



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE TECNOLOGIA E RECURSOS NATURAIS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

**ISAQUE SOARES FIGUEIREDO**

**DISTRIBUIÇÃO TRANSVERSAL DE CARGA EM PONTES DE VIGAS  
MÚLTIPLAS- ESTUDO COMPARATIVO DE MÉTODOS**

**Campina Grande**

**2018**

**ISAQUE SOARES FIGUEIREDO**

**DISTRIBUIÇÃO TRANSVERSAL DE CARGA EM PONTES DE VIGAS  
MÚLTIPLAS- ESTUDO COMPARATIVO DE MÉTODOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Universidade Federal de Campina Grande –  
UFCG, para encerramento do componente  
curricular e conclusão da graduação em  
Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antônio de Souza Simplicio

**Campina Grande – PB**

**31/07/2018**

**ISAQUE SOARES FIGUEIREDO**

**DISTRIBUIÇÃO TRANSVERSAL DE CARGA EM PONTES DE VIGAS  
MÚLTIPLAS- ESTUDO COMPARATIVO DE MÉTODOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Universidade Federal de Campina Grande –  
UFCG, para encerramento do componente  
curricular e conclusão da graduação em  
Engenharia Civil.

Aprovada em: \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

**BANCA EXAMINADORA**

\_\_\_\_\_  
**Nota**

**Prof. Dr. Marcos Antônio de Souza Simplicio - DEC - UFCG**  
**(Presidente - Orientador)**

\_\_\_\_\_  
**Nota**

**Prof. M.Sc. Macel Wallace Queiroz Fernandes – UNINASSAU**  
**(1° Examinador)**

\_\_\_\_\_  
**Nota**

**Prof. Dr. Milton Bezerra das Chagas Filho – DEC - UFCG**  
**(2° Examinador)**

**1280408 - 1503186 - Engenharia das Estruturas – Modelagem Analítica e Numérica**  
**DISTRIBUIÇÃO TRANSVERSAL DE CARGA EM PONTES DE VIGAS**  
**MÚLTIPLAS- ESTUDO COMPARATIVO DE MÉTODOS**

**Autor: Isaque Soares Figueiredo – Graduando do Curso de Engenharia Civil –  
Departamento de Engenharia Civil – Centro de Tecnologia e Recursos Naturais - UFCG**

**Orientador: Prof. Dr. Marcos Antônio de Souza Simplicio - Departamento de  
Engenharia Civil – Centro de Tecnologia e Recursos Naturais - UFCG**

**1º Examinador: Prof. Me. Macel Wallace Queiroz Fernandes – UNINASSAU –  
Campina Grande – Paraíba.**

**2º Examinador: Prof. Dr. Milton Bezerra das Chagas Filho - Departamento de  
Engenharia Civil – Centro de Tecnologia e Recursos Naturais - UFCG**

### **RESUMO**

As pontes são elementos essenciais para os sistemas rodoviário e ferroviário de transporte, em especial no Brasil onde estes modais são muito relevantes. Nesse contexto, se insere o sistema estrutural de pontes com longarinas principais múltiplas que ocupa lugar de destaque no mundo, por ser relativamente simples e eficiente, com vantagens econômicas e construtivas notadamente conhecidas. O presente trabalho teve como objetivo analisar as linhas influência transversais de um modelo de ponte hiperestática com seção transversal com cinco longarinas principais, considerando a superestrutura isolada da mesoestrutura e da infraestrutura, comparando os resultados obtidos através dos Métodos Analíticos Clássicos Simplificados de Engesser-Courbon, Leonhardt e Guyon-Massonet com os da análise computacional via Método dos Elementos Finitos (MEF). As linhas de influência transversal dos métodos de Engesser-Courbon, Leonhardt convergiram com as do MEF. O método de Guyon-Massonet apresentou resultados divergentes dos demais métodos pois as linhas de influência obtidas foram obtidas para elementos de placa.

**Palavras-chave:** Distribuição de carga em tabuleiros; Métodos analíticos de repartição de cargas; MEF.

**1280408 - 1503186 - Structural Engineering - Analytical and Numerical Modelling**  
**TRANSVERSAL LOAD DISTRIBUTION IN MULTIPLE BEAM BRIDGES -**  
**COMPARATIVE STUDY OF METHODS**

**Author: Isaque Soares Figueiredo - Graduate of Civil Engineering - Department of Civil Engineering - Center of Technology and Natural Resources - UFCG**

**Advisor: Prof. Dr. Marcos Antônio de Souza Simplicio - Department of Civil Engineering - Center of Technology and Natural Resources - UFCG**

**1st Examiner: Prof. Macel Wallace Queiroz Fernandes - UNINASSAU - Campina Grande - Paraíba.**

**2nd Examiner Prof. Dr. Milton Bezerra das Chagas Filho - Department of Civil Engineering - Center of Technology and Natural Resources – UFCG**

## **ABSTRACT**

Bridges are essential elements for road and rail transportation systems, especially in Brazil where these modes are very relevant. In this context, the structural system of bridges with multiple girders occupies prominent place in the world, being relatively simple and efficient, with well-known economic and constructive advantages. The present work had as objective to analyse the transversal influence lines of a hyperesthetic bridge model with cross section with five girders, considering the isolated superstructure of the mesostructure and the infrastructure, comparing the results obtained through the Simplified Classical Analytical Methods, Engesser-Courbon, Leonhardt and Guyon-Massonet with the computational analysis via the Finite Element Method (FEM). The transverse influence lines of the Engesser-Courbon and Leonhardt methods converged with those of the MEF. The Guyon-Massonet method presented divergent results from the other methods since the obtained influence lines were obtained for plate elements.

**Keywords:** Distribution of loads in plates; Analytical methods of load-sharing; FEM.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquema ilustrativo da composição das pontes. ....	17
Figura 2 - Esquemáticação gráfica do método de Engesser-Courbon.....	20
Figura 3 – Exemplo: parâmetros do método de Engesser-Courbon para obter a parcela da carga P em V2. ....	22
Figura 4 – Esquemáticação do método de Leonhardt.....	24
Figura 5 – Deformações na seção transversal em ponte com três longarinas e uma transversina. ....	25
Figura 6 – Esquemáticação gráfica do processo de Guyon-Massonet. ....	27
Figura 7 – Exemplos de estruturas modeladas no SAP 2000. ....	32
Figura 8 – Vista Superior do viaduto Eduardo Campos.....	33
Figura 9 – Vista lateral do viaduto Eduardo Campos.....	34
Figura 10 – Vista em planta do viaduto Eduardo Campos.....	34
Figura 11 – Seção transversal do viaduto Eduardo Campos. ....	35
Figura 12 – Seção longitudinal do viaduto Eduardo Campos. ....	35
Figura 13 – Modelo Estrutural.....	36
Figura 14 – Vista superior do modelo estrutural. (Dimensões em cm).....	36
Figura 15 – Vista inferior do modelo estrutural. (Dimensões em cm).....	37
Figura 16 – Seção transversal do modelo estrutural. (Dimensões em cm).....	37
Figura 17 – Seção transversal da longarina. (Dimensões em cm).....	38
Figura 18 – Seção transversal da transversina. (Dimensões em cm).....	38

Figura 19 – Valores dos parâmetros para os modelos estruturais. ....	44
Figura 20 – Representação do tabuleiro da ponte estudada como modelo de casca. ....	44
Figura 21 – Representação das longarinas e transversinas da ponte estudada como modelo de grelha. ....	45
Figura 22 – Valores dos parâmetros utilizados no modelo de casca do tabuleiro. ....	46
Figura 23 – Seção das longarinas. ....	47
Figura 24 – Seção das transversinas. ....	47
Figura 25 – Parâmetros de rigidez tanto das longarinas quanto das transversinas. ....	48
Figura 26 – Linhas de influência pelo método de Engesser-Courbon. ....	51
Figura 27 – Linhas de influência pelo método de Leonhardt. ....	52
Figura 28 – Linhas de influência pelo método de Guyon-Massonet. ....	53
Figura 29 – Linhas de influência pelo SAP2000. ....	54
Figura 30 – Linhas de influência da longarina V1. ....	54
Figura 31 – Linhas de influência da longarina V2. ....	55
Figura 32 – Linhas de influência da longarina V3. ....	55

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Coeficiente k.....	26
Tabela 2 – Coeficientes de repartição transversal pelo método de Engesser-Courbon.....	39
Tabela 3 – Coeficientes de repartição transversal pelo método de Leonhardt. ....	41
Tabela 4 – Tabela de Guyon-Massonet para $\theta=0,3$ e $\varphi=0$ .....	42
Tabela 5 – Tabela de Guyon-Massonet para $\theta=0,3$ e $\varphi=1$ .....	42
Tabela 6 – Tabela dos coeficientes de repartição de carga para a viga em $x= - 4$ m. ....	43
Tabela 7 – Coeficientes de repartição de carga pelo método de Guyon-Massonet.....	43
Tabela 8 – Coeficientes de distribuição transversal de carga da longarina V1 obtidos pelo SAP2000.....	49
Tabela 9 – Coeficientes de distribuição transversal de carga.....	50
Tabela 10 – Coeficientes de distribuição transversal de carga.....	51
Tabela 11 – Coeficientes de distribuição transversal de carga.....	52
Tabela 12 – Coeficientes de distribuição transversal de carga.....	53



## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

MEF – Método dos Elementos Finitos.

NBR – Norma Brasileira de Regulamentação.

SAP – Software de Elementos Finitos.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$P$  – Carga vertical unitária.

$\lambda$  - Coeficiente de limitação do método de Engesser-Courbon.

$\chi_\varphi$  – Coeficiente de distribuição transversal.

$L$  - Comprimento do vão longitudinal do tabuleiro; vão das longarinas, consideradas como simplesmente apoiadas; comprimento da placa equivalente.

$x_i$  - Distância da longarina (i) analisada ao eixo do conjunto formado pelas vigas.

$x$  - Distância longitudinal partindo de uma borda.

$y_i$  - Deslocamento vertical.

$w(x,y)$  - Deslocamento da placa ortotrópica devido a carga senoidal segundo uma linha.

$a$  - Espaçamento transversal entre eixos das longarinas.

$e$  - Excentricidade da carga, medida a partir do centro de gravidade das longarinas (ponto médio do tabuleiro, se houver simetria na seção transversal da ponte).

$l_x$  - Espaçamento entre os eixos das longarinas.

$l_y$  - Espaçamento entre os eixos das transversinas.

$p(x)$  - Função senoidal do carregamento distribuído longitudinalmente.

$p(x,y)$  - Função do carregamento distribuído longitudinalmente e transversalmente.

$I_{L_n}$  - Inércia a flexão das longarinas.

$I_T$  - Inércia a flexão das transversinas.

$I_{Teq}$  - Inércia a flexão equivalente das transversinas.

$J_L$  - Inércia a torção das longarinas.

$J_T$  - Inércia a torção das transversinas.

$l$  - Largura do tabuleiro.

$E_L$  - Módulo de elasticidade das longarinas.

$E_T$  - Módulo de elasticidade das transversinas.

$n$  - Número de vigas.

$P_i$  - Parcela da carga  $P$  que incide na longarina (i) analisada.

$\varphi$  - Parâmetro de torção.

$\theta$  - Parâmetro de travejamento.

$R_i$  - Reação de apoio.

$b$  - Semilargura da placa equivalente.

$\sum I_{L_n}$  - Somatório dos momentos de inércia das longarinas.

$\sum I_{T_n}$  - Somatório dos momentos de inércia das transversinas.

$p$  - Um valor máximo do carregamento distribuído.

$\nu$  - Coeficiente de Poisson

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>14</b>
<b>1.1. Objetivos .....</b>	<b>14</b>
1.1.1. Objetivo geral .....	14
1.1.2. Objetivos Específicos.....	15
<b>1.2. Justificativa.....</b>	<b>15</b>
<b>2. RERENCIAL BIBLIOGRÁFICO.....</b>	<b>16</b>
<b>2.1. Pontes .....</b>	<b>16</b>
<b>2.2. Distribuição transversal de cargas nas longarinas de uma ponte .....</b>	<b>18</b>
2.2.1. Método de Engesser-Courbon .....	19
2.2.2. Método de Leonhardt .....	23
2.2.3. Método de Guyon-Massonet .....	26
<b>2.3. Método dos elementos finitos .....</b>	<b>31</b>
<b>2.4. SAP 2000 .....</b>	<b>31</b>
<b>3. METODOLOGIA.....</b>	<b>33</b>
<b>3.1. Área de estudo .....</b>	<b>33</b>
<b>3.2. Modelo estrutural .....</b>	<b>35</b>
<b>3.3. Cálculo dos coeficientes transversais de carga pelos métodos analíticos.....</b>	<b>39</b>
3.3.1. Método de Engesser-Courbon .....	39
3.3.2. Método de Leonhardt .....	40
3.3.3. Método de Guyon-Massonet .....	41
<b>3.4. Cálculo dos coeficientes transversais de carga pelos modelagem computacional .</b>	<b>43</b>
3.4.1. Modelo de Casca .....	45
3.4.2. Modelo de Grelha .....	46
<b>4. RESULTADOS.....</b>	<b>50</b>
<b>4.1. Métodos analíticos.....</b>	<b>50</b>
4.1.1. Método de Engesser-Courbon .....	50
4.1.2. Método de Leonhardt .....	51
4.1.3. Método de Guyon-Massonet .....	52
<b>4.2. Método computacional .....</b>	<b>53</b>

<b>4.3. Comparações .....</b>	<b>54</b>
<b>5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....</b>	<b>56</b>
<b>5.1. Conclusão.....</b>	<b>56</b>
<b>5.2. Sugestões para trabalhos futuros .....</b>	<b>56</b>
<b>6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>58</b>

# CAPÍTULO 1

## 1. INTRODUÇÃO

De acordo com De Oliveira et al (2017) a grelha de uma ponte é formada por um conjunto de longarinas e transversinas ligadas entre si através de pontos denominados nós. E a importância destes pontos é que são neles onde realiza - se as distribuições dos esforços gerados por solicitações externas sobre o tabuleiro. Em um sistema de grelha, a parcela de carga de cada viga principal, bem como a rigidez do sistema de tabuleiro é diretamente proporcional ao número de transversinas, até o momento em que o acréscimo destes elementos se tornam desnecessários pois as diferenças passam a ser tão pequenas que se considera um comportamento constante.

Segundo Alves et al (2004) os primeiros trabalhos realizados deste tema envolveram o método das forças, porém devido a sua complexidade matemática não houveram resultados satisfatórios. Huber (1914) apresentou estudos relacionados a teoria das placas ortotrópicas aplicadas nas superestruturas de uma ponte. Nos anos posteriores, vários acadêmicos começaram a utilizar a analogia de grelhas em seus estudos, apresentando diversas simplificações para o problema, até que Leonhardt (1938) apresentou seu trabalho sobre o assunto. Leonhardt (1940), após um aprimoramento dos seus estudos, lança uma solução para o problema que fica conhecida como “Método de Leonhardt”. Courbon (1940) desenvolveu, no mesmo ano, um método para a determinação dos coeficientes de distribuição de cargas na seção transversal, baseado em simplificações na análise de grelhas, o qual se tornou bastante popular.

E em 1946, Guyon(1946), dando continuidade aos estudos de Huber, conseguiu obter resultados significativos, a partir da consideração de se utilizar um elevado número de longarinas e transversinas para se poder assimilar uma grelha a uma placa ortotrópica. Uma outra forma de analisar a situação estudada é através do Método dos Elementos Finitos (MEF), uma ferramenta eficiente para a resolução de problemas complexos na engenharia. Muitos engenheiros adotam o MEF pois ele permite diversas maneiras de discretizar um mesmo modelo.

### 1.1. Objetivos

#### 1.1.1. Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é realizar o estudo de modelos analíticos e numéricos de distribuição transversal de cargas em tabuleiros de pontes rodoviárias em concreto armado utilizando um sistema do tipo longarinas múltiplas, a fim de analisar qual modelo é o mais representativo da repartição de cargas nesse tipo de ponte.

### *1.1.2. Objetivos Específicos*

- Analisar a distribuição transversal de cargas em um modelo idealizado de ponte contendo 5 longarinas através de métodos analíticos;
- Simular e analisar o modelo numérico através do SAP2000 V20.0.0
- Comparar os resultados obtidos de cada um dos modelos analíticos utilizados com o modelo numérico.

## **1.2. Justificativa**

A justificativa deste trabalho se baseia na quantidade relativamente pequena de estudos de distribuição transversal de cargas em tabuleiros de pontes com longarinas múltiplas. Vale salientar que na obtenção de solicitações e reações de apoio em tabuleiros de várias vigas principais, em função da elevada hiperestaticidade do problema, ainda são utilizadas soluções simplificadas de cálculo.

Essa complexidade motivou o desenvolvimento de diversos métodos simplificados, a fim de tentar quantificar as parcelas de cargas que efetivamente são atribuídas a cada longarina da ponte, com objetivo de possibilitar o seu dimensionamento. Nesse contexto, a análise do comportamento estrutural de grelhas ainda se constituiu numa tarefa bastante trabalhosa para os engenheiros projetistas de pontes.

Com a evolução dos processos numéricos, observa-se uma tendência de se trabalhar na busca de resultados mais refinados e próximos dos obtidos experimentalmente. Isso, por si só, justifica a investigação proposta no sentido de entender melhor esses modelos analíticos clássicos, a fim de verificar os seus graus de confiabilidade e, possibilitar a posteriori implementações computacionais em modelos numéricos utilizando, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos.

## **CAPÍTULO 2**

### **2. REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO**

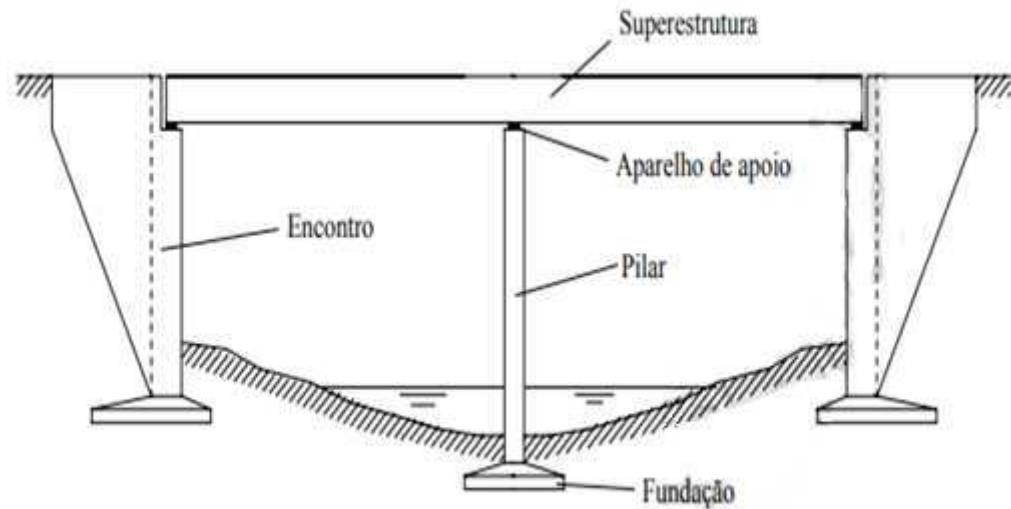
#### **2.1. Pontes**

De acordo com Pfiel (1985), pontes são obras destinadas a vencer obstáculos naturais tais como, rios, braços de mar, vales profundos, outras vias etc. Quando elas têm a finalidade de transpassar vales, vias, ou obstáculos não constituídos por água, elas passam a ser chamadas de viadutos. Basicamente, os elementos e ligações de uma ponte são classificados em três grupos: a superestrutura, a mesoestrutura e a infraestrutura. A superestrutura refere-se a parte composta por lajes e vigas principais e secundárias, cuja principal função é servir de apoio para a via e receber o carregamento do trem tipo.

A mesoestrutura é constituída pelos pilares, que são os elementos os quais recebem os esforços verticais da superestrutura (peso próprio das vigas, lajes, revestimentos, barreiras, passeios, das cargas móveis) e também esforços horizontais (ação da água, frenagem, aceleração dos veículos, atrito nos apoios, empuxo de terra e sobrecarga nos aterros de acesso, dilatação térmica e retração) e os transmitem diretamente a infraestrutura. A infraestrutura, geralmente constituída por elementos de concreto, aço ou madeira, é a parte da ponte responsável por transmitir os esforços da mesoestrutura ao solo. E dependendo da profundidade de assentamento, a infraestrutura pode ser classificada em superficial ou profunda. Os elementos que constituem a infraestrutura são os blocos, as sapatas, as estacas, os tubulões e etc. A figura 1 ilustra um desenho com as partes que compõem uma ponte.



Figura 1 – Esquema ilustrativo da composição das pontes.



Fonte: EL DEBS E TAKEYA, 2007, p.9.

Spernau (2012) faz a classificação de uma ponte seguindo alguns critérios:

1. Fim a que se destina:
  - Ferroviária;
  - Passarela;
  - Rodoviária.
2. Travessia:
  - Normais: quando o eixo longitudinal da ponte é perpendicular ao eixo do rio;
  - Esconsas: quando o ângulo entre esses eixos for diferente de  $90^\circ$ .
3. Materiais de construção:
  - Concreto armado ou protendido;
  - Aço;
  - Madeira, etc.
4. Sistema Estrutural:
  - Ponte em laje;
  - Ponte em viga;
  - Ponte em quadro ou pórtico;
  - Ponte em arco;
  - Ponte em abóboda;
  - Ponte pênsil;

- Ponte estaiada.

## 2.2. Distribuição transversal de cargas nas longarinas de uma ponte

Segundo Kalyanshetti e Shiram (2013), quando um carregamento é aplicado sobre uma longarina em uma ponte de vigamento múltiplo, parte dessa carga é transferida para as outras vigas de forma que as longarinas mais próximas recebem a maior parte do carregamento, e as demais absorvem menor carga, por proporcionalidade. Ryall et al (2002) explica que para saber qual parcela de carga que vai para cada viga é preciso determinar os coeficientes de distribuição transversal devido ao carregamento, para que seja possível obter a linha de influência transversal da ponte.

Alves et al (2004) explana que para realizar uma análise na superestrutura de uma ponte de vigamento múltiplo é preciso estabelecer um modelo estrutural, e uma das formas aproximadas de representá-las é através de uma grelha de vigas interligadas. Como no passado, sua resolução era de grande complexidade, diversos métodos foram desenvolvidos e aperfeiçoados de modo a simplificar o modelo de cálculo e possibilitar o desenvolvimento de forma manual.

Surana e Agrawal (1998) destacam que, várias pesquisas foram realizadas e resultaram no desenvolvimento e aperfeiçoamento de métodos para a distribuição de carga na seção transversal do tabuleiro. Atualmente, já existem formas manuais de cálculo, com o auxílio de tabelas, ou até mesmo com o uso de ferramentas computacionais.

Dentre os diversos métodos destacam-se:

- Métodos analíticos: Análise de grelha; Teoria das placas articuladas; Teoria das placas ortrópicas;
- Métodos analíticos simplificados: Método de Leonhardt; Método de Engesser-Courbon; Método de Guyon-Massonet;
- Métodos computacionais: Método das diferenças finitas; Método das faixas finitas; Método dos elementos finitos.

Bakht e Jaegar (1985) salientam que, a maioria dos métodos analíticos simplificados possuem limitações quanto ao seu uso, muitas vezes se restringindo a análise de pontes, considerando as deformações por esforços cortantes como desprezíveis. Sendo necessário,

portanto, utilizar hipóteses adicionais nesses métodos quando estes esforços forem significativos. Porém Bakht e Jaegar afirmam que com o advento computacional, a análise deste tipo de estrutura tem sido realizada com ferramentas muito mais poderosas, permitindo uma compreensão dos efeitos devido ao menor número de simplificações em comparação com os métodos manuais de cálculo.

Surana e Agrawal (1998) ainda, afirmam que o artifício computacional permite ao projetista maior liberdade ao definir o formato da ponte, seja ela com um traçado esconso, curvo ou bifurcado. Porém, esse tipo de ferramenta é suscetível a erros de idealização do problema ou mesmo de interpretação dos resultados.

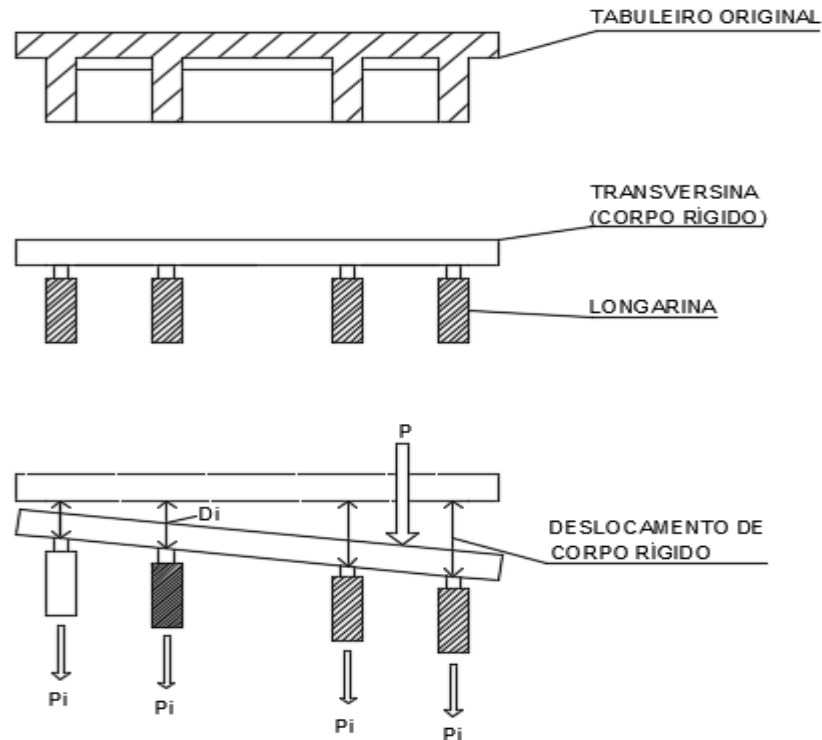
### *2.2.1. Método de Engesser-Courbon*

Stucchi (2006) relata que, este método foi criado em 1940 Courbon (1940), também atribuído a Engesser (1898). O método consiste na proposta de realizar a análise da distribuição de carga na seção transversal de uma ponte através de um modelo estrutural composto por um sistema de grelhas, porém com algumas considerações e simplificações realizadas a partir de hipóteses para facilidade de análise. Essas hipóteses simplificadoras são:

- transformação do tabuleiro monolítico numa malha de vigas longitudinais e transversais;
- não consideração do efeito de torção das vigas;
- suposição de rigidez infinita para a transversina.

A segunda hipótese implica no fato de que a reação mútua nos nós seja unicamente uma força vertical. Na figura 2 a seguir apresenta-se uma esquematização gráfica das hipóteses simplificadoras do processo.

Figura 2 - Esquematização gráfica do método de Engesser-Courbon



Fonte: Própria Autoria.

Segundo Alves et al (2004), o grande problema de realizar a análise da distribuição de carga numa grelha, é o fato da complexidade atrelada ao desenvolvimento dos cálculos, devido à rigidez do sistema e dos efeitos de torção existentes sobre o tabuleiro, o que torna o processo de cálculo matemático penoso e custoso a partir do método da analogia de grelha. Dito isto, o método de Engesser-Courbon adota as hipóteses, anteriormente mencionadas, afim de desprezar os efeitos de torção e admitir transversinas como elementos infinitamente rígidos à flexão.

Jovem (2017) explica que ao estudar o comportamento das transversinas, em uma análise no regime elástico, nota-se que as deformações destes elementos são significativamente menores que as deformações das longarinas. Dessa forma, é possível desprezar essas deformações e tratar as transversinas como sólidos rígidos. Ao adotar esse tipo de hipótese, o problema torna-se muito mais simples de ser resolvido, uma vez que os elementos transversais apresentarão deformações lineares após a deformação do sistema. Considerando um sistema de eixos cartesianos ortogonais, o deslocamento vertical da transversina pode ser descrito através da equação de uma reta. A equação 1 abaixo é utilizada no método de Engesser-Courbon.

Equação 1- Equação de Engesser-Courbon da repartição transversal de carga no tabuleiro.

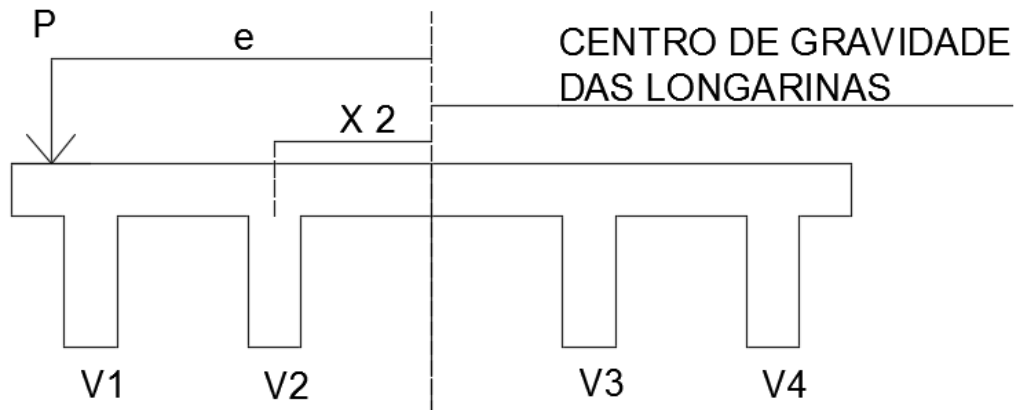
$$P_i = \frac{P}{n} \pm \frac{P \cdot e \cdot x_i}{\sum x_j^2} \quad (1)$$

onde,

- $P$ : carga em análise;
- $n$ : número de vigas;
- $e$ : excentricidade da carga, medida a partir do centro de gravidade das longarinas (ponto médio do tabuleiro, se houver simetria na seção transversal da ponte);
- $x_i$ : distância da longarina (i) analisada ao eixo do conjunto formado pelas vigas;
- $P_i$ : Parcela da carga  $P$  que incide na longarina (i) analisada.
- $\sum x_j^2$ : Soma dos quadrados das distâncias de cada longarina em relação ao centro de gravidade da seção transversal.

A equação 1 fornece o cálculo direto da parcela de carga concentrada em cada apoio. Mas ela também pode ser utilizada para se obter as linhas de influência (LI) em relação a cada viga. Aplicando-se uma carga  $P$  unitária e substituindo os respectivos parâmetros  $x_i$ , a equação fica com a excentricidade  $e$  como variável independente e a cota da LI para esse ponto como variável dependente, representando, portanto, a equação de uma reta, que define a distribuição. Adota-se o eixo  $x$  como sendo positivo à direita do eixo das vigas principais e, portanto, as distâncias  $x$  e as excentricidades medidas à esquerda recebem o sinal negativo. A figura 3 esquematiza estas convenções de sinal a partir de um exemplo.

Figura 3 – Exemplo: parâmetros do método de Engesser-Courbon para obter a parcela da carga P em V2.



Fonte: Própria Autoria.

Jovem (2017) explica as limitações do método de Engesser-Courbon, explanando que o método só tem validade quando a condição dada pela inequação abaixo (Equação 2) é verdadeira. Essa expressão representa uma forma de garantir que o sistema transversal seja de fato infinitamente rígido.

Equação 2 – Verificação da limitação do método de Engesser-Courbon.

$$\lambda = \frac{l}{2L} \times \sqrt[4]{\frac{L}{l} \times \frac{E_L \times \sum I_{L_n}}{E_T \times \sum I_{T_n}}} \leq 0,3 \quad (2)$$

onde,

- $\lambda$ : coeficiente de limitação do método de Engesser-Courbon;
- $l$ : Largura do tabuleiro;
- $L$ : Comprimento do vão longitudinal do tabuleiro;
- $E_L$ : Módulo de elasticidade das longarinas;
- $E_T$ : Módulo de elasticidade das transversinas;
- $\sum I_{L_n}$ : Somatório dos momentos de inércia das longarinas;
- $\sum I_{T_n}$ : Somatório dos momentos de inércia das transversinas.

### 2.2.2. Método de Leonhardt

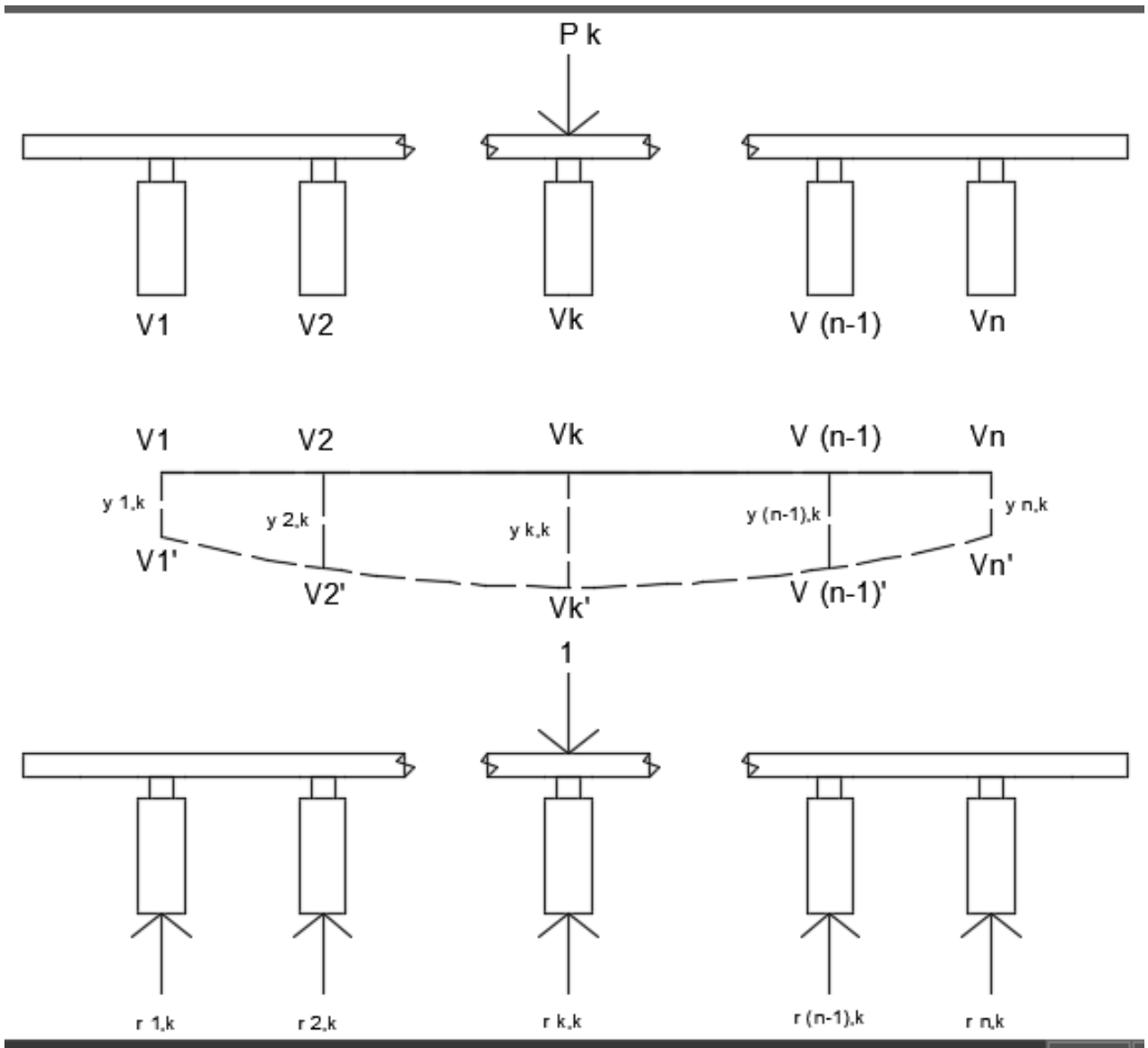
Outro método para calcular a distribuição de carga na seção transversal do tabuleiro é o de Leonhardt. O autor apresentou, em 1938, um trabalho sobre grelhas apoiadas sobre duas extremidades. Alves et al (2004) afirma que, assim como o método de Engesser-Courbon, a proposta inicial de Leonhardt era a de criar um método que pudesse estudar a distribuição de cargas na seção transversal, a partir de um coeficiente de distribuição transversal, onde a laje contribuiria com apenas uma pequena parcela, favorecendo a inércia das longarinas, conjuntamente com a suposição da utilização de uma transversina intermediária fictícia apoiada nos meios dos vãos sobre as outras longarinas. E ao contrário do método de Engesser-Courbon, considera-se a rigidez a flexão das transversinas. Posteriormente, o método de Leonhardt foi aprimorado, acrescentando agora a possibilidade de grelhas engastadas e contínuas.

Considerando o que foi exposto, as hipóteses adotadas para o método de Leonhardt são as seguintes:

- Longarinas com momento de inércia constante em toda a sua extensão;
- Longarinas simplesmente apoiadas em suas extremidades;
- Transversinas igualmente espaçadas.

A figura 4 ilustra uma esquematização do método de Leonhardt.

Figura 4 – Esquematização do método de Leonhardt.

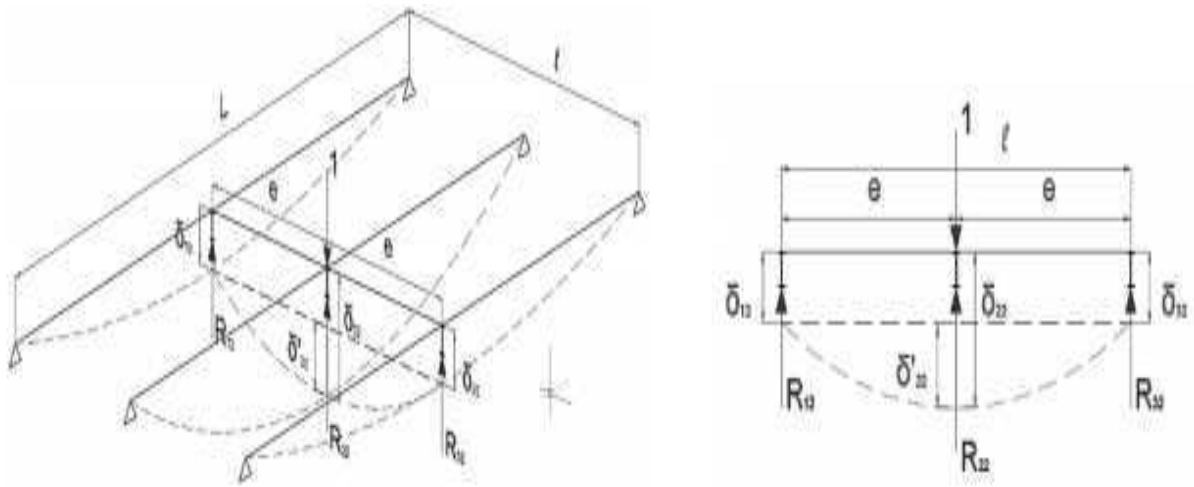


Fonte: Própria autoria.

Como pode-se observar, existe uma não-linearidade nas deformações  $y_{i,j}$  nas longarinas e nas transversinas. Porém também é válido afirmar que a distribuição das cargas entre os apoios é também não-linear. E por estes motivos, Leonhardt adotou o uso de tabelas no processo de análise com o objetivo de facilitar e possibilitar os cálculos manuais. Para a confecção destas tabelas, a hipótese original considera a configuração de um tabuleiro composto por 3 longarinas, igualmente espaçadas de um valor  $e$ , com mesmo momento de inércia à flexão  $I_L$ , uma transversina livremente apoiada no meio do vão das longarinas com momento de inércia à flexão representado por  $I_T$ , e uma carga unitária aplicada no cruzamento entre a transversina e a longarina central, o conjunto se deforma, originando nos nós os coeficientes de distribuição transversal, conforme ilustra a Figura 5.



Figura 5 – Deformações na seção transversal em ponte com três longarinas e uma transversina.



Fonte: DE OLIVEIRA ET AL, 2017, p.6.

De acordo com Kaestner (2015), sabendo que o sistema da Figura 5 é hiperestático, as condições de equilíbrio da estática ( $\sum R_{ij} = 1$  e  $\sum M = 0$ ) não são suficientes para obtenção das reações  $R_{12}$ ,  $R_{22}$  e  $R_{32}$ , sendo necessário o auxílio de um método de resolução de sistemas hiperestáticos. Para o esquema representado, pode-se chegar à seguinte conclusão analítica, demonstrada na equação 3:

Equação 3 – Relação entre as reações das longarinas.

$$R_{11} + R_{22} + R_{32} = 1 \quad (3)$$

Heinen (2016) explica que os coeficientes  $R_{ij}$  nada mais são do que as ordenadas da linha de influência para distribuição transversal, para a longarina  $i$ , quando é aplicado um carregamento ao longo da transversina. Kaestner (2015) explica que para as demais situações de carregamento, bem como configurações estruturais com mais longarinas, o mesmo processo para determinação dos coeficientes pode ser feito. No entanto, este procedimento já foi realizado e tabelado no estudo apresentado por Leonhardt, onde a obtenção dos coeficientes de distribuição depende apenas do grau de rigidez ( $R$ ) do elemento estrutural. Sendo o grau de rigidez representado conforme a equação 4.

Equação 4 – Grau de rigidez da grelha.

$$R = \frac{I_{Teq}}{I_L} \left( \frac{L}{2a} \right)^3 \quad (4)$$

onde,

- $I_L$ : inércia das longarinas;
- $I_{T_{eq}}$ : Momento de inércia equivalente das transversinas;
- L: vão das longarinas, consideradas como simplesmente apoiadas;
- a: espaçamento transversal entre eixos das longarinas.

Essa teoria, originalmente, considerava o caso de apenas uma transversina no meio do vão. Para o caso de mais de uma, deve-se calcular uma inércia equivalente  $I_{eq}$ , que consiste em majorar a inércia delas por um coeficiente k dependente do número de transversinas. A equação 5 apresenta o cálculo da inércia equivalente e a tabela 1 os valores do coeficiente k.

Equação 5 – Cálculo do momento de inércia equivalente

$$I_{T_{eq}} = k \cdot I_T \quad (5)$$

onde,

- $I_T$ : momento de inércia das transversinas

Tabela 1 – Coeficiente k.

Nº de transversinas igualmente espaçadas	k
1 ou 2	1
3 ou 4	1,6
5 ou mais	2

Fonte: SPERNAU (2012).

A partir do valor de R calculado, obtém-se os valores da linha de influência transversal a partir das tabelas de Leonhardt. Estas tabelas fornecem os coeficientes de repartição transversal de carga, dependendo apenas do grau de rigidez R e do número de longarinas. Neste trabalho será utilizado um viaduto com 5 longarinas. Spernau (2012) apresenta a tabela específica para este caso.

### 2.2.3. Método de Guyon-Massonet

Alves et al (2004) explana que diferentemente dos métodos de Engesser-Courbon e Leonhardt, que tratam a superestrutura como uma grelha, o método de Guyon-Massonet

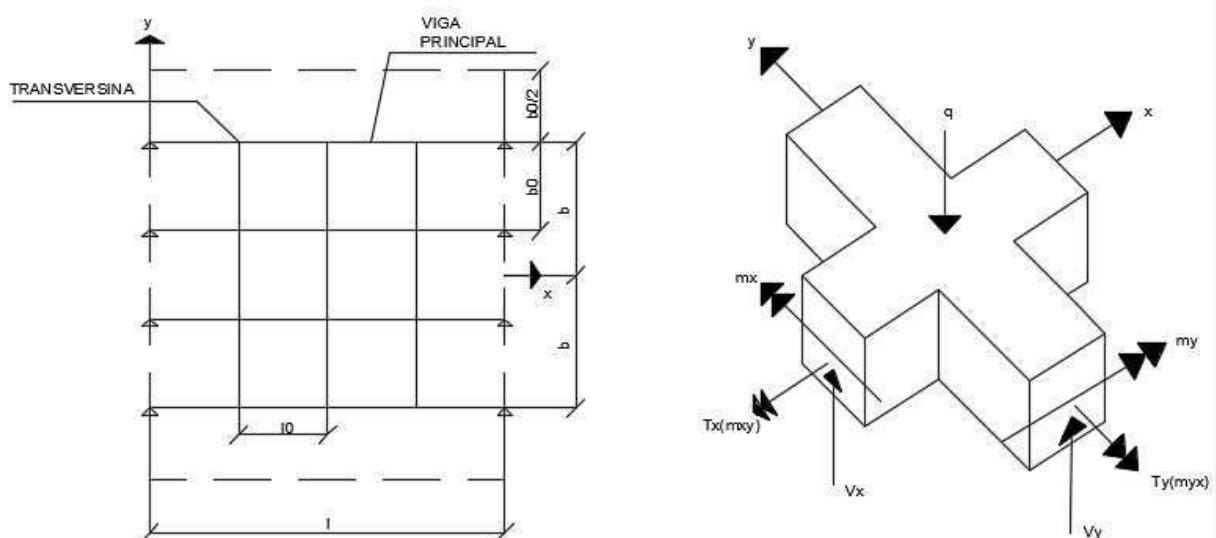
considera o tabuleiro da ponte como uma laje ortotrópica. A proposta de Guyon, em 1946, foi dar continuidade aos estudos do emprego de modelos de lajes ortotrópicas como hipótese de cálculo, inicialmente apresentado por Huber três décadas antes. Mais tarde, em 1950, o método ficou conhecido como “Método dos Coeficientes de Distribuição de Guyon-Massonet” quando Massonet acrescentou ao método a consideração de rigidez à torção nas vigas.

De acordo com El Debs e Takeya (2007), as hipóteses simplificadoras do método de Guyon-Massonet para o cálculo de tabuleiro de pontes são:

- O tabuleiro é transformado numa placa ortótropica que apresenta as mesmas rigidezes médias de flexão e torção;
- O carregamento real é substituído por um carregamento equivalente que tem a forma senoidal na direção longitudinal;
- A placa ortótropica é calculada utilizando o método dos coeficientes de repartição transversal.

A figura 6 ilustra uma esquematização do método de Guyon-Massonet.

Figura 6 – Esquematização gráfica do processo de Guyon-Massonet.



Fonte: Própria autoria.

Segundo Carril e Ferreira Lopes (2016), o método de Guyon-Massonet consiste na substituição teórica dos elementos do tabuleiro, longarinas e transversinas, por uma placa ortotrópica equivalente, ou seja, mantendo as características de resistência à flexão e torção do modelo real da ponte. Também, a distribuição de qualquer carregamento para esse sistema é aproximada à uma equação senoidal (Equação 6) aplicada paralelamente ao eixo longitudinal do tabuleiro, e os efeitos de reação à essa aplicação são distribuídos ao longo de todo o elemento da superestrutura devido às considerações de rigidez atribuídos ao modelo.

Equação 6 – Equação da distribuição transversal de carregamento, segundo o método de Guyon-Massonet.

$$p(x) = p \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) \quad (6)$$

onde,

- $p(x)$ : Função senoidal do carregamento distribuído longitudinalmente;
- $p$ : Um valor máximo do carregamento distribuído;
- $x$ : Distância longitudinal partindo de uma borda;
- $L$ : Comprimento longitudinal do tabuleiro.

Segundo os autores El Debs e Takeya (2007), Alves et al (2004), Carril e Ferreira Lopes (2016), a justificativa da primeira hipótese simplificadora adotada pelo método de Guyon-Massonet, é consequência da semelhança de comportamento da placa ortotrópica e da grelha. E para um tabuleiro representado por uma placa ortotrópica equivalente sob um carregamento senoidal aplicado longitudinalmente, a estrutura se deforma sendo possível obter os coeficientes de distribuição transversal exatos solucionando a equação diferencial expressa pela equação 7. Nas equações de 8 a 12 estão os valores destes coeficientes.

Equação 7 – Equação diferencial do carregamento distribuído longitudinalmente e transversalmente.

$$p(x, y) = \rho_x \cdot \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \cdot \varphi \cdot \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} \cdot \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \rho_y \cdot \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} \quad (7)$$

Equação 8 – Coeficiente  $\rho_x$

$$\rho_x = \frac{E \cdot I_L}{l_x} \quad (8)$$

Equação 9 – Coeficiente  $\rho_y$

$$\rho_y = \frac{E \cdot I_T}{l_y} \quad (9)$$

Equação 10 – Coeficiente  $\varphi$

$$\varphi = \frac{\gamma_x + \gamma_y}{2 \cdot \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y}} \quad (10)$$

Equação 11 – Coeficiente  $\gamma_x$

$$\gamma_x = \frac{G \cdot J_L}{l_x} = \frac{E \cdot J_L}{2 \cdot (1 + \nu) \cdot l_x} \quad (11)$$

Equação 12 – Coeficiente  $\gamma_y$

$$\gamma_y = \frac{G \cdot J_T}{l_y} = \frac{E \cdot J_T}{2 \cdot (1 + \nu) \cdot l_y} \quad (12)$$

onde,

- $p(x,y)$ : Função do carregamento distribuído longitudinalmente e transversalmente;
- $w(x,y)$ : Deslocamento da placa ortotrópica devido a carga senoidal segundo uma linha;
- $I_L$ : Momento de inércia a flexão das longarinas;
- $I_T$ : Momento de inércia a flexão das transversinas;
- $J_L$ : Momento de inércia a torção das longarinas;
- $J_T$ : Momento de inércia a torção das transversinas;
- $l_x$ : Espaçamento entre os eixos das longarinas;
- $l_y$ : Espaçamento entre os eixos das transversinas.

De acordo com Mason (1977), para estruturas moldadas em concreto é usual desprezar o coeficiente de Poisson do concreto ( $\nu \cong 0,2$ ). Deste modo a Equação 10 pode ser reescrita da seguinte forma (Equação 13):

Equação 13 – Coeficiente  $\varphi$

$$\varphi = \frac{\frac{J_L}{l_x} + \frac{J_T}{l_y}}{4 \cdot \sqrt{\frac{I_L \cdot I_T}{l_x \cdot l_y}}} \quad (13)$$

Segundo Alves et al (2004), este, sem dúvida é o mais refinado dentre os outros métodos simplificados já citados, porém, da mesma forma, também acaba se deparando com equações complexas para resolução manual, o que obrigou a Guyon e Massonet a seguirem a resolução do problema agregando aos procedimentos de cálculo o uso de tabelas e gráficos de referência para facilitar e simplificar o processo. Para a utilização das tabelas de Guyon-Massonet, é necessário o conhecimento de dois parâmetros, sendo eles, o parâmetro de torção  $\varphi$ , já estabelecido na equação 13 e o parâmetro de travejamento  $\theta$ , dado na equação 14.

Equação 14 – Parâmetro de travejamento  $\theta$

$$\theta = \frac{b}{L} \cdot \sqrt[4]{\frac{I_L \cdot l_y}{I_T \cdot l_x}} \quad (14)$$

onde,

- b: Semilargura da placa equivalente;
- L: Comprimento da placa equivalente;

De acordo com Jovem (2017) também, é necessário conhecer o ponto de aplicação da carga, definida pela sua excentricidade, e a posição da viga que se quer obter o coeficiente de distribuição de carga na seção transversal  $\chi_\varphi$ . No entanto, as tabelas são definidas apenas para  $\varphi = 0$ , que representa a ausência de torção, e  $\varphi = 1$ , que caracteriza o tabuleiro como uma laje isotrópica. Mason (1977) explana que para o caso onde  $0 < \varphi < 1$  é necessário realizar uma interpolação não linear definida pela equação 15.

Equação 15 – Coeficiente  $\chi_\varphi$

$$\chi_\varphi = \chi_{\varphi=0} + (\chi_{\varphi=1} - \chi_{\varphi=0}) \cdot \sqrt{\varphi} \quad (15)$$

Porém Mason menciona que, como esses coeficientes estão definidos para elementos de placas, é preciso convertê-los para elementos de viga a fim de obter a linha de influência da ponte. As tabelas de Guyon-Massonet que serão utilizadas neste trabalho serão apresentadas na metodologia.

### 2.3. Método dos elementos finitos

De acordo com Kunzler (2013) o método dos elementos finitos consiste em dividir uma estrutura em partes de dimensões e quantidade finitas. Essas partes são chamadas de elementos finitos. Ainda segundo Kunzler, um sólido contínuo pode ser discretizado numa malha de elementos cujas equações de compatibilidade e equilíbrio serão descritas entre os nós que unem os elementos. Os resultados obtidos através das interpolações que ocorrem para cada um dos nós, determinam as deformações e os esforços internos do elemento analisado.

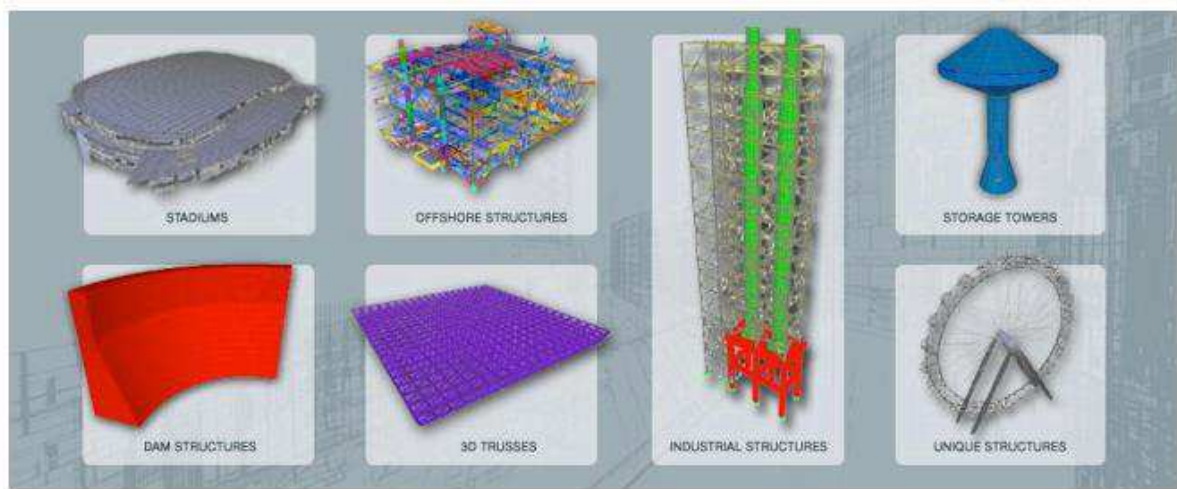
Kunzler (2013) menciona a dificuldade da modelagem computacional das estruturas de concreto. Devido as diferenças entre as resistências de tração e compressão, a não linearidade da relação tensão-deformação, fatores afetados pelas condições climáticas do ambiente como retração e fluência, e etc. Por isso, o método dos elementos finitos fornece uma análise numérica a qual considera o comportamento não-linear dos materiais de concreto (LAZZARI; FILHO; GASTAL, 2014, p.4). De acordo com Souza (2012) o método dos elementos finitos foi utilizado inicialmente para a análise para problemas de estados planos de tensão, utilizando elementos triangulares e retangulares. Mas atualmente, são utilizadas as mais variadas formas de elementos para vários tipos de análise. Souza (2003) argumenta que o tamanho da malha utilizada influencia nos resultados que serão obtidos pelo método dos elementos finitos. Porém, este método obtém resultados mais precisos se for comparado com o método da grelha equivalente.

### 2.4. SAP 2000

O SAP 2000 v.20.0.0 é um software de análise estrutural fundamentado em elementos finitos, capaz de efetuar análises estáticas e dinâmicas de diversos tipos de estruturas, conforme ilustra a figura 7. Este programa oferece uma interface gráfica intuitiva que facilita a entrada de

dados e a visualização dos resultados pelo usuário. O SAP2000 possui uma biblioteca de elementos pré-definidos que devem ser escolhidos adequadamente de acordo com a estrutura a ser modelada. Fica a cargo do usuário definir parâmetros como as resistências dos materiais, dimensões das barras, carregamentos e restrições. Matrizes locais e globais, vetores de conectividade e combinações de carregamento são gerados automaticamente. Os resultados são apresentados de forma conveniente, com diagramas, cortes e animações, facilitando a compreensão do comportamento da estrutura.

Figura 7 – Exemplos de estruturas modeladas no SAP 2000.



Fonte: <https://www.csiamerica.com/products/sap2000>



## CAPÍTULO 3

### 3. METODOLOGIA

#### 3.1. Área de estudo

O objeto de estudo deste trabalho é o viaduto Eduardo Campos, também conhecido como viaduto do Geisel, localizado na cidade de João Pessoa – PB, na BR – 230. Ele possui 48,6 metros de extensão longitudinal, composto de 4 estrados sendo que os 2 estrados internos possuem 3 faixas de rolamento e os 2 externos possuem apenas 2 faixas. As faixas possuem 4 metros de largura. A velocidade permitida nele é de 70 km/h. O projeto foi adaptado, sendo acrescentado ao tabuleiro transversinas intermediárias. As figuras 8 e 9 ilustram uma vista uma vista superior e lateral do viaduto que será o objeto de estudo. Já nas figuras 10, 11 e 12 são apresentados esboços da vista em planta, da seção transversal e longitudinal, respectivamente.

Figura 8 – Vista Superior do viaduto Eduardo Campos.



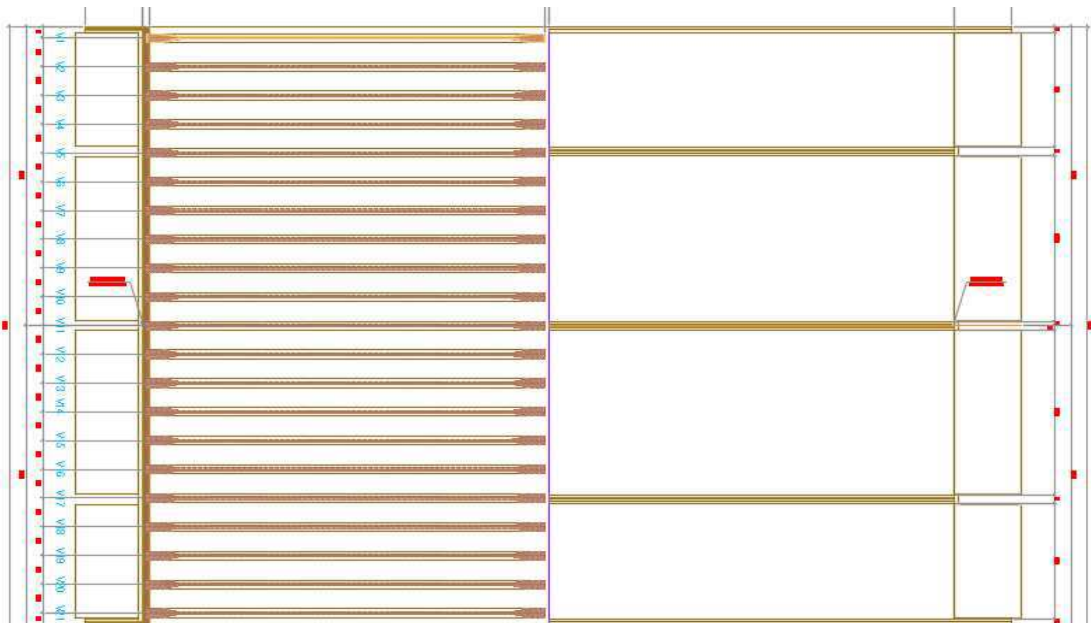
Fonte: <https://www2.pbagora.com.br>.

Figura 9 – Vista lateral do viaduto Eduardo Campos.



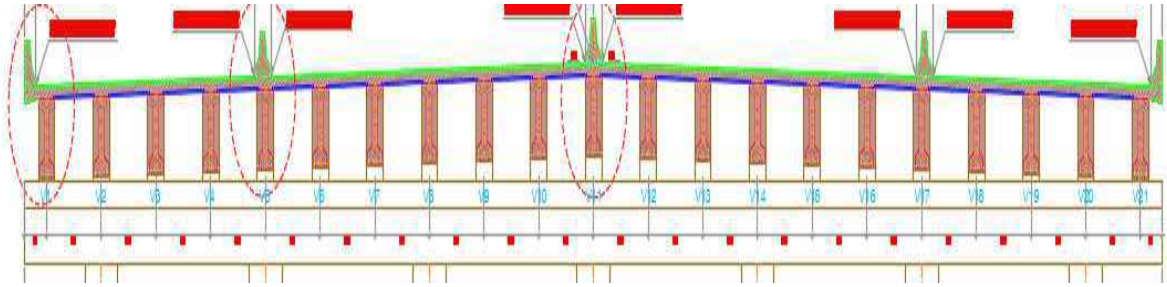
Fonte: <http://mocadaqueagita.com>

Figura 10 – Vista em planta do viaduto Eduardo Campos.



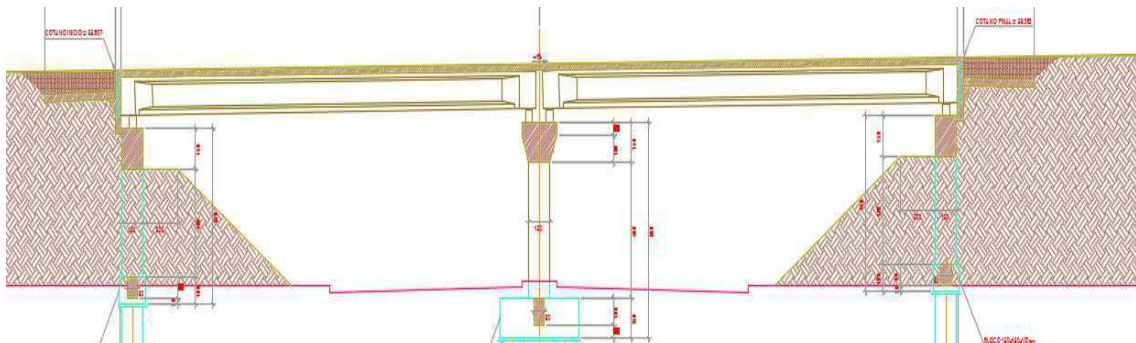
Fonte: Projeto arquitetônico.

Figura 11 – Seção transversal do viaduto Eduardo Campos.



Fonte: Projeto arquitetônico.

Figura 12 – Seção longitudinal do viaduto Eduardo Campos.

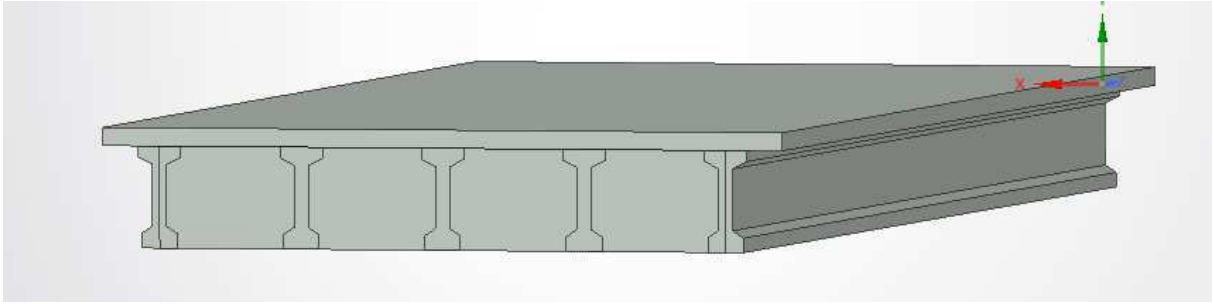


Fonte: Projeto arquitetônico.

### 3.2. Modelo estrutural

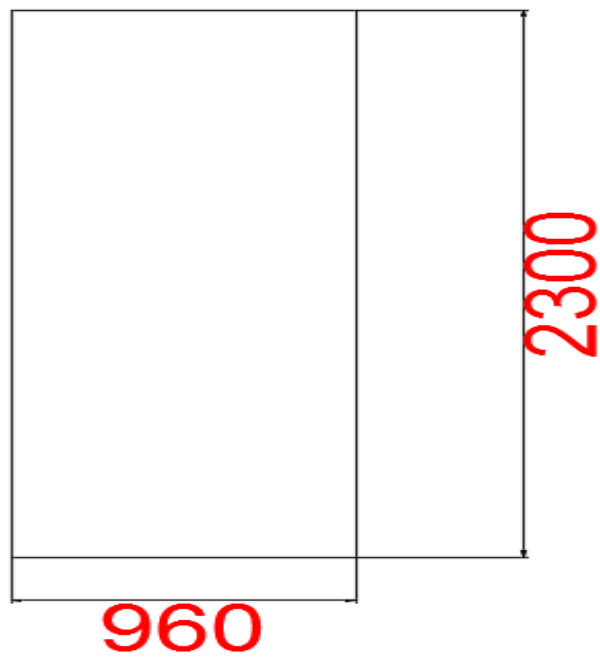
O modelo estrutural utilizado neste trabalho será composto por parte do estrado externo do viaduto Eduardo Campos, que será adaptada, tendo 23 metros de comprimento e 9,6 metros de largura. No modelo analisado serão utilizados um tabuleiro de concreto armado de 25 centímetros de espessura e 5 longarinas biapoiadas de concreto armado igualmente espaçadas de 2 metros entre si e cinco transversinas distantes 5,75 metros entre si. O pavimento é de concreto. Neste trabalho serão analisados os coeficientes de distribuição transversal de carga de todas as longarinas. As figuras 13 a 16 ilustram o modelo estrutural em perspectiva, as vistas superior e inferior, e a seção transversal do modelo, respectivamente. Já nas figuras 17 e 18, estão ilustradas as medidas das seções transversais das longarinas e transversinas adotadas, respectivamente.

Figura 13 – Modelo Estrutural.



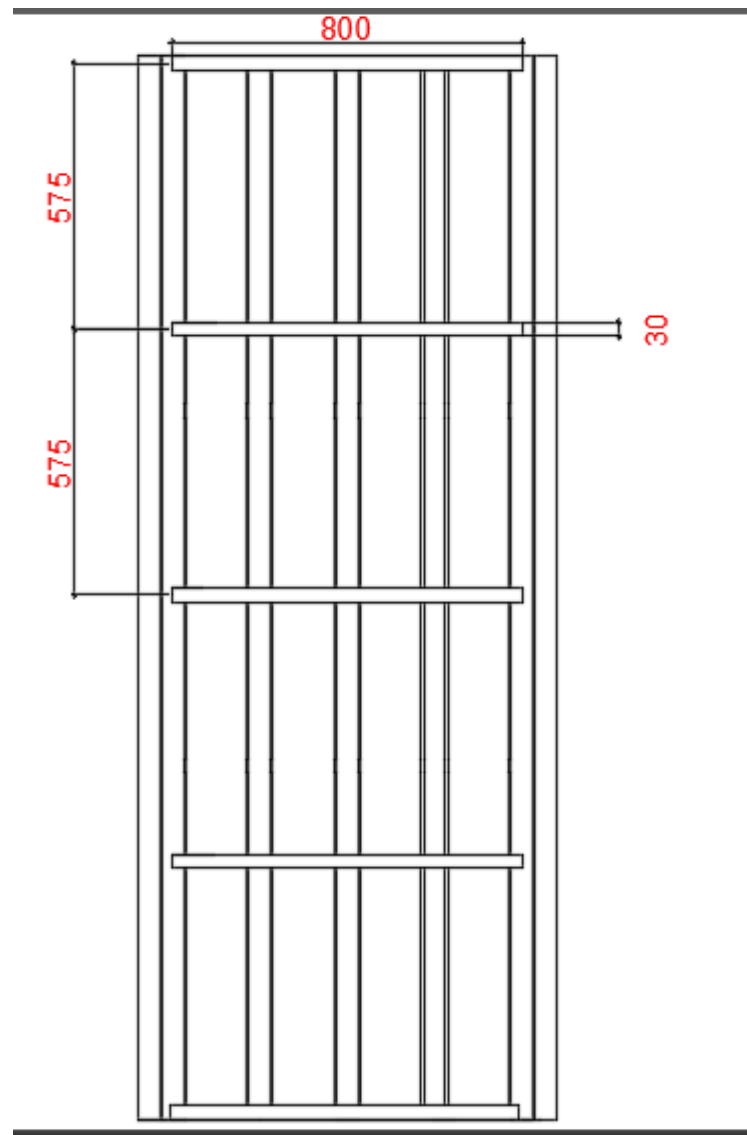
Fonte: Própria autoria.

Figura 14 – Vista superior do modelo estrutural. (Dimensões em cm).



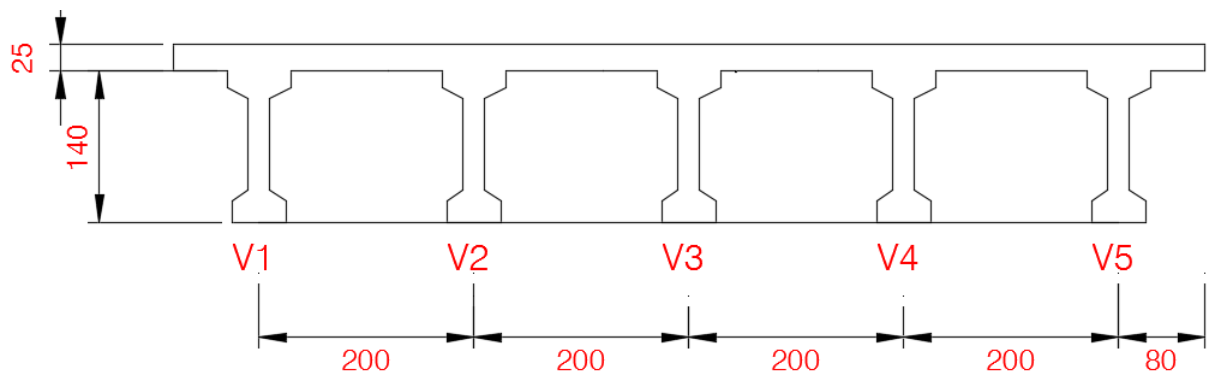
Fonte: Própria autoria.

Figura 15 – Vista inferior do modelo estrutural. (Dimensões em cm).



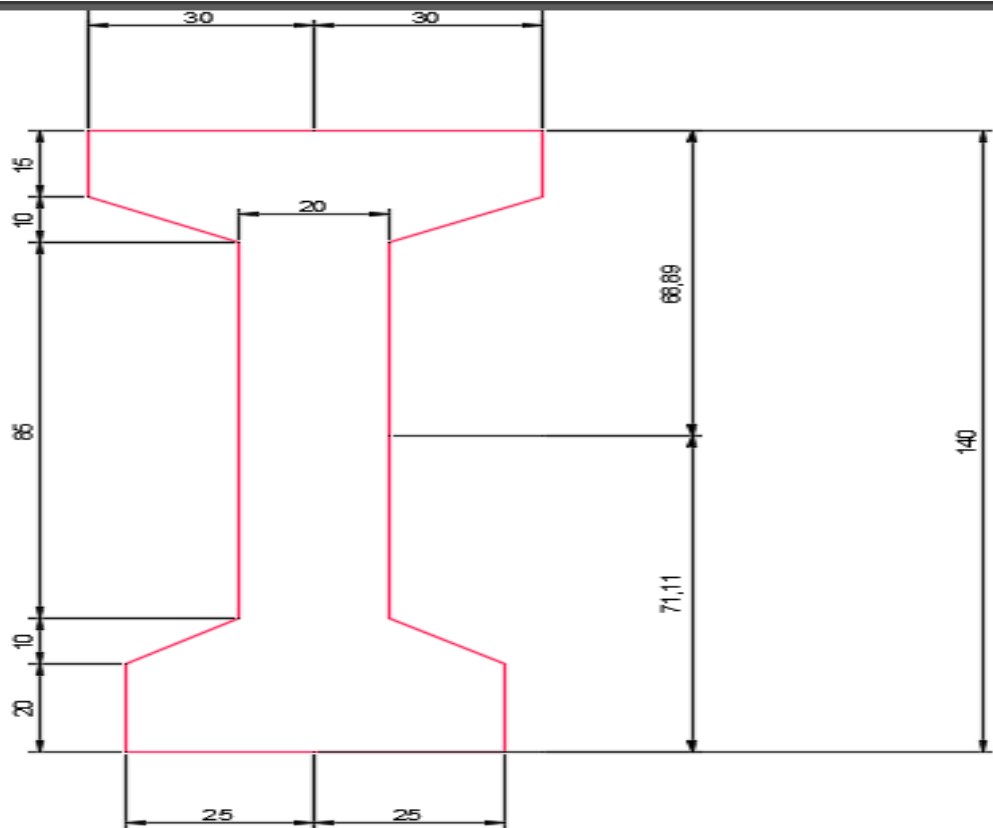
Fonte: Própria autoria.

Figura 16 – Seção transversal do modelo estrutural. (Dimensões em cm).



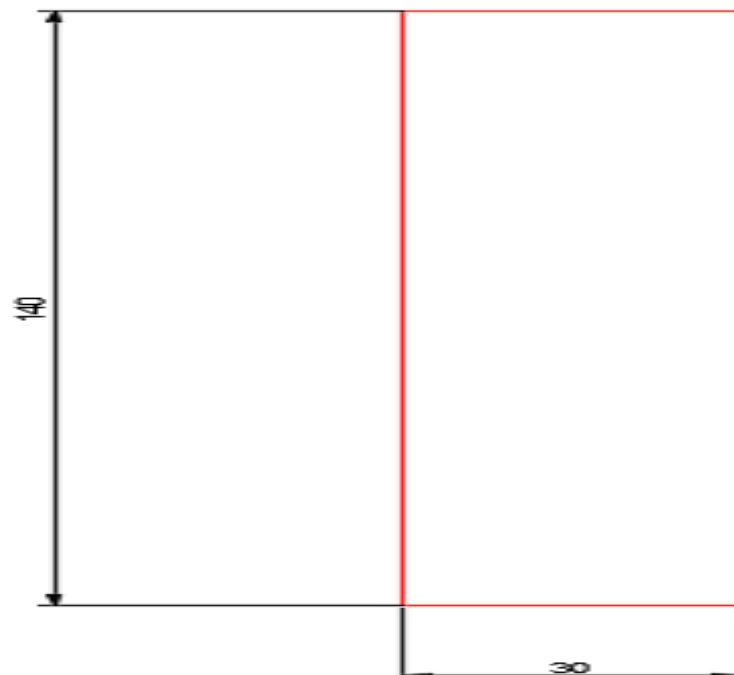
Fonte: Própria autoria.

Figura 17 – Seção transversal da longarina. (Dimensões em cm).



Fonte: Própria autoria.

Figura 18 – Seção transversal da transversina. (Dimensões em cm).



Fonte: Própria autoria.

### 3.3. Cálculo dos coeficientes transversais de carga pelos métodos analíticos

Nesta seção serão definidos todos os parâmetros necessários para o cálculo dos coeficientes em todos os métodos analíticos e também será demonstrado o cálculo dos coeficientes de distribuição transversal para a primeira longarina externa contada da esquerda para a direita. Para as demais o processo é idêntico.

#### 3.3.1. Método de Engesser-Courbon

Para o método de Engesser-Courbon, foram calculadas as cotas da linha de influência em V1 ( $x_{V1} = -4 \text{ m}$ ) para dois pontos do tabuleiro ( $x_0 = -4 \text{ m}$  e  $x_f = 4 \text{ m}$ ) e traçada a LI pela reta que interliga as cotas obtidas nesses pontos. Os parâmetros do método são:

$$P = 1; \quad \sum x_i^2 = 40 \text{ m}^2;$$

$$n = 5; \quad l = 9,6 \text{ m};$$

$$e_{x_0} = -4 \text{ m}; \quad L = 23 \text{ m};$$

$$e_{x_f} = 4 \text{ m}; \quad E_L = E_T = 31875,759 \text{ MPa};$$

$$x_{V1} = -4 \text{ m}; \quad I_L = 0,091 \text{ m}^4;$$

$$x_{V2} = -2 \text{ m}; \quad I_T = 0,069 \text{ m}^4;$$

$$x_{V3} = 0 \text{ m}; \quad \sum I_{L_n} = 0,455 \text{ m}^4;$$

$$x_{V4} = 2 \text{ m}; \quad \sum I_{T_n} = 0,345 \text{ m}^4;$$

$$x_{V5} = 4 \text{ m}; \quad .$$

Sendo que os módulos de elasticidade foram calculados conforme a ABNT NBR 6118: 2014. Com estes valores pode-se obter os valores da LI pela equação 1, que estão listados na tabela 2.

Tabela 2 – Coeficientes de repartição transversal pelo método de Engesser-Courbon.

Abcissa	Cota LI
$x_0$	0,6
$x_f$	-0,2

Fonte: Própria autoria.

A seguir calcula-se o coeficiente  $\lambda$ , afim de verificar a validade teórica do método de Engesser-Courbon para o modelo estrutural.

$$\lambda = \frac{9,6}{2 \cdot 23} \cdot \sqrt[4]{\frac{23 \cdot 31875,759 \cdot 0,455}{9,6 \cdot 31875,759 \cdot 0,345}} = 0,28 < 0,3$$

Como o coeficiente  $\lambda$  é menor que 0,3 garante-se que o sistema é infinitamente rígido, portanto assegura-se a validade deste método, para o caso estudado.

### 3.3.2. Método de Leonhardt

Para o método de Leonhardt, foi utilizada a tabela correspondente ao caso de 5 longarinas. E os dados das cotas da LI, por este método são dadas diretamente pela tabela. As cotas calculadas são correspondentes a cada longarina. E as cotas dos pontos restantes podem ser obtidas a partir de uma linha de tendência, neste trabalho será utilizado o software Microsoft Excel 2016 para isso. Os parâmetros para o método são:

- Número de transversinas igualmente espaçadas: 5;
- $k = 2$ ;
- $I_T = 0,069 \text{ m}^4$ ;
- $I_L = 0,091 \text{ m}^4$ ;
- $L = 23 \text{ m}$ ;
- $a = 2 \text{ m}$ .

Com estes valores pode-se calcular os parâmetros restantes, conforme a seguir.

$$I_{Teq} = 2 \cdot 0,069 = 0,138 \text{ m}^4$$

$$R = \frac{0,138}{0,091} \cdot \left(\frac{23}{2 \cdot 2}\right)^3 = 288,30$$

Como o valor de R é intermediário a outros dois da tabela de Leonhardt utilizada nesta pesquisa deve-se fazer uma interpolação linear entre os valores. Os resultados desta interpolação estão descritos na tabela 3.



Tabela 3 – Coeficientes de repartição transversal pelo método de Leonhardt.

R	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	$r_{1,3}$	$r_{1,4}$	$r_{1,5}$
250	0,608	0,396	0,192	-0,003	-0,193
500	0,604	0,398	0,196	-0,001	-0,197
288,30	0,607	0,396	0,193	-0,003	-0,194

Fonte: Própria autoria

### 3.3.3. Método de Guyon-Massonet

Segue os parâmetros necessários para a utilização das tabelas de Guyon-Massonet:

- $l_x = 2 \text{ m}$ ;
- $l_y = 5,75 \text{ m}$ ;
- $b = 4,8 \text{ m}$ ;
- $L = 23 \text{ m}$ ;
- $I_L = 0,091 \text{ m}^4$ ;
- $I_T = 0,069 \text{ m}^4$ ;
- $J_L = 0,005 \text{ m}^4$ ;
- $J_T = 0,013 \text{ m}^4$ .

Com estes valores pode-se calcular os parâmetros  $\theta$  e  $\varphi$ . Então,

$$\theta = \frac{4,8}{23} \cdot \sqrt[4]{\frac{0,091 \cdot 5,75}{0,069 \cdot 2}} \cong 0,3$$

$$\varphi = \frac{\frac{0,005}{2} + \frac{0,013}{5,75}}{4 \cdot \sqrt{\frac{0,091 \cdot 0,069}{2 \cdot 5,75}}} = 0,051$$

Com estes parâmetros calculados é possível determinar quais tabelas devem ser utilizadas. Neste caso são as tabelas 4 e 5 com  $\varphi = 0$  e  $\varphi = 1$ , respectivamente.

Tabela 4 – Tabela de Guyon-Massonet para  $\theta=0,3$  e  $\varphi=0$ .

$\theta = 0,3$ $\varphi = 0$	Posição da carga								
Posição da viga	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
0	0,9423	0,9742	1,0044	1,0283	1,0385	1,0283	1,0044	0,9742	0,9423
b/4	0,2109	0,4183	0,6252	0,8289	1,0283	1,2146	1,3833	1,5419	1,6975
b/2	-0,5038	-0,1284	0,2477	0,6252	1,0044	1,3833	1,7572	2,1209	2,4805
3b/4	-1,2094	-0,6698	-0,1284	0,4183	0,9742	1,5419	2,1209	2,7062	3,2901
B	-1,9123	-1,2095	-0,5038	0,2109	0,9423	1,6974	2,4805	3,2901	4,1177

Fonte: MASSONET, 1962, p.14.

Tabela 5 – Tabela de Guyon-Massonet para  $\theta=0,3$  e  $\varphi=1$ .

$\theta = 0,3$ $\varphi = 1$	Posição da carga								
Posição da viga	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
0	0,9664	0,9840	1,0018	1,0173	1,0244	1,0173	1,0018	0,9840	0,9664
b/4	0,8776	0,9104	0,9453	0,9820	1,0173	1,0451	1,0591	1,0652	1,0689
b/2	0,8012	0,8453	0,8929	0,9453	1,0018	1,0591	1,1108	1,1508	1,1849
3b/4	0,7345	0,7876	0,8453	0,9104	0,9840	1,0652	1,1508	1,2351	1,3126
b	0,6733	0,7345	0,8012	0,8776	0,9664	1,0689	1,1849	1,3126	1,4474

Fonte: MASSONET, 1962, p.14.

Sendo, a consideração de eixos do método de Guyon-Massonet a mesma considerada no método de Engesser-Courbon, a posição da viga externa está entre  $-3b/4$  e  $-b$  portanto deve-se interpolar estes coeficientes linearmente, tanto na tabela 6 para  $\varphi = 0$  quanto na tabela para  $\varphi = 1$ . Além disso por se encontrar no lado negativo do eixo os coeficientes deverão ser multiplicados por  $-1$ .

Tabela 6 – Tabela dos coeficientes de repartição de carga para a viga em  $x = -4$  m.

Posição da viga	Posição da carga								
	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
x = -4m	$\varphi = 0$								
	1,4437	0,8497	0,2535	-0,3492	-0,9636	-1,5937	-2,2408	-2,9008	-3,5660
	$\varphi = 1$								
	-0,7141	-0,7669	-0,8306	-0,8995	-0,9781	-1,0664	-1,1622	-1,2609	-1,3575

Fonte: Própria autoria.

Como obteve-se  $0 < \varphi < 1$ , deve-se utilizar a equação 16, de interpolação não linear apresentada no item 2.2.3. Lançando mão dela pode-se finalmente obter os coeficientes para a longarina na posição  $x = -4$  m, conforme a tabela 7.

Tabela 7 – Coeficientes de repartição de carga pelo método de Guyon-Massonet.

Posição da viga	Posição da carga				
	x= -4 m	x= -2 m	x= 0 m	x= 2 m	x= 4 m
x= -4 m	$\theta = 0,30$ e $\varphi = 0,052$				
	1,4540	0,2573	-0,9636	-2,1081	-3,1225

Fonte: Própria autoria.

### 3.4. Cálculo dos coeficientes transversais de carga pelos modelagem computacional

Nesta pesquisa foi considerado concreto com peso específico de  $25 \text{ kN/m}^3$ , módulo de elasticidade secante de  $31875,76 \text{ MPa}$ , resistência à compressão característica de  $40 \text{ MPa}$ , coeficiente de Poisson de  $0,2$ . A figura 19 ilustra as características dos materiais utilizados na modelagem.

Figura 19 – Valores dos parâmetros para os modelos estruturais.

**Material Property Data**

**General Data**

Material Name and Display Color: CONCRETO,

Material Type: Concrete

Material Notes: Modify/Show Notes...

**Weight and Mass**

Weight per Unit Volume: 25,

Mass per Unit Volume: 2,5493

**Units**

KN, m, C

**Isotropic Property Data**

Modulus of Elasticity, E: 31875758,81

Poisson, U: 0,2

Coefficient of Thermal Expansion, A: 9,900E-06

Shear Modulus, G: 13281566,

**Other Properties for Concrete Materials**

Specified Concrete Compressive Strength, Fc: 40000

Expected Concrete Compressive Strength: 28571,43

Lightweight Concrete

Shear Strength Reduction Factor:

Switch To Advanced Property Display

OK Cancel

Fonte: Software SAP2000.

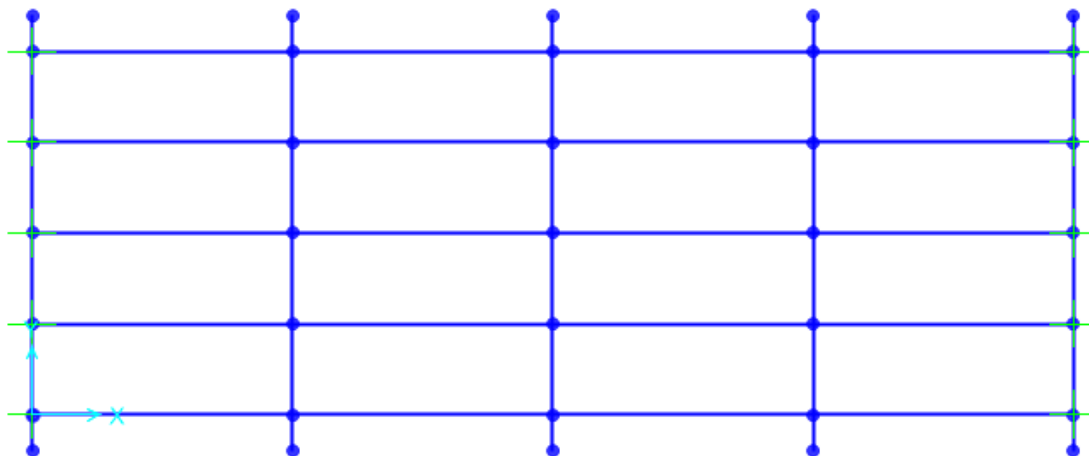
A consideração utilizada, neste projeto, para o tabuleiro da ponte foi um modelo de casca e para as longarinas e transversinas um modelo de grelha. Os modelos utilizados tanto para o tabuleiro quanto para as vigas estão ilustrados nas figuras 20 e 21, respectivamente.

Figura 20 – Representação do tabuleiro da ponte estudada como modelo de casca.



Fonte: Software SAP2000.

Figura 21 – Representação das longarinas e transversinas da ponte estudada como modelo de grelha.



Fonte: Software SAP2000.

#### 3.4.1. Modelo de Casca

Segundo Jovem et al (2016), as hipóteses adotadas pelo SAP2000 para um modelo de casca são as seguintes:

- Material homogêneo, isotrópico e elástico linear, obedecendo à Lei de Hooke;
- Placa inicialmente plana;
- A superfície média da placa permanece indeformável durante a flexão;
- A espessura da placa é pequena em comparação às outras dimensões;
- Os deslocamentos transversais  $w(x, y)$  são pequenos em relação à espessura da placa. Uma deflexão de até 1/10 da espessura é aceitável para uma teoria de pequenas deformações;
- As inclinações da superfície média da placa são pequenas;
- As seções transversais da placa tendem a permanecerem normais à superfície média da placa – hipótese de Bernoulli;
- As tensões normais na direção do eixo  $Z(\sigma_z)$  podem ser negligenciadas.

O elemento Shell-Thin no SAP2000 foi utilizado para modelar casca, membrana e placa em comportamento plano e estruturas tridimensionais e define elementos finitos, quadrangular, não distorcidos, por possuírem mais precisão. O comportamento de flexão da placa inclui dois

sentidos: uma componente de rigidez da placa a rotação e uma componente de rigidez de translação na direção normal ao plano do elemento. A figura 22 ilustra os dados utilizados no SAP2000 para o modelo de casca do tabuleiro.

Figura 22 – Valores dos parâmetros utilizados no modelo de casca do tabuleiro.

The screenshot shows the 'Shell Section Data' dialog box with the following parameters:

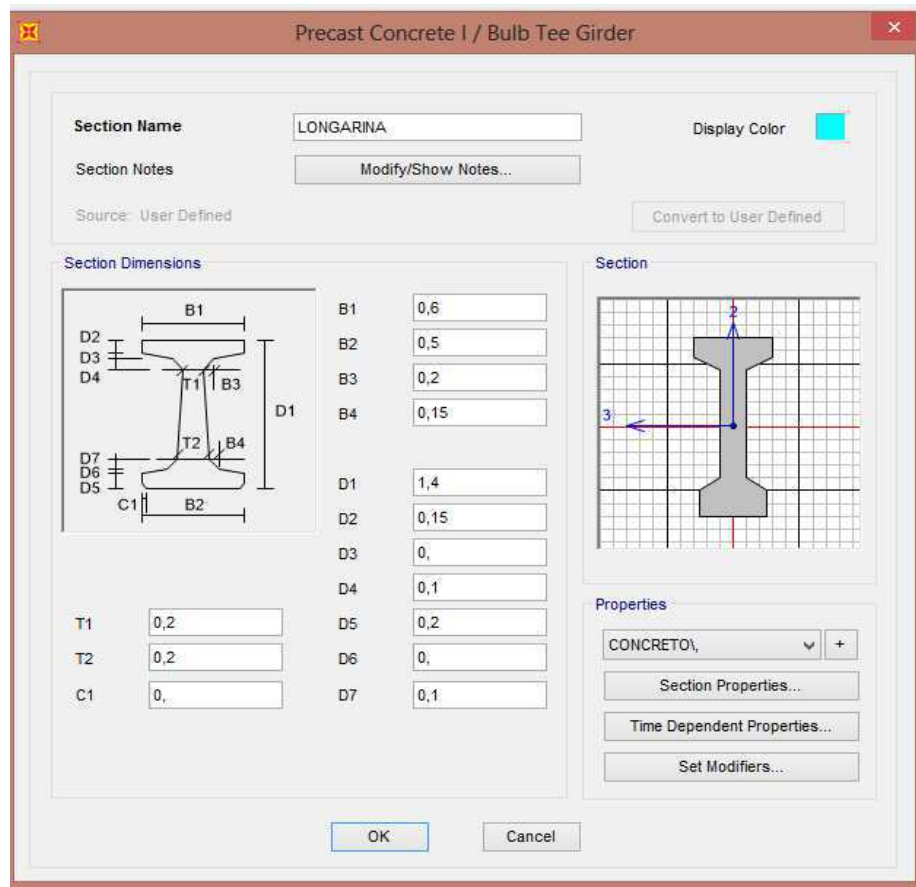
- Section Name:** LAJE
- Section Notes:** Modify/Show...
- Display Color:** [Grey square]
- Type:** Shell - Thin (selected), Shell - Thick, Plate - Thin, Plate Thick, Membrane, Shell - Layered/Nonlinear. Button: Modify/Show Layer Definition...
- Thickness:** Membrane: 0,25; Bending: 0,25
- Material:** Material Name: CONCRETO; Material Angle: 0. Buttons: +, -
- Time Dependent Properties:** Set Time Dependent Properties...
- Concrete Shell Section Design Parameters:** Modify/Show Shell Design Parameters...
- Stiffness Modifiers:** Set Modifiers...
- Temp Dependent Properties:** Thermal Properties...
- Buttons:** OK, Cancel

Fonte: Software SAP2000.

#### 3.4.2. Modelo de Grelha

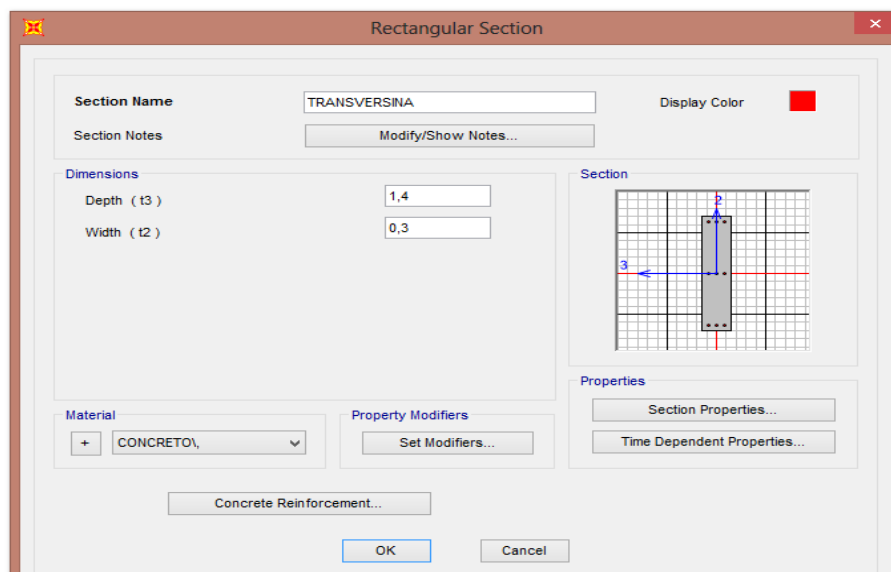
Para o modelo de grelha da ponte utilizou-se elementos de barras para as longarinas e transversinas. Os parâmetros utilizados para compor as seções das longarinas e das transversinas são apresentadas nas figuras 23 e 24, respectivamente.

Figura 23 – Seção das longarinas.



Fonte: Software SAP2000.

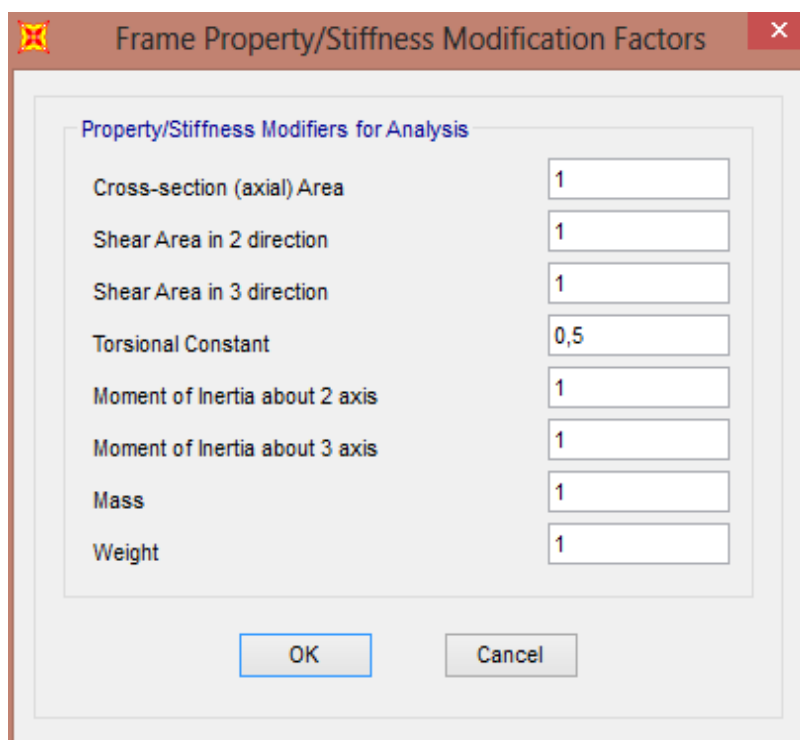
Figura 24 – Seção das transversinas.



Fonte: Software SAP2000.

Silva e Horowitz (2014) não recomendam considerar as vigas de concreto armado no regime elástico linear, pois esta hipótese despreza totalmente os efeitos da fissuração do concreto e isso pode induzir as análises a resultados não condizentes com a realidade. Consultando a ABNT NBR 7187: 2003, sobre os efeitos da fissuração na estrutura, quando se estiver calculando as deformações e deslocamentos no estado limite de serviço deve-se considerar a seção fissurada conforme prescrições da ABNT NBR 6118: 2003. Por uma questão de atualização utilizou-se neste trabalho as recomendações da ABNT NBR 6118: 2014. De acordo com o item 17.5.2.2 da ABNT NBR 6118: 2014, a constante de rigidez a ser utilizada para se considerar os efeitos de fissuração nas vigas de concreto submetidas a flexo-torção é de 50 % do valor da rigidez elástica de torção. Na figura 25 ilustra os parâmetros de rigidez utilizados no modelo do SAP2000 sendo os mesmos, tanto para as longarinas quanto para as transversinas.

Figura 25 – Parâmetros de rigidez tanto das longarinas quanto das transversinas.



Property/Stiffness Modifiers for Analysis	
Cross-section (axial) Area	1
Shear Area in 2 direction	1
Shear Area in 3 direction	1
Torsional Constant	0,5
Moment of Inertia about 2 axis	1
Moment of Inertia about 3 axis	1
Mass	1
Weight	1

Fonte: Software SAP2000.

### 3.4.3. Linha de influência

Com todos estes parâmetros definidos, e aplicando a carga unitária na posição de maior momento do tabuleiro é possível finalmente obter os coeficientes de distribuição transversal de



carga, a partir dos momentos gerados pela posição da carga unitária em relação a longarina que se quer estudar. Na tabela 8 estão ilustrados os coeficientes obtidos para a longarina V1.

Tabela 8 – Coeficientes de distribuição transversal de carga da longarina V1 obtidos pelo SAP2000.

Longarina analisada	Posição da carga unitária				
	x = -4 m	x = -2 m	x = 0 m	x = 2 m	x = 4 m
V1	0,5293	0,3296	0,1702	0,0429	-0,0720

Fonte: Própria autoria.

## CAPÍTULO 4

### 4. RESULTADOS

#### 4.1. Métodos analíticos

Devido a simetria do problema serão computados apenas os coeficientes de distribuição de carga apenas para as longarinas V1, V2 e V3.

##### 4.1.1. Método de Engesser-Courbon

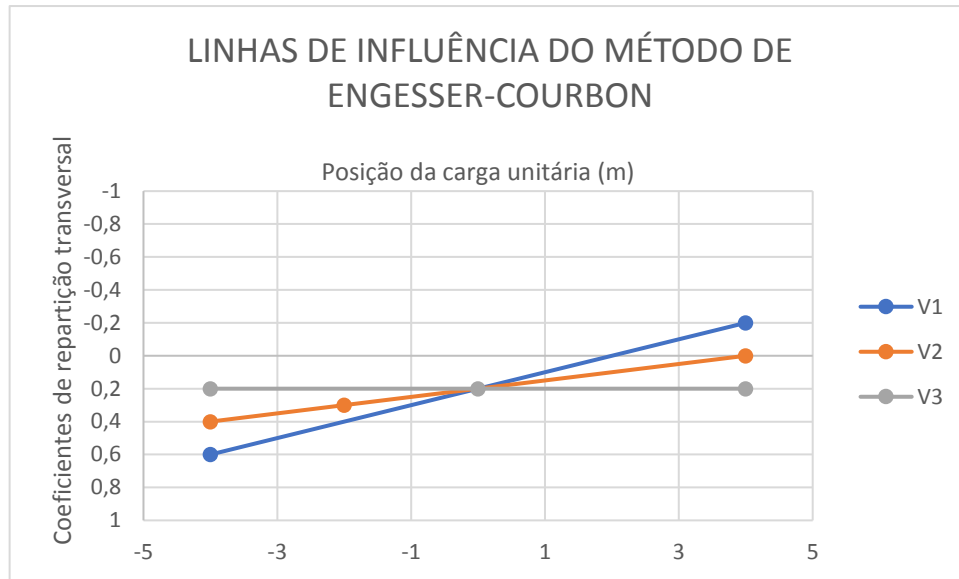
No método, a totalidade da carga unitária é absorvida pelas longarinas (como se não houvesse transversinas no tabuleiro) segundo um coeficiente de distribuição transversal. Sendo a partir destes coeficientes onde obtém-se a linha de influência transversal do modelo estudado. Na tabela 9 estão listados os coeficientes de distribuição transversal para as três longarinas consideradas obtidos por este método. E na figura 26 estão ilustradas as linhas de influência obtidas pelos coeficientes.

Tabela 9 – Coeficientes de distribuição transversal de carga.

<b>Posição da carga unitária (m)</b>	<b>Coeficientes de distribuição transversal de V1</b>	<b>Coeficientes de distribuição transversal de V2</b>	<b>Coeficientes de distribuição transversal de V3</b>
-4	0,6	0,4	0,2
-2	0,4	0,3	0,2
0	0,2	0,2	0,2
2	0	0,1	0,2
4	-0,2	0	0,2

Fonte: Própria autoria.

Figura 26 – Linhas de influência pelo método de Engesser-Courbon.



Fonte: Própria autoria.

#### 4.1.2. Método de Leonhardt

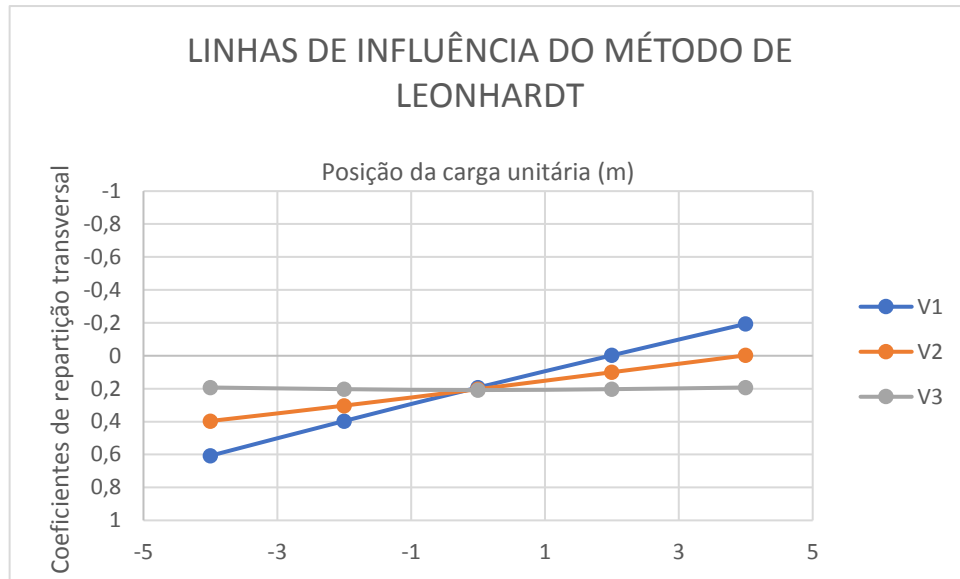
Para a utilização deste método foi calculado o parâmetro que mensura o grau de rigidez da estrutura ( $R$ ). Posteriormente foi utilizada a tabela apresentada por Spernau (2012) para o caso de longarinas retas, a fim de determinar os coeficientes de repartição transversal. Na tabela 10 estão listados os coeficientes de distribuição transversal para as três longarinas consideradas. E na figura 27 estão ilustradas as linhas de influência obtidas pelos coeficientes.

Tabela 10 – Coeficientes de distribuição transversal de carga.

Posição da carga unitária (m)	Coeficientes de distribuição transversal de V1	Coeficientes de distribuição transversal de V2	Coeficientes de distribuição transversal de V3
-4	0,607	0,396	0,193
-2	0,396	0,303	0,203
0	0,193	0,203	0,208
2	-0,003	0,1	0,203
4	-0,193	-0,003	0,193

Fonte: Própria autoria.

Figura 27 – Linhas de influência pelo método de Leonhardt.



Fonte: Própria autoria.

#### 4.1.3. Método de Guyon-Massonet

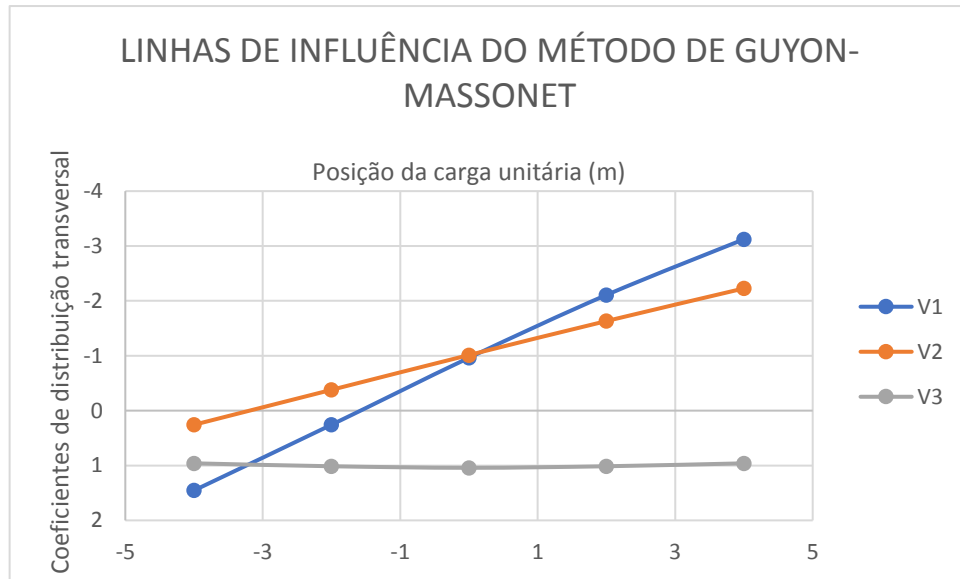
Nesse método os índices de repartição transversal representam a relação entre os deslocamentos verticais de um ponto da ponte carregada, excentricamente, com a carga linear senoidal e os deslocamentos que corresponderiam a esses mesmos supondo a carga distribuída uniformemente em toda a largura do tabuleiro. Na tabela 11 estão listados os coeficientes de distribuição transversal para as três longarinas consideradas obtidos pelo método. E na figura 28 estão ilustradas as linhas de influência obtidas pelos coeficientes.

Tabela 11 – Coeficientes de distribuição transversal de carga.

Posição da carga unitária (m)	Coefficientes de distribuição transversal de V1	Coefficientes de distribuição transversal de V2	Coefficientes de distribuição transversal de V3
-4	1,4540	0,2573	0,9603
-2	0,2573	-0,3793	1,0136
0	-0,9637	-1,0136	1,0417
2	-2,1081	-1,6324	1,0136
4	-3,1225	-2,2272	0,9603

Fonte: Própria autoria.

Figura 28 – Linhas de influência pelo método de Guyon-Massonet.



Fonte: Própria autoria.

#### 4.2. Método computacional

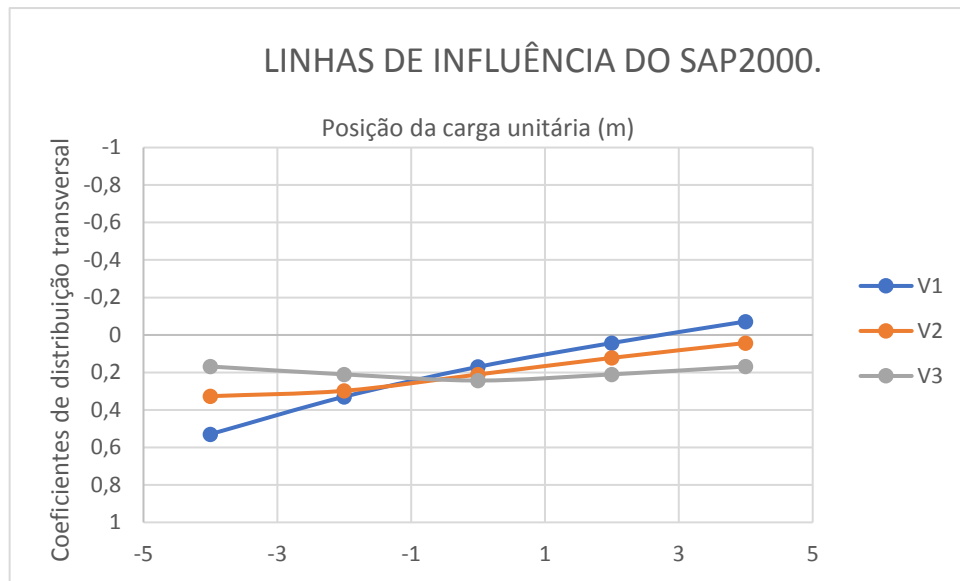
Os resultados foram obtidos através de modelagem, utilizando o software SAP2000, admitindo a rigidez a flexão e a torção do conjunto longitudinal/transversal, neste modelo representado por elementos de barras e o tabuleiro foi modelado como elemento de casca. Na tabela 12 estão listados os coeficientes de distribuição transversal para as três longarinas consideradas obtidos pelo método. E na figura 29 estão ilustradas as linhas de influência obtidas pelos coeficientes.

Tabela 12 – Coeficientes de distribuição transversal de carga.

Posição da carga unitária (m)	Coefficientes de distribuição transversal de V1	Coefficientes de distribuição transversal de V2	Coefficientes de distribuição transversal de V3
-4	0,5293	0,3266	0,1683
-2	0,3296	0,2978	0,2102
0	0,1702	0,2108	0,2430
2	0,0429	0,1221	0,2102
4	-0,0720	0,0427	0,1683

Fonte: Própria autoria.

Figura 29 – Linhas de influência pelo SAP2000.

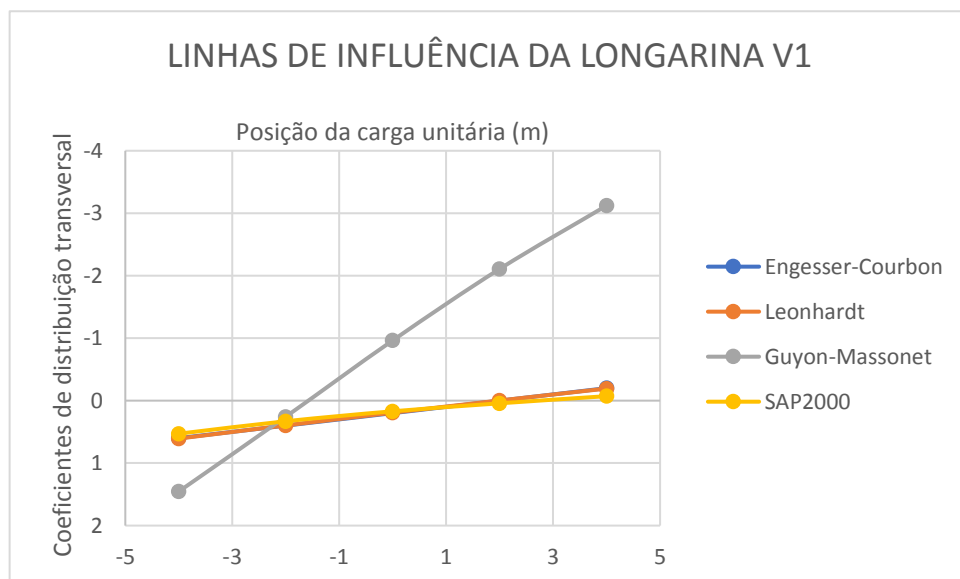


Fonte: Própria autoria.

### 4.3. Comparações

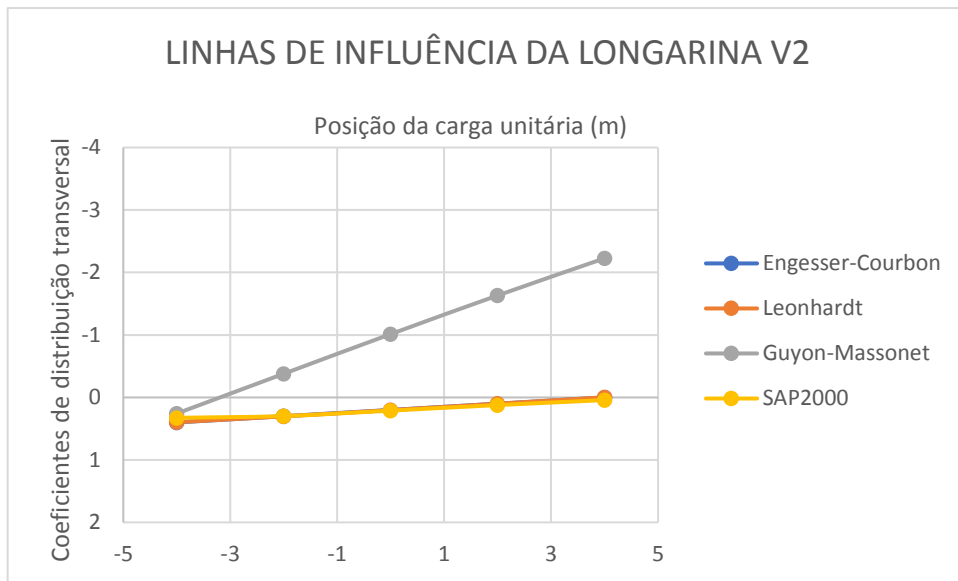
As figuras 30, 31 e 32 ilustram as linhas de influência, obtidas por cada método, para as longarinas V1, V2 e V3, respectivamente.

Figura 30 – Linhas de influência da longarina V1.



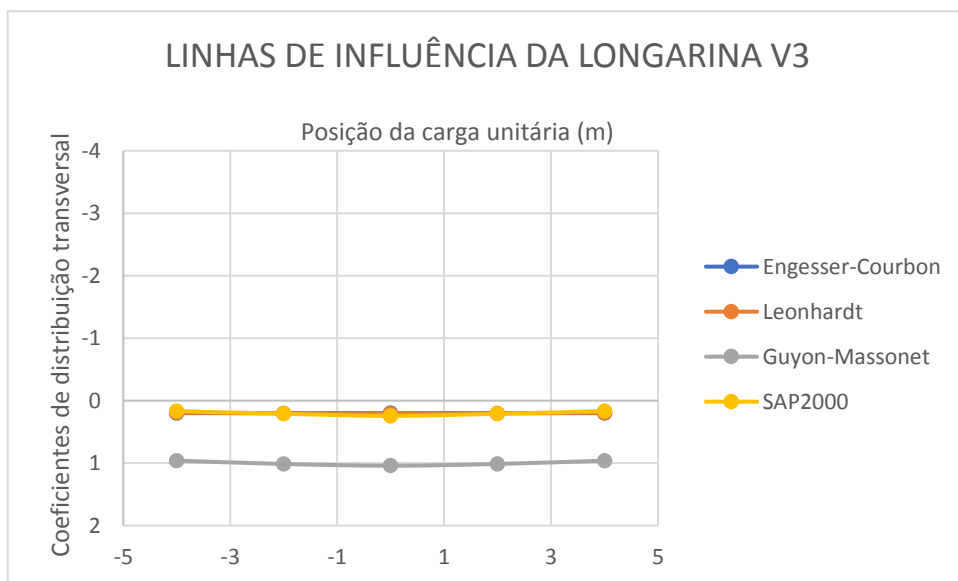
Fonte: Própria autoria.

Figura 31 – Linhas de influência da longarina V2.



Fonte: Própria autoria.

Figura 32 – Linhas de influência da longarina V3.



Fonte: Própria autoria.

## **5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES**

### **5.1. Conclusão**

No âmbito geral os modelos analíticos e o modelo computacional analisados apresentaram coeficientes de distribuição transversal relativamente próximos. Mais especificamente, os modelos de Engesser-Courbon, Leonhardt e o obtido pelo SAP2000.

Em relação ao modelo computacional, mesmo sendo considerado uma constante de torção de 50 %, afim de considerar os efeitos da fissuração do concreto, os resultados foram próximos aos dois métodos analíticos citados, isso se dá devido ao elevado grau de rigidez do modelo estudado. Também foi observado que a consideração do efeito da torção promove uma melhor distribuição dos coeficientes de distribuição transversal, principalmente nas longarinas externas.

Notou-se que o número de longarinas e transversinas utilizadas são fatores determinantes, tanto para a validação dos modelos analíticos quanto para a convergência dos resultados, fato este importante quando se deseja comparar os métodos.

Em relação ao método de Guyon-Massonet, foi verificado que os dados obtidos são consideravelmente divergentes dos demais, isso se dá, pois, os coeficientes obtidos estão definidos para elementos de placa, e deveriam ser convertidos para elementos de viga para haver validade nos resultados, conforme constatou Mason (1977).

Por fim, vale ressaltar que a configuração da distribuição das cargas é importante e deve ser melhor observada na etapa de dimensionamento das peças estruturais, visto que o mapeamento da real absorção das cargas ao longo das longarinas e a interação com as transversinas gerará uma melhor e mais econômica distribuição das taxas de armaduras longitudinais e transversais.

### **5.2. Sugestões para trabalhos futuros**

Considerando a importância do tema, destaca-se que toda a pesquisa envolvendo a distribuição transversal de carga num tabuleiro de ponte, incidirá sobre dois aspectos muito importantes nos projetos: segurança e economia de materiais. Assim, recomenda-se que os trabalhos futuros as seguintes pesquisas:

- Aplicação de outros métodos analíticos;



- Variar as dimensões do tabuleiro e o número de longarinas e transversinas do modelo estudado;
- Fazer uma análise não linear 3D das estruturas de pontes;
- Analisar o real efeito das transversinas na distribuição das cargas nas longarinas;
- Realizar o dimensionamento e detalhamento das longarinas com esforços obtidos por um modelo 3D em elementos finitos e comparar com as taxas de armadura obtidas com o dimensionamento com os esforços obtidos pelos métodos analíticos de cálculo;
- Fazer uma análise experimental de um modelo reduzido de distribuição de carga em tabuleiros de pontes.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

\_\_\_\_\_. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

\_\_\_\_\_. **NBR 7187**: Projeto de pontes de concreto armado e de concreto protendido - Procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

ALVES, E.V.; ALMEIDA, S.M.F.; JUDICE, F.M.S. Métodos de análise estrutural de tabuleiros de pontes em vigas múltiplas de concreto protendido, **Engevista**, Niterói – Rio de Janeiro, v.6, n.2, p. 48-58, agosto, 2004. Disponível em < [www.uff.br](http://www.uff.br) >. Acesso em: 22 mai. 2018.

BAKHT, B.; JAEGAR, L.G. **Bridge analysis simplified**, New York: McGraw Hill, 1985. Disponível em < [ebookbit.com](http://ebookbit.com) >. Acesso em: 1 mai. 2018.

CARRIL, R.S.; FERREIRA LOPES, V.M. **Métodos aproximados de determinação da distribuição de esforços na seção transversal de pontes rodoviárias**: Comparação com métodos mais exactos, Apontamentos Sifeup, 2016. Disponível em <[www.fe.up.pt](http://www.fe.up.pt)>. Acesso em: 13 mai. 2018.

COURBON, Jean. Calcul des ponts á poutres multiples solidarisées par des entretoises. In: **Annales des Ponts et**. 1940.

DE OLIVEIRA, Charles Jaster et al. Distribuição de cargas na seção transversal de pontes com viga múltipla. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE CONCRETO, 59., 2017, Bento Gonçalves – Rio Grande do Sul. **Anais...** Bento Gonçalves – Rio Grande do Sul: IBRACON, 2017. Disponível em < [www.researchgate.net](http://www.researchgate.net) >. Acesso em: 6 mai. 2018.

EL DEBS, Mounir Khalil; TAKEYA, Toshiaki. **Introdução as pontes de concreto**. Universidade de São Paulo – USP - São Carlos /SP. Escola de Engenharia Civil, departamento de Engenharia de Estruturas. Disciplina SET – 0412 – Pontes de Concreto – Apostila. 2007. Disponível em < <http://wwwwp.feb.unesp.br> >. Acesso em: 13 mai. 2018.

ENGESSER, F. Z. ver. deut. Ingr. 42,(1898) 927; see also 1899, Über die Knickfestigkeit gerader Stäbe. **Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen**, v. 35.

GUYON, Y., **Calcul De Ponts Larges a Prouties Multiples Solidarisees Par des Entretoises**, Ann. De Ports et Chavsees de France, 1949, Vol. 10, No. 9.

HEINEN, Sabrina Kalise. **Efeito da distribuição transversal das cargas na obtenção de linhas de influência reais usando um sistema de pesagem em movimento em pontes**. 2016. 148 p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil. Disponível em < [repositorio.ufsc.br](http://repositorio.ufsc.br) >. Acesso em: 3 mai. 2018.

HUBER, Maksymilian Tytus. **Die Grundlagen einer rationellen Berechnung der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten**. Verlag für Fachliteratur, 1914.

JOVEM, T. P.; REBOUÇAS, A. S.; FILHO, J. N.; DIÓGENES, H. J. N.; MATA, R. C. Análise Comparativa da Distribuição de Carga em Pontes Hiperestáticas de Concreto Armado com Múltiplas Longarinas por Meio de Modelos Analíticos Clássicos e do Método dos Elementos Finitos. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE PONTES E ESTRUTURAS, 9. 2016. Rio de Janeiro – RJ. **Anais...** Rio de Janeiro - RJ: ABPE, 2016. Disponível em < <http://www.abpe.org.br>>. Acesso em: 23 jun. 2018.

JOVEM, Tércio Pereira. **Estudo analítico e numérico de repartição de carga em tabuleiros de pontes retas com longarinas múltiplas de concreto armado**. 2017. 130 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Rio Grande do Norte, Brasil. Disponível em < [repositorio.ufrn.br](http://repositorio.ufrn.br) >. Acesso em: 1 mai. 2018.

KAESTNER, Camile Luana. **Dimensionamento de longarinas protendidas com a consideração das etapas construtivas**. 2015. 182 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil. Disponível em < [repositorio.ufsc.br](http://repositorio.ufsc.br) >. Acesso em: 1 mai. 2018.

KALYANSHETTI, M.G.; SHRIRAM, R.P. Study of effectiveness of courbon’s theory in the analysis of T-beam bridges, **International Journal of Scientific & Engineering Research**, v.4, issue 3, 2013. Disponível em < [www.ijser.org](http://www.ijser.org) >. Acesso em: 1 mai. 2018.

KUNZLER, Paulo Schmeling. **Análise paramétrica por elementos finitos de vigas de concreto armado e protendido pré-tracionadas com abertura na alma**. 2013. 114f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013. Disponível em < [www.lume.ufrgs.br](http://www.lume.ufrgs.br) >. Acesso em: 21 mai. 2018.

LAZZARI, P. M.; FILHO, A.C.; GASTAL, F.P.S.L. Análise estrutural não linear de vigas em concreto armado utilizando o ANSYS 14.5. In: Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas, 7., 2014, Rio de Janeiro – RJ. **Anais...** Rio de Janeiro - RJ: ABPE, 2014. Disponível em < [www.abpe.org.br](http://www.abpe.org.br) >. Acesso em: 21 mai. 2018.

LEONHARDT, Hans Ernst Albert Schmidt et al. **Die Reichskulturkammer**. Industrieverl. Spaeth & Linde, 1938.

MASON, J. **Pontes em concreto armado e protendido**, Rio de Janeiro: LTC, 1977.

MASSONNET, Charles. **Compléments à la méthode de calcul des ponts à poutres multiples...** Institut technique du bâtiment et des travaux publics, 1962. Disponível em <[www.scribd.com](http://www.scribd.com)>. Acesso em: 17 jun. 2018.

PFEIL, Walter. **Pontes em Concreto Armado** v. 1 e v. 2. Rio de Janeiro: LTC, 1985.

RYALL, M.J.; PARKE, G.A.R.; HARDING, J.E. **The manual of bridge engineering**, London: Thomas Telford Publishing, 2002. Disponível em < [pimiburn.deviantart.com](http://pimiburn.deviantart.com) >. Acesso em: 1 mai. 2018.

SILVA, Jordlly Reydson de Barros; HOROWITZ, Bernardo. Rigidez à Torção Efetiva em Vigas de Concreto Armado. In: IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTACIONAL METHODS IN ENGINEERING, 35. 2014. Fortaleza – CE. **Anais...** Fortaleza – CE: CILAMCE, 2014. Disponível em < [www.researchgate.net](http://www.researchgate.net) >. Acesso em: 24 jun. 2018.

SOUZA, Remo M. **O Método dos elementos finitos aplicado ao problema de condução de calor**. Universidade Federal do Pará – UFPA – Belém/PA. Centro Tecnológico, Departamento de Engenharia Civil, Núcleo de Instrumentação e Computação Aplicada a Engenharia. Apostila. 2003. Disponível em: <<http://www.inf.ufes.br>>. Acesso em: 21 mai. 2018.

SOUZA, Victor José de Souza. **Contribuição ao projeto e dimensionamento da superestrutura de pontes rodoviárias em vigas mistas de aço e concreto**. 2012. 167f. Dissertação (Mestrado em Construção Civil) – Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012. Disponível em:< [www.btdt.ufscar.br](http://www.btdt.ufscar.br) >. Acesso em:21 mai. 2018.

SPERNAU, Wilson. **Apostila de Pontes**. Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC – Florianópolis/SC. Centro Tecnológico, Departamento de Engenharia Civil. Disciplina ECV 5260 – Pontes – Notas de Aula. 2012. Disponível em <[www.scribd.com](http://www.scribd.com)>. Acesso em: 24 abr. 2018.

STUCCHI, F.R. **Pontes e grandes estruturas**, 2006. Notas de aula. Disponível em < <http://www.ebah.com.br> >. Acesso em: 1 mai. 2018.

SURANA, C.S.; AGRAWAL, R. **Grillage analogy in bridge deck analysis**, New Delhi: Narosa Publishing House, 1998. Disponível em <[www.scribd.com](http://www.scribd.com)>. Acesso em: 1 mai. 2018.