Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Equações Integrais Envolvendo Operadores de Dispersão Não-Local

por

Natan de Assis Lima

Campina Grande - PB
Março/2019

Equações Integrais Envolvendo Operadores de Dispersão Não-Local

por

Natan de Assis Lima †

sob orientação do

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Campina Grande - PB

Março/2019

†Este trabalho contou com apoio financeiro da UEPB

Universidade Federal da Paraíba

Universidade Federal de Campina Grande

Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática

Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Análise

Aprovada em:

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Prof. Dr. Francisco Julio Sobreira de Araujo Corrêa

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos

Prof. Dr. Pedro Eduardo Ubilla Lópes

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto

Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Março/2019

Resumo

Neste trabalho, estudaremos duas equações integrais envolvendo um operador de dispersão não-local $L_K : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ dado por

$$L_K u(x) = \int_\Omega K(x, y)u(y)dy,$$

que surge a partir do estudo de equações de reação-difusão. Usaremos métodos de Análise Funcional Não-Linear para determinar existência de soluções para estes problemas. Mais precisamente, no primeiro problema utilizaremos o Método de Bifurcação, para mostrar a existência de solução positiva, enquanto no segundo problema, utilizaremos Métodos de Sub-Super Solução e o grau para aplicações γ-condensantes, que é uma extensão do grau de Leray-Schauder para uma classe maior de perturbações da identidade, para obtermos um resultado do tipo Ambrosetti-Prodi.

Palavras-chave: Estimativa a Priori; Operadores Integrais de Dispersão Não-Local; Equações de Reação-Difusão; Teoria de Bifurcação; Grau Topológico; Equações Integrais;

Abstract

In this work, we will study two integral equations involving a non-local dispersion operator $L_K : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ given by

$$L_K u(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)dy,$$

that arises from the study of reaction-diffusion equations. We will use Nonlinear Functional Analysis methods to determine solutions for these problems. More precisely, in the first problem we will use the Bifurcation Method to show the existence of a positive solution, while in the second problem we will use Sub-Super Solution Methods and the degree for γ-condensing applications, which is an extension of the degree of Leray-Schauder for a larger class of identity perturbations, to obtain an Ambrosetti-Prodi result.

Keywords: Estimate a Priori; Integral Operators of Non-Local Dispersion; Reaction-Diffusion Equations; Bifurcation Theory; Topological Degree; Integral Equations;

Agradecimentos

À Deus, por tudo que me proporciona.

Aos meus pais, Marco Aurélio e Jussara, a quem devo todas as minhas vitórias.

Aos meus irmãos Andyara e Inoan, pelo amor e carinho que sempre me deram.

À minha esposa Renata, pelo amor e companheirismo.

Ao meu filho Murilo, por existir e me deixar amá-lo.

Ao Prof. Marco Aurélio, pela orientação, disponibilidade, paciência e ensinamentos.

Ao Prof. Francisco Julio, pela orientação no mestrado e por iniciar meus estudos em EDP's Elípticas.

Aos meus amigos Romildo, Allânio, Alex, Cládio, Luciano Martins, Geilson, Ronaldo, Jogli, Brito, Arlandson.

Aos professores da UAMat-UFCG, por estarem sempre a disposição quando precisamos de alguma ajuda e também pelos ensinamentos.

Aos Professores Claudianor Alves, Francisco Julio, Pedro Ubilla e Jefferson Abrantes por aceitarem compor a banca julgadora deste trabalho e pelas sugestões dadas.

À Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, por ter concedido minha liberação para capacitação. Meu muito obrigado a todos os professores e funcionários!

“Se o conhecimento pode criar problemas, não é através da ignorância que podemos solucioná-los.”

Isaac Asimov

Dedicatória

Aos meus pais Marco Aurélio e Jussara
e minha esposa Renata!

Sumário

Introdução

A proposta deste trabalho é estudar resultados de existência de soluções para dois problemas envolvendo um operador de dispersão não-local, ou seja, problemas envolvendo o operador $L_K : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ dado por

$$L_K u(x) = \int_{\Omega} K(x,y)u(y)dy, \quad x \in \Omega \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, é um domínio suave e limitado, cujo núcleo $K : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, simétrica e não-negativa. O mecanismo de dispersão é um foco de interesse teórico que tem recebido muita atenção recentemente. A maioria desses modelos de dispersão contínua são baseados em equações de reação-difusão, que são ricamente estudadas em [6], [7], [8], [15], [16], [22], [23], [31], [32], [34], [35], [44] e [46]. Este tipo de processo de difusão tem sido amplamente utilizado para descrever a dispersão de uma população (de células ou organismos) através do meio ambiente, como indicado em [28], [29] e [33], se $u(y)$ é considerado como uma densidade em um local y, $K(x,y)$ como a distribuição de probabilidade de saltar de um local y para um local x, então a taxa na qual os indivíduos de todos os outros lugares estão chegando na localização x é

$$\int_{\Omega} K(x,y)u(y)dy.$$

A presença do termo de reação não-local (1) significa, do ponto de vista biológico, que o efeito de aglomeração depende não apenas de seu próprio ponto no espaço, mas também depende de toda a população em um habitat N-dimensional, ver [30]. Em muitos problemas em biologia (e ecologia), por exemplo em [10], Berestycki, Coville e Hoang-Hung estão interessados em encontrar critérios de persistência para uma espécie que tenha uma estratégia de dispersão de longo alcance. Para uma espécie modelo tão específica, podemos pensar em árvores das quais sementes e polens são disseminados em uma ampla faixa. A possibilidade de uma dispersão de longo alcance é bem conhecida na ecologia, onde numerosos dados, agora disponíveis, suportam essas suposições, ver [14], [19] e [45]. Para outros problemas de dispersão com esta formulação de dispersão de indivíduos, ver também [39] e [40].

A escolha deste operador, surgiu do estudo de existência de solução estacionária para o seguinte problema de evolução

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} K(x-y)u(x,t)dy - u(x,t) + f(x,u(x,t)), & \text{em } x \in \Omega,\ t > 0 \\ u(x,t) = 0, & \text{em } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{em } x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

onde a condição de fronteira $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ significa que o habitat Ω está rodeado por um ambiente hostil. Sua versão estacionária tem sido considerada recentemente para vários tipos de não-linearidades f. Citamos, por exemplo, [7], [8], [10] e [22].

No nosso primeiro problema, estudamos a existência de soluções positivas para a seguinte equação de dispersão

$$L_K u = u\left(\lambda - \int_\Omega Q(x,y)|u(y)|^p dy\right), \text{ em } \Omega \tag{P}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, é um domínio suave e limitado, $p > 0$, λ é um parâmetro real, $Q : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função não-negativa com $Q \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ satisfazendo algumas hipóteses que serão detalhadas posteriormente. Neste contexto, λ é um parâmetro que representa a taxa de crescimento intrínseca da espécie, e o termo não-local

$$\int_\Omega Q(x,y)|u(y)|^p dy$$

pode ser interpretado como uma média ponderada de u em todo o domínio.

A motivação para estudar (P), surge da necessidade de modelar o comportamento de uma espécie que habita um domínio limitado de contorno suave $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, cuja equação logística clássica é dada por

$$\begin{cases} -\Delta u = u\left(\lambda - b(x)u^p\right), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

onde $b(x)$ descreve o efeito limitador de aglomeração da população, $u(x)$ (como dito antes) é a densidade populacional no ponto $x \in \Omega$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ é a taxa de crescimento da espécie. Em (2), considera-se que Ω é cercado por áreas inóspitas, devido às condições homogêneas de fronteira de Dirichlet. Observe que a equação em (2) é uma equação local e, portanto, o efeito de aglomeração da população u em x depende apenas do valor da população no mesmo ponto x. Em [18], Chipot considerou que o efeito de aglomeração depende também do valor da população em torno de x, ou seja, o efeito de aglomeração depende do valor de u em uma vizinhança de x, por exemplo em $B_r(x)$, a bola centralizada em x de raio $r > 0$. Para ser mais preciso, Chipot considerou o problema não-local

$$\begin{cases} -\Delta u = u\left(\lambda - \int_{\Omega \cap B_r(x)} b(y)u^p(y)dy\right), & \text{em } \Omega \\ u = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

onde b é uma função contínua, não-negativa e não-trivial. Depois disso, uma atenção especial foi dada ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u\left(\lambda - \int_{\Omega} Q(x,y)u^p(y)dy\right), & \text{em } \Omega \\ u = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

que é uma formulação mais geral para tal problema populacional, supondo diferentes condições em Q, veja por exemplo [1], [2], [17], [20], [21], [37], [46] e suas referências.

Em [17], Chen e J. Shi consideraram o caso $p = 1$ e o núcleo $Q(x, y)$ sendo uma função contínua e não-negativa em $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ com o operador integral de Fredholm

$$L(\phi)(x) := \int_{\Omega} Q(x,y)\phi(y)dy$$

estritamente positiva em $C_+(\Omega)$, onde $C_+(\Omega)$ é o espaço das funções contínuas e positivas, no sentido em que

$$L(C_+(\Omega) \setminus \{0\}) \subset C_+(\Omega) \setminus \{0\}.$$

Nesse trabalho foi provado a existência de $\lambda^* > \lambda_1$ tal que (4) possui pelo menos uma solução positiva para $\lambda \in (\lambda_1, \lambda^*]$. Aqui, λ_1 é o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Observemos que, o resultado mostrado neste artigo é um resultado de bifurcação local, ou seja, existe uma componente conexa de soluções positivas para o problema (4) sempre que $\lambda > \lambda_1$ está próximo de λ^*.

Em [1], Allegretto e P. Nistri mostraram que (4) possui uma solução positiva única quando $\lambda > \lambda_1$ e $Q(x, y) = Q_\delta(|x - y|)$ é uma função molificadora em $\mathbb{R}^N$, isto é, $Q_\delta(|x-y|) \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} Q_\delta(|x-y|)dy = 1$ para qualquer x com

$$Q_\delta(|x-y|) = 0 \text{ se } |x-y| \geq \delta$$

e

$$Q_\delta(|x-y|) \text{ limitada longe do zero, se } |x-y| < \mu < \delta.$$

Observemos que, neste caso, Q se anula longe da diagonal de $\Omega \times \Omega$.

Em [46], Sun, Shi e Wang investigaram a existência de soluções positivas para (4) com $Q(x,y) = Q_1(|x-y|)$ e $\Omega = (-1,1)$, onde $Q_1 : [0,2] \to (0,\infty)$ é uma função contínua não-decrescente, satisfazendo

$$\int_0^2 Q_1(y)dy > 0.$$

Quando $Q(x,y)$ é de variáveis separáveis, isto é, $Q(x,y) = g(x)h(y)$ com $h \geq 0$; $h \neq 0$ e $g(x) > 0$, Corrêa, Delgado e Suárez [20] estudaram (4) e provaram a existência e unicidade de solução positiva. Além disso, em Coville [21] e Leman, Méléard e Mirrahimi [37], supondo $g \equiv 1$, $p > 1$ e condições de fronteira homogêneas de Neumann, os autores provaram que a solução positiva de (4) atrai todas as possíveis soluções da equação parabólica correspondente, associada à (4). Quando $g \geq 0$, $g \neq 0$ e $g \equiv 0$ em $\Omega_0 \subset \Omega$, então (4) possui uma única solução positiva para $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_0)$ onde λ_0 é o autovalor principal do $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ em Ω_0, para maiores detalhes ver [20].

Finalmente, em [2], Alves, Delgado, Souto e Suárez consideraram a existência e inexistência de solução para (4). Nesse artigo, os autores estudaram um problema mais geral do que os anteriores. Mais precisamente, consideraram Q satisfazendo:

(Q_1) $Q \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$ e $Q(x,y) \geq 0$ para todos $x, y \in \Omega$;

(Q_2') Se w é mensurável e $\displaystyle\int_{\Omega\times\Omega} Q(x,y)|w(y)|^p|w(x)|^2dxdy = 0$, então $w = 0$ q.t.p. em Ω.

Usando **Teoria de Bifurcação**, o seguinte resultado foi provado:

Teorema 0.0.1 *O problema (4) tem uma solução positiva se, e somente se, $\lambda > \lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & em \quad \Omega \\ u = 0, & sobre \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Motivado por [2], consideramos o problema (P) e obtemos resultados de existência de solução positiva via **Teoria de Bifurcação**. Uma observação importante é que, o problema em [2] utiliza o operador $-\Delta$ cujo inverso, $(-\Delta)^{-1}$, é um operador compacto, enquanto, no problema (P), o operador em questão é L_K cujo inverso não pode ser compacto. Mais ainda, sabemos através da literatura que $(L_K - M)^{-1}$ não é compacto para nenhum $M > 0$ suficientemente grande. Com esta diferença, a bifurcação aqui utilizada é feita de maneira diferente da usual.

Para obtermos os resultados de existência, consideramos K satisfazendo:

(K_1) $K(x,y) = K(y,x)$ para todos $x, y \in \overline{\Omega}$;

(K_2) Existe $\delta > 0$ tal que $K(x,y) > 0$ para todos $x, y \in \overline{\Omega}$ e $|x - y| \leq \delta$.

Com isso, podemos definir a aplicação $k : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ dada por

$$k(x) = \int_\Omega K(x,y)dy,$$

que será de grande importância para o desenvolvimento deste trabalho. As condições (K_1) e (K_2) acima são hipóteses geralmente consideradas para o núcleo K do operador L_0, como podemos ver em [8], [31] e [32].

Já para a função Q, vamos considerar como sendo uma aplicação contínua e não-negativa, que satisfaz:

(Q_2) Existem $r, \sigma > 0$ tais que $Q(x,y) \geq \sigma$ para todos $x, y \in \overline{\Omega}$ e $|x - y| \leq r$.

Se a desigualdade acima ocorrer para todos os x, y em Ω, dizemos que Q satisfaz (Q_2''), isto é,

(Q_2'') $Q(x,y) \geq \sigma$ para todos $x, y \in \overline{\Omega}$.

Gostaríamos de salientar que a hipótese (Q_2) implica em (Q_2').

Definição 0.0.2 *Para cada $Q : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ definimos a oscilação de Q em x, uniformemente em y, por*

$$[Q] = \sup_{x,y,z \in \Omega} |Q(x,y) - Q(z,y)|.$$

Com as hipóteses acima, temos o nosso primeiro resultado que estabelece a existência de bifurcação local.

Teorema 0.0.3 *Suponha que $p > 0$, $[Q] > 0$, $(K_1) - (K_2)$ e (Q_2'') ocorrem. Então o problema (P) tem uma solução positiva para todo $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \frac{\lambda_1 \sigma}{[Q]})$, onde λ_1 é o autovalor principal de L_K.*

Observe que este resultado se parece com o resultado mostrado em [17]. Aqui conseguimos determinar o que é o nosso λ^*.

É um corolário da prova do Teorema 0.0.3 que se $[Q] = 0$, então temos solução para qualquer $\lambda > \lambda_1$. Provaremos tal fato no Apêndice B.

A fim de obter um resultado global de bifurcação, vamos assumir a seguinte hipótese em Q:

(Q_3) Existem $x_0 \in \overline{\Omega}$ e uma função não-negativa $a : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, tais que $a^{-1} \in L^q(\Omega)$ onde $q = \max\{1, p\}$ e $Q(x_0, y) \geq Q(x, y) + a(x)$ para todos $x, y \in \Omega$.

Observe que, (Q_3) implica em $Q(x_0, y) \geq Q(x, y)$, para todos $x, y \in \Omega$ e $a(x_0) = 0$. Um exemplo de função Q que satisfaz a condição (Q_3) é dada abaixo:

$$Q(x, y) = h(y)[M - |x - x_1|^{q_1}|x - x_2|^{q_2}...|x - x_k|^{q_k}] + g(y)$$

onde $x_i \in \overline{\Omega}$, $q_i < \frac{N}{p}$, $M > 0$ é grande suficiente, h e g são funções contínuas e positivas em $\overline{\Omega}$. É fácil ver que (Q_3) funciona para x_0 sendo qualquer x_i e $a(x) = m|x - x_1|^{q_1}|x - x_2|^{q_2}...|x - x_k|^{q_k}$, para $m > 0$ pequeno o suficiente.

O próximo resultado garante a existência de uma componente conexa de soluções positivas, que contém a solução para nosso problema (P), qualquer que seja $\lambda > \lambda_1$.

Teorema 0.0.4 *Suponha que $p > 0$, $(K_1) - (K_2)$ e $(Q_2) - (Q_3)$ ocorrem. Então, existe uma componente conexa $\mathcal{C}^+$ de soluções positivas de (P) saindo de $\lambda_1 > 0$, de maneira que $\mathcal{C}^+ \cap (\{\lambda\} \times C(\overline{\Omega})) \neq \emptyset$, para todo $\lambda > \lambda_1$.*

Sob uma condição mais fraca em Q, podemos resolver o problema para todo $\lambda > \lambda_1$, mas não podemos garantir a existência de uma componente conexa de soluções positivas para (P). Aqui consideramos Q satisfazendo:

(Q_4) Existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $Q(x_0, y) \geq Q(x, y)$ para todos $x, y \in \Omega$.

O principal resultado em relação ao problema (P) é o seguinte:

Teorema 0.0.5 *Suponha que $p > 0$, $(K_1), (K_2)$, (Q_2) e (Q_4) ocorrem. Então, o problema (P) tem uma solução positiva para todo $\lambda > \lambda_1$.*

No segundo problema, vamos considerar (P) com condição de fronteira nula, ou seja,

$$\begin{cases} L_K u = u\left(\lambda - \int_\Omega Q(x,y)|u(y)|^p dy\right) \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, é um aberto conexo e limitado, com núcleo contínuo e não-negativo $K : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz (K_1), e as condições abaixo:

(K_2') Dado $x_0 \in \Omega$, existe $\delta = \delta_{x_0} > 0$ tal que $K(x_0, y) > 0$ para todo $y \in B_\delta(x_0) \cap \Omega$.

(K_3) $\lim\limits_{dist(x,\partial\Omega)\to 0} k(x) = 0$;

(K_4) Para todo aberto $A \subset \Omega$ tal que $\overline{A} \subset \Omega$, existem $\theta_0 > 0$ e $C > 0$ tal que

$$\int_A K(x,y)dy \geq C \int_{\mathcal{B}_\theta} K(x,y)dy, \quad \forall\, 0 < \theta \leq \theta_0,$$

e todo $x \in \mathcal{B}_\theta$, onde $\mathcal{B}_\theta = \{x \in \Omega;\ dist(x, \partial\Omega) < \theta\}$.

Aqui, dizer que $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, significa dizer que $\lim\limits_{x\to\partial\Omega} u(x) = 0$, diferentemente de $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.

Veja abaixo, um exemplo de aplicação que satisfaz as condições $(K_2'), (K_3)$ e (K_4):

Exemplo 0.0.6 *Considere $K(x,y) = b(x)b(y)J(x-y)$, onde $b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz $b > 0$ em Ω e $b \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$, e a função $J : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é contínua e limitada tal que $J(z) \geq \sigma$, para todo $z \in \mathbb{R}^N$.*

Veremos que (K_3) é uma condição necessária para obter uma solução positiva de (5). O principal resultado em relação ao problema (5) é:

Teorema 0.0.7 *Suponha que K verifica $(K_1), (K_2'), (K_3)$ e (K_4), e que Q verifica as condições $(Q_2) - (Q_3)$. Então, existe uma componente conexa $\mathcal{C}^+$ de soluções positivas para (5) saindo de $\lambda_1 > 0$, de maneira que $\mathcal{C}^+ \cap (\{\lambda\} \times C(\overline{\Omega})) \neq \emptyset$, para todo $\lambda > \lambda_1$.*

Por fim, o nosso terceiro problema, tem como objetivo a obtenção de resultados de existência de soluções para a seguinte equação de dispersão

$$L_K u = f(x,u) + g(x), \quad \text{em } \Omega \tag{P'}$$

onde $g \in C(\overline{\Omega})$ e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções satisfazendo algumas hipóteses que serão detalhadas posteriormente.

A motivação para estudar (P') vem do conhecido resultado de Ambrosetti-Prodi [5], que é um resultado muito interessante sobre o estudo de existência e inexistência de soluções para o seguinte problema de Dirichlet,

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) + g(x), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe $C^{2,\alpha}$. A não-linearidade é dada por uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que $f''(s) > 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e

$$0 < \lim_{s \to -\infty} f'(s) < \lambda_1 < \lim_{s \to +\infty} f'(s) < \lambda_2 \tag{7}$$

onde λ_1 e λ_2 são autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Sob essas hipóteses, eles provaram a existência de uma variedade $\mathcal{M}$ de classe C^1 em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ que divide este espaço em dois conjuntos abertos U_0 e U_2 com a seguinte propriedade: (i) se $g \in U_0$, o problema (6) não tem solução; (ii) se $g \in \mathcal{M}$, o problema (6) tem exatamente uma solução; (iii) se $g \in U_2$, o problema (6) tem exatamente duas soluções. Em [5], o método utilizado é baseado em teoremas de inversão para aplicações diferenciáveis com singularidades em espaços de Banach. Esse método é bastante interessante e geométrico, mas parece depender muito do fato de que f é uma função convexa. Além disso, o trabalho de Ambrosetti e Prodi tem o inconveniente de não dar condições necessárias ou suficientes para que (i), (ii) e (iii) ocorram.

Em 1975, Berger e Podolak [11], deram um grande passo no estudo do problema (6) e obtiveram uma estrutura cartesiana para a variedade $\mathcal{M}$ nos espaços de Hilbert. Os autores decompuseram as funções $g \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ na forma $g = t\phi_1 + g_1$, onde ϕ_1 é uma autofunção positiva e normalizada (em $L^2(\Omega)$) associada ao primeiro autovalor λ_1 de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ e com $g_1 \in \{\phi_1\}^\perp$ no sentido $L^2(\Omega)$, isto é,

$$\int_\Omega g_1(x)\phi_1(x)dx = 0.$$

Assim, eles escreveram a equação (6) na forma

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) + t\phi_1(x) + g_1(x), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{8}$$

Usando o método de Lyapunov-Schmidt, para cada g_1 definido como acima, eles encontraram um número real $t = t(g_1)$ dependendo continuamente de g_1, tal que: (i)

$g \in U_0$ (i.e. (8) não tem solução), se $t > t(g_1)$; (ii) $g \in \mathcal{M}$, (i.e. (8) tem exatamente uma solução), se $t = t(g_1)$; (iii) $g \in U_2$, (i.e. (8) tem exatamente duas soluções), se $t < t(g_1)$.

Também em 1975, Kazdan e Warner [36] publicaram um longo artigo tratando de operadores uniformemente elípticos de segunda ordem com condições de Dirichlet ou Newmann. Eles trabalharam substituindo as hipóteses (7) pelas hipóteses

$$-\infty \leq \limsup_{s\to-\infty} \frac{f(s)}{s} < \lambda_1 < \liminf_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s} \leq +\infty \tag{9}$$

que não envolve a derivada de f. Eles encontraram uma subsolução e uma supersolução para t suficientemente negativo e, usando o método da iteração monotônica, provaram a existência de uma solução. Mesmo removendo a convexidade da função f, provaram a existência de uma função $t : \{\phi_1\}^\perp \to \mathbb{R}$ tal que: (i) (8) não tem solução, se $t > t(g_1)$; (ii) (8) tem pelo menos uma solução, se $t < t(g_1)$.

Posteriormente, Amann e Hess [4], e, concomitantemente, Dancer [25], melhoraram o trabalho de Kazdan e Warner encontrando pelo menos duas soluções para $t < t(g_1)$, e pelo menos uma solução para $t = t(g_1)$. Eles usam argumentos de teoria do grau de Leray-Schauder para obter este resultado.

Observa-se que, a convexidade estrita da função f implica na possibilidade de obter em cada caso o número exato de soluções. Por outro lado, a posição dos limites $\lim\limits_{|s|\to+\infty} \dfrac{f(s)}{s}$ em relação ao espectro de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ (por quantos autovalores esses limites passam) influencia o número de soluções que podemos obter. Por exemplo, se além das hipóteses pertinentes ao problema (6) supusermos a convexidade acima e a hipótese de que $\lim\limits_{s\to+\infty} \dfrac{f(s)}{s} < \lambda_2$, uniformemente em $x \in \Omega$, então para cada $g_1 \in \{\phi_1\}^\perp$, existe um número $t = t(g_1)$ tal que: (i) (8) não tem solução, se $t > t(g_1)$; (ii) (8) tem exatamente uma solução, se $t = t(g_1)$; (iii) (8) tem exatamente duas soluções, se $t < t(g_1)$.

A demonstração desse resultado está muito próxima da ideia desenvolvida por Berestycki [9] e está em Figueiredo [27].

Em outro exemplo, se considerarmos as hipóteses

$$\limsup_{s\to-\infty} \frac{f(s)}{s} < \lambda_1 < \lambda_2 < \lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s} < \lambda_3,$$

então podemos encontrar um $\tau \in \mathbb{R}$, tal que (8) possui pelo menos três soluções se $t < \tau$.

Com o relato acima, nosso objetivo é mostrar a existência de um resultado do tipo Ambrosetti-Prodi para o problema (P'). Os problemas do tipo Ambrosetti-Prodi são caracterizados pela determinação das funções g para as quais a equação (P') tem solução ou não e, em caso afirmativo, o número mínimo (ou, se possível, o número exato) de soluções, ver [27] para mais detalhes.

Observe que, podemos reescrever o problema (P') da seguinte maneira

$$L_K u = f(x,u) + t\phi_1 + g_1(x) \quad \text{em } \Omega, \tag*{$(P')_t$}$$

onde $g \in C(\overline{\Omega})$ está decomposto na forma $g(x) = t\phi_1(x) + g_1(x), x \in \Omega$, ϕ_1 é uma autofunção positiva e normalizada em $L^2(\Omega)$, associada ao autovalor principal λ_1, do operador dispersão L_K, e $g_1 \in \{\phi_1\}^{\perp}$ no sentido $L^2(\Omega)$, isto é,

$$\int_{\Omega} g_1(x)\phi_1(x)dx = 0.$$

Para obtermos os resultados de existência de soluções para o problema (P'), consideramos K satisfazendo novamente (K_1) e (K_2), e supomos que a aplicação $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz, crescente com respeito a variável $t \in \mathbb{R}$ e satisfaz:

(f_1) Existem $A > \|k\|_\infty$ e $C > 0$ tais que $f(x,s) \geq As - C$ para todo $s \geq 0$ e todo $x \in \overline{\Omega}$.

Com esta hipótese, encontramos um número $m > 0$ para o qual o problema $(P')_t$ não tem solução positiva se $t > m$.

Além disso, se assumirmos que f também verifica

(f_2) Existe um número $0 < a < \lambda_1$ tal que $\displaystyle\lim_{s\to-\infty} \frac{f(x,s)}{s} = a$, para todo $x \in \overline{\Omega}$,

encontramos um número $m > 0$ no qual o problema $(P')_t$ não tem solução (positiva, negativa e nem nodal) se $t > m$.

Observe que, toda função que satisfaz $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} > \|k\|_\infty$ é um exemplo de função que satisfaz a hipótese (f_1).

Com as hipóteses acima, temos o primeiro resultado que estabelece a existência de pelo menos uma solução positiva para a equação $(P')_t$. Para afirmação de existência ser demonstrada, fazemos uso do método de iteração monotônica.

Teorema 0.0.8 *Suponhamos que* (K_1) *e* (K_2) *ocorrem, e que* f *é uma função localmente Lipschitz, crescente com respeito a variável* $t \in \mathbb{R}$ *e satisfaz* (f_1)*. Então, para todo* $g_1 \in \{\phi_1\}^{\perp}$*, existe um número real* $t(g_1)$ *tal que*

(i) *o problema* $(P')_t$ *não tem solução, se* $t > t(g_1)$*;*

(ii) *o problema* $(P')_t$ *tem pelo menos uma solução, se* $t \leq t(g_1)$*.*

Para obtermos uma segunda solução para o problema (P'), assumimos a seguinte hipótese sobre f:

(f_3) Para todo compacto $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ existe um número $\sigma > 0$ tal que $\dfrac{f(x,s) - f(x,t)}{s - t} > \sigma$ para todos $s, t \in \mathcal{K}$ e todo $x \in \overline{\Omega}$.

Observe que toda função que satisfaz $f'_t(x,t) > 0$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, é um exemplo de função que satisfaz a hipótese (f_3).

Com as hipóteses acima, podemos enunciar o seguinte resultado

Teorema 0.0.9 *Suponha que* $(K_1), (K_2)$*,* $(f_1), (f_2)$ *e* (f_3) *ocorrem. Então, para todo* $g_1 \in \{\phi_1\}^{\perp}$*, existe um número real* $t(g_1)$ *tal que*

(i) *o problema* $(P')_t$ *tem pelo menos duas soluções, se* $t < t(g_1)$*;*

(ii) *o problema* $(P')_t$ *tem pelo menos uma solução, se* $t = t(g_1)$*.*

Como visto anteriormente, a diferença entre o problema com L_K e o problema com $-\Delta$ é que $(-\Delta)^{-1}$ é um operador compacto, enquanto $(L_K - M)^{-1}$ não é compacto qualquer que seja $M > 0$ suficientemente grande. Com isso, não podemos usar a teoria do grau de Leray-Schauder como no trabalho de Figueiredo [27]. Diante desse problema, faremos uso da teoria do grau para aplicações γ-condensantes (veja [13], [41] e [42]), que é uma extensão do grau de Leray-Schauder, para uma classe maior de perturbações da identidade, definida em termos de medidas para não compactos (i.e., medidas de não compacidade de Kuratowski), uma vez que existem vários tipos interessantes de equações funcionais que não podem ser tratadas por operadores compactos, mas precisa da estrutura dessa classe maior.

Uma observação importante é que, se f satisfaz a condição (f_1) e a condição

(f_4) $|f(x,s) - f(x,t)| > \|k\|_\infty |s - t|$, para todos $s, t \in \mathbb{R}_+$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$,

então o problema $(P')_t$ tem no máximo uma solução para cada $t \in \mathbb{R}$.

Observação 0.0.10 *Uma interessante observação é que se substituirmos ϕ_1 pela função constante $\phi_0 \equiv 1$ e considerarmos o problema*

$$L_K u = f(x,u) + t + g_1(x) \quad in\ \Omega, \qquad (P'')_t$$

onde $t \in \mathbb{R}$, $g_1 \in C(\overline{\Omega})$ é uma função tal que $\int_\Omega g_1(x)dx = 0$ e f satisfaz hipóteses convenientes, as demonstrações dos Teoremas 0.0.8 e 0.0.9 seguem-se de maneira análoga ao do problema $(P')_t$.

Este trabalho divide-se em quatro capítulos e dois apêndices que estão distribuídos como descritos a seguir.

No **Capítulo 1**, dedicamo-nos a apresentar fatos e resultados fundamentais sobre o operador L_0, tais como um resultado do tipo Krein-Rutman e um princípio do máximo.

No **Capítulo 2**, demonstramos em detalhes os **Teoremas 0.0.3**, **0.0.4** e **0.0.5**, que tratam-se dos primeiros resultados obtidos com nosso estudo e que formam o corpo teórico do nosso primeiro trabalho [3] submetido para publicação, e já está disponível em arXiv:1711.08202, desde Agosto de 2018. Neste capítulo, utilizamos constantemente o que foi provado e discutido no **Capítulo 1**.

No **Capítulo 3**, estudamos a existência de uma solução positiva para o problema (P) com condição de contorno homogêneo. Mais precisamente, estudamos o problema (5) e encontramos condições para a demonstração do **Teorema 0.0.7**.

No **Capítulo 4** demonstramos em detalhes os **Teoremas 0.0.8** e **0.0.9**, que tratam-se dos resultados de existência de solução para o problema (P'). Neste capítulo, utilizamos constantemente o que foi provado e discutido no **Capítulo 1** e no **Apêndice A**. Esses resultados formam o corpo teórico do nosso segundo trabalho submetido para publicação, onde já está disponível em arXiv: 1902.00365, desde Janeiro de 2019.

No **Apêndice A** apresentamos uma extensão do grau de Leray-Schauder para uma classe maior de pertubações da identidade em termos da medida de não compacidade de Kuratowski.

No **Apêndice B** apresentamos o corolário do Teorema 0.0.3, isto é, verificamos a existência de solução para o problema (P) quando $[Q] = 0$, ou seja, a função $Q(x,y) = Q(y)$ depende apenas da variável y.

Notação e terminologia

- $\mathbb{R}^N$ denota o espaço euclidiano $N-$dimensional.
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ denota um domínio suave e limitado.
- X denota um espaço de Banach qualquer.
- $B_r(x)$ denota a bola aberta centrada em x com raio $r > 0$ em $\mathbb{R}^N$.
- O símbolo $\to$ significa convergência em norma.
- O símbolo $\rightharpoonup$ significa convergência fraca.
- Se $A \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto mensurável à Lebesgue, então $|A|$ denota a medida de Lebesgue de A.
- A expressão *q.t.p.* é uma abreviação para quase todo ponto.
- Se u é uma função mensurável, denotamos por u^+ e u^- a parte positiva e negativa de u respectivamente, que são dadas por
$$u^+ = \max\{u, 0\} \quad \text{e} \quad u^- = \min\{u, 0\}.$$
- $C(\overline{\Omega})$ denota o espaço das funções contínuas de $\overline{\Omega}$ em $\mathbb{R}$.
- $L^s(\Omega)$, para $1 \leq s \leq \infty$, denota o espaço de Lebesgue com norma usual denotada por $\|u\|_s$.
- $\sigma(L_K)$ denota o conjunto de autovalores reais do operador $L_K : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$.
- $\widetilde{\sigma}(L_K)$ denota o conjunto de autovalores reais do operador $L_K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$.

- $\mathcal{K}\ (\Omega)$ denota o espaço das funções compactas de Ω em X.
- $C_\gamma(\Omega)$ denota o espaço das funções γ-condensantes de Ω em X.
- $SC_\gamma(\Omega)$ denota o espaço das funções γ-contração estrita de Ω em X.

Capítulo 1

O Operador Dispersão L_K

Neste capítulo, estamos interessados em estudar as propriedades do operador dispersão L_K. Além disso, destacaremos dois resultados de grande importância para os demais capítulos desta tese. Estamos nos referindo ao resultado do tipo Krein-Rutman, o qual garante que o operador L_K possui um único autovalor principal que é simples e suas autofunções associadas são contínuas, positivas e tem sinal definido. Também nos referimos ao Princípio do Máximo, resultado que generaliza o princípio do máximo encontrado em [31], que faz referência ao artigo [22].

1.1 O autovalor principal de L_K

Nesta seção, consideramos alguns fatos preliminares relacionados ao autovalor principal de L_K. Vamos considerar o operador de dispersão $L_K : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ dado por

$$L_K u(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)dy,$$

onde o núcleo K é uma função contínua, simétrica e não-negativa, que satisfaz (K_2). Observe que, L_K é um operador linear, compacto e que $L_K(C(\overline{\Omega})_+) \subset C(\overline{\Omega})_+$, onde $C(\overline{\Omega})_+$ é o cone positivo em $C(\overline{\Omega})$, isto é,

$$C(\overline{\Omega})_+ = \{u \in C(\overline{\Omega}); u(x) \geq 0, \forall x \in \overline{\Omega}\}.$$

Além disso, também podemos considerar $L_K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ que, além de estar bem definido, é linear, compacto e simétrico, com $L_K(L^2(\Omega)) \subset C(\overline{\Omega})$. O resolvente de L_K

é definido por

$$\rho(L_K) = \{\lambda \in \mathbb{R}; L_K - \lambda I \text{ é bijeção}\}$$

e o seu espectro é definido por $\sigma(L_K) = \mathbb{R}\backslash\rho(L_K)$. Pela teoria espectral de operadores compactos, temos que para $\lambda \neq 0$

$$\lambda \in \sigma(L_K) \iff N(L_K - \lambda I) \neq \{0\} \text{ ou } R(L_K - \lambda I) = (L_K - \lambda I)(C(\overline{\Omega})) \neq C(\overline{\Omega}).$$

Aqui, $AV(L_K)$ denotará o conjunto dos autovalores de L_K definido por

$$AV(L_K) = \{\lambda \in \mathbb{R} : N(L_K - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

Por outro lado, denotaremos por $\tilde{\sigma}(L_K)$ o espectro de $L_K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ e $\tilde{AV}(L_K)$ o conjunto de seus respectivos autovalores. Observe que, $\sigma(L_K) = \tilde{\sigma}(L_K)$, ou seja

$$\lambda \in \tilde{AV}(L_K) \iff \lambda \in AV(L_K).$$

De fato, como $C(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ temos que $AV(L_K) \subset \tilde{AV}(L_K)$, e a condição suficiente está demonstrada. Agora, suponha que λ é um autovalor de $L_K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, então existe um $w \in L^2(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que

$$\lambda w = L_K w \in L_K(L^2(\Omega)) \subset C(\overline{\Omega}) \Rightarrow \tilde{AV}(L_K) \subset AV(L_K).$$

Como L_K é um operador simétrico em $L^2(\Omega)$, isto é,

$$\langle L_K u, v\rangle = \langle u, L_K v\rangle, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega),$$

onde $\langle u, v\rangle = \int_\Omega uv dx$ é o produto interno de $L^2(\Omega)$, sabemos que $\tilde{\sigma}(L_K) \subset [m_0, m]$, onde

$$m_0 = \inf_{u \in L^2(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\langle L_K u, u\rangle}{\int_\Omega |u|^2 dx} \text{ e } m = \sup_{u \in L^2(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\langle L_K u, u\rangle}{\int_\Omega |u|^2 dx}.$$

Mais ainda, $m_0, m \in \tilde{\sigma}(L_K)$ (ver Brézis [12, Proposition 6.9, pg 165]), e assim, $m = \sup \tilde{\sigma}(L_K)$. Pela definição de m e a positividade de K, segue-se que

$$0 < m = \sup_{u \in L^2(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)u(x)u(y)dxdy}{\int_\Omega |u|^2 dx}$$

e existe um $w \in L^2(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que

$$m = \frac{\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)w(x)w(y)dxdy}{\int_\Omega |w|^2 dx}.$$

Logo, $m \in \tilde{AV}(L_K)$ e w é uma autofunção de L_K associada ao autovalor m.

O próximo resultado vai estabelecer que se $w \in L^2(\Omega)$ é uma autofunção associada ao autovalor m, então w não muda de sinal.

Lema 1.1.1 *Suponhamos que* $w \in L^2(\Omega)$ *é tal que*

$$m = \frac{\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)w(x)w(y)dxdy}{\int_\Omega |w|^2 dx}.$$

Então, w *é contínua e* $L_K w = mw$*, isto é,* m *é um autovalor de* L_K*. Além disso, desde que* Ω *é um conjunto conexo, devemos ter* $w > 0$ *em* Ω *ou* $w < 0$ *em* Ω *(*w *não muda de sinal).*

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar que $L_K w = mw$. Com efeito, pela definição de m, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e $v \in L^2(\Omega)$, devemos ter

$$\langle L_K(w+tv), w+tv\rangle \leq m\int_\Omega (w+tv)^2 dx$$

ou seja,

$$\langle L_K w, w\rangle + 2t\langle L_K w, v\rangle + t^2\langle L_K v, v\rangle \leq m\int_\Omega w^2 dx + 2mt\int_\Omega wvdx + mt^2\int_\Omega v^2 dx$$

$$2t\langle L_K w, v\rangle + t^2\langle L_K v, v\rangle \leq 2mt\int_\Omega wvdx + mt^2\int_\Omega v^2 dx,$$

o que implica em

$$\langle L_K w, v\rangle + \frac{t}{2}\langle L_K v, v\rangle \leq m\int_\Omega wvdx + \frac{mt}{2}\int_\Omega v^2 dx, \text{ se } t > 0$$

e

$$\langle L_K w, v\rangle + \frac{t}{2}\langle L_K v, v\rangle \geq m\int_\Omega wvdx + \frac{mt}{2}\int_\Omega v^2 dx, \text{ se } t < 0.$$

Passando ao limite quando $t \to 0$, obtemos $\langle L_K w, v\rangle = m\int_\Omega wvdx$, para todo $v \in L^2(\Omega)$, e assim concluímos que, $L_K w = mw$.

Como $L_K w$ é uma função contínua, a igualdade $L_K w = mw$ nos diz que w é uma função contínua em $\overline{\Omega}$.

Na sequência, vamos mostrar que se $w \neq 0$ e $w \geq 0$ em Ω, então $w > 0$ em Ω. De fato, fixe $C = w^{-1}(\{0\}) = \{x \in \Omega : w(x) = 0\}$, logo C é um conjunto aberto em Ω, pois se $z \in C$, temos que

$$0 \leq \int_{\Omega\cap B_\delta(z)} K(z,y)w(y)dy \leq \int_\Omega K(z,y)w(y)dy = mw(z) = 0,$$

implicando que $w(x) = 0$ para todo $x \in \Omega \cap B_\delta(z)$, ou seja, $\Omega \cap B_\delta(z) \subset C$. Isso prova que C é um conjunto aberto em Ω. Por outro lado, da continuidade de w, é fácil ver que C é também um conjunto fechado em Ω. Recordando que Ω é conexo e $\Omega \setminus C$ é não-vazio, concluímos que $w > 0$ em Ω.

Para finalizar esta demonstração, devemos mostrar que w não muda de sinal. Com este objetivo, fixemos dois subconjuntos

$$A = \{x \in \Omega : w(x) > 0\} \text{ e } B = \{x \in \Omega : w(x) < 0\}.$$

Se w muda de sinal, ambos os conjuntos A e B devem ter medida de Lebesgue positiva. Com isso, podemos ver que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)w(x)w(y)dxdy = &\int_{A\times A} K(x,y)w(x)w(y)dxdy\\ &+\int_{B\times B} K(x,y)w(x)w(y)dxdy\\ &+\int_{A\times B} K(x,y)w(x)w(y)dxdy\\ &+\int_{B\times A} K(x,y)w(x)w(y)dxdy.\end{aligned}$$

Se $K(x,y)$ não é zero em $A \times B$, obtemos que

$$\begin{aligned}\int_{A\times A} K(x,y)w(x)w(y)dxdy &= \int_{A\times A} K(x,y)|w(x)|\,|w(y)|dxdy,\\ \int_{B\times B} K(x,y)w(x)w(y)dxdy &= \int_{B\times B} K(x,y)|w(x)|\,|w(y)|dxdy\\ \int_{A\times B} K(x,y)w(x)w(y)dxdy < 0 &< \int_{A\times B} K(x,y)|w(x)|\,|w(y)|dxdy\end{aligned}$$

e

$$\int_{B\times A} K(x,y)w(x)w(y)dxdy < 0 < \int_{B\times A} K(x,y)|w(x)|\,|w(y)|dxdy.$$

Com essas informações

$$m = \frac{\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)w(x)w(y)dxdy}{\int_\Omega w^2dx} < \frac{\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)|w(x)|\,|w(y)|dxdy}{\int_\Omega |w|^2dx} \leq m,$$

o que é impossível, então $w > 0$ em Ω ou $w < 0$ em Ω.

Agora, suponhamos que $K(x,y) \equiv 0$ em $(A \times B) \cup (B \times A)$. Logo,

$$\begin{aligned}a_1 &= \int_{A\times A} K(x,y)w(x)w(y)dxdy,\\ a_2 &= \int_{B\times B} K(x,y)w(x)w(y)dxdy,\end{aligned}$$

e

$$b_1 = \int_A w^2 dx \text{ e } b_2 = \int_B w^2 dx.$$

Consequentemente,

$$m = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2},\ \frac{a_1}{b_1} \leq m \text{ e } \frac{a_2}{b_2} \leq m.$$

Logo, como $a_2 \leq b_2 m$ temos que

$$(b_1 + b_2)m = a_1 + a_2 \leq a_1 + b_2 m \Rightarrow b_1 m \leq a_1 \leq b_1 m$$

ou seja, vemos que $a_1 = mb_1$, e assim, a função $w^+ = \max\{w, 0\}$ satisfaz

$$m = \frac{\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)w^+(x)w^+(y)dxdy}{\int_\Omega (w^+)^2 dx}.$$

Usando a primeira parte desta demonstração, devemos ter $w^+ > 0$ em Ω, ou equivalentemente, $w(x) > 0$ em Ω, contradizendo o fato que $|B| > 0$, finalizando assim esta demonstração. ∎

Corolário 1.1.2 *Se w é uma autofunção de L_K associada ao autovalor m, então w deve ser uma autofunção positiva (ou negativa). Mais ainda,* $\dim N(L_K - mI) = 1$.

Demonstração. Se $L_K w = mw$, então $\langle L_K w, w\rangle = m \int_\Omega w^2$ e $w \neq 0$. Pelo Lemma 1.1.1, w deve ser uma autofunção positiva (ou negativa). Para a segunda parte do corolário, suponhamos que existam duas autofunções w e ϕ, associadas ao autovalor m que são linearmente independentes. Então, sem perda de generalidade, podemos supor que $\int_\Omega w\phi dx = 0$. Contudo, isto é impossível, pois w e ϕ tem sinais definidos em Ω, logo $\int_\Omega w\phi dx \neq 0$. ∎

Corolário 1.1.3 *Sob as condições $(K_1) - (K_2)$, se w é uma autofunção de L_K associada ao autovalor m, então w é positivo em $\overline{\Omega}$ (ou negativo em $\overline{\Omega}$). Consequentemente, w é descontínua em $\partial\Omega$ se definirmos $w = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.*

Demonstração. Com efeito, se $x_0 \in \partial\Omega$ é tal que $w(x_0) = 0$, então

$$0 < \int_{\Omega\cap|x_0-y|\leq\delta} K(x_0,y)w(y)dy \leq \int_\Omega K(x_0,y)w(y)dy = \lambda_1 w(x_0) = 0$$

o que é um absurdo, mostrando o resultado. ∎

Aqui, gostaríamos de salientar que em [31, 32], Garcia-Melián e Rossi consideraram um problema de autovalor não-local do tipo

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} K(x-y)u(y)dy - u = -\lambda u(x), & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{in } \mathbb{R}^N \backslash \Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

com o núcleo $K \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $K > 0$ em B_1 (a bola unitária centrada na origem), $K = 0$ em $\mathbb{R}^N \backslash B_1$, $K(-z) = K(z)$ e $\displaystyle\int_{B_1} K(x)dx = 1$. Eles provaram que este problema admite um único autovalor principal simples $\lambda_1 > 0$, cujas as autofunções associadas $\phi_1 \in C(\overline{\Omega})$ são positivas. Além disso, $0 < \lambda_1(\Omega) < 1$. Desta forma, a primeira autofunção ϕ_1 deste problema é estritamente positiva em Ω (com uma extensão contínua positiva em $\overline{\Omega}$) e que se anula fora de Ω. Portanto, uma descontinuidade ocorre em $\partial\Omega$ e o valor desta função na fronteira não é usado no sentido usual, para mais detalhes veja [44]. Desta forma, a condição na fronteira que eles consideraram não é natural. No Capítulo 3, consideraremos uma condição de fronteira nula mais natural, isto é, consideraremos

$$u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

que significa dizer $\lim\limits_{x \to \partial\Omega} u(x) = 0$, diferentemente de $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.

Com o estudo feito até o momento, temos o seguinte resultado do tipo **Krein-Rutman**, que continua o estudo feito nos artigos [31, 32], para outra classe de problemas não-locais.

Proposição 1.1.4 *O problema de autovalor*

$$L_K u = \lambda u, \quad \text{em } \Omega$$

tem um único autovalor $\lambda_1 > 0$ cuja autofunção associada é contínua em $\overline{\Omega}$ e tem sinal definido. Além disso, $\dim N(L - \lambda_1 I) = 1$ *onde* $\lambda_1 = m = \sup \sigma(L_K)$.

Este autovalor $m = \lambda_1$ é chamado de autovalor principal do operador dispersão L_K.

Antes de provarmos nosso próximo resultado, é necessário lembrar que as hipóteses sobre K implicam que, para cada $u \in C(\overline{\Omega})$, com $u \geq 0$ em Ω, apenas uma das possibilidades abaixo ocorre:

$$L_K u > 0 \text{ em } \overline{\Omega} \text{ ou } u \equiv 0 \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Consequentemente, temos o seguinte lema:

Lema 1.1.5 *Suponhamos que $u \in C(\overline{\Omega})$, $u \geq 0$, $u \neq 0$ em Ω e $c(x)$ dado pela igualdade $L_K u = c(x)u$, então $\|c\|_\infty \geq \lambda_1$. Essa desigualdade torna-se igualdade apenas quando $c(x) \equiv \lambda_1$.*

Demonstração. Considere φ_1 uma autofunção positiva associada ao principal autovalor λ_1. Portanto, $L_K\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$ e

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 dx = \int_\Omega uL_K\varphi_1 dx = \int_\Omega \varphi_1 L_K u dx = \int_\Omega c(x)u\varphi_1 dx \leq \|c\|_\infty \int_\Omega u\varphi_1 dx.$$

Desde que $\displaystyle\int_\Omega u\varphi_1 dx > 0$, a desigualdade acima leva a $\|c\|_\infty \geq \lambda_1$.

Agora, vamos mostrar que a igualdade $\|c\|_\infty = \lambda_1$ ocorre se, e somente se, $c(x) \equiv \lambda_1$ para todo $x \in \Omega$.

Com efeito, se $c(x) \equiv \lambda_1$ para todo $x \in \Omega$, temos de imediato que $\|c\|_\infty = \lambda_1$. Por outro lado, como $c(x)$ satisfaz a igualdade

$$L_K u(x) = c(x)u(x), \quad \text{em } x \in \Omega$$

segue-se que $c \in C(\overline{\Omega})$. Suponha que $\|c\|_\infty = \lambda_1$, logo existe algum $x_0 \in \Omega$ tal que $c(x_0) = \|c\|_\infty = \lambda_1$. Além disso,

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 dx = \int_\Omega c(x)u\varphi_1 dx \Rightarrow \int_\Omega (\lambda_1 - c(x))u\varphi_1 dx = 0$$

o que implica em

$$\lambda_1 - c(x) = 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

pois, $u\varphi_1 > 0$ em Ω. Como existe algum $x_0 \in \Omega$ tal que $c(x_0) = \|c\|_\infty = \lambda_1$, temos que $c(x) \equiv \lambda_1$ para todo $x \in \Omega$. ■

Lema 1.1.6 *Seja $u \in L^1(\Omega)$ uma função não-negativa e seja $c \in C(\overline{\Omega})$ uma função satisfazendo*

$$L_K u(x) = c(x)u(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Então, se $u \neq 0$ temos que u é contínua e positiva em $\overline{\Omega}$. Além disso, c é positiva em $\overline{\Omega}$.

Demonstração. Claramente temos $L_K u \in C(\overline{\Omega})$, e assim, $c(\cdot)u \in C(\overline{\Omega})$. Considere os seguintes conjuntos,

$$V = \{x \in \overline{\Omega};\ \text{existe uma bola } B \text{ centrada no ponto } x \text{ tal que } u \equiv 0 \text{ q.t.p. em } B \cap \Omega\}$$

e $W = \{x \in \overline{\Omega}; L_K u(x) > 0\}$. Ambos os subconjuntos V e W são abertos em $\overline{\Omega}$. Vamos mostrar que $W \cap V = \emptyset$ e $V = \overline{\Omega} \setminus W$.

Com efeito, se $z \notin W$ temos $L_K u(z) = 0$. Assim,

$$0 = L_K u(z) = \int_\Omega K(z,y)u(y)dy \geq \int_{B_\delta(z)\cap\Omega} K(z,y)u(y)dy \geq 0,$$

desde que $K(z,y) > 0$ para todo $|z-y| \leq \delta$, obtemos $u(y) = 0$ q.t.p. em $B_\delta(z) \cap \Omega$, ou seja, $z \in V$. Logo, $V = \overline{\Omega} \setminus W$.

Agora, suponha que $V \cap W \neq \emptyset$. Logo, existe $x \in V \cap W$, ou seja, existe $\epsilon > 0$ tal que $u \equiv 0$ q.t.p. em $B_\epsilon(x) \cap \Omega$ e $L_K u(x) > 0$. Assim, como L_K é contínua, segue-se que $0 < L_K u(x) = c(x)u(x) = 0$ em $x \in B_\epsilon(x) \cap \Omega$, o que é um absurdo. Com isso, devemos ter $V \cap W = \emptyset$.

Sendo Ω conexo, devemos ter $V = \emptyset$ e $W = \overline{\Omega}$. Além disso, c é positiva e $u(x) = \dfrac{L_K u(x)}{c(x)}$ é contínua e positiva em $\overline{\Omega}$. ■

Lema 1.1.7 *(Regularidade das soluções) Considere* $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função localmente Lipschitziana e crescente com relação a variável* $t \in \mathbb{R}$. *Se* $u \in L^\infty(\Omega)$ *satisfaz*

$$L_K u(x) = f(x, u(x)), \quad \textit{para todo } x \in \Omega,$$

então $u \in C(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Sabemos que, $v(x) = L_K u(x)$ é contínua em $x \in \overline{\Omega}$, pois o operador L_K é linear e compacto, com núcleo contínuo, simétrico e não-negativo K. Fixemos $x_0 \in \overline{\Omega}$ e consideremos $(x_n) \subset \overline{\Omega}$ de maneira que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Assim, como $|u(x_n)| \leq \|u\|_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por Bolzano-Weierstrass, existe subsequência $(u(x_{n_k})) \subset (u(x_n))$ convergente, digamos que

$$u(x_{n_k}) \to s \in [-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty].$$

Consequentemente, como $v(x_{n_k}) = L_K u(x_{n_k}) = f(x_{n_k}, u(x_{n_k}))$ tomando o limite de $k \to \infty$, obtemos $v(x_0) = f(x_0, s)$. Por outro lado,

$$f(x_0, u(x_0)) = L_K u(x_0) = v(x_0) = f(x_0, s).$$

Portanto, desde que f é crescente, temos $s = u(x_0)$, ou seja, $u(x_{n_k}) \to u(x_0)$ em $C(\overline{\Omega})$. Concluímos que, $u \in C(\overline{\Omega})$.

■

Lema 1.1.8 *Se $g(x) > \lambda_1$ em Ω, então $L_K u = g(x)u$ não admite uma solução positiva.*

Demonstração. Suponha que $L_K u = g(x)u$ admite uma solução positiva u e considere φ_1 uma autofunção positiva associada ao autovalor λ_1. Logo,

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 dx = \int_\Omega u L_K \varphi_1 dx = \int_\Omega \varphi_1 L_K u dx = \int_\Omega g(x) u \varphi_1 dx$$

isto é,

$$\int_\Omega (g(x) - \lambda_1) u \varphi_1 dx = 0,$$

como $u\varphi_1 > 0$ temos $g(x) - \lambda_1 = 0$, *q.t.p.* em Ω, o que é um absurdo.

■

Lema 1.1.9 *Seja λ_1 o autovalor principal de L_K. Então, $\lambda_1 \equiv k(x)$ ou $\|k\|_\infty > \lambda_1 > \inf_{x\in\overline{\Omega}} k(x)$. Recorde que, $k(x) = \int_\Omega K(x,y)dy$.*

Demonstração. De fato, como $\langle L_K \phi_1, 1\rangle = \langle \phi_1, L_K 1\rangle$ pela simetria do operador L_K, temos

$$\lambda_1 \int_\Omega \phi_1(x) dx = \int_\Omega k(x)\phi_1(x) dx$$

logo,

$$\int_\Omega (\lambda_1 - k(x))\phi_1(x) dx = 0.$$

Com isso, o resultado segue.

■

1.2 Um princípio de máximo

Nesta seção, mostraremos um princípio de máximo, que é uma versão do resultado encontrado no artigo de García-Melián e Rossi [31], que é baseado nos artigos de Coville [22] e [24]. García-Melián e Rossi demonstram o seguinte resultado

Teorema 1.2.1 *Seja $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ verificando*

$$L_K u(x) - (1+M)u(x) \leq 0, \quad \text{em } \Omega$$

com $u \geq 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ e $M \geq 0$. Então, $u > 0$ ou $u \equiv 0$ em $\overline{\Omega}$.

Antes de apresentarmos a nossa versão do Princípio de Máximo, que será de grande importância para o estudo de solução para o problema (P'), iniciamos com a definição de uma função que é muito importante para este princípio de máximo.

Observação 1.2.2 *Considere a função* $k : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$k(x) = \int_\Omega K(x,y)dy.$$

É fácil ver que

$$\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)v(y)^2 dxdy = \int_\Omega k(x)v(x)^2 dx,$$

e que

$$\langle L_K v, v\rangle \leq \|k\|_\infty \|v\|_2^2$$

onde $\langle u, v\rangle = \displaystyle\int_\Omega uvdx$ *é o produto interno usual do espaço* $L^2(\Omega)$*. Sendo* K *simétrico, também temos que*

$$\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)[v(x)-v(y)]^2 dxdy = 2\int_\Omega k(x)v(x)^2 dx \\ -2\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)v(x)v(y)dxdy$$

Uma observação importante é que, em [22], [24] e [31], a função

$$k(x) = \int_\Omega K(x,y)dy \equiv 1.$$

O que torna nosso resultado mais geral. Ou seja, temos então:

Lema 1.2.3 *(Princípio de Máximo) Suponha que* K *satisfaz* (K_1)*,* (K_2) *e* Ω *é um conjunto aberto e conexo. Seja* $u \in C(\overline{\Omega})$ *verificando*

$$L_K u(x) - c(x)u(x) \leq 0,$$

para todo $x \in \Omega$*, onde* c *é uma função limitada satisfazendo* $c(x) > k(x)$ *q.t.p. em* Ω*. Então* $u > 0$ *ou* $u \equiv 0$ *em* Ω*.*

Demonstração. Seja $u^-(x) = \min\{u, 0\}$. Note que, $u^-(x) \leq 0$, para todo $x \in \Omega$. Desde que $L_K u(x) - c(x)u(x) \leq 0$ em Ω,

$$\int_\Omega \left(\int_\Omega K(x,y)u(y)dy - c(x)u(x)\right) u^-(x)dx \geq 0,$$

$$\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)u(y)u^-(x)dydx \geq \int_\Omega c(x)u(x)u^-(x)dx,$$

$$\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)u(y)u^-(x)dydx \geq \int_\Omega c(x)u^-(x)^2 dx$$

e

$$\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)u^+(y)u^-(x)dydx + \int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)u^-(y)u^-(x)dydx \geq \int_\Omega c(x)u^-(x)^2 dx.$$

Como

$$\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)u^+(y)u^-(x)dydx \leq 0$$

temos

$$\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)u^-(y)u^-(x)dydx \geq \int_\Omega c(x)u^-(x)^2dx.$$

Da Observação 1.2.2, temos

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)(u^-(x)-u^-(y))^2dydx + \int_\Omega k(x)u^-(x)^2dx \geq \int_\Omega c(x)u^-(x)^2dx$$

ou

$$0 \geq -\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)(u^-(x)-u^-(y))^2dydx \geq \int_\Omega [c(x)-k(x)]u^-(x)^2dx \geq 0.$$

Assim, devemos ter $u^- \equiv 0$ in Ω, isto é, $u \geq 0$ em Ω.

Além disso, se $u(x_1) = 0$ para algum $x_1 \in \Omega$, então

$$\int_\Omega K(x_1,y)u(y)dy = 0$$

o que implica $u \equiv 0$ em uma vizinhança de x_1. Como o argumento usado no Lema 1.1.1, obtemos que $u \equiv 0$ in Ω, concluindo a prova.

■

Observação 1.2.4 *Como corolário do Princípio de Máximo, se $w \in C(\overline{\Omega})$ satisfaz $L_K w - c(x)w = 0$, onde $c(x) > k(x)$ q.t.p. em Ω, então $w \equiv 0$. Assim, para toda $f \in L^2(\Omega)$, o problema $L_K u - c(x)u = f$, em Ω admite no máximo uma solução $u \in C(\overline{\Omega})$.*

Capítulo 2

Existência de solução para um modelo de dispersão não-local com termo não-local via teoria de bifurcação

O objetivo central deste capítulo é o estudo de fatos fundamentais para a demonstração dos **Teoremas 0.0.3**, **0.0.4** e **0.0.5**, ou seja, estudaremos a existência de solução positiva para a seguinte classe de problemas não-locais

$$L_K u = u\left(\lambda - \int_\Omega Q(x,y)|u(y)|^p dy\right), \text{ em } \Omega \tag{P}$$

onde $p > 0$, λ é um parâmetro real, $Q : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função não-negativa com $Q \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ satisfazendo:

(Q_2) Existem $r, \sigma > 0$, tais que $Q(x,y) \geq \sigma$ para todos $x, y \in \overline{\Omega}$ e $|x - y| \leq r$.

Sob estas condições, mostraremos um resultado local de bifurcação, mais precisamente, demonstraremos o **Teorema 0.0.3**.

Posteriormente, a fim de obter um resultado global de bifurcação, isto é, obtermos o **Teorema 0.0.4**, vamos admitir a seguinte hipótese em Q:

(Q_3) Existem $x_0 \in \overline{\Omega}$ e uma função não negativa $a : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, tais que $a^{-1} \in L^q(\Omega)$, onde $q = \max\{1, p\}$ e $Q(x_0, y) \geq Q(x,y) + a(x)$, para todos $x, y \in \Omega$.

Por fim, sob uma condição mais fraca em Q, podemos resolver o problema para todo $\lambda > \lambda_1$, mas não garantimos a existência de uma componente conexa de soluções positivas para (P), ou seja, demonstraremos o **Teorema 0.0.5**. Para isso, consideraremos Q satisfazendo:

(Q_4) Existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $Q(x_0, y) \geq Q(x, y)$ para todos $x, y \in \Omega$.

2.1 Um resultado local de bifurcação

Nesta seção vamos considerar, para cada $w \in C(\overline{\Omega})$, a função $\Phi_w : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi_w(x) = \int_\Omega Q(x, y)|w(y)|^p dy,$$

onde $p > 0$ e Q é uma função contínua satisfazendo (Q_2).

A função Φ_w está bem definida pois Q e w funções limitadas. Além disso, as propriedades abaixo serão usadas:

(Φ_1) $t^p \Phi_w = \Phi_{tw}$, para todo $w \in C(\overline{\Omega})$;

(Φ_2) $\|\Phi_w\|_\infty \leq \|Q\|_\infty \|w\|_\infty^p |\Omega|$, para todo $w \in C(\overline{\Omega})$;

(Φ_3) $\|\Phi_w - \Phi_v\|_\infty \leq \|Q\|_\infty \||w|^p - |v|^p\|_\infty |\Omega|$, para todas $w, v \in C(\overline{\Omega})$;

(Φ_4) $\Phi : C(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\overline{\Omega})$, dada por $\Phi(w) = \Phi_w$, é uniformemente contínua em $C(\overline{\Omega})$.

A partir de agora, provaremos a existência de uma solução positiva para (P) usando um Teorema Global de Bifurcação. Tendo isso em mente, é muito importante observar que, se (λ, u) é uma solução de (P), então, do Lema 1.1.6, segue que $\lambda > \Phi_u(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ (veremos que esta última é uma condição necessária para obtermos uma solução positiva) e assim

$$L_K u = (\lambda - \Phi_u(x))u \Longleftrightarrow u = \frac{L_K u}{\lambda - \Phi_u(x)} \Longleftrightarrow u = \lambda^{-1} L_K u + \frac{\Phi_u(x) L_K u}{\lambda(\lambda - \Phi_u(x))}.$$

Para $\gamma = \lambda^{-1}$, segue que

$$u = \gamma L_K u + \frac{\gamma^2 \Phi_u(x) L_K u}{1 - \gamma \Phi_u(x)},$$

ou, equivalentemente,

$$u = \gamma L_K u + G(\gamma, u),$$

onde $G(\gamma, u) = \dfrac{\gamma^2 \Phi_u(x) L_K u}{1 - \gamma \Phi_u(x)}$, se $\gamma \Phi_u(x) \neq 1$.

Além disso, para $0 < a < b$ fixados,

$$\lim_{v \to 0} \frac{G(\gamma, v)}{\|v\|_\infty} = 0, \quad \text{uniformemente em } \gamma \in [a, b]. \qquad (\mathcal{G})$$

Em seguida, lembramos a definição de operador compacto quando o domínio não é um espaço vetorial. Este tipo de operador tem um papel importante em nossa abordagem.

Definição 2.1.1 *Sejam X um espaço de Banach e A um conjunto aberto em $\mathbb{R} \times X$. Um operador não linear $G : A \longrightarrow X$ é dito ser compacto, se G é contínuo e para cada $B \subset A$ tal que B é limitado e $dist(B, \partial A)$ é positiva, então $G(B)$ é relativamente compacto em X. Dizemos também que o operador G é completamente contínuo em X.*

Observação 2.1.2 *O operador G está bem definido em*

$$A = \{(\gamma, v) \in (0, +\infty) \times C(\overline{\Omega}); \gamma \|\Phi_v\|_\infty < 1\}.$$

Além disso, A é um conjunto aberto que contém $(\lambda_1^{-1}, 0)$. É fácil ver que G é compacto em cada conjunto $\overline{U}_{\Lambda,\rho,M}$, onde $U_{\Lambda,\rho,M} = \{(\gamma, v) \in (0, +\infty) \times C(\overline{\Omega}); \|v\|_\infty < M, \Lambda^{-1} < \gamma$ e $1 - \gamma \|\Phi_v\|_\infty > \rho\}$ e $U_{\Lambda,\rho,M} \subset A$.

Usando as notações acima, vemos que (λ, u) resolve (P) se, e somente se,

$$L_K u + \Phi_u(x) u = \lambda u,$$

ou equivalentemente, $u = F(\gamma, u) := \gamma L_K u + G(\gamma, u)$, onde $\gamma = \lambda^{-1}$.

Na continuação, aplicaremos um resultado de Bifurcação encontrado em [26, Theorema 29.1], que melhora o conhecido Teorema de Bifurcação Global encontrado em [43].

Teorema 2.1.3 ***(Bifurcação Global)*** *Sejam X um espaço de Banach, $U \subset \mathbb{R} \times X$ uma vizinhança de $(\gamma_0, 0)$, $G : \overline{U} \longrightarrow X$ completamente contínua e $G(\gamma, u) = o(\|u\|_X)$ quando $u \to 0$, uniformemente em γ, em compactos de $\mathbb{R}$. Sejam $T \in L(X)$ um operador compacto, γ_0 um valor característico de multiplicidade ímpar de T, $F(\gamma, u) = u - \gamma T + G(\gamma, u)$ e*

$$\Sigma = \{(\gamma, u) \in U; F(\gamma, u) = 0, u \neq 0\}.$$

Então a componente $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\gamma$ de $\overline{\Sigma}$, contendo $(\gamma_0, 0)$, satisfaz pelo menos uma das seguintes propriedades:

(i) $\mathcal{C} \cap \partial U \neq \emptyset$

(ii) $\mathcal{C}$ contém um número ímpar de zeros triviais $(\gamma_i, 0) \neq (\gamma_0, 0)$, onde γ_i é um valor característico de T com multiplicidade ímpar.

Recordemos a definição de ponto de bifurcação

Definição 2.1.4 *Um ponto de bifurcação para $F(\gamma, u) = 0$ é um número $\gamma^* \in \mathbb{R}$ tal que $(\gamma^*, 0)$ pertence ao fecho de Σ. Em outras palavras, γ^* é um ponto de bifurcação se, existem sequências $(\gamma_n) \subset \mathbb{R}$ e $(u_n) \subset X \setminus \{0\}$ tais que*

(i) $F(\gamma_n, u_n) = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $(\gamma_n, u_n) \to (\gamma^*, 0)$, *quando* $n \to \infty$.

Do Capítulo 1, sabemos da existência de uma primeira autofunção positiva ϕ_1 associada ao λ_1. Mais ainda, λ_1 é um autovalor de L_K com multiplicidade igual a 1. Do Teorema 2.1.3, existe uma componente conexa $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\lambda_1^{-1}}$ de soluções para (P) que satisfaz (i) ou (ii). Vamos mostrar que (ii) não ocorre. Para isto, precisaremos do lema abaixo:

Lema 2.1.5 *Existe $\delta > 0$ tal que, se $(\gamma, u) \in \mathcal{C}$ com $|\gamma - \lambda_1^{-1}| + \|u\|_\infty < \delta$ e $u \neq 0$, então u tem sinal definido, isto é,*

$$u(x) > 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega} \quad ou \quad u(x) < 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Demonstração. É suficiente provar que, para quaisquer duas sequências $(u_n) \subset C(\overline{\Omega})$ e $\gamma_n \to \lambda_1^{-1}$ com

$$u_n \neq 0, \quad \|u_n\|_\infty \to 0 \quad \text{e} \quad u_n = F(\gamma_n, u_n) = \gamma_n L_K u_n + G(\gamma_n, u_n),$$

u_n tem sinal definido para n suficientemente grande.

Defina $w_n = u_n/\|u_n\|_\infty$, obtemos que $(w_n) \subset C(\overline{\Omega})$ e

$$w_n = \gamma_n L_K(w_n) + \frac{G(\gamma_n, u_n)}{\|u_n\|_\infty} = \gamma_n L_K(w_n) + o_n(1),$$

onde usamos $(\mathcal{G})$ na última igualdade.

Da compacidade do operador L_K, podemos assumir que $(L_K(w_n))$ é convergente para alguma subsequência. Então,

$$w_n \to w \text{ em } C(\overline{\Omega}),$$

para algum $w \in C(\overline{\Omega})$ com $\|w\|_\infty = 1$. Assim,

$$w = \lambda_1^{-1} L_K(w)$$

ou, equivalentemente,

$$L_K w = \lambda_1 w \text{ em } \Omega.$$

Com isso, $w \neq 0$ é uma autofunção associada ao autovalor principal λ_1, da Proposição 1.1.4 e do Corolário 1.1.3,

$$w(x) > 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega} \quad \text{ou} \quad w(x) < 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

No que segue, sem perda de generalidade, vamos supor que w é positivo em $\overline{\Omega}$. Sendo w limite uniforme de (w_n) em $C(\overline{\Omega})$, devemos ter $w_n > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ e n suficientemente grande. Como u_n e w_n tem mesmo sinal, u_n é também positivo, que é a conclusão desejada.

■

Observação 2.1.6 *Temos que, $(\gamma, u) \in \Sigma$ se, e somente se, $(\gamma, -u) \in \Sigma$. Logo, considerando os conjuntos*

$$\mathcal{C}^+ = \{(\gamma, u) \in \mathcal{C} : u(x) > 0, \ \forall x \in \overline{\Omega}\} \cup \{(\lambda_1^{-1}, 0)\}$$

e

$$\mathcal{C}^- = \{(\gamma, u) \in \mathcal{C} : u(x) < 0, \ \forall x \in \overline{\Omega}\} \cup \{(\lambda_1^{-1}, 0)\},$$

temos

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-. \tag{2.1}$$

Além disso, $\mathcal{C}^- = \{(\gamma, u) \in \mathcal{C} : (\gamma, -u) \in \mathcal{C}^+\}$ e $\mathcal{C}^+ \cap \mathcal{C}^- = \{(\lambda_1^{-1}, 0)\}$.

De fato, no que segue, fixemos

$$\mathcal{C}^\pm = \{(\gamma, u) \in \mathcal{C} : u^\pm \neq 0\}$$

isto é, $\mathcal{C}^\pm$ é o subconjunto de $\mathcal{C}$ das funções que mudam de sinal. Desde que

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^- \cup \mathcal{C}^\pm,$$

deduzimos que, para provarmos (2.1), basta mostrarmos que $\overline{\mathcal{C}^\pm} = \emptyset$. Supondo por contradição que $\overline{\mathcal{C}^\pm} \neq \emptyset$, como $\mathcal{C}$ é um conjunto conexo em $(0, +\infty) \times C(\overline{\Omega})$ e $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$ é um conjunto não vazio e fechado, com $(\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-) \cap \mathcal{C}^\pm = \emptyset$, devemos ter

$$(\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-) \cap \overline{\mathcal{C}^\pm} \neq \emptyset.$$

Assim, existem uma solução $(\gamma, u) \in \mathcal{C}$, sequências $(\gamma_n, u_n) \subset \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$ e $(s_n, w_n) \subset \mathcal{C}^\pm$ tais que

$$\gamma_n, s_n \to \gamma \quad \text{em} \quad \mathbb{R}, \quad u_n \to u \quad \text{em} \quad C(\overline{\Omega}) \quad \text{e} \quad w_n \to u \quad \text{em} \quad C(\overline{\Omega}).$$

Consequentemente $u \geq 0$ em $\overline{\Omega}$ ou $u \leq 0$ em $\overline{\Omega}$ e $u \neq 0$. Sem perda de generalidade, supomos que $u \geq 0$ em $\overline{\Omega}$. Como (γ, u) verifica $u = \gamma L_K u + G(\gamma, u)$, $L_K u > 0$ e $G(\gamma, u) \geq 0$, segue-se que $u > 0$ em $\overline{\Omega}$. Logo, w_n é positivo para n grande o suficiente, obtendo assim uma contradição. Portanto, $\overline{\mathcal{C}^\pm} = \emptyset$, terminando a prova de (2.1).

Observação 2.1.7 *O Lema 1.1.8 mostra que a componente conexa que sai de* $(\lambda_1, 0)$, *não tem pontos de acumulação na forma* $(\lambda, 0)$ *com* $\lambda > \lambda_1$.

De fato, se $u > 0$ *e* $\|u\|_\infty$ *é suficientemente pequeno de maneira que* $\lambda - \Phi_u(x) > \lambda_1$, *do Lema 1.1.8,* (λ, u) *não pode pertencer a esta componente.*

Agora, consideremos $U \subset A$ como na **Observação 2.1.2** ou seja, $U := U_{\Lambda,\rho,M}$. Então,

Lema 2.1.8 $\mathcal{C}^+ \cap \partial U \neq \emptyset$.

Demonstração. Suponhamos por contradição que $\mathcal{C}^+ \cap \partial U = \emptyset$. Então, do Teorema 2.1.3, existe $(\hat{\gamma}, 0) \in \mathcal{C}$, onde $\hat{\gamma} \neq \lambda_1^{-1}$ e $\hat{\gamma}$ é um valor característico de L_K com multiplicidade ímpar.

Consequentemente, existem (u_n) in $C(\overline{\Omega})$ e $\gamma_n \to \hat{\gamma}$ tais que

$$u_n \neq 0, \quad \|u_n\|_\infty \to 0 \quad \text{e} \quad u_n = F(\gamma_n, u_n).$$

Considerando $w_n = u_n / \|u_n\|_\infty$, obtemos que $(w_n) \subset C(\overline{\Omega})$ é limitada e

$$w_n = \gamma_n L_K(w_n) + \frac{G(\gamma_n, u_n)}{\|u_n\|_\infty} = \gamma_n L_K(w_n) + o_n(1),$$

onde usamos $(\mathcal{G})$ na última igualdade. Além disso, como na demonstração do Lema 2.1.5, passando para uma subsequência se necessário, temos que (w_n) converge para um $v \in C(\overline{\Omega})$, que é uma solução não-trivial do problema

$$L_0 v = \hat{\lambda} v \quad \text{in} \quad \Omega,$$

onde $\hat{\lambda} = \hat{\gamma}^{-1}$, mostrando que v é uma autofunção associada ao autovalor $\hat{\lambda}$. Como $\hat{\lambda} \neq \lambda_1$, v muda de sinal. Então, para n suficientemente grande, w_n muda de sinal, implicando que u_n também muda de sinal, o que é um absurdo, pois $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}^+$ ou $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}^-$.

$\blacksquare$

O próximo resultado estabelece mais algumas propriedades das soluções positivas de (P).

Lema 2.1.9 *Se (γ, u) é uma solução de $u = F(\gamma, u) := \gamma L_K u + G(\gamma, u)$ com $u > 0$ em Ω, então*

$$\gamma \Phi_u(x) < 1, \quad \textit{para todo } x \in \overline{\Omega},$$

isto é, $(\gamma, u) \in A = \{(\gamma, v) \in (0, +\infty) \times C(\overline{\Omega}); \gamma \|\Phi_v\|_\infty < 1\}$. Isso também afirma que $\mathcal{C}^+ \subset A$.

Demonstração. Note que, $u = F(\gamma, u) := \gamma L_K u + G(\gamma, u)$ é equivalente a

$$L_K u + \Phi_u(x) = \lambda u,$$

onde $\gamma = \lambda^{-1}$. Sendo $u > 0$ em Ω, temos

$$0 < L_K u = (\lambda - \Phi_u(x))u$$

o que implica

$$\lambda - \Phi_u(x) > 0, \quad \text{para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

Portanto, $\lambda^{-1}\Phi_u(x) < 1$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ e assim,

$$\gamma \Phi_u(x) < 1, \text{para todo } x \in \overline{\Omega},$$

isto é $(\gamma, u) \in A$. $\blacksquare$

Sendo $\overline{\Omega}$ um compacto, podemos cobri-lo com um número finito de bolas centradas em alguns pontos de $\overline{\Omega}$ e raio $r > 0$, ou seja, existem $x_1, ..., x_m \in \Omega$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{m} (B_{r/2}(x_j) \cap \overline{\Omega}),$$

onde $r > 0$ foi dado na condição (Q_2). O inteiro m aparecerá no próximo lema.

Lema 2.1.10 *Seja $\Lambda > 0$ e suponhamos que (λ, u) é tal que $L_K u + \Phi_u(x)u = \lambda u$ para algum $\lambda \in (0, \Lambda]$. Então $\|u\|_p \leq \left(\dfrac{m\lambda}{\sigma}\right)^{\frac{1}{p}}$, isto é, u é uniformemente limitado em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Pela cobertura acima, considere $E_j = \Omega \cap B_r(x_j)$, assim

$$\sigma \int_{E_j} |u(y)|^p dy \leq \int_{E_j} Q(x_j, y)|u(y)|^p dy \leq \Phi_u(x_j),$$

do Lema 2.1.9 temos,

$$\sigma \int_{E_j} |u(y)|^p dy \leq \lambda.$$

Logo,

$$\sigma \int_{\Omega} |u(y)|^p dy \leq m\lambda$$

ou seja, $\|u\|_p \leq \left(\frac{m\lambda}{\sigma}\right)^{\frac{1}{p}}$. ■

Como consequência desta última demonstração, temos:

Corolário 2.1.11 *Sobre a condição (Q_2''). $\Phi_v(x) \geq \sigma||v||_p^p$, para todo $v \in C(\overline{\Omega})$, $x \in \overline{\Omega}$.*

2.1.1 Demonstração do Teorema 0.0.3

Com as informações acima, estamos prontos para demonstrar o Teorema 0.0.3. Vamos encontrar um $\rho > 0$ de maneira que, se u é uma solução positiva de $L_K u + \Phi_u(x)u = \lambda u$ para algum λ, então $\lambda - \Phi_u(x) \geq \rho$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Com efeito, seja $x_* \in \Omega$ tal que $\Phi_u(x_*) \leq \Phi_u(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Do Lema 1.1.5 temos que $\|\lambda - \Phi_u\|_\infty > \lambda_1$, consequentemente

$$\lambda - \Phi_u(x_*) > \lambda_1,$$

ou equivalentemente, $\lambda - \lambda_1 > \Phi_u(x_*)$. Além disso, do Corolário 2.1.11

$$\lambda - \lambda_1 > \Phi_u(x_*) \geq \sigma\|u\|_p^p. \tag{2.2}$$

Por outro lado,

$$\lambda - \Phi_u(x) = \lambda - \Phi_u(x) + \Phi_u(x_*) - \Phi_u(x_*)$$

ou

$$\lambda - \Phi_u(x) > \lambda_1 - |\Phi_u(x) - \Phi_u(x_*)|. \tag{2.3}$$

Agora, de (2.2) obtemos

$$|\Phi_u(x) - \Phi_u(x_*)| \leq \int_{\Omega} |Q(x,y) - Q(x_*,y)||u(y)|^p dy \leq [Q]\|u\|_p^p \leq [Q]\frac{(\lambda - \lambda_1)}{\sigma}. \tag{2.4}$$

Observe que, se $\lambda_1 < \lambda < \lambda_1 + \dfrac{\lambda_1 \sigma}{[Q]} - \epsilon$, para um número pequeno fixo $\epsilon > 0$, temos $0 < \lambda - \lambda_1 < \dfrac{\lambda_1 \sigma}{[Q]} - \epsilon$. Logo, de (2.3) e (2.4),

$$\lambda - \Phi_u(x) > \lambda_1 - [Q]\frac{(\lambda - \lambda_1)}{\sigma}$$

e então,

$$\lambda - \Phi_u(x) > \frac{[Q]\epsilon}{\sigma} > 0 \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Portanto, com o estudo acima obtemos que, para cada $\epsilon > 0$, existe um número $\rho > 0$ ($\rho = [Q]\varepsilon\sigma^{-1}$) tal que $\lambda - \|\Phi_u\|_\infty \geq \rho$, para todo $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \dfrac{\lambda_1\sigma}{[Q]} - \epsilon]$. Além disso,

$$|u(x)| \leq \frac{|L_K u(x)|}{\lambda - \Phi_u(x)} \leq \frac{|L_K u(x)|}{\rho} \leq \frac{\|K\|_{p'}}{\rho}\|u\|_p, \quad \text{para todo } x \in \overline{\Omega},$$

onde usamos Hölder na última desigualdade e $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{p} = 1$. Do Lema 2.1.10, $\|u\|_p$ é limitado, então existe $M > 0$ tal que $\|u\|_\infty \leq M$.

Reunindo todas as informações acima, fixando $\epsilon > 0$ e considerando $\Lambda = \lambda_1 + \dfrac{\lambda_1\sigma}{[Q]} - \epsilon$, encontramos $\rho > 0$ e $M > 0$ tais que, para $U = U_{\Lambda, \frac{\rho}{2}, 2M}$ temos $\mathcal{C}^+ \cap \partial U \neq \emptyset$, assim $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$ e uma das seguintes condições ocorrer: $\lambda - \|\Phi_u\|_\infty = \dfrac{\rho}{2}$ ou $\|u\|_\infty = 2M$ ou $\lambda = \Lambda$. Mas vimos que, sob as condições acima, $\lambda - \|\Phi_u\|_\infty \geq \rho$ e $\|u\|_\infty \leq M$, isto é, deveríamos ter $\lambda = \Lambda$ e a componente conexa de soluções para (P) cruza o hiperplano $\{\lambda\} \times C(\overline{\Omega})$, para todo $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda]$. Completando a demonstração do Teorema 0.0.3.

2.2 Um resultado global de bifurcação

Nesta seção, vamos estudar a bifurcação para todos os $\lambda > \lambda_1$. Desta forma, como na última demonstração, queremos encontrar um número positivo $\rho > 0$ tal que, seja qual for o $\Lambda > \lambda_1$, se u é uma solução positiva de $L_K u + \Phi_u(x)u = \lambda u$ para algum $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda]$, então $\lambda - \|\Phi_u\|_\infty \geq \rho$. Para obter este número, precisamos de mais informações sobre Q e p.

Lema 2.2.1 *Suponhamos que $p > 0$ e $(Q_2) - (Q_3)$ ocorrem. Então existem $\rho > 0$ e $M > 0$ tais que $\lambda - \|\Phi_u\|_\infty \geq \rho$ e $\|u\|_\infty \leq M$ para todos (λ, u) tais que $L_K u + \Phi_u(x)u = \lambda u$, $u > 0$ e $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda]$.*

Demonstração. Para começar, provaremos primeiro a existência de ρ, depois mostraremos a de M. Se não existe ρ, então podemos encontrar uma sequência (λ_n, u_n) tal que $L_K u_n + \Phi_{u_n}(x)u_n = \lambda_n u_n$, $u_n > 0$, $\lambda_n \to \lambda \in (\lambda_1, \Lambda]$ e $\|\Phi_{u_n}\|_\infty \to \lambda$. No que segue, dividimos em dois casos o nosso estudo, a saber: $p > 1$ e $p \in (0, 1)$.

Caso 1: $p > 1$. Pelo Lema 2.1.10, (u_n) é uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$, e como $p > 1$, existe alguma subsequência (u_n), que será denotada de mesma forma, tal que $u_n \rightharpoonup u \quad$ em $L^p(\Omega)$. Como $(L_K u_n)$ e (Φ_{u_n}) são uniformemente convergentes em $C(\overline{\Omega})$, supomos que $L_K u_n \to w$ e $\Phi_{u_n} \to v$ em $C(\overline{\Omega})$, respectivamente. Mas, como L_K é um operador linear compacto, temos

$$L_K u_n(x) = \int_\Omega K(x,y)u_n(y)dy \to \int_\Omega K(x,y)u(y)dy = L_K u(x) \quad \text{em } \Omega,$$

e assim, $L_K u_n \to L_K u$ em $C(\overline{\Omega})$. Em seguida, vamos mostrar que $\Phi_{u_n} \to \Phi_u$ em $C(\overline{\Omega})$, no entanto como Φ não é linear o argumento acima não funciona, e precisamos usar outros argumentos. Do limite $\Phi_{u_n} \to v$ em $C(\overline{\Omega})$, sabemos que $\Phi_{u_n}(x) \to v(x)$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Agora, sendo $\lambda_n - \Phi_{u_n}(x) > 0$, temos $\lambda - v(x) \geq 0$. Passando o limite fraco no sentido $L^p(\Omega)$ em $L_K u_n + \Phi_{u_n}(x)u_n = \lambda_n u_n$, obtemos

$$L_K u = (\lambda - v(x))u \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Na continuação, vamos considerar os casos $u \equiv 0$ e $u \neq 0$, nos dois casos, chegaremos a uma contradição. Isso prova a existência de ρ.

O caso $u \equiv 0$**:** Neste caso, $u_n \rightharpoonup 0$ em $L^p(\Omega)$ e como $u_n > 0$, temos que $u_n \to 0$ em $L^1(\Omega)$ e $L_K u_n \to 0$ em $C(\overline{\Omega})$. Isso produz $u_n \to 0$ em $L^p(\Omega)$. De fato, por (Q_3),

$$\lambda_n > \Phi_{u_n}(x_0) \geq \Phi_{u_n}(x) + a(x)\|u_n\|_p^p \quad \text{para } x \in \Omega$$

logo,

$$\lambda_n - \Phi_{u_n}(x) > a(x)\|u_n\|_p^p, \quad \text{para } x \in \Omega. \tag{2.5}$$

Daí,

$$\int_\Omega u_n(y)^p dy = \int_\Omega \left[\frac{L_K u_n(y)}{\lambda_n - \Phi_{u_n}(y)}\right]^p dy \leq \frac{\|L_K u_n\|_\infty^p}{(\|u_n\|_p^p)^p} \int_\Omega \frac{1}{a(y)^p} dy$$

o que implica

$$\left(\int_\Omega u_n(y)^p dy\right)^{p+1} \leq \|L_K u_n\|_\infty^p \int_\Omega \frac{1}{a(y)^p} dy < \infty.$$

Passando ao limite e usando o fato de que $\|L_K u_n\|_\infty \to 0$, encontramos $\|u_n\|_p \to 0$. Portanto, $u_n \to 0$ em $C(\overline{\Omega})$, que contradiz o limite $\|\Phi_{u_n}\|_\infty \to \lambda > 0$.

O caso $u \neq 0$: Do Lema 1.1.6, $u > 0$ e $\lambda - v(x) > 0$ em $\overline{\Omega}$. Por outro lado, argumentando como acima, $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. Consequentemente, $\Phi_{u_n} \to \Phi_u$ em $C(\overline{\Omega})$, $\|\Phi_{u_n}\|_\infty \to \|\Phi_u\|_\infty$ e $\lambda - \Phi_u(x) > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Então, $\lambda - \|\Phi_u\|_\infty > 0$, que contradiz $\|\Phi_{u_n}\|_\infty \to \lambda$.

Agora, vamos provar a existência de M. Observe que

$$|u(x)| \leq \frac{|L_K u(x)|}{\lambda - \Phi_u(x)} \leq \frac{|L_K u(x)|}{\rho} \leq \frac{\|K\|_q}{\rho}\|u\|_p, \quad \text{para todo } x \in \overline{\Omega},$$

onde usamos Hölder na última desigualdade e $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$. Do Lema 2.1.10, $\|u\|_p$ é limitado, então existe um $M > 0$ tal que $\|u\|_\infty \leq M$.

Caso 2: $p \in (0, 1]$**.** Como no primeiro caso, podemos supor que $u_n^p \not\to 0$ em $L^1(\Omega)$, caso contrário vamos conseguir $\Phi_{u_n} \to 0$ em $C(\overline{\Omega})$, que contradiz o limite $\|\Phi_{u_n}\|_\infty \to \lambda > 0$. Na sequência, como (u_n^p) é limitado em $L^1(\Omega)$, para alguma subsequência, podemos supor que $u_n^p \rightharpoonup \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ para algum $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, onde $\mathcal{M}(\Omega)$ denota o espaço de medidas finitas positivas sobre Ω. Logo,

$$\int_\Omega \phi u_n^p \, dx \to \int_\Omega \phi d\mu, \quad \text{para todo } \phi \in C(\overline{\Omega}),$$

e assim,

$$\Phi_{u_n}(x) = \int_\Omega Q(x, y) u_n^p \, dx \to \int_\Omega Q(x, y) d\mu = v(x), \quad \text{para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

Como $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, com uma simples conta obtemos $v \in C(\overline{\Omega})$ e $v(x) \geq 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Usando (Q_3) obtemos

$$\lambda_n - \Phi_{u_n}(x) \geq a(x) \int_\Omega u_n^p \, dx, \tag{2.6}$$

e tomando o limite $n \to +\infty$, encontramos

$$\lambda - v(x) \geq a(x) W, \quad \text{para todo } x \in \overline{\Omega}$$

onde $W = \int_\Omega d\mu > 0$. Aqui sabemos que $W > 0$, pois estamos supondo que $u_n^p \not\to 0$ em $L^1(\Omega)$. Desde que a é uma função não negativa e $a^{-1} \in L^1(\Omega)$, temos que o conjunto $\mathcal{O} = \{x \in \Omega : a(x) = 0\}$ têm medida nula, assim

$$\lambda - v(x) > 0, \quad \text{q.t.p. em} \quad \overline{\Omega}.$$

Afirmação 2.2.2 *A sequência (u_n) é limitada em $L^1(\Omega)$.*

Com efeito, suponhamos por contradição que $\|u_n\|_1 \to +\infty$ e defina $w_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_1}$. Usando o fato que (λ_n, u_n) é uma solução de (P), obtemos

$$L_K w_n + \Phi_{u_n} w_n = \lambda_n w_n$$

assim,

$$w_n = \frac{L_K w_n}{\lambda_n - \Phi_{u_n}}.$$

Como (w_n) é limitada em $L^1(\Omega)$, para alguma subsequência, temos $L_K w_n \to w_*$ em $C(\overline{\Omega})$, consequentemente

$$w_n(x) \to \frac{w_*(x)}{\lambda - v(x)} = w(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \overline{\Omega}.$$

Da definição de w, vemos que $w \in C(\Omega \setminus \mathcal{O})$ e $w(x) \geq 0$ q.t.p. em $\overline{\Omega}$. Ademais, também temos

$$w_n(x) \leq \frac{2\|L_K w_n\|_\infty}{a(x)W} \quad \text{q.t.p. em} \quad \overline{\Omega}.$$

Desde que $a^{-1} \in L^1(\Omega)$, as informações acima asseguram que

$$w_n \to w \quad \text{em} \quad L^1(\Omega),$$

então $\|w\|_1 = 1$. Por outro lado, também temos

$$L_K\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_1^{p+1}}\right) + \Phi_{w_n}(x) w_n = \lambda_n \frac{u_n}{\|u_n\|_1^{p+1}},$$

então $\Phi_{w_n} w_n \to 0$ em $L^1(\Omega)$, logo pelo Lema de Fatou

$$\int_\Omega \int_\Omega Q(x,y) w^p(y) w^2(x)\, dxdy = 0.$$

Da condição (Q_2) obtemos $w = 0$, o que é um absurdo. Isso prova que (u_n) é limitado em $L^1(\Omega)$. Argumentando como acima, substituindo w_n por u_n, podemos provar que $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$, e o lema segue repetindo os mesmos argumentos explorados no Caso 1.

■

2.2.1 Demonstração do Teorema 0.0.4

Vamos demonstrar agora, o Teorema 0.0.4. Com as informações acima, para todo $\Lambda > \lambda_1$ encontramos $\rho > 0$ e $M > 0$ tais que, para $U = U_{\Lambda, \frac{\rho}{2}, 2M}$ temos $\mathcal{C}^+ \cap \partial U \neq \emptyset$, assim $(\lambda^{-1}, u) \in \mathcal{C}^+$ e uma das seguintes condições ocorre: $\lambda - \|\Phi_u\|_\infty = \dfrac{\rho}{2}$ ou $\|u\|_\infty = 2M$. Mas vimos que, sob as condições acima, $\lambda - \|\Phi_u\|_\infty \geq \rho$ e $\|u\|_\infty \leq M$, isto é, a componente conexa de soluções para (P) cruza o hiperplano $\{\Lambda\} \times C(\overline{\Omega})$ qualquer que seja $\Lambda > \lambda_1$.

Para concluir a prova, mostraremos a inexistência de solução para $\lambda \leq \lambda_1$. De fato, suponha que (λ, u) satisfaz $u \geq 0$, $\lambda > 0$ e $L_K u + \Phi_u u = \lambda u$. Então, para todo $v \in L^2(\Omega)$,

$$\langle L_K u, v\rangle + \langle \Phi_u u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle.$$

Tomando $v = \varphi_1$, a autofunção associada ao principal autovalor λ_1 de L_K, encontramos

$$\langle L_K u, \varphi_1\rangle + \langle \Phi_u u, \varphi_1\rangle = \lambda\langle u, \varphi_1\rangle.$$

Pela simetria de L_K em $L^2(\Omega)$, segue-se que

$$\lambda_1\langle \varphi_1, u\rangle + \langle \Phi_u u, \varphi_1\rangle = \lambda\langle u, \varphi_1\rangle.$$

Agora, usando o fato que $\langle \Phi_u u, \varphi_1\rangle > 0$, temos

$$\lambda_1\langle \varphi_1, u\rangle < \lambda\langle \varphi_1, u\rangle$$

i.e.,

$$(\lambda_1 - \lambda)\int_\Omega \varphi_1 u dx < 0,$$

mostrando que $\lambda_1 < \lambda$.

2.3 Demonstração do Teorema 0.0.5

Nesta seção, vamos fixar $\lambda > \lambda_1$ e mostrar que o problema (P) tem uma solução positiva que é limite uniforme de soluções dadas pelo Teorema 0.0.4.

Primeiro, consideremos $0 < \epsilon \leq \epsilon_0 = \dfrac{N}{2p}$ e defina

$$Q_\epsilon(x, y) = Q(x, y)(2 - a_\epsilon(x))$$

onde

$$a_\epsilon(x) = \begin{cases} |x - x_0|^\epsilon, & \text{se } |x - x_0| \leq 1 \\ 1, & \text{se } |x - x_0| \geq 1. \end{cases}$$

Note que, $2Q(x,y) \geq Q_\epsilon(x,y) \geq Q(x,y) \geq 0$ para todos $x,y \in \Omega$ e $Q_\epsilon(x,y) \geq \sigma$ quando $|x-y| \leq r$, e assim, Q_ϵ verifica (Q_2). Além disso,

$$Q_\epsilon(x_0,y) - Q_\epsilon(x,y) = 2Q(x_0,y) - Q(x,y)(2-a_\epsilon(x)) \geq 2Q(x,y) - Q(x,y)(2-a_\epsilon(x))$$

isto é,

$$Q_\epsilon(x_0,y) - Q_\epsilon(x,y) \geq Q(x,y)a_\epsilon(x) \geq \frac{1}{2}Q_\epsilon(x,y)a_\epsilon(x), \quad \text{para todos } x,y \in \Omega. \tag{2.7}$$

Relacionado a a_ϵ temos: $a_\epsilon(x) \leq 1$ para todo $x \in \Omega$.

Vamos considerar a seguinte família de problemas auxiliares:

$$L_K u + \Phi_u^\epsilon(x)u = \lambda u, \quad \text{em } \Omega. \tag{P_ϵ}$$

Lema 2.3.1 *Suponhamos que (Q_2), (Q_4) ocorrem e fixemos $\epsilon > 0$. Então, se (λ, u) é uma solução positiva de (P_ϵ) com $\lambda > \lambda_1$ e $u > 0$, temos*

$$\lambda - \Phi_u^\epsilon(x) \geq \theta a_\epsilon(x), \quad \textit{para todo } x \in \Omega, \tag{2.8}$$

onde $\theta = \min\{\lambda_1, \lambda - \lambda_1\}$.

Demonstração. Note que, $(Q_2), (Q_4)$ e (2.7) implicam em $\Phi_u^\epsilon(x_0) \geq \Phi_u^\epsilon(x)$, para todo $x \in \Omega$ e,

$$\lambda - \Phi_u^\epsilon(x) \geq \Phi_u^\epsilon(x_0) - \Phi_u^\epsilon(x) \geq a_\epsilon(x)\int_\Omega Q(x,y)u(y)^p dy \geq \frac{1}{2}a_\epsilon(x)\Phi_u^\epsilon(x). \tag{2.9}$$

Assim, se $\Phi_u^\epsilon(x) \leq \lambda_1$, temos $\lambda - \Phi_u^\epsilon(x) \geq \lambda - \lambda_1 \geq (\lambda - \lambda_1)a_\epsilon(x)$. Por outro lado, se $\Phi_u^\epsilon(x) > \lambda_1$, de (2.9) temos que $\lambda - \Phi_u^\epsilon(x) \geq \lambda_1 a_\epsilon(x)$. De qualquer forma, desde que $\theta = \min\{\lambda_1, \lambda - \lambda_1\}$ temos

$$\lambda - \Phi_u^\epsilon(x) \geq \theta a_\epsilon(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

■

O Lema 2.3.1 serve o mesmo propósito do Lema 2.2.1 para o problema auxiliar (P_ϵ).

Lema 2.3.2 *Suponhamos que $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ é fixado, $p > 0$, (Q_2) e (Q_4) ocorrem. Então, existem $\rho > 0$ e $M > 0$ tais que $\lambda - \|\Phi_u^\epsilon\|_\infty \geq \rho$ e $\|u\|_\infty \leq M$ para todos (λ, u) satisfazendo (P_ϵ), com $u > 0$ e $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda]$.*

Demonstração. Procedemos exatamente como na prova do Lema 2.2.1. Aqui substituímos (2.5) por (2.8), no caso $p > 1$, e substituímos (2.6) por (2.8) para o caso $p \leq 1$.

■

Usando o Lema 2.3.2 e seguindo todos os passos da demostração do Teorema 0.0.4, para qualquer $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ fixado, temos uma componente conexa $\mathcal{C}_\epsilon^+$, associada para a equação de bifurcação (P_ϵ), que atravessa os hiperplanos $\{\lambda\} \times C(\overline{\Omega})$ para todo $\lambda > \lambda_1$.

Observação 2.3.3 *Retomamos esta última observação da seguinte forma: para qualquer $\lambda > \lambda_1$ e todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ temos uma solução positiva $u \in C(\overline{\Omega})$ satisfazendo (P_ϵ).*

Agora estamos prontos para provar o Teorema 0.0.5.

Demonstração. **(Teorema 0.0.5)** Fixemos novamente $\lambda > \lambda_1$ e consideremos a funções $g_n : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$g_n(x) = \int_\Omega Q_{\frac{1}{n}}(x, y)|u_n(y)|^p dy,$$

onde u_n é dado pela Observação 2.3.3, com $\epsilon = \frac{1}{n}$, que verifica $L_K u_n + g_n(x) u_n = \lambda u_n$. A prova consiste em provar que o problema (P) tem uma solução que é um limite de uma subsequência (u_n) quando n vai para o infinito.

Sabemos que $(\|u_n\|_p)$ é limitada e que (g_n) é limitada em $L^\infty(\Omega)$. Além disso, (g_n) é uniformemente convergente em partes compactas de $\overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$. De fato,

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq 2\|Q\|_\infty \|u_n\|_p^p \big||x - x_0|^{\frac{1}{n}} - |x - x_0|^{\frac{1}{m}}\big|, \quad \text{se } |x - x_0| \leq 1$$

e

$$|g_n(x) - g_m(x)| = 0, \quad \text{se } |x - x_0| > 1.$$

Em seguida, dividimos o nosso estudo em dois casos, a saber: $p > 1$ e $p \in (0, 1)$.

Case 1: $p > 1$**.** Pelo Lema 2.1.10, (u_n) é uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$, e como $p > 1$, existe alguma subsequência de (u_n), que denotaremos da mesma forma, tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$. Como na prova do Teorema 0.0.4, $(L_K u_n)$ converge para $L_K u$ uniformemente em $\overline{\Omega}$. Denotemos por v o limite uniforme de (g_n) em partes compactas $\overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$. Vamos mostrar que, (u_n) converge para u em $L^p(\Omega)$. Pelo Lema 2.3.1 temos

$$\lambda - g_n(x) \geq \theta a_{\frac{1}{n}}(x) \geq \theta R^{\frac{1}{n}}, \quad \text{para } x \in \overline{\Omega} \setminus B_R(x_0), \ (R < 1)$$

isto é, $\lambda - g_n(x)$ converge uniformemente para $\lambda - v(x)$ em $\overline{\Omega} \setminus B_R(x_0)$ o que implica $\lambda - v(x) \geq \theta$ em $\overline{\Omega} \setminus B_R(x_0)$, consequentemente

$$u_n(x) = \frac{L_K u_n(x)}{\lambda - g_n(x)} \to \frac{L_K u(x)}{\lambda - v(x)} \quad \text{uniformemente em } \overline{\Omega} \setminus B_R(x_0). \tag{2.10}$$

Além disso, $v(x) < \lambda$ para $x \neq x_0$. Agora, numa vizinhança de x_0, temos

$$\int_{B_R(x_0)} u_n(y)^p dy = \int_{B_R(x_0)} \left[\frac{L_K u_n(y)}{\lambda - g_n(y)}\right]^p dy \leq \frac{\|L_K u_n\|_\infty^p}{\theta^p} \int_{B_R(x_0)} \frac{1}{a_{\frac{1}{n}}(y)^p} dy$$

ou seja,

$$\int_{B_R(x_0)} u_n(y)^p dy \leq \frac{\|L_K u_n\|_\infty^p \omega_N R^{N-\frac{p}{n}}}{\theta^p (N - \frac{p}{n})}. \tag{2.11}$$

A convergência $L^p(\Omega)$ de (u_n) segue de (2.10) e (2.11).

Agora, é claro que (g_n) converge para Φ_u em $\overline{\Omega}$. De fato, desde que (u_n) converge em $L^p(\Omega)$, passando para uma subsequência se necessário,temos que (u_n) é uma função dominada por algum $h \in L^p(\Omega)$ e

$$Q_{\frac{1}{n}}(x,y) u_n(y)^p \leq 2\|Q\|_\infty h(y)^p.$$

A afirmação decorre da convergência dominada.

Sendo $g_n(x) < \lambda$, temos $\Phi_u(x) \leq \lambda$. Passando para o limite fraco no sentido $L^p(\Omega)$ em $L_K u_n + g_n(x) u_n = \lambda u_n$, obtemos

$$L_K u = (\lambda - \Phi_u(x)) u \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Na sequência, vamos considerar os casos $u \equiv 0$ e $u \not\equiv 0$.

O caso $u \equiv 0$: Não podemos ter $u \equiv 0$, pois $g_n(x) \leq 2\|Q\|_\infty \|u_n\|_p^p$ e assim (g_n) converge uniformemente para 0 em $\overline{\Omega}$, que contradiz o Lema 1.1.8 por que teríamos $\lambda - g_n(x) > \lambda_1$ em $\overline{\Omega}$ para n suficientemente grande.

O caso $u \not\equiv 0$: Pelo Lema 1.1.6, $u > 0$ e $\lambda - v(x) > 0$ em $\overline{\Omega}$. Por outro lado, argumentando como acima, $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. Consequentemente, $g_n \to \Phi_u$ em $C(\overline{\Omega})$, $\|g_n\|_\infty \to \|\Phi_u\|_\infty$ e $\lambda - \Phi_u(x) > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Então u é a solução positiva que procuramos.

Case 2: $p \in (0,1]$**:** Como no primeiro caso, podemos supor que $u_n^p \not\to 0$ em $L^1(\Omega)$. No que segue, como (u_n^p) é limitada em $L^1(\Omega)$, para alguma subsequência, podemos assumir que $u_n^p \rightharpoonup \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ para algum $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, onde $\mathcal{M}(\Omega)$ denota o espaço de medida finita positiva sobre Ω. Logo,

$$\int_\Omega \phi u_n^p \, dy \to \int_\Omega \phi d\mu, \quad \text{para todo } \phi \in C(\overline{\Omega}),$$

e assim,

$$g_n(x) = \int_\Omega Q_{\frac{1}{n}}(x,y) u_n^p \, dy \to \int_\Omega Q(x,y) d\mu = v(x), \quad \text{para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

Desde que $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, com uma simples conta obtemos $v \in C(\overline{\Omega})$ e $v(x) \geq 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Usando o fato que

$$\lambda_n - g_n(x) \geq \theta a_{\frac{1}{n}}(x), \quad \text{para } x \neq x_0$$

tomando o limite de $n \to +\infty$, encontramos

$$\lambda - v(x) \geq \theta > 0, \quad \text{para todo } x \in \overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$$

Consequentemente, $\lambda - v(x) \geq \theta > 0$, *q.t.p.* em $\overline{\Omega}$.

Afirmação 2.3.4 *A sequência (u_n) é limitada em $L^1(\Omega)$.*

Com efeito, suponhamos por contradição, que $\|u_n\|_1 \to +\infty$ e defina $w_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_1}$. Usando o fato que (λ, u_n) é uma solução de (P), obtemos

$$L_K w_n + g_n(x) w_n = \lambda w_n$$

e assim,

$$w_n = \frac{L_K w_n}{\lambda_n - g_n(x)}.$$

Como (w_n) é limitada em $L^1(\Omega)$, para alguma subsequência, temos que $L_K w_n \to w_*$ em $C(\overline{\Omega})$, consequentemente

$$w_n(x) \to \frac{w_*(x)}{\lambda - v(x)} = w(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \overline{\Omega}.$$

Da definição de w, vemos que $w \in C(\Omega)$ e $w(x) \geq 0$ q.t.p. em $\overline{\Omega}$. Além disso, também temos

$$w_n(x) \leq \frac{2\|L_K w_n\|_\infty}{\theta} \quad \text{q.t.p. em} \quad \overline{\Omega}.$$

As informações acima asseguram que

$$w_n \to w \quad \text{em} \quad L^1(\Omega),$$

então $\|w\|_1 = 1$. Por outro lado, também temos que

$$L_K\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_1^{p+1}}\right) + \Phi_{w_n}^{\frac{1}{n}}(x)w_n = \lambda\frac{u_n}{\|u_n\|_1^{p+1}},$$

onde

$$\Phi_{w_n}^{\frac{1}{n}}(x) = \int_\Omega Q_{\frac{1}{n}}(x,y)|w_n(y)|^p dy.$$

Logo $\Phi_{w_n}^{\frac{1}{n}} w_n \to 0$ em $L^1(\Omega)$, e assim, pelo Lema de Fatou

$$\int_\Omega\int_\Omega Q(x,y)w^p(y)w^2(x)\,dxdy = 0,$$

da condição (Q_2) obtemos $w = 0$, o que é um absurdo. Isso prova que (u_n) é limitada em $L^1(\Omega)$. Argumentando como antes, substituindo w_n por u_n, podemos provar que $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$, e o resultado segue repetindo os mesmos argumentos explorados no Caso 1.

■

Os resultados da bifurcação neste trabalho permaneçam válidos para condições mais fracas em Q, por exemplo, que os resultados da bifurcação sejam válidos sem as premissas (Q_3) e (Q_4).

Para concluir este capítulo, gostaríamos de observar que o mesmo resultado desta seção se mantém sob a condição de (Q_4'), isto é:

(Q_4') Existe uma decomposição $\Omega = \bigcup_{j=1}^{m} E_j$, $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$,... $x_m \in E_m$ tal que $Q(x_j,y) \geq Q(x,y)$ para todos $x \in E_j$, $y \in \Omega$.

É fácil verificar que se considerarmos Q_ϵ substituindo a_ϵ por

$$a_\epsilon(x) = \begin{cases} |x-x_1|^\epsilon....|x-x_m|^\epsilon, & \text{se } |x-x_0| \leq 1 \\ 1, & \text{se } |x-x_0| \geq 1, \end{cases}$$

então a prova funciona com os seguintes ajustes. A convergência uniforme de (g_n) está nas partes compactas de $\overline{\Omega}\backslash\{x_1,...,x_m\}$. No caso 1, $p > 1$, (u_n) converge uniformemente em

$$\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B_R(x_j), \text{ para pequeno } R > 0$$

e para qualquer $j = 1, 2, ..., m$,

$$\int_{B_R(x_j)} u_n(y)^p dy = \int_{B_R(x_j)} \left[\frac{L_K u_n(y)}{\lambda - g_n(y)}\right]^p dy \leq \frac{\|L_K u_n\|_\infty^p}{\theta^p}\int_{B_R(x_j)} \frac{1}{a_{\frac{1}{n}}(y)^p}dy \leq \frac{\|L_K u_n\|_\infty^p \omega_N R^{N-\frac{p}{n}}}{\theta^p(N-\frac{p}{n})}.$$

A demonstração do resultado segue de maneira análoga a prova do Teorema 0.0.5.

Capítulo 3

O problema com condição de fronteira

Neste capítulo, estudaremos o problema do Capítulo 2, com condição de fronteira nula, ou seja, estamos interessados em verificar a existência de solução positiva para o problema

$$\begin{cases} L_K u = u\left(\lambda - \int_\Omega Q(x,y)|u(y)|^p dy\right) \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0, \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, é um aberto conexo e limitado, com núcleo contínuo e não-negativo $K : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz (K_1), e as hipóteses abaixo:

(K_2') Dado $x_0 \in \Omega$, existe $\delta = \delta_{x_0} > 0$ tal que $K(x_0, y) > 0$ para todo $y \in B_\delta(x_0) \cap \Omega$.

(K_3) $\displaystyle\lim_{dist(x,\partial\Omega)\to 0} k(x) = 0;$

(K_4) Para todo aberto $A \subset \Omega$ tal que $\overline{A} \subset \Omega$, existem $\theta_0 > 0$ e $C > 0$ tal que

$$\int_A K(x,y)dy \geq C \int_{\mathcal{B}_\theta} K(x,y)dy, \quad \forall\ 0 < \theta \leq \theta_0,$$

e todo $x \in \mathcal{B}_\theta$, onde $\mathcal{B}_\theta = \{x \in \Omega;\ dist(x, \partial\Omega) < \theta\}$.

3.1 Prova do Teorema 0.0.7

Começamos esta seção mostrando uma condição necessária para a existência de solução.

Lema 3.1.1 *Se u for uma solução positiva do problema (5), então K satisfaz*

(K_3)
$$\lim_{dist(x,\partial\Omega)\to 0} k(x) = 0.$$

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$. Para qualquer $\theta > 0$ denote $\Omega_\theta = \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) \geq \theta\}$. Podemos fixar $\theta > 0$ de maneira que $\|K\|_\infty |\Omega \setminus \Omega_\theta| < \varepsilon$. Seja $\rho > 0$ tal que $u(x) \geq \rho$, para todo $x \in \Omega_\theta$. Então,

$$\rho \int_{\Omega_\theta} K(x,y)dy \leq \int_\Omega K(x,y)u(y)dy = u(x)\left(\lambda - \int_\Omega Q(x,y)|u(y)|^p dy\right),$$

assim, como

$$\int_\Omega K(x,y)dy = \int_{\Omega_\theta} K(x,y)dy + \int_{\Omega\setminus\Omega_\theta} K(x,y)dy$$

temos que

$$\int_\Omega K(x,y)dy \leq \frac{1}{\rho}u(x)\left(\lambda - \int_\Omega Q(x,y)|u(y)|^p dy\right) + \|K\|_\infty |\Omega \setminus \Omega_\theta|$$

de onde se segue que

$$\limsup_{dist(x,\partial\Omega)\to 0} \int_\Omega K(x,y)dy \leq \varepsilon.$$

Como ϵ foi tomado arbitrariamente, a prova está feita.

■

Lema 3.1.2 *Se (K_3) for satisfeita, então para qualquer $v \in C(\overline{\Omega})$ temos que $L_K v(\xi) = 0$, para todo $\xi \in \partial\Omega$. Isto é,*

$$\lim_{dist(x,\partial\Omega)\to 0} \int_\Omega K(x,y)v(y)dy = 0.$$

Demonstração. Da condição (K_3),

$$\left|\int_\Omega K(x,y)v(y)dy\right| \leq \|v\|_\infty \int_\Omega K(x,y)dy.$$

Logo,

$$\lim_{dist(x,\partial\Omega)\to 0} \left|\int_\Omega K(x,y)v(y)dy\right| \leq \|v\|_\infty \lim_{dist(x,\partial\Omega)\to 0} \int_\Omega K(x,y)dy = 0.$$

■

No exemplo abaixo, temos uma classe de funções que verifica as condições (K_2'), (K_3) e (K_4):

Exemplo 3.1.3 *Consideremos $K(x,y) = b(x)b(y)J(x-y)$, onde $b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $b > 0$ em Ω e $b \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$, e a função $J : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é contínua e limitada que satisfaz $J(z) \geq \sigma$, para todo $z \in \mathbb{R}^N$. Então K satisfaz (K_2'), (K_3) e (K_4).*

Vamos mostrar apenas (K_4), porque os outros são fáceis de mostrar. Seja $A \subset\subset \Omega$, então

$$\int_A J(x-y)b(y)dy \geq \sigma \int_A b(y)dy.$$

Por outro lado, dado $\theta > 0$ temos

$$\int_{\mathcal{B}_\theta} J(x-y)b(y)dy \leq \|J\|_\infty \|b\|_\infty |\mathcal{B}_\theta|.$$

Assim, existe $\theta_0 > 0$ tal que

$$\int_{\mathcal{B}_\theta} J(x-y)b(y)dy \leq \|J\|_\infty \|b\|_\infty |\mathcal{B}_\theta| \leq \sigma \int_A b(y)dy \leq \int_A J(x-y)b(y)dy$$

para todo $0 < \theta \leq \theta_0$. Consequentemente, existem $\theta_0 > 0$ tais que

$$\int_A K(x,y)dy \geq \int_{\mathcal{B}_\theta} K(x,y)dy, \quad \text{para todo } 0 < \theta \leq \theta_0$$

e todo $x \in \Omega$, onde $C > 0$ é independente de θ_0 pequeno o suficiente.

Para a demonstração do Teorema 0.0.7, seguiremos todos os passos como na prova do Teorema 0.0.4 e vamos apontar algumas pequenas modificações. Analogamente ao Capítulo 2, (λ, u) resolve (5) se, e somente se, $u = F(\gamma, u) = \gamma L_K u + G(\gamma, u)$, onde $\gamma = \lambda^{-1}$.

Temos também que, pelo Lema 3.1.2, $L_K u(\xi) = 0$, para todo $\xi \in \partial\Omega$.

Aqui, precisamos de um resultado semelhante ao Lema 2.1.5, sobre $(K_2'), (K_3)$ e (K_4). Mais precisamente, temos:

Lema 3.1.4 *Existe $\delta > 0$ tal que, se $(\gamma, u) \in \mathcal{C}$ com $|\gamma - \lambda_1^{-1}| + \|u\|_\infty < \delta$ e $u \neq 0$, então u tem sinal definido, isto é,*

$$u(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega \quad \textit{ou} \quad u(x) < 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Demonstração. Consideremos a sequência w_n como na prova do Lema 2.1.5. Então, para uma subsequência, $w_n \to w$ em $C(\overline{\Omega})$ onde $w \neq 0$ é uma autofunção associada ao autovalor principal λ_1. Consequentemente,

$$w(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega \quad \text{ou} \quad w(x) < 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Além disso, w_n satisfaz o seguinte problema

$$\begin{cases} L_K w_n = (\lambda_n - \|u_n\|_\infty^p \Phi_{w_n}) w_n, \text{ em } \Omega, \\ w_n = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

No que se segue, assumimos que $w(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$. Então, $w_n > 0$ em cada compacto de Ω. No entanto, queremos mostrar que $w_n > 0$ em Ω para n grande. Primeiro de tudo, note que

$$\lambda_n - \|u_n\|_\infty^p \Phi_{w_n} > 0, \quad \text{em } \overline{\Omega} \text{ para } n \text{ grande.}$$

No que se segue, observemos que a função $z_n(x) = L_K w_n(x) = \int_\Omega K(x,y)w_n(y)dy$ tem o mesmo sinal de w_n para n grande, então, para obter os resultados desejados, é suficiente provar que $z_n(x) > 0$ em Ω, para n grande. Recordemos que $w(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$ e $w(x) = 0$ sobre $\partial\Omega$.

Agora, considere o conjunto $A = \{x \in \Omega; w(x) \geq \frac{1}{2}\}$ e seja $\varepsilon > 0$ tal que

$$\mathcal{B}_\varepsilon = \{x \in \Omega; dist(x, \partial\Omega) < \varepsilon\} \subset \Omega \backslash A$$

e $|w_n(x)| \leq w(x) + \varepsilon$ para todo $x \in \Omega$ com n grande. Observe que

$$z_n(x) = \int_A K(x,y)w_n(y)dy + \int_{(\Omega\backslash A)\backslash \mathcal{B}_\varepsilon} K(x,y)w_n(y)dy + \int_{(\Omega\backslash A)\cap \mathcal{B}_\varepsilon} K(x,y)w_n(y)dy.$$

Desde que $w_n \geq 0$ em $(\Omega\backslash A)\backslash\mathcal{B}_\varepsilon$ para n grande, temos que

$$\int_{(\Omega\backslash A)\backslash \mathcal{B}_\varepsilon} K(x,y)w_n(y)dy > 0$$

o que leva a

$$z_n(x) > \frac{1}{2}\int_A K(x,y)dy + \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} K(x,y)w_n(y)dy.$$

Por outro lado, combinando a desigualdade abaixo

$$\int_{\mathcal{B}_\varepsilon} K(x,y)w_n(y)dy \geq -\int_{\mathcal{B}_\varepsilon} K(x,y)|w_n(y)|dy$$

com o fato que $|w_n(x)| \leq w(x) + \varepsilon$ para todo $x \in \Omega$, obtemos

$$\int_{\mathcal{B}_\varepsilon} K(x,y)|w_n(y)|dy \leq \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} K(x,y)w(y)dy + \varepsilon\int_{\mathcal{B}_\varepsilon} K(x,y)dy \leq (\alpha_\epsilon + \varepsilon)\int_{\mathcal{B}_\varepsilon} K(x,y)dy,$$

onde $\alpha_\epsilon = \max_{x\in\mathcal{B}_\varepsilon} |w(x)| \to 0$ quando $\epsilon \to 0$. Portanto,

$$z_n(x) > \frac{1}{2}\int_A K(x,y)dy - (\alpha_\epsilon + \varepsilon)\int_{\mathcal{B}_\varepsilon} K(x,y)dy.$$

Da condição (K_4), podemos assumir que

$$\frac{1}{2}\int_A K(x,y)dy \geq C\int_{\mathcal{B}_\varepsilon} K(x,y)dy,$$

para alguma constante $C > 0$ independente de ϵ suficientemente pequeno. Logo

$$z_n(x) > C \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} K(x,y)dy - (\alpha_\epsilon + \varepsilon) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} K(x,y)dy$$

isto é,

$$z_n(x) > (C - \alpha_\epsilon - \varepsilon) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} K(x,y)dy \geq 0.$$

Então $z_n(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$ e para n suficientemente grande.

Agora, usando o fato de que $\|u_n\|_\infty^p \Phi_{w_n}$ é suficientemente pequeno para n suficientemente grande, segue-se que

$$\lambda_n - \|u_n\|_\infty^p \Phi_{w_n} > 0, \quad \text{em } \Omega.$$

Lembrando que

$$z_n(x) = (\lambda_n - \|u_n\|_\infty^p \Phi_{w_n}(x)) w_n(x), \quad \text{em } \Omega,$$

podemos garantir que $w_n \geq 0$ para todo $x \in \Omega$. Como u_n e w_n tem o mesmo sinal, u_n também é não-negativo, o que é a conclusão desejada.

■

Temos uma observação análoga a **Observação 2.1.6**, isto é

Observação 3.1.5 *Temos que $(\gamma, u) \in \Sigma$ se, e somente se, $(\gamma, -u) \in \Sigma$. Logo, considerando os conjuntos*

$$\mathcal{C}^+ = \{(\gamma, u) \in \mathcal{C} : u(x) > 0, \ \forall x \in \Omega\} \cup \{(\lambda_1^{-1}, 0)\}$$

e

$$\mathcal{C}^- = \{(\gamma, u) \in \mathcal{C} : u(x) < 0, \ \forall x \in \Omega\} \cup \{(\lambda_1^{-1}, 0)\},$$

temos

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-. \tag{3.1}$$

Além disso, $\mathcal{C}^- = \{(\gamma, u) \in \mathcal{C} : (\gamma, -u) \in \mathcal{C}^+\}$ e $\mathcal{C}^+ \cap \mathcal{C}^- = \{(\lambda_1^{-1}, 0)\}$.

Considerando $U \subset A$ como na **Observação 2.1.2**, temos que

Lema 3.1.6 *$\mathcal{C}^+ \cap \partial U \neq \emptyset$.*

Demonstração. Suponhamos por contradição que $\mathcal{C}^+ \cap \partial U = \emptyset$. Então, do Teorema 2.1.3, existe $(\hat{\gamma}, 0) \in \mathcal{C}$, onde $\hat{\gamma} \neq \lambda_1^{-1}$ e $\hat{\gamma}$ é um valor característico de L_K com multiplicidade ímpar. Consequentemente, existem $(u_n) \subset C(\overline{\Omega})$ e $\gamma_n \to \hat{\gamma}$, tais que

$$u_n \neq 0, \quad \|u_n\|_\infty \to 0 \quad \text{e} \quad u_n = F(\gamma_n, u_n).$$

Assim, $L_K u_n = (\lambda_n - \Phi_{u_n}(x))u_n$ e $\Phi_{u_n}(x) \to 0$ em Ω, onde $\lambda_n = \gamma_n^{-1}$. Logo do Lema 1.1.5, temos que

$$\lambda_n - \Phi_{u_n}(x) > \lambda_1 \quad \text{para todo } n \text{ suficientemente grande.}$$

Portanto, do Lema 1.1.8, $(\hat{\gamma}, 0)$ não pode pertencer a esta componente, o que é um absurdo.

■

Observação 3.1.7 *Os Lemas 2.1.9, 2.1.10 e 2.2.1 servem para nosso propósito neste Capítulo.*

Com isso, estamos prontos para demonstrar o Teorema 0.0.7:

Demonstração. (Teorema 0.0.7) Analogamente ao Capítulo 2, para todo $\Lambda > \lambda_1$ encontramos $\rho > 0$ e $M > 0$ tais que, para $U = U_{\Lambda, \frac{\rho}{2}, 2M}$ temos $\mathcal{C}^+ \cap \partial U \neq \emptyset$, assim $(\lambda^{-1}, u) \in \mathcal{C}^+$ e uma das seguintes condições ocorre: $\lambda - \|\Phi_u\|_\infty = \dfrac{\rho}{2}$ ou $\|u\|_\infty = 2M$. Mas vimos que, sob as condições acima, mostra-se que $\lambda - \|\Phi_u\|_\infty \geq \rho$ e $\|u\|_\infty \leq M$, isto é, a componente conexa de soluções para (5) cruza o hiperplano $\{\Lambda\} \times C(\overline{\Omega})$ qualquer que seja $\Lambda > \lambda_1$. ■

Capítulo 4

Um resultado do tipo Ambrosetti-Prodi

O objetivo central deste capítulo é a demostração de um resultado do tipo Ambrosetti-Prodi para o problema (P'), ou seja, estaremos interessados em obtermos informações que nos ajudem na demonstração dos **Teoremas 0.0.8** e **0.0.9**. Mais precisamente, estudaremos a existência de solução para o problema não-local

$$L_K u = f(x, u) + t\phi_1(x) + g_1(x), \qquad \text{em } x \in \Omega$$

onde ϕ_1 é uma autofunção positiva e normalizada associada ao autovalor principal λ_1 de L_K, e $g_1 \in \{\phi_1\}^\perp$, i.e., $\int_\Omega g_1(x)\phi_1(x)dx = 0$.

Em todo o capítulo $K : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, não-negativa que satisfaz as condições $(K_1) - (K_2)$.

Sob estas condições e considerando f satisfazendo

(f_1) Existem $A > \|k\|_\infty$ e $C > 0$ tais que $f(x, s) \geq As - C$ para todo $s \geq 0$ e todo $x \in \overline{\Omega}$.

mostraremos a existência de um número $t(g_1) > 0$ tal que o problema $(P')_t$ não tem solução positiva se $t > t(g_1)$ e tem pelo menos uma solução positiva se $t \leq t(g_1)$.

Posteriormente, sob as hipóteses acima e adicionando a f as condições

(f_2) Existe um número $0 < a < \lambda_1$ tal que $\lim\limits_{s\to-\infty} \dfrac{f(x,s)}{s} = a$, para todo $x \in \overline{\Omega}$,

(f_3) Para todo compacto $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ existe um número $\sigma > 0$ tal que $\dfrac{f(x,s) - f(x,t)}{s-t} > \sigma$ para todos $s, t \in \mathcal{K}$ e todo $x \in \overline{\Omega}$.

encontramos um número $t(g_1) > 0$ tal que o problema $(P')_t$ não tem solução (positiva, negativa e nem nodal) se $t > t(g_1)$, tem pelo menos duas soluções se $t < t(g_1)$ e pelo menos uma solução se $t = t(g_1)$.

Além disso, se f satisfaz (f_1) e a hipótese

(f_4) $|f(x,s) - f(x,t)| > \|k\|_\infty |s-t|$, para todos $s, t \in \mathbb{R}_+$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$,

mostramos que o problema $(P')_t$ tem no máximo uma solução para cada $t \in \mathbb{R}$.

4.1 A não existência de solução

Nesta seção provaremos que o problema

$$L_K u = f(x,u) + t\phi_1 + g_1(x) \quad \text{em } \Omega, \tag{$(P')_t$}$$

não possui solução para t suficientemente grande. Lembramos que, $g \in C(\overline{\Omega})$ está decomposto na forma $g(x) = t\phi_1(x) + g_1(x), x \in \Omega$, onde ϕ_1 é uma autofunção positiva e normalizada em $L^2(\Omega)$, associada ao autovalor principal λ_1, do operador dispersão L_K, e $g_1 \in \{\phi_1\}^\perp$ no sentido $L^2(\Omega)$, isto é,

$$\int_\Omega g_1(x)\phi_1(x)dx = 0.$$

Primeiro, mostraremos a não existência de solução positiva.

Lema 4.1.1 *Se (f_1) é satisfeita, então existe um número $m > 0$, independente de $g_1 \in \{\phi_1\}^\perp$ tal que, para todo $t > m$, o problema $(P')_t$ não tem solução positiva.*

Demonstração. Suponhamos que o problema $(P')_t$ tem uma solução positiva u, assim $L_K u = f(x,u) + t\phi_1 + g_1$ em Ω. Multiplicando a equação por ϕ_1 e integrando sobre Ω, obtemos

$$\int_\Omega \phi_1 L_K u dx = \int_\Omega \phi_1 f(x,u)dx + t\int_\Omega \phi_1^2 dx + \int_\Omega \phi_1 g_1 dx$$

logo

$$\int_\Omega \phi_1 L_K u dx = \int_\Omega \phi_1 f(x,u)dx + t$$

da condição (f_1) temos

$$\int_\Omega \phi_1 L_K u dx \geq A \int_\Omega \phi_1 u dx - C \int_\Omega \phi_1 dx + t$$

desde que L_K é simétrico,

$$\lambda_1 \int_\Omega \phi_1 u dx \geq A \int_\Omega \phi_1 u dx - C \int_\Omega \phi_1 dx + t.$$

Consequentemente,

$$t \leq (\lambda_1 - A) \int_\Omega \phi_1 u dx + C \int_\Omega \phi_1 dx \leq C \int_\Omega \phi_1 dx.$$

Portanto, a existência de solução positiva u para o problema $(P)_t$ necessariamente implica que

$$t \leq m := C \int_\Omega \phi_1 dx,$$

isto é, se $t > m$ o problema $(P)_t$ não tem solução positiva.

■

Este resultado não está afirmando que, para $t \leq m$, o problema $(P')_t$ tem solução positiva. Também não podemos concluir, através deste resultado, que, para $t > m$ o problema $(P')_t$ não possui solução negativa ou nodal.

Agora, supondo que f também satisfaça (f_2), podemos encontrar um $m > 0$ tal que o problema $(P')_t$ não tem solução (positiva, negativa ou nodal) para $t > m$. Antes disso, precisaremos da seguinte estimativa

Observação 4.1.2 *Suponhamos que (f_1) e (f_2) ocorrem. Então existe um número $C_1 > 0$ tal que, para todo $x \in \overline{\Omega}$,*

$$f(x,s) \geq As - C_1, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R} \quad e \quad f(x,s) \geq (a+\epsilon)s - C_1, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Com efeito, de (f_2), para todo $\epsilon > 0$ existe $s_0 > 0$ tal que, para todo $x \in \overline{\Omega}$

$$\frac{f(x,s)}{s} < a + \epsilon, \quad \text{para todo } s < -s_0$$

o que implica

$$f(x,s) > (a+\epsilon)s, \quad \text{para todo } s < -s_0.$$

Além disso, existe $C_0 > 0$ tal que $f(x,s) \geq -C_0$ para todo $-s_0 \leq s \leq 0$. Consequentemente, $f(x,s) \geq (a+\epsilon)s - C_0$, para todo $s \leq 0$. Da condição (f_1) segue-se que $f(x,s) \geq As - C$, para todo $s \geq 0$.

Lema 4.1.3 *Suponhamos que* (f_1) *e* (f_2) *ocorrem. Então existe um número* $m > 0$*, independente de* $g_1 \in \{\phi_1\}^{\perp}$ *tal que, para todo* $t > m$*, o problema* $(P')_t$ *não tem solução (positiva, negativa ou nodal).*

Demonstração. Analogamente ao Lema 4.1.1, usando (4.1) temos

$$t \leq (\lambda_1 - A)\int_\Omega \phi_1 u dx + C_1 \int_\Omega \phi_1 dx \leq C_1 \int_\Omega \phi_1 dx, \quad \text{se } \int_\Omega u\phi_1 dx \geq 0$$

e

$$t \leq (\lambda_1 - (a+\epsilon))\int_\Omega \phi_1 u dx + C_1 \int_\Omega \phi_1 dx \leq C_1 \int_\Omega \phi_1 dx, \quad \text{se } \int_\Omega u\phi_1 dx \leq 0,$$

em que $C_1 = \max\{C, C_0\}$. Portanto, a existência de solução u para $(P')_t$ necessariamente implica em

$$t \leq m := C_1 \int_\Omega \phi_1 dx,$$

isto é, se $t > m$ o problema $(P')_t$ não tem solução.

■

4.2 Prova do Teorema 0.0.8

Nesta seção, demonstraremos o Teorema 0.0.8. Aqui, estamos assumindo que f é uma função localmente Lipschitziana, crescente com relação a variável $t \in \mathbb{R}$ e satisfaz a condição (f_1).

É bem conhecido que o método de sub e supersolução tem sido amplamente utilizado para a determinação de solução para equações de reação-difusão com termo não-local. O que não é diferente para o operador de dispersão L_K. Para este propósito, consideramos a seguinte equação

$$L_K u = f(x,u) \text{ em } \Omega \tag{4.2}$$

onde $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função localmente Lipschitz e crescente com relação a variável $t \in \mathbb{R}$.

Primeiro, damos a definição de sub e supersolução para a equação acima.

Definição 4.2.1 *Uma função positiva* $\overline{u} \in C(\overline{\Omega})$ *é dita ser uma Supersolução de* (4.2)*, se*

$$L_K \overline{u} \leq f(x, \overline{u}), \ \ in \ \Omega.$$

Uma função positiva $\underline{u} \in C(\overline{\Omega})$ *é dita ser uma Subsolução de* (4.2) *revertendo a desigualdade acima.*

Lema 4.2.2 *Suponhamos que* (4.2) *têm uma supersolução positiva* $\overline{u}$ *e uma subsolução positiva* $\underline{u}$ *definida em* Ω *tais que* $\underline{u} \leq \overline{u}$. *Além disso, suponhamos que* $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função localmente Lipschitziana e crescente com respeito a variável* $t \in \mathbb{R}$. *Então* (4.2) *têm uma solução* $u \in C(\overline{\Omega})$ *que satisfaz* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$.

Demonstração. Defina o seguinte conjunto $\Sigma = \{u \in C(\overline{\Omega}); \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\}$. Do Lema 1.2.3, $L_K v(x) - \beta v(x) = 0$ admite no máximo uma solução, se $\beta > k(x)$ q.t.p. em Ω. Além disso, desde que $t \longmapsto f(x,t)$ é crescente com respeito a variável $t \in \mathbb{R}$, temos que $t \longmapsto f(x,t) - \beta t$ é decrescente em $t \in \mathbb{R}$, se considerarmos $\beta > k(x)$ suficientemente grande.

Da Observação 1.2.4, para cada $u \in C(\overline{\Omega})$ o problema

$$L_K v(x) - \beta v(x) = f(x, u(x)) - \beta u(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega$$

admite no máximo uma solução $v \in C(\overline{\Omega})$.

Agora, se $w_1, w_2 \in \Sigma$ são tais que $w_1 \leq w_2$ e

$$L_K v_1(x) - \beta v_1(x) = f(x, w_1(x)) - \beta w_1(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega$$

e

$$L_K v_2(x) - \beta v_2(x) = f(x, w_2(x)) - \beta w_2(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega,$$

então

$$f(x, w_2(x)) - \beta w_2(x) \leq f(x, w_1(x)) - \beta w_1(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Isso implica que

$$L_K v_2(x) - \beta v_2(x) \leq L_K v_1(x) - \beta v_1(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega,$$

ou seja,

$$L_K(v_2(x) - v_1(x)) - \beta(v_2(x) - v_1(x)) \leq 0, \quad \text{para todo } x \in \Omega$$

pelo princípio de máximo (Lema 1.2.3), segue-se que $v_1(x) \leq v_2(x)$ para todo $x \in \Omega$.

Consideremos a sequência $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ dada por

$$L_K u_1(x) - \beta u_1(x) = f(x, \overline{u}(x)) - \beta \overline{u}(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega$$

$$L_K u_2(x) - \beta u_2(x) = f(x, u_1(x)) - \beta u_1(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega$$

e

$$L_K u_n(x) - \beta u_n(x) = f(x, u_{n-1}(x)) - \beta u_{n-1}(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega$$

que é uma sequência monótona decrescente. Analogamente, obtemos uma outra sequência $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ dada por

$$L_K v_1(x) - \beta v_1(x) = f(x, \underline{u}(x)) - \beta \underline{u}(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega$$

$$L_K v_2(x) - \beta v_2(x) = f(x, v_1(x)) - \beta v_1(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega$$

e

$$L_K v_n(x) - \beta v_n(x) = f(x, v_{n-1}(x)) - \beta v_{n-1}(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega$$

que é uma sequência monótona crescente. Além disso,

$$\underline{u} \leq v_1 \leq \ldots \leq v_n \leq u_n \leq \ldots \leq u_1 \leq \overline{u},$$

então, existem funções u^*, v^* tais que

$$u^*(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) \text{ e } v^*(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x) \quad \text{pontualmente em } \Omega.$$

Segue-se que, $\underline{u} \leq v^* \leq u^* \leq \overline{u}$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} L_K u_n(x) = L_K u^*(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} L_K v_n(x) = L_K v^*(x).$$

Por outro lado, $(L_K u_n)$ e $(L_K v_n)$ são uniformemente convergentes em $C(\overline{\Omega})$. Como L_K é um operador linear e compacto, temos

$$L_K u_n(x) = \int_\Omega K(x,y) u_n(y) dy \to \int_\Omega K(x,y) u^*(y) dy = L_K u^*(x) \quad \text{em } \Omega,$$

e

$$L_K v_n(x) = \int_\Omega K(x,y) v_n(y) dy \to \int_\Omega K(x,y) v^*(y) dy = L_K v^*(x) \quad \text{em } \Omega,$$

assim, $L_K u_n \to L_K u^*$ em $C(\overline{\Omega})$ e $L_K v_n \to L_K v^*$ em $C(\overline{\Omega})$.

Da continuidade de f,

$$\lim_{n\to\infty} [f(x, u_n(x)) + \beta u_n(x)] = f(x, u^*(x)) + \beta u^*(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} [f(x, v_n(x)) + \beta v_n(x)] = f(x, v^*(x)) + \beta v^*(x).$$

Consequentemente,

$$L_K u^*(x) - \beta u^*(x) = f(x, u^*) - \beta u^*(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega$$

$$L_K v^*(x) - \beta v^*(x) = f(x, v^*) - \beta v^*(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega$$

isto é, u^* e v^* são soluções do problema (4.2). Portanto, do Lema 1.1.7, obtemos que $u^*, v^* \in C(\overline{\Omega})$ e a demonstração está feita.

■

Com o resultado acima, o nosso próximo objetivo é encontrar uma supersolução e uma subsolução para o problema (P') tal que $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω. O lema abaixo garantirá a existência de uma supersolução para (P').

Lema 4.2.3 *Suponhamos que (f_1) ocorre. Então, para todo $g \in C(\overline{\Omega})$, o problema (P') tem uma supersolução positiva $w \in C(\overline{\Omega})$. Além disso, qualquer subsolução $u \in C(\overline{\Omega})$ de (P') é tal que $u < w$ em $\overline{\Omega}$.*

Demonstração. Seja $w \in C(\overline{\Omega})$ a única solução de

$$L_K w - Aw = -\|g\|_\infty - C, \text{ em } \Omega,$$

onde A e C são as constantes da propriedade (f_1). Logo,

$$L_K w = Aw - \|g\|_\infty - C < f(x, w) + g(x), \text{ em } \Omega$$

isto é, $w \in C(\overline{\Omega})$ é uma supersolução de (P'). Desde que $A > \|k\|_\infty$ temos do Lema 1.2.3 que, $w > 0$ em $\overline{\Omega}$.

Agora, suponhamos que $u \in C(\overline{\Omega})$ seja uma subsolução de (P'), ou seja

$$L_K u \geq f(x, u) + g(x), \text{ em } \Omega.$$

Assim,

$$L_K(w - u) < Aw - \|g\|_\infty - C - f(x, u) - g(x)$$

ou,

$$L_K(w - u) < A(w - u) - \|g\|_\infty - g(x) < A(w - u)$$

o que implica

$$L_K(w - u) - A(w - u) < 0.$$

Consequentemente, novamente pelo Lema 1.2.3, obtemos que $w > u$ em $\overline{\Omega}$.

■

Corolário 4.2.4 *Suponha* (f_1)*. Sejam* $g_1 \in \{\phi_1\}^\perp$ *e* $t \in \mathbb{R}$ *dados, então existe* $R > 0$ *tal que, se* $u \in C(\overline{\Omega})$ *é uma função positiva que satisfaz*

$$L_K u(x) = f(x,u) + t\phi_1(x) + g_1(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega,$$

devemos ter $\|u\|_\infty < R$*.*

Demonstração. Pelo Lema 4.2.3, existe uma supersolução positiva $w \in C(\overline{\Omega})$ de $(P')_t$ tal que $0 < u < w$ em $\overline{\Omega}$. Consequentemente,

$$\|u\|_\infty < \|w\|_\infty := R.$$

Portanto, existe $R > 0$ tal que $\|u\|_\infty < R$. ∎

Observação 4.2.5 *Se* (P') *tem solução para* $g \in C(\overline{\Omega})$*, então para qualquer* $h \in C(\overline{\Omega})$ *tal que* $h \leq g$ *em* Ω*, o problema*

$$L_K v = f(x,v) + h(x), \ \text{ em } \Omega \tag{4.3}$$

também tem solução.

De fato, considere $v \in C(\overline{\Omega})$ *uma solução de* (P') *para um dado* $g \in C(\overline{\Omega})$*. Então,* v *é uma subsolução de* (4.3) *pois*

$$L_K v - f(x,v) = g(x) \geq h(x), \quad x \in \Omega.$$

Do Lema 4.2.3*, o problema* (4.3) *tem uma supersolução* $w \in C(\overline{\Omega})$ *tal que,* $v < w$ *em* $\overline{\Omega}$*. Consequentemente, do Lema* 4.2.2*, o problema* (4.3) *tem uma solução* $U \in C(\overline{\Omega})$ *tal que* $v \leq U \leq w$*.*

Com esta observação, fica demonstrado o seguinte lema:

Lema 4.2.6 *Seja* $g_1 \in \{\phi_1\}^\perp$*. Suponhamos que, o problema* $(P')_t$ *tem uma solução para* $t_0 \in \mathbb{R}$*. Então o problema* $(P')_t$ *tem uma solução para qualquer* $t < t_0$*.*

Para demonstrarmos o Teorema 0.0.8, precisamos obter a existência de subsolução para $(P')_t$. O próximo lema vai garantir a existência desta subsolução.

Lema 4.2.7 *Suponha* (f_1)*. Dado* $g_1 \in \{\phi_1\}^\perp$*, existe* $t \in \mathbb{R}$ *tal que, o problema* $(P')_t$ *tem uma subsolução.*

Demonstração. Escolha t de maneira que $-f(x,0) > t\phi_1(x)+g_1(x)$ para todo $x \in \Omega$. Considere $z = \epsilon\phi_1$, logo

$$L_K(\epsilon\phi_1) - f(x,\epsilon\phi_1) - t\phi_1 - g_1 = \epsilon\lambda_1 - f(x,\epsilon\phi_1) - t\phi_1 - g_1 > 0,$$

para $\epsilon \approx 0^+$ e para todo $x \in \Omega$, isto é

$$L_K z > f(x,z) + t\phi_1 + g_1, \quad \text{em } \Omega$$

concluindo que z é uma subsolução positiva para $(P')_t$.

■

Demonstração do Teorema 0.0.8

Seja $g_1 \in \{\phi_1\}^{\perp}$. Pelo Lema 4.2.7, existe $t \in \mathbb{R}$ suficientemente grande tal que, o problema $L_K u = f(x,u) + t\phi_1 + g_1(x)$ para todo $x \in \Omega$, tem uma subsolução positiva $z \in C(\overline{\Omega})$. Por outro lado, para estes g_1 e t, do Lema 4.2.3, temos uma supersolução positiva $w \in C(\overline{\Omega})$, além disso $z \leq w$ em $\overline{\Omega}$. Assim, do Lema 4.2.2, o problema $(P')_t$ tem uma solução positiva $u \in C(\overline{\Omega})$ tal que $z \leq u \leq w$.

Com o estudo feito acima, o conjunto

$$\Sigma = \{t \in \mathbb{R}; (P')_t \text{ tem solução positiva}\}$$

é não vazio, do Lema 4.1.1 é limitado superiormente e do Lema 4.2.6 este conjunto é uma semi-reta. Ou seja, tomando $t(g_1)$ como o supremo de Σ. Segue-se que, para todo $t > t(g_1)$ o problema $(P')_t$ não tem solução e que para cada $t < t(g_1)$ o problema tem pelo menos uma solução positiva. Portanto, fica demonstrado o Teorema 0.0.8.

Para finalizarmos esta demonstração, precisamos mostrar a existência de solução para $t = t(g_1)$. Consideremos a sequência $t_n < t(g_1)$ tal que $t_n \to t(g_1)$. Segue-se das informações acima que o problema $(P')_t$ tem uma solução $u_n \in C(\overline{\Omega})$ para a função dada g_1 e cada t_n, ou seja,

$$L_K u_n = f(x,u_n) + t_n\phi_1 + g_1, \text{ em } \Omega. \tag{4.4}$$

Como (u_n) é limitada em $C(\overline{\Omega})$, então (u_n) é limitada em $L^2(\Omega)$. Logo, existe subsequência de (u_n), ainda designada por (u_n), tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $L^2(\Omega)$. Como $(L_K u_n)$ é uniformemente covergente em $C(\overline{\Omega})$, podemos assumir que $L_K u_n \to w$. Mas, sendo L_K linear e compacto, devemos ter

$$L_K u_n(x) = \int_\Omega K(x,y)u_n(y)dy \to \int_\Omega K(x,y)u(y)dy = L_K u(x) \quad \text{em } \Omega,$$

assim, $L_K u_n \to L_K u$ em $C(\overline{\Omega})$. Por outro lado, de (4.4) obtemos

$$f(x, u_n) = L_K u_n - t_n \phi_1 - g_1 \to L_K u - t_0 \phi_1 - g_1 := z \text{ uniformemente em } \Omega.$$

Do Corolário 4.2.4, existe um número $R > 0$ tal que $\|u_n\|_\infty < R$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, sendo f uma função crescente na variável $t \in \mathbb{R}$, segue-se que existe $\sigma > 0$ tal que, se $u_n(x) \neq u_m(x)$ temos

$$\sigma < \inf_{-R \leq u_n(x), u_m(x) \leq R} \frac{|f(x, u_n(x)) - f(x, u_m(x))|}{|u_n(x) - u_m(x)|}.$$

Consequentemente,

$$\sigma \|u_n - u_m\|_\infty < \left(\frac{|f(x, u_n(x)) - f(x, u_m(x))|}{|u_n(x) - u_m(x)|} \|u_n - u_m\|_\infty \right) \leq \|f(., u_n) - f(., u_m)\|_\infty$$

o que implica

$$\sigma \|u_n - u_m\|_\infty < \|f(., u_n) - f(., u_m)\|_\infty \leq \|f(., u_n) - z\|_\infty + \|z - f(., u_m)\|_\infty$$

Portanto, (u_n) é uma sequência de Cauchy em $C(\overline{\Omega})$. Logo,

$$f(., u_n) \to f(., u) \text{ em } C(\overline{\Omega}).$$

Claramente u é uma solução positiva para o problema $(P')_t$ com g_1 e $t = t(g_1)$. Portanto, a prova do Teorema 0.0.8 está completa.

Observação 4.2.8 *Considerando f satisfazendo as hipóteses (f_1) e (f_4), podemos mostrar a existência de no máximo uma solução para o problema $(P')_t$ para cada $t \in \mathbb{R}$.*

Com efeito, considere $u, w \in C(\overline{\Omega})$ funções positivas tais que

$$L_K u(x) = f(x, u) + t\phi_1(x) + g_1(x), \quad \textit{para todo } x \in \Omega$$

e

$$L_K w(x) = f(x, w) + t\phi_1(x) + g_1(x), \quad \textit{para todo } x \in \Omega.$$

Consequentemente, se $u(x) \neq w(x)$ temos

$$L_K(u(x) - w(x)) = f(x, u(x)) - f(x, w(x)) = \left(\frac{f(x, u(x)) - f(x, w(x))}{u(x) - w(x)} \right) (u(x) - w(x)),$$

assim

$$L_K(u(x) - w(x)) - a(x)(u(x) - w(x)) = 0,$$

onde

$$a(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x, u(x)) - f(x, w(x))}{u(x) - w(x)}, & \textit{se } u(x) \neq w(x) \\ 2\|k\|_\infty, & \textit{se } u(x) = w(x), \end{cases}$$

Além disso, da condição (f_4) temos $a(x) > k(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Pelo Lema 1.2.3, devemos ter $u \equiv w$ em $\overline{\Omega}$.

4.3 Demonstração do Teorema 0.0.9

Nesta seção, para obtermos uma segunda solução para o problema (P'), temos de admitir hipóteses adicionais sobre a função f. Aqui vamos supor que ela satisfaz não somente (f_1), mais também (f_2) e (f_3). Além disso, para provar o Teorema 0.0.9 faremos uso da teoria do grau para aplicações γ-condensantes, que é uma extensão do grau de Leray-Schauder para uma classe maior de perturbações da identidade, definida em termos de medidas para não compactos, (veja Deimling [26] e Nussbaum [41], [42]).

Começamos com o teorema que estabelece uma estimativa a priori:

Teorema 4.3.1 *(Estimativa a priori) Dado $g \in C(\overline{\Omega})$, existe um número $R > 0$ tal que, se u é uma solução de (P'), ou seja, u é uma solução da equação*

$$L_K u = f(x,u) + g(x), \quad \text{em } \Omega$$

então $\|u\|_\infty < R$.

Demonstração. Sabemos que a condição (f_1), garante a existência de uma função $w \in C(\overline{\Omega})$ tal que todo solução de (P') satisfaz $u < w$ em $\overline{\Omega}$. Suponhamos que exista uma sequência $(u_n) \subset C(\overline{\Omega})$ tal que,

$$\|u_n\|_\infty \longrightarrow \infty \text{ e } L_K u_n = f(x,u_n) + g(x), \quad \text{em } \Omega.$$

Temos que $u_n < w$ em $\overline{\Omega}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Considere $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_\infty}$, então (v_n) é uma sequência limitada em $C(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que existe $v \in L^2(\Omega)$ tal que $v_n \rightharpoonup v$ em $L^2(\Omega)$. Como $(L_K v_n)$ é uniformemente convergente em $C(\overline{\Omega})$, e sendo L_K um operador linear e compacto, temos

$$L_K v_n(x) = \int_\Omega K(x,y) v_n(y)dy \to \int_\Omega K(x,y)v(y)dy = L_K v(x) \quad \text{in } \Omega,$$

e assim, $L_K v_n \to L_K v$ em $C(\overline{\Omega})$.

Agora, da condição (f_2), para todo $\epsilon > 0$ existe uma constante $C_\epsilon > 0$ tal que, para todo $x \in \overline{\Omega}$

$$(a-\epsilon)s + C_\epsilon \geq f(x,s) \geq (a+\epsilon)s - C_\epsilon, \quad \text{para todo } s \leq \|w\|_\infty.$$

Logo, $(a-\epsilon)u_n + g(x) + C_\epsilon \geq f(x,s) \geq (a+\epsilon)u_n + g(x) - C_\epsilon$ o que implica

$$(a-\epsilon)v_n + \frac{g(x)+C_\epsilon}{\|u_n\|_\infty} \geq f(x,s) \geq (a+\epsilon)v_n + \frac{g(x)-C_\epsilon}{\|u_n\|_\infty}.$$

Desde que $\|u_n\|_\infty \longrightarrow \infty$ e $u_n < w$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então existe $x_n \in \overline{\Omega}$ tal que

$$-u_n(x_n) = |u_n(x_n)| = \|u_n\|_\infty.$$

Consequentemente,

$$(a-\epsilon) = (a-\epsilon)\|v_n\|_\infty = (a-\epsilon)|v_n(x_n)| = -(a-\epsilon)v_n(x_n) \le -L_K v_n(x_n) + \frac{g(x_n)+C_\epsilon}{\|u_n\|_\infty}$$

isto é,

$$(a-\epsilon) \le \|L_K v_n\|_\infty + \frac{\|g\|_\infty + C_\epsilon}{\|u_n\|_\infty}.$$

Escolhendo $\epsilon = \dfrac{a}{2}$ e passando ao limite, vemos que $\|L_K v\|_\infty \ge \dfrac{a}{2}$. Portanto, $\|v\|_\infty > 0$, $v \neq 0$ e $L_K v = av$ em Ω. Por outro lado, temos

$$v_n(x) = \frac{u_n(x)}{\|u_n\|_\infty} < \frac{w(x)}{\|u_n\|_\infty} \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty, \text{ para todo } x \in \Omega,$$

o que implica $v(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x) < 0$ para todo $x \in \Omega$. Assim, $v(x) < 0$ para todo $x \in \Omega$, ou seja, v teria sinal definido e ao mesmo tempo seria autofunção associada ao autovalor $a < \lambda_1$, o que é um absurdo.

■

Agora, para cada $t \in \mathbb{R}$ definamos o operador $F_t : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ dado por

$$F_t u := \frac{1}{M} L_K u + u - \frac{1}{M} f(x,u) - \frac{1}{M}(t\phi_1 + g_1(x)), \text{ para algum } M > 0. \tag{4.5}$$

Note que, ponto fixo para este operador é solução para o problema $(P')_t$. Com efeito, se $u \in C(\overline{\Omega})$ é tal que $F_t u = u$ temos

$$u = F_t u = \frac{1}{M} L_K u + u - \frac{1}{M} f(x,u) - \frac{1}{M}(t\phi_1 + g_1(x))$$

ou

$$L_K u = f(x,u) + t\phi_1 + g_1(x), \text{ em } \Omega$$

isto é, u é uma solução de $(P')_t$.

Com as informações acima, definimos uma aplicação contínua F_t, que não é compacta. Além disso, temos das informações anteriores que as soluções do nosso problema $(P')_t$ são precisamente os zeros de $I - F_t$. Para obtermos nosso resultado, precisamos mostrar que a função F_t é γ-condensante.

Observação 4.3.2 *Pelo Teorema 4.3.1, temos a exitência de um número* $R > 0$ *tal que, se* u *é uma solução para* $(P')_t$ *então* $\|u\|_\infty < R$. *Por outro lado, desde que* f *é uma função localmente Lipschitz, podemos tomar um número* $M > 0$ *de maneira que*

$$M > \Gamma = \sup_{-R\leq s,t\leq R}\left(\frac{f(x,s)-f(x,t)}{s-t}\right), \quad \text{para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

Da condição (f_3), *existe* $\sigma > 0$ *tal que*

$$0 < \sigma < \frac{f(x,s)-f(x,t)}{s-t} \leq \Gamma, \ \text{para todo } -R \leq s,t \leq R, \quad \text{e todo } x \in \overline{\Omega}.$$

Com o estudo acima, obtemos para todo $x \in \overline{\Omega}$,

$$0 < \left(1 - \frac{f(x,s)-f(x,t)}{M(s-t)}\right) < 1 - \frac{\sigma}{M}, \ \text{para todo } -R \leq s,t \leq R. \qquad (4.6)$$

Lema 4.3.3 *Suponhamos que* (f_1), (f_2) *e* (f_3) *ocorrem. Então o operador* F_t *é uma aplicação* γ*-condensante, para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Se $B \subset C(\overline{\Omega})$ é um limitado, vimos no Apêndice A que $\gamma(F_t(B)) \leq \gamma(L_K(B)) + \gamma(G(x,B))$ onde $G(x,s) = s - \dfrac{1}{M}f(x,s)$ em $x \in \overline{\Omega}$. Mas, desde que L_K é um operador compacto, devemos ter $\gamma(L_K(B)) = 0$. Por outro lado, G é uma contração para todo $s \in \mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ e todo $x \in \overline{\Omega}$.

De fato, consideremos $-R \leq s,t \leq R$ para alguma constante $R > 0$. De (4.6), para todo $x \in \overline{\Omega}$

$$0 < \left|1 - \frac{f(x,s)-f(x,t)}{M(s-t)}\right| < 1 - \frac{\sigma}{M}, \ \text{para } s \neq t.$$

Consequentemente,

$$|G(x,s) - G(x,t)| = |s - f(x,s) - t + f(x,t)|, \quad x \in \overline{\Omega}$$

ou

$$|G(x,s) - G(x,t)| \leq \left|1 - \frac{f(x,s)-f(x,t)}{M(s-t)}\right| |s-t|, \quad x \in \overline{\Omega}$$

o que implica

$$|G(x,s) - G(x,t)| < (1 - \frac{\sigma}{M})|s-t|, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Para esta última desigualdade, estamos usando (4.6). Portanto, G é uma contração, para todo $x \in \overline{\Omega}$, assim G é uma γ-contração estrita (ver Lema A.5 no Apêndice

A). Como toda aplicação γ-contração estrita é também uma aplicação γ-condensante, temos que $\gamma(G(x,B)) < \gamma(B)$, para $B = B_R(0) \subset C(\overline{\Omega})$ limitado.

Com o estudo acima, obtemos $\gamma(F_t(B)) < \gamma(B)$ onde $B = B_R(0) \subset C(\overline{\Omega})$ e $\gamma(B) > 0$, i.e., F_t é uma aplicação γ-condensante, qualquer que seja $t \in \mathbb{R}$.

■

Agora determinaremos o grau de $I - F_t$ para um certo subconjunto de $C(\overline{\Omega})$.

Lema 4.3.4 *Suponhamos que* (f_1), (f_2) *e* (f_3) *ocorrem. Sejam* $g_1 \in \{\phi_1\}^\perp$ *e* $t_0 < t(g_1)$. *Então existe um número* $R > 0$ *tal que*

$$d(I - F_{t_0}, B_R, 0) = 0,$$

onde $B_R = \{u \in C(\overline{\Omega}); \|u\|_\infty < R\}$.

Demonstração. Do Teorema 0.0.8 o problema $(P')_t$ não tem solução se $t > t(g_1)$. Com isso, escolha um $t_1 > t(g_1)$. Segue-se do Teorema 4.3.1 que existe uma constante $R > 0$ tal que $\|u\|_\infty < R$ para todo eventual solução de $(P')_{t_0}$ com g_1 fixado. Do Lema 4.2.6, segue-se que essa desigualdade ocorre para toda solução de $(P')_t$ para qualquer $t \in [t_0, t_1]$. Desde que F_t, com $t \in [t_0, t_1]$, constitui uma homotopia admissível entre F_{t_0} e F_{t_1}, pois

$$(I - F_t)u \neq 0, \text{ para todo } \|u\|_\infty = R \text{ e todo } t \in [t_0, t_1],$$

temos que $d(I - F_{t_0}, B_R, 0) = d(I - F_{t_1}, B_R, 0)$. Mas $d(I - F_{t_1}, B_R, 0) = 0$ pois o problema $(P')_t$ não tem solução para $t = t_1$. Portanto, $d(I - F_{t_0}, B_R, 0) = 0$.

■

Lema 4.3.5 *Suponha que* (f_1), (f_2) *e* (f_3) *ocorrem. Sejam* $g_1 \in \{\phi_1\}^\perp$ *e* $t_0 < t(g_1)$. *Então, existem um número* $M > 0$ *e um aberto* $W \subset C(\overline{\Omega})$ *tais que*

$$d(I - F_{t_0}, W, 0) = 1.$$

Demonstração. Segue do Teorema 0.0.8 que existe $v \in C(\overline{\Omega})$ solução positiva de $(P')_{t_1}$, com $t_0 < t_1 < t(g_1)$. Além disso, v é uma subsolução de $(P')_t$ quando $t = t_0$, ou seja

$$L_K v - f(x, v) = t_1\phi_1 + g_1 > t_0\phi_1 + g_1, \text{ em } \Omega$$

ou

$$L_K v > f(x, v) + t_0\phi_1 + g_1, \text{ em } \Omega \tag{4.7}$$

Por outro lado, do Lema 4.2.3, existe $w \in C(\overline{\Omega})$ supersolução de $(P')_{t_0}$, ou seja

$$L_K w < f(x,w) + t_0\phi_1 + g_1, \text{ em } \Omega \tag{4.8}$$

Ademais, $v < w$ em $\overline{\Omega}$.

Agora, escolha $M > 0$ de maneira que, $M > \|k\|_\infty$, $f(x,s) - Ms$ é uma função decrescente em $0 \leq s \leq \|w\|_\infty$ e que

$$F_{t_0}u := \frac{1}{M}L_K u + u - \frac{1}{M}f(x,u) - \frac{1}{M}(t\phi_1 + g_1(x)), \quad \text{para } x \in \overline{\Omega}$$

seja uma aplicação γ-condensante.

Defina $W = \{u \in C(\overline{\Omega}); v < u < w \text{ em } \overline{\Omega}\}$, temos que W é um aberto, limitado e convexo em $C(\overline{\Omega})$.

Afirmação 4.3.6 *$F_{t_0} : \overline{W} \to C(\overline{\Omega})$ é tal que $F_{t_0}(\overline{W}) \subset W$.*

De fato, se $u \in \overline{W}$ então $v \leq u \leq w$ em $\overline{\Omega}$. Seja $z = F_t(u)$, daí

$$Mz = L_K u + (Mu - f(x,u)) - t_0\phi_1 - g_1, \text{ em } \Omega.$$

Agora, observe que

$$L_K v - Mv > f(x,v) - Mv + t_0\phi_1 + g_1, \text{ em } \Omega$$

o que implica

$$Mv < L_K v + (Mv - f(x,w)) - t_0\phi_1 - g_1, \text{ em } \Omega.$$

De maneira análoga, $Mw > L_K w + (Mw - f(x,w)) - t_0\phi_1 - g_1$ em Ω. Consequentemente,

$$M(z-v) > L_K(z-v) + [(Mu - f(x,u)) - (Mv - f(x,v))], \text{ em } \Omega.$$

Desde que $v \leq u$, temos $L_K v \leq L_K u$ e $(Mv - f(x,v)) \leq (Mu - f(x,u))$, logo $M(z-v) > 0$ o que implica que $v < z$ em $\overline{\Omega}$. Similarmente, demonstra-se que $z < w$ em $\overline{\Omega}$. Portanto, $z \in W$.

Com o exposto acima, concluímos que, se $u \in \partial W$ então $u \neq F_{t_0}(u)$, pois se $u \in \overline{W}$ e $u = F_{t_0}(u)$ devemos ter $u \in W$.

Com o estudo feito, $d(I - F_{t_0}, W, 0)$ está bem definido. Vamos então calcular o seu valor. Considere $\psi = \dfrac{v+w}{2}$ temos $v < \psi < w$, i.e. $\psi \in W$. Defina $H_\theta(u) = (1-\theta)F_{t_0}(u) + \theta\psi$. Para $0 \leq \theta \leq 1$ temos $H_\theta : \overline{W} \to W$.

Com efeito, sabemos que se $u \in \overline{W}$ então $F_{t_0}(u) \in W$. Logo, $v < F_{t_0}(u) < w$ e como $v < \psi < w$ temos $H_\theta(\overline{W}) \subset W$, isto é, H_θ é uma homotopia admissível para todo $0 \leq \theta \leq 1$.

Desde que $u \neq H_\theta(u)$ para todo $u \in \partial W$ e todo $\theta \in [0,1]$, concluímos

$$d(I - H_0, W, 0) = D(I - H_1, W, 0).$$

Mas, H_θ é independente de $\theta \in [0,1]$ e $d(I - H_1, W, 0) = 1$ pois $\psi \in W$. Consequentemente, $d(I - H_0, W, 0) = 1$ e o lema está provado.

■

Prova do Teorema 0.0.9

(i) Sejam $g_1 \in \{\phi_1\}^\perp$ e $t_0 < t(g_1)$. Do Lema 4.3.5, existem uma constante $M > 0$ e um aberto limitado W tal que $d(I - F_{t_0}, W, 0) = 1$. Assim, $I - F_{t_0}$ tem um zero em W, isto é, o problema $(P')_{t_0}$ tem uma solução $u_1 \in W$.

Agora, escolha $R > 0$ tal que $W \subset B_R(0)$. Pelo Lema 4.3.4, segue-se que $d(I - F_{t_0}, B_R, 0) = 0$, logo

$$d(I - F_{t_0}, B_R \setminus \overline{W}, 0) = -1.$$

Consequentemente, o problema $(P')_{t_0}$ tem outra solução $u_2 \in B_R \setminus \overline{W}$. Além disso, $u_1 \neq u_2$.

(ii) Considere a sequência $t_n < t(g_1)$ tal que $t_n \to t(g_1)$. Segue-se do Teorema 0.0.8 que o problema $(P')_t$ tem pelo menos uma solução $u_n \in C(\overline{\Omega})$ para cada t_n, ou seja

$$L_K u_n = f(x, u_n) + t_n \phi_1 + g_1, \text{ em } \Omega. \tag{4.9}$$

Como (u_n) é limitada em $C(\overline{\Omega})$, então (u_n) é limitada em $L^2(\Omega)$. Logo, existe uma subsequência de (u_n), que iremos denotar por ela mesmo, tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $L^2(\Omega)$. Como $(L_K u_n)$ é uniformemente convergente em $C(\overline{\Omega})$ e como L_K é um operador linear e compacto, temos

$$L_K u_n(x) = \int_\Omega K(x,y) u_n(y) dy \to \int_\Omega K(x,y) u(y) dy = L_K u(x) \quad \text{in } \Omega,$$

assim, $L_K u_n \to L_K u$ em $C(\overline{\Omega})$. Por outro lado, de (4.9) obtemos

$$f(x, u_n) = L_K u_n - t_n \phi_1 - g_1 \to L_K u - t_0 \phi_1 - g_1 := z \text{ uniformemente em } \Omega.$$

Da condição (f_3) segue-se que

$$\sigma\|u_n - u_m\|_\infty < |f(x, u_n(x)) - f(x, u_m(x))| \leq \|f(., u_n) - z\|_\infty + \|z - f(., u_m)\|_\infty$$

Portanto, (u_n) é uma sequência de Cauchy em $C(\overline{\Omega})$. Daí,

$$f(., u_n) \to f(., u) \text{ em } C(\overline{\Omega}).$$

Claramente u é uma solução do problema $(P')_t$ para estes g_1 e $t = t(g_1)$. E assim, a prova do Teorema 0.0.9 está completa. ■

Apêndices

Apêndice A

O grau para aplicações γ-condensantes

Neste apêndice apresentamos uma teoria que foi desenvolvida por R. Nussbaum (ver [13], [41] e [42]), com colaboração de F. Browder, que trata de uma extensão do grau de Leray-Schauder para uma classe de pertubações da identidade definidas em termos da medida de não compacidade de Kuratowski. A teoria que será aqui apresentada, pode ser encontrada em Deimling [26] pp. 71.

A.1 Medidas de não compacidade de Kuratowski

Nesta primeira seção tratamos da definição e propriedades das medidas de não compacidade de Kuratowski para conjuntos limitados. Vamos considerar $\mathcal{B}$ a família de todos os subconjuntos limitados de um espaço de Banach X. Recordamos que $B \subset X$ é dito ser limitado, se B está contido em alguma bola. Dizemos que $B \in \mathcal{B}$ é relativamente compacta quando existe $\epsilon > 0$ tal que B é coberto por um número finito de bolas de raio ϵ, e também podemos cobrir B com uma quantidade finita de conjuntos de diâmetro menor que ϵ (recorde que, $diam(B) = \sup\{|x-y|; x, y \in B\}$ é chamado de diâmetro de B).

Com estas informações vamos definir as medidas de não compacidade de Kuratowski

Definição A.1 *Sejam X um espaço de Banach e $\mathcal{B}$ o conjunto de seus limitados. Então $\alpha : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$, definida por*

$$\alpha(B) = \inf\{d > 0; B \textit{ admite uma cobertura finita de conjuntos com diâmetro } \leq d\},$$

é chamada de medida de Kuratowski para não compactos, e $\beta : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ *definida por*

$\beta(B) = \inf\{r > 0; B$ *pode ser coberta por uma quantidade finita de bolas de raio* $\leq r\}$,

é chamada de medida de bolas para não compactos.

Agora, vamos listar algumas propriedades destas medidas, que serão utilizadas no capítulo 4.

Proposição A.2 *Se* $\gamma : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ *é uma das medidas* α *ou* β *acima definidas, então*

(*a*) $\gamma(B) = 0$, *se e somente se,* $\overline{B}$ *é um compacto;*

(*b*) γ *é uma seminorma, i.e.,* $\gamma(\lambda B) = |\lambda|\gamma(B)$ *e* $\gamma(B_1 + B_2) \leq \gamma(B_1) + \gamma(B_2)$;

(*c*) *Se* $B_1 \subset B_2$ *então* $\gamma(B_1) \leq \gamma(B_2)$ *e* $\gamma(B_1 \cup B_2) = \max\{\gamma(B_1), \gamma(B_2)\}$;

(*d*) $\gamma(convB) = \gamma(B)$.

Vamos exibir um exemplo para podermos nos familiarizarmos mais com essas medidas. Vamos calcular a medida da seguinte bola $B_r(x_0) = x_0 + rB_1(0)$. Evidentemente,

$$\gamma(B_r(x_0)) = r\gamma(\overline{B}_1(0)) \text{ e } \gamma(\overline{B}_1(0)) = \gamma(S), \text{ para } S = \partial B_1(0).$$

Além disso, $\alpha(S) \leq 2$ e $\beta(S) \leq 1$. Suponha que $\alpha(B) < 2$. Então $S = \bigcup_i^n M_i$ onde M_i são conjuntos fechados com $diam(M_i) < 2$. Considere X_n subespaços n-dimensionais de X. Logo, $S \cap X_n = \bigcup_i^n (M_i \cap X_n)$ é a fronteira da bola unitária em X_n e portanto um dos conjuntos $M_i \cap X_n$ contém um par de pontos antipodais, x e $-x$. Consequentemente, $diamM_i \geq diam(M_i \cap X_n) = 2$ para este i, o que é uma contradição. Assim, $\alpha(S) = 2$ e $1 = \frac{1}{2}\alpha(S) \leq \beta(S) \leq 1$, ou seja, em dimensão infinita devemos ter $\alpha(B_r(x_0)) = 2r$ e $\beta(B_r(x_0)) = r$.

Uma outra definição que precisaremos é dada abaixo

Definição A.3 *Seja* X *um espaço de Banach. Dizemos que* $A \subset X$ *é um retrato de* X, *se existe uma aplicação contínua* $R : X \to A$ *tal que* $Rx = x$, *para todo* $x \in A$. *Em outras palavras,* A *é um retrato de* X *se* $I\mid_A$ *tem uma extensão contínua em* X. *A aplicação* R *é chamada de retração de* X *sobre* A.

Exemplo A.4 *Sejam* X *um espaço de Banach e* $R : X \to \overline{B}_r(x_0) \subset X$ *definida por,*

$$Rx = \begin{cases} x, & se \quad |x - x_0| \leq r \\ x_0 + r\dfrac{x - x_0}{|x - x_0|}, & se \quad |x - x_0| > r. \end{cases}$$

A aplicação R *é um exemplo de retração.*

A.2 O grau para aplicações γ-condensantes

Nesta seção trataremos inicialmente da definição e propriedades das aplicações γ-condensantes. Num segundo momento, estaremos trazendo a construção do grau para estas aplicações. No que segue X será um espaço de Banach e $\gamma : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ será uma das medidas de Kuratowski α ou β, definidas anteriormente.

Definição A.1 *Sejam $\Gamma \subset X$ e $F : \Gamma \to X$ uma aplicação contínua e limitada (i.e., leva limitada em limitado). Dizemos que F é uma aplicação γ-Lipschitz se*

$$\gamma(FB) \leq c\gamma(B), \text{ para alguma constante } c \geq 0 \text{ e todo limitado } B \subset \Gamma.$$

Se $c < 1$ dizemos que F é uma aplicação γ-contração estrita. Por fim, dizemos que F é uma aplicação γ-condensante se,

$$\gamma(FB) < \gamma(B), \text{ sempre que } B \subset \Gamma \text{é limitado e } \gamma(B) > 0,$$

em outras palavras, se $\gamma(FB) \geq \gamma(B)$ então $\gamma(B) = 0$.

Denotaremos por $SC_\gamma(\Gamma)$ o conjunto de todas as γ-contrações estritas, por $C_\gamma(\Gamma)$ o conjunto de todas as aplicações γ-condensantes e por $\mathcal{K}(\Gamma)$ o conjunto de todas as aplicações compactas. Obviamente que, $F \in C_\gamma(\Gamma)$ é γ-Lipschitz com constante $c = 1$. Mas ainda, $SC_\gamma(\Gamma) \subset C_\gamma(\Gamma)$.

Exemplo A.2 *Se $F : \Gamma \to X$ é Lipschitz com constante $c > 0$, então F é α-Lipschitz com a mesma constante c, isto segue da definição de α. Se $G : \Gamma \to X$ é Lipschitz com constante $\widetilde{c} > 0$, então $F + G$ é α-Lipschitz com constante $c + \widetilde{c}$.*

Exemplo A.3 *Suponhamos, por exemplo, que queremos encontrar uma solução $u \in C(J)$ de*

$$u(t) = \varphi(t, u(t)) + \int_0^t \phi(t, s, u(s))ds, \quad \text{for } t \in J = [0, a],$$

onde φ e ϕ são funções contínuas. Então a parte da integral define uma função $G : C(J) \to C(J)$ completamente contínua, mas este não é o caso para F definido por $(Fu)(t) = \varphi(t, u(t))$, a menos que φ seja independente de u. Entretanto, se

$$|\varphi(t, u) - \varphi(t, v)| \leq c|u - v|, \quad \text{for } t \in J \text{ e } u, v \in \mathbb{R},$$

então F é α-Lipschitz com constante c, e o mesmo é verdade para $F + G$.

Em seguida, mostramos um exemplo de função α-condensante que não é α-contração estrita. Este exemplo pode ser encontrado em Nussbaum [41].

Exemplo A.4 *Seja* $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ *uma função contínua, estritamente decrescente,* $\varphi(0) = 1$ *e seja* $F : \overline{B}_1(0) \to \overline{B}_1(0) \subset X$ *com* $dim X = \infty$*, definida por,* $Fx = \varphi(|x|)x$*. Temos que,* F *é uma aplicação* α*-condensante, mas não é uma aplicação* α*-contração estrita.*

Com efeito, desde que $FB \subset conv(B \cup \{0\})$ *temos que,* $\alpha(FB) \leq \alpha(B)$ *para todo* $B \subset \overline{B}_1(0)$*. Por outro lado,* $\partial B_{r\varphi(r)}(0) \subset FB_r(0)$ *para* $r \in [0,1]$ *e portanto*

$$\alpha(FB_r(0)) \geq \alpha(\partial B_{r\varphi(r)}(0)) = 2r\varphi(r) = \alpha(\overline{B}_r(0))\varphi(r).$$

Como $\varphi(r) \to 1$ *quando* $r \to 0$*,* F *não pode ser* α*-contração estrita.*

Agora, suponhamos que $\alpha(B) = d > 0$*, e sejam* $0 < r < \dfrac{d}{2}$*,* $B_1 = B \cap \overline{B}_r(0)$ *e* $B_2 = B \setminus \overline{B}_r(0)$*. Então,*

$$\alpha(FB_1) \leq 2r < \alpha(B)$$

e

$$\alpha(FB_2) \leq \alpha(\{\lambda x : 0 \leq \lambda \leq \varphi(r),\ e\ x \in B_2\}) \leq \alpha(conv[\varphi(r)B \cup \{0\}])$$

o que implica,

$$\alpha(FB_1) \leq \varphi(r)\alpha(B) < \alpha(B).$$

Consequentemente, $\alpha(FB) = \max\{\alpha(FB_1), \alpha(FB_2)\} < \alpha(B)$*.*

Lema A.5 *Sejam* X *um espaço de Banach e* $F : X \to X$ *uma contração com constante* $c < 1$*, então* F *é uma* γ*-contração estrita.*

Demonstração. Seja $B \subset X$ um limitado tal que $\gamma(B) = d$. Então, dado $\epsilon > 0$ temos $B = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$ e $diam(S_i) \leq d + \epsilon$.

Assim, $F(B) = \bigcup_{i=1}^{m} F(S_i)$ e como F é uma contração com constante $c < 1$, devemos ter, $diam F(S_i) \leq c(d + \epsilon)$. Sendo $\epsilon > 0$ arbitrário, obtemos

$$\gamma(F(B)) \leq cd = c\gamma(B).$$

Portanto, F é uma γ-contração estrita. ■

Agora, apresentaremos algumas propriedades das aplicações γ-Lipschitz

Lema A.6 *Sejam* $\Gamma \subset X$ *um fechado limitado e* $F \in C_\gamma(\Gamma)$*. Então,* $I - F$ *é própria e leva subconjunto fechado de* Γ *em conjunto fechado de* X*.*

Demonstração. Se $A = (I - F)^{-1}(K)$ com K compacto, então A é fechado desde que F é contínuo e K é fechado. Além disso, $(I - F)(A) = K$ o que implica, $A = F(A) + K$. Logo,

$$\gamma(A) \leq \gamma(FA) + \gamma(K) = \gamma(FA)$$

portanto, $\gamma(A) = 0$. Assim, da Proposição A.2, F é própria.

Para finalizarmos esta demonstração, mostramos que $I - F$ é uma aplicação fechada. De fato, considere $A \subset X$ um fechado e seja $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \to x$ em A. Defina $y_n = \varphi(x_n) = x_n - Fx_n$. Como φ é contínua, segue-se que $y_n \to y$ em X. Agora, temos que

$$Fx_n = x_n - y_n \text{ o que implica } Fx_n \to x - y := z, \text{ em } X.$$

Por outro lado, $x_n = y_n + Fx_n \to y + z$ em X. Mas, como $(x_n) \subset A$ e A é fechado, devemos ter $y + z \in A$. Logo, $y = \varphi(y + z) \in \varphi(A)$, ou seja, φ é fechada.

■

Definição A.7 *Um conjunto C é chamado de convexo se $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$ sempre que $x, y \in C$ e $\lambda \in [0, 1]$. O fecho convexo de C, denotado por $convC$ é a interseção de todos os convexos que contém C, ou seja,*

$$convC = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i ; x^i \in C, \lambda_i \in [0, 1] \ e \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

O próximo resultado é uma generalização do Teorema de ponto fixo de Schauder.

Teorema A.8 *Sejam $C \subset X$ um convexo não-vazio, limitado e fechado e $F : C \to C$ uma aplicação γ-condensante. Então, F tem um ponto fixo.*

Demonstração. Primeiramente, vamos supor que $0 \in C$. Agora, suponha que o teorema é válido para γ-contrações estritas. Então, escolhendo $(k_n) \in \mathbb{R}$ de maneira que, $k_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e que $k_n \to 1$ quando $n \to \infty$, temos que $k_n F : C \to C$ tem um ponto fixo x_n. Assim,

$$x_n - Fx_n = (k_n - 1)Fx_n \to 0$$

e portanto $x - Fx = 0$ para algum $x \in C$.

Agora, considere F uma γ-contração estrita com constante $k < 1$. Defina a sequência $(C_n) \subset X$ decrescente dada por,

$$C_0 = C \text{ e } C_n = \overline{conv}(FC_{n-1}), \text{ para } n \geq 1. \tag{A.1}$$

Temos que, $\gamma(C_n) \leq \gamma k(C_{n-1}) \leq ... \leq k^n \gamma(C_0) \to 0$ quando $n \to \infty$. Consequentemente, $\widetilde{C} = \bigcap_n C_n$ é não vazio e compacto. Além disso, $\widetilde{C}$ é convexo e F é uma aplicação de $\widetilde{C}$ em $\widetilde{C}$. Portanto, pelo Teorema de ponto fixo de Schauder F tem um ponto fixo em $\widetilde{C} \subset C$.

■

Antes de falarmos sobre o grau para aplicações γ-condensantes, vamos começar definindo terna admissível

Definição A.9 *(Terna Admissível) Sejam X um espaço de Banach, $\Gamma \subset X$ um aberto limitado e $F \in C_\gamma(\overline{\Gamma})$. Se $y \notin (I-F)(\partial\Gamma)$, dizemos que a terna $(I-F, \Gamma, y) \in \mathbb{Z}$ é uma terna admissível.*

Seja M o conjunto de todas as ternas admissíveis. Definiremos uma aplicação $d : M \to \mathbb{Z}$ que, posteriormente, chamaremos de grau para aplicações γ-condensantes, que satisfaz as seguintes três condições:

(d_1) (Normalização) $d(I, \Gamma, y) = 1$ para $y \in \Gamma$;

(d_2) (Aditividade) $d(I-F, \Gamma, y) = d(I-F, \Gamma_1, y) + d(I-F, \Gamma_2, y)$ sempre que Γ_1 e Γ_2 são subconjuntos disjuntos, abertos e não vazios de Γ tais que, $y \notin (I-F)(\overline{\Gamma} \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2))$;

(d_3) (Invariância por Homotopia) $d(I - H(t,.), \Gamma, y(t))$ é independente de $t \in [0,1]$ sempre que $H \in C([0,1] \times \overline{\Gamma})$ e $\gamma(H([0,1] \times B)) < \gamma(B)$ para todo $B \subset \overline{\Gamma}$ com $\gamma(B) > 0$, $y : [0,1] \to X$ é contínua e $y(t) \neq x - H(t,x)$ para todo $x \in \partial\Gamma$ e $t \in [0,1]$.

Como consequência da definição, se essa função d existe, também satisfaz as seguintes propriedades:

(d_4) $d(I, \Gamma, y) \neq 0$ implica em $(I-F)^{-1}(y) \neq \emptyset$;

(d_5) $d(I-G, \Gamma, y) = d(I-F, \Gamma, y)$ para $G \in C_\gamma(\Gamma) \cap B_r(F)$ e $d(I-F, \Gamma, .)$ é constante em $B_r(y)$, onde $r = \varrho(y, (I-F)(\partial\Gamma))$. Mais ainda, $d(I-F, \Gamma, .)$ é constante sobre toda componente conexa de $X \setminus (I-F)(\partial\Gamma)$.

(d_6) $d(I-G, \Gamma, y) = d(I-F, \Gamma, y)$ sempre que $G\mid_{\partial\Gamma} = F\mid_{\partial\Gamma}$;

(d_7) $d(I-F, \Gamma, y) = d(I-F, \Gamma_1, y)$ para todo aberto $\Gamma_1 \subset \Gamma$ tal que $y \neq (I-F)(\overline{\Gamma} \setminus \Gamma_1)$.

Vamos observar que d é determinado por seus valores nas ternas admissíveis, se F é uma γ-contração estrita pois, de (d_3), considerando $H(t,x) = (1-t(1-k))Fx$ para $k < 1$ e $1-k$ suficientemente pequeno, temos

$$d(I - F, \Gamma, y) = d(I - kF, \Gamma, y).$$

Com isso, vamos considerar F uma γ-contração estrita com $k < 1$.

Observe que, $(I-F)^{-1}(y) = \emptyset$ então $d(I - F, \Gamma, y) = 0$. Assim, vamos assumir que $(I-F)^{-1}(y) \neq \emptyset$.

Considere

$$C_0 = \overline{conv}(F(\overline{\Gamma}) + y) \text{ e } C_n = \overline{conv}(F(\overline{\Gamma} \cap C_{n-1}) + y) \quad \text{para } n \geq 1. \tag{A.2}$$

Como na prova do Teorema A.8, (C_n) é uma sequência decrescente de conjuntos convexos fechados tais que $\gamma(C_n) \to 0$ quando $n \to +\infty$. Consequentemente, $C_\infty = \bigcap\limits_{n\geq 0} C_n$ é um convexo compacto (ver [41]). Pela definição de C_n, temos que

$$(I-F)^{-1}(y) \subset C_\infty \cap \Gamma \quad \text{e} \quad F(\overline{\Gamma} \cap C_\infty) + y \subset C_\infty.$$

Agora, seja $C_\infty \neq \emptyset$ e $R : X \to C_\infty$ uma retração. Então, $R^{-1}(\Gamma) \cap \Gamma$ é um aberto e $(I-F)^{-1}(y) \subset R^{-1}(\Gamma) \cap \Gamma$. Consequentemente, (d_2) implica que

$$d(I - F, \Gamma, y) = d(I - F, R^{-1}(\Gamma) \cap \Gamma, y)$$

mas, note que, esse inteiro é igual a $d(I - FR, R^{-1}(\Gamma) \cap \Gamma, y)$. Considere $H(t,x) = Fx + t(FRx - Fx)$ em $[0,1] \times \overline{R^{-1}(\Gamma) \cap \Gamma}$. Temos que, H é contínuo e pela definição dos conjuntos C_n, $x - H(t,x) = y$ implica que

$$x = (1-t)(Fx + y) + t(FRx + y) \in \overline{conv}(F(\overline{\Gamma} \cap C_n) + y), \text{ para todo } n \geq 0.$$

Logo, $x \in C_\infty$, $Rx = x$ e $x - H(t,x) = x - Fx = y$. Mas, $(I-F)^{-1}(y) \subset R^{-1}(\Gamma) \cap \Gamma$ e portanto $x \notin \partial(R^{-1}(\Gamma) \cap \Gamma)$. Desde que, $R \in \mathcal{K}(X)$, temos também que

$$\gamma(H(J \times B)) \leq \gamma(conv(FB \cup FRB)) = \gamma(FB \cup FRB) \leq \gamma(FB) \leq k\gamma(B).$$

Portanto, aplicando (d_3) a afirmação está demonstrada.

Vamos verificar que, d é definido, em particular, nas ternas admissíveis quando $F \in \mathcal{K}(\overline{\Gamma})$. Mas, neste subconjunto existe apenas uma função satisfazendo $(d_1) - (d_3)$, que é o grau de Leray-Schauder denotado por d_{LS}. Assim, como F é contínua e R é compacta, podemos definir

$$\begin{aligned} &d(I-F,\Gamma,y) = d_{LS}(I-FR, R^{-1}(\Gamma)\cap\Gamma, y), \quad \text{se } (I-F)^{-1}(y) \neq \emptyset \\ &d(I-F,\Gamma,y) = 0, \quad \text{se } (I-F)^{-1}(y) = \emptyset. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Podemos observar que o lado direito da primeira igualdade de (A.3) não muda se substituirmos R por $\widetilde{R}$, a retração de X sobre qualquer conjunto fechado e convexo C tal que $C_\infty \subset C$, $F(\overline{\Gamma}\cap C)+y \subset C$ e $F(\overline{\Gamma}\cap C)$ é relativamente compacto. (Este tal C é dito ser admissível.)

De fato, sejam $\Gamma_1 = R^{-1}(\Gamma)\cap\Gamma$, $\Gamma_2 = \widetilde{R}^{-1}(\Gamma)\cap\Gamma$ e $\Gamma_3 = \Gamma_1\cap\Gamma_2$. Então, das propriedades do grau de Leray-Schauder, temos

$$d(I-FR,\Gamma_1,y) = d(I-FR,\Gamma_3,y) \quad d(I-F\widetilde{R},\Gamma_2,y) = d(I-F\widetilde{R},\Gamma_3,y).$$

Vamos ver que, $d(I-FR,\Gamma_3,y) = d(I-F\widetilde{R},\Gamma_3,y)$. Para isso, considere $H(t,.) = tFR+(1-t)F\widetilde{R}$ que é contínua em $[0,1]\times\overline{\Gamma_3}$. Além disso,

$$H(J\times\overline{\Gamma_3}) \subset conv(F(\overline{\Gamma}\cap C_\infty)\cup F(\overline{\Gamma}\cap C))$$

é relativamente compacto e $x - H(t,x) = y$ implica em $x \in C_\infty$, ou seja, $Rx = \widetilde{R}x = x$ e assim, $x \in (I-F)^{-1}(y) \subset \Gamma_3$. Portanto, por (d_3) do grau de Leray-Schauder, temos mostrado o que queríamos.

Agora, note que começamos a construção de d com a condição necessária (A.3). Para finalizarmos esta construção, apresentaremos o seguinte Teorema que pode ser encontrada em Deimling [26].

Teorema A.10 *Sejam X um espaço de Banach e*

$$M = \{(I-F,\Gamma,y); \Gamma\subset X \text{ aberto limitado }, F\in C_\gamma(\overline{\Gamma}) \text{ e } y\neq (I-F)(\partial\Gamma)\}.$$

Então,

(a) *Existe uma única função $d : M \to \mathbb{Z}$ satisfazendo $(d_1)-(d_3)$, chamada "o grau para aplicações γ-condensantes";*

(b) *Seja $F \in SC_\gamma(\overline{\Gamma})$. Então $d(I-F,\Gamma,y) = d_{LS}(I-FR, R^{-1}(\Gamma)\cap\Gamma, y)$ se existe um convexo fechado $C\subset X$ tal que $C_\infty \subset C$, $F(\overline{\Gamma}\cap C)+y\subset C$ e $F(\overline{\Gamma}\cap C)$ é relativamente compacto. Aqui, $C_\infty = \bigcap_{n\geq 0} C_n$ é definido (A.1) e R é qualquer retração em C. Em particular, se $C_\infty \neq \emptyset$, então $C = C_\infty$ é admissível. Se não existe tal C, então $d(I-F,\Gamma,y) = 0$;*

(c) *Se F é apenas condensante, então $d(I-F,\Gamma,y)=d(I-kF,\Gamma,y)$, onde $k\in[0,1)$ e $(1-k)\sup\{|Fx|;x\in\overline{\Gamma}\}<\varrho(y,(I-F)(\partial\Gamma))$.*

Demonstração. Como de costume, $(d_4)-(d_7)$ segue de $(d_1)-(d_3)$, desde que, em particular, $H(t,x)=tFx+(1-t)Gx$ com $x\in J=[0,1]$ e $F,G\in C_\gamma(\overline{\Omega})$ é admissível para (d_3). Além disso, (d_1) é óbvio e (d_2) segue das propriedades do grau de Leray-Schauder.

Para (d_3) é suficiente considerar uma γ-contração estrita H com constante $k<1$ e $y:J\to X$ contínua, tal que $y(t)\neq x-H(t,x)$ sobre $J\times\partial\Gamma$. Sejam, $C_0=\overline{conv}(H(J\times\overline{\Gamma})+y(J))$, $C_n=\overline{conv}(H(J\times\overline{\Gamma}\cap C_{n-1})+y(J))$ para $n\geq 1$ e $C_\infty(H)=\bigcap_{n\geq 0}C_n$. Então, $C_\infty(H)$ é compacto e convexo, e $x=H(t,x)+y(t)$ implica em $x\in C_\infty(H)$. Consequentemente, $C_\infty(H)=\emptyset$ implica em

$$d(I-H(t,.),\Gamma,y(t))=0 \quad \text{sobre } J.$$

Sejam $C_\infty(H)\neq\emptyset$ e R a retração para $C_\infty(H)$. Observe que, $C_\infty(H)$ é um conjunto C admissível para todo $H(t,.)$, e portanto

$$d(I-H(t,.),\Gamma,y(t))=d(I-H(t,.),R^{-1}(\Gamma)\cap\Gamma,y(t)) \quad \text{sobre } J \text{ por definição.}$$

Mas, $\gamma(H(J\times R(R^{-1}(\Gamma)\cap\Gamma)))=0$. Consequentemente, das propriedades do grau de Leray-Schauder, temos que $d(I-H(t,.),\Gamma,y(t))$ é constante em J.

■

Apêndice B

O Caso $[Q] = 0$

O objetivo deste apêndice é mostrar o corolário do Teorema 0.0.3, ou seja, verificar a existência de solução para o problema (P) quando $[Q] = 0$. Dizer que $[Q] = 0$ é a mesma coisa que considerar $Q(x,y) = Q(y)$, isto é, a função Q depende apenas da variável y.

Considere para cada $w \in C(\overline{\Omega})$, a função $\Phi_w : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi_w(x) = \int_\Omega Q(y)|w(y)|^p dy = \|w\|^p_{L^p(\Omega;Q)},$$

onde $p > 0$ e Q é uma função contínua, não-negativa satisfazendo (Q_2''), isto é, existe um $\sigma > 0$ tal que $Q(y) \geq \sigma$ para todo $y \in \overline{\Omega}$.

Temos o seguinte resultado:

Lema B.1 *Suponha que existe uma sequência (λ_n, u_n) de soluções para*

$$L_K u_n(x) + \Phi_{u_n}(x) u_n = \lambda_n u_n$$

com $u_n > 0$ e $\lambda_n \to \lambda$. Então existe $\rho > 0$ tal que $\lambda - \|\Phi_{u_n}\|_\infty \geq \rho$.

Demonstração. Pelo Lema 2.1.10, (u_n) é uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$, e como $p > 1$, existe alguma subsequência (u_n), que será denotada de mesma forma, tal que $u_n \rightharpoonup u \quad$ em $L^p(\Omega)$. Como $(L_K u_n)$ e (Φ_{u_n}) são uniformemente convergentes em $C(\overline{\Omega})$, supomos que $L_K u_n \to w$ e $\Phi_{u_n} \to v$ em $C(\overline{\Omega})$ respectivamente. Mas, como L_K é um operador linear compacto, temos

$$L_K u_n(x) = \int_\Omega K(x,y) u_n(y) dy \to \int_\Omega K(x,y) u(y) dy = L_K u(x) \quad \text{em } \Omega,$$

e assim, $L_K u_n \to L_K u$ em $C(\overline{\Omega})$. Em seguida, vamos mostrar que $\Phi_{u_n} \to \Phi_u$ em $C(\overline{\Omega})$, no entanto como Φ não é linear o argumento acima não funciona bem, e precisamos usar outros argumentos. Do limite $\Phi_{u_n} \to v$ em $C(\overline{\Omega})$, sabemos que $\Phi_{u_n}(x) \to v(x)$, $\forall x \in \Omega$. Agora, sendo $\lambda_n - \Phi_{u_n}(x) > 0$, temos $\lambda - v(x) \geq 0$. Passando o limite fraco no sentido $L^p(\Omega)$ em $L_K u_n + \Phi_{u_n}(x) u_n = \lambda_n u_n$, obtemos

$$L_K u = (\lambda - v(x))u \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Assim, temos duas possibilidades: $u \equiv 0$ e $u \neq 0$.

Se $u \neq 0$, então do Lema 1.1.6 temos que, $\lambda - v(x) > 0$ em $x \in \overline{\Omega}$ e o resultado está demonstrado.

Agora, se $u \equiv 0$, para $x \in \Omega$ temos que

$$L_K u_n + \Phi_{u_n}(x) u_n = \lambda_n u_n \Rightarrow L_K u_n + \|u_n\|^p_{L^p(\Omega;Q)} u_n = \lambda_n u_n$$

ou seja,

$$L_K u_n = (\lambda_n - \|u_n\|^p_{L^p(\Omega;Q)}) u_n, \quad \text{em } \Omega.$$

Sendo $u_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ devemos ter

$$u_n(x) = t_n \phi_1(x) \quad \text{e} \quad \lambda_n - \|u_n\|^p_{L^p(\Omega;Q)} = \lambda_1 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e todo } x \in \Omega$$

onde ϕ_1 é autofunção positiva associada ao autovalor principal λ_1. Daí,

$$L_K(t_n \phi_1) = (\lambda_n - t_n^p \|\phi_1\|^p_{L^p(\Omega;Q)})(t_n \phi_1) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

o que implica em

$$t_n \lambda_1 \phi_1 = (\lambda_n - t_n^p \|\phi_1\|^p_{L^p(\Omega;Q)})(t_n \phi_1) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

consequentemente,

$$\lambda_1 = \lambda_n - t_n^p \|\phi_1\|^p_{L^p(\Omega;Q)} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, o resultado segue, isto é,

$$\lambda_n - \Phi_{u_n}(x) = \lambda_1 > 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e todo } x \in \Omega.$$

■

Referências Bibliográficas

[1] W. Allegretto and P. Nistri, *On a class of nonlocal problems with applications to mathematical biology. Differential equations with applications to biology*, (Halifax, NS, 1997), 1-14, Fields Inst. Commun., 21, Am. Math. Soc., Providence, RI (1999).

[2] C. O. Alves, M. Delgado, M. A. S. Souto and A. Suárez, *Existence of positive solution of a nonlocal logistic population model*, Z. Angew. Math. Phys. 66, pp. 943-953, (2015).

[3] C. O. Alves, N. A. Lima and M. A. S. Souto, *Existence of solution for a nonlocal dispersal model with nonlocal term via bifurcation theory*, ArXiv:1711.08202, (2018).

[4] H. Amann and P. Hess, *A multiplicity result for a class elliptic boudary value problems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 84, pp. 145-151, (1975).

[5] A. Ambrosetti and G. Prodi, *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces*, Ann. Math. Pura Appl. Ser IV, 93, pp. 231-247, (1972).

[6] P. W. Bates and A. Chmaj, *An Integrodifferential Model for Phase Transitions: Stationary Solutions in Higher Space Dimensions*, Journal of Statistical Physics, 95, pp. 5-6, (1999).

[7] P. Bates, P. Fife, X. Ren and X. Wang, *Travelling waves in a convolution model for phase transitions*. Arch. Rat. Mech. Anal., 138, pp. 105-136, (1997).

[8] P. W. Bates and G. Zhao, *Existence, uniqueness and stability of the stationary solution to a nonlocal evolution equation arising in population dispersal*, J. Math. Anal. Appl., 332, pp. 428-440, (2007).

[9] H. Berestycki, *Le nombre de solutions de certains problèmes semilineaire elliptiques*, J. Funct. analysis 40, pp. 1-29, (1981).

[10] H. Berestycki, J. Coville and V. Hoang-Hung, *Persistence criteria for populations with non-local dispersion.* J. Math. Biol., 72, pp. 1693-1745, (2016).

[11] M. S. Berger and E. Podolak, *On the solutions of nonlinear Dirichlet problem.* Indiana Univ. Math. J., 24, pp. 837-846, (1975).

[12] H. Brèzis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations,* Springer (2010).

[13] F. E. Browder and R. D. Nussbaum, *The topological degree for noncompact nonlinear mappings in Banach spaces*, Bull. Amer. Math., Soc., 74, pp. 641-646, (1968).

[14] M. L. Cain, B. G. Milligan and A. E. Strand, *Long-distance seed dispersal in plant populations.* Am. J. Bot., 87 (9), pp. 1217-1227, (2000).

[15] E. Chasseigne, M. Chaves and J. D. Rossi, *Asymptotic behavior for nonlocal diffusion equation*, J. Math. Pures Appl. 86, pp. 271-291, (2006).

[16] X. Chen, *Existence, uniqueness and asymptotic stability of travelling waves in nonlocal evolution equations.* Adv. Differential Equations, 2, pp. 125-160, (1997).

[17] S. Chen and J. Shi, *Stability and Hopf bifurcation in a diffusive logistic population model with nonlocal delay effect*, J. Differential Equations, 253, pp. 3440-3470, (2012).

[18] M. Chipot, *Remarks on Some Class of Nonlocal Elliptic Problems*, *Recent Advances on Elliptic and Parabolic Issues*, World Scientific, pp. 79-102, (2006).

[19] J. S. Clark, *Why trees migrate so fast: Confronting theory with dispersal biology and the paleorecord.* The American Naturalist, 152(2), pp. 204-224, (1998).

[20] F. J. S. A. Corrêa, M. Delgado and A. Suárez, *Some nonlinear heterogeneous problems with nonlocal reaction term*, Adv. Differential Equations, 16, pp. 623-641, (2011).

[21] J. Coville, *Convergence to equilibrium for positive solutions of some mutation-selection model*, arXiv: 1308.647(2013).

[22] J. Coville, *Maximum Principles, Sliding Techniques and Applications to Nonlocal Equation*, Electronic Journal of Differential Equations, 68, pp. 1-23, (2007).

[23] J. Coville, *On a simple criterion for the existence of a principal eigenfunction of some nonlocal operators*, J. Differential Equations 249, pp. 2921-2953, (2010).

[24] J. Coville, *On uniqueness and monotonicity of solutions on non-local reaction diffusion equations*, Ann. Mat. Pura Appl. 185, pp. 461-485, (2006).

[25] E. N. Dancer, *On the range of certain weakly nonlinear elliptic partial differential equations*, J. Math. Pures Appl. 54, pp. 351-366, (1978).

[26] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Dover ed. (1943).

[27] D. G. de Figueiredo, *Lectures on Boundary Value Problems of Ambrosetti-Prodi Type*. 12º Seminário Brasileiro de Análise, São Paulo, Brazil (1980).

[28] P. C. Fife, *An integrodifferential analog of semilinear parabolic PDEs*. In *Partial differential equations and applications*, volume 177 of Lecture Notes in Pure and Appl. Math., pp. 137-145. Dekker, New York, (1996).

[29] P. C. Fife, *Mathematical aspects of reacting and diffusing systems*, volume 28 of Lecture Notes in Biomathematics. Springer-Verlag, Berlin, (1979).

[30] J. Furter and M. Grinfeld, *Local vs. nonlocal interactions in population dynamics*, J. Math. Biol., 27, pp. 65-80, (1989).

[31] J. García-Melián and J.D. Rossi, *Maximum and antimaximum principles for some nonlocal difffusion operators*, Nonlinear Analysis, 71, pp. 6116-6121, (2009).

[32] J. García-Melián and J.D. Rossi, *On the principal eigenvalue of some nonlocal diffusion problems*, J. Differential Equation, 246, pp. 21-38, (2009).

[33] V. Hutson, S. Martinez, K. Mischaikow and G. T. Vickers, *The evolution of dispersal.* J. Math. Biol., 47(6), pp. 483-517, (2003).

[34] C.Y. Kao, Y. Lou and W. Shen, *Evolution of mixed dispersal in periodic environment*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 17, pp. 2047-2072, (2012).

[35] C.Y. Kao, Y. Lou, W. Shen, *Random dispersal vs nonlocal dispersal*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 26, pp 551-596, (2010).

[36] J. Kazdan and F. W. Warner, *Remarks on some quasilinear elliptic equation*, Comm. Pure Appl. Math. XVIII, pp. 567-597, (1975).

[37] H. Leman, S. Méléard and S. Mirrahimi, *Influence of a spatial structure on the long time behavior of a competitive Lotka-Volterra type system*, arXiv:1401.1182 (2014).

[38] N. A. Lima, M. A. S. Souto, *An Ambrosetti-Prodi type result for integral equations involving dispersal operator*, ArXiv:1902.00365, (2019).

[39] J. Medlock and M. Kot, *Spreading disease: integro-differential equations old and new.* Math. Biosci., 184(2), pp. 201-222, (2003).

[40] J. D. Murray, *Mathematical biology*, volume 19 of *Biomathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, (1993).

[41] R. D. Nussbaum, *The Fixed Point Index for Local Condensing Maps*, Ann. Mat. Pura Appl., Volume 89, Issue 1, pp. 217-258, (1971).

[42] R. D. Nussbaum, *Degree Theory for Local Condensing Maps*, J. Math. Anal. Appl. 37, pp. 741-766, (1972).

[43] P. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Funct. Anal. **7**, pp. 487-513 (1971).

[44] F. Andreu-Vaillo, J. M. Mazón, J. D. Rossi and J. J. Toledo-Melero, *Nonlocal Diffusion Problems*, Applieds Mathematics - Mathematical Surveys and Monographs, Volume 165, (2010).

[45] F. M. Schurr, O. Steinitz and R. Nathan, *Plant fecundity and seed dispersal in spatially heterogeneous environments: models, mechanisms and estimation.* J. Ecol., 96(4), pp. 628-641, (2008).

[46] L. Sun, J. Shi and Y. Wang, *Existence and uniqueness of steady state solutions of a nonlocal diffusive logistic equation*, Z. Angew. Math. Phys., 64, pp. 1267-1278, (2013).