Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Identidades para álgebras de Lie especiais lineares com graduações de Pauli e Cartan

por

Franciélia Limeira de Sousa

Campina Grande - PB
Novembro/2019

Identidades para álgebras de Lie especiais lineares com graduações de Pauli e Cartan

por

Franciélia Limeira de Sousa †

sob orientação do

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Matemática.

Campina Grande - PB
Novembro/2019

†Este trabalho contou com apoio financeiro parcial da CAPES

Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em: 25 de novembro de 2019

Prof. Dr. Alexei Krassilnikov

Prof. Dr. Claudemir Fidelis Bezerra Júnior

Prof. Dr. Felipe Yukihide Yasumura

Profª. Dra. Manuela da Silva Souza

Prof. Dr. Lucio Centrone

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva
Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Novembro/2019

Resumo

Seja $\mathbb{K}$ um corpo de característica zero. Neste trabalho descrevemos uma base para as identidades graduadas da álgebra de Lie $sl_p(\mathbb{K})$ com a graduação de Pauli, onde p é um número primo. Além disso, calculamos suas codimensões graduadas e mostramos que a variedade $\mathrm{var}^{\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p}(sl_p(\mathbb{K}))$ é minimal e satisfaz a propriedade de Specht. Também descrevemos uma base para as identidades graduadas de $sl_m(\mathbb{K})$ com a graduação de Cartan pelo grupo $\mathbb{Z}^{m-1}$ e exibimos uma base para a álgebra de Lie relativamentre livre como espaço vetorial. Como consequência, calculamos as codimensões graduadas para $m = 2$ e fornecemos uma base para as identidades graduadas de subálgebras de Lie de $M_m(\mathbb{K})^{(-)}$ com a graduação de Cartan.

Palavras-chave: Identidades graduadas; Identidades de Lie;
Base finita para identidades.

Abstract

Let $\mathbb{K}$ be a field of characterist 0. In this work we describe a basis for the graded identities of the Lie algebra $sl_p(\mathbb{K})$ with the Pauli grading, where p is prime number. Moreover, we compute their graded codimensions and show that the variety $\mathrm{var}^{\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p}(sl_p(\mathbb{K}))$ is minimal and satisfies the Specht property. We also describe a basis for the graded identities for the Lie algebra $sl_m(\mathbb{K})$ with the Cartan grading by the group $\mathbb{Z}^{m-1}$ and exibit a basis of the corresponding relatively free graded Lie algebra as vector space. As a corollary, we compute the graded codimensions for $m = 2$ and provide a basis for the graded identities of certain Lie subalgebras of $M_m(\mathbb{K})^{(-)}$ with the Cartan grading.

Keywords: Graded identities; Lie identities;
Finite basis of identities.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por me capacitar e abrir tantas portas em minha caminhada acadêmica para que chegasse até aqui.

Aos meus pais, Francisco e Gilvaneres, aos meus irmãos, Gilvânia, Fabrício e Daniel, pelo amor e por acreditarem em mim, incentivando-me a persistir.

A Tonires, por não medir esforços para me ajudar a chegar a esta conquista, por toda a força e carinho, meu melhor amigo e tão importante para mim.

ao meu orientador Diogo Diniz, sem o qual nada disto teria sido possível. Não é possível medir a gratidão que sinto, por ter aceitado me orientar em condições tão adversas. Obrigada por todos os ensinamentos, pela paciência e generosidade. Muito obrigada por tudo!

Aos professores Alexei Krassilnikov, Felipe Yukinihide, Manuela Souza, Lucio Centrone e Caludemir Fidelis, que compuseram a banca e cujas sugestões acrescentaram qualidade ao trabalho final. Agradecimento especial ao professor Claudemir que também colaborou na produção dos resultados obtidos.

Aos meus colegas de turma do doutorado, Caio Ilan, Diego e Mauri que me ajudaram bastante na época das disciplinas. E na última fase, aos colegas do programa de pós-graduação da UAMAT/UFCG, mestrado e doutorado, pelo companheirismo. Especialmente aos queridos amigos Lucas, Laíse e Geisa, cuja amizade construída em tão pouco tempo quero levar para vida. Muito obrigada por tudo o que fizeram por mim.

Aos professores do Programa Associado de Pós-graduação em Matemática da UFPB/UFCG que contribuíram para minha formação.

Aos colegas de trabalho da unidade de matemática do CFP/UFCG, pelo icentivo e por torcerem pela realização deste sonho.

A todos os familiares e amigos que contribuíram de forma direta e indireta, torcendo ppor essa conquista. Muito obrigada a todos.

"Você ganha força, coragem e confiança através de cada experiência em que você realmente para e encara o medo de frente."

Eleanor Roosevelt

Dedicatória

Aos meus pais, Francisco e Gilvaneres.

Sumário

Introdução

A teoria de anéis e álgebras é um ramo muito importante da Álgebra, no qual se destacam as álgebras de matrizes sobre anéis, as álgebras comutativas e as álgebras de dimensão finita, em virtude do amplo campo de aplicações. A estrutura comutativa de uma álgebra é determinada pela identidade $x_1x_2 - x_2x_1 = 0$. As PI-álgebras, ou álgebras com identidades polinomiais, generalizam esta ideia. No caso associativo, onde a teoria encontra-se bastante desenvolvida, uma identidade polinomial em uma álgebra é um polinômio em indeterminadas não-comutativas que se anula quando avaliado nos elementos da álgebra. As álgebras que citamos no início são exemplos de PI-álgebras. As linhas de pesquisa em PI-teoria consistem em entender como as identidades polinomiais nos permitem descrever a estrutura da álgebra; estudar o conjunto de identidades satisfeitas por uma álgebra em especial; ou ainda a classe das álgebras que satisfazem alguma família de identidades (chamada de variedade de álgebras).

Os primeiros estudos sobre PI-álgebras surgiram entre 1920 e 1930, embora de forma implícita, nos trabalhos de Dehn [3] e Wagner [30]. Um maior interesse no estudo de identidades polinomiais se deu a partir de 1948, com o trabalho de Kaplansky [18]. Dois anos depois, Amitsur e Levitsky [1] provaram, hoje um resultado clássico da teoria, que o polinômio standard de grau $2k$ é a identidade de grau mínimo da álgebra de matrizes de ordem k. Tal resultado impulsionou a linha de pesquisa de descrever as identidades polinomiais satisfeitas por uma dada álgebra, inclusive este é o tipo de problema desta tese.

Seja $\mathbb{K}\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre em um conjunto enumerável de variáveis X sobre um corpo $\mathbb{K}$. O conjunto das identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra é um ideal invariante por endomorfismos de $\mathbb{K}\langle X\rangle$, chamado de T-ideal. Um dos principais problemas na PI-teoria, conhecido como problema de Specht, consiste em determinar se todo T-ideal da álgebra associativa livre, sobre um corpo de característica zero, é finitamente gerado como T-ideal. Este problema foi solucionado na década de 80 por Kemer ([19], [20]), utilizando álgebras $\mathbb{Z}_2$ -graduadas, também chamadas de superálgebras, e suas identidades gerando um desenvolvimento da teoria estrutural de PI-álgebras. Isto impulsionou o estudo de graduações e identidades polinomiais graduadas em várias classes de álgebras, principalmente em álgebras associativas, uma vez que identidades graduadas, juntamente com outros tipos de identidades, desempenham um papel essencial no estudo das identidades polinomiais satisfeitas por álgebras concretas. Por exemplo, se as identidades graduadas de duas álgebras graduadas por um mesmo grupo coincidem, então suas identidades ordinárias coincidem.

A classificação de graduações por grupos em álgebras de Lie simples de dimensão finita, sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, tem sido desenvolvida recentemente por muitos autores. Uma introdução a tais resultados pode ser encontrado em [8]. Este desenvolvimento, juntamente com os recentes avanços na teoria de identidades polinomiais graduadas para álgebras associativas, impulsionou o estudo de identidades graduadas em álgebras de Lie e superálgebras de Lie. Por exemplo, um análogo da conjectura de Amitsur, sobre o crescimento da codimensão de identidades polinomiais graduadas para álgebras de Lie com dimensão finita, foi obtido como consequência dos resultados em [15]. Koshlukov e Yukihide estudaram extensivamente a álgebra $UT_n^{(-)}$: classificaram suas graduações por grupos e as graduações elementares, determinaram uma base finita para as identidades $\mathbb{Z}_n$ e $\mathbb{Z}^{n-1}$-graduadas, além de caracterizar, para esta última graduação, o comportamento assintótico das codimensões graduadas ([23], [24], [25]).

Qualquer graduação em uma álgebra de Lie semissimples por um grupo abeliano livre de torção é induzida pela graduação de Cartan ([21]), o que torna interessante o estudo das identidades graduadas em tal graduação. Graduações que não admitem refinamento próprios, em particular as graduações nas quais toda componente não-nula é unidimensional, são de interesse especial na classificação das graduações em álgebras de Lie. Um exemplo é a graduação de Pauli. Em [27] é definida a graduação de Pauli em certas superálgebras de Lie e alguns invariantes numéricos para as identidades graduadas são estudados. A álgebra de Lie das derivações do anel polinomial em uma indeterminada admite uma graduação canônica pelo grupo $\mathbb{Z}$, tal que toda componente não-nula é unidimensional. As identidades graduadas para esta álgebra foram descritas em [10]. Anterior a esses resultados, muito do que se encontrava na literatura até então tratava da álgebra das matrizes de tamanho 2×2 com traço nulo.

No caso ordinário, Razmyslov em [26] encontrou uma base finita para as identidades satisfeitas por $sl_2(\mathbb{K})$ quando a característica do corpo é zero e provou que a variedade de álgebras de Lie gerada por esta álgebra tem a propriedade de Specht. Em [29] Vasilovsky resolveu este mesmo problema para o caso em que o corpo é de característica diferente de 2. Tal propriedade ainda é um problema em aberto para álgebras de Lie em geral, embora já existam contraexemplos onde não é válida, o primeiro foi dado por Vaughan-Lee em característica 2, ([28]). Em 1974, Drensky ([5]) exibiu contraexemplos para qualquer característica positiva. Se $\mathbb{K}$ é um corpo algebricamente fechado de característica diferente de 2, então, a menos de isomorfismo, as graduações finas em $sl_2(\mathbb{K})$ são a graduação de Pauli, com o grupo universal $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, e a graduação de Cartan com o grupo universal $\mathbb{Z}$. Além destas, $sl_2(\mathbb{K})$ admite uma graduação não-trivial pelo grupo $\mathbb{Z}_2$. Uma base das identidades graduadas para estas graduações foi determinada em [22]. Sobre um corpo de característica zero, foi provado em [12] que a álgebra $sl_2(\mathbb{K})$ munida com estas três graduações não-triviais satisfazem a propriedade de Specht. No caso de Cartan, a propriedade é satisfeita a menos de identidades monomiais triviais. Em [13] os autores demonstraram que, em cada caso, a correspondente variedade de álgebras de Lie graduadas é uma variedade minimal de crescimento exponencial. Além disso, foi provado que para as graduações de Pauli e de Cartan, a variedade tem crescimento quase polinomial.

Pouco se sabe sobre as identidades graduadas em $sl_m(\mathbb{K})$, para $m > 2$. Nesta tese, supondo $\mathbb{K}$ um corpo de característica zero, iremos descrever uma base para as identidades graduadas de $sl_m(\mathbb{K})$ com a graduação de Cartan pelo grupo $\mathbb{Z}^{m-1}$ e exibir uma base para a álgebra de Lie relativamentre livre. Também estudamos a graduação de Pauli e determinamos uma base para as identidades graduadas quando trabalhamos com matrizes de ordem p prima. Tal graduação tem a propriedade interessante que suas componentes homogêneas são unidimensionais ou nulas. Assim como o obtido para $sl_2(\mathbb{K})$ em [13] e [12], mostraremos que a variedade $\mathrm{var}^{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p}(sl_p(\mathbb{K}))$ é minimal e satisfaz a propriedade de Specht.

A tese está organizada da seguinte maneira.

O primeiro capítulo contém uma parte dos pré-requisitos para a leitura dos capítulos posteriores. Recordamos a definição de álgebra e suas propriedades básicas e fazemos uma breve introdução a álgebras de Lie, com ênfase na construção clássica da decomposição de Cartan. Em seguida definimos álgebras graduadas e introduzimos o ambiente de nosso estudo. Depois apresentamos os conceitos básicos da PI-teoria: álgebra livre, identidades polinomiais, T-ideais, variedades e álgebras relativamente livres. As versões destes conceitos para o caso graduado são expostos em seguida, por extensão natural. Finalizamos com os conceitos de codimensão e expoente graduado e discutimos brevemente as propriedades mais importantes desses conceitos. Ressaltamos que nesse capítulo, como regra geral, os resultados não são demonstrados, mas indicamos onde o leitor pode encontrá-los.

O segundo capítulo é dedicado ao estudo das identidades graduadas de $sl_p(\mathbb{K})$ com a graduação de Pauli, onde p é um número primo. Calculamos as codimensões graduadas (Corolário 2.2.2), problema que em geral é difícil. Além disso, exibimos uma base finita para as identidades graduadas de $sl_p(\mathbb{K})$ (Teorema 2.2.17) e provamos que $\mathrm{var}^{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p}(sl_p(\mathbb{K}))$ é uma variedade minimal que satisfaz a propriedade de Specth (Teorema 2.2.34).

O terceiro e último capítulo destina-se ao estudo da álgebra $sl_m(\mathbb{K})$ com a graduação clássica de Cartan. Determinamos uma base finita para as identidades graduadas e uma base, como espaço vetorial, para a álgebra relativamente livre (Teorema 3.1.23). Como consequência dos principais resultados deste capítulo, caracterizamos as identidades graduadas de algumas subálgebras da álgebra de Lie $M_m(\mathbb{K})^{(-)}$ com a graduação de Cartan (Teorema 3.2.1).

Os resultados dos capítulos 2 e 3 foram aceitos para publicação na revista Israel Journal of Mathematics sob título " Identities for the special linear lie algebra with the Pauli and Cartan gradings" ([9]).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos os conceitos e resultados básicos necessários para o desenvolvimento desta tese, principalmente a noção de identidades polinomiais graduadas em álgebras de Lie. Também estabelecemos a notação e terminologia que serão utilizadas nos capítulos seguintes. A fim de evitar repetições, $\mathbb{K}$ denotará sempre um corpo e todos os espaços vetoriais – e assim todas as álgebras – serão considerados sobre $\mathbb{K}$.

1.1 Álgebras Associativas, de Lie e Graduadas

Iniciamos com a definição de álgebra e alguns conceitos relacionados.

Um espaço vetorial A é dito uma *álgebra* (ou $\mathbb{K}$-álgebra) se está definida uma operação binária $\cdot : A \times A \to A$ (chamada multiplicação) tal que para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot c &= a\cdot c + b\cdot c\\ a\cdot(b+c) &= a\cdot b + a\cdot c\\ \alpha(a\cdot b) &= (\alpha a)\cdot b = a\cdot(\alpha b).\end{aligned}$$

Por simplicidade, escrevemos ab ao invés de $a \cdot b$.

A *dimensão da álgebra* A é a dimensão de A como espaço vetorial. Quando esta é finita, dizemos que a álgebra A é *de dimensão finita*.

Uma álgebra A é dita *associativa*, se a multiplicação satisfaz a lei associativa, $(ab)c = a(bc)$, para todo $a, b, c \in A$. Quando a multiplicação é comutativa, $ab = ba$

para quaisquer $a, b \in A$, dizemos que a álgebra é *comutativa* e em caso contrário, *não comutativa.* Um exemplo de álgebra não associativa são as *álgebras de Lie*, que optamos por apresentar mais adiante e de maneira ampla, já que é o ambiente de nosso estudo.

Exemplo 1.1.1 *Dado $m \in \mathbb{N}$, o espaço vetorial $M_m(\mathbb{K})$ das matrizes de ordem m com entradas em $\mathbb{K}$, munido com o produto usual de matrizes, é uma álgebra associativa de dimensão m^2. A base canônica é dada pelas matrizes elementares E_{ij}, para $1 \leq i, j \leq n$, cuja única entrada não nula é igual a 1, na i-ésima linha e j-ésima coluna.*

Exemplo 1.1.2 *O espaço vetorial dos polinômios nas n variáveis comutativas $x_1, \ldots, x_n$, que denotamos por $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, é uma álgebra associativa e comutativa.*

Assim como em espaços vetoriais, também temos uma noção natural de subálgebra. Um subespaço B de uma álgebra A é uma *subálgebra* de A, se é fechado com respeito a multiplicação, isto é, dados $b_1, b_2 \in B$ então, $b_1b_2 \in B$. Uma subálgebra I de A é chamada de *ideal* de A, se $IA \subseteq I$ e $AI \subseteq I$.

Exemplo 1.1.3 *O conjunto $UT_m(\mathbb{K})$ das matrizes triangulares superiores de ordem m é uma subálgebra de $M_m(\mathbb{K})$.*

Definição 1.1.4 *Sejam A e B duas álgebras. Dizemos que uma transformação linear $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras, se $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ para quaisquer $a, b \in A$.*

Se φ é um homomorfismo de álgebras bijetivo, dizemos que é um *isomorfismo.* Um *endomorfimo* de uma álgebra A é um homomorfismo de A em A. Quando este é isomorfismo, dizemos que é um *automorfismo* de A. Se existe um isomorfismo $\varphi : A \to B$, então dizemos que as álgebras A e B são *isomorfas* e denotamos por $A \simeq B$.

Seja $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de álgebras. O conjunto

$$\ker \varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$$

é um ideal de A, denominado *núcleo de φ* e o conjunto

$$\mathrm{Im}\varphi = \{\varphi(a) \mid a \in A\},$$

denominado *imagem de φ*, é uma subálgebra de B.

Se A é uma álgebra e I um ideal de A, o espaço vetorial quociente A/I munido do produto $(a+I)(b+I) = ab+I$, para todo $a, b \in A$, é uma álgebra, chamada de *álgebra quociente de A por I*. A aplicação $\pi : A \to A/I$, definida por $\pi(a) = a+I$, é um homomorfismo chamado de *projeção canônica*. Um resultado clássico é o Teorema dos Isomorfismos: Se $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras, então $A/\ker\varphi \simeq \mathrm{Im}\varphi$.

1.1.1 Introdução às álgebras de Lie

Nesta subseção definimos as álgebras de Lie e apresentamos a álgebra de Lie linear especial $sl_m(\mathbb{K})$. Alguns conceitos clássicos da teoria de álgebras de Lie serão abordados com o objetivo de apresentar a decomposição de Cartan em espaços-raiz, uma vez que no terceiro capítulo munimos $sl_m(\mathbb{K})$ com tal graduação e estudamos o T-ideal das identidades graduadas.

Definição 1.1.5 *Seja L uma álgebra (não associativa) sobre $\mathbb{K}$. Então, L é uma álgebra de Lie se satisfaz, para todo $a, b, c \in L$, as relações:*

$$aa = 0, \tag{1.1}$$

$$(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0. \tag{1.2}$$

As relações (1.1) e (1.2) são chamadas *anticomutatividade* e *identidade de Jacobi*, respectivamente. Note que (1.1) implica em $ab = -ba$ para todo $a, b \in L$. Usando esta igualdade podemos reescrever a identidade de Jacobi como

$$(ab)c = a(bc) + (ac)b, \quad \text{para todo } a, b, c \in L. \tag{1.3}$$

Exemplo 1.1.6 *O espaço $\mathbb{R}^3$ com o produto vetorial usual é uma álgebra de Lie.*

Usaremos a notação padrão de escrever o produto de dois elementos $a, b \in L$ por $[a, b]$. Este produto é usualmente chamado o comutador de a e b. Para todo $n \geq 3$ e para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in L$, definimos indutivamente o comutador normado à esquerda

$$[x_1, \cdots, x_n] = [[x_1, \cdots, x_{n-1}], x_n].$$

Exemplo 1.1.7 *Seja A uma álgebra associativa. Denote por $A^{(-)}$ o espaço vetorial A com o produto $[a, b] = ab - ba$. Uma verificação direta mostra que $A^{(-)}$ é uma álgebra de Lie.*

Exemplo 1.1.8 *Seja R uma álgebra qualquer, não necessariamente associativa. Denote por* $\mathrm{Der}R$ *o conjunto de todas as derivações de R, ou seja, todas as transformações lineares $\delta : R \to R$ tal que $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$. É fácil checar que o comutador $[\delta, \mu] = \delta\mu - \mu\delta$ é uma derivação se $\delta, \mu \in DerR$. Uma vez que o conjunto das transformações lineares é uma álgebra associativa, pelo exemplo anterior $DerR$ é uma álgebra de Lie.*

Se $x \in L$, a aplicação $y \mapsto [x, y]$ é um endomorfismo de L , o qual denotamos por $\mathrm{ad}(x)$. Usando a identidade de Jacobi mostramos que $\mathrm{ad}(x) \in \mathrm{Der}\ L$. Derivações deste tipo são chamadas de internas. A aplicação $L \to \mathrm{Der}\ L$, que envia x para $\mathrm{ad}(x)$, é um homomorfismo de álgebras de Lie chamado de *representação adjunta* e desempenha um importante papel no estudo das álgebras de Lie.

Exemplo 1.1.9 *Seja $R = \mathbb{K}[t]$ o anel de polinômios na indeterminada t. Seja $d \in \mathrm{Der}R$. O fato que $d(t^n) = nt^{n-1}d(t)$ e $d(1) = 0$, mostra que d é unicamente determinada por seu valor $d(t)$. Ou seja, d age em R como $f(t)\dfrac{d}{dt}$:*

$$d(h(t)) = f(t)\frac{dh}{dt}$$

Segue-se que $W_1 = \mathrm{Der}\ \mathbb{K}[t]$ é uma álgebra de Lie de dimensão infinita. De fato, as derivações

$$e_{-1} = \frac{d}{dt}, e_0 = t\frac{d}{dt}, \ldots, e_n = t^{n+1}\frac{d}{dt}, \ldots$$

formam uma base de W_1 com multiplicação dada por $[e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j}$. A álgebra W_1 é conhecida como a álgebra de Witt.

Para quaisquer subespaços A, B de uma álgebra de Lie L, definimos o comutador $[A, B]$ como o subespaço de todas as combinações lineares de produtos $[a, b]$, com $a \in A, b \in B$.

Exemplo 1.1.10 (Álgebras de Lie Lineares) *Se V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, denote por* $\mathrm{End}\ V$ *o conjunto das transformações lineares de V em V, o qual tem estrutura de álgebra associativa com respeito a operação composição e dimensão n^2, onde $n = dim\ V$. Pelo Exemplo 1.1.7,* $(\mathrm{End}\ V)^{(-)}$ *é uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$, a qual chamamos de álgebra linear geral e usamos a notação $\mathfrak{gl}(V)$ para representá-la.*

Qualquer subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$ é chamada de álgebra de Lie linear. Fixada uma base para V, identificamos $\mathfrak{gl}(V)$ com a álgebra de matrizes sobre $\mathbb{K}$, neste caso *usamos a notação* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. *Tal identificação é bastante conveniente para fazer cálculos explícitos. Podemos escrever a tabela de multiplicação para* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ *relativa a base canônica formada pelas matrizes elementares* E_{ij}. *Como* $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$, *temos*

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj}. \tag{1.4}$$

Seja dim $V = l + 1$. *Denote por* $sl(V)$, *ou* $sl_{l+1}(\mathbb{K})$, *o conjunto de endomorfismos de* V *com traço zero. Como* $Tr(xy) = Tr(yx)$ *e* $Tr(x+y) = Tr(x)+Tr(y)$, *temos que* $sl_{l+1}(\mathbb{K})$ *é subálgebra de* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, *chamada de álgebra linear especial.*

Uma vez que $sl_{l+1}(\mathbb{K})$ *é uma subálgebra própria de* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, *sua dimensão é no máximo* $(l + 1)^2 - 1$. *Podemos calcular o número de matrizes de traço zero linearmente independentes. Considere todas a matrizes* $E_{ij}(i \neq j)$ *e todas as matrizes* $h = E_{ii} - E_{i+1,i+1}(1 \leq i \leq l)$. *Claramente formam um conjunto linearmente independente com um total de* $l + (l + 1)^2 - (l + 1)$ *matrizes. Iremos sempre visualizar esta como sendo a base canônica para* $sl_{l+1}(\mathbb{K})$.

A família A_l, formada pelas álgebras $sl_{l+1}(\mathbb{K})$, juntamente com as famílias, C_l (álgebra simplética $\mathfrak{sp}(2l, \mathbb{K})$), B_l (álgebra ortogonal $\mathfrak{O}(2l + 1, \mathbb{K})$) e D_l (álgebra ortogonal $\mathfrak{O}(2l, \mathbb{K})$) são chamadas de álgebras de Lie clássicas. Estas últimas também são lineares e satisfazem a relação $JX + X^tJ = 0$, onde

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_l \\ -I_l & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_l & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & I_l \\ I_l & 0 \end{bmatrix}$$

respectivamente, sendo que I_l é a matriz identidade de ordem l. A construção detalhada pode ser vista em [17]. Em [8] é feita a classificação das graduações finas (conceito que será definido na seção seguinte) em álgebras de Lie clássicas. Um problema interessante é caracterizar os respectivos ideais de identidades graduadas.

Um subespaço $M \subseteq L$ é chamado de ideal de L se $[M, L] \subseteq M$. O subespaço nulo e o próprio L são exemplos de ideais. Um exemplo menos trivial é o *centro*

$$Z(L) = \{z \in L \mid [x, z] = 0 \ \forall \ x \in L\}.$$

Se L não tem ideais além dos triviais 0 e L, e além disso $[L, L] \neq 0$, dizemos que L é *simples*. A condição $[L, L] \neq 0$ é adicionada para evitar o caso da álgebra unidimensional.

Exemplo 1.1.11 *A álgebra* $sl_m(\mathbb{K})$ *é simples, a menos que a característica de* $\mathbb{K}$ *divida* m *(neste caso* $Z(sl_m(\mathbb{K}))$ *é a subálgebra das matrizes escalares). O fato* *de $sl_m(\mathbb{K})$ ser simples está ligado a irredutibilidade de seu sistema de raízes, cuja definição apresentaremos mais adiante.*

Definimos em L as seguintes cadeias de ideais:

$$L = L^1 \supseteq L^2 \supseteq \cdots \supseteq L^n \supseteq \dots$$

definida indutivamente por $L^2 = [L, L]$, $L^{n+1} = [L^n, L]$ para $n > 2$, é chamada *série central inferior de L*. Dizemos que L é *nilpotente* se $L^n = 0$, para algum n.

A cadeia de ideais

$$L = L^{(0)} \supseteq L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq L^{(n)} \supseteq \dots$$

definida por $L^{(1)} = [L, L]$, $L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}]$, $\dots$, $L^{(n)} = [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}]$ para $n \geq 2$, é chamada *série derivada de L*. Dizemos que L é solúvel se $L^{(n)} = 0$ para algum n.

Proposição 1.1.12 *Seja L uma álgebra de Lie.*

i) *Se L é solúvel, então todas as subálgebras e imagens homomórficas de L também são.*

ii) *Se I é um ideal solúvel de L tal que L/I é solúvel, então L é solúvel.*

iii) *Se I, J são ideias solúveis de L, então $I + J$ é solúvel.*

O item *iii* implica na existência de um único ideal solúvel maximal, chamado de *radical* de L e denotado por Rad L. Quando Rad $L = 0$, dizemos que L é *semissimples.*

Definição 1.1.13 *O normalizador de uma subálgebra K de L é definido por*

$$N_L(K) = \{x \in L \mid [x, K] \subset K\}.$$

É a maior subálgebra de L que contém K como ideal.

O exemplo a seguir motiva a definição de raízes de uma álgebra de Lie semissimples.

Exemplo 1.1.14 *Considere $sl_2(\mathbb{K})$ e suponha char$\mathbb{K} \neq 2$. A álgebra $sl_2(\mathbb{K})$ admite como base*

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \; y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A ação de $ad(h)$ em L é diagonalizável: os vetores próprios são precisamente os elementos da base:

$$ad(h)(x) = [h, x] = 2x, (ad\ h)(h) = 0, (ad\ h)(y) = [h, y] = -2y.$$

Então $sl_2(\mathbb{K}) = \langle h \rangle \oplus \langle x \rangle \oplus \langle y \rangle$, com $\langle h \rangle, \langle x \rangle, \langle y \rangle$ espaços próprios para a ação de h.

Definição 1.1.15 *Dizemos que $H \leq L$ é uma subálgebra de Cartan de uma álgebra de Lie L quando é uma subálgebra nilpotente e satisfaz $N_L(H) = H$. Dizemos que H é uma subálgebra toral maximal quando é uma subálgebra maximal entre as formadas por elementos x com $ad(x)$ diagonalizável.*

Se L é semissimples, as definições dadas acima são equivalentes, em parte devido ao fato que uma subálgebra toral de L é abeliana, ver Seção 8.1 em [17]. Assim, $\mathrm{ad}(H)$ é formado por elementos simultaneamente diagonalizáveis.

Podemos decompor L em espaços próprios para todos os elementos de H. Dado $\alpha \in H^*$, defina

$$L_\alpha := \{x \in L \mid \text{ para todo } h \in H \text{ tem-se que } (\mathrm{ad}\ h)(x) = \alpha(h)x\}$$

Os funcionais $\alpha \in H^*$ não nulos tais que $L_\alpha \subset L$ é não nulo são chamadas de *raízes de L em relação a H*. Observe que $H = L_0$. Chamando de Φ o conjunto das raízes, podemos escrever

$$L = H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha \right). \tag{1.5}$$

Os espaços L_α, com $\alpha \in \Phi$, são chamados de espaços-raiz e possuem as seguintes propriedades:

(i) L_α é um subespaço vetorial unidimensional.

(ii) $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$.

(iii) Se $\alpha \in \Phi$, então $-\alpha \in \Phi$.

No Exemplo 1.1.10 apresentamos a álgebra $sl_m(\mathbb{K})$ e sua base canônica. Pode-se verificar que a subálgebra H das matrizes diagonais de traço zero gerada pelos elementos $h_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1}, 1 \leq i \leq m-1$, é uma subálgebra de Cartan de $sl_m(\mathbb{K})$. Seja $D_{ij} = E_{ii} - E_{jj}$ e $\epsilon_j : H \to \mathbb{C}$ definida por $\epsilon_j(\sum_{i=1}^n x_i E_{ii}) = x_j$. Para cada par (i, j) com $1 \leq i \neq j \leq n$, sendo $h = \sum_{i=1}^n x_i E_{ii}$, temos que

$$[h, E_{ij}] = (x_i - x_j)E_{ij},$$

logo o espaço $L_{\epsilon_i-\epsilon_j}$ é não nulo, portanto, é um espaço-raiz gerado por E_{ij}. Note que isto faz sentido, uma vez que $\dim H = m-1$ e $sl_m(\mathbb{K})$ tem dimensão m^2-1, é esperado que existam m^2-m raízes.

Este é um exemplo de um *sistema de raízes*, um subconjunto de um espaço euclidiano que satisfaz boas propriedades, que pode ser visto com detalhes em [17, Capítulo 3]. Surpreendentemente, qualquer sistema de raízes é sistema de raízes de uma álgebra de Lie semissimples. Os sistemas irredutíveis de raízes caracterizam as álgebras de Lie simples.

1.1.2 Álgebras graduadas

Nesta seção apresentamos o conceito de álgebra graduada. Mais adiante definiremos as identidades graduadas, fundamentais para nosso estudo. Os conceitos aqui apresentados seguem [8].

Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e G um conjunto. Uma G-graduação Γ em V é qualquer decomposição de V como soma direta de subespaços indexados por G,

$$\Gamma\colon V = \bigoplus_{g\in G} V_g. \tag{1.6}$$

Alguns dos subespaços V_g podem ser nulos. Chamamos de *suporte de* Γ o conjunto supp $\Gamma := \{g \in G \mid L_g \neq 0\}$. Dizemos que W é um *subespaço homogêneo* se, $W = \oplus_{g\in G}(V_g \cap W)$. Os subespaços V_g são chamados de componentes homogêneas da graduação. Seja $v \in V_g$ não nulo, dizemos que v é homogêneo de grau g e denotamos por $\deg_G v = g$. Será comum nos referirmos a $\deg_G v$ como o G-grau de v.

Definição 1.1.16 *Sejam V um espaço vetorial G-graduado e W um espaço vetorial H-graduado. Uma aplicação linear $\varphi : V \to W$ é dita graduada se para qualquer $g \in G$ existe $h \in H$ tal que $\varphi(V_g) \subset W_h$.*

Note que, se $\varphi(V_g) \neq 0$, então h é unicamente determinado.

Definição 1.1.17 *Sejam V e W espaços vetoriais G-graduados. Uma aplicação linear $\varphi : V \to W$ é chamada de homomorfismo de espaços G-graduados se para todo $g \in G$ temos $\varphi(V_g) \subset W_g$.*

Seja A uma álgebra não associativa. O conceito mais amplo de graduação em uma álgebra é uma decomposição de A como soma direta de subespaços tais que o produto de dois subespaços quaisquer está contido em um terceiro subespaço. Assim, estabelecemos que

Definição 1.1.18 *Seja S um conjunto. Uma S-graduação em A é uma graduação como espaço vetorial tal que a aplicação multiplicação $A \otimes A \to A$ é graduada (Definição 1.1.16), onde $A \otimes A$ é munida da $S \times S$ graduação natural, dada por $A_{(s_1,s_2)} = A_{s_1} \otimes A_{s_2}$. Se tal graduação em A é fixada, então nos referimos a A como álgebra graduada.*

É conveniente considerarmos apenas as componentes homogêneas não nulas. Assim, assumiremos que S é o suporte da graduação.

$$\Gamma\colon A = \bigoplus_{s \in s} A_s \text{ onde } A_s \neq 0 \text{ para qualquer } s \in S. \tag{1.7}$$

Dados $s_1, s_2 \in S$ temos $A_{s_1}A_{s_2} = 0$ ou existe $s_3 \in S$ tal que $A_{s_1}A_{s_2} \subset A_{s_3}$. Assim, o suporte S é equipado com uma operação binária (não associativa) parcialmente definida $s_1 \cdot s_2 = s_3$.

Definição 1.1.19 *Dizemos que Γ, como em 1.7, é uma graduação (semi)grupo se, $(S, \cdot)$ pode ser mergulhada em um (semi)grupo G. Visualizamos S como um subconjunto de G e fazemos $A_g = 0$ para todo $g \in G \setminus S$. Assim, obtemos uma definição equivalente a Definição 1.1.18: A decomposição*

$$\Gamma\colon A = \bigoplus_{g \in G} A_g$$

é uma graduação (semi)grupo, se $A_g A_h \subseteq A_{gh}$ para todo $g, h \in G$.

Assumiremos que G é gerado por S.

Exemplo 1.1.20 *Sejam A uma álgebra e G um grupo. A decomposição $A_e = A$ e $A_g = 0$, para todo $g \in G \setminus \{e\}$, é uma G-graduação em A, chamada de trivial.*

Exemplo 1.1.21 *A álgebra de polinômios $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ admite uma $\mathbb{Z}$-graduação definida pelo grau total:*

$$A_k = span_{\mathbb{K}}\{x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \mid \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k\}$$

Também admite uma $\mathbb{Z}^n$-graduação dada pelo multigrau $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Exemplo 1.1.22 *Seja $R = M_m(\mathbb{K})$ e G um grupo arbitrário. Dada qualquer m-upla $(g_1, \ldots, g_m) \in G^m$, podemos definir uma G-graduação em R por determinar*

$$R_g = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{E_{ij} \mid g_i g_j^{-1} = g\}$$

onde E_{ij} são as matrizes elementares.

Exemplo 1.1.23 *Existe uma* $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)-$*graduação em* $R = M_2(\mathbb{K})$ *associada as matrizes de Pauli*

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix},$$

definida por

$$R_{(\bar{0},\bar{0})} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad R_{(\bar{1},\bar{0})} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\},$$
$$R_{(\bar{0},\bar{1})} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad R_{(\bar{1},\bar{1})} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Note que $R = \oplus_{g\in G} R_g$ *e* $R_g R_h \subseteq R_{ab}$*, para quaisquer* $g, h \in G$*.*

A graduação de Pauli na álgebra de Lie linear especial cujas identidades graduadas estudaremos no Capítulo 2, é uma generalização da graduação definida no exemplo anterior.

Definição 1.1.24 *Dizemos que uma graduação* Γ*, como em 1.7, é realizada como uma* G*-graduação se* G *é um (semi)grupo contendo* S *e os subespaços*

$$A_g : = \begin{cases} A_s, & se \quad g = s \in S \\ 0, & se \quad g \notin S; \end{cases}$$

formam uma G*-graduação em* A*, como na definição equivalente dada acima, e* S *gera* G*. Uma realização de* Γ *é uma* G*-graduação determinada por um (semi)grupo* G *e um mergulho* $S \hookrightarrow G$ *como acima.*

Exemplo 1.1.25 *Considere a álgebra de Witt, definida no Exemplo 1.1.9. Seja* $S = \{-1, 0, 1, \dots\}$*. A graduação*

$$\Gamma : W_1 = \bigoplus_{s\in S} L_s$$

é realizada como uma $\mathbb{Z}$*-graduação.*

Na classe das álgebras de Lie nem toda graduação Γ é realizada como na definição anterior.

Exemplo 1.1.26 (Example 1.9, [8]) *Considere a álgebra de Lie de dimensão 4* $\mathcal{L} = span\{a, u, v, w\}$*, com multiplicação dada por*

$$[a, u] = u, \quad [a, v] = w, \quad [a, w] = v,$$

e todos os demais comutadores dos elementos da base são 0. Defina uma graduação em $\mathcal{L}$ *da forma:*

$$\Gamma : \mathcal{L} = \mathcal{L}_{s_1} \oplus \mathcal{L}_{s_2} \oplus \mathcal{L}_{s_3},$$

onde $\mathcal{L}_{s_1} = span\{a, u\}$*,* $\mathcal{L}_{s_2} = span\{v\}$ *e* $\mathcal{L}_{s_3} = span\{w\}$*. Se* Γ *é realizada como uma graduação por um semigrupo, então as seguintes equações são válidas no semigrupo:* $s_1^2 = s_1, s_1 s_2 = s_3$ *e* $s_1 s_3 = s_2$ *o que resulta na contradição*

$$s_3 = s_1^2 s_2 = s_1(s_2 s_3) = s_1 s_3 = s_2.$$

É um problema em aberto determinar se qualquer graduação em uma álgebra de Lie simples sobre $\mathbb{C}$ é uma graduação por um grupo. No entanto, se assumirmos inicialmente que a graduação é por um semigrupo, então a resposta é positiva.

Proposição 1.1.27 *Seja* L *uma álgebra de Lie simples sobre um corpo qualquer. Se* G *é um semigrupo e* $L = \oplus_{g \in G} L_g$ *é uma* G*-graduação com suporte* S*, onde* G *é gerado por* S*, então* G *é um grupo abeliano.*

Demonstração. [8, Proposition 1.12, pg. 13]. □

Com este resultado, sempre que falarmos de uma graduação por um grupo em uma álgebra de Lie, o grupo será entendido como sendo abeliano.

Dada uma graduação Γ por um grupo, existe, em geral, muitos grupos G tais que Γ pode ser realizada como uma G-graduação. Uma equivalência de espaços vetoriais graduados $\varphi : V \to W$ é um isomorfismo linear tal que φ e φ^{-1} são ambas aplicações graduadas. Sejam

$$\Gamma\colon A = \bigoplus_{s \in S} A_s \quad \text{e} \quad \Gamma'\colon B = \bigoplus_{t \in T} B_t$$

duas graduações em álgebras, com suporte S e T, respectivamente.

Definição 1.1.28 *Dizemos que* Γ *e* Γ' *são equivalentes, se existe uma equivalência de álgebras graduadas* $\varphi : A \to B$*, isto é, um isomorfismo de álgebras que é também uma equivalência de espaços vetoriais graduados. Então diremos que* φ *é uma equivalência de* Γ *e* Γ'*. Esta equivalência determina uma bijeção* $\alpha : S \to T$ *tal que* $\varphi(A_s) = B_{\alpha(s)}$

Definição 1.1.29 *Dizemos que duas álgebras graduadas* $A = \oplus_{g\in G} A_g$ *e* $B = \oplus_{g\in G} B_g$ *são isomorfas, se existe um isomorfismo de álgebras* $\varphi : A \to B$ *tal que* $\varphi(A_g) \subset B_g$ *para todo* $g \in G$.

Como comentamos anteriormente, uma graduação Γ por um grupo pode ser realizada como uma G-graduação para muitos grupos G. Neste caso, existe um que se destaca dentre os demais.

Definição 1.1.30 *Seja* Γ *uma graduação em uma álgebra* A. *Suponha que* Γ *admite uma realização como uma* G_0*-graduação, para algum grupo* G_0. *Dizemos que* G_0 *é o grupo universal de* Γ *se para qualquer outra realização de* Γ *como uma* G*-graduação, existe um único homomorfismo* $G_0 \to G$ *tal que a restrição ao supp* Γ *é igual a identidade.*

Quando o grupo universal existe, ele é único a menos de isomorfismo sobre supp Γ. O denotaremos por $U(\Gamma)$. A proposição a seguir mostra que tal grupo existe e só depende das classes de equivalência de Γ.

Proposição 1.1.31 *Seja* Γ *uma graduação por um grupo em uma álgebra* A. *Então, o grupo universal* $U(\Gamma)$ *existe. Duas graduações por um grupo,* Γ *em* A *e* Γ' *em* B*, são equivalentes se, e somente se, existe um isomorfismo de álgebras* $\varphi : A \to B$ *e um isomorfismos de grupos* $\alpha : U(\Gamma) \to U(\Gamma')$ *tal que* $\varphi(A_g) = B_{\alpha(g)}$ *para todo* $g \in U(\Gamma)$.

Demonstração. [8, Proposition 1.18, pg. 15]. □

Quando apresentarmos as graduações que estudaremos nesta tese, Capítulos 2 e 3, exibiremos o grupo universal de cada uma delas.

Definição 1.1.32 *Sejam* Γ *e* Γ' *duas graduações em* V *com suportes* S *e* T*, respectivamente. Dizemos que* Γ *é um refinamento de* Γ'*, ou equivalentemente,* Γ' *é um coarsening de* Γ'*, e escrevemos* $\Gamma' \leq \Gamma$*, se para qualquer* $s \in S$ *existe* $t \in T$ *tal que* $V_s \subset V_t$. *Se, para algum* $s \in S$ *esta inclusão é estrita, então dizemos que* Γ *é um refinamento próprio de* Γ'.

As graduações que não admitem um refinamento próprio, chamadas de graduações finas, desempenham um importante papel na classificação de graduações em álgebras de Lie. A decomposição de Cartan e a graduação de Pauli na álgebra de Lie linear especial $sl_m(\mathbb{K})$ são exemplos de graduações finas. Além disso, graduações por grupos são importantes no estudo de álgebras de Lie. A decomposição de Cartan de uma álgebra de Lie semissimples, sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, é uma graduação que surge na classificação de tais álgebras.

1.2 Álgebras Livres

Inicialmente definimos a álgebra livre associativa.

Definição 1.2.1 *Seja $\mathcal{B}$ uma classe de álgebras e seja $F \in \mathcal{B}$ uma álgebra gerada por um conjunto X. A álgebra F é dita uma álgebra livre na classe $\mathcal{B}$, livremente gerada pelo conjunto X, se para qualquer álgebra $R \in \mathcal{B}$, toda aplicação $X \to R$ pode ser estendida para um homomorfismo $F \to R$. A cardinalidade $|X|$ do conjunto X é chamada de posto de F.*

Exemplo 1.2.2 *Para qualquer conjunto X, a álgebra polinomial $\mathbb{K}[X]$ é livre na classe de todas as álgebras associativas e comutativas com unidade.*

Proposição 1.2.3 *Seja $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ um conjunto infinito e enumerável de variáveis não comutativas. A álgebra $\mathbb{K}\langle X\rangle$ com base formada por todas as palavras*

$$x_{i_1} \cdots x_{i_n}, x_{i_j} \in X, n = 1, 2, \dots,$$

e multiplicação definida por

$$(x_{i_1} \cdots x_{i_m})(x_{j_1} \cdots x_{j_n}) = x_{i_1} \cdots x_{i_m} x_{j_1} \cdots x_{j_n}, \text{ onde } x_{i_k}, x_{j_l} \in X,$$

é livre na classe de todas as álgebras associativas.

Como $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é uma generalização de $\mathbb{K}[X]$, seus elementos são chamados de polinômios em variáveis não comutativas.

A fim de definir o nosso objeto principal de estudo, identidades polinomiais de uma álgebra de Lie, apresentamos a álgebra de Lie livre. Podemos caracterizá-la por meio do Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Definição 1.2.4 *Se R é uma álgebra associativa e a álgebra de Lie L é isomórfica a uma subálgebra de $R^{(-)}$, diremos que R é uma álgebra envolvente de L. A álgebra associativa $U = U(L)$ é a álgebra envolvente universal da álgebra de Lie L, se L é uma subálgebra de $U^{(-)}$ e U satisfaz a seguinte propriedade universal: Para qualquer álgebra associativa R e qualquer homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : L \to R^{(-)}$, existe um único homomorfismo de álgebras associativas $\psi : U \to R$ que estende φ, isto é, ψ é igual a φ em L.*

Teorema 1.2.5 (Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt) *Toda álgebra de Lie L possui uma única, a menos de isomorfismo, álgebra universal envolvente $U(L)$. Se L tem base $\{e_i \mid i \in I\}$ e o conjunto de índices é ordenado, então $U(L)$ tem uma base*

$$e_{i_1} \cdots e_{i_p}, i_1 \leq \cdots \leq i_p, i_k \in I, p = 0, 1, 2, \ldots.$$

Demonstração. [6, Theorem 1.3.2, pg. 11]. □

Teorema 1.2.6 (Witt) *A álgebra de Lie livre, no sentido da Definição 1.2.1, com conjunto de geradores livres X é isomorfa à subálgebra de Lie $L\langle X\rangle$ de $\mathbb{K}\langle X\rangle^{(-)}$ gerada por X; $U(L\langle X\rangle) = \mathbb{K}\langle X\rangle$.*

Demonstração. Seja R uma álgebra associativa qualquer e seja $\phi : L\langle X\rangle \to R^{(-)}$ um homomorfismo de álgebras de Lie. Pela propriedade universal da álgebra livre, a aplicação $\phi_0 : X \to R$ definida por $\phi_0(x) = \phi(x), x \in X$, induz um único homomorfismo $\varphi : \mathbb{K}\langle X\rangle \to R$. Como $\phi(x) = \varphi(x)$, temos que a restrição de φ em $L\langle X\rangle$ é igual a ϕ. Logo $U(L\langle X\rangle) = \mathbb{K}\langle X\rangle$. Se G é uma álgebra de Lie e R sua álgebra envolvente, então qualquer aplicação $X \to G \subset R$ induz um homomorfismo $\mathbb{K}\langle X\rangle \to R$. A restrição a $L\langle X\rangle$ é um homomorfismo de $L\langle X\rangle$ sobre $R^{(-)}$ o qual envia os geradores de $L\langle X\rangle$ para G. Portanto, a imagem de $L\langle X\rangle$ está em G e isso nos diz que $L\langle X\rangle$ é livre na classe de todas as álgebras de Lie. □

Os elementos de $L\langle X\rangle$ são chamados de polinômios de Lie em X, qualquer comutador de elementos de X é um monômio de Lie. Diferente do que ocorre no caso associativo, monômios de Lie podem ser linearmente dependentes, por exemplo, segue da identidade de Jacobi que

$$[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] = [x_1, x_2, x_3, x_4] - [x_2, x_1, x_3, x_4].$$

Sejam G um grupo abeliano, $\{X_g\}_{g\in G}$ uma família de conjuntos disjuntos $X_g = \{x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, \ldots\}$ e $X_G = \cup_{g\in G} X_g$. Seja $\mathbb{K}\langle X_G\rangle$ a álgebra associativa livre com a G-graduação na qual o monômio $x_{i_1}^{(g_1)} \cdots x_{i_n}^{(g_n)}$ é homogêneo de grau $g_1 \cdots g_n$. Uma extensão do Teorema 1.2.6 mostra que a subálgebra $L\langle X_G\rangle$ de $\mathbb{K}\langle X_G\rangle^{(-)}$ gerada por X_G é a álgebra de Lie livre G-graduada, livremente gerada pelo conjunto X_G. A subálgebra $L\langle X_G\rangle$ é um subespaço homogêneo de $\mathbb{K}\langle X_G\rangle$ e a correspondente decomposição é uma G-graduação em $L\langle X_G\rangle$. Os elementos de $L\langle X_G\rangle$ são chamados de polinômios G-graduados de Lie (ou simplesmente polinômios). Os comutadores normados à esquerda de elementos de uma álgebra de Lie G-graduada são definidos como no caso ordinário (não graduado).

1.3 Identidades Graduadas, T_G-ideais e Variedades

Nesta seção introduzimos o conceito de identidades polinomiais graduadas em $L\langle X_G\rangle$.

Definição 1.3.1 *Sejam G um grupo e $L = \oplus_{g\in G} L_g$ uma álgebra de Lie G-graduada. Uma substituição admissível para o polinômio $f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_n^{(g_n)})$ em L é uma n-upla $(l_1, \ldots, l_n)$ de elementos de L tal que $l_i \in L_{g_i}$, para $i = 1, \ldots, n$.*

Definição 1.3.2 *Sejam G um grupo e $L = \oplus_{g\in G} L_g$ uma álgebra de Lie G-graduada. Um polinômio não nulo $f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_n^{(g_n)}) \in L\langle X_G\rangle$ é uma identidade polinomial graduada de L se, para toda substituição admissível $(l_1, \ldots, l_n)$ tem-se que $f(l_1, \ldots, l_n) = 0$.*

Se o grupo G e a graduação $L = \oplus_{g\in G} L_g$ estiverem claras no contexto, diremos simplesmente que $f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_n^{(g_n)})$ é uma identidade para L.

Em particular, se a graduação é trivial, temos a noção de identidade polinomial ordinária.

Definição 1.3.3 *Um polinômio não nulo $f(x_1, \ldots, x_n) \in L\langle X\rangle$ é dita uma identidade de uma álgebra de Lie L, se $f(l_1, \ldots, l_n) = 0$ para todo $l_1, \ldots, l_n \in L$.*

O conjunto das identidades polinomiais G-graduadas de L, que denotaremos por $T_G(L)$, é um T_G-ideal, isto é, um ideal invariante por endomorfismos de $L\langle X_G\rangle$ como álgebra graduada (Definição 1.1.17). Se a graduação é a trivial, denotamos $T_G(L)$ simplesmente por $T(L)$ e o chamamos de T-ideal de L.

A intersecção de uma família de T_G-ideais de $L\langle X_G\rangle$ é um T_G-ideal. Dado um conjunto $S \subseteq L\langle X_G\rangle$, denotamos por $\langle S\rangle_G$, a intersecção de todos os T_G-ideais de $L\langle X_G\rangle$ que contêm S, chamado de T_G-ideal gerado por S e nos referimos a S como a base deste T_G-ideal.

Duas álgebras de Lie G-graduadas distintas (não isomorfas) podem possuir o mesmo T_G-ideal de $L\langle X_G\rangle$. Isto motiva o conceito de variedade de álgebras.

Definição 1.3.4 *Seja $S = \{f_i : i \in I\}$ um subconjunto de $L\langle X_G\rangle$. A classe $\mathcal{V}$ das álgebras de Lie que satisfazem todas as identidades G-graduadas em S é chamada de variedade de álgebras de Lie definida pelo conjunto de identidades S. Uma variedade $\mathcal{U}$ é chamada de subvariedade de $\mathcal{V}$ se $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ como classes. Seja $\mathcal{U}$ uma classe de álgebras de Lie, então definimos $\mathcal{V} = var^G(\mathcal{U})$, a variedade gerada por $\mathcal{U}$, como sendo a menor variedade de álgebras de Lie sobre $\mathbb{K}$ que contém $\mathcal{U}$.*

No caso não graduado, algumas das variedade de álgebras de Lie mais importantes são as seguintes: A variedade U das álgebras de Lie abelianas que satisfazem a identidade $[x, y] = 0$; a variedade $\mathfrak{N}_c$ das álgebras de Lie nilpotentes de classe c, nas quais qualquer produto de comprimento maior que c é igual a zero (c é chamado índice de nilpotência); A variedade $\mathfrak{S}_l$ das álgebras de Lie solúveis de comprimento $\leq l$, na qual o l-ésimo termo da série derivada é zero, em não mais do que l passos.

O conjunto das identidades satisfeitas por todas as álgebras de uma variedade $\mathcal{V}$ é também um T_G-ideal de $L\langle X_G\rangle$, que denotamos por $T_G(\mathcal{V})$. Se $S \subset L\langle X_G\rangle$ define uma variedade $\mathcal{V}$, dizemos que S é uma base das identidades graduadas de $\mathcal{V}$. Os elementos de $T_G(\mathcal{V})$ são chamados de consequências das identidades graduadas da base S. Note que, se $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ é uma subvariedade, então $T_G(\mathcal{V}) \subset T_G(\mathcal{U})$.

Seja $\mathcal{V}$ uma variedade não trivial e F uma álgebra de $\mathcal{V}$ gerada por conjunto Y. Esta álgebra é chamada *álgebra relativamente livre na variedade $\mathcal{V}$ com conjunto de geradores livres* Y se, toda aplicação de Y em alguma álgebra arbitrária A de $\mathcal{V}$ pode ser estendida, de forma única, a um homomorfismo da álgebra F na álgebra A.

Proposição 1.3.5 *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade não trivial de álgebras de Lie cuja base é o conjunto $I \subseteq L\langle X_G\rangle$. Dado um conjunto Y, seja $L\langle Y\rangle$ a álgebra livre livremente gerada por Y. Então, $L(Y, \mathcal{V}) = L\langle Y\rangle / T(L\langle Y\rangle)$ é a álgebra relativamente livre na variedade $\mathcal{V}$ com conjunto de geradores livres Y. Se Z é um conjunto não vazio, $L(Y, \mathcal{V}) \cong L(Z, \mathcal{V})$ se, e somente se, Y e Z tem a mesma cardinalidade.*

Demonstração. Veja[2, Seção 4.2.1]. □

1.4 Identidades Multihomogêneas e Multilineares

O estudo das identidades de uma álgebra depende do corpo base $\mathbb{K}$. Quando este é infinito, limitamo-nos a estudar os polinômios multihomogêneos ou multilineares, dependendo da característica de $\mathbb{K}$.

Dado um monômio de Lie M nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, denotamos por $\deg_{x_i} M$ o grau de x_i em M, isto é, o número de vezes que x_i aparece em M. A n-upla $(\deg_{x_i} M, \ldots, \deg_{x_n} M)$ é chamada de *multigrau* de M.

Definição 1.4.1 *Um polinômio não nulo $f(x_1, \ldots, x_n) \in L\langle X\rangle$ é multihomogêneo, se todos os seus monômios possuem mesmo multigrau. Em particular, $f(x_1, \ldots, x_n)$ é multilinear, se o multigrau de todos seus monômios é $(1, \ldots, 1)$.*

Os mesmo conceitos se aplicam a um polinômio não nulo $f(x_1^{(g_1)}, \dots, x_n^{(g_n)}) \in L\langle X_G \rangle$.

Os resultados a seguir podem ser naturalmente estendidos para o caso graduado.

Teorema 1.4.2 *Sobre um corpo de característica zero, toda identidade de Lie é equivalente a uma família de identidades multilineares. Em particular, qualquer T-ideal de $L\langle X \rangle$ é gerado pelos polinômios multilineares que ele contém.*

Demonstração. [2, Theorem 5, Section 4.2]. □

A proposição a seguir caracteriza a estrutura da álgebra livre $L\langle X \rangle$.

Proposição 1.4.3 *Seja $f(x_1, \dots, x_n)$ um polinômio de Lie homogêneo de grau k. Então,*

i) *f é uma combinação linear de monômios normados à esquerda $[x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}]$;*

ii) *Se f é multilinear, $k = n$, então f é uma combinação linear dos monômios*

$$[x_n, x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n-1)}], \ \sigma \in S_{n-1};$$

iii) *Os monômios descritos no item anterior são linearmente independentes sobre $\mathbb{K}$.*

Demonstração. [2, Section 4]. □

1.5 Codimensões e Expoente Graduado

Seja $L\langle X_G \rangle$ a álgebra livre G-graduada gerada pelo conjunto $X_G = \cup_{g\in G} X_g$ com $X_g = \{x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, \dots\}$ para cada $g \in G$. Seja $L = \oplus_{g\in G} L_g$ uma PI-álgebra de Lie G-graduada.

Vimos na seção anterior que sobre um corpo de característica zero $T_G(L)$ é determinado por seus polinômios multilineares. Assim, para $n \geq 1$, consideramos os espaço dos polinômios graduados multilineares em n indeterminadas

$$P_n^G = \operatorname{span}_{\mathbb{K}} \left\{ \left[x_{\sigma(1)}^{(g_{\sigma(1)})}, \cdots, x_{\sigma(n)}^{(g_{\sigma(n)})} \right] \mid \sigma \in S_n, g_1 \dots, g_n \in G \right\}$$

e $P_n^G \cap T_G(L)$ é o conjunto das identidades graduadas multilineares de grau n nas primeiras n variáveis.

Definição 1.5.1 *A n-ésima codimensão graduada de $L = \oplus_{g\in G} L_g$ é*

$$c_n^G(L) = dim\frac{P_n^G}{P_n^G \cap T_G(L)}.$$

Se $\mathcal{V}$ é a variedade gerada por L, definimos $c_n^G(\mathcal{V}) = c_n^G(L)$. Quando a graduação é a trivial, escrevemos P_n e c_n para denotar o espaço dos polinômios multilineares e as codimensões ordinárias, respectivamente.

É conhecido que, para qualquer álgebra G-graduada A, $c_n(A) \leq c_n^G(A)$ e se A é uma PI-álgebra G-graduada, então $c_n^G(A) \leq |G|^n c_n(A)$ ([14, Section 10.5]).

Se $f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_n^{(g_n)}) \in L\langle X_G\rangle$ é um polinômio multilinear, segundo a Proposição 1.4.3, podemos escrevê-lo como

$$f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_n^{(g_n)}) = \sum_{\sigma\in S_{n-1}} \alpha_\sigma \left[x_n^{(g_n)}, x_{\sigma(1)}^{(g_{\sigma(1)})}, \cdots, x_{\sigma(n-1)}^{(g_{\sigma(n-1)})}\right].$$

Fixada uma n-upla $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, todos os polinômios multilineares nas variáveis $x_1^{(g_1)}, \ldots, x_n^{(g_n)}$ formam o subespaço

$$P_n^{\mathbf{g}} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\left\{\left[x_n^{(g_n)}, x_{\sigma(1)}^{(g_{\sigma(1)})}, \cdots, x_{\sigma(n-1)}^{(g_{\sigma(n-1)})}\right] \mid \sigma \in S_{n-1}\right\}.$$

Obtemos uma decomposição conveniente do espaço dos polinômios graduados multilineares

$$P_n^G = \bigoplus_{\mathbf{g}\in G^n} P_n^{\mathbf{g}}$$

Tal decomposição é herdada pelo quociente

$$\frac{P_n^G}{P_n^G \cap T_G(L)} \cong \bigoplus_{\mathbf{g}\in \mathbf{G^n}} \frac{P_n^{\mathbf{g}}}{P_n^{\mathbf{g}} \cap T_G(L)}. \tag{1.8}$$

A fim de simplificar a notação, omitimos o segundo índice nas indeterminadas dos polinômios em $P_n^{\mathbf{g}}$ e escrevemos x_i em vez de $x_i^{(g_i)}$.

Se a sequência $\{c_n^G(L)\}_{n\geq 1}$ é exponencialmente limitada, consideramos a sequência limitada $\sqrt[n]{c_n^G(L)}$ com seu limite superior e inferior

$$\underline{\exp}^G(L) = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^G(L)} \quad \text{and} \quad \overline{\exp}^G(L) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^G(L)}$$

chamados de *PI-expoente G-graduado superior* e PI-expoente G-graduado inferior. Se $\underline{\exp}^G(L) = \overline{\exp}^G(L)$, temos o limite usual $\exp^G(L) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^G(L)}$, o qual chamamos de *PI-expoente G-graduado de L*. Quando a graduação é trivial, omitimos o termo G da notação e a denotação G-graduado das definições. A existência do PI-expoente para álgebras associativas foi conjecturado por S. A. Amitsur e provada por M. Zaicev e A. Giambruno [14]. No caso de álgebras de Lie de dimensão finita com graduação por um grupo, a existência do expoente graduado foi provada por A. Gordienko em [15]: Se o corpo base $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado de característica zero, então $\exp^G(L) = \dim L$ se, e somente se, L é graduada simples, ver [15, Teorema 18].

Concluímos este capítulo definindo o expoente $\exp^G \mathcal{V}$ de uma variedade $\mathcal{V}$ de álgebras de Lie graduadas como sendo o expoente da álgebra $L\langle X_G\rangle/T_G(\mathcal{V})$, onde $T_G(\mathcal{V}) = \cap_{L\in\mathcal{V}} T_G(L)$ e a n-ésima codimensão da variedade $\mathcal{V}$, denotada por $c_n^G(\mathcal{V})$, é a n-ésima codimensão de $L\langle X_G\rangle/T_G(\mathcal{V})$.

Capítulo 2

Identidades Graduadas para $sl_p(\mathbb{K})$ com a Graduação de Pauli

Como mencionamos na Introdução, as identidades graduadas de $sl_2(\mathbb{K})$ já são conhecidas. Para o caso da graduação de Pauli em $sl_2(\mathbb{K})$, com $\mathbb{K}$ infinito de característica diferente de 2, as identidades graduadas são descritas em [22, Theorem 18] como consequências da variável de grau neutro. Já em [13, Theorem 4] é demonstrado que em característica zero, o ideal das identidades graduadas de $sl_2(\mathbb{K})$ com a graduação de Pauli tem a propriedade de Specht.

Neste capítulo nosso principal objetivo é abordar estes mesmos problemas para a álgebra de matrizes de traço nulo de ordem p prima.

2.1 Preliminares

Iniciamos com esta seção preliminar, onde definiremos noções que serão utilizadas no estudo de ambas as graduações de $sl_m(\mathbb{K})$ tratadas nesta tese.Para evitar repetições, doravante quando mencionarmos um grupo G, o mesmo será abeliano como estabelecido no Capítulo 1.

Definição 2.1.1 *Seja $L = \oplus_{g\in G} L_g$ uma graduação por um grupo G na álgebra de Lie L. Dizemos que a n-upla $\mathbf{g}$ é boa se $P_n^{\mathbf{g}} \not\subset T_G(L)$, caso contrário, dizemos que $\mathbf{g}$ é ruim. Além disso, uma n-upla $\mathbf{g} \in G^n$ é dita padrão se o monômio $[x_1^{(g_1)}, \cdots, x_n^{(g_n)}]$ não é identidade graduada para L.*

Definição 2.1.2 *Sejam f e g monômios em $L\langle X_G\rangle \setminus T_G(L)$ e $I \subset T_G(L)$ um T_G-ideal de $L\langle X_G\rangle$. Dizemos que f e g são equivalentes, denotamos isto por $f \sim_I g$, se existe um escalar λ tal que $f - \lambda g$ pertence a I.*

Note que o escalar λ é diferente de 0 e que $\sim_I$ é uma relação de equivalência. Quando I estiver claro no contexto, o omitiremos na notação.

Antes de introduzirmos a graduação de Pauli, estabelecemos alguns resultados que são válidos em um contexto mais geral e necessários ao desenvolvimento do principal resultado deste capítulo, além de nos permitirem calcular explicitamente as codimensões graduadas.

Recordamos que uma álgebra de Lie de dimensão finita, sobre um corpo de característica zero, é central simples se, e somente se, seu expoente for igual a dimensão (ver [11, Teorema 8.1]). Na última seção do Capítulo 1 estabelecemos que para uma álgebra de Lie L com uma graduação por um grupo finito G, temos que $c_n(L) \leq c_n^G(L)$. Se $\dim L_g \leq 1$ para cada $g \in G$, vamos provar que

$$c_n^G(L) \leq (\dim\, L)^n. \tag{2.1}$$

Portanto, uma álgebra de Lie central simples L com uma G-graduação tal que $\dim L_g \leq 1$, satisfaz $\exp^G\, L = \dim\, L$, mesmo sem a hipótese de $\mathbb{K}$ ser algebricamente fechado. Para provarmos a desigualdade (2.1) e os principais resultados deste trabalho, faremos uso da noção de n-uplas boas (ver Definição 2.1.1), em relação à graduação em L. Se $\dim\, L_g \leq 1$ para cada $g \in G$, dados $f, f' \in P_n^{\mathbf{g}}$, com $f \notin T_G(L)$, existe um único escalar $\lambda_{f,f'}$ tal que $f' - \lambda_{f,f'} f \in T_G(L)$. Concluímos que

$$\dim\left(\frac{P_n^{\mathbf{g}}}{P_n^{\mathbf{g}} \cap T_G(L)}\right) = 0 \text{ ou } \dim\,\left(\frac{P_n^{\mathbf{g}}}{P_n^{\mathbf{g}} \cap T_G(L)}\right) = 1,$$

onde o caso unidimensional corresponde a n-upla $\mathbf{g}$ ser boa. Segue-se da decomposição (1.8) que a n-ésima codimensão graduada $c_n^G(L)$ equivale ao número de n-uplas boas em G^n. É claro que uma n-upla $\mathbf{g}$ boa pertence ao subconjunto $(\mathrm{supp}\ L)^n$, o qual possui $(\dim\ L)^n$ elementos. Portanto, a desigualdade (2.1) é válida. Resumimos esse comentário na observação a seguir.

Observação 2.1.3 *Seja $L = \oplus_{g\in G} L_g$ uma álgebra de Lie com uma graduação por um grupo G. Se $\dim\, L_g \leq 1$ para cada $g \in G$, então $c_n^G(L)$ equivale ao número de n-uplas boas em G^n. Se L é uma álgebra de Lie central simples, então o expoente graduado de L é igual a $\dim L$.*

Dado $g \in G$, denotamos por $C(g)$ o conjunto $\{h \in G \mid [L_g, L_h] = 0\}$. Na próxima proposição caracterizamos as n-uplas boas quando $\mathrm{supp}\ L = G \setminus \{e\}$, $[L_g, L_h] = L_{gh}$ sempre que $g, h \in G \setminus \{e\}$, $h \notin C(g)$ e $C(g) = \langle g\rangle$ para cada $g \neq e$.

Observação 2.1.4 *Seja L uma álgebra de Lie com uma G-graduação tal que* $\text{supp } L = G \setminus \{e\}$. *Se $C(g) = \langle g \rangle$ para todo $g \neq e$, então para quaisquer $g, h \in G \setminus \{e\}$ as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $[L_g, L_h] = 0$;

(ii) $h \in \langle g \rangle$;

(iii) $\langle h \rangle = \langle g \rangle$.

Proposição 2.1.5 *Seja L uma álgebra de Lie com uma G-graduação tal que* $\text{supp } L = G \setminus \{e\}$, $[L_g, L_h] = L_{gh}$ *sempre que $h \notin C(g)$ e $C(g) = \langle g \rangle$ para cada $g \neq e$. Uma n-upla $\mathbf{g}$ em $(G \setminus \{e\})^n$ tal que $g_1 \cdots g_n \neq e$ é ruim se, e somente se, $[L_{g_i}, L_{g_j}] = 0$ para cada $1 \leq i, j \leq n$.*

Demonstração. Se $[L_{g_i}, L_{g_j}] = 0$ para cada $1 \leq i, j \leq n$, então é claro que $\mathbf{g}$ é ruim. Se existe i tal que $[L_{g_i}, L_{g_j}] = 0$ para todo $1 \leq j \leq n$, então a Observação 2.1.4 implica que $[L_{g_i}, L_{g_j}] = 0$ para cada $1 \leq i, j \leq n$. Sendo assim, é suficiente demonstrar que: se para cada i existe j de tal modo que $[L_{g_i}, L_{g_j}] \neq 0$, então $\mathbf{g}$ é boa. Provamos isto por indução sobre n. Isto é claro para $n = 2$. Seja $g = g_1 \cdots g_n$, o qual por hipótese é diferente do elemento neutro. Se $g_i \in \langle g \rangle$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, a Observação 2.1.4 implica que $\langle g_i \rangle = \langle g \rangle$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, logo, $[L_{g_i}, L_{g_j}] = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Consequentemente, existe $1 \leq k \leq n$ tal que $g_k \notin \langle g \rangle$. Assumimos, sem perda de generalidade, que $k = n$. Neste caso, $g_1 \cdots g_{n-1} = g g_n^{-1} \neq e$. Se para algum $i \neq n$ temos $[L_{g_i}, L_{g_j}] = 0$ sempre que $j \neq n$, então $\langle g_i \rangle = \langle g_j \rangle$ quando $i, j \neq n$. Então, segue da nossa hipótese e da Observação 2.1.4 que $[L_{g_n}, L_{g_1}, \cdots, L_{g_{n-1}}] \neq 0$, consequentemente a n-upla $\mathbf{g}$ é boa. Agora, assumimos que para cada $i \neq n$ existe $j \neq n$ tal que $[L_{g_i}, L_{g_j}] \neq 0$. Note que nestas condições a hipótese de indução se aplica. Portanto, seja $\sigma \in S_{n-1}$ tal que $[L_{g_{\sigma(1)}}, \cdots, L_{g_{\sigma(n-1)}}] \neq 0$. Como $g_n \notin \langle g \rangle$, temos $[L_{g g_n^{-1}}, L_{g_n}] \neq 0$. Logo, $[[L_{g_{\sigma(1)}}, \cdots, L_{g_{\sigma(n-1)}}], L_{g_n}] \neq 0$, e isto mostra que $\mathbf{g}$ é boa. $\square$

2.2 Graduação de Pauli em $sl_m(\mathbb{K})$

Se A é uma álgebra associativa com uma graduação por um grupo abeliano, então a mesma decomposição é uma graduação em $A^{(-)}$. Em particular, podemos obter uma graduação na álgebra de Lie $M_m(\mathbb{K})^{(-)}$ a partir da graduação em $M_m(\mathbb{K})$.

Denote por R a álgebra associativa $M_m(\mathbb{K})$. Assuma $m \geq 2$ e que $\mathbb{K}$ contém uma m-ésima raiz primitiva da unidade ε. Considere as seguintes matrizes que generalizam $-\sigma_3$ e σ_1 no Exemplo 1.1.23:

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon^{m-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon^{m-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que A e B satisfazem as relações $AB = \varepsilon BA$ e $A^m = B^m = I_m$, onde I_m é a matriz identidade $m \times m$. Afirmamos que as matrizes A^iB^j, $1 \leq i, j \leq m$, são linearmente independentes sobre $\mathbb{K}$. De fato, para $1 \leq j \leq m$, denote por R_j o subespaço de R gerado pelas matrizes B^j, $AB^j, \ldots, A^{m-1}B^j$. Como

$$B^j = \begin{pmatrix} 0 & I_{m-j} \\ I_j & 0 \end{pmatrix},$$

temos que $R_j \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{E_{1,j+1}, \ldots, E_{m-j,m}, E_{m-j+1,1}, \ldots, E_{mj}\}$. Logo, a soma dos subespaços R_j é uma soma direta. É suficiente demonstrar que B^j, $AB^j, \ldots, A^{k-1}B^j$ formam um conjunto linearmente independente. Para isso, tomamos indeterminadas $z_1, \ldots, z_m$. Observe que a equação $z_1A + z_2A^2 + \cdots + z_mA^m = 0$ fornece um sistema de m equações lineares

$$(z_1 \cdots z_m) \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & 1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 0, \text{ com } \alpha_1 = \varepsilon^{m-1}, \alpha_2 = \varepsilon^{m-2}, \ldots, \alpha_m = 1,$$

cujo determinante é igual (ou simétrico) a um determinante de Vandermonde não-nulo, já que ε é uma m-ésima raiz primitiva da unidade. Segue-se que para quaisquer escalares (não todos nulos) $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, a matriz $\lambda_1A + \lambda_2A^2 + \cdots + \lambda_mA^m$ é não-nula. Como B é invertível, temos $\lambda_1AB^j + \cdots + \lambda_mA^mB^j \neq 0$. Portanto, como o conjunto das matrizes A^iB^j, $1 \leq i, j \leq m$, possui m^2 elementos concluímos que é uma base para R. A igualdade

$$[A^iB^j, A^rB^s] = (\varepsilon^{-rj} - \varepsilon^{-is})A^{i+r}B^{j+s}, \tag{2.2}$$

implica que a decomposição

$$R = \bigoplus_{(\bar{i},\bar{j}) \in \mathbb{Z}_m^2} R_{(\bar{i},\bar{j})}, \text{ com } R_{(\bar{i},\bar{j})} = \mathbb{K}A^iB^j$$

é uma $(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m)$-graduação em $M_m(\mathbb{K})^{(-)}$, denominada graduação de Pauli. Seja $L = sl_m(\mathbb{K})$. Se $A^iB^j \neq I$, então $A^iB^j \in L$, desse modo

$$L = \bigoplus_{(\bar{i},\bar{j}) \in \mathbb{Z}_m^2} L_{(\bar{i},\bar{j})}, \tag{2.3}$$

onde $L_{(\bar{0},\bar{0})} = 0$ e $L_{(\bar{i},\bar{j})} = \mathbb{K}A^iB^j$ se $(\bar{i},\bar{j}) \neq (\bar{0},\bar{0})$, é a $(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m)$-graduação induzida em L, a qual também chamamos de graduação de Pauli.

Como $e = (\bar{0},\bar{0})$ não pertence ao suporte da graduação de $L = sl_m(\mathbb{K})$, temos que

$$x_1^{(e)} \tag{2.4}$$

é uma identidade graduada para L com a graduação de Pauli.

Recorde o conjunto $C(g)$ definido na seção inicial. Os polinômios

$$[x_1^{(g)}, x_2^{(h)}], \text{onde } h \in C(g) \text{ e os elementos } g, h, gh \text{ são diferentes de } e, \tag{2.5}$$

são identidades graduadas para L com a graduação de Pauli.

Uma vez que $\dim L_g \leq 1$ para todo $g \in G$, para quaisquer $g, h, k \in G$ tais que $[x_1^{(g)}, x_2^{(h)}, x_3^{(k)}] \notin T_G(L)$, existe um único escalar $\lambda_{g,h,k}$ tal que

$$[x_1^{(g)}, x_3^{(k)}, x_2^{(h)}] - \lambda_{g,h,k}[x_1^{(g)}, x_2^{(h)}, x_3^{(k)}], \tag{2.6}$$

é uma identidade graduada para L.

Além disso, o fato que $\dim L_g \leq 1$ para todo $g \in G$, resulta em

$$[L_{(\bar{r},\bar{s})}, L_{(\bar{i},\bar{j})}] = \text{span}_{\mathbb{K}}\{[A^rB^s, A^iB^j]\} \text{ para quaisquer } (\bar{r},\bar{s}), (\bar{i},\bar{j}) \in \mathbb{Z}_m^2.$$

Assim, segue da relação (2.2) que $(\bar{r},\bar{s}) \in C((\bar{i},\bar{j}))$ se, e somente se,

$$i \cdot s \equiv r \cdot j \mod m. \tag{2.7}$$

Disto concluímos que $C(g)$ é um subgrupo para cada $g \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$. A igualdade $C(g) = \langle g \rangle$ é válida para todo $g \neq (\bar{0},\bar{0})$ se, e somente se, m for um número primo. De fato, dados $h = (\bar{r},\bar{s})$ e $g = (\bar{i},\bar{j})$, a relação 2.7 traduz -se em

$$det \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} \\ \bar{r} & \bar{s} \end{pmatrix} = 0.$$

Supondo m primo, podemos visualizar $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_m$. Portanto, $h \in C(g)$ se, e somente se, os elementos h, g são linearmente dependentes sobre $\mathbb{Z}_m$, assim $C(g) = \langle g \rangle$ para todo $g \neq (\bar{0},\bar{0})$. Porém, o mesmo não ocorre quando m não é primo: sejam $m = a \cdot b$ e $g = (\overline{a}, \overline{0}) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$. Note que $h = (\overline{r}, \overline{s}) \in C(g)$ se, e só se, $\overline{as} = \overline{0} \Rightarrow \overline{s} = \overline{0}$ ou $\overline{s} = \overline{b}$. Portanto,

$$C(g) = \{e, (\overline{1}, \overline{0}), \ldots, (\overline{m-1}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{b}), \ldots, (\overline{m-1}, \overline{b})\} \supset \langle (\overline{a}, \overline{0}) \rangle.$$

Doravante, denotamos por L a álgebra $sl_p(\mathbb{K})$ com a graduação de Pauli pelo grupo $G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, onde p é um número primo. Visualizamos $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_p$, de modo que a igualdade $[L_g, L_h] = 0$ é válida se, e somente se, $g, h \in \mathbb{Z}_p^2$ são elementos linearmente dependentes. Diante disso, a Proposição 2.1.5 nos permite calcular as codimensões graduadas de L.

Lema 2.2.1 *Seja G um grupo finito de ordem $d+1$. O número de n-uplas $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ em G^n, com $g_i \neq e$ para cada i, tais que $g_1 \cdots g_n \neq e$ é igual a $\frac{d^{n+1} + (-1)^{n-1} d}{d+1}$.*

Demonstração. Denote por $\mathfrak{S}_n$ o conjunto de tais n-uplas e $a_n = \mid \mathfrak{S}_n \mid$. Então $d^n - a_n$ é o número de n-uplas $(h_1, \ldots, h_n) \in G^n$, com $h_i \neq e$ para cada i, tais que $h_1 \cdots h_n = e$. Para $n > 1$, defina

$$\begin{array}{rcl} \Psi : (G \setminus \{e\})^n \setminus \mathfrak{S}_n & \to & \mathfrak{S}_{n-1} \\ (h_1, \ldots, h_n) & \mapsto & (h_1, \ldots, h_{n-1}) \end{array}$$

A unicidade do elemento inverso faz com que Ψ seja uma bijeção. Sendo assim, para $n > 1$ temos $d^n - a_n = a_{n-1}$. Além disso, é claro que $a_1 = d$. Segue-se por indução em n que $a_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} d^i$, e isto implica a fórmula dada. $\square$

Corolário 2.2.2 *A n-ésima codimensão graduada de L é*

$$c_n^G(L) = \frac{(p^2-1)^{n+1} + (-1)^{n-1}(p^2-1)}{p^2} - (p+1) \cdot \left(\frac{(p-1)^{n+1} + (-1)^{n-1}(p-1)}{p} \right).$$

Demonstração. Segundo a Proposição 2.1.5, uma n-upla $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ é ruim se satisfaz uma das seguintes condições:

(1) Existe i tal que $g_i = e$;

(2) $g_i \neq e$ para cada i e $g_1 \cdots g_n = e$;

(3) Existe $g \in G \setminus \{e\}$ e $(h_1, \ldots, h_n) \in (\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})^n$, com $h_1 + \cdots + h_n \neq 0$, tais que $g_i = h_i \cdot g$ para $i = 1, \ldots, n$, onde $\cdot$ denota a multiplicação por escalar em $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

O número de n-uplas que satisfazem (1), (2) e (3) são

$$p^{2n} - (p^2-1)^n,$$

$$(p^2-1)^n - \frac{(p^2-1)^{n+1} + (-1)^{n-1}(p^2-1)}{p^2},$$

e

$$(p+1)\cdot\left(\frac{(p-1)^{n+1} + (-1)^{n-1}(p-1)}{p}\right),$$

respectivamente. Para o cálculo de n-uplas que satisfazem (2) e (3), usamos o Lema 2.2.1 e o fato que em $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ o número de subespaços unidimensionais é $p+1$. $\square$

O objetivo principal deste capítulo é exibir uma base finita para $T_G(L)$. A proposição a seguir é válida em um contexto mais geral e necessária para alcançarmos nosso objetivo.

Proposição 2.2.3 *Seja L uma álgebra de Lie com uma G-graduação tal que,* supp $L = G\setminus\{e\}$, $[L_g, L_h] = L_{gh}$ *quando $h \notin C(g)$, para $g,h \in$ supp L. Se um monômio multilinear M é uma identidade para L, então é consequência das identidades (2.4) e (2.5).*

Demonstração. A prova é por indução no comprimento do monômio e o caso em que $M = x^{(g)}$ é válido, já que necessariamente teríamos $g = e$. Supondo comprimento de M maior que um, escreva $M = [M_1, M_2]$. Se M_1 ou M_2 estão em $T_G(L)$, o resultado segue da hipótese de indução. Caso contrário, sejam $\deg_G M_1 = h_1$ e $\deg_G M_2 = h_2$, com $h_1, h_2 \in$ supp L. Como $M \in T_G(L)$, temos que $[L_{h_1}, L_{h_2}] = 0$. Se $h_1h_2 \notin$ supp L, então M é consequência da identidade $x_1^{(h_1h_2)}$ em (2.4). Caso isto não ocorra, M é consequência da identidade $[x_1^{(h_1)}, x_2^{(h_2)}]$ em (2.5). $\square$

No exemplo a seguir exibimos uma identidade graduada para L que não é consequência das identidades em (2.4), (2.5) e (2.6).

Exemplo 2.2.4 *Seja $p = 5$ e $\mathbf{g} = ((\bar{1},\bar{0}), (\bar{3},\bar{3}), (\bar{0},\bar{1}), (\bar{2},\bar{4}))$. Como estabelecido na Seção 1.5, escreveremos x_i ao em vez de $x_i^{(g_i)}$. Por meio de fáceis cálculos, vemos que os monômios $[x_4, x_1, x_2, x_3]$ e $[x_4, x_3, x_2, x_1]$ não são identidades para L. Note que $g_4g_3 \in \langle g_1\rangle$ e $g_4g_2 \in \langle g_3\rangle$. Isto faz com que os monômios $[x_4, x_2, x_3, x_1]$ e $[x_4, x_3, x_1, x_2]$ sejam identidades para L e com isso, não é possível mostrar que $[x_4, x_1, x_2, x_3] \sim_J [x_4, x_3, x_2, x_1]$ usando apenas a identidade de Jacobi.*

A seguir descrevemos as identidades de tamanho 4 que irão compor a base que exibimos para as identidades graduadas de L no resultado principal deste capítulo.

Seja $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_4)$ padrão tal que $\langle g_1 \rangle \neq \langle g_3 \rangle$ e satisfaz:

(i) $g_4 g_1 \in \langle g_2 g_3 \rangle$;

(ii) $g_4 g_3 \in \langle g_1 \rangle$;

(iii) $g_4 \in \langle g_1 g_2 \rangle$;

(iv) $g_4 g_2 \in \langle g_3 \rangle$.

Observe que $[x_4, x_3, x_2, x_1] \notin T_G(L)$, pois supondo o contrário, pelo menos uma das seguintes situações ocorre: $\langle g_4 \rangle = \langle g_3 \rangle$ (que pelo item (ii) implicaria $\langle g_1 \rangle = \langle g_3 \rangle$), $g_4 g_3 \in \langle g_2 \rangle$ (pelo item (ii) teríamos $\langle g_2 \rangle = \langle g_1 \rangle$ e o item (iii) implicaria $\langle g_4 \rangle = \langle g_3 \rangle$, absurdo) ou $g_4 g_3 g_2 \in \langle g_1 \rangle$ (do item (ii) teríamos $\langle g_2 \rangle = \langle g_1 \rangle$ e por (iii), $\langle g_4 \rangle = \langle g_1 \rangle$, que por fim resultaria em $\langle g_1 \rangle = \langle g_3 \rangle$). Note que $[x_4, x_1, x_2, x_3] \notin T_G(L)$: se $g_4 \in \langle g_1 \rangle$, então pelo item (iii) temos $\langle g_2 \rangle = \langle g_1 \rangle$, que sabemos resultar em absurdo; se $g_4 g_1 \in \langle g_2 \rangle$ ou $g_4 g_1 g_2 \in \langle g_3 \rangle$, então por (i) temos $g_2 \in \langle g_3 \rangle$, que pelo item (iv) resulta em $\langle g_4 \rangle = \langle g_3 \rangle$, absurdo. Assim, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ não-nulo tal que

$$[x_4, x_1, x_2, x_3] - \lambda [x_4, x_3, x_2, x_1] \tag{2.8}$$

é uma identidade polinomial graduada para L. Como no exemplo anterior, os itens (ii) e (iv) fazem com que os monômios $[x_4, x_3, x_1, x_2]$ e $[x_4, x_2, x_3, x_1]$ sejam identidades para L, de modo que não podemos mostrar diretamente, por meio da identidade de Jacobi, se (2.8) segue ou não das identidades em (2.4), (2.5) e (2.6).

Denotamos por I o T_G-ideal gerado pelas identidades (2.4), (2.5), (2.6) e (2.8). Claramente, $I \subseteq T_G(L)$. Como $\mathbb{K}$ é um corpo de característica zero, a inclusão inversa segue das inclusões $P_n^{\mathbf{g}} \cap T_G(L) \subset I$, para todo $\mathbf{g} \in G^n$. Uma consequência imediata da Proposição 2.2.3 é que a inclusão vale se $\mathbf{g}$ é uma n-upla ruim.

Lema 2.2.5 *Seja $M = [x_1, \cdots, x_n] \notin T_G(L)$. Dado $1 \leq k \leq n-1$, se $N = [x_1, \cdots, [x_k, x_{k+1}], x_{k+2}, \cdots, x_n] \notin T_G(L)$, então $M \sim N$.*

Demonstração. Podemos escrever

$$[x_1, \cdots, x_n] = [x_1, \cdots, [x_k, x_{k+1}], \cdots, x_n] + [x_1, \cdots, x_{k+1}, x_k, \cdots, x_n].$$

Denote por N_1 o monômio $[x_1, \cdots, x_{k+1}, x_k, \cdots, x_n]$. Se $N_1 \in T_G(L)$, o resultado segue de 2.2.3. Supondo que $N_1 \notin T_G(L)$, em particular temos $[x_1, \cdots, x_{k+1}, x_k] \notin T_G(L)$. Logo, segue da identidade (2.6) que $[x_1, \cdots, x_k, x_{k+1}] - \lambda [x_1, \cdots, x_{k+1}, x_k] \in I$, para algum $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$. Consequentemente, da igualdade acima concluímos que M é congruente módulo I a um múltiplo escalar de N. $\square$

Definição 2.2.6 *Seja n um número natural. Dados $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ e um subconjunto $\mathfrak{S} = \{s_1, \ldots, s_n\} \subset \mathbb{N}$, com $s_1 < \cdots < s_n$, denote por $P^{\mathbf{g}}_{\mathfrak{S}}$ o subespaço de $L\langle X_G \rangle$ dos polinômios multilineares nas variáveis $\{x^{(g_1)}_{s_1}, \ldots, x^{(g_n)}_{s_n}\}$.*

Os elementos de G e a tupla $\mathbf{g}$ podem ser omitidos da notação se não houver ambiguidade. Assim, escrevemos $P_{\mathfrak{S}}$ e x_i em vez de $P^{\mathbf{g}}_{\mathfrak{S}}$ e $x^{(g_i)}_i$, respectivamente. Seja σ uma permutação em S_{n-1}. Denote por N_σ o monômio $[x^{(g_n)}_{s_n}, x^{(g_{\sigma(1)})}_{s_{\sigma(1)}}, \cdots, x^{(g_{\sigma(n-1)})}_{s_{\sigma(n-1)}}]$. O conjunto $\{N_\sigma \mid \sigma \in S_{n-1}\}$ é a base canônica de $P^{\mathbf{g}}_{\mathfrak{S}}$.

Observação 2.2.7 *Seja $N_\sigma \notin T_G(L)$. Como consequência do Lema 2.2.5, se $N_{\sigma' \circ (k\ k+1)}$, $1 \leq k \leq n-2$, o monômio obtido ao permutarmos duas indeterminadas adjacentes, não é identidade graduada para L, então $N_\sigma \sim N_{\sigma' \circ (k\ k+1)}$.*

Lema 2.2.8 *Sejam $\mathbf{g}$ uma n-upla padrão em G^n e $\sigma \in S_{n-1}$. Se $N_\sigma \sim [x_1, \cdots, x_n]$ sempre que $N_\sigma \notin T_G(L)$, então $P^{\mathbf{g}}_n \cap T_G(L) \subseteq I$.*

Demonstração. Se $\sigma, \tau \in S_{n-1}$ são tais que $N_\sigma, N_\tau \notin T_G(L)$, então $N_\sigma \sim N_\tau$, por hipótese. Sejam $A = \{\sigma \in S_{n-1} \mid N_\sigma \in T_G(L)\}$ e $B = S_{n-1} \setminus A$. Considere

$$f = \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \lambda_\sigma N_\sigma,$$

onde $\lambda_\sigma \in \mathbb{K}$, um polinômio em $P^{\mathbf{g}}_n \cap T_G(L)$. A Proposição 2.2.3 implica que

$$f \equiv_I \sum_{\sigma \in B} \lambda_\sigma N_\sigma.$$

Seja $\tau \in B$, uma vez que $N_\sigma \sim N_\tau$ para toda $\sigma \in B$, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $f \equiv_I \lambda N_\tau$. Como $f \in T_G(L)$ e $N_\tau \notin T_G(L)$, temos $\lambda = 0$, consequentemente $f \in I$. $\square$

Seja $\mathbf{g}$ uma n-upla padrão em G^n. Note que $P^{\mathbf{g}}_n \cap T_G(L) \subseteq I$ se, e somente se, para todo $N_\sigma \notin T_G(L)$ temos $N_\sigma \sim [x_1, \cdots, x_n]$. Queremos mostrar que, para uma n-upla padrão $\mathbf{g}$, temos $N_\sigma \sim [x_1, \cdots, x_n]$ sempre que $N_\sigma \notin T_G(L)$, como no lema anterior. A ideia é demonstrar por indução que isto é válido e a definição seguinte será usada para reduzir, em certo sentido, o grau de N_σ.

Definição 2.2.9 *Um monômio $M \notin T_G(L)$ é redutível nas duas indeterminadas x_i, x_j se existem $\mathbf{h} \in G^{n-1}$, $\mathfrak{S} \subset \mathbb{N}$ (com $n-1$ elementos) e um monômio N na base canônica de $P^{\mathbf{h}}_{\mathfrak{S}}$, tais que M é equivalente ao monômio obtido de N por uma substituição de $x^{(h_k)}_{s_k}$ por $[x_i, x_j]$, para algum $k < n-1$.*

Exemplo 2.2.10 *Seja $p = 3$ e considere $\mathbf{g} = ((\overline{2}, \overline{2}), (\overline{2}, \overline{1}), (\overline{0}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{1}))$ a qual é uma 5-upla padrão. Os monômios $N_{(1\ 3\ 2)} = [x_5, x_3, x_1, x_2, x_4]$ e $M = [x_5, x_3, [x_1, x_2], x_4]$ não são identidades para $sl_3(\mathbb{K})$. Logo, pelo Lema 2.2.5 temos $N_{(1\ 2\ 3)} \sim M$. Note que esta equivalência mostra que $N_{(1\ 2\ 3)}$ é redutível nas indeterminadas x_1, x_2. De fato, M é obtido de $N = [x_{s_4}^{(h_4)}, x_{s_2}^{(h_2)}, x_{s_1}^{(h_1)}, x_{s_3}^{(h_3)}] \in P_{\mathfrak{S}}^{\mathbf{h}}$, com $\mathbf{h} = (g_1g_2, g_3, g_4, g_5)$ e $\mathfrak{S} = \{1, 3, 4, 5\}$, via a substituição $x_{s_1}^{(h_1)} \mapsto [x_1^{(g_1)}, x_2^{(g_2)}]$. O monômio N corresponde a permutação $\tau = (1\ 2) \in S_3$ na base canônica de $P_{\mathfrak{S}}^{\mathbf{h}}$.*

Observação 2.2.11 *Seja $\mathbf{g}$ uma n-upla boa. Considere $N_\sigma \notin T_G(L)$ um monômio da base canônica de $P_n^{\mathbf{g}}$. Afirmamos que N_σ é sempre redutível a algum par de variáveis x_i, x_j, $1 \leq i \leq n$. É suficiente provarmos isto para $M = [x_n, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]$, que é imediato se $[x_n, [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \notin T_G(L)]$, pelo exemplo anterior. Caso contrário, consideramos dois casos:*

- *i) $\sigma(1) > \sigma(2)$. Segundo a notação da Definição 2.2.9, sejam $\mathfrak{S} = \{\sigma(2), \sigma(1)\}$ e $\mathbf{h} = (g_n g_{\sigma(2)}, g_{\sigma(1)})$. Logo, $\{[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]\}$ é a base canônica de $P_{\mathfrak{S}}^{\mathbf{h}}$ e note que $M \sim -[x_{\sigma(1)}, [x_n, x_{\sigma(2)}]]$, o que mostra que M é redutível nas indeterminadas $x_{\sigma(2)}, x_n$.*

- *ii) $\sigma(2) > \sigma(1)$. Sejam $\mathfrak{S} = \{\sigma(1), \sigma(2)\}$ e $\mathbf{h} = (g_n g_{\sigma(1)}, g_{\sigma(2)})$. Temos $M = [x_{\sigma(2)}, [x_{\sigma(1)}, x_n]]$. Assim, M é redutível nas indeterminadas $x_{\sigma(1)}, x_n$.*

A seguir mostramos que uma n-upla padrão é sempre redutível para um par x_i, x_j com $i, j \neq n$.

Lema 2.2.12 *Seja $\mathbf{g}$ uma n-upla padrão em G^n. Seja $\sigma \in S_{n-1}$ tal que $N_\sigma \notin T_G(L)$. O monômio N_σ é redutível para um par x_i, x_j com $i, j \neq n$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que isto não é válido. Ou seja, se N_σ é redutível para x_i, x_j, então $i = n$ ou $j = n$. Seja $\Sigma = \{\tau \in S_{n-1} \mid N_\tau \sim N_\sigma\}$. Dados $\sigma' \in \Sigma$ e $1 \leq k \leq n-2$, temos

$$N_{\sigma'} - N_{\sigma' \circ (k\ k+1)} = [x_n, \cdots, [x_{\sigma'(k)}, x_{\sigma'(k+1)}], \cdots, x_{\sigma'(n-1)}].$$

Se este monômio não é identidade para L, então é equivalente a $N_{\sigma'}$, pelo Lema 2.2.5. Ou seja, $N_{\sigma'}$ é redutível nas indeterminadas $x_{\sigma'(k)}$,$x_{\sigma'(k+1)}$ (análogo ao Exemplo 2.2.10), o que é uma contradição. Portanto, $N_{\sigma'} \sim N_{\sigma' \circ (k\ k+1)}$. Esta equivalência implica que $\sigma' \circ (k\ k+1) \in \Sigma$. Como as transposições $(k\ k+1)$, $k \leq n-2$, geram S_{n-1}, concluímos que $\Sigma = S_{n-1}$. Daí, para qualquer $\sigma \in S_{n-1}$ temos que

$N_\sigma - N_{\sigma\circ(k\ k+1)} \in T_G(L)$ para todo $1 \leq k \leq n-2$. Isto contaria a hipótese que $\mathbf{g}$ é padrão, pois usando a identidade de Jacobi repetidas vezes, temos

$$\begin{aligned}
[x_1, \cdots, x_n] =& -[x_n, [x_1, \cdots, x_{n-1}]] \\
=& -[x_n, [x_1, \cdots, x_{n-2}], x_{n-1}] - [x_n, x_{n-1}, [x_1, \cdots, x_{n-2}]] \\
=& \ldots \\
=& [x_n, [x_1, x_2], x_3, \cdots, x_{n-1}] + \cdots + [x_n, x_{n-1}, \cdots, x_3, [x_1, x_2]]
\end{aligned}$$

e disto concluímos que $[x_1, \cdots, x_n]$ é uma identidade, contradição. □

Lema 2.2.13 *Seja* $\mathbf{g}$ *uma n-upla padrão em* G^n*, com* $n \geq 4$*. Seja* σ *uma permutação em* S_{n-1} *tal que* $N_\sigma \notin T_G(L)$*. Existem dois pares distintos (i,j) e (k,l) com* $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n-1\}$ *tais que* N_σ *é redutível nas indeterminadas* x_i, x_j *e* x_k, x_l*.*

Demonstração. A prova segue, novamente, por contradição. Suponha que N_σ é redutível para um único par de indeterminadas x_i, x_j com $i, j \neq n$. Seja $\Sigma = \{\tau \in S_{n-1} \mid N_\tau \sim N_\sigma\}$ e $\mathcal{N} = \{N_{\sigma'} \mid \sigma' \in \Sigma\}$. Como N_σ é redutível para um único par de variáveis x_i, x_j com $i, j \neq n$, um argumento análogo ao feito na prova anterior mostra que se permutarmos quaisquer duas variáveis adjacentes em um monômio de $\mathcal{N}$, exceto para o par x_i, x_j, o monômio obtido ainda pertence ao conjunto $\mathcal{N}$. Então, assumindo, sem perda de generalidade, que x_i aparece à esquerda de x_j em N_σ, todo monômio da base canônica em que x_i está à esquerda de x_j pertence a $\mathcal{N}$. Em particular, existem monômios $N_{\sigma'}$ em $\mathcal{N}$ tais que x_i é adjacente e está a esquerda de x_j. Se, em pelo menos um destes monômios $N_{\sigma'}$, o monômio $N_{(\sigma'\circ(k,k+1))}$ para um k adequado, obtido ao permutarmos x_i e x_j, não é identidade graduada para L, então $N_{\sigma'} \sim N_{(\sigma'\circ(k,k+1))}$, segundo a Observação 2.2.7. Via as transposições $(k\ k+1)$, $k \leq n-2$ obtemos os monômios remanescentes, aqueles em que a variável x_j aparece à esquerda de x_i, de modo que $\Sigma = S_{n-1}$. Como no lema anterior, isto contraria o fato de que $\mathbf{g}$ é padrão. Agora, suponha que isto não ocorre, isto é, todos os monômios em que x_i e x_j são adjacentes, com x_j à direita de x_i, são identidades. Consequentemente, os seguintes monômios são identidades graduadas para L:

(i) $[x_n, x_i, [x_j, x_k], \cdots]$

Um dos seguintes casos ocorre:

1. $\langle g_j \rangle = \langle g_k \rangle$
2. $g_n g_i \in \langle g_j g_k \rangle$

(ii) $[x_n, x_j, x_i, x_k, \cdots]$.

Um dos seguintes casos ocorre:

1. $\langle g_n \rangle = \langle g_j \rangle$
2. $g_n g_j \in \langle g_i \rangle$
3. $g_n g_j g_i \in \langle g_k \rangle$

(iii) $[x_n, [x_i, x_k], x_j, \cdots]$

Um dos seguintes casos ocorre:

1. $\langle g_i \rangle = \langle g_k \rangle$
2. $g_n \in \langle g_i g_k \rangle$

(iv) $[x_n, x_k, x_j, x_i, \cdots]$

Um dos seguintes casos ocorre:

1. $g_n g_k \in \langle g_j \rangle$
2. $g_n g_j g_k \in \langle g_i \rangle$

Supondo que o item (i1) ocorre, analisamos as demais condições. Note que (ii1) não é válido, caso contrário temos $\langle g_n \rangle = \langle g_k \rangle$ e isto contraria o fato que que $[x_n, x_k, x_i, x_j, \cdots] \in \mathcal{N}$. O item (ii3) não ocorre, caso contrário, $g_n + g_i + g_k = qg_k - g_j + g_k \in \langle g_j \rangle$, o que é uma contradição, já que $[x_n, x_i, x_k, x_j, \cdots] \in \mathcal{N}$. Assim, a condição (ii2) ocorre. Note que (i1) implica diretamente na validade de (iii2). Em resumo, se (i1) ocorre, então necessariamente os itens (ii2) e (iii2) são válidos. Agora analisamos quais dos itens em (iv) é válido. Observe que (iv2) não pode ocorrer, pois de (ii2) concluímos que $\langle g_i \rangle = \langle g_k \rangle$, consequentemente $\langle g_i \rangle = \langle g_j \rangle$, contradição. Porém, (iv1) também não pode ocorrer, pois isto implicará que $\langle g_n \rangle = \langle g_j \rangle$, daí por (iii2) temos $\langle g_i \rangle = \langle g_j \rangle$, contradição.

Portanto, deve ocorrer a condição (i2). Disto, temos que existe $\lambda \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ tal que

$$g_n + g_i = \lambda g_j + \lambda g_k. \tag{2.9}$$

O item (ii3) não pode ocorrer, pois para algum $c \in \mathbb{Z}_p$, teríamos

$$g_n + g_j + g_i = cg_k \Rightarrow (\lambda + 1)g_j = (c - \lambda)g_k.$$

Logo, $\lambda = -1 = c$. Mas, isto implica que $g_n + g_i + g_k = -g_j$, contradição.

Caso tenhamos a condição (ii1), então para algum $d \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$, temos $g_n = dg_j$. Reescrevendo a equação anterior, temos

$$g_k = \lambda^{-1} g_i + (\lambda^{-1} d - 1) g_j.$$

Note que a condição (iv1) não pode ocorrer, pois teríamos que $g_k \in \langle g_j \rangle$, o qual sabemos que não ocorre. Assim, a condição (iv2) é válida, isto é, para algum $c \in \mathbb{Z}_p$, temos

$$g_n + g_j + g_k = cg_i \Rightarrow g_k = cg_i + (-d-1)g_j.$$

Como $\{g_i, g_j\}$ é uma base para G como espaço $\mathbb{Z}_p$-espaço vetorial, temos $\lambda^{-1} = c$ e $\lambda^{-1}d - 1 = -d - 1 \Rightarrow \lambda^{-1} = -1$. Portanto, $g_k = -g_i + (-d-1)g_j$. Note que $g_n + g_i + g_k = -g_j$ o que implica em $[x_n, x_i, x_k, x_j, \cdots] \in T_G(L)$, absurdo.

Assim, ja sabemos que são válidas (i2) e (ii2). Segue-se que existe $\beta \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ (pois já mostramos que g_n e g_j são linearmente independentes) tal que

$$g_n = -g_j + \beta g_i. \tag{2.10}$$

Voltando a equação (2.9), temos

$$g_k = \lambda^{-1}(1+\beta)g_i + (-\lambda^{-1} - 1)g_j. \tag{2.11}$$

Suponha que (iii1) é válida. Então, $\lambda = -1$. Daí, $g_k = (-1-\beta)g_i$. Consequentemente, $g_n + g_i + g_k = -g_j$ o que implica em $[x_n, x_i, x_k, x_j, \cdots] \in T_G(L)$, absurdo. Portanto, (iii2) é válida. Logo, existe $\gamma \in \mathbb{Z}_p$ tal que

$$g_i + g_k = \gamma g_n$$

Segue-se da equação (2.10) que $g_k = (\beta\gamma - 1)g_i - \gamma g_j$. Então, pela equação (2.11), temos que $\gamma = \lambda^{-1} + 1$. Além disso, temos $\beta\gamma - 1 = \lambda^{-1} + \beta\lambda^{-1}$, daí, $\beta = \lambda^{-1} + 1$. Reescrevendo as equações (2.10) e (2.11) obtemos que

$$g_n =(\lambda^{-1} + 1)g_i - g_j \tag{2.12}$$
$$g_k =(1 + 2\lambda^{-1})g_i + (-\lambda^{-1} - 1)g_j. \tag{2.13}$$

Como $g_n + g_j + g_k = (3\lambda^{-1} + 2)g_i + (-\lambda^{-1} - 1)g_j$, a condição (iv2) não pode ocorre, pois isto implicaria em uma combinação linear nula de g_i e g_j, com escalar de g_j igual a $(-\lambda^{-1} - 1)$. Assim, teríamos $g_k \in \langle g_i \rangle$, o que ocorre.

Portanto, concluímos que a sequência (i2), (ii2), (iii2) e (iv1) é a única possível.

Pelo item (iv1), temos que $g_n + g_k = cg_j$, com $c \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$. Substituindo a expressão para g_n obtida acima, obtemos $g_k = (-\lambda^{-1} - 1)g_i + (1 + c)g_j$. Disto concluímos que $1 + 2\lambda^{-1} = (-\lambda^{-1} - 1) \Rightarrow \lambda = 3(p-2)^{-1}$.

Observe que $[x_n, x_j, [x_k, x_i], \cdots]$ não é identidade, pois, se $g_n g_j \in \langle g_i g_k \rangle$, então $g_k \in \langle g_i \rangle$, o que não é válido. Segue-se da identidade (2.8) que

$$[x_n, x_i, x_k, x_j, \cdots] \sim [x_n, x_j, x_k, x_i] \cong_I [x_n, x_j, [x_k, x_i], \cdots],$$

mas isto contraria a hipótese de que o primeiro monômio é redutível somente para o par x_i, x_j.

Isto conclui a demonstração. $\square$

Como observado no Exemplo 2.2.10, se os índices i, j na Definição 2.2.9 são diferentes de n, então $s_{n-1} = n$. Além disso, os graus das $n-2$ indeterminadas restantes do monômio N são dadas pela sequência na próxima definição.

Definição 2.2.14 *Seja n um número natural, $\mathbf{g} \in G^n$ e $1 \leq i, j \leq n-1$. Denotamos por $\Delta_{i,j}(\mathbf{g}) = (h_1, \ldots, h_{n-2})$ a sequência onde $(h_1, \ldots, h_{n-3})$ é a sequência obtida de $(g_1, \ldots, g_{n-1})$ por deletar g_i e g_j, e $h_{n-2} = g_i g_j$.*

Observação 2.2.15 *Se N_σ é redutível nas indeterminadas x_i, x_j, então $\Delta_{i,j}(\mathbf{g})$ não é necessariamente boa. Por exemplo, considere $p = 5$, $n = 6$ e a 6-upla boa $\mathbf{g} = ((\bar{2}, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{3}), (\bar{4}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{3}))$. Note que $\langle g_1 \rangle = \langle g_3 \rangle = \langle g_5 \rangle = \langle g_2 g_4 \rangle$. Logo, $\Delta_{2,4}(\mathbf{g}) = (g_1,)$ é ruim. O monômio N_{Id} é redutível nas indeterminadas x_2, x_4. De fato, $[x_6, x_1, x_2, x_4, x_3, x_5] \notin T_G(L)$, logo é equivalente a N_{Id}. Uma vez que $[x_6, x_1, [x_2, x_4], x_3, x_5] \notin T_G(L)$, concluímos que $N_{Id} \sim [x_6, x_1, [x_2, x_4], x_3, x_5]$.*

É fácil verificar que o monômio N_{Id} do exemplo anterior também é redutível para o par x_3, x_4, mas neste caso a tupla $\Delta_{3,4}(\mathbf{g})$ é boa, pois $\langle g_1 \rangle \neq \langle g_2 \rangle$. No próximo resultado demonstramos que isso é válido no caso geral.

Lema 2.2.16 *Sejam $n \geq 4$ e $\mathbf{g}$ uma n-upla padrão em G^n. Seja $\sigma \in S_{n-1}$ tal que N_σ é redutível para os pares distintos x_i, x_j e x_k, x_l com $i, j, k, l \neq n$, então pelo menos uma das $(n-2)$-uplas $\Delta_{i,j}(\mathbf{g})$ ou $\Delta_{k,l}(\mathbf{g})$ é boa.*

Demonstração. Assumimos que $\Delta_{i,j}(\mathbf{g})$ e $\Delta_{k,l}(\mathbf{g})$ são ruins. Se $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$, então a Proposição 2.1.5 aplicada a $\Delta_{i,j}(\mathbf{g})$ implica que

$$\langle g_i g_j \rangle = \langle g_k \rangle = \langle g_l \rangle = \langle g_s \rangle,$$

para todo $s \neq i, j, k, l, n$. Além disso, a hipótese sobre $\Delta_{k,l}(\mathbf{g})$ implica que $\langle g_i \rangle = \langle g_j \rangle$. Logo, $g_i g_j \in \langle g_i \rangle$, assim, $\langle g_i g_j \rangle = \langle g_i \rangle$. Concluímos que $(g_1, \ldots, g_{n-1})$ é ruim, o que é uma contradição, pois $M \notin T_G(L)$, onde $M = [x_1, \cdots, x_n]$. Caso $\{i, j\} \cap \{k, l\} \neq \emptyset$, assumimos sem perda de generalidade que $j = k$. Analisamos, separadamente, quando $n \geq 5$ e $n = 4$. Para $n \geq 5$, temos

$$\langle g_i g_j \rangle = \langle g_j g_l \rangle = \langle g_s \rangle,$$

para todo $s \neq j, n$. Logo, $g_i g_j \in \langle g_i \rangle$ o que implica em $g_j \in \langle g_i \rangle$. Portanto, $\langle g_j \rangle = \langle g_i \rangle$. Neste caso, chegamos a mesma conclusão anterior, de que $(g_1, \ldots, g_{n-1})$ é ruim, uma contradição. Agora, suponha $n = 4$. Neste caso, assumimos, sem perda de generalidade, que os pares de indeterminadas são x_1, x_2 e x_2, x_3. A hipótese que $\Delta_{1,2}(\mathbf{g})$ e $\Delta_{2,3}(\mathbf{g})$ são ruins, implica que $\langle g_1g_2\rangle = \langle g_3\rangle$ e $\langle g_1\rangle = \langle g_2g_3\rangle$. Note que $g_1g_2g_3 \neq e$, pois $\mathbf{g}$ é padrão e temos $g_1g_2g_3 \in \langle g_1\rangle \cap \langle g_3\rangle$, consequentemente, $\langle g_1\rangle = \langle g_3\rangle$. Como g_2g_3 está em $\langle g_1\rangle = \langle g_3\rangle$ concluímos que $g_2 \in \langle g_3\rangle$. Logo, $\langle g_2\rangle = \langle g_1\rangle = \langle g_3\rangle$. Isto implica que (g_1, g_2, g_3) é ruim, contradição. $\square$

Teorema 2.2.17 *Seja p um número primo e $\mathbb{K}$ um corpo de característica zero. Os polinômios em (2.4), (2.5) (2.6) e (2.8) formam uma base para as identidades da álgebra de Lie $sl_p(\mathbb{K})$ com a graduação de Pauli pelo grupo $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.*

Demonstração. Provaremos, por indução em n, que $P_n^{\mathbf{g}} \cap T_G(L) \subseteq I$ para todo n e toda n-upla $\mathbf{g} \in G^n$. Como $\mathbb{K}$ é um corpo de característica zero, isto implica o resultado. Se $\mathbf{g}$ é uma n-upla ruim, o resultado segue da Proposição 2.2.3. Se $\mathbf{h}$ é uma n-upla obtida ao reordenarmos os elementos de $\mathbf{g}$, então existe um automorfismo de $L\langle X_G\rangle$ que aplica $P_n^{\mathbf{g}}$ em $P_n^{\mathbf{h}}$, assim, podemos assumir sem perda de generalidade que $\mathbf{g}$ é padrão. Segundo o Lema 2.2.13, para toda permutação $\sigma \in S_{n-1}$ tal que $N_\sigma \notin T_G(L)$, o monômio N_σ é redutível para pares distintos x_i, x_j e x_k, x_l, com $i, j, k, l \neq n$. O Lema 2.2.16 nos permite assumir que $\Delta_{i,j}(\mathbf{g}) = (h_1, \dots, h_{n-2})$ é boa. Afirmamos que existe um monômio N_1, multilinear nas indeterminadas $x_1, \dots, x_{n-1}$, tal que $N_\sigma \sim [N_1, x_n]$. A hipótese de indução implicará que $[N_1, x_n] \sim [x_1, \dots, x_n]$. Portanto, a inclusão $P_n^{\mathbf{g}} \cap T_G(L) \subseteq I$ segue do Lema 2.2.8.

Iremos demonstrar tal afirmação. Note que $\mathbf{h} = \Delta_{i,j}(\mathbf{g})$ representa, a menos de permutação, os G-graus das indeterminadas diferentes de x_n no monômio N da Definição 2.2.9. Seja S o conjunto de indeterminadas de N e $S' = S \setminus \{x_n\}$. Como $\Delta_{i,j}(\mathbf{g})$ é boa, existe um monômio $N_0 \in P_{S'} \setminus T_G(L)$. Também temos $[x_1, \cdots, x_n] \notin T_G(L)$, pois $\mathbf{g}$ é padrão. Logo, $[L_g, L_{g_n}] \neq 0$, onde $g = g_1 \cdots g_{n-1}$ é o G-grau de N_0. Isto implica que $[N_0, x_n] \notin T_G(L)$. O monômio N_σ é equivalente a um monômio obtido de N ao substituirmos a indeterminada adequada x_{s_k} por $[x_i, x_j]$. Logo, $N \notin T_G(L)$, já que $N_\sigma \notin T_G(L)$. Como N e $[N_0, x_n]$ pertencem a P_S, a hipótese de indução implica que $[N_0, x_n] \sim N$. Denote por N_1 o monômio obtido ao substituirmos em N_0 a indeterminada x_{s_k} por $[x_i, x_j]$. Temos então que $[N_1, x_n] \sim N_\sigma$. $\square$

A hipótese que $m = p$ é primo é usada no Lema 2.2.13, onde usamos fortemente a propriedade que $C(g) = \langle g\rangle$, e na Proposição 2.1.5, que por sua vez é usada no Lema 2.2.16. A prova do Teorema 2.2.17 depende das equivalências na Observação 2.1.4 e do fato de que toda componente homogênea não-nula é unidimensional. As devidas modificações nestes argumentos produzem o seguinte resultado.

Teorema 2.2.18 *Seja $L = \oplus_{g\in G} L_g$ uma álgebra de Lie com uma graduação por um grupo abeliano G. Assumimos que para todo $g \in supp\ L$, $C(g) = \langle g\rangle$. Se* $\dim L_g \leq 1$ *para todo $g \in G$, então o conjunto de polinômios em (2.4), (2.5) (2.6) e* (2.8) *é uma base para as identidades de L.*

A $\mathbb{Z}$-graduação canônica na álgebra de Witt, Exemplo 1.1.25, é tal que toda componente homogênea não-nula é unidimensional, mas $C(g) = \{g\}$ e como mencionado anteriormente, em [10] uma base minimal para as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de W_1 é descrita, sem identidades de grau 4.

A base de $sl_2(\mathbb{K})$ já era conhecida na literatura, a identidade (2.4). A seguir, veremos que, assim como os polinômios em (2.8), os polinômios em (2.6) são necessários apenas para $p \geq 5$.

Lema 2.2.19 *Considere $p = 3$. Para quaisquer $g, h, k \in G \setminus \{e\}$ pelo menos um dos monômios $[x_1^{(g)}, x_2^{(h)}, x_3^{(k)}], [x_2^{(h)}, x_3^{(k)}, x_1^{(g)}]$ ou $[x_1^{(g)}, x_3^{(k)}, x_2^{(h)}]$ pertence ao T_G-ideal I' gerado pelos polinômios em (2.4) e (2.5).*

Demonstração. Suponha que $M = [x_1^{(g)}, x_2^{(h)}, x_3^{(k)}] \notin T_G(L)$. Então, $h \notin \langle g\rangle$ e $k \notin \langle gh\rangle$. Daí, $k \in \{h, h^2, g, g^2, hg^2, h^2g\}$. Denote $N_1 = [x_2^{(h)}, x_3^{(k)}, x_1^{(g)}]$ e $N_2 = [x_1^{(g)}, x_3^{(k)}, x_2^{(h)}]$. Se $k \in \langle h\rangle$, então N_1 é identidade. Se $k \in \langle g\rangle$, então N_2 é identidade. Resta-nos apenas o caso em $k \in \langle h^2 g\rangle$. Se $k = h^2 g$, então N_2 é identidade, pois é consequência de $[x_1^{(h)}, x_2^{(h)}]$, enquanto que $k = h^2 \cdot g$ implica que N_1 é identidade, consequência de $[x_2^{(g)}, x_1^{(g)}]$.

Corolário 2.2.20 *Seja $\{g_1, \ldots, g_8\} = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{e\}$. Os polinômios*

$$x_1^{(e)} \tag{2.14}$$

e

$$[x_1^{(g_i)}, x_2^{(g_j)}],\ g_j \in C(g_i),\ g_i, g_j, g_i g_j \neq e,\ i \leq j. \tag{2.15}$$

formam um conjunto minimal de geradores para o $T_{\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3}$-ideal das identidades de $sl_3(\mathbb{K})$ com a graduação de Pauli.

Demonstração. O T_G-ideal gerado pelos polinômios acima coincide com o T_G-ideal I' gerado pelos polinômios em (2.4), (2.5). Seja $f(x_1^{(g)}, x_2^{(h)}, x_3^{(k)}) \in T_G(L)$ um polinômio multilinear. O Lema 2.2.19 nos permite supor, sem perda de generalidade, que o monômio $[x_2^{(h)}, x_3^{(k)}, x_1^{(g)}]$ pertence a I'. Então, a identidade de Jacobi implica que $[x_1^{(g)}, x_2^{(h)}, x_3^{(k)}] \equiv_{I'} -[x_3^{(k)}, x_1^{(g)}, x_2^{(h)}]$. Como o polinômio f é uma combinação linear dos monômios descritos no Lema 2.2.19, temos $f \equiv_{I'} \lambda[x_1^{(g)}, x_2^{(h)}, x_3^{(k)}]$ para algum escalar λ. Uma vez que f é uma identidade para L, concluímos que $\lambda = 0$ ou $[x_1^{(g)}, x_2^{(h)}, x_3^{(k)}]$ é uma identidade para L que implica em $f \in I'$. Para os casos $[x_1^{(g)}, x_2^{(h)}, x_3^{(k)}] \in I'$ e $[x_3^{(k)}, x_1^{(g)}, x_2^{(h)}] \in I'$, também concluímos, de forma análoga, que $f \in I'$. Portanto, $T_G(L) = I'$.

Denote por $\mathcal{B}$ o conjunto dos polinômios em (2.14) e (2.15). Mostraremos que para todo $f \in \mathcal{B}$ o T_G-ideal gerado por $\mathcal{B} \setminus \{f\}$ não contém f. Seja L a álgebra de Lie unidimensional com a G-graduação trivial. Note que $\mathcal{B} \setminus \{x_1^{(e)}\} \subset T_G(L)$ e $x_1^{(e)} \notin T_G(L)$. Agora, considere f um polinômio em (2.15). Assumimos que f pertence ao T_G-ideal gerado por $\mathcal{B} \setminus \{f\}$. Os polinômios de grau 2 no T_G-ideal gerado por $x_1^{(e)}$ tem G-grau e ou uma indeterminada de G-grau e. Como $\deg_G f \neq e$ e as indeterminadas de f possuem G-grau diferente de e, concluímos que f está no T_G-ideal gerado pelos polinômios em (2.15). Tais polinômios tem grau 2, desse modo, f é uma combinação linear de polinômios em (2.15). Note que polinômios distintos em (2.15) tem conjuntos distintos de indeterminadas. Portanto, estes polinômios são linearmente independentes, contradição. Isto implica que para todo f em (2.15) o T_G-ideal gerado por $\mathcal{B} \setminus \{f\}$ não contém f. $\square$

Observação 2.2.21 *Sejam $\mathbf{g} = (g, h, k) \in G^3$ e I' o T_G-ideal gerado pelos polinômios em (2.4) e (2.5). Como os geradores de I' são monômios multilineares, se $P_3^{\mathbf{g}} \cap I' \neq 0$, então existe um monômio multilinear de grau 3 em I' nas indeterminadas $x_1^{(g)}, x_2^{(h)}, x_3^{(k)}$. Seja $\mathfrak{M} = \{[x_1^{(g)}, x_2^{(h)}, x_3^{(k)}], [x_1^{(g)}, x_3^{(k)}, x_2^{(h)}], [x_1^{(g)}, [x_2^{(h)}, x_3^{(k)}]]\}$. Temos que $\pm M \in \mathfrak{M}$ para todo monômio M em $P_3^{\mathbf{g}}$. Portanto, se $P_3^{\mathbf{g}} \cap I' \neq 0$, então $\mathfrak{M} \cap I' \neq \emptyset$. Suponha que $p > 3$ e considere $g = (1, 0)$, $h = (0, 1)$ e $k = (1, 2)$. Temos que os grupos $\langle g \rangle$,$\langle h \rangle$ e $\langle k \rangle$ são distintos, $gh \notin \langle k \rangle$,$gk \notin \langle h \rangle$ e $hk \notin \langle g \rangle$. Logo, $\mathfrak{M} \cap I' = \emptyset$ e isto implica que $[x_{1,g}, x_{2,h}, x_{3,k}] - \lambda_{g,h,k}[x_{1,g}, x_{3,k}, x_{2,h}]$ em (2.6) não é uma consequência dos polinômios em (2.4), (2.5). Portanto, o Corolário 2.2.20 não é válido para $p > 3$.*

Na prova do Corolário 2.2.20, mostramos que o conjunto formado pelos polinômios em (2.14) e (2.15), definidos no contexto geral, é um conjunto independente de identidades graduadas em $L\langle X_G \rangle$. Agora exibimos um subconjunto dos polinômios em (2.6), que juntamente com as identidades em (2.14), (2.15) e (2.8) formam uma base minimal para as identidades $(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p)$-graduadas de $sl_p(\mathbb{K})$, para $p \geq 5$.

Sejam $g = (i_1, j_1)$, $h = (i_2, j_2)$ e $k = (i_3, j_3)$ elementos de G, tais que $h \notin \langle g \rangle$ e $gh \notin \langle k \rangle$, de modo que $[x_1^{(g)}, x_2^{(h)}, x_3^{(k)}] \notin T_G(L)$. A avaliação pelas respectivas matrizes $A^i B^j$, definidas no início desta seção, nos monômios $[x_1^{(g)}, x_2^{(h)}, x_3^{(k)}]$ e

$[x_1^{(g)}, x_3^{(k)}, x_2^{(h)}]$ produz, respectivamente,

$$(\varepsilon^{-i_2 j_1} - \varepsilon^{-i_1 j_2})(\varepsilon^{-i_3(j_1+j_2)} - \varepsilon^{-j_3(i_1+i_2)})A^{(i_1+i_2+i_3)}B^{(j_1+j_2+j_3)}$$

e

$$(\varepsilon^{-i_3 j_1} - \varepsilon^{-i_1 j_3})(\varepsilon^{-i_2(j_1+j_3)} - \varepsilon^{-j_2(i_1+i_3)})A^{(i_1+i_2+i_3)}B^{(j_1+j_2+j_3)}.$$

Denotamos

$$\alpha = (\varepsilon^{-i_2 j_1} - \varepsilon^{-i_1 j_2})(\varepsilon^{-i_3(j_1+j_2)} - \varepsilon^{-j_3(i_1+i_2)}) \tag{2.16}$$

e

$$\beta = (\varepsilon^{-i_3 j_1} - \varepsilon^{-i_1 j_3})(\varepsilon^{-i_2(j_1+j_3)} - \varepsilon^{-j_2(i_1+i_3)}), \tag{2.17}$$

então

$$f_{ghk}(x_1^{(g)}, x_2^{(h)}, x_3^{(k)}) := [x_1^{(g)}, x_3^{(k)}, x_2^{(h)}] - \alpha^{-1}\beta[x_1^{(g)}, x_2^{(h)}, x_3^{(k)}] \text{ está em } (2.6).$$

As variáveis $x_1^{(g)}, x_2^{(h)}$ e $x_3^{(k)}$ estão fixas, de modo que

$$f_{khg}(x_3^{(k)}, x_2^{(h)}, x_1^{(g)}) = [x_3^{(k)}, x_1^{(g)}, x_2^{(h)}] - \mu^{-1}\nu[x_3^{(k)}, x_2^{(h)}, x_1^{(g)}],$$

onde $\nu = -\beta$ e $\mu = (\varepsilon^{-i_2 j_3} - \varepsilon^{-i_3 j_2})(\varepsilon^{-i_1(j_3+j_2)} - \varepsilon^{-j_1(i_3+i_2)})$.

Se $k \in \langle g \rangle$, então f_{ghk} é consequência de (2.5), pois $[x_1^{(g)}, x_3^{(k)}, x_2^{(h)}]$ é consequência de (2.5) e temos $\beta = 0$. Caso $k \in \langle h \rangle$, como

$$[x_1^{(g)}, x_3^{(k)}, x_2^{(h)}] = [x_1^{(g)}, x_2^{(h)}, x_3^{(k)}] - [x_1^{(g)}, [x_2^{(h)}, x_3^{(k)}]],$$

temos

$$f_{ghk} = (1 - \alpha^{-1}\beta)[x_1^{(g)}, x_2^{(h)}, x_3^{(k)}] - [x_1^{(g)}, [x_2^{(h)}, x_3^{(k)}]].$$

Isto implica que $(1-\alpha^{-1}\beta)[x_1^{(g)}, x_3^{(k)}, x_2^{(h)}]$ é identidade, logo $(1-\alpha^{-1}\beta) = 0$. Assim,

$$f_{ghk} = -[x_1^{(g)}, [x_2^{(h)}, x_3^{(k)}]]$$

e pertence ao T_G-ideal gerado pelos polinômios em (2.5).

Portanto, para que f_{ghk} não seja consequência das identidades em (2.4) e (2.5), os elementos g, h e k devem ser, dois a dois, linearmente independentes sobre $\mathbb{Z}_p$. Além disso, $h \notin \langle gk \rangle$, caso contrário $[x_1^{(g)}, x_3^{(k)}, x_2^{(h)}]$ é consequência de (2.5) e $\beta = 0$, segue-se então que f_{ghk} é consequência de (2.5).

Lema 2.2.22 *Para $g, h, k \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, dois a dois linearmente independentes, tais que $gh \notin \langle k \rangle$ e $h \notin \langle gk \rangle$, temos*

$$\begin{aligned} f_{hgk} &= f_{ghk}, \\ f_{gkh} &= f_{kgh} = -\beta^{-1}\alpha f_{ghk}, \\ f_{khg} &= f_{hkg} = -\alpha\mu^{-1} f_{ghk}, \end{aligned}$$

onde α, β são os escalares definidos em (2.16) e (2.2), e $\mu = \alpha - \beta$.

Demonstração:

Temos que

$$f_{gkh} = [x_1^{(g)}, x_2^{(h)}, x_3^{(k)}] - \beta^{-1}\alpha[x_1^{(g)}, x_3^{(k)}, x_2^{(h)}] = -\beta^{-1}\alpha f_{ghk}.$$

Agora,

$$\begin{array}{rcl} f_{khg} & = & [x_3^{(k)}, x_1^{(g)}, x_2^{(h)}] - \mu^{-1}\nu[x_3^{(k)}, x_2^{(h)}, x_1^{(g)}] \\ & = & (-1-\mu^{-1}\beta)[x_1^{(g)}, x_3^{(k)}, x_2^{(h)}] + \mu^{-1}\beta[x_1^{(g)}, x_2^{(h)}, x_3^{(k)}] \end{array}$$

onde $\nu = -\beta$ e $\mu = (\varepsilon^{-i_2j_3} - \varepsilon^{-i_3j_2})(\varepsilon^{-i_1(j_3+j_2)} - \varepsilon^{-j_1(i_3+i_2)})$. Pode-se verificar que $\alpha - \beta = \mu$. Portanto, $(\alpha-\beta)\mu^{-1} = 1 \Rightarrow \alpha\mu^{-1} = 1 + \mu^{-1}\beta$ e isto mostra que $f_{khg} = -\alpha\mu^{-1}f_{ghk}$.

Temos que

$$\begin{array}{rcl} f_{hgk} & = & [x_2^{(h)}, x_3^{(k)}, x_1^{(g)}] - \alpha^{-1}\mu[x_2^{(h)}, x_1^{(g)}, x_3^{(k)}] \\ & = & [x_2^{(h)}, x_3^{(k)}, x_1^{(g)}] + (\alpha^{-1}\beta - 1)[x_2^{(h)}, x_1^{(g)}, x_3^{(k)}] \end{array}$$

Usando a identidade de Jacobi e anticomutatividade, temos

$$f_{ghk} = [x_2^{(h)}, x_3^{(k)}, x_1^{(g)}] + (\alpha^{-1}\beta - 1)[x_2^{(h)}, x_1^{(g)}, x_3^{(k)}]$$

Logo, $f_{hgk} = f_{ghk}$. Agora,

$$\begin{array}{rcl} f_{hkg} & = & [x_2^{(h)}, x_1^{(g)}, x_3^{(k)}] - \mu^{-1}\alpha[x_2^{(h)}, x_3^{(k)}, x_1^{(g)}] \\ & = & (\mu^{-1}\alpha - 1)[x_1^{(g)}, x_2^{(h)}, x_3^{(k)}] - \mu^{-1}\alpha[x_1^{(g)}, x_3^{(k)}, x_2^{(h)}]. \end{array}$$

Logo, $\mu\beta^{-1}f_{hkg} = f_{gkh} = -\beta^{-1}\alpha f_{ghk}$. Assim, $f_{hkg} = -\mu^{-1}\alpha f_{ghk}$.

Finalmente,

$$\begin{array}{rcl} f_{kgh} & = & [x_3^{(k)}, x_2^{(h)}, x_1^{(g)}] + \beta^{-1}\mu[x_3^{(k)}, x_1^{(g)}, x_2^{(h)}] \\ & = & (-1-\beta^{-1}\mu)[x_2^{(h)}, x_3^{(k)}, x_1^{(g)}] + \beta^{-1}\mu[x_2^{(h)}, x_1^{(g)}, x_3^{(k)}] \end{array}$$

Daí, $-\beta\alpha^{-1}f_{kgh} = f_{hgk} = f_{ghk}$. Portanto, $f_{khg} = -\beta^{-1}\alpha f_{ghk}$. □

Fixamos em $\mathbb{Z}_p^2$ uma ordem $<$ total. Como consequência do lema anterior, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.2.23 *O conjunto das identidades*

$$[x_1^{(g)}, x_3^{(k)}, x_2^{(h)}] - \alpha^{-1}\beta[x_1^{(g)}, x_2^{(h)}, x_3^{(k)}], \tag{2.18}$$

com $g < h < k$, dois a dois linearmente independentes, tais que $gh \notin \langle k \rangle$, $h \notin \langle gk \rangle$ e α, β são os escalares definidos em (2.16) e (2.2), juntamente com as identidades em (2.4), (2.5) e (2.8) formam uma base para o $T_{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p}$-ideal das identidades de $sl_p(\mathbb{K})$ com a graduação de Pauli.

Observação 2.2.24 *Para $p \geq 5$, podemos contabilizar a quantidade de identidades de tamanho 3 necessárias na base. Há $(p+1)(p-1)$ escolhas para g e $p \cdot (p-1)$ escolhas para h. Além de ser simultaneamente linearmente independente com g e h, o terceiro elemento k também é linearmente independente com gh, assim existem $(p-2)(p-1)$ escolhas para k. Como $h \notin \langle gk \rangle$, dentre as escolhas que contabilizamos para k, algumas satisfazem $k = -g + \lambda^{-1}h$ para algum $\lambda \in \mathbb{Z}_p - \{0\}$, então ao contabilizar k contamos $(p-2)$ elementos a mais. Segundo o Lema 2.2.22, a ordem em que as variáveis aparecem no monômio não importa. Logo, o número de polinômios em 2.18 é dado por*

$$\frac{(p^2-1)(p^2-p)[(p-2)(p-1)-(p-2)]}{6} = \frac{(p^2-1)(p^2-p)(p-2)^2}{6}$$

Por exemplo, para $p = 5$ existem 720 identidades de tamanho 3 na base.

2.2.1 Propriedade de Specht e Variedade Minimal

Nesta seção provaremos que a variedade $\mathrm{var}^{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p}(sl_p)$ de álgebras de Lie gerada por $sl_p(\mathbb{K})$ com a graduação de Pauli tem a propriedade de Specht, ou seja, todo T_G-ideal que contém as identidades graduadas de $sl_p(\mathbb{K})$ tem base finita. Isto já foi provado para $sl_2(\mathbb{K})$ em [12] usando a noção de propriedade da base finita para conjuntos, da qual também faremos uso.

Definição 2.2.25 *Uma relação $a \leq b$ em um conjunto A é uma quaseordem, se*

i) $a \leq b \ \forall \ a \in A$

ii) $a \leq b$ *e* $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

Se B é um subconjunto de A quaseordenado, o fecho de B, que denotamos por $\overline{B}$, é definido como

$$\overline{B} = \{a \in A \mid \text{existe } b \in B \text{ tal que } b \leq a\}.$$

Se $B = \overline{B}$ dizemos que B é um subconjunto fechado. Um conjunto A quaseordenado tem a propriedade de base finita se todo subconjunto fechado de A é o fecho de um conjunto finito.

As seguintes afirmações são definições equivalentes para a propriedade de base finita

Teorema 2.2.26 *Seja $(A, \leq)$ um conjunto quaseordenado. São equivalentes:*

i) *Todo subconjunto fechado de A é fecho de um conjunto finito;*

ii) *Toda cadeia ascendente de subconjuntos fechados de A estabiliza;*

iii) *Se B é um subconjunto de A, existe um conjunto finito B_0 tal que*

$$B_0 \subseteq B \subseteq \overline{B_0};$$

iv) *Toda sequência $\{a_i\}_{i \geq 0}$ de elementos de A possui uma subsequência*

$$a_{i_1} \leq a_{i_1} \leq \cdots \leq a_{i_k} \leq \cdots ;$$

v) *Se $\{a_i\}_{i \leq 0}$ é uma sequência de elementos de A, existem índices i, j, com $i < j$, tais que $a_i \leq a_j$;*

vi) *Não existe uma sequência infinita de elementos estritamente descrescente, nem um conjunto infinito de elementos não comparáveis.*

Demonstração. Veja [16, Teorema 2.1]. □

Uma das consequências deste teorema é que a propriedade da base finita é preservada pelo produto cartesiano finito. O seguinte exemplo nos será bastante útil.

Exemplo 2.2.27 *O conjunto $(\mathbb{N}^k, \leq)$ em que $(a_1, \ldots, a_k) \leq (b_1, \ldots, b_k)$ se, e somente se, $a_1 \leq b_1, \ldots, a_k \leq b_k$, satisfaz a propriedade da base finita.*

Relembramos que dado um conjunto B de polinômios de $L\langle X_G\rangle$, dizemos que $f \in L\langle X_G\rangle$ é uma consequência dos polinômios de B, se f pertence ao T_G-ideal gerado por B, que denotamos por $\langle B\rangle_{T_G}$. Se $g \in L\langle X_G\rangle$, g é consequência de f se $g \in \langle f\rangle_{T_G}$.

A seguir definimos em $L\langle X_G\rangle$ uma relação de quaseordem.

Definição 2.2.28 *Sejam f e g polinômios em $L\langle X_G\rangle$. Dizemos que g é uma consequência de f módulo $T_G(L)$, e denotamos por $f \leq g$, se g está no T_G-ideal gerado por $\{f\} \cup T_G(L)$.*

O próximo lema fornece uma condição suficiente para que dados dois polinômios multilineares f e g, tenhamos $f \leq g$. Tal condição será dada em termos do número de indeterminadas de cada grau que aparecem em f e g. Daqui por diante fixamos uma ordenação $g_1, \ldots, g_{p^2-1}$ para os elementos de $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \setminus \{(\bar{0}, \bar{0})\}$, o suporte da graduação de Pauli em $sl_p(\mathbb{K})$.

Definição 2.2.29 *Dado um polinômio multilinear f, denotamos por $d(f)$ a tupla $(d_1, \ldots, d_{p^2-1})$ de números naturais, onde d_i é o número de indeterminadas de grau g_i que aparece em f.*

Consideramos a ordem $\leq$ definida no Exemplo (2.2.27) no conjunto formado pelas (p^2-1)-uplas $d(f)$.

No resultado a seguir, dado um conjunto S com n indeterminadas, denotaremos por P_S o subespaço de $L\langle X_G\rangle$ dos polinômios multilineares de grau n nas indeterminadas em S.

Lema 2.2.30 *Sejam f e g polinômios multilineares em $L\langle X_G\rangle$. Se $f \notin T_G(L)$, $\deg_G f = \deg_G g$ e $d(f) \leq d(g)$, então $f \leq g$.*

Demonstração. Uma vez que o resultado é claro para $g \in T_G(L)$, assumimos que $g \notin T_G(L)$. Sejam S, S' os conjuntos de indeterminadas que aparecem em f e g, respectivamente. Desde que $d(f) \leq d(g)$, podemos assumir que $S \subset S'$. Se $S' = S$, então existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $g - \lambda f \in T_G(L)$, logo $f \leq g$. Caso contrário, seja y uma indeterminada em $S' \setminus S$. Como os G-graus das indeterminadas em S' são diferentes de e, se $P_{S_i} \subset T_G(L)$, onde $S_i = \{x_i\} \cup (S' \setminus S)$, para todo $x_i \in S$, a Proposição 2.1.5 implica que $[x_i, y] \in T_G(L)$ para todo $x_i \in S$. Consequentemente, pela Observação 2.1.4 temos que $[x_i, x_j] \in T_G(L)$ para todo $x_i, x_j \in S$, e isto contradiz a hipótese que $f \notin T_G(L)$. Seja x_i uma indeterminada em S tal que $P_{S_i} \not\subset T_G(L)$, com $S_i = \{x_i\} \cup (S' \setminus S)$ e considere um monômio M em $P_{S_i} \setminus T_G(L)$. Note que $\deg_G M = \deg_G x_i$, uma vez que $\deg_G f = \deg_G g$. Denote por f' o resultado da substituição $x_i \mapsto M$ em f. Temos que $f' \notin T_G(L)$ é um polinômio multilinear nas mesmas indeterminadas de g, logo, existe um escalar λ tal que $g - \lambda f' \in T_G(L)$, portanto, $f \leq g$. □

Observação 2.2.31 *Seja $(\mathfrak{M}, \prec)$ um conjunto quaseordenado. Seja $(\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_k)$ uma partição de $\mathfrak{M}$ em k subconjuntos, isto é, $\mathfrak{M} = \cup_i \mathfrak{M}_i$ e $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M}_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Definimos uma nova quaseordem $\leq$ em $\mathfrak{M}$ da seguinte forma: $m \leq n$ se, e somente se, $m, n \in \mathfrak{M}_i$ para algum i e $m \prec n$. Se $(\mathfrak{M}, \prec)$ tem a propriedade de base finita, então pelo Teorema 2.2.26, item (iv), $(\mathfrak{M}, \leq)$ também a possui.*

Corolário 2.2.32 *Seja $\mathfrak{M}$ um conjunto de polinômios multilineares com as seguintes propriedades: $\mathfrak{M} \cap T_G(L) = \emptyset$ e para $f, g \in \mathfrak{M}$ a igualdade $d(f) = d(g)$ implica que $f = g$. O conjunto quaseordenado $(\mathfrak{M}, \leq)$ tem a propriedade de base finita.*

Demonstração. Seja $S = \{d(f) \mid f \in \mathfrak{M}\}$ com a quaseordem $d(f) \prec d(g)$ se, e somente se, $d(f) \leq d(g)$ e $\deg_G f = \deg_G g$. A Observação 2.2.31 implica que o conjunto S com a quaseordem $\prec$ tem a propriedade de base finita. Seja $\{f_i\}_{i \geq 1}$ uma sequência infinita de elementos de $\mathfrak{M}$. Consequentemente, temos uma sequência infinita $\{d(f_i)\}_{i \geq 1}$ de elementos de S. Pelo Teorema 2.2.26 existe uma subsequência

$$d(f_{i_1}) \prec d(f_{i_2}) \prec \cdots \prec d(f_{i_k}) \prec \cdots .$$

O Lema 2.2.30 implica que

$$f_{i_1} \leq f_{i_2} \leq \cdots \leq f_{i_k} \leq \cdots ,$$

e o resultado segue do Teorema 2.2.26.

□

Definição 2.2.33 *Seja $(n_1, \ldots, n_{p^2-1})$ uma (p^2-1)-upla de inteiros não negativos e defina $q_0, \ldots, q_{p^2-1}$ recursivamente por $q_0 = 0$, $q_1 = n_1$ e $q_{i+1} = q_i + n_i$ para $i = 1, \ldots, p^2 - 2$. Denotamos por $P_{n_1,\ldots,n_{p^2-1}}$ o subespaço de polinômios multilineares nas indeterminadas $x_1, \ldots, x_{q_{p^2-1}}$ tais que x_l tem grau g_i se $q_{i-1} < l \leq q_i$.*

Teorema 2.2.34 *Sejam p um número primo e $\mathbb{K}$ um corpo de característica 0. Denote por L a álgebra de Lie $sl_p(\mathbb{K})$ com a graduação de Pauli pelo grupo $G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. O T_G-ideal das identidades graduadas de L satisfaz a propriedade de Specht.*

Demonstração. Seja J um T_G-ideal que contém $T_G(L)$. Seja $\mathfrak{M} \subseteq J \setminus T_G(L)$ um conjunto de polinômios com a seguinte propriedade: se $J \cap P_{n_1,\ldots,n_{p^2-1}} \not\subset T_G(L)$, então a interseção $\mathfrak{M} \cap P_{n_1,\ldots,n_{p^2-1}}$ tem um único elemento, caso contrário, $\mathfrak{M} \cap P_{n_1,\ldots,n_{p^2-1}} = \emptyset$. Note que $\mathfrak{M} \cup T_G(L)$ gera o T_G-ideal J. Logo, $\mathfrak{M} \cup S$ gera J, onde S é a base finita de $T_G(L)$ no Teorema 2.2.17. O Corolário 2.2.32 implica que existe um subconjunto finito $\mathfrak{M}_0$ de $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}_0}$. O conjunto finito $\mathfrak{M}_0 \cup S$ gera J. $\square$

Finalizamos o estudo da álgebra $sl_p(\mathbb{K})$ com a graduação de Pauli analisando a sequência de codimensões graduadas de $\mathrm{var}^{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p}(sl_p(\mathbb{K}))$, a variedade gerada por $sl_p(\mathbb{K})$.

Definição 2.2.35 *Uma variedade $\mathcal{V}$ é dita minimal, se $\exp^G \mathcal{U} < \exp^G \mathcal{V}$ para qualquer subvariedade própria $\mathcal{U}$.*

Vamos provar que a variedade gerada pela álgebra de Lie $sl_p(\mathbb{K})$, para $p \geq 3$, com a graduação de Pauli é uma variedade minimal. Para a álgebra $sl_2(\mathbb{K})$, A. Giambruno e M. Souza provaram que a correspondente variedade tem crescimento quase polinomial. Nossa prova é baseada em [13, Theorem 3]. A ideia é conseguir contabilizar, para qualquer subvariedade própria de $\mathrm{var}^{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p}(sl_p(\mathbb{K}))$, um número significativo de n-uplas $\mathbf{g}$ que não contribuem para a codimensão.

Lema 2.2.36 *Seja f um polinômio multilinear em $L\langle X_G\rangle \setminus T_G(L)$. Existe um inteiro positivo d tal que $f \leq g$ se g é um polinômio multilinear com $\deg_{h_i} g \geq d$, $i = 1, 2$, para dois elementos linearmente independentes h_1, h_2 em G.*

Demonstração. Denote por $\mathcal{S}$ o conjunto de triplas (h, h_1, h_2) de elementos de G tais que h_1 e h_2 são linearmente independentes sobre $\mathbb{Z}_p$. Seja I_f o T_G-ideal gerado por $\{f\} \cup T_G(L)$. Para cada $s = (h, h_1, h_2)$ em $\mathcal{S}$, vamos construir um polinômio multilinear $f_s(x_1, \ldots, x_k) \in I_f \setminus T_G(L)$ de G-grau h tal que $\deg_G x_i \in \{h_1, h_2\}$, para $i = 1, \ldots, k$. Sejam $\alpha = \deg_G f$ e $\beta \in G$ tal que o conjunto $\{\alpha, \beta\}$ seja uma base para o $\mathbb{Z}_p$-espaço vetorial G. Existem inteiros positivos m, n tais que $h = m\alpha + n\beta$. Como α e β são linearmente independentes sobre $\mathbb{Z}_p$, a Proposição 2.1.5 implica na existência de um monômio multilinear M, o qual não é identidade para L, nas indeterminadas $x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_m^{(\alpha)}$, $x_1^{(\beta)}, \ldots, x_n^{(\beta)}$ (caso $h \in \langle\beta\rangle$, consideramos p variáveis de G-grau α). A substituição $x_1^{(\alpha)} \mapsto f$ em M produz um polinômio em I_f com G-grau h. Denotamos por $f_h(x_1, \ldots, x_k)$ a linearização deste polinômio. Como o conjunto $\{h_1, h_2\}$ é linearmente independente, existem inteiros positivos m_i, n_i tais que $\deg_G x_i = m_i h_1 + n_i h_2$. Assim, pela Proposição 2.1.5 existe um monômio M_i, o qual não é identidade para L, em m_i indeterminadas de G-grau h_1 e n_i indeterminadas de G-grau h_2, para $i = 1, \ldots, k$. Note que $(M_1, \ldots, M_k)$ é uma substituição admissível para f_h e o polinômio $f_h(M_1, \dots, M_k)$, assim obtido, não é uma identidade para L. Agora, seja f_s a linearização de $f_h(M_1, \dots, M_k)$. Sejam $d_s = \max\ \{\deg_{h_1}\ f_s, \deg_{h_2}\ f_s\}$ e $d = \max\{d_s \mid s \in \mathcal{S}\}$. Tome g um polinômio multilinear com $\deg_{h_i}\ g \geq d$, $i = 1, 2$, para dois elementos linearmente independentes h_1, h_2 em G. A tripla $s = (\deg_G\ g, h_1, h_2)$ está em $\mathcal{S}$ e $d(f_s) \leq d(g)$, uma vez que as únicas entradas não-nulas em $d(f_s)$ são $\deg_{h_1}\ f_s$ e $\deg_{h_2}\ f_s$. Assim, pelo Lema 2.2.30 temos que $f_s \leq g$. Desde que $f \leq f_s$, concluímos que $f \leq g$. □

Teorema 2.2.37 *A variedade $var^{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p}(sl_p(\mathbb{K}))$ gerada pela álgebra de Lie $sl_p(\mathbb{K})$ com a graduação de Pauli pelo grupo $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ é uma variedade minimal.*

Demonstração. Seja $\mathcal{W}$ uma subvariedade própria de $\mathrm{var}^{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p}(sl_p(\mathbb{K}))$. Sejam $f \in T_G(\mathcal{W}) \setminus T_G(L)$ e d o número natural dado no lema anterior. Note que, se em um polinômio h aparecem indeterminadas de G-graus g_1 e g_2, os quais são linearmente independentes, com $\deg_{g_i} h \geq d, i = 1, 2$, o Lema 2.2.36 garante que $h \in T_G(\mathcal{W})$. Particionamos $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \setminus \{(\bar{0}, \bar{0})\}$ em $p + 1$ conjuntos $S_1, \dots, S_{p+1}$ de tal forma que dois elementos estão no mesmo subconjunto se, e somente se, são linearmente dependentes sobre $\mathbb{Z}_p$. Note que $\mid S_i \mid = p - 1$ para $i = 1, \dots, p + 1$. Dado um polinômio multilinear h, denote por $\delta_i(h)$ o número de indeterminadas em h cujo G-grau está em S_i. Seja $m = (p - 1)d - 1$. Se $\delta_i(h), \delta_j(h) \geq m + 1$ para $i \neq j$, então h tem grau $\geq d$ com respeito a duas indeterminadas de G-graus linearmente independentes, logo $h \in T_G(\mathcal{W})$. Claramente $c_n^G(\mathcal{W})$ é o número de tuplas $\mathbf{g} \in G^n$ tais que $P_n^{\mathbf{g}} \not\subset T_G(\mathcal{W})$. Para $1 \leq i \leq p + 1$ denote por $\mathcal{T}_i$ o conjunto de tuplas em $(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \setminus \{(\bar{0}, \bar{0})\})^n$ com no máximo m entradas em S_j, para todo $j \neq i$. Temos que $c_n^G(\mathcal{W}) \leq \mid \mathcal{T}_1 \cup \dots \cup \mathcal{T}_{p+1} \mid$. Se $n \geq pm$, então

$$
\begin{aligned}
\mid \mathcal{T}_i \mid = \mid \mathcal{T}_{p+1} \mid = & \sum_{\substack{k_1, \dots, k_p \leq m \\ k_1 + \dots + k_{p+1} = n}} (p-1)^n \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_{p+1}} \\
\leq & \sum_{\substack{k_1, \dots, k_p \leq m \\ k_1 + \dots + k_{p+1} = n}} (p-1)^n \frac{n!}{(n - pm)!} \\
\leq & (p-1)^n (m+1)^p \frac{n!}{(n-pm)!} \leq (p-1)^n (m+1)^p n^{pm},
\end{aligned}
$$

para $1 \leq i \leq p + 1$. Portanto, $c_n^G(\mathcal{W}) \leq (p - 1)^n (p + 1)(m + 1)^p n^{pm}$.

Portanto, $\exp^G\ \mathcal{W} \leq p - 1$ e isto mostra que $\mathrm{var}^{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p}(sl_p(\mathbb{K}))$ é minimal, uma vez que $\exp^G\ \mathrm{var}^{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p}(sl_p(\mathbb{K})) = p^2 - 1$. □

A questão que permanece em aberto é se o Teorema 2.2.17 é válido para qualquer número natural $n \geq 4$. Em [8, Example 3.59] são exibidas as graduações finas em $sl_3(\mathbb{K})$, a menos de isomorfismo, sobre um corpo de característica diferente de 2 e 3. Além da graduação de Pauli, $sl_3(\mathbb{K})$ admite uma graduação fina pelo grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$, onde as componentes homogêneas não nulas são unidimensionais. Porém, para alguns elementos $g \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$, $C(g)$ não é sequer um grupo e requer, portanto, uma abordagem diferente é necessária.

Capítulo 3

Identidades Graduadas de $sl_m(\mathbb{K})$ com a Graduação de Cartan

A graduação de Cartan surge na classificação de álgebras de Lie simples. Estudos que visam investigar as identidades graduadas de uma álgebra de Lie graduada ainda não são abundantes na literatura. As identidades $\mathbb{Z}^{m-1}$-graduadas de $UT_n^{(-)}$, graduação análoga a de Cartan, foram descritas em [25], como consequência das variáveis de grau neutro e do comutador $[x_1^{(e)}, x_2^{(e)}]$, como passo para a obtenção de limites superior e inferior para o comportamento assintótico das codimensões para qualquer graduação elementar em $UT_n^{(-)}$. Anteriormente, Koshlukov havia mostrado em [22] que estes polinômios são a base das identidades graduadas de $sl_2(\mathbb{K})$ com a graduação de Cartan, sobre um corpo infinito de característica diferente de 2. Motivados por tais estudos, inicialmente pensamos que isto era válido para qualquer m, porém mostraram-se necessárias identidades de tamanho 4 (Teoremas 3.1.24 e 3.1.23).

Neste capítulo exibimos a base minimal das identidades graduadas de $sl_m(\mathbb{K})$ com a graduação de Cartan, sobre um corpo de característica zero, e descrevemos base para subálgebras de Lie graduadas de $M_m(\mathbb{K})^{(-)}$.

Assim como no capítulo anterior, $\mathbb{K}$ denota um corpo de característica zero.

3.1 A Graduação de Cartan em $sl_m(\mathbb{K})$

A graduação de Cartan é o exemplo mais clássico de graduação em álgebras de Lie. Seja $\mathcal{L}$ uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e de característica zero. Seja $\mathcal{H}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathcal{L}$ com sistema de raízes Φ. A decomposição em espaços-raiz

$$\mathcal{L} = \mathcal{H} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathcal{L}_\alpha \right)$$

pode ser vista como uma graduação pelo reticulado de raízes $\mathbb{Z}\Phi \cong \mathbb{Z}^r$, onde $r = \dim \mathcal{H}$ e a componente homogênea correspondente ao elemento neutro é $\mathcal{L}_e = \mathcal{H}$. Mais detalhes sobre a decomposição de Cartan, especialmente sobre sistema de raízes e a célebre classificação de Killing-Cartan, podem ser vistos em [17].

A álgebra $sl_m(\mathbb{K})$ admite uma decomposição de Cartan via a subálgebra das matrizes diagonais. Contudo, a graduação de Cartan pode ser vista como a restrição à subálgebra $sl_m(\mathbb{K})$ da graduação em $M_m(\mathbb{K})$, também chamada de graduação de Cartan, pelo subgrupo G de $\mathbb{Z}^m$, isomorfo a $\mathbb{Z}^{m-1}$, gerado pelos elementos $\alpha_{i,j} := e_i - e_j$, sendo que e_i denota a m-upla de inteiros com 1 na i-ésima entrada e 0 nas demais, tal que o grau da matriz elementar E_{ij} é $\alpha_{i,j}$, quando i, j são distintos. Lembre-se que tais matrizes compõem a base canônica de $sl_m(\mathbb{K})$, descrita no capítulo 1, e note que as matrizes restantes, $h_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1}$, pertencem a componente homogênea de grau e, como é de se esperar uma vez que os h_i formam uma base para a subálgebra de Cartan das matrizes diagonais de traço zero. Usaremos esta versão da graduação de Cartan para descrever o T_G-ideal das identidades graduadas de $sl_m(\mathbb{K})$ com esta graduação. Sugestivamente, denotamos por Φ o conjunto $\{\alpha_{i,j} \mid i \neq j\}$, cujos elementos chamaremos de raízes. O suporte da graduação de Cartan em $sl_m(\mathbb{K})$ é o conjunto $\Phi \cup \{0\}$. Assim, é imediato que os polinômios

$$x_1^{(g)}, \text{ se } g \in G \setminus (\Phi \cup \{0\}), \tag{3.1}$$

são identidades graduadas para $sl_m(\mathbb{K})$ com graduação de Cartan.

A partir de agora, a menos de menção explícita do contrário, denotaremos por L a álgebra de Lie $sl_m(\mathbb{K})$ com a graduação de Cartan. Como já mencionado, L_e consiste das matrizes diagonais de traço zero e como quaisquer duas matrizes diagonais comutam, o polinômio

$$[x_1^{(e)}, x_2^{(e)}], \tag{3.2}$$

é uma identidade graduada para L.

Observação 3.1.1 *A nossa hipótese sobre a característica de* $\mathbb{K}$ *nos permite considerar apenas as identidades graduadas multilineares. Se* $f(x_1^{(g_1)},\ldots,x_n^{(g_n)})$ *é tal que* $g_r = \alpha_{i_r,j_r} \in \Phi$*, então* f *é uma identidade graduada para* L *se, e só se,* $f(E_{i_1j_1},\ldots,E_{i_nj_n}) = 0$*, uma vez que os espaços* $L_{\alpha_{i,j}}$ *são unidimensionais para todo elemento* $\alpha_{i,j}$ *de* Φ*. Segue da própria definição das raízes que* $\alpha_{i,j}+\alpha_{k,l}$ *pertence ao suporte da graduação se, e somente se,* $j = k$ *ou* $i = l$*.*

Neste momento é útil destacar que em alguns resultados deste capítulo, faremos uso da notação genérica g_i para representar elementos de Φ. Nesta situação, convencionamos a operação do grupo como multiplicativa. Porém, sempre que estivermos explicitamente com as raízes $\alpha_{i,j}$ usaremos a notação aditiva, assim como na observação anterior.

Se $m \geq 3$ é fácil verificar, via substituição por matrizes elementares, que os seguintes polinômios em $P_4^{\mathbf{g}}$

$$[x_4,x_1,x_2,x_3]-[x_4,x_3,x_2,x_1], \text{ para } \mathbf{g} = (\alpha_{i,j},\alpha_{j,i},\alpha_{i,j},\alpha_{j,k}), \tag{3.3}$$
$$[x_4,x_3,x_2,x_1]-2[x_4,x_2,x_1,x_3], \text{ para } \mathbf{g} = (\alpha_{i,j},\alpha_{j,i},\alpha_{i,k},\alpha_{k,j}), \tag{3.4}$$
$$[x_4,x_3,x_2,x_1]+[x_4,x_2,x_3,x_1], \text{ para } \mathbf{g} = (\alpha_{i,j},\alpha_{j,k},\alpha_{k,i},\alpha_{i,j}), \tag{3.5}$$
$$[x_4,x_3,x_2,x_1]+[x_4,x_3,x_1,x_2], \text{ para } \mathbf{g} = (\alpha_{i,j},\alpha_{j,k},\alpha_{k,i},\alpha_{i,k}), \tag{3.6}$$
$$2[x_4,x_1,x_3,x_2]-[x_4,x_3,x_2,x_1], \text{ para } \mathbf{g} = (\alpha_{i,j},\alpha_{j,k},\alpha_{k,j},\alpha_{j,k}), \tag{3.7}$$

onde $1 \leq i,j,k \leq m$ são inteiros distintos, são identidades graduadas para L.

Denotaremos por I o T_G-ideal gerado pelos polinômios em (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) e (3.7). Vamos provar que I coincide com $T_G(L)$. Um resultado bastante útil em nossas demonstrações é a verificação de que, se um monômio de Lie com colchetes à esquerda é uma identidade graduada, então pertence a I.

Lema 3.1.2 *Seja* $M = [x_1^{(g_1)},\cdots,x_n^{(g_n)}] \in L\langle X_G\rangle$ *um monômio de Lie normado à esquerda. Se* M *é uma identidade polinomial* G*-graduada para* L*, então* M *pertence ao* T_G*-ideal gerado pelos polinômios em (3.1) e (3.2). Em particular,* M *está no* T_G*-ideal* I*.*

Demonstração. Denotemos por J o T_G-ideal gerado pelos polinômios em (3.1) e (3.2). A prova será por indução sobre o comprimento n do monômio. Os casos iniciais $n = 1$ e $n = 2$ são triviais, assumiremos então $n \geq 3$. Seja $M' = [x_1^{(g_1)},\cdots,x_{n-1}^{(g_{n-1})}]$. Se M' é identidade, então, pela hipótese de indução, está em J. Consequentemente, $M \in J$. Agora, supondo que $M' \notin T_G(L)$, vamos considerar dois casos: $\deg_G M' = g = \alpha_{i,j}$ e $\deg_G M' = e$. No primeiro, o resultado de toda substituição admissível em M' é um múltiplo escalar de E_{ij}, portanto, M é identidade se, e só se, $[x_1^{(g)},x_2^{(g_n)}] \in T_G(L)$. Por sua vez, isso ocorre se, e somente se,

$gg_n \notin \operatorname{supp} L$ e isso implica em $M \in J$. Suponha que $\deg_G M' = e$. Se $g_n = e$, então M é consequência do polinômio em (3.2) e não há mais o que fazer. Assim, podemos considerar que $g_n \neq e$, digamos $g_n = \alpha_{i,j}$. Note que $g_1 \cdots g_{n-2} = (g_{n-1})^{-1}$, como $M' \notin T_G(L)$, temos necessariamente $g_{n-1} = \alpha_{k,l} \in \Phi$. Por conseguinte, o fato que $M \in T_G(L)$ implica em $N = [x_1^{(h)}, x_{n-1}^{(g_{n-1})}, x_n^{(g_n)}] \in T_G(L)$, onde, a fim de simplificar a notação, denotamos $(g_{n-1})^{-1} = h$. Observe que M é consequência de N via o homomorfismo $x_1^{(h)} \mapsto [x_1^{(g_1)}, \cdots, x_{n-2}^{(g_{n-2})}]$. Logo, é suficiente demonstrarmos que $N \in J$. Ora, a avaliação em N por matrizes elementares resulta na igualdade $[E_{ll}, E_{ij}] - [E_{kk}, E_{ij}] = 0$, a qual implica em $\{k, l\} \cap \{i, j\} = \emptyset$, conforme a Observação 3.1.1. Portanto, $[x_1^{(h)}, x_n^{(g_n)}], [x_{n-1}^{(g_{n-1})}, x_n^{(g_n)}]$ pertencem ao conjunto de polinômios em (3.1). A identidade de Jacobi nos permite escrever

$$[x_1^{(h)}, x_{n-1}^{(g_{n-1})}, x_n^{(g_n)}] = [x_1^{(h)}, x_n^{(g_n)}, x_{n-1}^{(g_{n-1})}] + [x_1^{(h)}, [x_{n-1}^{(g_{n-1})}, x_n^{(g_n)}]]$$

e o polinômio do lado direito está em J. □

No Capítulo 1 apresentamos a definição de n-upla boa, noção importante em todo o nosso trabalho. Aqui, na graduação de Cartan, algumas entradas da n-upla podem ser o elemento neutro, uma vez que o mesmo pertence ao suporte. Todavia, são as entradas não-triviais que determinam se a mesma é boa. Ilustraremos isso com um exemplo. Considere a terna $\mathbf{g} = (\alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,2})$. Via substituição por matrizes elementares, é fácil verificar que o monômio $M = [x_1, x_3, x_2]$ não é identidade para L. Isso é o suficiente para garantir, por exemplo, que a 5-upla $\mathbf{g}' = (\alpha_{1,3}, e, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,2}, e)$ é boa, pois o monômio obtido ao se distribuir as indeterminadas de G-grau e em qualquer posição no monômio M, exceto aquela em que as mesmas aparecem nas duas primeiras posições, não é identidade.

O próximo resultado visa caracterizar as n-uplas boas e o que discutimos nos diz que é suficiente analisar esta propriedade em Φ^n. A terna $\mathbf{g} = (\alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,2})$, utilizada no exemplo anterior, pode ser ordenada de maneira que seus elementos sejam da forma $\alpha_{t_i, t_{i+1}}$, para $i = 1, 2, 3$. Basta permutarmos, entre si, a segunda e a terceira entrada. Mostraremos que isso sempre pode ser feito em uma n-upla boa.

Cabe ressaltar alguns pontos sobre permutações. As permutações $\sigma = (1\ 2\ 3)$ e $\sigma^2 = (1\ 3\ 2)$ aplicadas à terna $\mathbf{g}$ produzem $(\alpha_{3,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3})$ e $(\alpha_{2,3}, \alpha_{3,2}, \alpha_{1,3})$, respectivamente. De modo grosseiro, é como se aplicássemos um *shift* à direita nos elementos de $\mathbf{g}$. Quando aplicarmos permutações desse tipo, diremos que permutamos $\mathbf{g}$ ciclicamente. Antes de enunciarmos a proposição seguinte, relembramos um conceito da teoria de conjuntos.

Observação 3.1.3 *Uma partição de um conjunto X é um par (A, B) de subconjuntos de X tais que $X = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$. Quando um dos conjuntos A e B é o vazio, a partição é dita trivial.*

Proposição 3.1.4 *Seja* $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ *uma* n*-upla com entradas em* Φ. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) A n*-upla* $\mathbf{g}$ *é boa;*

(ii) $g_1 \cdots g_n \in \Phi \cup \{e\}$ *e para toda partição não trivial* (A, B) *de* $\{1, \ldots, n\}$ *existem* $a \in A$ *e* $b \in B$ *tais que* $[L_{g_a}, L_{g_b}] \neq 0$;

(iii) Existe uma permutação σ *em* S_n *e uma ênupla* $(t_1, \ldots, t_{n+1})$ *com entradas em* $\{1, \ldots, m\}$ *tais que* $g_{\sigma(i)} = \alpha_{t_i, t_{i+1}}$, *para* $i = 1, \ldots, n$.

Demonstração.
$(i) \Rightarrow (ii)$

Note que se $g_1 \cdots g_n \notin \Phi \cup \{e\}$ a n-upla $\mathbf{g}$ é obviamente ruim. Suponha que exista uma partição não trivial (A, B) de $\{1, \ldots, n\}$ com a propriedade que $[L_{g_a}, L_{g_b}] = 0$, para todo $a \in A$ e $b \in B$. Afirmamos que $[L_{g_{a_1}}, \cdots, L_{g_{a_r}}, L_{g_b}] = 0$, para todo $a_1, \ldots, a_r \in A$ e qualquer $b \in B$. A prova é por indução em r. O caso $r = 1$ é a própria hipótese. Sendo E_b, E_{a_i} as matrizes unitárias correspondentes à base de L_{g_b} e $L_{g_{a_i}}$, respectivamente, a identidade de Jacobi implica em

$$[E_{a_1}, \cdots, E_{a_r}, E_{g_b}] = [E_{a_1}, \cdots, E_{a_{r-1}}, E_{g_b}, E_{a_r}] + [E_{a_1}, \cdots, E_{a_{r-1}}, [E_{a_r}, E_{g_b}]] = 0,$$

que prova a afirmação. No entanto, isto significa que a n-upla $\mathbf{g}$ é ruim, uma contradição.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

A prova desta implicação consiste na construção de um algoritmo para a obtenção de tal σ. Para $n = 2$ não é difícil observar que o fato da n-upla ser boa implica em (iii). Considere a terna $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$, onde explicitamente $g_1 = \alpha_{i,j}$,$g_2 = \alpha_{k,l}$ e $g_3 = \alpha_{u,v}$. Se i, j, k, l, u e v são inteiros distintos, é claro que $\mathbf{g}$ é ruim. Supondo que isto não ocorre, o produto de dois dos $g_i's$ está no suporte, o qual podemos assumir ser $g_1 g_2$. Isso implica que, reordenando se necessário, $g_i = \alpha_{t_i, t_{i+1}}$, para $i = 1, 2$. Assim, se $\mathbf{g}$ é boa, então $u = t_3$ – e nesse caso temos o desejado – ou $v = t_1$, daí fazemos g_3 iniciar a terna. A condição *(ii)* nos permite provar que isso acontece para qualquer $n \geq 2$. Dividimos em dois casos:

Caso A: $g_1 \cdots g_n = e$.

Aplicamos indução em n. O resultado é óbvio para $n = 2$. Sejam t_1, t_2 números inteiros tais que $g_1 = \alpha_{t_1, t_2}$. Como $g_1 \in \Phi$, a igualdade $g_1 \cdots g_n = e$ nos diz que existe um índice j tal que $g_j = \alpha_{t_2, t_3}$, uma vez que o fator e_{t_2} é cancelado no produto $g_1 \cdots g_n$. Reordenamos as entradas de $\mathbf{g}$ e assumimos, sem perda de generalidade, que $j = 2$. Podemos repetir esse processo até obtermos inteiros $t_1, \ldots, t_r$ tais que, depois de reordenarmos as entradas da n-upla $\mathbf{g}$, a igualdade $g_i = \alpha_{t_i,t_{i+1}}$ é válida para $i = 1, \ldots, r-1$, enquanto que $g_r = \alpha_{t_r,t_1}$. Se $r = n$, a afirmação está provada. Assumindo $r < n$, temos $g_{r+1} \cdots g_n = e$ e a hipótese de indução implica na existência de inteiros $t_{r+1}, \ldots, t_n, t_{n+1}$ tais que, após a reordenação das entradas de $(g_{r+1}, \ldots, g_n)$, satisfazem $g_i = \alpha_{t_i,t_{i+1}}$ para $i = r+1, \ldots, n$. Se $t_{r+1} = t_1$, então a igualdade $g_i = \alpha_{t_i,t_{i+1}}$ é válida para todo $i = 1, \ldots, n$, o que prova a afirmação. Supondo que (ii) é válida, existem $a \in \{1, \ldots, r\}$ e $b \in \{r+1, \ldots, n\}$ tais que $\alpha_{t_a,t_{a+1}} + \alpha_{t_b,t_{b+1}} \in \Phi \cup \{e\}$. Temos então duas possibilidades: $t_{a+1} = t_b$ ou $t_a = t_{b+1}$. No primeiro caso, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $a = r$ e $b = r+1$ depois de permutarmos ciclicamente as entradas de $(g_1, \ldots, g_r)$ e $(g_{r+1}, \ldots, g_n)$. Desde que $g_1 \cdots g_r = e$, segue-se que $t_1 = t_{a+1}$. Portanto, $t_1 = t_{a+1} = t_b = t_{r+1}$, o que resolve este caso. Se $t_{b+1} = t_a$, permutamos ciclicamente as entradas de $(g_1, \ldots, g_r)$ e $(g_{r+1}, \ldots, g_n)$ para que desta vez, sem perda de generalidade, tenhamos $a = 1$ e $b = n$. Como os elementos nas ênuplas $(g_1, \ldots, g_r)$ e $(g_{r+1}, \ldots, g_n)$ são da forma $g_i = \alpha_{t_i,t_{i+1}}$, o fato que $g_1 \cdots g_r = g_{r+1} \cdots g_n = e$ implica em $g_r = \alpha_{t_r,t_a}$ e $g_{r+1} = \alpha_{t_{b+1},t_{r+2}}$ e isto conclui a demonstração.

Caso B: $g_1 \cdots g_n \neq e$.

Suponha que $g_1 \cdots g_n = \alpha_{u,v}$. Então, pelo menos um dos g_i's tem como parcela positiva e_u, isto é, existe j tal que $g_j = \alpha_{u,u_2}$. Reordenando as entradas de $\mathbf{g}$, podemos assumir que $j = 1$ e escrevermos $u_1 = u$. Se $u_2 \neq v$, pela mesma razão que argumentamos no caso A, existe j tal que $g_j = \alpha_{u_2,u_3}$. Novamente reordenamos as entradas de $\mathbf{g}$ e assumimos que $j = 2$. Repetindo o argumento, obtemos um inteiro positivo k e uma ênupla $(u_1, \ldots, u_k)$, cujas entradas estão em $\{1, \ldots, m\}$ tais que $u_1 = u$, $g_i = \alpha_{u_i,u_{i+1}}$ para todo $i = 1, \ldots, k-1$ e $g_k = \alpha_{u_k,v}$. Se $k = n$, o resultado está provado. Supondo $k < n$, segue-se que $g_{k+1} \cdots g_n = e$. Consequentemente, pelo caso anterior, existe uma ênupla de números inteiros $(u_{k+1}, \ldots, u_n, u_{n+1})$ tal que, depois de reordenarmos as entradas de $(g_{k+1}, \ldots, g_n)$, temos $g_i = \alpha_{u_i,u_{i+1}}$ para $i = k+1, \ldots, n$, sendo que $u_{k+1} = u_{n+1}$. Agora, segue da condição *(ii)* a existência de $1 \leq a \leq k$ e $k+1 \leq b \leq n$ tais que $\alpha_{u_a,u_{a+1}} + \alpha_{u_b,u_{b+1}} \in \Phi \cup \{e\}$. Isto nos dá duas possibilidades: $u_b = u_{a+1}$ ou $u_{b+1} = u_a$. No primeiro caso, reordenando as entradas de $(g_{k+1}, \ldots, g_n)$ ciclicamente, assumimos que $b = k+1$. Seja α a permutação de S_n tal que

$$(g_{\sigma(1)}, \ldots, g_{\sigma(n)}) = (g_1, \ldots, g_a, g_{k+1}, \ldots, g_n, g_{a+1}, \ldots, g_k),$$

e assim, definimos

$$(t_1, \ldots, t_n) = (u_1, \ldots, u_a, u_{k+1}, \ldots, u_n, u_{a+1}, \ldots, u_k, u_{k+1}).$$

Note que $u_{k+1} = u_b = u_{a+1}$ e como observado antes, $u_{n+1} = u_{k+1}$. Portanto, $g_{\sigma(i)} = \alpha_{t_i,t_{i+1}}$ para todo $i = 1, \ldots, n$. O caso em que $u_{b+1} = u_a$ é provado de maneira análoga.

$(iii) \Rightarrow (i)$

É claro que se a condição (iii) é válida a n-upla $\mathbf{g}$ é boa. $\square$

Observe que se $\mathbf{g} \in \Phi^n$ satisfaz $g_1 \cdots g_n = g \in \Phi$, dados dois monômios $M, N \in P_n^{\mathbf{g}} \setminus T_G(L)$, deve existir um escalar λ, não-nulo, tal que $M - \lambda N \in T_G(L)$, uma vez que L_g é um espaço unidimensional. Nossa "aposta" de que I coincide com $T_G(L)$, deve resultar que o espaço $P_n^{\mathbf{g}}$, módulo $I \cap P_n^{\mathbf{g}}$, é unidimensional. Os próximos resultados nos ajudarão a demonstrar este fato. Primeiro, vejamos que isto vale para $n = 3$.

Lema 3.1.5 *Seja $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$ uma tripla em Φ^3 com $g_i = \alpha_{t_i, t_{i+1}}$ e $g_1 g_2 g_3 \neq e$. Denote por J o T_G-ideal de $L\langle X_G \rangle$ gerado pelos polinômios em (3.1), (3.2). Se M é um monômio em $P_3^{\mathbf{g}} \setminus T_G(L)$, então $M \sim_J [x_1, x_2, x_3]$.*

Demonstração. O conjunto $\{[x_1, x_2, x_3], [x_1, x_3, x_2]\}$ é uma base para o espaço $P_3^{\mathbf{g}}$. Observe que $g_1 g_3 \notin \Phi \cup \{e\}$, logo $[x_1, x_3, x_2] \in J$. Portanto, todo polinômio de $P_3^{\mathbf{g}}$ é, módulo J, um múltiplo escalar de $[x_1, x_2, x_3]$. Em particular, $M \equiv_J \lambda [x_1, x_2, x_3]$ para algum escalar λ não-nulo, ou seja, $M \sim_J [x_1, x_2, x_3]$. $\square$

Até agora ainda não utilizamos as identidades de tamanho 4 que geram, juntamente com as identidades (3.1) e (3.2), o T_G-ideal I definido no início deste capítulo. A sua necessidade se tornará explícita no lema seguinte, o qual é um passo para a generalização do resultado anterior.

Usaremos a notação $\sim$ para a equivalência na Definição 2.1.2 relativa ao T_G-ideal I. A fim de facilitar a compreensão, indicamos acima do símbolo $\sim$ a identidade ou resultado da qual a equivalência segue. Por exemplo, $M \overset{L.\ 3.1.5}{\sim} N$ indica que a equivalência $M \sim N$ é consequência do Lema 3.1.5.

Lema 3.1.6 *Seja $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3, g_4) \in \Phi^4$, onde $g_i = \alpha_{t_i, t_{i+1}}$ para $i = 1, \ldots, 4$ e $g_1 g_2 g_3 g_4 \neq e$. Se M é um monômio em $P_4^{\mathbf{g}} \setminus T_G(L)$, então $M \sim [x_1, x_2, x_3, x_4]$.*

Demonstração. É suficiente mostrarmos que os monômios da base canônica de $P_4^{\mathbf{g}}$, que não são identidades para L, são equivalentes. Seja $\tau = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$ uma 5-upla de inteiros positivos que satisfazem $g_i = \alpha_{t_i, t_{i+1}}$, para todo $i = 1, \ldots, 4$ e denotemos por n_τ o número de inteiros distintos em τ. Uma vez que $g_1 \cdots g_4 \neq e$, segue-se que $n_\tau > 2$. Iremos verificar em cada caso $n_\tau = 3, 4$ e 5, quais monômios da forma $[x_4, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}]$ são identidades para L e provar a equivalência entre aqueles que não estão em $T_G(L)$. Tal verificação é fácil, porém com muitos cálculos. Por esta razão, os apresentamos no Apêndice A. No caso em que $n_\tau = 5$, o monômio $[x_4, x_3, x_2, x_1]$ é o único na base canônica de $P_4^{\mathbf{g}}$ que não é identidade, logo, o resultado é válido. Agora assuma que $n_\tau = 4$. Como $t_i \neq t_{i+1}$ para todo $i =$

$1, 2, 3, 4$ e $t_5 \neq t_1$, concluímos que existem inteiros distintos i, j, k, l para os quais τ é uma das seguintes ênuplas: (i, j, i, k, l), (i, j, k, i, l), (i, j, k, j, l), (i, j, k, l, j) ou (i, j, k, l, k). Analisando cada um desses casos, verificamos que $[x_4, x_3, x_2, x_1]$ é o único monômio na base canônica de $P_4^{\mathbf{g}}$ que não é identidade. Resta-nos então o último caso, quando $n_\tau = 3$. Sejam i, j, k inteiros distintos, então τ é uma das seguintes 5-uplas: (i, j, i, j, k), (i, j, i, k, j), (i, j, k, i, j), (i, j, k, i, k) ou (i, j, k, j, k). As quádruplas $\mathbf{g}$, correspondentes a estas 5-uplas, e os monômios da base canônica de $P_4^{\mathbf{g}}$ que não são identidades para L são:

(i)	$(\alpha_{i,j}, \alpha_{j,i}, \alpha_{i,j}, \alpha_{j,k})$	$[x_4, x_1, x_2, x_3], [x_4, x_3, x_2, x_1]$
(ii)	$(\alpha_{i,j}, \alpha_{j,i}, \alpha_{i,k}, \alpha_{k,j})$	$[x_4, x_3, x_2, x_1], [x_4, x_2, x_1, x_3], [x_4, x_2, x_3, x_1]$
(iii)	$(\alpha_{i,j}, \alpha_{j,k}, \alpha_{k,i}, \alpha_{i,j})$	$[x_4, x_3, x_2, x_1], [x_4, x_2, x_3, x_1]$
(iv)	$(\alpha_{i,j}, \alpha_{j,k}, \alpha_{k,i}, \alpha_{i,k})$	$[x_4, x_3, x_2, x_1], [x_4, x_3, x_1, x_2]$
(v)	$(\alpha_{i,j}, \alpha_{j,k}, \alpha_{k,j}, \alpha_{j,k})$	$[x_4, x_1, x_3, x_2], [x_4, x_3, x_2, x_1], [x_4, x_3, x_1, x_2]$

A equivalência dos dois monômios listados em (i), (iii) e (iv) segue dos polinômios em (3.3), (3.5) e (3.6), respectivamente. Portanto, o resultado é válido nestes casos. Note que no caso (ii) o monômio $[x_4, x_2, [x_1, x_3]]$ pertence a I, consequentemente

$$[x_4, x_2, x_3, x_1] \equiv_I [x_4, x_2, x_1, x_3] \overset{(3.4)}{\sim} [x_4, x_3, x_2, x_1].$$

Já no caso (v), o monômio $[x_4, [x_1, x_3], x_2]$ está em I, daí obtemos que

$$[x_4, x_3, x_1, x_2] \equiv_I [x_4, x_1, x_3, x_2] \overset{(3.7)}{\sim} [x_4, x_3, x_2, x_1].$$

Portanto, qualquer que seja a quádrupla $\mathbf{g}$, os monômios da base canônica de $P_4^{\mathbf{g}}$ que não são identidades são equivalentes, como queríamos mostrar.

□

Lema 3.1.7 *Seja $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ uma n-upla em Φ^n com $g_i = \alpha_{t_i, t_{i+1}}$ para $i = 1, \ldots, n$ e $g_1 \cdots g_n \neq e$. Seja M um monômio em $P_n^{\mathbf{g}}$ que pode ser escrito com as* *indeterminadas $x_1, \dots, x_n$, nesta ordem e com um arranjo adequado de colchetes. Se $M \notin T_G(L)$ então, $M \sim [x_1, \cdots, x_n]$.*

Demonstração. O caso $n = 2$ é claro, enquanto os casos $n = 3$ e $n = 4$ seguem do Lema 3.1.5 e do Lema 3.1.6, respectivamente. A prova do caso geral é por indução em n. Assuma que $n > 4$ e que o resultado é válido para monômios multilineares com até $n-1$ variáveis. Dividimos a prova em alguns casos e inicialmente mostramos que o resultado é válido no caso especial em que o monômio M é o colchete de um monômio, nas indeterminadas $x_1, \dots, x_{n-1}$, com x_n.

Afirmação: *Seja N um monômio nas indeterminadas $x_1, \dots, x_{n-1}$, nesta ordem, o qual não é identidade, então $[N, x_n] \sim [x_1, \cdots, x_n]$.* Se $g_1 \cdots g_{n-1} \neq e$, a hipótese de indução aplica-se e concluímos que $N \sim [x_1, \cdots, x_{n-1}]$. Consequentemente, $[N, x_n] \sim [x_1, \cdots, x_n]$. Caso contrário, podemos escrever $N = [N_1, N_2]$ com $\deg_G N_1 = (\deg_G N_2)^{-1} \neq e$, pois $N \notin T_G(L)$ e desse modo não pode ser consequência da identidade (3.2). A hipótese de indução aplicada aos monômios N_1, N_2 resulta em $N_1 \sim [x_1, \cdots, x_k]$ e $N_2 \sim [x_{k+1}, \cdots, x_{n-1}]$, onde $1 \leq k < n-1$. Portanto, $[N, x_n] \sim [[x_1, \cdots, x_k], [x_{k+1}, \cdots, x_{n-1}], x_n]$. Desse modo, a afirmação será válida se provarmos a equivalência

$$[[x_1, \cdots, x_k], [x_{k+1}, \cdots, x_{n-1}], x_n] \sim [x_1, \cdots, x_n]. \tag{3.8}$$

Suponha que $\deg_G[x_{k+1}, \cdots, x_{n-2}] \neq e$. Neste caso, reduzimos a um monômio de grau 4 e pelo Lema 3.1.6, temos

$$[[x_1, \cdots, x_k], [x_{k+1}, \cdots, x_{n-1}], x_n] \sim [x_1, \cdots, x_k, [x_{k+1}, \cdots, x_{n-2}], x_{n-1}, x_n].$$

Note que $\deg_G[x_1, \cdots, x_k, [x_{k+1}, \cdots, x_{n-2}]] = \alpha_{t_1, t_{n-1}} = \alpha_{t_n, t_{n-1}} \neq e$, então a hipótese de indução se aplica e obtemos a equivalência (3.8). Agora, assuma que $\deg_G[x_{k+1}, \cdots, x_{n-2}] = e$. Sejam $P = [x_1, \cdots, x_k]$, $Q = [x_{k+1}, \cdots, x_{n-3}]$ e observe que este último também é um monômio com G-grau diferente de e, uma vez que $\deg_G Q = (\deg_G x_{n-2})^{-1} \neq e$. Por conseguinte, a hipótese de que $\deg_G N = e$, resulta em $\deg_G P = (\deg_G x_{n-1})^{-1}$. Assim,

$$\begin{aligned}
[[x_1, \cdots, x_k], [x_{k+1}, \cdots, x_{n-1}], x_n] = [P, [Q, x_{n-2}, x_{n-1}], x_n] &= -[Q, x_{n-2}, x_{n-1}, P, x_n] \\
&\overset{(3.2)}{\sim} -[Q, x_{n-2}, P, x_{n-1}, x_n] = [P, [Q, x_{n-2}], x_{n-1}, x_n] \\
&\overset{L.\ 3.1.5}{\sim} [P, Q, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n].
\end{aligned}$$

Note que $\deg_G [P, Q, x_{n-2}] = (\deg_G x_{n-1})^{-1} \neq e$, daí usamos o Lema 3.1.5 para concluir que $[P, [Q, x_{n-2}]] \sim [P, Q, x_{n-2}]$ e obtermos a última equivalência acima.

Por fim, a hipótese de indução implica em $[P, Q, x_{n-2}] \sim [x_1, \cdots, x_{n-2}]$. Portanto, (3.8) é válida e a afirmação está provada.

Para demonstrarmos o caso geral, escrevamos $M = [M_1, M_2]$, onde M_2 é um monômio de grau no mínimo dois. Como $M \notin T_G(L)$, o caso $\deg_G M_1 = \deg_G M_2 = e$ não ocorre. Consideremos, inicialmente, que os G-graus de M_1 e M_2 pertencem a Φ. Então, segue da hipótese de indução, aplicada a M_1 e M_2, que $M \sim [[x_1, \cdots, x_k], [x_{k+1}, \cdots, x_n]]$, com $1 \leq k < n$. Se $\deg_G M_1 = e$, a hipótese de indução agora garante que $M_2 \sim [x_{k+1}, \cdots, x_n]$. De modo análogo ao que fizemos na prova da afirmação, escrevamos $M_1 = [M_{1,1}, M_{1,2}]$, com $\deg_G M_{1,1} = (\deg_G M_{1,2})^{-1} \neq e$. Seja y uma indeterminada de G-grau $\alpha_{t_{k+1}, t_{n+1}}$. A demonstração da afirmação nos diz que $[M_{1,1}M_{1,2}, y] \sim [x_1, \cdots, x_k, y]$. Agora, via o homomorfismo em que $y \mapsto M_2$, concluímos que $M \sim [[x_1, \cdots, x_k], [x_{k+1}, \cdots, x_n]]$. No caso restante, $\deg_G M_2 = e$, usando o mesmo raciocínio, sendo que desta vez usamos a hipótese de indução em M_1 e a prova da afirmação para M_2, concluímos que $M \sim [[x_1, \cdots, x_k], [x_{k+1}, \cdots, x_n]]$. Portanto, a prova do caso geral resume-se a demonstrar a equivalência

$$[[x_1, \cdots, x_k], [x_{k+1}, \cdots, x_n]] \sim [x_1, \cdots, x_n]. \tag{3.9}$$

Dividimos a prova de (3.9) em dois casos:

Caso A: $\deg_G [x_1, \cdots, x_k] \neq e$.

Se $\deg_G [x_{k+1}, \cdots, x_{n-1}] \neq e$, então (3.9) segue do Lema 3.1.5 e da afirmação. Caso contrário, $\deg_G [x_{k+1}, \cdots, x_{n-2}] = (\deg_G x_{n-1})^{-1} \neq e$ e (3.9) segue do Lema 3.1.6 juntamente com a hipótese de indução. Portanto, concluímos que a equivalência (3.9) é válida se $\deg_G [x_1, \cdots, x_k] \neq e$.

Caso B: $\deg_G [x_1, \cdots, x_k] = e$.

Neste caso, temos $k > 1$ e $\deg_G [x_1, \cdots, x_{k-1}] = (\deg_G x_k)^{-1} \neq e$. O fato que $g_1 \cdots g_n \neq e$ e $\deg_G [x_1, \cdots, x_k] = e$ implicam em $\deg_G [x_{k+1}, \cdots, x_n] \neq e$. Portanto, o Lema 3.1.5 nos diz que

$$[[x_1, \cdots, x_k], [x_{k+1}, \cdots, x_n]] \sim [[x_1, \cdots, x_{k-1}], [x_k, [x_{k+1}, \cdots, x_n]]].$$

Segue da hipótese de indução e do caso anterior que

$$\begin{aligned}[][[x_1, \cdots, x_{k-1}], [x_k, [x_{k+1}, \cdots, x_n]]] &\sim [[x_1, \cdots, x_{k-1}], [x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n]] \\ &\sim [x_1, \cdots, x_n].\end{aligned}$$

Concluímos que (3.9) é válida. $\square$

Observação 3.1.8 *Seja σ uma permutação em S_n. O automorfismo de $L\langle X_G\rangle$ dado por $x_i^{(g)} \mapsto x_{\sigma^{-1}(i)}^{(g)}$ para $1 \leq i \leq n$ e $x_j^{(g)} \mapsto x_j^{(g)}$ para $j > n$ aplica $P_n^{\mathbf{g}}$ sobre $P_n^{\mathbf{h}}$, onde $\mathbf{h} = (g_{\sigma(1)}, \ldots, g_{\sigma(n)})$.*

Agora, daremos uma definição cuja finalidade é apenas simplificar a demonstração da próxima proposição, a qual constitui um dos pilares para a prova do resultado principal.

Definição 3.1.9 *Um monômio $M \in L\langle X_G\rangle$ é dito regular se existem indeterminadas $y_1, \ldots, y_n$ em X_G tais que $M = [y_1, \cdots, y_n]$ e uma $n+1$-upla $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ de inteiros positivos onde $\deg_G y_j = \alpha_{u_j, u_{j+1}}$ para todo $j = 1, \ldots, n$.*

Proposição 3.1.10 *Seja $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in \Phi^n$ uma n-upla boa tal que $g_1 \cdots g_n \neq e$. Se $M, N \in P_n^{\mathbf{g}} \setminus T_G(L)$ então $M \sim N$. Em particular, $\dim P_n^{\mathbf{g}}(L) = 1$.*

Demonstração. Como consequência da Observação 3.1.8 e da Proposição 3.1.4, podemos assumir sem perda de generalidade que $g_i = \alpha_{t_i, t_{i+1}}$ para $i = 1, \ldots, n$. A demonstração é por indução em n e observe que o resultado é claro para $n = 1$ e $n = 2$. Assumimos então que $n \geq 3$, suponha que para todo $q < n$ e toda q-upla boa $\mathbf{h} \in \Phi^q$ tal que $h_1 \cdots h_q \neq e$, quaisquer monômios $M, N \in P_q^{\mathbf{h}} \setminus T_G(L)$ são equivalentes. Tomando a base canônica de $P_n^{\mathbf{g}}$, isto é, formada por todos os monômios iniciados por x_n, é suficiente provarmos o resultado para $M = [x_1, \cdots, x_n]$ e $N = [x_n, x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n-1)}]$. O Lema 3.1.7 nos sugere que um bom ponto de partida é mostrar que N é equivalente a um monômio regular, uma vez que estaremos livres para usar qualquer organização dos colchetes. Para este fim, provaremos algumas afirmações.

(I) *Sejam $q \leq n$ um inteiro positivo e $\mathbf{h} \in \Phi^q$ uma q-upla boa tal que $h_1 \cdots h_q \neq e$. Todo monômio normado à esquerda de $P_q^{\mathbf{h}}$ que não é identidade é equivalente a um monômio regular.* É claro que isto é verdade para $q = 1$ e $q = 2$. Provaremos que se $3 \leq q \leq n$ e a afirmação vale para $q - 1$ e $q - 2$ então, também é válida para q. Seja $N = [x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(q)}]$ um monômio em $P_q^{\mathbf{h}} \setminus T_G(L)$. Podemos dividir em dois casos, quando $\deg_G [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \neq e$ e quando ocorre o contrário. Supondo que $\deg_G [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \neq e$, sejam $y, z_1, \ldots, z_{q-2}$ indeterminadas tais que $\deg_G y = \deg_G [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]$ e $\deg_G z_i = \deg_G x_{\sigma(i+2)}$ para todo $i = 1, \ldots, q - 2$. Note que obtemos N fazendo as substituições $y \mapsto [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]$ e $z_i \mapsto x_{\sigma(i+2)}$ em $N' := [y, z_1, \cdots, z_{q-2}]$, o qual não pode ser identidade para L. Daí, temos que N' é equivalente a um monômio regular devido a nossa hipótese de indução. Assim, considere

$$N'' = [z_{\tau(1)}, \cdots, z_{\tau(k)}, y, z_{\tau(k+1)}, \cdots, z_{\tau(q-2)}]$$

um monômio regular equivalente a N'. Ao fazermos a substituição em N' que mencionamos, concluímos que

$$N \sim [x_{\sigma(\tau(1)+2)}, \cdots, x_{\sigma(\tau(k)+2)}, [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}], x_{\sigma(\tau(k+1)+2)}, \cdots, x_{\sigma(\tau(q-2)+2)}]. \quad (3.10)$$

Como $N \notin T_G(L)$, $[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]$ ou $[x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(1)}]$ é regular. Supondo que acontece o primeiro caso, o Lema 3.1.7 aplicado ao último monômio de (3.10), resulta em

$$N \sim [x_{\sigma(\tau(1)+2)}, \cdots, x_{\sigma(\tau(k)+2)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(\tau(k+1)+2)}, \cdots, x_{\sigma(\tau(q-2)+2)}]$$

e note que o último monômio é regular. Caso contrário, a definição de $\sim$ nos permite trocar o monômio $[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]$ por $[x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(1)}]$ em (3.10), em seguida aplicamos o Lema 3.1.7 para concluirmos que N é equivalente a um monômio regular. Portanto, a afirmação (I) é válida se $\deg_G [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \neq e$. Agora consideremos o caso $\deg_G [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] = e$. Note que $\deg_G [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}] \neq e$ e pelo que argumentamos no caso anterior podemos assumir, sem perda de generalidade, que o monômio $[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}]$ é regular. A substituição $y \mapsto [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}]$ e $z_i \mapsto x_{\sigma(i+3)}$, para todo $i = 1, \ldots, q-3$, em $N' := [y, z_1, \cdots, z_{q-3}]$ resulta no monômio N. Como no caso anterior, N' é equivalente à um monômio regular e consequentemente, o mesmo ocorre com N.

Agora mostraremos que (I) garante o mesmo resultado para a situação em que $h_1 \cdots h_q = e$.

(II) *Sejam $q \leq n$ um inteiro positivo e $\mathbf{h} \in \Phi^q$ uma q-upla boa. Todo monômio normado à esquerda de $P_q^{\mathbf{h}}$ que não é identidade é equivalente a um monômio regular.* Devido a (I), é suficiente considerar o caso em que $h_1 \cdots h_q = e$. Seja $N = [x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(q)}]$ um monômio de $P_q^{\mathbf{h}} \setminus T_G(L)$. Segue da afirmação (I) que $[x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(q-1)}]$ é equivalente a um monômio regular W e assim, $N \sim [W, x_{\sigma(q)}]$. Agora, $\deg_G W = (\deg_G x_{\sigma(q)})^{-1}$ e portanto, $[W, x_{\sigma(q)}]$ é regular.

Antes de demonstrarmos a proposição, provaremos ainda uma terceira afirmação, o caso especial em que a variável x_n já aparece na última posição.

(III) *Se N é um monômio nas indeterminadas $x_1, \ldots, x_{n-1}$ tal que $[N, x_n] \notin T_G(L)$ então, $[N, x_n] \sim [x_1, \cdots, x_n]$.* É um fato conhecido que todo monômio é uma combinação linear de monômios normados à esquerda. Então, assumiremos sem perda de generalidade que N é um monômio normado à esquerda. Se $\deg_G N \neq e$ a validade da afirmação segue diretamente da hipótese de indução. Sendo assim, assumimos que $\deg_G N = e$. A afirmação (II) nos permite supor que N é um monômio regular e escrevendo $N = [N', x_t]$ (lembre-se que N é normado à esquerda), temos $\deg_G N' = (\deg_G x_t)^{-1} \neq e$. Logo, o caso em que $t = n-1$ é consequência da hipótese de indução. Caso contrário, se acrescentarmos a hipótese que x_{n-1} não é a primeira variável, o Lema 3.1.7 implica em $[N, x_n] \sim [A, [x_{n-1}, B], x_n]$, para apropriados monômios A e B nas indeterminadas $x_1, \ldots, x_{n-2}$. Se $\deg_G B \neq e$, pelo Lema 3.1.5, temos $[A,[x_{n-1},B],x_n] \sim [B,A,x_{n-1},x_n]$. Caso $\deg_G B = e$, temos que $\deg_G [x_{n-1},A] = e$. Consequentemente,

$$[A,[x_{n-1},B],x_n] = [B,x_{n-1},A,x_n] \equiv_I [B,A,x_{n-1},x_n].$$

Para ambas situações, como $[B,A]$ possui G-grau $(\deg_G x_{n-1})^{-1} \neq e$, segue-se da hipótese de indução que $[B,A] \sim [x_1,\cdots,x_{n-2}]$. O caso em que x_{n-1} é a primeira variável de N' é ainda mais simples:

$$[N,x_n] \overset{L.\ 3.1.7}{\sim} [x_{n-1},B,x_n] = -[B,x_{n-1},x_n]$$

e o resultado segue da hipótese de indução aplicada ao monômio B, cujo G-grau é igual a $(\deg_G x_{n-1})^{-1} \neq e$. Isto finaliza a prova de (III).

Agora provaremos a proposição. Como dito anteriormente, fixando a base canônica de $P_n^{\mathfrak{g}}$ é suficiente considerarmos apenas o caso $M = [x_1,\cdots,x_n]$ e $N = [x_n,x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n-1)}]$. Pelo que fizemos antes, o monômio N é equivalente a um monômio regular $N_1 := [x_{\delta(1)},\cdots,x_{\delta(k)},x_n,x_{\delta(k+1)},\cdots,x_{\delta(n-1)}]$. Se $k=0$ então,

$$N_1 \overset{L.\ 3.1.7}{\sim} [x_n,[x_{\delta(1)},\cdots,x_{\delta(n-1)}]] = -[x_{\delta(1)},\cdots,x_{\delta(n-1)},x_n] \overset{(III)}{\sim} M.$$

Caso tenhamos $k = n-1$, a afirmação (III) implica em $N_1 \sim M$. Assumimos então que $1 \leq k < n-1$, consequentemente, existe um índice $i \in \{1\ldots,n-1\}$ tal que $i \in \{\delta(1),\ldots,\delta(k)\}$, $j \in \{\delta(k+1),\ldots,\delta(n-1)\}$ com $j = i \pm 1$ e denotemos $a = \delta^{-1}(i)$, $b = \delta^{-1}(j)$. Seja $\deg_G x_n = \alpha_{r,s}$, como M e N_1 são monômios regulares temos $\deg_G x_{\delta(n-1)} = \alpha_{r',s}$ e $\deg_G x_{\delta(k+1)} = \alpha_{s,t}$ para algum $r',t \in \{1,\ldots,m\}$. Disto segue-se que $\deg_G [x_{\delta(k+1)},\cdots,x_{\delta(n-1)}] = e$. Seja $Q = [x_{\delta(a+1)},\cdots,x_{\delta(k)},x_n]$ e supondo $a > 1$, seja $W = [x_{\delta(1)},\cdots,x_{\delta(a-1)}]$. Vamos usar o Lema 3.1.7 e a hipótese de indução para obter um monômio equivalente a N_1, com Q aparecendo na posição final, e então concluiremos usando a afirmação (III). Como em quase todos os resultados anteriores, dividimos a prova em casos:

Caso A: $b \in \{k+1,n-1\}$.

Se $b = k+1$, seja $S = [x_{\delta(b+1)},\cdots,x_{\delta(n-1)}]$. Uma vez que $\deg_G x_j = \alpha_{s,t}$ e $\deg_G [x_{\delta(k+1)},\cdots,x_{\delta(n-1)}] = e$, temos $\deg_G S = (\deg_G x_j)^{-1} = \alpha_{t,s}$. Considerando $j = i+1$, então $\deg_G x_i = \alpha_{t',s}$ e $\deg_G Q = e$.Pelo Lema 3.1.7, $N_1 \sim [W,[x_i,Q,x_j,S]]$ e observe que o monômio $[x_i,x_j,S,Q]$ possui G-grau diferente de e, precisamente igual a $\deg_G x_i$. Além disso, suas variáveis, cujos G-graus pertencem a Φ, estão organizadas como no item (iii) da Proposição 3.1.4. Segue então da hipótese de indução que $[x_i,Q,x_j,S] \sim [x_i,x_j,S,Q]$ e consequentemente,

$$\begin{aligned} N_1 &\sim [W,[x_i,x_j,S,Q]] \overset{L.\ 3.1.7}{\sim} [W,[x_i,x_j,S],Q] \\ &\overset{L.\ 3.1.7}{\sim} [W,[x_i,x_j,S],x_{\delta(a+1)},\cdots,x_{\delta(k)},x_n] \overset{(III)}{\sim} [x_1,\cdots,x_n]. \end{aligned}$$

O caso $j = i-1$ é análogo, sendo que usamos a hipótese de indução para obtermos $N_1 \sim [W, [S, x_j, x_i, Q]]$ e então seguimos os mesmos passos do caso anterior, uma vez que temos as mesmas hipóteses para $[S, x_j, x_i, Q]$.

Se $b = n-1$, temos $\deg_G x_j = \alpha_{r',s}$ e agora definimos $S = [x_{\delta(k+1)}, \cdots, x_{\delta(n-2)}]$ de modo que $\deg_G S = (\deg_G x_j)^{-1}$. Novamente consideramos as possibilidades para j. Supondo $j = i+1$, temos $\deg_G x_i = \alpha_{t',r'}$ e assim, $\deg_G Q = \deg_G x_j$. Logo, o monômio $[x_i, x_j, S, Q]$ tem as mesmas propriedades que o monômio do caso anterior e procedemos de maneira análoga para concluir que $N_1 \sim [x_1, \cdots, x_n]$. O mesmo acontece quando consideramos $j = i-1$, uma vez que obtemos a mesma situação anterior para $[S, x_j, x_i, Q]$.

Caso B: $k+1 < b < n-1$.

Suponha inicialmente que $j = i+1$. Considere $R = [x_{\delta(k+1)}, \cdots, x_{\delta(b-1)}]$, $S = [x_j, x_{\delta(b+1)}, \cdots, x_{\delta(n-1)}]$ e note que $\deg_G Q = \deg_G S = (\deg_G R)^{-1}$. Caso tenhamos $\deg_G [x_i, Q] \neq e$, então o monômio $[x_i, S, R, Q]$ possui G-grau diferente de e e suas indeterminadas estão organizadas como no item (iii) da Proposição 3.1.4, de modo que

$$\begin{aligned} N_1 &\overset{L.\ 3.1.7}{\sim} [W, [x_i, Q, R, S]] \sim [W, [x_i, S, R, Q]] \\ &\overset{L.\ 3.1.7}{\sim} [W, x_i, S, R, x_{\delta(a+1)}, \cdots, x_{\delta(k)}, x_n] \overset{(III)}{\sim} [x_1, \cdots, x_n], \end{aligned}$$

onde na segunda equivalência aplicamos a hipótese de indução para obtermos $[x_i, Q, R, S] \sim [x_i, S, R, Q]$. Se $\deg_G [x_i, Q] = e$, usando as identidades (3.1) e (3.2) temos,

$$[x_i, Q, R, S] \sim [x_i, Q, S, R] \sim [x_i, S, Q, R] \sim [x_i, S, R, Q]$$

e então obtemos o resultado neste caso assim como anteriormente.

Assumiremos agora que $j = i-1$. Redefinimos o monômio Q como sendo $Q := [x_i, x_{\delta(a+1)}, \cdots, x_{\delta(k)}, x_n]$ e agora consideramos $R = [x_{\delta(k+1)}, \cdots, x_{\delta(b-1)}, x_j]$ e $S = [x_{\delta(b+1)}, \cdots, x_{\delta(n-1)}]$, os quais satisfazem $\deg_G Q = \deg_G S = (\deg_G R)^{-1}$. Então, procedemos exatamente como no caso anterior, ponderando as situações em que $\deg_G [x_i, Q] \neq e$ e $\deg_G [x_i, Q] = e$.

Finalmente, resta-nos avaliar a situação em que $a = 1$. Precisamos considerar os mesmos casos sobre b.

Caso A′: $b \in \{k+1, n-1\}$.

Aqui as definições dos monômios Q e S são as mesmas adotadas no caso A, inclusive quando consideramos as possibilidades para b. Suponha $b = k+1$, $S = [x_{\delta(b+1)}, \cdots, x_{\delta(n-1)}]$ e considere inicialmente que $j = i+1$. Como antes, temos $\deg_G Q = e$. Seja y uma indeterminada tal que $\deg_G y = \deg_G x_i$ e considere o monômio $N_1' = [y, x_j, S]$ do qual obtemos N_1, via a substituição $y \mapsto [x_i, Q]$.

Aplicamos a hipótese de indução ao monômio N_1' de modo que $N_1' \sim [x_j, S, y]$, consequentemente

$$N_1 \sim [x_j, S, [x_i, Q]] \overset{L.\ 3.1.7}{\sim} [x_j, S, x_i, x_{\delta(2)}, \cdots, x_{\delta(k)}, x_n] \overset{(III)}{\sim} [x_1, \cdots, x_n].$$

O caso $j = i - 1$ é análogo, a diferença é que usamos a hipótese de indução para obtermos $N_1' \sim [S, x_j, y]$. Agora suponha $b = n-1$ e seja $S = [x_{\delta(k+1)}, \cdots, x_{\delta(n-2)}]$. Note que não pode ocorrer $j = i - 1$, pois isto implicaria $\deg_G x_i = \alpha_{s,t'}$ e assim, $\deg_G N_1 = e$. Portanto, temos $j = i+1$ e como vimos, isto significa que $\deg_G Q = \deg_G x_j$. Logo, $\deg_G [Q, S, x_j] = \deg_G x_j$, daí

$$\begin{aligned} N_1 &\overset{L.\ 3.1.7}{\sim} [x_i, [Q, S, x_j]] \overset{H.I.}{\sim} [x_i, [x_j, S, Q]] \\ &\overset{L.\ 3.1.7}{\sim} [x_i, x_j, S, x_{\delta(a+1)}, \cdots, x_{\delta(k)}, x_n] \overset{(III)}{\sim} [x_1, \cdots, x_n]. \end{aligned}$$

Caso B′: $k + 1 < b < n - 1$. Suponha que $j = i + 1$. Consideramos os mesmos monômios R e S do caso B. Analogamente ao caso B temos que $\deg_G Q = \deg_G S = (\deg_G R)^{-1}$. Assim,

$$\begin{aligned} N_1 &\overset{L.\ 3.1.7}{\sim} [x_i, [Q, R, S]] \overset{H.I.}{\sim} [x_i, [S, R, Q]] \\ &\overset{L.\ 3.1.7}{\sim} [x_i, S, R, x_{\delta(a+1)}, \cdots, x_{\delta(k)}, x_n] \overset{(III)}{\sim} [x_1, \cdots, x_n]. \end{aligned}$$

Quando $j = i - 1$, também consideramos as mesmas definições de Q, R e S dadas no caso B, isto é, $Q := [x_i, x_{\delta(a+1)}, \cdots, x_{\delta(k)}, x_n]$ $R = [x_{\delta(k+1)}, \cdots, x_{\delta(b-1)}, x_j]$ e $S = [x_{\delta(b+1)}, \cdots, x_{\delta(n-1)}]$, os quais satisfazem $\deg_G Q = \deg_G S = (\deg_G R)^{-1}$. Nesta situação, temos que $[Q, R, S] = [S, [R, Q]]$, portanto,

$$\begin{aligned} N_1 &\overset{L.\ 3.1.7}{\sim} [Q, R, S]] = [S, [R, Q]] \overset{L.\ 3.1.7}{\sim} [S, R, x_i, x_{\delta(a+1)}, \cdots, x_{\delta(k)}, x_n] \\ &\overset{(III)}{\sim} [x_1, \cdots, x_n]. \end{aligned}$$

□

Este resultado juntamente com o item (iii) da Proposição 3.1.4, nos diz que nas condições da Proposição 3.1.10, o espaço $P_n^{\mathbf{g}}(L)$ admite como base a imagem de um monômio regular, segundo o homomorfismo canônico. Nosso próximo resultado avalia o caso em que $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in \Phi^n$ é uma n-upla boa que satisfaz $g_1 \cdots g_n = e$ e encontramos que a propriedade se mantém, isto é, $P_n^{\mathbf{g}}(L)$ admite uma base formada por imagens de monômios regulares. Apresentamos um exemplo que ilustra a demonstração do caso geral.

Exemplo 3.1.11 *Considere* $m = 4$ *e* $n = 6$*. Seja* $\mathbf{g} = (\alpha_{2,4}, \alpha_{4,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{4,2})$*. Note que a condição* $g_1 \cdots g_n = e$ *faz com que os monômios obtidos ao permutarmos ciclicamente as entradas do monômio padrão* $[x_1, \ldots, x_n]$ *sejam regulares. O conjunto formado pelas imagens de tais monômios, segundo o homomorfismo canônico, contém uma base para* $P_6^{\mathbf{g}}(L)$*. Seja* σ *o n-ciclo* $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ *em* S_6 *e denote por* N_i *o monômio* $[x_{\sigma^i(1)}, x_{\sigma^i(2)}, \ldots, x_{\sigma^i(6)}]$*. Considere* $\mathfrak{I} = \{i \mid t_{i+1} \notin \{t_1, \ldots, t_i\}\}$ *cujos elementos são* $i_1 = 1, i_2 = 2$ *e* $i_3 = 4$*. Afirmamos que as imagens dos monômios* $M_1 = N_{i_1} = [x_2, \ldots, x_6, x_1]$*,* $M_2 = N_{i_2} = [x_3, \ldots, x_6, x_1, x_2]$ *e* $M_3 = N_{i_3} = [x_5, x_6, x_1, \ldots, x_4]$ *formam uma base para* $P_6^{\mathbf{g}}(L)$*. Para isto, é suficiente verificar que qualquer monômio normado à esquerda de* $P_6^{\mathbf{g}} \setminus T_G(L)$ *é equivalente a uma combinação linear dos monômios* M_1, M_2 *e* M_3*. Uma vez que tais monômios são da forma* $[N, x_j]$*, com* $\deg_G N \neq e$*, a Proposição 3.1.10 implica que* $[N, x_j] \sim N_j$*. Assim, basta mostrarmos que o monômio* N_j *satisfaz tal propriedade. Isto é, que os monômios* N_3, N_5 *e* N_6 *são equivalentes a monômios no subespaço gerado por* M_1, M_2 *e* M_3*. Isto acontece pelo fato de* $3, 5$ *e* 6 *não pertencerem a* $\mathfrak{I}$*. Por exemplo, como* $t_4 = t_1$ *segue-se que* $\deg_G\ [x_1, x_2] = (\deg_G\ x_3)^{-1}$*, daí*

$$N_3 = [x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3] \overset{P.3.1.10}{\sim} [x_4, x_5, x_6, [x_1, x_2], x_3] \overset{(3.2)}{\sim} [x_4, x_5, x_6, x_3, [x_1, x_2]].$$

Aplicando a identidade de Jacobi ao último monômio, obtemos

$$[x_4, x_5, x_6, x_3, x_1, x_2] - [x_4, x_5, x_6, x_3, x_2, x_1] \overset{P.3.1.10}{\sim} M_2 - M_1.$$

Usando o mesmo raciocínio para os monômios N_5 *e* N_6*, temos*

$$N_5 = [x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,] \overset{P.3.1.10}{\sim} [x_6, x_1, [x_2, x_3, x_4], x_5,] \overset{(3.2)}{\sim} [x_6, x_1, x_5, [x_2, x_3, x_4]]$$

Aplicando algumas vezes a identidade de Jacobi ao último monômio e finalmente a Proposição 3.1.10, obtemos

$$N_5 \sim M_3 - N_3 + M_2 \sim M_3 + M_1.$$

Enquanto

$$N_6 = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6] \overset{P.3.1.10}{\sim} [x_1, x_2, x_3, [x_4, x_5], x_6] \overset{(3.2)}{\sim} [x_1, x_2, x_3, x_6, [x_4, x_5]]$$
$$\sim N_5 - M_3 \sim M_1$$

onde a penúltima equivalência foi obtida via a identidade de Jacobi seguida da Proposição 3.1.10. Resta-nos verificar que nenhuma combinação linear de M_1, M_2 e M_3 é uma identidade graduada para L. Neste exemplo podemos verificar isso de maneira direta, porém, de modo geral isto também deve-se a natureza do conjunto $\mathfrak{I}$. De fato, o resultado de uma substituição admissível em N_i é um múltiplo escalar da matriz diagonal $(E_{t_{i+1}t_{i+1}} - E_{t_it_i})$. Portanto, é suficiente mostrarmos que tais matrizes formam um conjunto linearmente independente. Sejam $\lambda_j \in \mathbb{K}, j = 1, 2, 3$, tais que

$$\lambda_1(E_{t_2t_2} - E_{t_1t_1}) + \lambda_2(E_{t_3t_3} - E_{t_2t_2}) + \lambda_3(E_{t_5t_5} - E_{t_4t_4}) = 0.$$

Como a matriz $E_{t_5t_5}$ aparece uma única vez (por 4 ser o elemento máximo de $\mathfrak{I}$), temos $\lambda_3 = 0$. Na equação resultante, a matriz $E_{t_3t_3}$ aparece uma única vez, pois 2 é o segundo maior elemento de $\mathfrak{I}$. Logo, $\lambda_2 = 0$ e por conseguinte, $\lambda_1 = 0$.

Proposição 3.1.12 *Seja $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in \Phi^n$ uma n-upla boa. Se $g_1 \cdots g_n = e$, então existem monômios regulares $M_1, \ldots, M_k \in P_n^{\mathbf{g}}$, linearmente independentes módulo $T_G(L)$, tais que todo polinômio em $P_n^{\mathbf{g}} \backslash T_G(L)$ é equivalente a um polinômio no subespaço de $P_n^{\mathbf{g}}$ gerado por $M_1, \ldots, M_k$.*

Demonstração. A Proposição 3.1.4 juntamente com a Observação 3.1.8 nos permitem assumir, sem perda de generalidade, que $g_i = \alpha_{t_i,t_{i+1}}$, para $i = 1, \ldots, n$. Seja σ o n-ciclo $(1\ \ldots\ n)$ em S_n e denote por N_i o monômio $[x_{\sigma^i(1)}, x_{\sigma^i(2)}, \ldots, x_{\sigma^i(n)}]$. Considere o conjunto $\mathfrak{I} = \{i \mid t_{i+1} \notin \{t_1, \ldots, t_i\}\}$ cujos elementos são $i_1 < \cdots < i_k$ e defina $M_j := N_{i_j}$, $j = 1, \ldots, k$. Note que o resultado de uma substituição admissível em N_i é um múltiplo escalar da matriz diagonal $(E_{t_{i+1}t_{i+1}} - E_{t_it_i})$. Como no exemplo anterior, usamos em etapas a maximalidade dos elementos do conjunto $\mathfrak{I}$ para concluir que as matrizes $(E_{t_{i_1+1}t_{i_1+1}} - E_{t_{i_1}t_{i_1}}), \ldots, (E_{t_{i_k+1}t_{i_k+1}} - E_{t_{i_k}t_{i_k}})$ são linearmente independentes. Isto significa que não existem escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ não todos nulos tais que $\lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_k M_k \in T_G(L)$. A identidade de Jacobi permite escrever qualquer monômio em $P_n^{\mathbf{g}}$ como combinação linear de monômios da forma $[N, x_j]$. Se $[N, x_j] \in P_n^{\mathbf{g}} \setminus T_G(L)$ então, como $N \notin T_G(L)$ e $\deg_G N = (\deg_G x_j)^{-1} \neq e$, a Proposição 3.1.10 implica que $N \sim [x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots, x_n, x_1, \cdots, x_{j-1}]$, consequentemente $[N, x_j] \sim N_j$. Assim, é suficiente provarmos que um monômio N_j é equivalente a uma combinação linear dos monômios $M_1, \ldots, M_k$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Note que $i_1 = 1$, logo $N_1 = M_1$ e a afirmação vale para $j = 1$. Consideremos $j > 1$ e assumimos que a afirmação é válida para $N_1, \ldots, N_{j-1}$. Se $j = i_l \in \mathfrak{I}$ então, $N_j = M_l$ e não há o que fazer. Caso contrário, temos

$t_{j+1} = t_i$ para algum $i < j$. Assim, $g_i g_{i+1} \cdots g_{j-1} = \alpha_{t_i,t_j} = g_j^{-1}$ e uma vez que $\deg_G [x_{j+1}, \cdots, x_n, x_1, \cdots, x_{i-1}] = e$, temos

$$\begin{aligned} N_j &\overset{P.3.1.10}{\sim} [x_{j+1}, \cdots, x_n, x_1, \cdots, x_{i-1}, [x_i, \cdots, x_{j-1}], x_j] \\ &\overset{(3.2)}{\sim} [x_{j+1}, \cdots, x_{i-1}, x_j, [x_i, \cdots, x_{j-1}]], \end{aligned}$$

e podemos escrever o último monômio como sendo

$$[x_{j+1}, \cdots, x_{i-1}, x_j, [x_i, \cdots, x_{j-2}], x_{j-1}] - [x_{j+1}, \cdots, x_{i-1}, x_j, x_{j-1}, [x_i, \cdots, x_{j-2}]]. \tag{3.11}$$

Note que $[x_{j+1}, \cdots, x_{i-1}, x_j, [x_i, \cdots, x_{j-2}]] \notin T_G(L)$ e possui G-grau diferente de e, logo,

$$[x_{j+1}, \cdots, x_{i-1}, x_j, [x_i, \cdots, x_{j-2}]] \overset{P.\ 3.1.10}{\sim} [x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n, x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots, x_{j-2}],$$

consequentemente

$$[x_{j+1}, \cdots, x_{i-1}, x_j, [x_i, \cdots, x_{j-2}], x_{j-1}] \sim N_{j-1}.$$

Aplicando o mesmo processo ao segundo monômio de (3.11) sucessivamente, quanto for necessário, obtemos que N_j é equivalente a uma combinação linear dos monômios $N_i, \ldots, N_{j-1}$. Portanto, pela hipótese de indução, concluímos que N_j é equivalente a uma combinação linear dos monômios $M_1, \ldots, M_k$. $\square$

Observação 3.1.13 *Seja $\mathfrak{C}$ um conjunto de indeterminadas com G-graus em Φ. As Proposições 3.1.4, 3.1.10 e 3.1.12 implicam na existência de um conjunto de monômios regulares $\mathcal{B}_{\mathfrak{C}} = \{M_1, \ldots, M_k\}$, tal que $\{M_1 + T_G(L), \ldots, M_k + T_G(L)\}$ é uma base para $P_{\mathfrak{C}}$. Recordamos que $P_{\mathfrak{C}}$ é o subespaço definido na observação que antecede o Lema 2.2.30.*

Para os resultados seguintes precisamos fixar tais bases. Quando o grau total das indeterminadas é o elemento neutro, $\mathcal{B}_{\mathfrak{C}}$ denotará a base construída na Proposição 3.1.12. No caso em que $\mathfrak{C} = \{x_{i_1}^{(g_{i_1})}, \ldots, x_{i_k}^{(g_{i_k})}\}$, com $i_1 < \cdots < i_k$, é um subconjunto de $\{x_1^{(g_1)}, \ldots, x_n^{(g_n)}\}$ onde $g_i = \alpha_{t_i,t_{i+1}}$ para $i = 1, \ldots, n$ e $g_{i_1} \cdots g_{i_k} \neq e$, definimos $\mathcal{B}_{\mathfrak{C}} := \{[x_{i_1}^{(g_{i_1})}, \cdots, x_{i_k}^{(g_{i_k})}]\}$

O próximo passo é descrever uma base para os polinômios multilineares da álgebra relativamente livre $L\langle X_G\rangle/T_G(L)$. Para isso, usamos uma definição análoga à [25, Definição 19].

Definição 3.1.14 *Dizemos que um monômio multilinear S é adequado se $S = [N_1, N_2, \cdots, N_c]$, onde*

(i) Para todo $i = 1, 2, \ldots, c$ temos $N_i = [x_{j_{i,0}}, x_{j_{i,1}}, x_{j_{i,2}}, \cdots, x_{j_{i,r_i}}]$, para algum $r_i \geq 0$, sendo que $\deg_G x_{j_{i,0}} \in \Phi$, $\deg_G x_{j_{i,l}} = e$ para $0 < l \leq r_i$, $j_{i,1} < j_{i,2} < \ldots < j_{i,r_i}$;

(ii) A c-upla $\mathbf{g} = (\deg_G x_{j_{1,0}}, \ldots, \deg_G x_{j_{c,0}})$ é boa e $[x_{j_{1,0}}, \cdots, x_{j_{c,0}}] \in \mathcal{B}_{\mathfrak{C}}$, onde $\mathfrak{C} = \{x_{j_{1,0}}, \ldots, x_{j_{c,0}}\}$;

(iii) Se $t_{i+1} \in \{t_1, \ldots, t_i\}$ então $r_i = 0$, onde $(t_1, \ldots, t_{c+1})$ é tal que $\deg_G x_{j_{i,0}} = \alpha_{t_i, t_{i+1}}$ para todo $i = 1, \ldots, c$.

Observação 3.1.15 *Aplicando a identidade de Jacobi diversas vezes e a identidade graduada (3.2) concluímos que qualquer monômio multilinear é uma combinação linear de monômios da forma $S = [N_1, N_2, \cdots, N_c]$, onde cada N_i é como na condição (i) da definição anterior. Para exemplificar, tomamos a álgebra $sl_3(\mathbb{K})$ e a 6-upla boa $\mathbf{g} = (\alpha_{2,3}, e, \alpha_{3,2}, \alpha_{2,1}, e, \alpha_{1,3})$. Considere o monômio $[x_3, x_6, x_5^{(e)}, x_1, x_2^{(e)}, x_4]$ (por motivos que ficarão claros logo abaixo, evidenciamos no monômio as indeterminadas de grau e). Escrevendo a identidade de Jacobi na forma $[A, B, C] = [A, [B, C]] + [A, C, B]$, a usamos sempre que $x_2^{(e)}$ ou $x_5^{(e)}$ aparecem da terceira posição em diante, e as visualizamos como o termo C da identidade de Jacobi. Assim, temos que*

$$\begin{aligned}
[x_3, x_6, x_5^{(e)}, x_1, x_2^{(e)}, x_4] &= [x_3, [x_6, x_5^{(e)}], x_1, x_2^{(e)}, x_4] + [x_3, x_5^{(e)}, x_6, x_1, x_2^{(e)}, x_4] \\
&= [x_3, [x_6, x_5^{(e)}], [x_1, x_2^{(e)}], x_4] + [x_3, [x_6, x_5^{(e)}], x_2^{(e)}, x_1, x_4] \\
&\quad + [x_3, x_5^{(e)}, x_6, [x_1, x_2^{(e)}], x_4] + [x_3, x_5^{(e)}, x_6, x_2^{(e)}, x_1, x_4]
\end{aligned}$$

após aplicarmos a identidade de Jacobi a cada um dos monômios obtidos depois da aplicação inicial. Fazendo o mesmo para os últimos monômios obtidos e usando a identidade (3.2), quando necessário, para ordenar as indeterminadas de grau e, concluímos que

$$\begin{aligned}
[x_3, x_6, x_5^{(e)}, x_1, x_2^{(e)}, x_4] \equiv_I\ & [x_3, [x_6, x_5^{(e)}], [x_1, x_2^{(e)}], x_4] + [x_3, [x_6, x_2^{(e)}, x_5^{(e)}], x_1, x_4] \\
&+ [x_3, x_2^{(e)}, [x_6, x_5^{(e)}], x_1, x_4] + [x_3, x_5^{(e)}, x_6, [x_1, x_2^{(e)}], x_4] \\
&+ [x_3, x_5^{(e)}, [x_6, x_2^{(e)}], x_1, x_4] + [x_3, x_2^{(e)}, x_5^{(e)}, x_6, x_1, x_4].
\end{aligned}$$

É claro que tal processo pode ser feito para qualquer monômio multilinear em $L\langle X_G\rangle$.

Nosso objetivo é provar que as imagens, pelo homomorfismo canônico, de monômios adequados formam uma base para a álgebra relativamente livre. A observação anterior mostra que a condição (i) da Definição 3.1.14 fornece um conjunto gerador. Os próximos resultados mostram que a independência linear, módulo $T_G(L)$, é garantida pelas condições (ii) e (iii). Para isso, precisamos de um resultado técnico útil, envolvendo uma situação em que uma das indeterminadas tem G-grau e.

Lema 3.1.16 *Sejam x, y_1, y_2, e z indeterminadas em X_G com $\deg_G z = e$. Seja J o T_G-ideal gerado pelos polinômios em (3.1) e (3.2). Se $\deg_G y_1 = (\deg_G y_2)^{-1}$, então $[x, y_1, [y_2, z]] + [x, [y_1, z], y_2] \in J$. Além disso, se $\deg_G y_1 = (\deg_G y_2)$, temos $[x, y_1, [y_2, z]] - [x, [y_1, z], y_2] \in J$.*

Demonstração. É claro que se o G-grau de alguma das indeterminadasx, y_1, y_2, não está em supp L, o resultado é válido. Supondo que isto não ocorre, o caso em que $\deg_G y_1 = \deg_G y_2 = e$ também é imediato. Portanto, assumimos que $\deg_G y_1, \deg_G y_2 \in \Phi$ e dividimos a prova em dois casos.

Caso A: $\deg_G x = e$.

Se $\deg_G y_1 = (\deg_G y_2)^{-1}$ então,

$$[x, y_1, [y_2, z]] \equiv_J -[x, y_1, z, y_2] \equiv_J -[x, [y_1, z], y_2].$$

Agora, supondo que $\deg_G y_1 = \deg_G y_2$, temos $[x, y_1, y_2] \in J$, logo, $[x, y_1, [y_2, z]] - [x, [y_1, z], y_2] \in J$.

Caso B: $\deg_G x \neq e$.

Primeiro consideremos $\deg_G y_1 = (\deg_G y_2)^{-1}$. Note que, se $[x, y_1] \in J$ então, $[x, y_1, [y_2, z]], [x, [y_1, z], y_2] \in J$ e o resultado vale. Caso $[x, y_1] \notin J$, o fato que $\deg_G x \neq e$ implica em $[x, y_2] \in J$. Portanto,

$$[x, y_1, [y_2, z]] \equiv_J [x, [y_1, [y_2, z]]] \equiv_J -[x, [[y_1, z], y_2]] \equiv_J -[x, [y_1, z], y_2].$$

Agora assumimos que $\deg_G y_1 = (\deg_G y_2)$. Se $\deg_G x \neq (\deg_G y_1)^{-1}$ então, $[x, y_1, y_2] \in J$ e consequentemente $[x, y_1, [y_2, z]] + [x_1, [y_1, z], y_2] \in J$. Caso aconteça a igualdade $\deg_G x = (\deg_G y_1)^{-1}$, temos

$$[x, y_1, [y_2, z]] \equiv_J [x, y_1, y_2, z] \equiv_J [x, y_2, y_1, z] \equiv_J [x, y_2, [y_1, z]] \equiv_J [x, [y_1, z], y_2].$$

$\square$

Exemplo 3.1.17 *Voltando a Observação 3.1.15, considere o primeiro monômio da combinação linear então obtida,* $M = [x_3, [x_6, x_5], [x_1, x_2], x_4] \in P_6^{\mathbf{g}}$*, onde* $\mathbf{g} = (\alpha_{2,3}, e, \alpha_{3,2}, \alpha_{2,1}, e, \alpha_{1,3})$*. Seja* $\overline{M} = [x_3, x_6, x_1, x_4]$*. Como* $\deg_G \overline{M} = \alpha_{2,3}$*, a Proposição 3.1.10 implica que*

$$\overline{M} \sim [x_1, x_3, x_4, x_6]. \tag{3.12}$$

Sendo $\mathcal{B}_{\mathcal{C}} = \{[x_1, x_3, x_4, x_6]\}$*, onde* $\mathcal{C} = \{x_1, x_3, x_4, x_6\}$*, como definimos na Observação 3.1.13, via o homomorfismo* $x_1 \mapsto [x_1, x_2^{(e)}]$*,* $x_6 \mapsto [x_6, x_5^{(e)}]$*, concluímos da equivalência (3.12) que* M *é equivalente a* $N = [[x_1, x_2^{(e)}], x_3, x_4, [x_6, x_5^{(e)}]]$*, o qual satisfaz (i) e (ii). Seguindo a notação do item (iii) da Definição 3.1.14, temos a* 5*-upla* $(2, 3, 2, 1, 3)$*, portanto,* N *não satisfaz a condição (iii) já que* $t_5 = t_2$*. Uma vez que* $\deg_G [x_3, x_4] = (\deg_G x_6)^{-1}$*, temos*

$$N \overset{L.3.1.7}{\sim} [[x_1, x_2^{(e)}], [x_3, x_4], [x_6, x_5^{(e)}]] \overset{L.3.1.16}{\sim} [[x_1, x_2^{(e)}], [x_3, x_4, x_5^{(e)}], x_6].$$

Usando a identidade de Jacobi para o último monômio e depois aplicando o Lema 3.1.7, obtemos

$$N \sim [[x_1, x_2^{(e)}], x_3, [x_4, x_5^{(e)}], x_6] + [[x_1, x_2^{(e)}], [x_3, x_5^{(e)}], x_4, x_6].$$

Observe que o último monômio não é adequado, pois $t_3 = t_1$*. Como* $\deg_G x_1 = (\deg_G x_3)^{-1}$*, segue da identidade (3.2) que*

$$N \sim [[x_1, x_2^{(e)}], x_3, [x_4, x_5^{(e)}], x_6] - [[x_1, x_2^{(e)}, x_5^{(e)}], x_3, x_4, x_6] \tag{3.13}$$

e ambos os monômios do lado direito são adequados. Consequentemente, concluímos que M *é equivalente a uma combinação linear de monômios adequados.*

No exemplo acima a necessidade da condição (iii) da Definição 3.1.14 é evidenciada pela equivalência (3.13), uma vez que esta estabelece uma relação de dependência linear em $L\langle X_G\rangle/T_G(L)$ entre monômios que satisfazem as condições (i) e (ii) da Definição 3.1.14.

Estamos agora aptos a demonstrar que a conclusão do Exemplo 3.1.17 é válida em geral, seguindo o mesmo raciocínio.

Lema 3.1.18 *Todo polinômio multilinear em* $L\langle X_G\rangle$ *é congruente, módulo* I*, a uma combinação linear de monômios adequados.*

Demonstração: Segue-se da Observação 3.1.15 que todo monômio em $L\langle X_G\rangle$ é, modulo I, uma combinação linear de monômios $M = [N_1, \cdots, N_s]$ com $N_1, \ldots, N_s$ satisfazendo (i) da Definição 3.1.14. Seja $\overline{M} = [x_{j_{1,0}}, \cdots, x_{j_{c,0}}]$. As Proposições 3.1.10 e 3.1.12 implicam que $\overline{M}$ é congruente módulo I a uma combinação linear dos monômios em $\mathcal{B}_C$, onde $C = \{x_{j_{1,0}}, \ldots, x_{j_{c,0}}\}$. Ao realizarmos as substituições $x_{j_{r,0}} \mapsto N_r$ em $\overline{M}$, obtemos como resultado o monômio M e assim concluímos que módulo I, M é uma combinação linear de monômios que satisfazem (i) e (ii).

Desse modo, seja $[N_1, \cdots, N_c]$ um monômio que satisfaz as condições (i) e (ii), sendo que existe um índice i tal que $t_{i+1} = t_j$, para algum $j < i$. Note que $\deg_G\,[N_j, \cdots, N_{i-1}] = \alpha_{t_j,t_i} = (\deg_G\, N_i)^{-1}$. Se $r_i > 0$, então $N_i = [N_i', x_{j_{i,r_i}}]$, onde $N_i' = [x_{j_{i,0}}, x_{j_{i,1}}, \cdots, x_{j_{i,r_i-1}}]$. Suponhamos que $\deg_G\,[N_1, \cdots, N_c] \neq e$, logo

$$\begin{aligned}
[N_1, \cdots, N_c] &= [N_1, \cdots, N_j, \cdots, N_{i-1}, [N_i', x_{j_{i,r_i}}], \cdots, N_c] \\
&\overset{L.3.1.7}{\sim} [N_1, \cdots, [N_j, \cdots, N_{i-1}], [N_i', x_{j_{i,r_i}}], \cdots, N_c] \\
&\overset{L.\ 3.1.16}{\sim} [N_1, \cdots, [N_j, \cdots, N_{i-1}, x_{j_{i,r_i}}], N_i', \cdots, N_c].
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Pela identidade de Jacobi,

$$[N_j, \cdots, N_{i-1}, x_{j_{i,r_i}}] = [N_j, \cdots, N_{i-2}, [N_{i-1}, x_{j_{i,r_i}}]] + [N_j, \cdots, N_{i-2}, x_{j_{i,r_i}}, N_{i-1}].$$

Aplicando a identidade de Jacobi agora ao último monômio da igualdade acima e sucessivamente, ao final do processo o Lema 3.1.7 implica que o último monômio em (3.14) é congruente módulo I a uma combinação linear de monômios da forma $[N_1, \cdots, N_j, \cdots, \widetilde{N_k}, \cdots, N_{i-1}, N_i', \cdots, N_c]$, onde $\widetilde{N_k} = [N_k, x_{j_{i,r_i}}]$, $j \leq k \leq i-1$. Se $\deg_G\,[N_1, \cdots, N_c] = e$ e $i < c$, aplicamos o raciocínio anterior ao monômio $[N_1, \cdots, N_{c-1}]$, o que resolve este caso. Suponha então que $\deg_G\,[N_1, \cdots, N_c] = e$ e $i = c$. Daí,

$$[N_1, \cdots, N_c] \overset{(3.2)}{\sim} [N_1, \cdots, N_{c-1}, x_{j_{c,r_c}}, N_c']$$

e então procedemos como no primeiro caso, usando a identidade de Jacobi. Repetimos o processo para escrever $[N_1, \cdots, N_c]$ como uma combinação linear de monômios adequados, módulo I.

□

Com este resultado, se conseguirmos provar que monômios adequados multilineares são linearmente independentes, módulo $T_G(L)$, teremos então demonstrado o nosso resultado principal. A proposição que provaremos a seguir é um resultado técnico para a prova de tal fato.

Proposição 3.1.19 *Seja* $\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ *um conjunto de indeterminadas comutativas. Seja* S *um subconjunto de* $\{\xi_i - \xi_j \mid 1 \leq i, j \leq m\}$ *linearmente independente. Se os polinômios* $p_1, \ldots, p_k$ *são produtos, dois a dois distintos, de elementos de* S*, então* $p_1, \ldots, p_k$ *são linearmente independentes.*

Demonstração. A partir do conjunto S construímos uma base $\{s_1, \ldots, s_m\}$ para o subespaço gerado por $\xi_1, \ldots, \xi_m$. Seja ψ um automorfismo de $\mathbb{K}[\xi_1, \ldots, \xi_m]$ tal que $\psi(\xi_i) = s_i$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Note que os polinômios $p_1, \ldots, p_k$, os quais podem ser vistos como monômios nas indeterminadas s_i, são aplicados por ψ^{-1} em monômios – distintos entre si – nas indeterminadas ξ_i. Logo, $\psi^{-1}(p_1), \ldots, \psi^{-1}(p_k)$ são linearmente independentes. Isto implica que os polinômios $p_1, \ldots, p_k$ são linearmente independentes. □

Observação 3.1.20 *Denotamos por* $D := \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_m)$ *uma matriz diagonal com entradas* $d_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, m$*. Note que* $[E_{kl}, D] = (d_l - d_k)E_{kl}$*. Assim, dado um monômio* $N = [x_{j_0}, x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r}]$*, com* $\deg_G x_{j_0} = \alpha_{k,l}$ *e* $\deg_G x_{j_i} = e$ *para todo* $i = 1, \ldots, r$*, sua imagem pelo homomorfismo* $\phi : L\langle X_G\rangle \to L$*, definido por* $x_{j_0} \mapsto E_{kl}$ *e* $x_{j_i} \mapsto \operatorname{diag}(d_{1,j_i}, \ldots, d_{m,j_i})$*, é* $\phi(N) = \prod_{i=1,\ldots,r}(d_{l,i} - d_{k,i})E_{kl}$*. Seja* $S = [N_1, \cdots, N_c]$ *um monômio adequado com* $N_i = [x_{j_{i,0}}, x_{j_{i,1}}, x_{j_{i,2}}, \cdots, x_{j_{i,r_i}}]$ *para todo* $i = 1, \ldots, c$*. A condição (ii) na Definição 3.1.14 implica que* $\deg_G x_{j_{i,0}} = \alpha_{t_i,t_{i+1}}$*, para* $i = 1, \ldots, c$*. Adaptando a notação no homomorfismo* ϕ*, de modo que* $x_{j_{i,0}} \mapsto E_{t_i,t_{i+1}}$ *e* $x_{j_{i,k}} \mapsto \operatorname{diag}(d_{1,j_{i,k}}, \ldots, d_{m,j_{i,k}})$ *para* $1 \leq k \leq r_i$ *e* $1 \leq i \leq c$*, temos* $\phi(S) = [\phi(N_1), \cdots, \phi(N_c)]$ *e daí*

$$\phi(S) = \left(\prod_{\substack{i\in\mathfrak{I}\\1\leq k\leq r_i}} (d_{t_{i+1},j_{i,k}} - d_{t_i,j_{i,k}})\right)[E_{t_1t_2}, \cdots, E_{t_ct_{c+1}}].$$

onde $\mathfrak{I} = \{i \mid t_{i+1} \notin \{t_1, \ldots, t_i\}\}$*. Note que* i *percorre o conjunto* $\mathfrak{I}$ *devido a condição (iii) da Definição 3.1.14, já que* $N_k = x_{j_{k,0}}$ *se* $k \notin \mathfrak{I}$*.*

Exemplo 3.1.21 *Seja* $m = 4$ *e tome* $\mathbf{g} = (\alpha_{1,2}, \alpha_{2,4}, \alpha_{4,1}, \alpha_{1,4})$*. Denote por* x_i *a indeterminada com* G*-grau igual a* $g_i = \alpha_{t_i,t_{i+1}}$ *para* $i = 1, \ldots, 4$*, e as de* G*-grau neutro por* y_j*, para* $j = 1, 2$*. Os monômios* $S_1 = [x_1, y_1, y_2, x_2, x_3, x_4]$*,* $S_2 = [x_1, y_1, [x_2, y_2], x_3, x_4]$*,* $S_3 = [x_1, y_2, [x_2, y_1], x_3, x_4]$ *e* $S_4 = [x_1, [x_2, y_1, y_2], x_3, x_4]$ *são todos os monômios adequados nas indeterminadas* x_i *e* y_j *que satisfazem* $\overline{S} =$

$[x_1, x_2, x_3, x_4]$, *já que* $\mathfrak{I} = \{i \mid t_{i+1} \notin \{t_1, \ldots, t_i\}\} = \{1, 2\}$. *Vamos mostrar que os mesmos formam um conjunto linearmente independente na álgebra relativamente livre. Suas imagens pelo homomorfismo* ϕ *de* $L\langle X_G \rangle$ *em* L*, definido como na observação anterior, são*

$$\begin{aligned}
\phi(S_1) &= (d_{2,1} - d_{1,1})(d_{2,2} - d_{1,2})E_{14},\\
\phi(S_2) &= (d_{2,1} - d_{1,1})(d_{4,2} - d_{2,2})E_{14},\\
\phi(S_3) &= (d_{2,2} - d_{1,2})(d_{4,1} - d_{2,1})E_{14},\\
\phi(S_4) &= (d_{4,1} - d_{2,1})(d_{4,2} - d_{2,2})E_{14}.
\end{aligned}$$

Assim, a independência linear ocorre se, e somente se, os polinômios obtidos ao trocarmos os escalares $d_{t_i,j}$ *por indeterminadas comutativas* $\xi_{t_i,j}$*, para* $i, j = 1, 2$*, são linearmente independentes. Segundo a Proposição 3.1.19, é suficiente demonstrarmos que* $S = \{(\xi_{t_{i+1},j} - \xi_{t_i,j}) \mid i, j = 1, 2\}$ *é um conjunto linearmente independente. Note que qualquer subconjunto de* S *onde há pelo menos dois elementos com índices* $j's$ *distintos é linearmente independente. Fixe por exemplo* $j = 1$*, o subconjunto de interesse é* $\{(\xi_{2,1} - \xi_{1,1}), (\xi_{4,1} - \xi_{2,1})\}$ *(por ser o único não-unitário). É fácil mostrar diretamente que tal conjunto é linearmente independente, mas em geral qualquer subconjunto onde o índice* j *é fixo tem esta propriedade devido ao conjunto* $\mathfrak{I}$*. Demonstramos tal fato de modo análogo ao que fizemos no Exemplo 3.1.11 e na prova da Proposição 3.1.12: usando em etapas a maximalidade decrescente dos elementos de* $\mathfrak{I} = \{i_1, \ldots, i_k\}$ *para garantir que todos os escalares de uma combinação linear nula de* $(\xi_{t_{i_1}+1,j} - \xi_{t_{i_1},j}), \ldots, (\xi_{t_{i_k}+1,j} - \xi_{t_{i_k},j})$ *são necessariamente nulos.*

Lema 3.1.22 *As imagens de monômios multilineares adequados segundo o epimorfismo canônico* $L\langle X_G \rangle \to L\langle X_G \rangle / T_G(L)$ *formam um conjunto linearmente independente em* $L\langle X_G \rangle / T_G(L)$.

Demonstração. Uma vez que $\mathbb{K}$ é um corpo de característica zero é suficiente mostrarmos que monômios adequados multilineares, nas mesmas variáveis, são linearmente independentes, módulo $T_G(L)$. Dado um monômio adequado $S = [N_1, \cdots, N_c]$, com $N_i = [x_{j_{i,0}}, x_{j_{i,1}}, x_{j_{i,2}}, \cdots, x_{j_{i,r_i}}]$ para todo $i = 1, \ldots, c$, denote por $\overline{S}$ o monômio $[x_{j_{1,0}}, \cdots, x_{j_{c,0}}]$, com $\deg_G x_{j_{i,0}} = \alpha_{t_i,t_{i+1}}$. Seja $\phi : L\langle X_G \rangle \to L$ o homomorfismo definido na Observação 3.1.20. Como vimos, a imagem de S é dada por

$$\phi(S) = \left(\prod_{\substack{i \in \mathfrak{I} \\ 1 \leq k \leq r_i}} (d_{t_{i+1}, j_{i,k}} - d_{t_i, j_{i,k}}) \right) \phi(\overline{S}). \tag{3.15}$$

Estabelecidas as notações, sejam $S_1, \ldots, S_u$ monômios, nas mesmas variáveis, multilineares e adequados. Existe uma ênupla $\mathbf{g}$ com entradas em Φ tal que $\overline{S_i} \in \mathcal{B}_{\mathbf{g}}$ para todo $i = 1, \ldots, u$. Como os monômios em $\mathcal{B}_{\mathbf{g}}$, são linearmente independentes, módulo $T_G(L)$, o resultado estará provado ao mostrarmos que, se $S_1, \ldots, S_u$ são tais que $\overline{S_1} = \cdots = \overline{S_u}$, então são linearmente independentes, módulo $T_G(L)$. Como no Exemplo 3.1.21, inclusive aproveitando as notações dadas, isto será válido desde que o conjunto dos polinômios, obtidos ao substituirmos em cada $\phi(S_i)$ os escalares $d_{t_i,j}$ por indeterminadas comutativas $\xi_{t_i,j}$ em (3.15), seja linearmente independente. Tais polinômios são produtos distintos de elementos do conjunto $C = \{\xi_{t_{i+1},j_{i,r}} - \xi_{t_i,j_{i,r}}, i \in \mathfrak{I}, 1 \leq r \leq r_i\}$. Como observado no Exemplo 3.1.21, C é um conjunto linearmente independente e o resultado segue da Proposição 3.1.19.

$\square$

Teorema 3.1.23 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo de característica zero. Os polinômios em (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) e (3.7) formam uma base para as identidades graduadas de $sl_m(\mathbb{K})$ com a gradução de Cartan. Além disso, as imagens dos monômios adequados formam uma base linear do subespaço dos polinômios multilineares na álgebra relativamente livre $L\langle X_G \rangle / T_G(L)$.*

Proof: No início deste capítulo, denotamos por I o T_G-ideal gerado pelos polinômios em (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) e (3.7). Como os geradores de I são identidades para L, temos $I \subset T_G(L)$. Seja f um polinômio multilinear em $T_G(L)$. O Lema 3.1.18 implica na existência de monômios adequados $S_1, \ldots, S_u$ e escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_u$ tais que f é congruente a $\sum_i \lambda_i S_i$ módulo I. Uma vez que $f \in T_G(L)$, o polinômio $\sum_i \lambda_i S_i$ é uma identidade para L e segue do Lema 3.1.22 que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$, ou seja, $f \in I$. Como o corpo $\mathbb{K}$ tem característica zero, concluímos que $T_G(L) \subset I$. A igualdade $T_G(L) = I$ juntamente com o Lema 3.1.18 e o Lema 3.1.22 asseguram a última afirmação do teorema. $\square$

Teorema 3.1.24 *As identidades em (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) e (3.7) formam um conjunto minimal de geradores para $T_G(L)$.*

Proof. Denote por $\mathcal{B}$ o conjunto dos polinômios em (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) e (3.7). É suficiente mostrarmos que para todo $f \in \mathcal{B}$, o T_G-ideal gerado por $\mathcal{B} \setminus \{f\}$ não contém o polinômio f. Dado $g \in G \setminus (\Phi \cup \{e\})$, seja $H^{(1),g}$ uma álgebra de Lie unidimensional G-graduada tal que supp $H^{(1),g} = \{g\}$. Note que $\mathcal{B} \setminus \{x_1^{(g)}\} \subset T_G(H^{(1),g})$ e $x_1^{(g)} \notin T_G(H^{(1),g})$. Agora, denotamos por $H^{(2)}$ a álgebra $sl_2(\mathbb{K})$ com a graduação trivial. O polinômio em (3.2) não é identidade graduada para $H^{(2)}$ e claramente os demais polinômios de $\mathcal{B}$ estão em $T_G(H^{(2)})$. Portanto, mostramos que é válido para os polinômios em (3.1) e (3.2). Sejam i, j, k elementos distintos do conjunto $\{1, \ldots, m\}$. Fixamos um polinômio f em (3.3)-(3.7) com a 4-upla $\mathbf{g}$ correspondente a i, j, k (análogo ao que fizemos na prova do Lema 3.1.6). Qualquer consequência de (3.2) de grau 4, com indeterminadas cujos G-graus estão em Φ, possui G-grau igual a e, enquanto qualquer consequência de grau 4 de um polinômio f em (3.3)-(3.7) é, necessariamente, um múltiplo escalar de f. Isso implica que, se f pertence ao T_G-ideal gerado por $\mathcal{B} \setminus \{f\}$, então está no T_G-ideal gerado pelos polinômios em (3.1). Denote por $H^{(i,j,k)}$ a álgebra $M_6(\mathbb{K})^{(-)}$ com a graduação elementar induzida por $(e_i, e_j, e_k, e_i, e_j, e_k)$ – ver Exemplo 1.1.22. Então, o grau de uma matriz elementar $E_{rs} \in H^{(i,j,k)}$, onde $1 \leq r, s \leq m$ e $r \neq s$, é o elemento neutro ou é da forma $-e_{t_1} + e_{t_2}$, com t_1 e t_2 elementos distintos em $\{i, j, k\}$. Assim, $H^{(i,j,k)} \subset \Phi \cup \{e\}$, portanto, todo polinômio em (3.1) é uma identidade para $H^{(i,j,k)}$. A seguir, apontamos para cada polinômio f em (3.3)-(3.7) uma substituição admissível, por matrizes elementares em $H^{(i,j,k)}$, cujo resultado é diferente de zero.

$\mathbf{g}$	$f \in P_4^{\mathbf{g}}$	Substituição em f
$(\alpha_{i,j}, \alpha_{j,i}, \alpha_{i,j}, \alpha_{j,k})$	$[x_4, x_1, x_2, x_3] - [x_4, x_3, x_2, x_1]$	$x_1 \mapsto E_{21}$, $x_2 \mapsto E_{15}$, $x_3 \mapsto E_{51}$, $x_4 \mapsto E_{32}$
$(\alpha_{i,j}, \alpha_{j,i}, \alpha_{i,k}, \alpha_{k,j})$	$[x_4, x_3, x_2, x_1] - 2[x_4, x_2, x_1, x_3]$	$x_1 \mapsto E_{51}$, $x_2 \mapsto E_{15}$, $x_3 \mapsto E_{31}$, $x_4 \mapsto E_{23}$
$(\alpha_{i,j}, \alpha_{j,k}, \alpha_{k,i}, \alpha_{i,j})$	$[x_4, x_3, x_2, x_1] + [x_4, x_2, x_3, x_1]$	$x_1 \mapsto E_{24}$, $x_2 \mapsto E_{32}$, $x_3 \mapsto E_{13}$, $x_4 \mapsto E_{21}$
$(\alpha_{i,j}, \alpha_{j,k}, \alpha_{k,i}, \alpha_{i,k})$	$[x_4, x_3, x_2, x_1] + [x_4, x_3, x_1, x_2]$	$x_1 \mapsto E_{21}$, $x_2 \mapsto E_{32}$, $x_3 \mapsto E_{13}$, $x_4 \mapsto E_{61}$
$(\alpha_{i,j}, \alpha_{j,k}, \alpha_{k,j}, \alpha_{j,k})$	$2[x_4, x_1, x_3, x_2] - [x_4, x_3, x_2, x_1]$	$x_1 \mapsto E_{21}$, $x_2 \mapsto E_{32}$, $x_3 \mapsto E_{53}$, $x_4 \mapsto E_{35}$

Na primeira linha, por exemplo, deg $x_1 = e_i - e_j =$ deg E_{12}, deg $x_2 = e_j - e_i =$ deg E_{15}, deg $x_3 = e_i - e_j =$ deg E_{51} e deg $x_4 = e_j - e_k =$ deg E_{32}. Os detalhes para os demais polinômios encontram-se descritos no Apêndice B. Portanto, concluímos que todo polinômio f em (3.3)-(3.7) não está no T_G-ideal gerado por $\mathcal{B} \setminus \{f\}$. □

A n-ésima codimensão graduada de L é o número de monômios adequados com indeterminadas no conjunto $\{x_i^{(g)} \mid 1 \leq i \leq n, g \in G\}$. Podemos calculá-la no caso em que $m = 2$.

Corolário 3.1.25 *Seja $n \geq 2$, a n-ésima codimensão $c_n^G(L)$ da álgebra de Lie $L = sl_2(\mathbb{K})$ com a graduação de Cartan é*

$$c_n^G(L) = \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{n-2l}\binom{2l}{l} + 2\left(\sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n}{n-2l+1}\binom{2l-1}{l}\right).$$

Demonstração. Note que neste caso, o número k na Proposição 3.1.12 é igual a 1. Dada qualquer n-upla $\mathbf{g}$ boa, a condição *(iii)* da Definição 3.1.14 implica na existência de exatamente um monômio adequado em $P_n^{\mathbf{g}}$. Logo, se $\mathbf{g}$ é uma n-upla boa, então dim $P_n^{\mathbf{g}} = 1$, pelo Teorema 3.1.23. Portanto, $c_n^G(L)$ é o número de n-uplas boas em $(\Phi \cup \{e\})^n$. Seja $\mathbf{g} \in (\Phi \cup \{e\})^n$ e denote por n_1, n_2 e n_3 o número de entradas em $\mathbf{g}$ que são iguais a $\alpha_{1,2}, \alpha_{2,1}$ e e, respectivamente. A n-upla $\mathbf{g}$ é boa se, e só se, $\mid n_1 - n_2 \mid \leq 1$ e $n_1^2 + n_2^2 > 0$ para $n > 1$. Então, encontrar o número de n-uplas boas em $(\Phi \cup \{e\})^n$ satisfazendo essas condições é equivalente a resolver um problema de combinações completas. Consideremos inicialmente o caso em que $n_1 = n_2$. Primeiro, calculamos como distribuir o G-grau e na n-upla e isso pode ser feito de $\binom{n}{n-2n_1}$ maneiras. Em seguida, todas as entradas cujo G-grau é $\alpha_{1,2}$, o que pode ser feito de $\binom{2n_1}{n_1}$ formas. Feito isto, as entradas com G-grau $\alpha_{2,1}$ são automaticamente determinadas. Portanto, considerando todos os valores possíveis para n_1, o número de n-uplas boas, neste caso, é

$$\sum_{n_1=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{n-2n_1}\binom{2n_1}{n_1}.$$

Agora, vejamos o número de n-uplas tais que $n_1 - n_2 = 1$ ou $n_1 - n_2 = -1$. É suficiente analisar quando $n_1 = n_2 + 1$, uma vez que o outro é análogo. Assim, $n_1 + n_2 = 2n_1 - 1$. Seguindo o processo anterior, primeiro as entradas de G-grau e e depois as de G-grau $\alpha_{1,2}$, temos um total de

$$\sum_{n_1=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n}{n-2n_1+1}\binom{2n_1-1}{n_1}.$$

□

3.2 Identidades Graduadas para uma Subálgebra de Lie Homogênea de $M_n(\mathbb{K})^{(-)}$

Os resultados da seção anterior nos permitem fornecer uma base explícita para as identidades de uma subálgebra de Lie graduada L de $M_n(\mathbb{K})^{(-)}$ com a graduação de Cartan desde que a componente neutra L_e seja o subespaço de $M_n(\mathbb{K})$ das matrizes diagonais ou o subespaço das matrizes diagonais de traço zero. Para tal álgebra temos as identidades

$$x_{1,g}, \text{ se } g \in G \setminus (\text{supp } L). \tag{3.16}$$

Consideramos as noções de ênuplas boas e monômios multilineares adequados relativas à subálgebra L. A prova do Teorema 3.1.23 produz, com as devidas modificações, o seguinte resultado:

Teorema 3.2.1 *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo de característica zero e L uma subálgebra graduada da álgebra de Lie $M_n(\mathbb{K})^{(-)}$ com a graduação de Cartan. Assuma que L_e é o subespaço das matrizes diagonais ou o subespaço das matrizes diagonais de traço nulo. As identidades em (3.16), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) e (3.7) formam um conjunto de geradores para $T_G(L)$. Além disso, as imagens dos monômios adequados formam uma base linear do subespaço dos polinômios multilineares na álgebra relativamente livre $L\langle X_G\rangle/T_G(L)$.*

O conjunto no Teorema 3.2.1 pode não ser minimal. Para a álgebra L das matrizes triangulares superiores, foi provado em [25] que a base para as identidades graduadas de L consiste dos polinômios em (3.16) e (3.2). Nesse mesmo artigo as codimensões graduadas são calculadas e usadas para fornecer um limite superior e inferior para as codimensões graduadas de $UT_n^{(-)}$ com uma graduação elementar arbitrária.

3.3 Uma Base para a Álgebra Relativamente Livre

Na primeira seção deste capítulo, provamos que as imagens dos monômios adequados formam uma base linear do subespaço dos polinômios multilineares na álgebra relativamente livre $L\langle X_G\rangle/T_G(L)$, o que nos permitiu demonstrar nosso resultado principal. Agora estendemos a noção de monômios adequados para exibir uma base para $L\langle X_G\rangle/T_G(L)$.

Definição 3.3.1 *Diremos que um monômio qualquer é adequado se ele pode ser obtido de um multilinear adequado identificando-se indeterminadas de mesmo grau.*

Exemplo 3.3.2 *Seja $S = [x_1, y_1, [x_2, y_1], x_3, x_1]$, onde x_i possui G-grau igual a g_i, sendo $\mathbf{g} = (\alpha_{2,1}, \alpha_{1,3}, \alpha_{3,2})$ e y_1 uma indeterminada com G-grau neutro. Segundo nossa definição, tal monômio é adequado já que $[x_1, y_1, [x_2, y_2], x_3, x_4]$, onde x_4 é uma indeterminada com G-grau $\alpha_{2,1}$ e y_2 de G-grau e, é adequado segundo a Definição 3.1.14. Obtemos S ao identificarmos $x_4 \mapsto x_1$ e $y_2 \mapsto y_1$. Já $[x_1, y_1, [x_2, y_2], x_3, x_1]$ é adequado, pois é obtido a partir de $[x_1, y_1, [x_2, y_2], x_3, x_4]$, o qual é multilinear adequado. Identificamos indeterminadas de G-grau e quando necessário.*

Vamos mostrar que qualquer monômio normado à esquerda é congruente, módulo $T_G(L)$, a uma combinação linear de monômios adequados e por fim provar que o conjunto de todos os monômios adequados é linearmente independente módulo $T_G(L)$.

Exemplo 3.3.3 *Nas condições do exemplo anterior, seja $M = [x_1, y_1, x_2, x_3, x_1, y_1]$. Usando os resultados obtidos na primeira seção, escreveremos este monômio na álgebra relativamente livre como uma combinação linear de monômios adequados, segundo a Definição 3.3.1. Para isso, consideramos $\widehat{M} = [x_1, y_1, x_2, x_3, x_4, y_2]$, do qual obtemos M ao identificarmos as indeterminadas de mesmo grau, como no Exemplo 3.3.2. Já que $\widehat{M}$ é multilinear, procedemos como na Observação 3.1.15 e no Exemplo 3.1.17. No primeiro passo, depois de aplicarmos a identidade de Jacobi algumas vezes, obtemos*

$$\widehat{M} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4,$$

onde $S_1 = [x_1, y_1, y_2, x_2, x_3, x_4]$ e $S_2 = [x_1, y_1, [x_2, y_2], x_3, x_4]$ são monômios multilineares adequados, enquanto que os monômios $S_3 = [x_1, y_1, x_2, [x_3, y_2], x_4]$ e $S_4 = [x_1, y_1, x_2, x_3, [x_4, y_2]]$ não o são, pois não cumprem a condição (iii). Usando o método empregado no Exemplo 3.1.17, obtemos que

$$S_3 \overset{3.2}{\sim} [x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, x_4] = S_1 + S_2,$$

$$S_4 \overset{L.3.1.7}{\sim} [x_1, y_1, [x_2, x_3], [x_4, y_2]] \overset{L.\ 3.1.16}{\sim} [x_1, y_1, [x_2, x_3, y_2], x_4] \sim S_3 + S_1,$$

onde a última equivalência é obtida ao aplicarmos a identidade de Jacobi ao monômio $[x_2, x_3, y_2]$. *Portanto, existem* $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$, *não todos nulos, tais que*

$$\widehat{M} \equiv \lambda S_1 + \beta S_2 \Rightarrow M \equiv \lambda[x_1, y_1, y_1, x_2, x_3, x_1] + \beta[x_1, y_1, [x_2, y_1], x_3, x_1],$$

ao identificarmos as indeterminadas de mesmo grau.

O método utilizado neste exemplo demonstra uma versão mais geral do Lema 3.1.18.

Lema 3.3.4 *Todo polinômio em* $L\langle X_G\rangle$ *é congruente módulo* I *a uma combinação linear de monômios adequados.*

Prova: É suficiente provar este resultado para um monômio normado à esquerda $M = [x_{j_1}^{(g_{j_1})}, \cdots, x_{j_r}^{(g_{j_r})}]$. Se M é multilinear, o resultado segue do Lema 3.1.18. Supondo o contrário, seja $\widehat{M}$ o monômio multilinear do qual obtemos M ao identificarmos as variáveis de mesmo grau. Segue do Lema 3.1.18 que $\widehat{M}$ é congruente, módulo $T_G(L)$, a uma combinação linear de monômios multilineares adequados $S_1, \ldots, S_c$. Recuperamos o monômio M via o homomorfismo que identifica as indeterminadas de mesmo grau, e os monômios $S_1, \ldots, S_c$ resultantes são adequados segundo a Definição 3.3.1. □

Como no caso multilinear, faremos uso do homomorfismo definido na Observação 3.1.20 para concluir, via a Proposição 3.1.19, a independência linear do conjunto de monômios adequados. Primeiro, vejamos a versão da expressão (3.15) para o caso geral.

Observação 3.3.5 *Denote por* y *as indeterminadas com* G*-grau* e. *Seja* M *um monômio adequado obtido de* $S = [\widehat{N_1}, \cdots, \widehat{N_c}]$, *onde* $\widehat{N_i} = [x_i, y_{i_1}, y_{i_2}, \cdots, y_{i_{r_i}}]$ *com* $i_1 < i_2 < \cdots < i_{r_i}$ *para todo* $i = 1, \ldots, c$, *denote por* $\overline{S}$ *o monômio* $[x_1, \cdots, x_c]$ *com* $\deg_G x_i = \alpha_{t_i, t_{i+1}}$. *Seja* $\mathfrak{I} = \{i \mid t_{i+1} \notin \{t_1, \ldots, t_i\}\}$. *Então,* $M = [N_1, \cdots, N_c]$, *onde* N_i *é o monômio resultante após identificarmos em* S *algumas das indeterminadas de mesmo* G*-grau. Denote por* $y_{j_{i_k}}$, *com* $0 \leq k \leq r_i$, *as variáveis de* G*-grau neutro de* N_i *para* $i = 1, \cdots, c$, *as quais não são necessariamente todas distintas. Denotamos por* $\overline{M}$ *o monômio normado à esquerda cujas indeterminadas são as indeterminadas de* M *com* G*-grau não neutro, na mesma ordem que estão em* M. *Observe que* $\phi(\overline{M}) = \phi(\overline{S})$, *onde* ϕ *é o homomorfismo definido na Observação*

3.1.20. *Temos que a imagem de M é dada por*

$$\phi(M) = \left(\prod_{\substack{i \in \mathfrak{I} \\ 1 \leq k \leq r_i}} (d_{t_{i+1}, j_{i,k}} - d_{t_i, j_{i,k}}) \right) \phi(\overline{M}). \tag{3.17}$$

Exemplo 3.3.6 *Seja $\mathbf{g} = (\alpha_{2,1}, \alpha_{1,3}, \alpha_{3,2}, e)$ a tupla dos G-graus das indeterminadas x_1, x_2, x_3 e y_1 no Exemplo 3.3.3. Consideramos todos os monômios adequados com multigrau (2,1,1,2). Para descrevê-los, encontramos todos os monômios multilineares adequados do espaço $P_6^{\mathbf{h}}$, onde $\mathbf{h} = (\alpha_{2,1}, \alpha_{1,3}, \alpha_{3,2}, \alpha_{2,1}, e, e)$ (com a mesma notação x_i e y_j para as indeterminadas). Uma vez que $\mathfrak{I} = \{1, 2\}$ e $\mathfrak{B}_{\mathbf{h}} = \{[x_1, x_2, x_3, x_4]\}$ (para não complicar a notação, aqui também denotamos por $\mathbf{h}$ a tupla sem as entradas neutras), são eles: $\widehat{S}_1 = [x_1, y_1, y_2, x_2, x_3, x_4]$, $\widehat{S}_2 = [x_1, y_1, [x_2, y_2], x_3, x_4]$, $\widehat{S}_3 = [x_1, [x_2, y_1, y_2], x_3, x_4]$ e $\widehat{S}_4 = [x_1, y_2, [x_2, y_1], x_3, x_4]$. Ao identificarmos as variáveis de mesmo G-grau, obtemos os monômios adequados $S_1 = [x_1, y_1, y_1, x_2, x_3, x_1]$, $S_2 = [x_1, y_1, [x_2, y_1], x_3, x_1]$ e $S_3 = [x_1, [x_2, y_1, y_1], x_3, x_1]$. Segundo a Observação 3.3.5, temos que*

$$\begin{aligned}
\phi(S_1) &= (d_{1,1} - d_{2,1})^2 E_{21} \\
\phi(S_3) &= (d_{3,1} - d_{1,1})^2 E_{21} \\
\phi(S_2) &= (d_{1,1} - d_{2,1})(d_{3,1} - d_{1,1}) E_{21}
\end{aligned}$$

Logo, a prova de que S_1, S_2 e S_3 são linearmente independentes, módulo $T_G(L)$, é análoga a do Exemplo 3.1.21. Isto é, resume-se a provar a independência linear do conjunto $S = \{(\xi_{t_{i+1},1} - \xi_{t_i,1}) \mid i = 1, 2\}$, onde $\xi_{t_1,1}$, $\xi_{t_2,1}$, $\xi_{t_3,1}$ são indeterminadas comutativas. Ora, S é subconjunto de $\{(\xi_{t_{i+1},j} - \xi_{t_i,j}) \mid i, j = 1, 2\}$, o qual é linearmente independente, como já demonstrado na primeira seção.

Exemplo 3.3.7 *Seja $\mathbf{g} = (\alpha_{2,1}, \alpha_{1,3}, \alpha_{3,2}, e)$ a tupla do caso anterior. Considere agora os monômios adequados de multigrau (2,2,2,2). Neste caso, o G-grau total de $\mathbf{h}$ é o elemento neutro. Adaptamos a notação de modo que w, x, z denotam as indeterminadas com G-grau $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{3,2}$, respectivamente e y as com G-grau igual a e. Note que $\mathfrak{I} = \{1, 2\}$, assim $\mathfrak{B}_{\mathbf{h}} = \{M_1 = [x_1, z_1, w_2, x_2, z_2, w_1], M_2 = [z_1, w_2, x_2, z_2, w_1, x_1]\}$. Portanto, os monômios adequados de multigrau (2,2,2,2)* *são:*

$$S_1 = [x_1, y_1, y_1, z_1, w_1, x_1, z_1, w_1], S_2 = [x_1, y_1, [z_1, y_1], w_1, x_1, z_1, w_1],$$
$$S_3 = [x_1, [z_1, y_1, y_1], w_1, x_1, z_1, w_1], N_1 = [z_1, y_1, y_1, w_1, x_1, z_1, w_1, x_1]$$
$$N_2 = [z_1, y_1, w_1, x_1, z_1, w_1, [x_1, y_1]], N_3 = [z_1, w_1, x_1, z_1, w_1, [x_1, y_1, y_1]]$$

com $\overline{S_i} = M_1$ *e* $\overline{N_i} = M_2$*, para* $i = 1, 2, 3$*. Note que ao calcularmos (3.17),* $\phi(S_i)$ *e* $\phi(N_i)$ *são múltiplos escalares de* $\phi(M_1)$ *e* $\phi(M_2)$*, respectivamente, os quais são matrizes elementares distintas. Portanto, os monômios adequados* S_i *e* N_i*, para* $i = 1, 2, 3$*, formam um conjunto linearmente independente na álgebra relativamente livre.*

Os Exemplos 3.3.6 e 3.3.7 sugerem que os monômios adequados formam uma base para $L\langle X_G\rangle/T_G(L)$. A demonstração segue os passos da versão multilinear (Lema 3.1.22).

Teorema 3.3.8 *As imagens de monômios adequados segundo o epimorfismo canônico* $L\langle X_G\rangle \to L\langle X_G\rangle/T_G(L)$ *formam um conjunto linearmente independente em* $L\langle X_G\rangle/T_G(L)$*.*

Demonstração. É suficiente demonstrarmos que monômios adequados nas mesmas variáveis e de mesmo multigrau são linearmente independentes. Adotamos a mesma notação utilizada no Lema 3.1.22. Sejam $M_1, \dots, M_u$ monômios adequados nas mesmas variáveis e de mesmo multigrau obtidos, respectivamente, a partir dos monômios $S_1, \dots, S_u$, os quais são adequados multilineares, nas mesmas variáveis. Existe uma ênupla $\mathbf{g}$ com entradas em Φ tal que $\overline{M_i} \in \mathcal{B}_{\mathbf{g}}$ para todo $i = 1, \dots, u$. Como evidenciado nos Exemplos 3.3.6 e 3.3.7, o resultado estará provado ao mostrarmos que, se $M_1, \dots, M_u$ são tais que $\overline{S_1} = \cdots = \overline{S_u}$, então são linearmente independentes módulo $T_G(L)$. Isto é válido uma vez que ao substituirmos, para cada $\phi(M_i)$, os escalares em (3.17) por indeterminadas comutativas, os polinômios então obtidos são produtos distintos de elementos em um subconjunto de $C = \{\xi_{t_{i+1},j_{i,r}} - \xi_{t_i,j_{i,r}}, i \in \mathfrak{I}, 1 \leq s \leq s_i\}$, correspondente as equações $\phi(S_i)$ e portanto, linearmente independente pelos resultados da primeira seção. O resultado segue-se então da Proposição 3.1.19.

□

É interessante investigar se a base descrita no Teorema 3.1.23 permanece para o caso em que o corpo é infinito, uma vez que isto é válido para $sl_2(\mathbb{K})$, [22].

Neste trabalho não investigamos o comportamento assintótico das codimensões graduadas e a propriedade de Specht para $sl_m(\mathbb{K})$ com a graduação de Cartan sobre um corpo de característica zero, permanecendo ainda em aberto. Outro problema interessante é investigar a base das identidades graduadas para outras graduações finas de $sl_m(K)$, até mesmo o caso geral da graduação de Pauli. Por exemplo, Em [8, Example 3.60] são listadas as graduações finas, a menos de isomorfismo, em $sl_4(\mathbb{K})$, característica de $\mathbb{K}$ diferente de 2. A graduação pelo grupo $\mathbb{Z}_2^4$ é do mesmo tipo da graduação de Cartan, com a componente homogênea de grau e 3-dimensional e todas as demais não nulas são unidimensionais.

Apêndices

Apêndice A

Lema 3.1.6: detalhes da demonstração

Neste apêndice, apresentamos a verificação detalhada de alguns passos da demonstração do Lema 3.1.6, cujo enunciado relembramos abaixo:

Lema A.1 *Seja* $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3, g_4) \in \Phi^4$*, onde* $g_i = \alpha_{t_i,t_{i+1}}$ *para* $i = 1, \ldots, 4$ *e* $g_1g_2g_3g_4 \neq e$*. Se* M *é um monômio em* $P_4^{\mathbf{g}} \setminus T_G(L)$*, então* $M \sim [x_1, x_2, x_3, x_4]$*.*

A prova deste resultado consiste em demonstrar que os monômios da base canônica de $P_4^{\mathbf{g}}$, que não são identidades para L, são equivalentes. Relembramos que $\tau = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$ onde $t_1, \ldots, t_5$ são inteiros positivos tais que $g_i = \alpha_{t_i,t_{i+1}}$, para todo $i = 1, 2, 3, 4$. Denotamos por n_τ o número de inteiros distintos em τ, o qual mostramos ser maior que dois. Aqui verificamos, em cada um dos casos $n_\tau = 5, 4, 3$, quais monômios da forma $[x_4, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}]$, que formam a base canônica de $P_4^{\mathbf{g}}$, são identidades para L , onde $\mathbf{g}$ é a quádrupla correspondente a $\tau = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$. Note que para qualquer τ o monômio $[x_4, x_3, x_2, x_1]$ não é identidade, uma vez que estamos considerando apenas os caso em que $\mathbf{g}$ é boa.

(1) $n_\tau = 5$

Neste caso, como todos as entradas de τ são distintas, temos apenas uma 4-upla a considerar, $\mathbf{g} = (\alpha_{i,j}, \alpha_{j,k}, \alpha_{k,l}, \alpha_{l,t})$. Observe que $[x_4, x_1]$ e $[x_4, x_2]$ são identidades. Consequentemente, os monômios obtidos a partir das permutações $Id, (2\ 3), (1\ 2)$ e $(1\ 2\ 3)$ estão em $T_G(L)$. Temos que $[x_4, x_3, x_1] \in T_G(L)$, pois é uma consequência da identidade $x_1^{(g)}$, onde $g = \alpha_{k,t} + \alpha_{i,j} \notin \text{supp } L$. Portanto, $[x_4, x_3, x_2, x_1]$ é o único monômio da base canônica que não está em $T_G(L)$. Isso torna o resultado válido neste caso.

(2) $n_\tau = 4$

Como $t_i \neq t_{i+1}$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$ e $t_5 \neq t_1$, concluímos que existem inteiros distintos i, j, k, l para os quais τ é uma das seguintes 4-uplas: (i, j, i, k, l), (i, j, k, i, l), (i, j, k, j, l), (i, j, k, l, j) ou (i, j, k, l, k).

- $\mathbf{g} = (\alpha_{i,j}, \alpha_{j,i}, \alpha_{i,k}, \alpha_{k,l})$, $\mathbf{g} = (\alpha_{i,j}, \alpha_{j,k}, \alpha_{k,i}, \alpha_{i,l})$. Em ambos os casos temos que $[x_4, x_1]$ e $[x_4, x_2]$ são identidades. Logo, os monômios correspondentes às permutações $Id, (2\ 3), (1\ 2)$ e $(1\ 2\ 3)$ estão em $T_G(L)$. Também verifica-se, em ambos os casos, que $[x_4, x_3, x_1] \in T_G(L)$, pois $(g_4 g_3) g_1 \notin \text{supp } L$. Concluímos que $[x_4, x_3, x_2, x_1]$ é o único monômio que não pertence a $T_G(L)$.
- $\mathbf{g} = (\alpha_{i,j}, \alpha_{j,k}, \alpha_{k,j}, \alpha_{j,l})$. É imediato que $[x_4, x_2] \in T_G(L)$. Logo, os monômios correspondentes às permutações $(1\ 2)$ e $(1\ 2\ 3)$ são identidades para L. Os monômios $[x_4, x_1, x_2, x_3]$ e $[x_4, x_1, x_3, x_2]$ são identidades, pois $[x_4, x_1, x_2]$ e $[x_4, x_1, x_3]$ são consequências de polinômios em (3.1), já que $\alpha_{i,l} + \alpha_{j,k}$ e $\alpha_{i,l} + \alpha_{k,j}$ não pertencem ao suporte. O monômio $[x_4, x_3, x_1]$ também pertence ao T_G-ideal gerado pelos polinômios em (3.1), pois $(g_4 g_3) g_1 \notin \text{supp } L$. Portanto, $[x_4, x_3, x_2, x_1]$ é o único monômio da base canônica que não pertence a $T_G(L)$.
- $\mathbf{g} = (\alpha_{i,j}, \alpha_{j,k}, \alpha_{k,l}, \alpha_{l,j})$. Neste caso, os monômios associados as permutações Id e $(2\ 3)$ estão em $T_G(L)$, pois seguem da identidade $[x_4, x_1]$. Observe que $(g_4 g_2) g_1$ e $(g_4 g_2) g_3$ não estão no suporte. Consequentemente, $[x_4, x_2, x_1, x_3]$ e $[x_4, x_2, x_3, x_1]$ são identidades para L. O mesmo acontece com $[x_4, x_3, x_1, x_2]$, uma vez que $(g_4 g_3) g_1 \notin \text{supp } L$. Portanto, o monômio $[x_4, x_3, x_2, x_1]$ é o único que não é identidade para L.
- $\mathbf{g} = (\alpha_{i,j}, \alpha_{j,k}, \alpha_{k,l}, \alpha_{l,k})$. Note que $[x_4, x_1]$ e $[x_4, x_2]$ são identidades e portanto, os monômios correspondentes às permutações $Id, (2\ 3), (1\ 2)$ e $(1\ 2\ 3)$ estão em $T_G(L)$. .Pela identidade de Jacobi, $[x_4, x_3, x_1] = [x_4, x_1, x_3] + [x_4, [x_3, x_1]]$ e estes últimos são ambos identidades, pois $[x_1, x_3] \in T_G(L)$. Assim, $[x_4, x_3, x_2, x_1]$ é o único monômio que não é identidade para L.

(3) $n_\tau = 3$

Sejam i, j, k inteiros distintos, temos as seguintes possibilidades para τ: (i, j, i, j, k), (i, j, i, k, j), (i, j, k, i, j), (i, j, k, i, k) ou (i, j, k, j, k). Analisamos os respectivos espaços $P_4^{\mathbf{g}}$.

- $\mathbf{g} = (\alpha_{i,j}, \alpha_{j,i}, \alpha_{i,j}, \alpha_{j,k})$. O monômio $[x_4, x_2]$ claramente é uma identidade para$L$, enquanto que $[x_4, x_1, x_3]$ e $[x_4, x_3, x_1]$ são consequências de $x_1^{(g)}$, onde $g = \alpha_{i,k} + \alpha_{i,j}$. Logo, os monômios correspondentes às permutações $(1\ 2), (1\ 2\ 3)$,$(2\ 3)$ e $(1\ 3\ 2)$ são identidades para L. Agora, o resultado da substituição por matrizes elementares em $[x_4, x_1, x_2, x_3]$ é $-E_{ik}$. Portanto, $[x_4, x_1, x_2, x_3]$ e $[x_4, x_3, x_2, x_1]$ são os monômios da base que não estão em $T_G(L)$.

- $\mathbf{g} = (\alpha_{i,j}, \alpha_{j,i}, \alpha_{i,k}, \alpha_{k,j})$. Os monômios $[x_4, x_1, x_2, x_3]$ e $[x_4, x_1, x_3, x_2]$ estão em $T_G(L)$, pois $[x_4, x_1]$ é consequência de um polinômio em (3.1). Por outro lado, $[x_4, x_3, x_1] \in T_G(L)$ por ser consequência da identidade $[x_1, x_1]$. Para os monômios $[x_4, x_2, x_1, x_3]$ e $[x_4, x_2, x_3, x_1]$, a substituição por matrizes elementares mostra que os mesmo não são identidades para L, uma vez que em ambos obtemos como resultado $-E_{ij}$. Portanto, os monômios da base que não estão em $T_G(L)$ são $[x_4, x_3, x_2, x_1], [x_4, x_2, x_1, x_3]$ e $[x_4, x_2, x_3, x_1]$.

- $\mathbf{g} = (\alpha_{i,j}, \alpha_{j,k}, \alpha_{k,i}, \alpha_{i,j})$. Observe que $\deg_G x_4 = \deg_G x_1$ e isto implica que os monômios $[x_4, x_1, x_2, x_3]$ e $[x_4, x_1, x_3, x_2]$ são identidades. Já os monômios correspondentes às permutações $(1\ 2)$ e $(1\ 3\ 2)$ estão em $T_G(L)$, pois $[x_4, x_2, x_1]$ e $[x_4, x_3, x_1]$ são consequências de polinômios em (3.1), especificamente, de variáveis com G-grau $\alpha_{i,k} + \alpha_{i,j}$ e $\alpha_{k,j} + \alpha_{i,j}$, respectivamente. O monômio $[x_4, x_2, x_3, x_1]$ não é consequência de (3.1) e o resultado da substituição por matrizes elementares tem como resultado E_{ij}. Portanto, $[x_4, x_3, x_2, x_1]$ e $[x_4, x_2, x_3, x_1]$ são os monômios que não estão em $T_G(L)$.

- $\mathbf{g} = (\alpha_{i,j}, \alpha_{j,k}, \alpha_{k,i}, \alpha_{i,k})$. Note que $[x_4, x_1]$ e $[x_4, x_2]$ são consequências de polinômios em (3.1). Consequentemente, os monômios obtidos a partir das permutações $Id, (2\ 3), (1\ 2)$ e $(1\ 2\ 3)$ são identidades para L. A substituição por matrizes elementares mostra que, assim como $[x_4, x_3, x_2, x_1]$, o monômio $[x_4, x_3, x_1, x_2]$ não pertence a $T_G(L)$.

- $\mathbf{g} = (\alpha_{i,j}, \alpha_{j,k}, \alpha_{k,j}, \alpha_{j,k})$. Em uma situação análoga ao terceiro item, o fato que $\deg_G x_4 = \deg_G x_2$ implica que $[x_4, x_2, x_1, x_3], [x_4, x_2, x_3, x_1]$ são identidades. Além destes, o monômio $[x_4, x_1, x_2, x_3]$ também pertence a $T_G(L)$, uma vez que $[x_4, x_1, x_2]$ é consequência do polinômio $x^{(g)}$, onde $g = \alpha_{i,k} + \alpha_{j,k}$. Os monômios $[x_4, x_1, x_3, x_2]$ e $[x_4, x_3, x_1, x_2]$ não são consequências de (3.1) ou (3.2), assim, não pertecem a $T_G(L)$.

Apêndice B

Teorema 3.1.24: detalhes da demonstração

Com a terminologia da demonstração do Teorema 3.1.24, apresentamos aqui alguns detalhes que a tornaria demasiada extensa e que ficam melhor compreendidos analisados separadamente. Denotamos por $H^{(i,j,k)}$ a álgebra $M_6(\mathbb{K})^{(-)}$ com a graduação elementar induzida por $(e_i, e_j, e_k, e_i, e_j, e_k)$. Abaixo, listamos todas as raízes α_{t_1,t_2}, com $t_i \in \{i, j, k\}$ para $i = 1, 2$, com os respectivos elementos $g_i^{-1}g_j$ que satisfazem $\alpha_{t_1,t_2} = g_i^{-1}g_j$, a fim de explicitar que as substituições que realizamos na prova do Teorema 3.1.24 são admissíveis.

$\alpha_{i,j} = e_i - e_j$	$g_2^{-1}g_1, g_2^{-1}g_4, g_5^{-1}g_1, g_5^{-1}g_4$	$L_{\alpha_{i,j}} = \bigoplus_{r=2,5\,;\,s=1,4} [E_{rs}]$
$\alpha_{j,i} = e_j - e_i$	$g_1^{-1}g_2, g_1^{-1}g_5, g_3^{-1}g_2, g_3^{-1}g_5$	$L_{\alpha_{i,j}} = \bigoplus_{r=1,3\,;\,s=2,5} [E_{rs}]$
$\alpha_{j,k} = e_j - e_k$	$g_3^{-1}g_2, g_3^{-1}g_5, g_6^{-1}g_2, g_6^{-1}g_5$	$L_{\alpha_{j,k}} = \bigoplus_{r=3,6\,;\,s=2,5} [E_{rs}]$
$\alpha_{i,k} = e_i - e_k$	$g_3^{-1}g_1, g_3^{-1}g_4, g_6^{-1}g_1, g_6^{-1}g_4$	$L_{\alpha_{j,k}} = \bigoplus_{r=3,6\,;\,s=1,4} [E_{rs}]$
$\alpha_{k,j} = e_k - e_j$	$g_2^{-1}g_3, g_2^{-1}g_6, g_5^{-1}g_3, g_5^{-1}g_6$	$L_{\alpha_{k,j}} = \bigoplus_{r=2,5\,;\,s=3,6} [E_{rs}]$
$\alpha_{k,i} = e_k - e_i$	$g_1^{-1}g_3, g_1^{-1}g_6, g_4^{-1}g_3, g_4^{-1}g_6$	$L_{\alpha_{k,j}} = \bigoplus_{r=1,4\,;\,s=3,6} [E_{rs}]$

A substituição apontada para o polinômio 3.3 resulta em

$$
\begin{aligned}
[x_4, x_1, x_2, x_3] - [x_4, x_3, x_2, x_1] &\mapsto [E_{32}, E_{21}, E_{15}, E_{51}] - [E_{32}, E_{51}, E_{15}, E_{21}] \\
&= [E_{31}, E_{15}, E_{51}] - 0 \\
&= [E_{35}, E_{51}] = E_{31}.
\end{aligned}
$$

Note que o segundo monômio se anula pelo fato de $[E_{32}, E_{51}] = 0$, de acordo com a Observação 3.1.1. As demais verificações seguem analogamente.

Referências Bibliográficas

[1] S.A. Amitsur, J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 449–463.

[2] Yu. A. Bahturin, Identical Relations in Lie Algebras, Utrecht, VNU Science Press (1987).

[3] M. Dehn, *Über die Grundlagen der projectiven Geometrir and allgemeine Zahlsysteme*, (German) Math. Ann. **85** (1922), 184–194.

[4] C. Draper, A. Elduque. *An overview of fine gradings on simple Lie algebras*, Note Mat. **36** (2016), 15–34.

[5] V. Drensky, *Identities in Lie Algebras* (Russian), Algebra i Logika **13**(1974), 265-290 . Translation: Algebra and Logic **13**(1974), 150-165.

[6] V. Drensky. *Free algebras and PI-algebras*, Graduate Course in Algebra, Springer, Singapore (1999).

[7] V. Drensky, E. Formanek, *Polynomial Identity Rings*, Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhäuser Verlag, Basel (2004).

[8] A. Elduque, M. Kochetov, *Gradings on simple Lie algebras*, Mathematical Surveys and Monographs, **189**. American Mathematical Society (2013).

[9] C. Fidelis, D. Diniz, F.L. Sousa. *Identities for the special linear lie algebra with the Pauli and Cartan gradings* (accepted for publication)

[10] A. J. Freitas, P. Koshlukov, A. Krasilnikov, *$\mathbb{Z}$-graded identities of the Lie algebra W_1*, J. Algebra **427** (2015), 226–251.

[11] A. Giambruno, A. Regev, M. Zaicev, *Simple and semisimple Lie algebras and codimension growth*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 1935–1946.

[12] A. Giambruno, M. Souza, *Graded polynomial identities and Specht property of the Lie algebra sl_2*, J. Algebra **389** (2013), 6–22.

[13] A. Giambruno, M. Souza, *Minimal varieties of graded Lie algebras of exponential growth and the special Lie algebra sl_2*, J. Pure Appl. Algebra **218** (2014), 1517–1527.

[14] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial identities and asymptotic methods.* AMS Mathematical Surveys and Monographs Vol. **122**, Providence, R.I. (2005).

[15] A. S. Gordienko, *Amitsur's conjecture for polynomial H-identities of H-module Lie algebras*, Trans. the Amer. Math. Soc. **367** (2015), 313–354.

[16] G. Higman, *Ordering by divisibility in abstract algebras*, Proc. London Math. Soc. **2** (1952), 326–336.

[17] J. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 9, Springer-Verlag, New York (1978).

[18] I. Kaplansky, *Rings with polynomial identity*, revised, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 496–500.

[19] A.R. Kemer, *Finite basis property of identities of associative algebras*, Algebra Logic **5** (1987), 361–397.

[20] A.R.Kemer, *Ideals of Identities of Associative Algebras*, Tanslation of Math. Monographs **87**, AMS, Providence, RI (1991).

[21] M. Kochetov, *Gradings on finite-dimensional simple Lie algebras*, Acta Appl. Math. **108** (2009), no. 1, 101-127.

[22] P. Koshlukov, *Graded polynomial identities for the Lie algebra $sl_2(K)$*, Internat. J. Algebra Comput. **18** (2008), no. 5, 825–836.

[23] P. Koshluskov, F. Yukihide, *Elementary gradings on the Lie algebra $UT_n^{(-)}$*, J. Algebra **473**(2017), 66–79.

[24] P. Koshlukov, F. Yukihide,*Group gradings on the Lie algebra of upper triangular matrices*, J. Algebra **477**(2017), 294–311.

[25] P. Koshlukov, F. Yukihide*Asymptotics of graded codimension of upper triangular matrices*, Israel J. Math. **223**(2018), 423–439.

[26] Yu. P. Razmyslov, *Finite basis of identities of the second order matrix algebra over a field of characteristic zero*, Algebra i Logika **12**(1973), 83–113.

[27] D. Repovs, M. Zaicev, *Pauli gradings on Lie superalgebras and graded codimension growth*, Linear Algebra Appl. **520**(2017), 134–150.

[28] M. R. Vaughan-Lee, *Varieties of Lie algebras*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (**2) 21**(1970), 297-308.

[29] S. Vasilovsky, *The basis of identities of a three-dimensional simple Lie algebra over an infinite field*, Algebra Logic **28**(1989), 355–368.

[30] W. Wagner, *Über die Grundlagen der projectiven Geometrie and allgemeine Zahlsysteme*, (German) Math. Ann.**113** (1936), 528–567.

[31] K. A. Zhevlakov, A. M. Slink´ko, I. P. Shestakov, A. I. Shirshov, *Rings that are Nearly Associative*, Academic Press, Inc., 1982. J. London Math. Soc. **(2) 11**(1975), 263–266.