [56].

■

Definição C.6 *Seja* X *um espaço de Banach e* $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *um funcional de classe* $C^1(X,\mathbb{R})$, *dizemos que* $(w_n) \subset X$ *é uma sequência* (PS) *no nível* $c \in \mathbb{R}$, *denotada por* $(PS)_c$, *quando*

$$I(w_n) \to c \quad \text{e} \quad I'(w_n) \to 0.$$

Definição C.7 *Dizemos que* I *verifica a condição de Palais-Smale, ou simplesmente a condição* (PS), *quando toda sequência* $(PS)_c$ *para* $c \in \mathbb{R}$, *admite uma subsequência que converge forte em* X, *isto é,*

$$I(w_n) \to c \quad \text{e} \quad I'(w_n) \to 0$$

implica que existe $(w_{nj}) \subset (w_n)$ *e* $w_0 \in X$ *tais que*

$$w_{nj} \to w_0 \text{ em } X.$$

Teorema C.8 *(Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz) Seja* X *um espaço de Banach e* $I : X \longrightarrow \mathbb{R} \in C^1(X,\mathbb{R})$ *verificando a condição* (PS). *Se* I *cumpre as condições*

i) Existem $r, \rho > z0$ *tais que*

$$I(u) \geq r > I(0), \quad \|u\| = \rho$$

ii) Existem $e \in X \setminus \overline{B_\rho(0)}$ *tal que*

$$I(e) < r,$$

então,

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0,\ \|\gamma(1)\| > \rho \text{ e } I(\gamma(1)) < r\},$$

é um valor crítico de I.

Demonstração: Ver Teorema 1.17 em [60].

■

Observação C.8.1 *O nível c é conhecido como nível do Passo da Montanha. Além disso, as condições $i)$, $ii)$ são chamadas de geometria do passo da montanha.*

Teorema C.9 *(Teorema dos Multiplicadores de Lagrange) Sejam X um espaço de Banach, $J, \psi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funcionais de classe $C^1(X, \mathbb{R})$ e*

$$M = \{u \in X : \psi(u) = 1\} = \psi^{-1}(\{1\})$$

com

$$\psi'(u) \neq 0 \text{ para todo } u \in M.$$

Se J é limitado inferiormente em M e existe $u_0 \in M$ verificando

$$J(u_0) = \inf_{u\in M} J(u),$$

então, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(u_0) = \lambda\psi'(u_0).$$

Em outras palavras, u_0 é ponto crítico de J restrito a M.

Demonstração: Ver Teorema em [60].

■

Teorema C.10 *(Identidade de Picone) Sejam $u \geq 0$ e $v > 0$ funções diferenciáveis, $p > 1$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Então, $L(u,v) = R(u,v) \geq 0$, onde*

$$L(u,v) = |\nabla u|^p + (p-1)\frac{|u|^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{|u|^{p-2}}{v^{p-1}}\rangle\nabla u, \nabla v\rangle|\nabla v|^{p-2},$$

$$R(u,v) = |\nabla u|^p - \nabla\left(\frac{|u|^p}{v^{p-1}}\right)|\nabla v|^{p-2}\nabla v.$$

Além disso, $L(u,v) = 0 \Rightarrow \nabla\left(\frac{u}{v}\right) = 0$ q.t.p.

Demonstração: Ver Proposição 3.1 em [26].

■

Apêndice D

Outros Resultados

Nesse apêndice alguns resultados que eventualmente não são conhecidos e que serão usados no decorrer do trabalho.

Teorema D.1 *(Princípio do máximo) Sejam $N \geq 1$, $\alpha \in (0,2)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Considere $h \in H(-\alpha/2, \Omega)$ e $u \in H(\alpha/2, \Omega)$ uma solução para o problema*

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u = h(x), & em\ \Omega \\ u = 0, & sobre\ \partial\Omega \end{cases}$$

e seja v a solução para o problema equivalente

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla v) = & 0 \quad , \quad em\ C_\Omega \\ v = & 0 \quad , \quad sobre\ \partial_L C_\Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu^\alpha} = & h(x) \quad , \quad em\ \Omega \end{cases} .$$

Se $h \geq 0$ em Ω, então $u \geq 0$ em Ω e $v \geq 0$ em C_Ω.

Demonstração: Ver Lema 2.3 em [23].

■

Teorema D.2 *(Princípio do máximo fraco) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $R > 0$ arbitrário. Considere v uma função localmente integrável em $\Omega \times (0,R)$ tal que*

$$\int_{\Omega\times(0,R)} y^{1-\alpha}|\nabla v|^2 dxdy < +\infty.$$

Assuma que

$$\begin{cases} -div(y^{1-\alpha}\nabla v) = & 0 \quad , \quad em\ \Omega \times (0,R) \\ v \geq & 0 \quad , \quad sobre\ \Omega \times (0,R) \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu^\alpha} \geq & 0 \quad , \quad em\ \Omega \end{cases} , \tag{D.1}$$

ou seja,

$$\int_{\Omega\times(0,R)} y^{1-\alpha}\langle\nabla v,\nabla\varphi\rangle dxdy \geq 0$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega\times(0,R),y^{1-\alpha})$ *tal que* $\varphi \geq 0$ *q.t.p em* $\Omega\times(0,R)$ *e* $\varphi = 0$ *em* $\big(\partial\Omega\times(0,R)\big)\cup\big(\Omega\times\{0\}\big)$. *Então,* $v\equiv 0$, *ou para todo subconjunto compacto* $K\subset \Omega\times[0,R)$, *temos*

$$\inf v\Big|_K > 0.$$

Demonstração: Ver Lema 2.4 em [23].

■

O próximo Teorema pode ser encontrado em [35], enunciaremos a seguir pra facilitar a leitura do texto, pois no Apêndice B, fazemos uso desse resultado.

Teorema D.3 *(Hardy Sobolev) Para todo* $p\in(1,\infty)$ *e* $s\in(0,1)$ *os seguintes fatos são verdadeiros*

i) se $sp>1$, *então para todo* $u\in W_0^{s,p}(\Omega)$, *temos*

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{dist(x,\partial\Omega)^{sp}}dx \leq C\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy,$$

onde C *é uma constante positiva que depende apenas de* Ω, N, p *e* s.

ii) se $sp<1$, *então para todo* $u\in W_0^{s,p}(\Omega)$, *temos*

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{dist(x,\partial\Omega)^{sp}}dx \leq C'\left(\int_\Omega |u|^p dx + \int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\right),$$

onde C' *é uma constante positiva que depende apenas de* Ω, N, p *e* s.

iii) se $sp=1$, *então para todo* $u\in W_0^{s,p}(\Omega)$, *temos*

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{dist(x,\partial\Omega)^{sp}}dx \leq C''\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy,$$

onde C'' *é uma constante positiva que depende apenas de* Ω, N, p *e* s.

Bibliografia

[1] ABRAMOWITZ, M., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tablets*. Courier Corporation, Estados Unidos, 2012.

[2] AMBROSETTI, A. *Critical points and nonlinear variational problems*. Mem. Soc. Math. France (N.S.) 49, 1-139, 1992.

[3] AMBROSETTI, A.; BRÉZIS. Brézis, H.; CERAMI, G. *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*. J. Funct. Analysis 122, 519-543, 1994.

[4] AMBROSETTI, A.; RABINOWITZ, P. H. *Dual variational methods in critical point theory and applications*. J. Functional Analysis 14, 349-381, 1973.

[5] BAKUNIN, O. G. *Turbulence and diffusion. Springer Series in Synergetics*. Springer-Verlag, Berlin, 2008. Scaling versus equations

[6] BARRIOS, B.; COLORADO, E.; de PABLO, A.; SÁNCHEZ, U. *On some critical problems for the fractional Laplacian operator*. J. Differential. Equations 252, 6133-6162, 2012.

[7] BARRIOS, B.; COROLADO, E.; SERVADEI, R.; SORIA, F. *A critical fractional equation with concave-convex power*, Ann. I.H. Poincaré-AN 32, 875-900, 2015. nonlinearities

[8] BARTLE, R. G. The elements of Integratin and Lebesgue Measure, New York: John Wiley & Sons, INC. 1995.

[9] BATES, P. W. *On some nonlocal evolution equations arising in materials science.* In Nonlinear dynamics and evolution equations, volume 48 of Fields Inst. Commun., 13-52. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[10] BELL, W. W. *Special Functions for Scientists and Engineers.* D. Van Nostrand Company LTD, London, 1968.

[11] BRANDLE, C.; COLORADO, E.; de PABLO, A.; SÁNCHEZ, U. *A concave-convex elliptic problem involving the fractional Laplacian*, Proc. Royal Soc. Edinburgh A. 143, 39-71, 2013.

[12] BRÉZIS, H. *How to recognize constant functions. Connections with Sobolev spaces*, Usppekhi Mat. Nauk 57 (4), 59-74, 2002; translation in Russian Math. Surveys 57 (4), 693-708, 2002.

[13] BRÉZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, New York: Springer, 2010.

[14] BRÉZIS, H.; KAMIN, S. *Sublinear elliptic equation in* $\mathbb{R}^N$. Manuscr. Math. 74, 87-106, 1992.

[15] BRÉZIS, H.; NIRENBERG, L. *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents.* Commun. Pure Appl. Math. 36, 437-477, 1983.

[16] CABRÉ, X.; SIRE, Y. *Nonlinear equations for fractional Laplacians I: Regularity, maximum principles and Hamiltonian estimates*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire, 2013.

[17] CABRÉ, X.; SIRE, Y. *Nonlinear equations for fractional Laplacians II: Existence, uniqueness, and qualitative properties of solutions*, Trans. Amer. Math. Soc. 367, 911-941, 2015.

[18] CABRÉ, X.; TAN, J. *Positive solutions of nonlinear problems involving the square root of the Laplacian*, Adv. Math. 224, 2052-2093, 2010.

[19] CAFFARELLI, L.; SILVESTRE, L. *An extension problems related to the fractional Laplacian*, Comm. Partial Differential Equations 32, 1245-1260, 2007.

[20] CAFFARELLI, L.; SILVESTRE, L. *Regularity theory for fully nonlinear integro-differential equations.* Commun. Pure Appl. Math. 62, 597-638, 2009.

[21] CAFFARELLI, L.; SILVESTRE, L. *Regularity results for nonlocal equations by approximation*. Arch. Ration. Mech. Analysis 200, 59-88, 2011.

[22] CHANG, X.; WANG, Z. Q. *Nodal and multiple solutions of nonlinear problems involving the fractional Laplacian*, J. Differential Equations 256, 2965-2992, 2014.

[23] CAPELLA, A.; DACILA, J.; DUPAIGNE, L.; SIRE, Y. *Regularity of radial extremal solutions for some nonlocal semilinear equations*, Comm. Partial Differential Equations 36, 1353-1384, 2011.

[24] CARR, P.; GEMAN, H.; MADAN, D. B.; YOR, M. *The fine structure of asset returns: An empirical investigation*, Journal of Business 75, 305-332, 2002.

[25] CUSHMAN, J.; GLINN, T. *Nonlocal dispersion in media with continuously evolving scales of heterogeneity*, Trans. Porous Media 13, 123-138, 1993.

[26] DA CUNHA, L. G. F. *Desigualdade de Díaz-Saá e aplicações*, 100f. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia, 2017.

[27] DA SILVA, M. B. *Potência fracionária do operador Laplaciano com condições de fronteira de Dirichlet*, 73f. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

[28] DEMENGEL, Françoise; DEMENGEL, Gilbert. *Functional Spaces for the Theory of Eliptic Partial Differential Equations*. London: Springer, 480 p, 2012.

[29] DI NEZZA, E.; PALATUCCI, G.; VALDINOCI, E. *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. Math. 136, 521-573, 2012.

[30] DUVAUT, G.; LIONS, J. L. *Inequalities in mechanics and physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1976. Translated from the French by C. W. John, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 219.

[31] ERINGEN, A. C. *Nonlocal continuum field theories*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[32] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics Series: Springer, 2001.

[33] GILBOA, G.; OSHER, S. *Nonlocal operators with applications to image processing*, Multiscale Model. Simul. 7, 1005-1028, 2008.

[34] GOLLDSHTEINAND, V.; UKHLOV, A. *Weighted Sobolev spaces and embedding theorems*, Trans. Amer. Math. Soc. 361, 3829-3850, 2009.

[35] HO, K.; PERERA, K.; SIM, I.; SQUASSINA, M. *A note on fractional p-Laplacian problems with singular weights*, Journal of Fixed Point Theory and Applications 632, 2016.

[36] Huang, Y. X.*Positive solutions of certain elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Analysis 33, 617-636, 1998.

[37] JOST, J. *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics 214, 2002.

[38] JÚNIOR, R. I.; IÓRIO, V. de M. *Equações Diferencias Parciais: Uma Introdução*, 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. 343 p.

[39] LIONS, J. L. *Théorèmes de trace et d'interpolation. I*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 13, 389-403, 1959.

[40] LIONS, J. L.; MAGENES E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol. 1, Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17, Dunod, Paris, 1968.

[41] MCCAY, B. M.; NARASIMHAN, M. N. L. *Theory of nonlocal electromagnetic fluids*, Arch. Mech. (Arch. Mech. Stos.) 33, 365-384, 1981.

[42] MEDEIROS, L. A., *Espaço de Sobolev e introdução aos Problemas Elípticos não Homogêneos*, Rio de Janeiro: UFRJ, IM, 2000.

[43] NOCHETTO, R. H.; OTÁROLA, E.; SALGADO, A. J. *A PDE Approach to Fractional Diffusion in General Domains: A Priori Error Analysis*, Found Comput Math 15, 733-791, 2015.

[44] OLIVEIRA, E. C. *Funções Especiais com Aplicações*, Editora Livraria da Fisíca, São Paulo, 2005.

[45] ROS-OTON, X.; SERRA, J. *Fractional Laplacian: Pohozaev identity and nonexistence results*, C. R. Math. 350, 505-508, 2012.

[46] ROS-OTON, X.; SERRA, J. *The Dirichlet problem for the fractional Laplacian: regularity up to the boundary*, J. Math. Pures Appl. (In the press.)

[47] SERVADEI, R. *A critical fractional Laplace equation in the resonant case*, Topolog. Meth. Nonlin. Analysis 43, 251-267, 2014.

[48] SERVADEI, R.; VALDINOCI, E. *Mountain pass solutions for non-local elliptic operators*, J. Math. Analysis Applic. 389, 887-898, 2012.

[49] SERVADEI, R.; VALDINOCI, E. *Variational methods for non-local operators of elliptic type*, Discrete Contin. Dynam. Syst. 33, 2105-2137, 2013.

[50] SERVADEI, R.; VALDINOCI, E. *A Brezis-Nirenberg result for non-local critical equations in low dimension*, Commun. Pure Appl. Analysis 12, 2445-2464, 2013.

[51] SERVADEI, R.; VALDINOCI, E. *Weak and viscosity solutions of the fractional Laplace equation*. Publ. Mat. 58, 133-154, 2014.

[52] SERVADEI, R.; VALDINOCI, E. *On the spectrum of two different fractional operators*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 144 A, 831-855, 2014.

[53] SERVADEI, R.; VALDINOCI, E. *The Brezis-Nirenberg result for the fractional Laplacian*. Trans. Am. Math. Soc. (In the press.)

[54] SILLING, S. A. *Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces*, J. Mech. Phys. Solids 48,175-209, 2000.

[55] STINGA, P. R.; TORREA, J. L. *Extension problem and Harnack's inequality for some fractional operators*. Commun. PDEs 35, 2092-2122, 2010.

[56] STRUWE, M., Variational Methods - Applications to Nonlinear Partial Diferentia Equations and Hamiltonian Systems. 4th ed. Springer, 2008.

[57] TAN, J. *The Brezis-Nirenberg type problem involving the square root of the Laplacian*, Calc. Var. PDEs 36, 21-41, 2011.

[58] TRIEBEL, H. *Interpolation theory, functions spaces, differential operators*, North-Holland Pulblishing Company, Amsterdam, 1978.

[59] WEYL, H. *Uber die asymptotische verteilung der eigenwerte*, Gottinger, 1911.

[60] WILLEM, M., *Minimax theorems*, Birkhauser, Boston, 1996.