

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO

ANÁLISE DE MODELOS DE ESTOQUE INCLUINDO PERDA

DARIO JOSÉ ALOISE

CAMPINA GRANDE, Pb, JUNHO DE 1983.

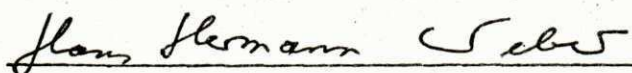
ANÁLISE DE MODELOS DE ESTOQUE INCLUINDO PERDA.

DARIO JOSÉ ALOISE

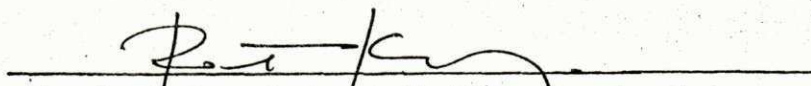
Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas - Opção Pesquisa Operacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia de Sistemas.

Aprovado por:

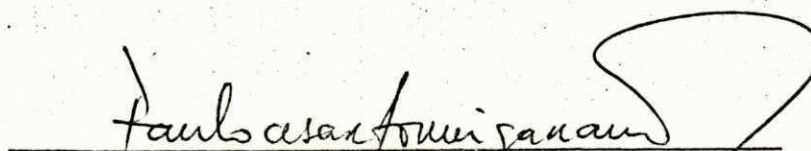
COMISSÃO EXAMINADORA



Prof. Ph.D. Hans Hermann Weber  
Presidente



Prof. M.Sc. Robert Kalley C. de Menezes  
Examinador



Prof. Ph.D. Paulo Cesar Formiga Ramos  
Examinador

À minha esposa Valmira e nosso  
filho Daniel.

A meus pais, Dêcio e Lucila, que  
sempre me orientaram para o  
estudo e para a vida.

## AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal do Rio Grande do Norte, pela oportunidade oferecida.

Ao professor Hans Hermann Weber, pela paciente e sãbia orientação.

Aos demais professores da UFPb, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

A Assis Carlos Fernandes, pela tradução dos artigos em Alemão.

Ao casal Auciomar e Nilda M.C. de Teixeira, pelas valiosas sugestões e colaboração amiga.

Ao colega Carlos Augusto C. de Lima, por proveitosas conversas sobre o assunto desta Tese.



## R E S U M O

O presente trabalho é um estudo detalhado sobre a inclusão de Perda em Modelos de Estoque Determinísticos. Mostramos nele a falha da formulação dos primeiros Modelos sobre este assunto e apresentamos o Modelo Exato de WEBER, ampliando as discussões para o caso de uma taxa de abastecimento que também pode ser finita. Como resultado mostramos a excelente proximidade dos Modelos iniciais e as complicadas expressões matemáticas resultantes do Modelo Exato que em algumas situações não o tornam preferível. Apresentamos os resultados através de exemplos simulados e testados no computador.

## A B S T R A C T

This work is a detailed study about the inclusion of Waste in Deterministic Inventory Models. We show the failure in the formulation of the first Models about the subject and present the Exact Model of Weber, opening the discussions for the case where the rate of replenishment can also be finite. As a result, we show the excellent approximation of the initial Models and the complicated mathematical expressions resulting from the Exact Model, which makes it not preferable in some situations. These results are shown through simulated and tested examples in the computer.

# S U M Á R I O

	Página
INTRODUÇÃO .....	1
1 - O MODELO CLÁSSICO DO LOTE ECONÔMICO .....	3
1.1 - <u>Formulação do Modelo</u> .....	4
1.1.1 - O Modelo Clássico e a fórmula de Wilson ....	4
1.1.2 - O Modelo Clássico com uma taxa de abasteci- cimento finita .....	10
1.2 - <u>Discussão geral do Modelo</u> .....	14
1.2.1 - Interpretações e resultados de otimização ..	14
1.2.2 - Análise de sensibilidade em relação ao lote econômico .....	16
1.2.3 - Análise de sensibilidade em relação aos pa- râmetros .....	24
2 - O MODELO APROXIMADO COM PERDA .....	31
2.1 - <u>Hipóteses básicas</u> .....	31
2.2 - <u>Formulação do Modelo</u> .....	32
2.3 - <u>Discussão geral do Modelo</u> .....	35
2.3.1 - A falha do Modelo .....	36
2.3.2 - Caracterização do Modelo como uma aproxi- mação .....	37
2.3.3 - Análise de sensibilidade em relação ao lote econômico .....	38
2.3.4 - Análise de sensibilidade em relação aos pa- râmetros .....	43

3 - O MODELO EXATO COM PERDA .....	50
3.1 - O <u>Modelo de WEBER</u> .....	50
3.1.1 - Alguns resultados adicionais .....	56
3.2 - <u>Extensão com</u> $\beta \leq \rho < \infty$ .....	58
CONCLUSÕES E OBSERVAÇÕES .....	65
BIBLIOGRAFIA .....	68
APÊNDICE A .....	69
APÊNDICE B .....	78
APÊNDICE C .....	95

## I N T R O D U Ç Ã O

Em várias situações práticas, uma certa quantidade de Perda é experimentada nos itens estocados, por causa de deteriorização, evaporação, desaparecimento, etc. Neste caso o Modelo Clássico de Wilson não é eficaz. HENN & KUNZ ([3], 1968), PACK ([7], 1963) e VECERNIK ([9], 1970) desenvolveram Modelos determinísticos com Perda e taxa de abastecimento infinita, que a princípio considerados *exatos*, constituíram uma ferramenta inicial. Estes Modelos, embora diferentemente formulados, forneceram o mesmo resultado. Posteriormente, WEBER ([10], 1972) apresentou a formulação exata para o problema do lote econômico com Perda e taxa de abastecimento infinita. A solução exata, entretanto, tem uma expressão matemática complicada a qual dificulta a análise de sensibilidade do Modelo e torna dispendiosa a aplicação quando se tem uma taxa de abastecimento finita. Assim, procuramos neste trabalho dar uma visão geral sobre a inclusão da Perda em Modelos de Estoque, mostrando que o Modelo inicial de Vecernik, conseqüentemente dos outros autores, constitui na verdade um Modelo Aproximado e mais simples com resultados tão bons, que se torna na maioria das vezes preferível de ser usado. Vale salientar, entretanto, que não foi possível fazermos aqui a análise de sensibilidade do Modelo Exato o que determinaria até quando o Modelo de Vecernik serve como boa aproximação. Mas, extendemos estes Modelos para o caso mais geral de uma taxa de abastecimento que pode ser finita, o que de certo modo completa, senão totalmente a análise destes Modelos, mas pelo menos a ponto de indicar quando usá-los.



Até agora, a literatura existente para Modelos de Estoque com consideração de Perda é bastante escassa. Recentes pesquisas sobre o caso estocástico estão sendo desenvolvidas (veja por exemplo, GRAVES [1], 1982).

Este trabalho é organizado como segue: no capítulo 1, apresentamos o Modelo Clássico do Lote Econômico *sem* Perda, por entendermos que se trata de um Modelo básico a todos os outros. Introduzimos a análise de sensibilidade em relação ao lote ótimo quando a taxa de abastecimento é finita, abordagem ainda não existente na literatura. Faz-se também a análise de sensibilidade em relação aos parâmetros e discute-se a qualidade do Modelo. No capítulo 2, desenvolvemos o Modelo Aproximado *com* Perda de forma mais abrangente com possibilidade de taxa de abastecimento finita. Identificamos a falha deste Modelo e mostramos que se trata de uma extensão do Modelo Clássico, e de fato, apenas uma aproximação do problema do Lote com Perda. A análise de sensibilidade é realizada para o caso de uma taxa de abastecimento infinita. No último capítulo, apresentamos o Modelo Exato de WEBER e realizamos a extensão para uma taxa de abastecimento finita. Uma rápida comparação analítica é feita com os outros Modelos e alguns resultados numéricos são comparados e discutidos.

## 1 - O MODELO CLÁSSICO DO LOTE ECONÔMICO

Modelos de Lote Econômico, para um item, referem-se de um modo geral, a um sistema de produção (compra) e estocagem, onde o item é produzido (ou comprado) em lote e então armazenado para posterior utilização, sendo que, ao findar o estoque um novo lote é repostado. O ciclo inteiro descrito é então repetido tantas vezes quanto seja necessário.

O primeiro resultado notável para este problema originou-se da fórmula CLÁSSICA da raiz quadrada ou "fórmula de Wilson", e data por volta de 1915. O Modelo de Wilson foi embrionário e tem tido numerosas extensões, conforme HADLEY & WHITIN [ 2 ] .

As suposições básicas comuns nestes Modelos são:

- a) Certeza sobre todos os dados;
- b) Mesma demanda para cada unidade de tempo;
- c) Custos de fabricação (compra) e estocagem, por unidade, fixos durante todo o período de planejamento;
- d) Custos de déficits infinitos para a demanda não satisfeita (ou: toda demanda é sempre satisfeita);
- e) Abastecimento uniforme de um lote de cada vez;
- f) Não perecibilidade do item;
- g) Minimização do custo total do período total.

Como consequência destes fatos o Cálculo Diferencial pode ser usado como instrumento de otimização.

## 1.1 - Formulação do Modelo

Faremos primeiro a formulação completa do Modelo Clássico com uma taxa de abastecimento instantânea por representar uma base para todos os Modelos de Estoque, e posteriormente, a formulação deste Modelo com uma taxa de abastecimento finita para que o nosso estudo possa também ser dirigido às aplicações industriais de fabricação e estocagem onde esta situação mais se assemelha.

### 1.1.1 - O Modelo Clássico e a fórmula de Wilson

Admitindo as suposições antes mencionadas e uma taxa de abastecimento instantânea, a formulação do Modelo Clássico para um sistema de produção e estocagem, para um item, pode ser colocada da maneira como se segue; sejam:

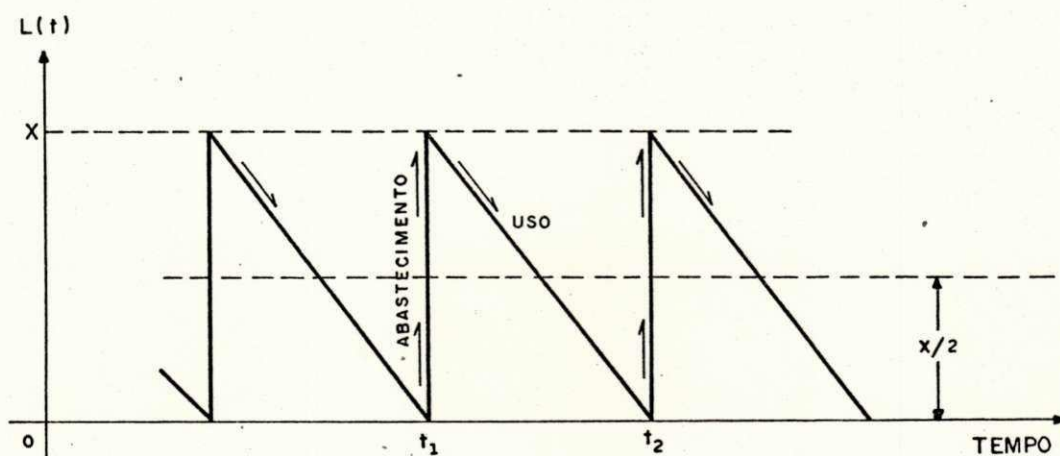
- $x$  a quantidade de um lote
- $T$  o período para o qual a política ótima será estabelecida <sup>(1)</sup>
- $\beta$  a demanda do período
- $L(t)$  o estoque no tempo  $t$ ,  $0 \leq t \leq T$
- $K$  o custo total no período
- $k_f$  o custo fixo de preparação das máquinas para fabricar um lote, "set-up cost"
- $k_e$  o custo de estocagem para o período de uma unidade do item
- $k_p$  o custo de produção por unidade do item.

---

1 - Consideraremos, sem perda de generalidade, que o prazo de tempo do período é um, por exemplo, 1 ano, etc.



A hipótese de que o material produzido chega ao estoque em lote numa taxa instantânea e sua retirada é para cada unidade de tempo a mesma, faz com que os níveis de estoque apresentem o perfil da Figura 1. Obviamente, a entrada de um lote caso o estoque seja maior que zero, aumenta o custo  $K$  e, conseqüentemente não pode ser o ótimo. Isso nos faz provar que cada lote deve entrar quando o estoque for zero.



- FIG. 1 -

Sabendo-se que nenhum abastecimento ocorre no intervalo de tempo  $t_1 < t < t_2$ , segue que

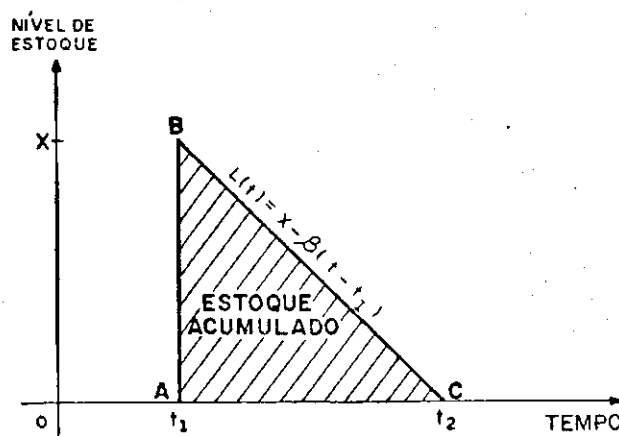
$$L(t) = x - \beta \cdot (t - t_1), \quad t_1 < t < t_2.$$

Assim o estoque acumulado no período  $t_1$  até  $t_2$  (Figura 2), é a área hachuriada sob a curva  $L(t)$  de  $t_1$  a  $t_2$ , e o estoque médio disponível será:

$$\text{Estoque médio} = \frac{(\bar{\text{área hachuriada)}}}{t_2 - t_1} \quad (2)$$

isto é:

$$\begin{aligned} \text{Estoque médio} &= \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} L(t) dt = \frac{\bar{\text{área ABC}}}{t_2 - t_1} = \\ &= \frac{(t_2 - t_1) \cdot \frac{x}{2}}{t_2 - t_1} = \frac{x}{2} . \end{aligned}$$



- FIG. 2 -

Imediatamente percebe-se que o estoque médio sobre o período  $T$  no Modelo Clássico é:

$$\bar{L}(t) = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T L(t) dt = \frac{x}{2} .$$

Com isto, o custo de manutenção do estoque sobre o período total é:

$$k_e \cdot \frac{x}{2}$$

2 - Observar em Lynwood A. JOHNSON, Operation research in production planning, scheduling and inventory control, p.19.



desde que um lote de magnitude  $x$  seja produzido em cada período parcial de comprimento  $t_2 - t_1$ .

O número de ordens de produção no período total é  $\frac{\beta}{x}$ . Assim, se cada ordem apresenta um custo de preparação de "set-up" de  $k_f$ , o custo total correspondente será

$$k_f \cdot \frac{\beta}{x}$$

Desde que  $k_p$  é o custo de produção de cada unidade do item, então

$$k_p \cdot \beta$$

é o custo de produção total sobre o período  $T$ .

Tem-se, portanto, como custo total do período, a soma desses três componentes. Ou seja:

$$K(x) = k_p \cdot \beta + k_f \cdot \frac{\beta}{x} + k_e \cdot \frac{x}{2} \quad (1)$$

e como função objetiva do Modelo:

$$\min_x \left\{ K(x) = k_p \cdot \beta + k_f \cdot \frac{\beta}{x} + k_e \cdot \frac{x}{2} \right\}$$

sujeito a:  $x > 0$ .

Para determinarmos a magnitude do lote ótimo, denotado por  $\bar{x}$ , que minimiza o custo total  $K(x)$  para o período, procedemos inicialmente diferenciando  $K$  com respeito a  $x$ , obtendo

$$\frac{dK}{dx} = \frac{d(k_p \cdot \beta + k_f \cdot \frac{\beta}{x} + k_e \cdot \frac{x}{2})}{dx} = -k_f \cdot \frac{\beta}{x^2} + \frac{k_e}{2}.$$

Por conseguinte, é necessário que

$$-k_f \cdot \frac{\beta}{x^2} + \frac{k_e}{2} = 0 \quad (2)$$

ou

$$x^2 = \frac{2 \cdot k_f \cdot \beta}{k_e}$$

ou que

$$k_e \cdot \frac{x}{2} = \frac{\beta}{x} \cdot k_f \quad (3)$$

ou ainda

$$\left( x + \sqrt{\frac{2 \cdot k_f \cdot \beta}{k_e}} \right) \cdot \left( x - \sqrt{\frac{2 \cdot k_f \cdot \beta}{k_e}} \right) = 0.$$

Sendo somente solução válida quando satisfaz  $x > 0$ , deduzimos que

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot k_f \cdot \beta}{k_e}}. \quad (4)$$

A equação anterior é também uma condição suficiente considerando-se que  $K$  é estritamente convexa para cima, pois

$$\frac{d^2K}{dx^2} = \frac{2 \cdot k_f \cdot \beta}{x^3} > 0, \quad \forall x > 0. \quad (5)$$

Substituindo  $x$  na equação (1), tem-se o custo mínimo

do Modelo:

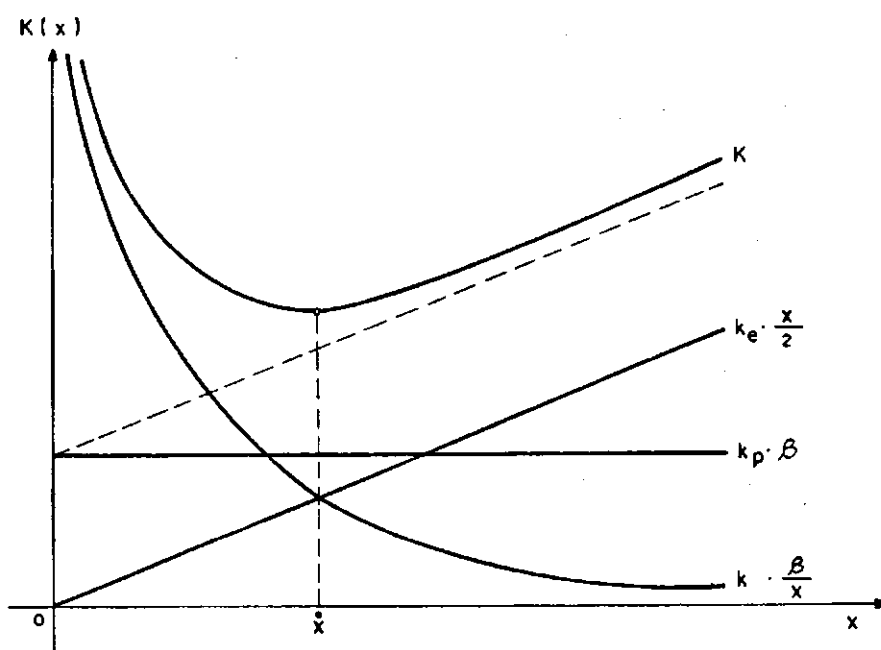
$$\begin{aligned}
 K(\bar{x}) &= k_p \cdot \beta + k_f \cdot \beta \cdot \sqrt{\frac{k_e}{2 \cdot k_f \cdot \beta}} + \frac{k_e}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k_f \cdot \beta}{k_e}} \\
 &= k_p \cdot \beta + \sqrt{\frac{1}{2} \cdot k_f \cdot \beta \cdot k_e} + \sqrt{\frac{1}{2} \cdot k_f \cdot \beta \cdot k_e} \\
 &= k_p \cdot \beta + \sqrt{2 \cdot k_f \cdot \beta \cdot k_e} \quad (6)
 \end{aligned}$$

Portanto, como é bem conhecido, a solução do Modelo Clássico é:

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_f \cdot \beta}{k_e}} \quad \cdot \quad K(\bar{x}) = k_p \cdot \beta + \sqrt{2 \cdot k_f \cdot \beta \cdot k_e} \cdot$$

O valor ótimo de  $x$  envolvendo a expressão raiz quadrada é freqüentemente referido como a fórmula clássica do lote econômico ou a fórmula de Wilson.

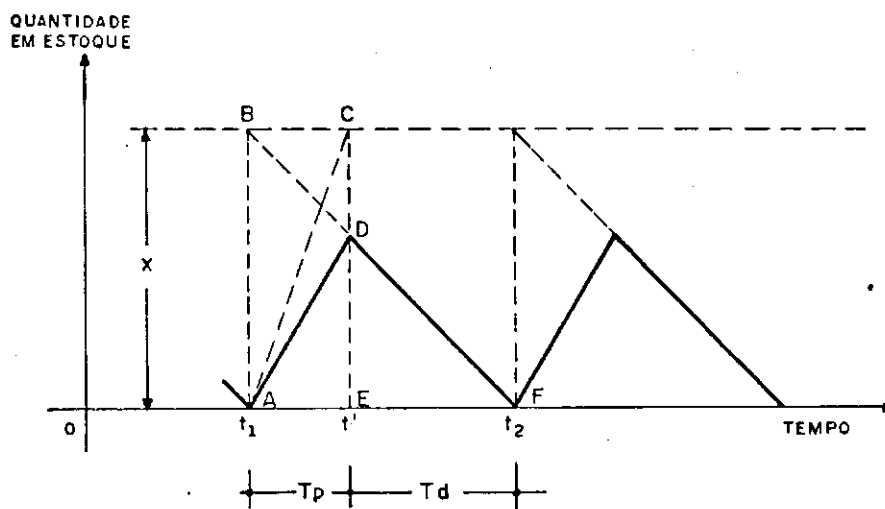
A quantidade ou lote econômico de produção (compra) que corresponde às condições em que o custo total do período é mínimo, pode ser descrita graficamente como na Figura 3:



- FIG. 3 -

### 1.1.2 - O Modelo Clássico com uma taxa de abastecimento finita

Em muitas situações de fabricação, a produção da encomenda total  $x$  se realiza dentro de um certo período de tempo e o item não é estocado de uma só vez em um só lote, mas continuamente, em parcelas, à medida que a produção se executa. Isto apresenta como resultado um quadro de estocagem semelhante ao da Figura 4.



- FIG. 4 -

Especificamente, este Modelo possui uma taxa de abastecimento finita e uniforme para todo o período de planejamento. Seja designarmos por  $p$  esta taxa. Claramente o Modelo não pode operar a menos que  $p > \beta$ . Então, o estoque médio não é mais  $\frac{x}{2}$ , como no Modelo Clássico, mas menor. Com efeito, se não existisse consumo (demanda) durante o intervalo de tempo  $[t_1, t']$  no qual o abastecimento é realizado, o estoque teria aumentado de volume ao longo da linha AC a uma taxa de  $p$ . Portanto, o tempo necessário para fabricar um lote de  $x$  unidade é:

$$T_p = \frac{x}{p}$$

que é também o tempo de abastecimento do estoque. Como existe um consumo numa taxa de  $\beta$  o estoque crescerá ao longo da linha AD numa taxa de  $\rho - \beta$ . Conclui-se daí que o nível máximo de estoque disponível é dado por:

$$x_{\text{máx}} = \overline{ED} = T_p(\rho - \beta) = x \cdot \left(1 - \frac{\beta}{\rho}\right),$$

que constitui uma fração

$$\frac{\overline{ED}}{x} = 1 - \frac{\beta}{\rho}$$

do lote produzido.

Agora, o tempo requerido para se esgotar o estoque máximo disponível no armazém é

$$T_d = \frac{x_{\text{máx}}}{\beta} = \frac{x}{\beta} \left(1 - \frac{\beta}{\rho}\right),$$

e, por isso, o tamanho de um período parcial  $(t_1, t_2)$  é  $T_p + T_d = \frac{x}{\beta}$ . Nestas circunstâncias o estoque médio em um período parcial será então igual a:

$$x_{\text{máx}} = \frac{\beta}{x} \left\{ \int_0^{T_p} (\rho - \beta)t dt + \int_0^{T_d} (x_{\text{máx}} - \beta \cdot t) dt \right\}$$

ou, mais simplesmente:

$$x_{\text{med}} = \frac{1}{T_p + T_d} \cdot \left\{ (\bar{\text{área ADE}}) + (\bar{\text{área EDF}}) \right\}$$

donde, usando a fórmula da área de um triângulo:



$$x_{\text{med}} = \frac{1}{T_p + T_d} \cdot \left\{ \frac{T_p \cdot x_{\text{m\bar{a}x}}}{2} + \frac{T_d \cdot x_{\text{m\bar{a}x}}}{2} \right\}$$

$$x_{\text{med}} = \frac{1}{T_p + T_d} \cdot \left\{ \frac{x_{\text{m\bar{a}x}}}{2} (T_p + T_d) \right\} = \frac{x}{2} \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} \right).$$

Obviamente, a quantidade m\u00e9dia no per\u00edodo total \u00e9:

$$\bar{x} = \frac{x}{2} \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} \right).$$

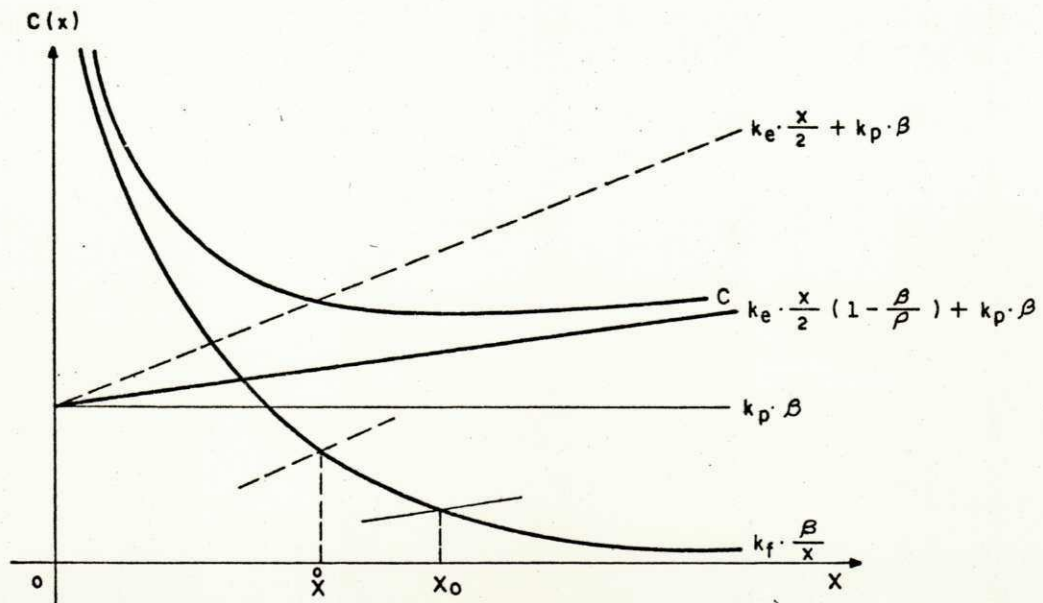
Tem-se portando, como fun\u00e7\u00e3o objetiva deste Modelo:

$$\min_x \left\{ C(x) = k_p \cdot \beta + k_f \cdot \frac{\beta}{x} + k_e \cdot \frac{x}{2} \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} \right) \right\}$$

sujeito \u00e0

$$x > 0,$$

e uma vez que  $1 - \frac{\beta}{\rho} < 1$ , pois  $\rho > \beta > 0$ , a figura representativa da equa\u00e7\u00e3o de custos \u00e9 algo semelhante a Figura 5, para um dado  $\rho$  fixado.



- FIG. 5 -

A condição necessária para o mínimo é:

$$\frac{dK}{dx} = -k_f \cdot \frac{\beta}{x^2} + \frac{k_e}{2} \cdot \left(1 - \frac{\beta}{\rho}\right) = 0$$

ou

$$k_e \cdot \frac{x}{2} \left(1 - \frac{\beta}{\rho}\right) = \frac{\beta}{x} \cdot k_f$$

donde obtemos a solução ótima

$$x_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot k_f \cdot \beta}{k_e (1 - \beta/\rho)}} \quad (7)$$

e o custo mínimo

$$C_0 = k_p \cdot \beta + \sqrt{2k_f \cdot k_e \cdot \beta} \cdot \sqrt{1 - \beta/\rho} \quad (8)$$

## 1.2 - Discussão geral do Modelo

A consistência e qualidade do Modelo serão agora des-  
tacadas.

### 1.2.1 - Interpretações e resultados de otimização

Examinando com mais detalhe a natureza do Modelo Clássico, vemos o seguinte: se os custos de estocagem ( $k_e \cdot \frac{x}{2}$ ), custos de set-up ( $k_f \cdot \frac{\beta}{x}$ ), custos de produção ( $k_p \cdot \beta$ ) e  $K$  são plotados como uma função de  $x$  no mesmo gráfico, a figura resultante, Figura 3, mostra-nos que o  $x$  que dá o mínimo é único. Com efeito,  $K$  é finita para qualquer  $0 < x^* < \infty$  com  $\lim_{x \rightarrow 0} K = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} K = +\infty$ , e diferenciável para  $x > 0$ . Portanto o  $x$  ótimo deve satisfazer (2) e daí (4). Todavia, (2) tem unicamente uma solução para  $x > 0$  e, desde que  $\frac{d^2K}{dx^2} > 0$  para todo  $x > 0$ , já foi mostrado em (5), então por Cálculo Diferencial (veja LANG [5]), (4) dá o valor de  $x$  o qual produz o mínimo absoluto, único de  $K$ .

A mesma figura mostra-nos ainda que em  $\bar{x}$  o custo total médio de estocagem e o custo total médio de set-up são iguais. De fato, isto está de acordo com a fórmula (3):

$$k_e \cdot \frac{\bar{x}}{2} = k_f \cdot \frac{\beta}{\bar{x}}$$

Portanto, no mínimo da função  $K$ , é preciso que estes custos sejam iguais. Em outras palavras, significa que a linha reta  $k_e \cdot \frac{x}{2}$  e a hipérbole  $k_f \cdot \frac{\beta}{x}$  devem se cruzar em  $x = \bar{x}$ .

Incluindo uma taxa de abastecimento finita notamos, conforme se pode ver na Figura 5, que o valor de  $x$  que dá o ótimo,  $x_0$ , é maior do que o valor de  $\bar{x}$  que resultaria de um abastecimento instantâneo. Com efeito, isto pode ser visto pela equação (7) de onde nós podemos obter que

$$x_0 = \bar{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta/\rho}} \quad (9)$$

e desde que  $1 - \beta/\rho < 1$ , então  $x_0 > \bar{x}$ .

Assim, quando uma política ótima for usada, a quantidade produzida será maior que o lote ótimo da fórmula clássica e o estoque médio para o período de planejamento será menor que  $\frac{x_0}{2}$ . Mais precisamente será:

$$\bar{x} = \frac{x_0}{2} \left(1 - \frac{\beta}{\rho}\right)$$

ou melhor

$$\bar{x} = \frac{x_0}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{\beta}{\rho}}$$

Como resultado percebe-se que quando  $\rho = \infty$ , o Modelo apresentado com uma taxa de abastecimento finita reduz-se ao Modelo Clássico (veja a Figura 4). E além disso, neste caso, o estoque médio de ambos se igualarão e as equações (7) e (8) se reduzirão às equações (4) e (6). Portanto isto mostra que o Modelo com uma taxa de abastecimento finita nada mais é que uma *extensão* e um *refinamento* do Modelo Clássico, já que é mais realista, principalmente quando se trata de produção.

## 1.2.2 - Análise de sensibilidade em relação ao lote econômico

O custo total mínimo do Modelo Clássico, pela equação (6), é:

$$K_0 = K(x^0) = k_p \cdot \beta + \sqrt{2k_e \cdot k_f \cdot \beta} .$$

Vamos comparar  $K_0$  com o custo  $K'$  quando um valor  $x'_k \neq x^0$  é usado. Para fazermos esta comparação, calculamos  $K'/K_0$  como uma função de  $x'_k/x^0$ . A razão  $K'/K_0$  é conhecida como uma *medida de sensibilidade*, MADOR [6].

Seja portanto

$$x'_k = (1 + \alpha)x^0, \quad (10)$$

sendo que  $\alpha$  deve ser maior do que  $-1$ , pois  $x^0$  não pode ser reduzido em 100%. Para efeito de simplificações na análise de sensibilidade, seja o custo de fabricação total ( $k_p \cdot \beta$ ) retirado da fórmula (1). Isto não muda a sensibilidade do Modelo, tendo em vista que este custo independe da quantidade fabricada por lote. Assim, considere-se

$$\hat{K}(x) = K(x) - k_p \cdot \beta = k_f \cdot \frac{\beta}{x} + k_e \cdot \frac{x}{2} . \quad (1a)$$

Substituindo  $x'_k$  na equação (1a), fica:

$$\hat{K}' = k_f \cdot \frac{\beta}{(1 + \alpha)x^0} + k_e \cdot \frac{(1 + \alpha)x^0}{2}$$



$$\hat{K}' = \frac{2k_f \cdot \beta + k_e \cdot (1 + \alpha)^2 \cdot \bar{x}^2}{2(1 + \alpha) \bar{x}^0} \quad (11)$$

e utilizando a expressão do lote ótimo, equação (4), em (11), resulta:

$$\hat{K}' = \frac{2k_f \cdot \beta + k_e \cdot (1 + \alpha)^2 \cdot (2k_f \cdot \beta / k_e)}{2(1 + \alpha) \cdot \sqrt{2k_f \cdot \beta / k_e}}$$

$$\hat{K}' = \frac{k_e \cdot k_f \cdot \beta (1 + (1 + \alpha)^2)}{(1 + \alpha) \cdot \sqrt{2 \cdot k_f \cdot k_e \cdot \beta}}$$

$$\hat{K}' = \sqrt{2k_f \cdot k_e \cdot \beta} \cdot \frac{(1 + (1 + \alpha)^2)}{2(1 + \alpha)}$$

$$\hat{K}' = \hat{K}_0 \left( 1 + \frac{\alpha^2}{2(1 + \alpha)} \right)$$

donde

$$\frac{\hat{K}'}{\hat{K}_0} = 1 + \frac{\alpha^2}{2(1 + \alpha)} \quad (12)$$

ou

$$\frac{\hat{K}'}{\hat{K}_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 + \alpha} + (1 + \alpha) \right).$$

Mas, de acordo com (10),  $1+\alpha = \frac{x'_k}{\frac{x}{x}}$ , logo

$$\frac{\hat{K}'}{\hat{K}_0} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{x}{x'_k} + \frac{x'_k}{\frac{x}{x}} \right). \quad (13)$$

As equações (12) e (13) expressam a medida de sensibilidade do Modelo Clássico independente dos parâmetros do Modelo.

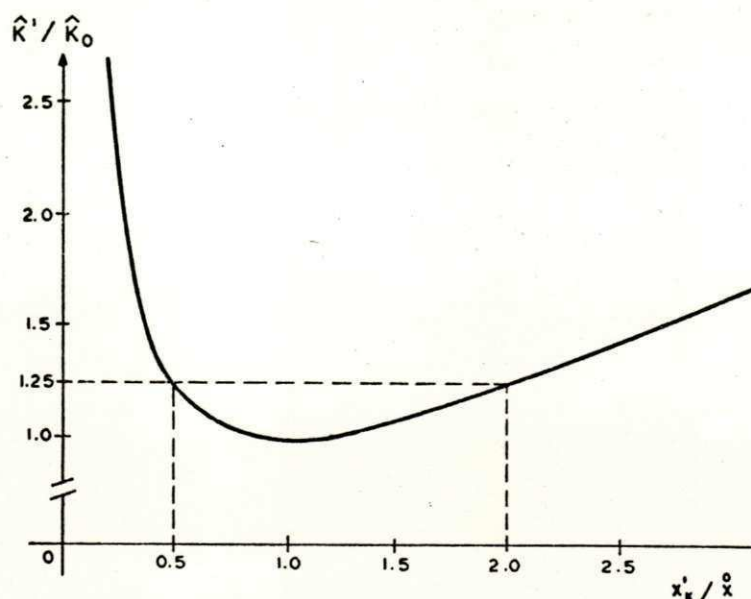
Alguns valores numéricos de  $\frac{\hat{K}'}{\hat{K}_0}$  para alguns valores de  $\frac{x'_k}{\frac{x}{x}}$  são dados na Tabela 1.

TABELA 1

SENSIBILIDADE DO MODELO CLÁSSICO DO LOTE ECONÔMICO  
VALORES DE  $\hat{K}'/\hat{K}_0$  PARA VÁRIOS  $x'_k/\frac{x}{x}$  QUANDO  $x'_k = (1+\alpha)\frac{x}{x}$ .

$\alpha$	-0,5	-0,2	-0,1	0,0	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5
$x'_k/\frac{x}{x}$	0,50	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,50	2,00	2,50
$\hat{K}'/\hat{K}_0$	1,250	1,025	1,006	1,000	1,005	1,017	1,083	1,250	1,450

Transportando estes valores de  $\frac{x'_k}{\frac{x}{x}}$  e  $\frac{\hat{K}'}{\hat{K}_0}$ , e todos os outros dados pela equação (13) para um gráfico, obtem-se a curva mostrada na Figura 6.



- FIG. 6 -

O interessante nesta curva é que na vizinhança do mínimo ela é um pouco plana, e conseqüentemente a curva do custo total, também o é. Logo nesta região o custo total é um pouco insensível a grandes variações na quantidade do lote econômico. De acordo com a Tabela 1, se por exemplo  $x'_k$  afastar-se de  $x_0$  aumentando de um fator duas vezes maior, o custo adicional proveniente do desvio da solução ótima é da ordem de 25% do custo mínimo. Portanto relativamente muito pequeno.

Quando a taxa de abastecimento é finita, já se sabe que o custo total é dado por

$$C(x) = k_f \cdot \beta / x + k_e \cdot \frac{x}{2} (1 - \beta / \rho) + k_p \cdot \beta \quad (14)$$

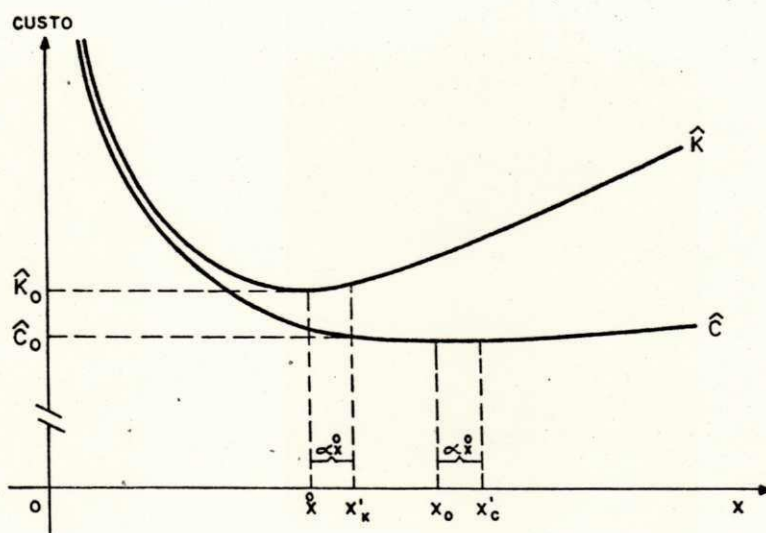
onde para efeito de sensibilidade a parcela  $k_p$  será retirada por razões já explicadas. Assim, considere-se

$$\hat{C}(x) = C(x) - k_p \cdot \beta = k_f \cdot \beta / x + k_e \cdot \frac{x}{2} (1 - \beta / \rho). \quad (14a)$$

Seja agora

$$x'_c = x_0 + \alpha \cdot \bar{x}, \quad (15)$$

pois queremos que o desvio da solução ótima nesta nova equação seja igual àquele feito na equação de custos clássica, veja a Figura 7. O propósito disto é para que possamos fazer um confronto entre as medidas de sensibilidade  $\frac{\hat{K}'}{\hat{K}_0}$  e  $\frac{\hat{C}'}{\hat{C}_0}$ .



- FIG. 7 -

Substituindo-se  $x'_c$  na equação (14a) e fazendo procedimentos de cálculo semelhante ao anterior, obtemos

$$\hat{C}' = \hat{C}_0 \cdot \left( 1 + \frac{\alpha^2 (1 - \beta/\rho)}{2(1 + \alpha \cdot \sqrt{1 - \beta/\rho})} \right)$$

donde

$$\frac{\hat{C}'}{\hat{C}_0} = 1 + \frac{\alpha^2 \cdot (1 - \beta/\rho)}{2(1 + \alpha \cdot \sqrt{1 - \beta/\rho})} \quad (16)$$



ou

$$\frac{\hat{C}'}{\hat{C}_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 + \alpha \sqrt{1 - \beta/\rho}} + (1 + \alpha \sqrt{1 - \beta/\rho}) \right).$$

Da equação (9),

$$\overset{0}{x} = x_0 \cdot \sqrt{1 - \beta/\rho}$$

e por isso substituindo este valor na equação (15) obtemos

$$x'_C = x_0 (1 + \alpha \sqrt{1 - \beta/\rho}) \cdot \frac{x'_C}{x_0} = (1 + \alpha \sqrt{1 - \beta/\rho}).$$

Logo, a medida de sensibilidade deste novo Modelo po de também ser expressa por

$$\frac{\hat{C}'}{\hat{C}_0} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{x_0}{x'_C} + \frac{x'_C}{x_0} \right) \quad (17)$$

como antes, e assim os mesmos resultados são aqui também válidos.

A tabela de sensibilidade neste caso é:

TABELA 2a

SENSIBILIDADE DO MODELO EXTENDIDO: VALORES DE  $\hat{C}'/\hat{C}_0$   
 PARA VÁRIOS  $x'_C/x_0$  QUANDO  $x'_C = (1 + \alpha \sqrt{1 - \beta/\rho})x_0 = x_0 + \alpha \overset{0}{x}$ .

$\alpha \cdot \sqrt{1 - \beta/\rho}$	-0,5	-0,2	-0,1	0,0	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5
$x'_C/x_0$	0,50	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,50	2,00	2,50
$\hat{C}'/\hat{C}_0$	1,250	1,025	1,006	1,000	1,005	1,017	1,083	1,250	1,450

Como se pode notar, esta tem os mesmos valores da Tabela 1 porém o desvio (valor de  $\alpha$ ) da solução ótima  $x_0$  em relação ao desvio de  $\hat{x}_0$ , é maior. Isto de certa maneira já mostra que a sensibilidade  $\hat{C}'/\hat{C}_0$  é menor que a sensibilidade  $\hat{K}'/\hat{K}_0$ . Analiticamente, o fato pode ser comprovado facilmente da seguinte maneira:

$$\frac{\hat{C}'}{\hat{C}_0} = 1 + \frac{\alpha^2(1 - \beta/\rho)}{2(1 + \alpha\sqrt{1 - \beta/\rho})} = \begin{cases} 1 + \frac{\alpha^2}{2(1 + \alpha)} = \frac{\hat{K}'}{\hat{K}_0} & \text{quando } \rho \rightarrow \infty \\ 1 < \frac{\hat{K}'}{\hat{K}_0} & \text{quando } \rho \rightarrow \beta \end{cases} \quad e$$

Logo,

$$\frac{\hat{C}'}{\hat{C}_0} \leq \frac{\hat{K}'}{\hat{K}_0}$$

Um fato interessante que deve ser notado nesta última relação é que, quando  $\rho = \beta$ , i.e., a taxa de abastecimento for igual a taxa de consumo,  $\hat{C}'/\hat{C}_0 = 1$ , o que significa dizer que a curva do custo total é completamente insensível às variações do lote econômico. Portanto ela é uma reta. Obviamente isto está correto, pois nesta situação  $t_p = t_2 - t_1$ , reveja a Figura 4, e então não haverá custo de set-up nem custo de estocagem pois os abastecimentos serão tomados continuamente. Por outro lado, as equações (7) e (8) concordam com isto, pois quando  $\rho = \beta$ , pela equação (7) resulta  $x_0 = \infty$ , o que significa que abastecimentos são continuados indefinidamente; pela equação (8),  $C_0 = k_p \cdot \beta$ , um valor na curva de custo total

$$C(x) = k_p \cdot \beta, \text{ quando } k_e = k_f = 0.$$

Para exemplificarmos apresentamos as Tabelas 2b e 2c com os mesmos valores de  $\alpha$  dados na Tabela 1; porém na primeira, tomamos um valor de  $\beta$  muito próximo de  $\rho$ , ou seja,  $\beta/\rho = 0,95$  e na segunda um valor de  $\beta$  muito pequeno em relação a  $\rho$ , ou seja,  $\beta/\rho = 0,05$ . Como resultado observamos que na Tabela 2b a sensibilidade do Modelo Extendido é quase nenhuma, enquanto que na Tabela 2c, a sensibilidade é quase a mesma do Modelo de Wilson (Tabela 1). Estes resultados endossam as nossas afirmações prévias.

TABELA 2b

SENSIBILIDADE DO MODELO EXTENDIDO: VALORES DE  $\hat{C}'/\hat{C}_0$   
 PARA VÁRIOS  $x'_C/x_0$  QUANDO  $x'_C = (1+\alpha \cdot \sqrt{1-\beta/\rho})x_0$  E  
 $\beta/\rho = 0,95$

$\alpha$	-0,5	-0,2	-0,1	0,0	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5
$x'_C/x_0$	0,888	0,955	0,977	1,000	1,022	1,045	1,112	1,224	1,335
$\hat{C}'/\hat{C}_0$	1,007	1,001	1,000	1,000	1,000	1,001	1,006	1,020	1,042

TABELA 2c

SENSIBILIDADE DO MODELO EXTENDIDO: VALORES DE  $\hat{C}'/\hat{C}_0$   
 PARA VÁRIOS  $x'_C/x_0$  QUANDO  $x'_C = (1+\alpha \cdot \sqrt{1-\beta/\rho})x_0$  E  
 $\beta/\rho = 0,05$

$\alpha$	-0,5	-0,2	-0,1	0,0	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5
$x'_C/x_0$	0,513	0,805	0,903	1,000	1,097	1,195	1,487	1,975	2,462
$\hat{C}'/\hat{C}_0$	1,232	1,024	1,005	1,000	1,004	1,016	1,080	1,241	1,434

A seguir, por causa do volume do trabalho, apresentaremos a sensibilidade, em relação aos parâmetros, somente para o caso quando temos um abastecimento *instantâneo*.

### 1.2.3 - Análise de Sensibilidade em relação aos Parâmetros

As circunstâncias que levam ao desvio do lote econômico são várias. Possibilidades aparecem quando os parâmetros  $k_f$ ,  $k_e$  e  $\beta$  não são medidos corretamente; o que é comum na vida prática.

Considere-se, inicialmente, um caso onde  $k_e$  e  $\beta$  sejam medidos corretamente, mas  $k_f$  não. Seja  $k'_f$  o valor incorreto expresso por

$$k'_f = (1 + \theta_1) \cdot k_f, \quad (18)$$

onde  $\theta_1 > -1$ . Utilizando-se a expressão do lote econômico, equação (4), e tomando  $k'_f$  ao invés de  $k_f$  resulta

$$x'_k = \sqrt{\frac{2 \cdot [(1 + \theta_1)k_f] \cdot \beta}{k_e}}$$

E simplificando,

$$x'_k = \sqrt{1 + \theta_1} \cdot x^0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \alpha = \sqrt{1 + \theta_1}$$

Logo,

$$x'_k/x^0 = \sqrt{1 + \theta_1}$$



ou ainda, usando a equação (18)

$$\frac{x_k^1}{x_k^0} = \sqrt{\frac{k_f^1}{k_f}} \quad (19)$$

Esta última expressão relaciona a variação do lote econômico com a variação do custo de set-up. A variação no custo total será, levando a equação (19) na equação (13).

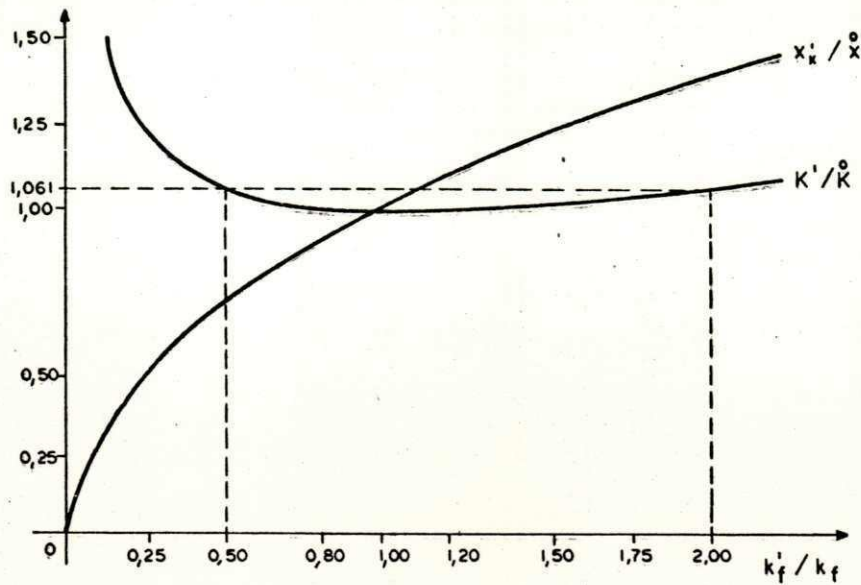
$$\frac{\hat{K}^1}{\hat{K}_0} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{k_f^1}{k_f}} + \sqrt{\frac{k_f}{k_f^1}} \right) \quad (20)$$

A Tabela 3 exemplifica para alguns valores de  $k_f^1/k_f$  a sensibilidade do Modelo Clássico:

TABELA 3  
SENSIBILIDADE DO MODELO CLÁSSICO COM  
A VARIAÇÃO DO CUSTO DE SET-UP

$k_f^1/k_f$	0,25	0,50	0,80	1,00	1,20	1,50	1,75	2,00
$x_k^1/x_k^0$	0,500	0,707	0,894	1,000	1,095	1,225	1,323	1,414
$\hat{K}^1/\hat{K}_0$	1,250	1,061	1,006	1,000	1,004	1,021	1,039	1,061

A Figura 8 exibe um gráfico com as curvas das equações (19) e (20) e com os valores da Tabela 3.



- FIG. 8 -

Consideremos agora que o custo de estocagem seja estimado por

$$k'_e = (1+\theta_2) \cdot k_e \quad (21)$$

onde  $\theta_2 > -1$ , e que os outros parâmetros do modelo sejam medidos corretamente. Temos então:

$$x'_k = \sqrt{\frac{2 \cdot k_f \cdot \beta}{(1+\theta_2) k_e}}$$

donde

$$x'_k = \frac{1}{\sqrt{1+\theta_2}} \cdot x^0 \quad (22)$$

e usando o valor de  $1+\theta_2$  da equação (21) na equação (22), obtemos

$$\frac{x'_k}{x} = \sqrt{\frac{k_e}{k'_e}} \quad (22a)$$

Daí a variação do lote econômico ser inversamente proporcional à raiz quadrada da variação do custo de estocagem. A variação do custo total, neste caso, será:

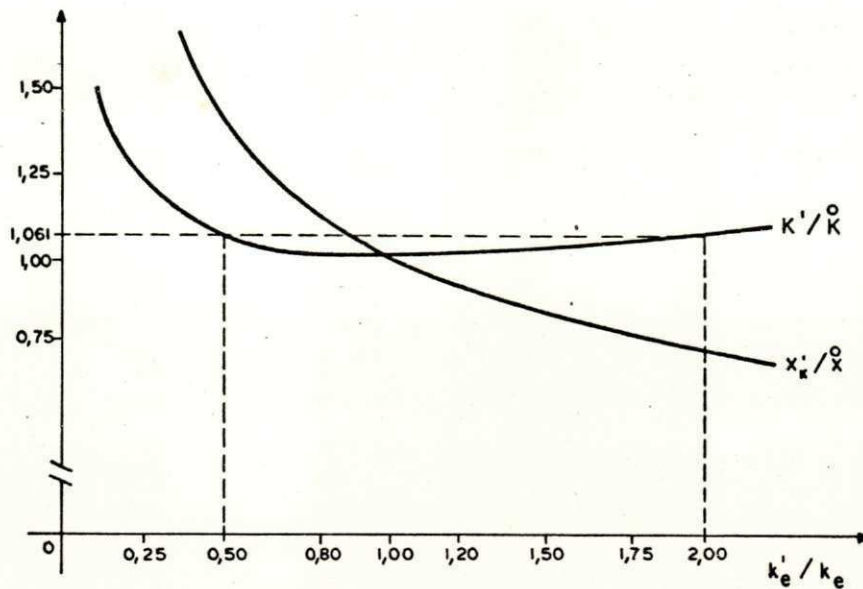
$$\frac{\hat{k}'_0}{\hat{k}_0} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{k_e}{k'_e}} + \sqrt{\frac{k'_e}{k_e}} \right)$$

A Tabela 4 exemplifica para alguns valores de  $k'_e/k_e$  a sensibilidade do Modelo Clássico:

TABELA 4  
SENSIBILIDADE DO MODELO CLÁSSICO COM  
A VARIAÇÃO DO CUSTO DE ESTOCAGEM.

$k'_e/k_e$	0,25	0,50	0,80	1,00	1,20	1,50	1,75	2,00
$x'_k/x$	2,000	1,414	1,118	1,000	0,913	0,816	0,756	0,707
$\hat{k}'_0/\hat{k}_0$	1,250	1,061	1,006	1,000	1,004	1,021	1,039	1,061

A figura para este caso, é agora:



- FIG. 9 -

Observa-se nestas duas últimas figuras que superestimacões dos parâmetros  $k_f$  e  $k_e$ , respectivamente, tem menos influência sobre o custo total que estimativas incorretas equivalentemente menores. E além disso, são influências muito pequenas. São influenciadas com consideração na magnitude do lote, mas isto não é ruim porque na prática, normalmente não se consegue estimar corretamente esses parâmetros e por isso é possível se encontrar Sistemas de controle de estoques operando com uma política diferente da ótima, sem no entanto *aparentar* qualquer dificuldade.

A variação do lote econômico, bem como, a variação do custo total quando se considera  $\beta' = (1+\theta_3)\beta$  e os outros parâmetros estimados corretamente, é idêntica a variação provocada pelo custo de "set-up", porque como pode ser visto pela equação (4)  $k_f$  e  $\beta$  são relacionados multiplicativamente.

Consideremos, finalmente, o caso onde os três parâmetros  $k_f$ ,  $k_e$  e  $\beta$  são incorretos. O lote ótimo escolhido será conforme já explicado



$$x'_k = \sqrt{\frac{(k'_f/k_f) (\beta'/\beta)}{(k'_e/k_e)}} \cdot \frac{x^0}{x}$$

A Tabela 5 apresenta a sensibilidade do Modelo Clássico quando os parâmetros são valorizados e/ou desvalorizados de 20%.

TABELA 5  
SENSIBILIDADE DO MODELO CLÁSSICO QUANDO  
ESTIMATIVAS INCORRETAS SÃO USADAS

$\beta'/\beta$	1,20	0,80	1,20	1,20	0,80	0,80	1,20	0,80
$k'_e/k_e$	1,20	1,20	0,80	1,20	0,80	1,20	0,80	0,80
$k'_f/k_f$	1,20	1,20	1,20	0,80	1,20	0,80	0,80	0,80
$x'_k/x^0$	1,095	0,894	1,341	0,894	1,095	0,730	1,095	0,894
$\hat{K}'/\hat{K}_0$	1,004	1,006	1,044	1,006	1,004	1,050	1,004	1,006

Conforme se pode ver pelos resultados apresentados, o efeito destas medidas incorretas são custos adicionais variando de (0,4 a 5%), aparentemente desprezível, mas de grande significância quando o capital envolvido for muito alto.

Podemos concluir, portanto, como resultado das análises feitas, que por causa da pouca sensibilidade dos Modelos apresentados com respeito às variações de  $k_f$ ,  $k_e$  e  $\beta$ , eles têm um grande valor para uso na realidade, pois isto nos diz que estimativas incorretas destes parâmetros com uma boa margem de tolerância, não vão influenciar muito o custo total. Sô a magnitude do lote econô-

mico, e normalmente, na vida real, não é possível determiná-los com exatidão. Além disso, o estudo aconselha que no caso da inevitabilidade de estimativas incorretas dos parâmetros, que as mesmas sejam de tal modo que o lote venha a ser fabricado de maneira maior que o lote econômico. Pois do contrário, trará um custo adicional ao Sistema mais alto do que o equivalente na situação oposta. É claro que, na prática, manter o lote mais alto incorre em prejuízos por Perda (deteriorização, desaparecimento, etc.), mas isto poderá ser minimizado pelo tratamento que será dado a estes Modelos com Perda nos próximos capítulos.



## 2 - O MODELO APROXIMADO COM PERDA

Em muitos ambientes industriais, uma certa quantidade de Perda  $\bar{e}$  experimentada nos itens estocados, talvez por conta de deterioriza $\tilde{c}$ o (p. ex., em produtos aliment $\tilde{c}$ ios), evapora $\tilde{c}$ o (p. ex., em medicamentos), desaparecimento (por furto, ou devido a roedores), etc. A quantidade de Perda depende de muitos fatores, incluindo a natureza particular do produto e as condi $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ s dos estoques. Pode a taxa de Perda, por exemplo, ser influenciada pelos custos de prote $\tilde{c}$ o, aumento do tempo de armazenagem, etc. Isso n $\tilde{a}$ o ser $\tilde{a}$  observado neste trabalho. Restringiremos nossa an $\tilde{a}$ lise ao caso onde a taxa de Perda  $\bar{e}$  *constante* por unidade do produto e para o per $\tilde{t}$ odo total.

### 2.1 - Hip $\tilde{t}$ oteses b $\tilde{a}$ sicas

Apresentamos, neste cap $\tilde{t}$ ulo, um Modelo com Perda baseado na abordagem dada por VECERNIK [9], mostrando que a proposta de Modelo indicada por ele pode ser entendida como uma exten $\tilde{s}$ o do Modelo Cl $\tilde{a}$ s $\tilde{s}$ ico e apenas uma aproxima $\tilde{c}$ o do problema "Lote com Perda". Esta apresenta $\tilde{c}$ o segue ainda o roteiro dado por WEBER em seu *paper* (3). Como distin $\tilde{c}$ o aos trabalhos de VECERNIK ou WEBER n $\tilde{a}$ o fazemos aqui a amplia $\tilde{c}$ o com  $\beta \leq \rho < +\infty$ , o que significa dizer que incluimos uma taxa de abastecimento que pode ser finita.

As hip $\tilde{t}$ oteses levantadas para o Modelo Cl $\tilde{a}$ s $\tilde{s}$ ico com uma taxa de abastecimento finita continuam v $\tilde{a}$ lidas. Portanto

---

3 - Trabalho publicado com a formula $\tilde{c}$ o exata do problema do Lote com Perda.

aquelas suposições não precisarão ser mostradas nem discutidas.

## 2.2 - Formulação do Modelo

Usando a mesma notação que antes, sejam ainda:

$y$  o número de lotes no período;

$B$  a quantidade total do produto que precisa ser fornecida para o período, incluindo a Perda; e

$\sigma$  a taxa de Perda por unidade do produto e para o período total.

Uma vez que, por hipótese, a cada ponto de tempo temos em média,  $\bar{x} = \frac{X}{2}(1 - \frac{\beta}{\rho})$  unidades do produto no armazém e como  $\sigma$  é a Perda por unidade do produto e para o período todo, segue que:

$$\sigma \cdot \bar{x} = \frac{\text{Perda}}{\left(\frac{\text{unid. do}}{\text{produto}}\right) \cdot (\text{período})} \cdot \left(\frac{\text{quantid. média}}{\text{de estoque no}} \cdot \frac{\text{período}}{\text{período}}\right) = \left(\frac{\text{Perda}}{\text{total no}} \cdot \frac{\text{período}}{\text{período}}\right)$$

Esta relação interliga a Perda com o estoque médio (4). Com isso, o fornecimento total necessário para o período todo é:

$$B = \beta + \sigma \cdot \frac{X}{2} \left(1 - \frac{\beta}{\rho}\right)$$

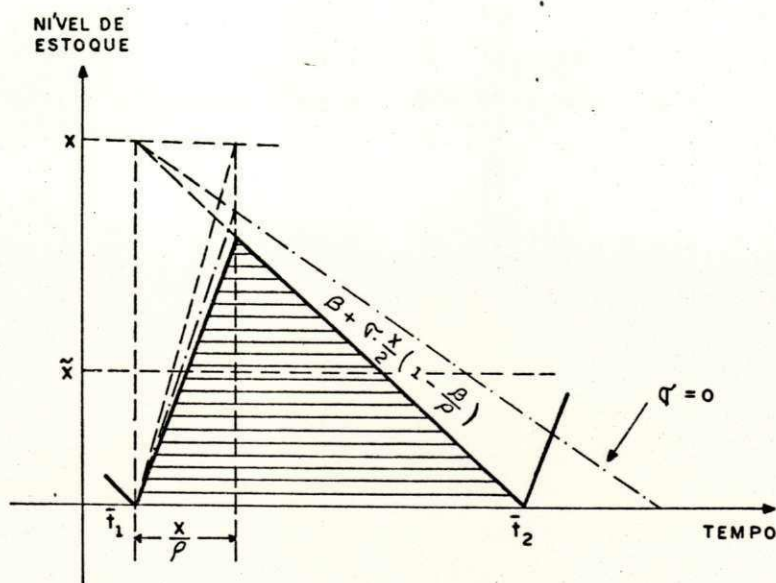
e, por conseguinte, o número total de lotes corresponde a

$$y = \frac{B}{X} = \frac{\beta}{X} + \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{\beta}{\rho}\right).$$

A Figura 10 ilustra a evolução do estoque no Modelo sobre conside-

4 - Esta é a sugestão dada por VECERNIK para a quantidade de Perda nos Modelos de Estoque de lote econômico.

ração.



- FIG. 10 -

Note-se que com a inclusão de Perda, os níveis de estoque anteriores, indicados pelas linhas interrompidas, caíram linearmente. Isto se deve ao fato da expressão de redução do estoque ser linear, como podemos verificar na fórmula que segue,

$$\left[ \beta + \sigma \cdot \frac{x}{2} \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} \right) \right] \cdot (\bar{t}_2 - \bar{t}_1)$$

Isto, no entanto, constitui uma falha da abordagem sugerida por Vercnik. Porque, como veremos na próxima sub-unidade, a linha do comportamento do nível do estoque, quando se introduz Perda no Modelo não é linear.

O estoque médio na situação atual, ou seja, após Perda, torna-se:

$$\bar{x} = \bar{x} - \sigma \cdot \bar{x} \cdot \frac{(x/\rho)}{2},$$



donde podemos observar que quando  $\rho = \infty$ ,  $\bar{x} = \frac{x}{2}$  (5). Contudo, tendo em vista que a Perda total foi calculada sobre o estoque médio  $\bar{x} = \frac{x}{2}(1 - \frac{\beta}{\rho})$  e que esta quantidade perdida foi repostada através do fornecimento  $B = \beta + \sigma \cdot \frac{x}{2}(1 - \frac{\beta}{\rho})$ , então o custo total de estocagem para o período será considerado como sendo:

$$k_e \cdot \bar{x} .$$

Com estas definições e relações, tem-se como custo total para o período:

$$F(x) = k_p \cdot B + k_f \cdot y + k_e \cdot \bar{x}$$

ou seja,

$$F(x) = k_p \cdot \left[ \beta + \sigma \cdot \frac{x}{2} \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} \right) \right] + k_f \cdot \left[ \frac{\beta}{x} + \frac{\sigma}{2} \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} \right) \right] + k_e \cdot \frac{x}{2} \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} \right) \quad (23)$$

se um lote tem a magnitude  $x$ .

Como antes, temos nesta função  $F$  uma parte que é linear em  $x$ :  $\left[ k_e + \sigma \cdot k_p \right] \cdot \frac{x}{2} \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} \right)$ . Um valor constante:  $k_p \cdot \beta + k_f \cdot \frac{\sigma}{2} \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} \right)$ , que independe, portanto, da magnitude do lote  $x$ ; e um valor  $k_f \cdot \frac{\beta}{x}$ , ou seja, uma hipérbole. Se fizermos a adição, obviamente, teremos uma curva de custo total semelhante àquela mostrada na Figura 3. Dessa forma, as mesmas interpretações geométricas e resultados de otimização do Modelo Clássico com taxa de abastecimento finita, continuam válidos também para este novo modelo.

5 - O Modelo de VECFRNIK foi baseado justamente nesta suposição. Isto é, na linearidade da curva de comportamento do estoque resultante após Perda.

A função objetiva é agora:

$$\min_x \left\{ F(x) = k_p \cdot \left[ \beta + \sigma \cdot \frac{x}{2} \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} \right) \right] + k_f \cdot \left[ \frac{\beta}{x} + \frac{\sigma}{2} \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} \right) \right] + k_e \cdot \frac{x}{2} \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} \right) \right\}$$

sujeito a:  $x > 0$ .

Esta função será mínima quando

$$\frac{dF(x)}{dx} = 0 = \frac{1}{2} \left[ k_e + \sigma \cdot k_p \right] \cdot \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} \right) - k_f \cdot \frac{\beta}{x^2}$$

Portanto, quando

$$k_f \cdot \frac{\beta}{x} = \left[ k_e + \sigma \cdot k_p \right] \cdot \frac{x}{2} \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} \right)$$

e,

$$x^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k_f \cdot \beta}{\left[ k_e + \sigma \cdot k_p \right] \cdot \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} \right)}} \quad (24)$$

O valor correspondente da função custo mínimo após simplificações e procedimentos de cálculo já conhecidos do Capítulo 1 é:

$$F(x^*) = k_p \cdot \beta + k_f \cdot \frac{\sigma}{2} \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} \right) + \sqrt{2 \cdot \left[ k_e + \sigma \cdot k_p \right] \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} \right) \cdot k_f \cdot \beta} \quad (25)$$

### 2.3 - Discussão geral do Modelo

Caracterizaremos, agora, a falha deste Modelo com Perda sugerido por Vecernik, provando que apesar das taxas de abastecimento e demanda serem constantes, entre dois abastecimentos consecutivos, a mudança no nível de estoque não é linear. A

análise de sensibilidade será também realizada aqui.

### 2.3.1 - A Falha do Modelo

Para mostrarmos que com Perda a mudança no nível de estoque não é linear, façamos a consideração seguinte:

$T$  o número de períodos parciais, p. ex., 12 meses

$\rho_t = \frac{\rho}{T}$  o fornecimento no período parcial  $t$ ,  $t=1, \dots, T$

$\beta_t = \frac{\beta}{T}$  a demanda no período parcial  $t$

$\sigma_t = \frac{\sigma}{T}$  a taxa de Perda em  $t$

$L_t$  a quantidade de estoque no início de  $t$ .

Em qualquer período parcial  $t$  durante a produção de um lote, o nível de estoque será aumentado de uma quantidade  $\rho_t$  devido ao fornecimento e *reduzido* de  $\beta_t$  e  $\sigma_t \cdot L_t$  devido a demanda e Perda, respectivamente, naquele período. Portanto,

$$L_{t+1} = L_t + \rho_t - (\beta_t + \sigma_t \cdot L_t) \quad (26)$$

se a redução do estoque provocado pela demanda realiza-se cada vez no fim de  $t$ . Isso diz que,  $L_{t+1} > L_t$  para cada  $t$  numa forma decrecente.

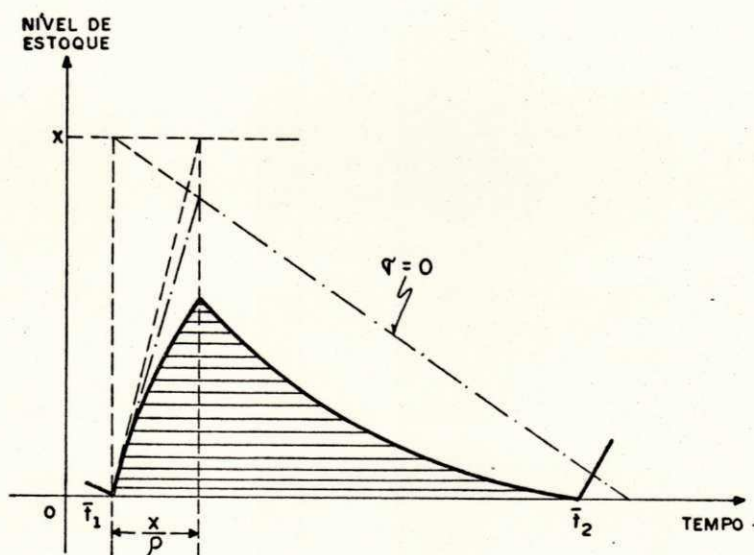
Por outro lado, a partir do ponto em que o lote já foi produzido, o nível de estoque sofrerá apenas *redução* (por demanda e Perda) e,

$$L_{t+1} = L_t - (\beta_t + \sigma_t \cdot L_t) \quad (27)$$



Isso diz que,  $L_{t+1} < L_t$  para cada  $t$  numa forma crescente.

As equações (26) e (27) mostram que a redução em cada período  $t$ , não é constante; isto é, a mudança no nível de estoque não é linear como supôs Vecernik, porque como pode ser notado na primeira equação, quando  $t$  aumenta,  $\sigma_t \cdot L_t$  também aumenta: e na segunda equação, diminui. Assim, o gráfico do comportamento do estoque com consideração de Perda tem o aspecto da Figura 11 e não o aspecto da Figura 10.



- FIG. 11 -

### 2.3.2 - Caracterização do Modelo como uma aproximação.

A justificação anterior mostrou-nos que a formulação deste Modelo com Perda é uma formulação inexata. Contudo, quando  $\sigma = 0$ , este modelo pode ser formulado ainda, sô que assim

$$B = \beta \quad e \quad y = \frac{\beta}{x}$$

o que nos diz que a equação de custo total para este Modelo com Perda torna-se:

$$F = k_p \cdot \beta + k_f \cdot \left(\frac{\beta}{x}\right) + k_e \cdot \frac{x}{2} \left(1 - \frac{\beta}{\rho}\right);$$

e o lote ótimo

$$x^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k_f \cdot \beta}{\left[k_e + \sigma \cdot k_p\right] \left(1 - \beta/\rho\right)}}$$

reduz-se a:

$$x^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k_f \cdot \beta}{k_e \left(1 - \frac{\beta}{\rho}\right)}}$$

Quando  $\rho \rightarrow \infty$  este lote ótimo também reduz-se ao de Wilson. Como se já:

$$x^* = x = \sqrt{\frac{2 \cdot k_f \cdot \beta}{k_e}}$$

Dessa forma, vê-se, facilmente, que este modelo é uma extensão do Modelo Clássico e apenas uma aproximação do problema "Lote com Perda".

### 2.3.3 - Análise de sensibilidade em relação ao lote econômico.

O custo total do Modelo Aproximado, pela equação (23), é dado por

$$F = F - \left[ k_p \cdot \beta + k_f \cdot \frac{\beta}{x} \right] = k_f \cdot \frac{\beta}{x} + \left[ k_e + \sigma \cdot k_p \right] \cdot \frac{x}{2} \left(1 - \frac{\beta}{\rho}\right). \quad (23a)$$

A solução ótima neste caso, como na equação (23),

é

$$x^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k_f \cdot \beta}{\left[ k_e + \sigma \cdot k_p \right] \cdot \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} \right)}}$$

e o correspondente custo total mínimo,

$$\hat{F}_0 = \sqrt{2 \cdot \left[ k_e + \sigma \cdot k_p \right] \cdot \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} \right) \cdot k_f \cdot \beta} \quad (25a)$$

Suponhamos, agora, que ao invés da solução ótima tivéssemos um outro lote  $x'_F$ , o qual está relacionado a  $x^*$  por

$$x'_F = x^* + \alpha \cdot x^* \quad (28)$$

como antes (veja p.20). Esta relação pode ser escrita por

$$x'_F = x^* \left( 1 + \alpha \cdot \sqrt{\left[ 1 + \sigma \cdot \frac{k_p}{k_e} \right] \cdot \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} \right)} \right), \quad (28a)$$

visto que

$$x^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k_f \cdot \beta}{k_e \left[ 1 + \sigma \cdot \frac{k_p}{k_e} \right] \cdot \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} \right)}} = \frac{0}{x^*} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[ 1 + \sigma \cdot \frac{k_p}{k_e} \right] \cdot \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} \right)}}$$

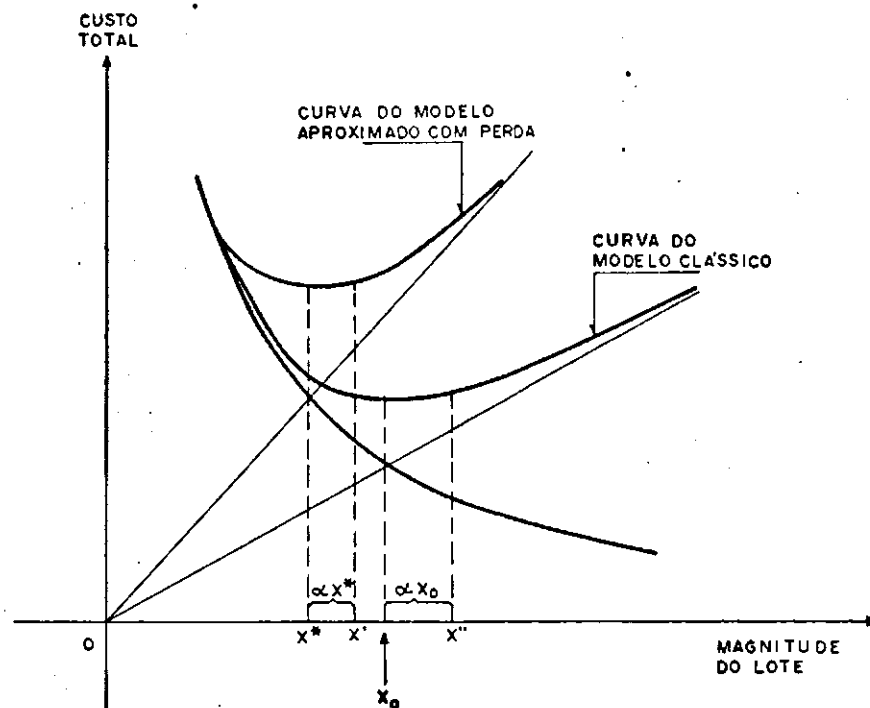
Seja designarmos por  $\hat{F}'$  o custo total do Modelo Aproximado quando  $x'_F$  é usado. Então as equações (23a) e (28) eventualmente levamos a

$$\frac{\bar{F}'}{\bar{F}_0} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 + \alpha \cdot \sqrt{\left[1 + \sigma \cdot \frac{k_p}{k_e}\right]} \cdot \left(1 - \frac{\beta}{\rho}\right)} + \left(1 + \alpha \cdot \sqrt{\left[1 + \sigma \cdot \frac{k_p}{k_e}\right]} \cdot \left(1 - \frac{\beta}{\rho}\right)\right) \right\}$$

donde, através de (28a) resulta

$$\frac{\bar{F}'}{\bar{F}_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{x'_F}{x^*} + \frac{x^*}{x'_F} \right).$$

Portanto, a mesma equação de medida de sensibilidade do Modelo Clássico com entrada finita foi encontrada (veja seção 1.3.2 e equação (17)). Contudo devemos lembrar, que embora estas equações tenham a mesma expressão, isto não significa que os modelos respectivos possuam a mesma sensibilidade, pois como pode-se ver pelas equações (7) e (24), a magnitude do lote ótimo é diferente para cada caso, o que faz com que desvios iguais em termos de proporcionalidade, não representem desvios iguais em termos de quantidade de lote. Assim (veja Fig. 12), não é difícil concluir que este Modelo Aproximado com Perda é mais sensível do que o Modelo Clássico com uma taxa de abastecimento finita. A região próxima do mínimo no Modelo atual é mais curva e diante disso, nitidamente, a sua sensibilidade é mais forte.



- FIG. 12 -

Ainda na Figura 12, podemos deduzir a relação que existe entre o lote ótimo do Modelo atual e o lote do Modelo Clássico com uma taxa de entrada finita. Pela equação (24),

$$x^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k_f \cdot \beta}{k_e (1 + \sigma \cdot k_p / k_e) (1 - \beta / \rho)}} = x_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \sigma \cdot k_p / k_e}}$$

donde

$$\frac{x^*}{x_0} = \sqrt{\frac{1}{1 + \sigma \cdot \frac{k_p}{k_e}}} < 1. \quad (29)$$

Assim, como se comprova por (29), o lote econômico do Modelo Aproximado é menor; e, será tanto mais próximo do lote clássico quanto menor for  $k_p$  em relação a  $k_e$ . Ou então, quando  $\sigma$  for muito pequeno.

A Tabela 6 mostra a sensibilidade do Modelo Apro

ximado, em relação ao lote econômico, quando se tem os mesmos valores de  $\sigma$  do Modelo de Wilson e para alguns valores específicos de  $\sigma$ ;  $k_p/k_e$  e  $\beta/\rho$ .

TABELA 6

SENSIBILIDADE DO MODELO APROXIMADO: VALORES DE  $\bar{F}'/\bar{F}_0$  PARA VÁRIOS  $x'_F/x^*$  QUANDO  $x' = x^* + \alpha \cdot \bar{x}$  E  
 $\sigma = 0,1$ ;  $k_p/k_e = 10$  e  $\beta/\rho = 0,95$ .

$\alpha$	-0,50	-0,20	-0,10	0,0	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5
$x'_F/x^*$	0,842	0,937	0,968	1,000	1,032	1,063	1,158	1,316	1,474
$\bar{F}'/\bar{F}_0$	1,015	1,002	1,001	1,000	1,000	1,002	1,011	1,038	1,076

Podemos notar através da Tabela acima que a sensibilidade do Modelo Aproximado é de fato maior do que a do seu análogo sem Perda. Os valores de  $\bar{F}'/\bar{F}_0$  aqui são sempre maiores do que os valores de  $\bar{C}'/\bar{C}_0$  na Tabela 2b. Valores de  $\sigma$  e/ou  $k_p/k_e$  muito menores do que os acima fariam a sensibilidade deste Modelo tender para a sensibilidade daquele Modelo Clássico da Tabela 2b. O programa em BASIC (6) para esta Tabela bem como para as Tabelas 1, 2b e 2c se encontra no Apêndice B.

A seguir, apresentaremos a sensibilidade do Modelo Aproximado, a nível dos parâmetros, somente para o caso quando temos um abastecimento *instantâneo*, conforme justificação no Cap I, p.24.

6 - Utilizamos o Microcomputador CP-500 da Prológica.



### 2.3.4 - Análise de sensibilidade em relação aos parâmetros.

Pode ser visto na expressão do lote ótimo com Perda, equação (24), que os parâmetros  $k_f$  e  $\beta$  estão dispostos multiplicativamente de maneira similar como estavam no lote de Wilson, e por causa disso não é necessário fazermos uma análise de sensibilidade novamente para eles.

Prosseguindo, suponhamos que todos os parâmetros sejam corretos com exceção do custo de estocagem,  $k_e$ . Seja  $k'_e$  o valor incorreto. Substituindo  $k'_e$  na equação (24) obtemos:

$$x'_F = \sqrt{\frac{2 \cdot k_f \cdot \beta}{k'_e + \sigma \cdot k_p}}$$

onde, conforme (22a) em 1.3.2 e observando-se que agora o denominador na raiz tem não só  $k_e/k'_e$  mas também  $+\sigma \cdot k_p$ :

$$\frac{x'_F}{x^*} = \sqrt{\frac{k_e + \sigma \cdot k_p}{k'_e + \sigma \cdot k_p}} = \sqrt{\frac{1 + \sigma \cdot (k_p/k_e)}{\frac{k'_e}{k_e} + \sigma \cdot \frac{k_p}{k_e}}}$$

e

$$\frac{\hat{F}'}{\hat{F}_0} = \frac{1}{2} \cdot \left( \sqrt{\frac{1 + \sigma \cdot \frac{k_p}{k_e}}{\frac{k'_e}{k_e} + \sigma \cdot \frac{k_p}{k_e}}} + \sqrt{\frac{\frac{k_e}{k_e} + \sigma \cdot \frac{k_p}{k_e}}{1 + \sigma \cdot \frac{k_p}{k_e}}} \right) \quad (30)$$

Na Tabela 6a apresentamos alguns valores numéricos de  $F'/F_0$  para vários valores de  $k'_e/k_e$ , quando  $\sigma = 0,05$  e  $k_p/k_e = 10$ . Nas Tabelas 6b e 6c semelhantes valores são dados para  $\sigma = 0,1$  e  $\sigma = 0,15$  mantendo-se como na primeira  $k_p/k_e = 10$ .

TABELA 6a

SENSIBILIDADE DO MODELO APROXIMADO COM A VARIAÇÃO  
DO CUSTO DE ESTOCAGEM. ( $\sigma = 0,05$  e  $k_p/k_e = 10$ )

$k'_e/k_e$	0,25	0,50	0,80	1,00	1,20	1,50	1,75	2,00
$x_1/x^*$	1,414	1,225	1,074	1,000	0,939	0,866	0,816	0,775
$F'/F_0$	1,061	1,021	1,003	1,000	1,002	1,010	1,021	1,033

TABELA 6b

SENSIBILIDADE DO MODELO APROXIMADO COM A VARIAÇÃO  
DO CUSTO DE ESTOCAGEM. ( $\sigma = 0,10$  e  $k_p/k_e = 10$ )

$k'_e/k_e$	0,25	0,50	0,80	1,00	1,20	1,50	1,75	2,00
$x_2/x^*$	1,265	1,155	1,054	1,000	0,935	0,894	0,853	0,816
$F'/F_0$	1,028	1,010	1,001	1,000	1,001	1,006	1,013	1,021

TABELA 6c

SENSIBILIDADE DO MODELO APROXIMADO COM A VARIAÇÃO  
DO CUSTO DE ESTOCAGEM. ( $\sigma = 0,15$  e  $k_p/k_e = 10$ )

$k'_e/k_e$	0,25	0,50	0,80	1,00	1,20	1,50	1,75	2,00
$x_3/x^*$	1,195	1,118	1,043	1,000	0,962	0,913	0,877	0,845
$F'/F_0$	1,016	1,006	1,001	1,000	1,001	1,004	1,009	1,014

Com o intuito de avaliarmos a sensibilidade do Modelo em relação ao custo de estocagem, comparamos as Tabelas 6a, 6b e 6c com a correspondente para o Modelo Clássico (Tabela 4). Não é difícil concluirmos que o Modelo Aproximado é menos sensível, em relação a este custo, do que o Modelo Clássico; os valores de  $k'/k_0$  na Tabela

4 são sempre maiores do que os seus correlatos nas Tabelas 6a, 6b e 6c. Podemos perceber ainda na comparação que quanto menor for  $\sigma$  e/ou  $k_p/k_e$  maior será a sensibilidade. De acordo com a equação (30), a sensibilidade máxima ocorre quando  $\sigma = 0$ ; sendo aí, igual a do Modelo de Wilson.

Para o custo de produção, como único parâmetro incorreto nós temos as equações:

$$\frac{x'_f}{x^*} = \sqrt{\frac{k_e + \sigma \cdot k_p}{k_e + \sigma \cdot k'_p}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \sigma \cdot (k_p/k_e)}{1 + \sigma \cdot \frac{k'_p}{k_p} \cdot \frac{k_p}{k_e}}}$$

e

$$\frac{\hat{F}'_1}{\hat{F}_0} = \frac{1}{2} \cdot \left( \sqrt{\frac{1 + \sigma \cdot (k_p/k_e)}{1 + \sigma \cdot \frac{k'_p}{k_p} \cdot \frac{k_p}{k_e}}} + \sqrt{\frac{1 + \sigma \cdot \frac{k'_p}{k_p} \cdot \frac{k_p}{k_e}}{1 + \sigma \cdot (k_p/k_e)}} \right)$$

Nas Tabelas 7a, 7b e 7c, apresentamos a sensibilidade do Modelo Aproximado, em relação ao custo de produção, para situações de  $\sigma$  e

$k_p/k_e$  idênticas àquelas do custo de estocagem que acabamos de abordar. De acordo com estas tabelas, por exemplo, se  $\sigma$  for mudado de 0,05 a 0,15; e se  $k_p = 100,00$  - mas o valor estimado foi  $k'_p = 25,00$ , isto é,  $k'_p/k_p = 0,25$  - o custo adicional como um resultado do desvio do valor correto de  $k_p$  não é superior a 5% do custo mínimo. Para os demais desvios de  $k_p$ , a percentagem de custo adicional é menor ainda. Portanto, para este parâmetro a sensibilidade é muito pequena.

TABELA 7a

SENSIBILIDADE DO MODELO APROXIMADO COM A VARIAÇÃO DO CUSTO DE PRODUÇÃO. ( $\sigma = 0,05$  e  $k_p/k_e = 10$ )

$k'_p/k_p$	0,25	0,50	0,80	1,00	1,20	1,50	1,75	2,00
$x'_F/x^*$	1,155	1,095	1,095	1,035	1,000	0,926	0,894	0,866
$F'/F_0$	1,010	1,004	1,001	1,000	1,001	1,003	1,006	1,010

TABELA 7b

SENSIBILIDADE DO MODELO APROXIMADO COM A VARIAÇÃO DO CUSTO DE PRODUÇÃO. ( $\sigma = 0,10$  e  $k_p/k_e = 10$ )

$k'_p/k_p$	0,25	0,50	0,80	1,00	1,20	1,50	1,75	2,00
$x'_F/x^*$	1,265	1,155	1,054	1,000	0,935	0,894	0,853	0,816
$F'/F_0$	1,028	1,010	1,001	1,000	1,001	1,006	1,013	1,021

TABELA 7c

SENSIBILIDADE DO MODELO APROXIMADO COM A VARIAÇÃO  
DO CUSTO DE PRODUÇÃO. ( $\sigma = 0,15$  e  $k_p/k_e = 10$ )

$k'_p/k_p$	0,25	0,50	0,80	1,00	1,20	1,50	1,75	2,00
$x'_F/x^*$	1,348	1,195	1,066	1,000	0,945	0,877	0,830	0,791
$F'/F_0$	1,045	1,016	1,002	1,000	1,002	1,009	1,017	1,028

Por fim, consideremos que todos os parâmetros sejam estimados incorretamente, com exclusão de  $\sigma$  por ser um parâmetro que é estipulado no Modelo de acordo com a natureza particular do produto, condições dos estoques, etc. Pela equação (24), a magnitude do lote escolhido com estes valores será

$$x'_F = \sqrt{\frac{2 \cdot k'_f \cdot \beta'}{k'_e + \sigma \cdot k'_p}} \quad (31)$$

Por isso o valor de  $x'_F/x^*$ , pelas equações (24) e (31), será

$$\frac{x'_F}{x^*} = \sqrt{\frac{k'_f \cdot \beta'}{k_f \cdot \beta} \cdot \frac{k_e + \sigma \cdot k_p}{k'_e + \sigma \cdot k'_p}}$$

$$\frac{x'_F}{x^*} = \sqrt{\frac{k'_f \cdot \beta'}{k_f \cdot \beta} \cdot \frac{1 + \sigma \cdot (k_p/k_e)}{k'_e/k_e + \sigma \cdot (k'_p/k_p) \cdot (k_p/k_e)}}$$

E,

$$\widehat{F}'/\widehat{F}_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{x'_F}{x^*} + \frac{x^*}{x'_F} \right)$$



Nas Tabelas 8a, 8b e 8c são dados vários valores de  $\hat{F}'/\hat{F}_0$  para algumas razões específicas dos parâmetros estimados, quando  $k_p/k_e = 10$  e  $\sigma = 0,05; 0,10$  e  $0,15$  respectivamente.

TABELA 8a

SENSIBILIDADE DO MODELO APROXIMADO. VALORES DE  $\hat{F}'/\hat{F}_0$  PARA VÁRIAS ESTIMATIVAS. ( $\sigma = 0,05$  e  $k_p/k_e = 10$ )

$\beta'/\beta$	1,20	0,80	1,20	1,20	1,20	0,80	0,80	0,80	1,20	0,80
$k'_e/k_e$	1,20	1,20	0,80	1,20	1,20	0,80	0,80	1,20	0,80	0,80
$k'_f/k_e$	1,20	1,20	1,20	0,80	1,20	0,80	1,20	0,80	0,80	0,80
$k'_p/k_p$	1,20	1,20	1,20	1,20	0,80	1,20	0,80	0,80	0,80	0,80
$x'_F/x^*$	1,095	0,894	1,242	0,894	1,162	0,828	1,095	0,775	1,095	0,894
$\hat{F}'/\hat{F}_0$	1,004	1,006	1,024	1,006	1,011	1,018	1,004	1,033	1,004	1,006

TABELA 8b

SENSIBILIDADE DE MODELO APROXIMADO. VALORES DE  $\hat{F}'/\hat{F}_0$  PARA VÁRIAS ESTIMATIVAS. ( $\sigma = 0,1$  e  $k_p/k_e = 10$ )

$\beta'/\beta$	1,20	0,80	1,20	1,20	1,20	0,80	0,80	0,80	1,20	0,80
$k'_e/k_e$	1,20	1,20	0,80	1,20	1,20	0,80	0,80	1,20	0,80	0,80
$k'_f/k_f$	1,20	1,20	1,20	0,80	1,20	0,80	1,20	0,80	0,80	0,80
$k'_p/k_p$	1,20	1,20	1,20	1,20	0,80	1,20	0,80	0,80	0,80	0,80
$x'_F/x^*$	1,095	0,894	1,200	0,894	1,200	0,800	1,095	0,800	1,095	0,894
$\hat{F}'/\hat{F}_0$	1,004	1,006	1,017	1,006	1,017	1,025	1,004	1,025	1,004	1,006

TABELA 8c

SENSIBILIDADE DO MODELO APROXIMADO. VALORES DE  
 $\hat{F}'/\hat{F}_0$  PARA VÁRIAS ESTIMATIVAS. ( $\sigma = 0,15$  e  $k_p/k_e = 10$ )

$\beta'/\beta$	1,20	0,80	1,20	1,20	1,20	0,80	0,80	0,80	1,20	0,80
$k'_e/k_e$	1,20	1,20	0,80	1,20	1,20	0,80	0,80	1,20	0,80	0,80
$k'_f/k_f$	1,20	1,20	1,20	0,80	1,20	0,80	1,20	0,80	0,80	0,80
$k'_p/k_p$	1,20	1,20	1,20	1,20	0,80	1,20	0,80	0,80	0,80	0,80
$x'_F/x^*$	1,095	0,894	1,177	0,894	1,225	0,784	1,095	0,816	1,095	0,894
$\hat{F}'/\hat{F}_0$	1,004	1,006	1,013	1,006	1,021	1,030	1,004	1,021	1,004	1,006

As Tabelas 8a, 8b e 8c usam estimativas dos parâmetros os quais são  $\pm 20\%$  dos valores verdadeiros para  $k_p = 10k_e$ . Algo semelhante fizemos na Tabela 5 (Modelo Clássico), o que nos permite fazer uma comparação entre elas. Os resultados para  $\hat{F}'/\hat{F}_0$  nos indicam que a sensibilidade dos Modelos respectivos é quase a mesma. O programa em BASIC para estas Tabelas bem como para as Tabelas 3, 4, 5; 6, 7(a); 6, 7 (b) e 6, 7 (c) se encontra no Apêndice B.

### 3 - O MODELO EXATO COM PERDA

A introdução de Perda, como foi visto no capítulo anterior, não é só uma extensão do Modelo Clássico muito simples como pretendia Vecernik et. al.; mas, ao contrário, é algo mais elevado.

Neste capítulo iremos inicialmente analisar o Modelo Exato com Perda desenvolvido por WEBER (7), em 1971; e depois, procuraremos ampliar este Modelo para o caso de uma taxa de abastecimento finita.

#### 3.1 - O Modelo de WEBER

No que segue, o sistema de estoque será admitido operar sob o mesmo conjunto de suposições do Modelo Aproximado. Porém, seja aqui o tempo considerado novamente como uma variável contínua e para facilitar a dedução tomemos o período  $T$  igual a 1, de modo que  $\beta$  é também a taxa de demanda constante.

Sejam:

$L(t)$  a quantidade de estoque para o ponto de tempo  $t$ ,

$$0 \leq t \leq 1; \text{ e}$$

$$d = \frac{1}{y} \text{ a duração de um lote no estoque.}$$

---

7 - Orientador deste trabalho e já citado antes.

Então a quantidade acumulada de estoque durante a duração do estoque de um lote é conhecida como:

$$L_d = \int_0^d L(t) dt.$$

Agora a variação de quantidade de estoque durante o tempo de duração  $d$  (v. Figura 14) é:

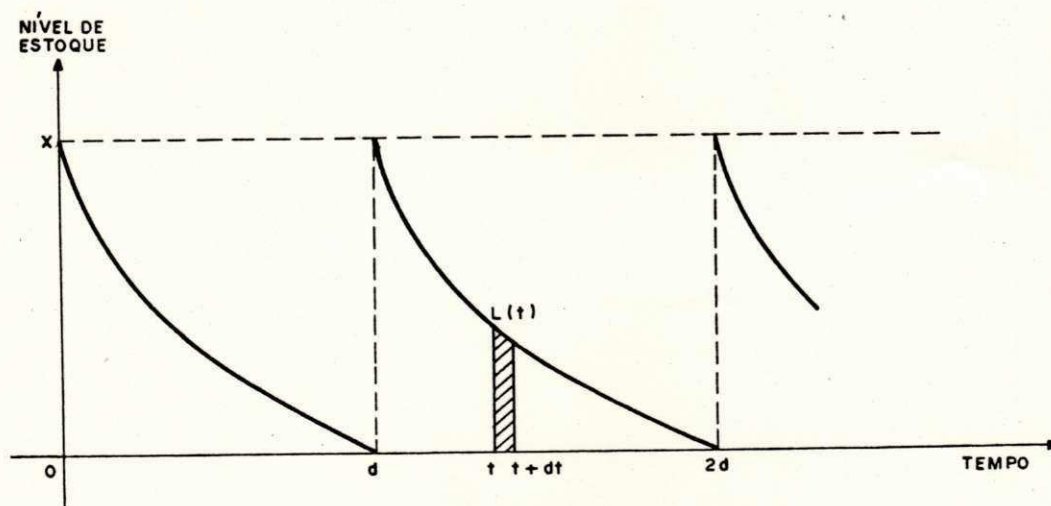
$$\frac{L(t + dt) - L(t)}{dt} = \beta - \sigma \cdot L(t),$$

ou melhor, tomando-se o limite quando  $dt \rightarrow 0$ ,

$$\frac{dL}{dt} = -\beta - \sigma \cdot L(t); \quad (30)$$

e por isso, vale

$$L(t) = -\frac{1}{\sigma} \left( \frac{dL}{dt} + \beta \right). \quad (31)$$



- FIG. 14 -



Com esta expressão para  $L(t)$ , obtem-se para a integral supracitada:

$$L_d = -\frac{1}{\sigma} \int_0^d \left( \beta + \frac{dL}{dt} \right) dt = -\frac{\beta d}{\sigma} + \frac{L(t=0)}{\sigma} - \frac{L(t=d)}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}(x - \beta d). \quad (32)$$

Por isso, usando-se  $d = \frac{1}{y}$ , a quantidade média de estoque durante o período total  $\bar{e}$

$$L = L_d \cdot y = \frac{1}{\sigma} \cdot (xy - \beta). \quad (33)$$

A equação de custo total, como já se sabe  $\bar{e}$ :

$$G = k_p \cdot \underbrace{\left( \text{fornecimento total} \right)}_B + k_f \cdot \underbrace{\left( \text{nº de lotes} \right)}_y + k_e \cdot \underbrace{\left( \text{estoque médio} \right)}_L$$

e por isso, utilizando-se a equação (33), consegue-se como equação do custo total:

$$G = k_p \cdot (\beta + (yx - \beta)) + k_f \cdot y + k_e \cdot \left( \frac{1}{\sigma} \cdot (xy - \beta) \right) \quad (34)$$

ou também,

$$\hat{G} = k_p \cdot (xy - \beta) + k_f \cdot y + \frac{k_e}{\sigma} \cdot (xy - \beta). \quad (34a)$$

O primeiro termo em  $\hat{G}$  dá o custo de Perda total no período. Tomando-se por base  $d = \frac{1}{y}$  obtemos para  $\hat{G}$



$$\hat{G} = \frac{k_f}{d} + \left( \frac{k_e}{\sigma} + k_p \right) \left( \frac{x}{d} - \beta \right). \quad (34b)$$

Por causa que:

$$xy > \beta,$$

ou seja, o fornecimento ser maior que a demanda pois existe Perda, temos a relação

$$\frac{\beta}{x} < y.$$

Por esta razão, não podemos fazer um tipo de substituição para a equação (34a) como fizemos no Modelo Clássico. Lá nós tínhamos a substituição

$$k_f \cdot \frac{\beta}{x} \text{ por } k_f \cdot y$$

o que não é mais possível aqui.

A fim de eliminarmos a variável  $x$  em (34b) (atende-se, nós podemos eliminar a variável  $d$  ou  $x$ , porque vale  $d = f(x)$  ou  $x = g(d)$ ), empregamos a solução geral da equação diferencial linear

$$\frac{dL}{dt} + \sigma \cdot L(t) = -\beta,$$

obtida de (30).

Isto é (veja Apêndice A, seção A.1):

$$L(t) = \left(x + \frac{\beta}{\sigma}\right) e^{-\sigma t} - \frac{\beta}{\sigma}, \quad 0 < t < d$$

para  $L(t = 0) = x$  como condição inicial. Esta equação então especifica o nível de estoque do produto após demanda e perda num instante  $t$  durante o tempo de duração de um lote no estoque. Este nível é ditado por uma *função exponencial negativa* quando comparado ao comportamento linear dos níveis dos Modelos anteriores.

Agora, por causa de (32), temos:

$$\int_0^d L(t) dt = \int_0^d \left[ \left(x + \frac{\beta}{\sigma}\right) e^{-\sigma t} - \frac{\beta}{\sigma} \right] dt = \frac{1}{\sigma}(x - \beta d).$$

Disto obtem-se após a integração e desenvolvimento mostrados no Apêndice A, seção A.2:

$$x = \frac{\beta}{\sigma}(e^{\sigma d} - 1) \quad (35)$$

Então podemos escrever para a equação (34b):

$$\hat{G} = \frac{k_f}{d} + \left(\frac{k_e}{\sigma} + k_p\right) \left(\frac{\beta(e^{\sigma d} - 1)}{\sigma d} - \beta\right) = \frac{k_f}{d} + \left(\frac{\beta(k_e + \sigma k_p)}{\sigma^2}\right) \left(\frac{e^{\sigma d} - 1}{d} - \sigma\right)$$

Para determinarmos o valor ótimo  $\hat{d}$  de  $d$ , fazemos

$$\frac{\partial \hat{G}}{\partial d} = 0 = \frac{k_f}{d^2} + \left(\frac{\beta(k_e + \sigma k_p)}{\sigma^2}\right) \left(\frac{\sigma d e^{\sigma d} - e^{\sigma d} + 1}{d^2}\right)$$

Daí obtemos:

$$1 - \frac{\sigma^2 k_f}{\beta(k_e + \sigma k_p)} = e^{\sigma d}(1 - \sigma d) \quad (36)$$

Analiticamente, o valor  $\hat{d}$  pode ser determinado tomando-se a equação (36). Dela obtemos

$$\ln D = \sigma d + \ln(1 - \sigma d) \quad \text{com } D = 1 - \frac{\sigma^2 k_f}{\beta(k_e + \sigma k_p)} \quad (37)$$

Geralmente vale-se:

$$0 < D < 1$$

porque, normalmente,  $\sigma$  é pequeno e  $\beta$  é grande ( $D$  só é igual a 1 para  $\sigma = 0$ , o que não é o caso deste Modelo).

Temos também

$$0 < \sigma d < 1$$

visto que  $0 < \sigma < 1$  e  $0 < d < 1$ . Por isso (veja Apêndice A, seção A.3):

$$\frac{\partial^2 \hat{G}}{\partial d^2} > 0$$

no ponto em que  $\frac{\partial \hat{G}}{\partial d} = 0$ , ou seja,  $\hat{G}$  tem um mínimo neste ponto. Significa portanto dizer que a equação (36), fornece o mínimo da função dos custos.

Dado que  $\ln D < 0$ , teremos como desenvolvimento em série para  $\ln(1 - \sigma d)$ :

$$\ln(1 - \sigma d) = -\sigma d - \frac{(\sigma d)^2}{2} - \frac{(\sigma d)^3}{3} - \dots$$

Devido ainda  $0 < \sigma d < 1$ , podemos truncar esta série após o segundo termo porquanto a contribuição dos demais ser quase nenhuma.

Dessa maneira, usando-se o desenvolvimento  $\ln(1 - \sigma d) = -\sigma d - (\sigma d)^2/2$  em (36), obtem-se no final uma aproximação satisfatória para o valor ótimo de  $d$ :

$$\hat{d} = \sqrt{-\frac{2}{\sigma^2} \ln D}.$$

Substituindo este valor em (35), encontra-se o lote ótimo:

$$\hat{x} = \frac{\beta}{\sigma} (e^{\sqrt{-2 \ln D}} - 1) \quad (38)$$

com

$$\ln D = \ln \left( 1 - \frac{\sigma^2 k_f}{\beta(k_e + \sigma k_p)} \right).$$

### 3.1.1 - Alguns resultados adicionais

A equação (36) pode também ser escrita como:

$$1 - \sigma d = \left\{ 1 - \frac{\sigma^2 k_f}{\beta(k_e + \sigma k_p)} \right\} \cdot e^{-\sigma d} \quad (36a)$$

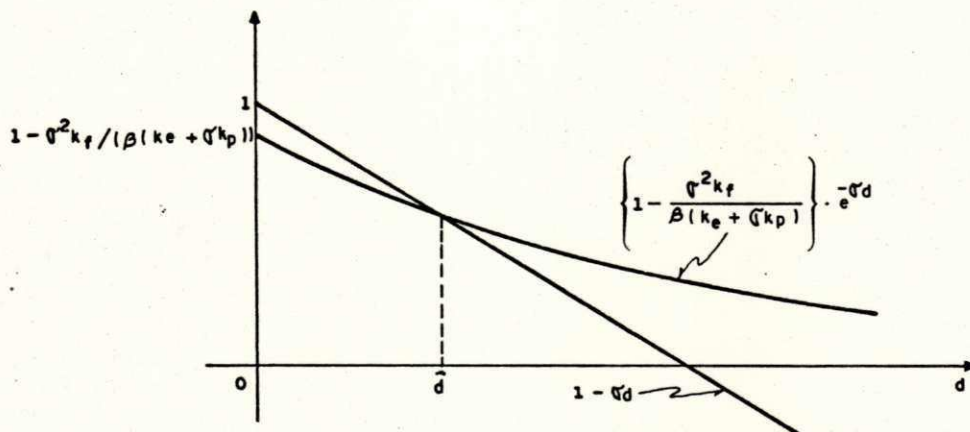
Um procedimento gráfico para resolver esta equação é mostrado na Figura 15. A equação tem uma única raiz  $\hat{d}$  determinada pela interseção da reta

$$1 - \sigma d$$



com a curva

$$\left\{ 1 - \frac{\sigma^2 k_f}{\beta(k_e + \sigma k_p)} \right\} \cdot e^{-\sigma d}$$



- FIG. 15 -

Dessa forma caso seja necessário uma melhor precisão usar a fórmula do lote ótimo (equação (38)), podemos usar um método numérico (por exemplo, o Método de Newton) para resolver a equação (36a), e a partir daí, substituir em (35) o valor  $\hat{d}$  encontrado obtendo-se o lote ótimo  $\hat{x}$ .

Assumindo-se  $\sigma d$  muito pequeno, podemos tomar para  $e^{-\sigma d} - 1$ :

$$e^{-\sigma d} - 1 \approx -\sigma d$$

Daí obtemos para a equação (35):

$$x = \beta d$$

(39)



Por outro lado

$$\ln D \approx - \frac{\sigma^2 k_f}{\beta(k_e + \sigma k_p)},$$

considerando-se  $\sigma$  muito pequeno e  $\beta$  grande.

Por isso,

$$\hat{d} = \sqrt{-\frac{2}{\sigma^2} \ln D} = \sqrt{-\frac{2}{\sigma^2} \cdot -\frac{\sigma^2 k_f}{\beta(k_e + \sigma k_p)}} = \sqrt{\frac{2k_f}{\beta(k_e + \sigma k_p)}}.$$

Levando-se agora este valor em (38), obtemos

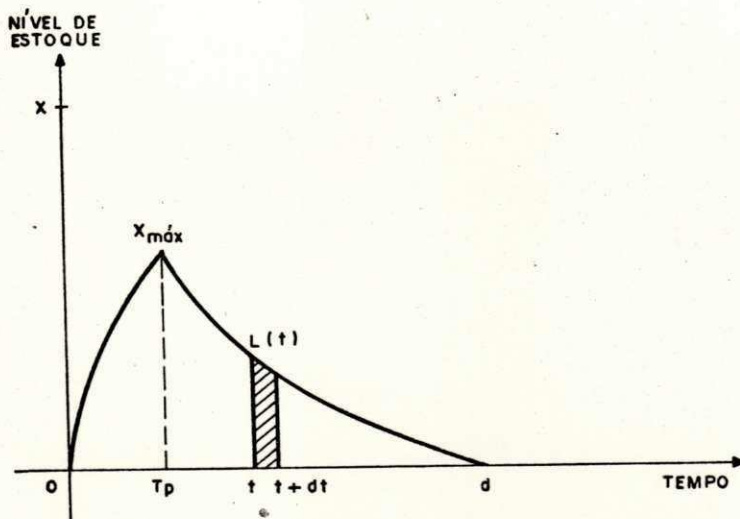
$$\hat{x} = \sqrt{\frac{2k_f \beta}{(k_e + \sigma k_p)}},$$

resultado esse conhecido nosso como o lote ótimo do Modelo Aproximado para  $\rho = \infty$  (veja equação 24). Em outras palavras, isto significa que o Modelo Aproximado leva-nos de fato a uma aproximação relativamente boa deste Modelo.

### 3.2 - Extensão com $\beta \ll \rho < \infty$ .

Atente-se, agora (Figura 16), que a variação da quantidade de estoque durante o intervalo de duração  $d \bar{e}$ :

$$\frac{dL}{dt} = \begin{cases} \rho - \beta - \sigma \cdot L(t) & \text{para } 0 \leq t \leq T_p & (40) \\ e & \\ -\beta - \sigma \cdot L(t) & \text{para } T_p \leq t \leq d & (41) \end{cases}$$



- FIG. 16 -

Então a quantidade acumulada de estoque durante este tempo  $\bar{e}$ :

$$L_d = -\frac{1}{\sigma} \left\{ \int_0^{T_p} \left( \frac{dL}{dt} + \beta - \rho \right) dt + \int_{T_p}^d \left( \frac{dL}{dt} + \beta \right) dt \right\}$$

$$L_d = -\frac{1}{\sigma} \left\{ L(t = T_p) - L(t = 0) + \beta \cdot T_p - \rho \cdot T_p + L(t = d) - L(t = T_p) + \beta d - \beta T_p \right\}$$

$$= -\frac{1}{\sigma} ( -\rho \cdot T_p + \beta d )$$

$$= -\frac{1}{\sigma} (x - \beta d).$$

Com isto a quantidade média de estoque de todo o período  $\bar{e}$ :

$$L = L_d \cdot y = \frac{1}{\sigma} \cdot (xy - \beta) \quad (42)$$

Comparando esta equação com (32) de WEBER, verifica-se que elas são idênticas. Este resultado comum as duas expressões nos diz que a quantidade média de estoque ( $L$ ) é igual a taxa recíproca de Perda ( $\frac{1}{\sigma}$ ) vezes a Perda total ( $xy - \beta$ ). Isto sem dúvida está correto, porque se por exemplo a Perda total no período fosse 10 unidades e tivéssemos  $\sigma = 0,1$ ; então, a quantidade média seria claramente 100 unidades. Isto é, 10 vezes mais. Portanto, teríamos  $L = 10 \cdot$  Perda  $= \frac{1}{0,1} \cdot (xy - \beta)$ . Assim, a fórmula (42) poderia também ter sido deduzida intuitivamente.

Usando a equação (42), obtemos o custo total médio:

$$\hat{H} = k_p \cdot (xy - \beta) + k_f \cdot y + \frac{k_e}{\sigma} (xy - \beta)$$

e desde que  $d = \frac{1}{y}$ ,

$$\hat{H} = \frac{k_f}{d} + \left( \frac{k_e}{\sigma} + k_p \right) \left( \frac{x}{d} - \beta \right) \quad (43)$$

Para obter  $x = f(d)$  para a substituição de  $x$  em (43), tomamos novamente as equações (40) e (41). De (40) obtemos a equação diferencial linear:

$$\frac{dL}{dt} + \sigma \cdot L(t) = \rho - \beta, \quad (44)$$

cuja solução (veja Apêndice A, seção A.4) é:

$$L(t) = \frac{\rho - \beta}{\sigma} - \frac{\rho - \beta}{\sigma} \cdot e^{-\sigma t} \quad (45)$$

para  $L(t = 0) = 0$  como condição inicial; e de (41), a equação diferencial linear:

$$\frac{dL}{dt} + \sigma \cdot L(t) = -\beta, \quad (46)$$

de solução (veja Apêndice A, seção A.5)

$$L(t) = (x_{\text{m}\bar{a}x} + \frac{\beta}{\sigma}) e^{\sigma T_p} \cdot e^{-\sigma t} - \frac{\beta}{\sigma} \quad (47)$$

para  $L(t = T_p) = x_{\text{m}\bar{a}x}$  como condição inicial. E, por causa de (45)

para  $L(T_p) = x_{\text{m}\bar{a}x}$

$$x_{\text{m}\bar{a}x} = L(T_p) = \frac{\rho - \beta}{\sigma} - \frac{\rho - \beta}{\sigma} \cdot e^{-\sigma T_p}$$

Daí a equação (47) ser também

$$\begin{aligned} L(t) &= \left( \frac{\sigma - \beta}{\sigma} - \frac{\rho - \beta}{\sigma} \cdot e^{-\sigma T_p} + \frac{\beta}{\sigma} \right) e^{\sigma T_p} \cdot e^{-\sigma t} - \frac{\beta}{\sigma} \\ &= \left( \frac{\rho}{\sigma} \cdot e^{\sigma T_p} - \frac{\rho - \beta}{\sigma} \right) e^{-\sigma t} - \frac{\beta}{\sigma}. \end{aligned} \quad (48)$$

Por causa de (47), (48) e

$$L_d = \int_0^d L(t) dt = \frac{1}{\sigma} (x - \beta d)$$

temos,

$$\int_0^{T_p} \left( \frac{\rho - \beta}{\sigma} - \frac{\rho - \beta}{\sigma} \cdot e^{-\sigma t} \right) dt + \int_{T_p}^d \left[ \left( \frac{\rho}{\sigma} e^{\sigma T_p} - \frac{\rho - \beta}{\sigma} \right) e^{-\sigma t} - \frac{\beta}{\sigma} \right] dt = \frac{1}{\sigma} (x - \beta d)$$

cuja expressão final para  $x$ , conforme desenvolvimento mostrado no Apêndice A, seção A.6; é:

$$x = \frac{\rho}{\sigma} \cdot \ln \left[ 1 - \frac{\beta}{\rho} (1 - e^{\sigma d}) \right] \quad (49)$$

Então podemos escrever para a equação (43):

$$\hat{H} = \frac{k_f}{d} + \left( \frac{k_e + \sigma k_p}{\sigma^2} \right) \left\{ \frac{\rho \ln \left[ 1 - \frac{\beta}{\rho} (1 - e^{\sigma d}) \right]}{d} - \sigma \beta \right\} \quad (50)$$

A primeira derivação de  $\hat{H}$  é:

$$H' = -\frac{k_f}{d^2} + \left( \frac{k_e + \sigma k_p}{\sigma^2} \right) \left\{ \frac{\beta \sigma d e^{\sigma d} / \left[ 1 - \frac{\beta}{\rho} (1 - e^{\sigma d}) \right] - \rho \ln \left[ 1 - \frac{\beta}{\rho} (1 - e^{\sigma d}) \right]}{d^2} \right\}$$

Fazendo-se esta equação igual a zero obtemos:

$$\frac{\sigma^2 k_f}{k_e + \sigma k_p} = \frac{\beta \sigma d e^{\sigma d}}{1 - \frac{\beta}{\rho} (1 - e^{\sigma d})} - \rho \ln \left[ 1 - \frac{\beta}{\rho} (1 - e^{\sigma d}) \right]$$

No ponto em que esta equação se verifica a função  $\hat{H}(d)$  tem um mínimo (veja Apêndice A, seção A.7). O problema agora é que esta equação é bastante complexa para ser resolvida diretamente. Por isso uma tentativa para obter uma expressão aproximada para  $x$  (equação 49) e através dela uma função  $\tilde{H}$ , mais fácil de se trabalhar, foi realizada.

Fazendo-se  $D = \frac{\beta}{\rho} (1 - e^{\sigma d})$ , geralmente vale-se  $|D| < 1$ , e por isso teremos como desenvolvimento em série para  $\ln(1 - D)$ :

$$\ln(1 - D) = -D - \frac{D^2}{2} - \frac{D^3}{3} - \dots$$

Para  $\rho \gg \beta$ ,  $D$  é muito pequeno e por este motivo podemos tomar

$$\ln(1 - D) \approx -D.$$



Daí, substituindo-se este valor em (49), resulta

$$x \approx \frac{\rho}{\sigma}(-D) = \frac{\rho}{\sigma}\left(-\frac{\beta}{\rho}(1 - e^{\sigma d})\right) = \frac{\beta}{\sigma}(e^{\sigma d} - 1).$$

Comparando-se com a equação (35), verifica-se que este resultado é justamente a expressão para  $x$  do Modelo anterior. Assim, para  $\rho \gg \beta$ , temos  $\hat{H} = \hat{G}$  o que mostra que este Modelo é uma extensão do Modelo de WEBER.

No caso mais geral, quando temos mais termos na série a expressão algébrica resultante como aproximação para  $\hat{H}$  também não é satisfatória, por isso o cálculo de  $\min \hat{H}$  foi realizado com a ajuda de diferentes valores de  $d$ . O resultado obtido para alguns exemplos específicos encontra-se no Apêndice C.

Pode-se notar que aproximadamente (veja Apêndice C, seção C.2):

$$\min \hat{H} = 3248,15$$

com  $\frac{0}{d} = 1,7$  e  $\frac{0}{x} = 341,308$ .

Para  $0 < d \leq 1$ , o valor mínimo encontra-se no extremo direito deste intervalo sendo aí

$$\min \hat{H} = 3254,79$$

e  $\frac{0}{x} = 200,462$ .

Comparando com o resultado, no Apêndice B, do Modelo Aproximado com os mesmos valores dos parâmetros, observa-se a proximidade destes Modelos. Ainda neste Apêndice, em COMPARAÇÃO DOS MODELOS, podemos verificar a proximidade do Modelo Aproximado também para outros valores dos parâmetros.

De (49), com  $\rho = \beta$ , encontra-se também  $x = \beta \cdot d$ ,

ou seja, a equação (39) do Modelo de WEBER. Substituindo-se este valor em (50), resulta

$$\hat{H} = \frac{k_f}{d}$$

donde  $\min \hat{H}$  é encontrado em  $\overset{0}{d} = \infty$  ou  $\overset{0}{x} = \infty$ , e vice-versa. No Apêndice C, seções C.1 e C.5, isto pode ser comprovado notando-se que  $d$  assumiu o maior valor do intervalo estabelecido como *domínio* da função  $\hat{H}$ . Relembrando discussão feita em 1.2.2, p. 22, percebe-se a consistência das afirmações aqui deduzidas.

## CONCLUSÕES E OBSERVAÇÕES

Os resultados ótimos obtidos para os Modelos ora apresentados neste trabalho, mostraram que embora as magnitudes dos lotes encontrados, na maioria dos exemplos simulados, diferenciam muito de valores, os custos totais destas políticas têm certa proximidade; e, como o interesse é minimizar os custos e não as magnitudes dos lotes, algumas conclusões e observações, a respeito de cada um dos Modelos, podem ser estabelecidas:

Quanto ao Modelo Clássico sem Perda:

Apresenta uma sensibilidade muito pequena para desvios relativamente grandes no lote ótimo. Sensibilidade esta tanto menor quanto mais próximo se encontrar  $\rho$  de  $\beta$ . Com respeito a mudanças nos parâmetros, apresenta ainda uma influência muito pequena sobre o custo total. Foi visto durante o contexto (seção 1.2.3) que para uma valorização ou desvalorização dos parâmetros em 20%, o custo adicional resultante sofre apenas uma variação de 0,4 a 5%. Isto é um resultado muito bom para uso na realidade, porque normalmente não se consegue estimar corretamente estes parâmetros. Por outro lado, este Modelo apresenta o inconveniente de não incluir Perda; fato comum na vida real quando se lida com "produtos deterioráveis". Contudo os cálculos numéricos mostraram que a diferença no custo total deste Modelo, comparada com a dos outros Modelos, quando  $\rho = \beta$  (isto é, o fornecimento está muito próximo da demanda), é muito pequena e, por causa disto com pensa usar de imediato este Modelo quando esta situação se apresenta. Note-se que, quando  $\rho$  está muito próximo de  $\beta$ , a perda é

quase nenhuma. Obviamente, este Modelo também pode ser usado quando já se conhece de antemão que a taxa de Perda é muito pequena ou nenhuma.

Quanto ao Modelo Aproximado com Perda:

Não é um Modelo formulado corretamente, mas é bastante bom, para o problema em estudo, devido aos resultados obtidos serem próximos daqueles encontrados no Modelo Exato. Possui, em relação ao lote ótimo, uma sensibilidade mais acentuada do que no Modelo Clássico sem Perda e, em relação a mudanças nos parâmetros, uma sensibilidade quase equivalente. Caracteriza-se como uma extensão do Modelo Clássico, porque aquele Modelo pode ser obtido deste, tomando-se  $\sigma = 0$ , ao passo que o contrário não se verifica. Prevendo Perda torna-se mais realista; além do que apresenta vantagem de em qualquer situação de  $\sigma$  ou de  $\rho$  em relação a  $\beta$ , sempre os seus resultados aproximam-se dos do Modelo Exato. Portanto, constitui um Modelo adequado para ser usado quando a Perda é parte integrante no problema. A única desvantagem é não apresentar os valores exatos, o que não pode ser usado se a decisão for encontrar a melhor solução para o problema do Lote com Perda.

Quanto ao Modelo Exato com Perda:

É o mais eficiente porque dá o resultado correto do problema do "Lote com Perda". Porém, apresenta a expressão matemática do lote ótimo, no caso de  $\rho = +\infty$ , muito complicada; e, no caso de  $\beta \leq \rho < +\infty$ , ainda desconhecida. Embora o procedimento discreto apresentado forneça bons resultados, necessita de muito tempo de computação; sendo este tempo tanto maior

quanto mais precisão for requerida nos resultados. Portanto, este Modelo é inadequado quando custos operacionais estão presentes, porque se ganhamos nos custos Cr\$ 1,00 podemos perder Cr\$ 1.000,00 em custos de computação. Por isso, embora o Modelo Exato possa ter dado um custo menor, o custo operacional pode não ser satisfatório comprometendo a sua aplicação. Assim resultados melhores podem não compensar se se considerar o esforço computacional para obtê-los. Este Modelo portanto, deve ser aplicado quando o interesse for rigorosamente a obtenção da solução exata. Quanto ao estudo da sensibilidade deste Modelo é importante porque fornece a faixa de preservação de proximidade do Modelo Aproximado. Infelizmente não foi possível fazê-lo aqui por questão de muito volume do trabalho.

Pesquisas subsequentes sobre o Modelo Exato poderão ser realizadas. Sugerimos, como mais importante, o estudo da sensibilidade tanto em relação ao lote, como em relação aos parâmetros. Outras pesquisas poderiam ser a extensão deste Modelo para  $\sigma(t) \neq \text{constante}$  ou a Perda como função do custo de estocagem.



## B I B L I O G R A F I A

1. GRAVES, S.C.: "The Application of Queueing Theory to Continuous Perishable Inventory Systems", *Management Science*, Vol. 28, No. 4 (April 1982), pp.400-406.
2. HADLEY, G. and T.M. WHITIN: *Analysis of Inventory Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1963.
3. HENN, R. und H.P. KUNZI: *Einführung in die Unternehmensforschung II*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1968.
4. JOHNSON, L.A.: *Operations Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control*, John Wiley & Sons, New York, 1974.
5. LANG, S.: *Cálculo*. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, Vol. 1, 1977.
6. NADDOR, E.: *Inventory Systems*, John Wiley & Sons, New York, 1965.
7. PACK, L.: "Optimale Bestellmenge und optimale Losgröße". *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 33, 465-492 und 573-594, 1963.
8. SIVAZLIAN, B.D.: *Analysis of Systems in Operations Research*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1975.
9. VECERNIK, P.: "Die optimale Fertigungslosgröße bei besonderen Risiken". *Industrielle Organisation* 39, 55-58, 1970.
10. WEBER, H.H.: "Zur Behandlung von Schwund in Lagerhaltungsmodellen", *Zeitschrift für Operations Research*, Band 16, 1972, S. B67 - B73.

APÊNDICE A  
RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES E PROVA DE AFIRMAÇÕES

A.1 - Resolução da equação diferencial:  $\frac{dL}{dt} + \sigma.L(t) = -\beta$ .

No tempo  $t = 0$  (veja Fig. 14), um abastecimento  $\bar{e}$  é realizado numa quantidade de  $x$  unidades, portanto

$$L(t = 0) = x \quad (A1)$$

A equação diferencial proposta pode ser resolvida usando o fator de integração  $e^{\sigma t}$ ; temos então

$$\frac{d}{dt} \left( e^{\sigma t} . L(t) \right) = -\beta . e^{\sigma t}$$

Integrando ambos os lados resulta

$$e^{\sigma t} . L(t) = - \int \beta e^{\sigma t} dt + A$$

onde  $A$  é uma constante arbitrária. Finalmente, obtemos para  $0 \leq t < d$ :

$$L(t) = - \frac{\beta}{\sigma} + A . e^{-\sigma t} \quad (A2)$$

O valor de  $A$  é determinado usando a condição (A1).

Da relação (A2) temos em  $t = 0$

$$L(0) = - \frac{\beta}{\sigma} + A$$

e usando a equação (A1) resulta

$$A = x + \frac{\beta}{\sigma} \quad (A3)$$

Usando (A3) em (A2), obtemos como solução completa para a equação diferencial dada com (A1) como condição inicial

$$L(t) = -\frac{\beta}{\sigma} + \left(x + \frac{\beta}{\sigma}\right)e^{-\sigma t}, \quad 0 \leq t < d.$$

2 - Resolução da equação:  $\int_0^d \left( \left(x + \frac{\beta}{\sigma}\right)e^{-\sigma t} - \frac{\beta}{\sigma} \right) dt = \frac{1}{\sigma}(x - \beta d)$

Integrando o primeiro membro da equação dada, obtemos

$$-\frac{1}{\sigma} \left(x + \frac{\beta}{\sigma}\right)e^{-\sigma t} \Big|_0^d - \frac{\beta}{\sigma} t \Big|_0^d = \frac{1}{\sigma}(x - \beta d)$$

e passando o limite de integração

$$-\frac{1}{\sigma} \left(x + \frac{\beta}{\sigma}\right)(e^{-\sigma d} - 1) - \frac{\beta}{\sigma} d = \frac{1}{\sigma}(x - \beta d).$$

Multiplicando ambos os lados por  $(-\sigma)$ , resulta

$$\left(x + \frac{\beta}{\sigma}\right)(e^{-\sigma d} - 1) + \beta d = -x + \beta d$$

ou ainda eliminando-se  $\beta d$ :

$$\left(x + \frac{\beta}{\sigma}\right)(e^{-\sigma d} - 1) = -x$$

Os passos seguintes são realizados como segue:

$$x(e^{-\sigma d} - 1) + \frac{\beta}{\sigma}(e^{-\sigma d} - 1) = -x$$

$$x(e^{-\sigma d} - 1) + x = -\frac{\beta}{\sigma}(e^{-\sigma d} - 1)$$

$$x \left( (e^{-\sigma d} - 1) + 1 \right) = -\frac{\beta}{\sigma}(e^{-\sigma d} - 1)$$

$$x \cdot e^{-\sigma d} = \frac{\beta}{\sigma}(1 - e^{\sigma d})$$

$$x = \frac{\beta}{\sigma}(e^{\sigma d} - 1).$$

A.3 - Prova da afirmação que  $\frac{\partial^2 \hat{G}}{\partial d^2} > 0$  no ptº em que  $\frac{\partial \hat{G}}{\partial d} = 0$ . Isto é, a função  $\hat{G}(d)$  tem um mínimo neste ponto.

A derivada primeira conforme dedução em (3.1)

é:

$$\frac{\partial \hat{G}}{\partial d} = -\frac{k_f}{d} + \left( \frac{\beta(k_e + \sigma k_p)}{\sigma^2} \right) \left( \frac{\sigma d e^{\sigma d} - e^{\sigma d} - 1}{d^2} \right)$$

Assim, derivando novamente, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{G}}{\partial d^2} &= \frac{2k_f}{d^3} + \left( \frac{\beta(k_e + \sigma k_p)}{\sigma^2} \right) \left( \frac{\beta d e^{\sigma d} - 2(\sigma d e^{\sigma d} - e^{\sigma d} + 1)}{d^3} \right) \\ &= \frac{2k_f}{d^3} + \left( \frac{\beta(k_e + \sigma k_p)}{\sigma^2} \right) \left( \frac{\sigma d e^{\sigma d} - 2(e^{\sigma d}(\sigma d - 1) + 1)}{d^3} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{2k_f}{d^3} + \left( \frac{\beta(k_e + \sigma k_p)}{\sigma^2} \right) \left( \frac{\sigma d e^{\sigma d} - 2(1 - e^{\sigma d})(1 - \sigma d)}{d^3} \right)$$

Mas, no ponto em que  $\frac{\partial \hat{G}}{\partial d} = 0$  temos

$$1 - \frac{\sigma^2 k_f}{\beta(k_e + \sigma k_p)} = e^{\sigma d} (1 - \sigma d)$$

Por isso, temos agora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{G}}{\partial d^2} &= \frac{2k_f}{d^3} + \left( \frac{\beta(k_e + \sigma k_p)}{\sigma^2} \right) \left( \frac{\sigma d e^{\sigma d} - 2(1 - 1 + \sigma^2 k_f / \beta(k_e + \sigma k_p))}{d^3} \right) \\ &= \frac{2k_f}{d^3} + \left( \frac{\beta(k_e + \sigma k_p)}{\sigma^2} \right) \left( \frac{\sigma d e^{\sigma d} - 2\sigma^2 k_f / \beta(k_e + \sigma k_p)}{d^3} \right) \\ &= \frac{2k_f}{d^3} + \left( \frac{\beta(k_e + \sigma k_p)}{\sigma^2} \right) \left( \frac{\sigma d e^{\sigma d}}{d^3} \right) - \frac{2k_f}{d^3} \\ &= \left( \frac{\beta(k_e + \sigma k_p)}{\sigma^2} \right) \cdot \frac{\sigma d e^{\sigma d}}{d^3} > 0, \text{ pois} \end{aligned}$$

$0 < \sigma d < 1$  e  $0 < d < 1$ .

A.4 - Resolução da equação diferencial:  $\frac{dL}{dt} + \sigma \cdot L(t) = \rho - \beta$ . para  $0 \leq t < T_p$ . (Equação 14).

Não faremos detalhadamente a resolução deste tipo de equação diferencial, uma vez que já o fizemos em (A.1). Assim nosso problema observando-se (A.1) reduz-se ao de encontrar o



valor de A na equação

$$L(t) = \frac{\rho - \beta}{\sigma} + A \cdot e^{-\sigma t} \quad (0 \leq t \leq T_p)$$

onde A é uma constante arbitrária.

Como no tempo  $t = 0$  (veja Figura 16) não há estoque,

$$L(0) = 0 = \frac{\rho - \beta}{\sigma} + A$$

ou seja

$$A = - \frac{\rho - \beta}{\sigma}.$$

Então, a solução para a equação diferencial proposta é

$$L(t) = \frac{\rho - \beta}{\sigma} - \frac{\rho - \beta}{\sigma} \cdot e^{-\sigma t}$$

com  $L(t = 0)$  como condição inicial.

A.5 - Resolução da equação diferencial:  $\frac{dL}{dt} + \sigma \cdot L(t) = -\beta$  para  $T_p \leq t \leq d$ . (Equação 46)

Esta equação diferencial embora esteja expressada da mesma forma que a equação diferencial em A.1, representa uma situação diferente (veja Equação 41 e Figura 16). Por isso nosso problema reduz-se agora a encontrar o valor de A na equação

$$L(t) = - \frac{\beta}{\sigma} + A \cdot e^{-\sigma t}$$

satisfazendo a condição inicial  $L(t = T_p) = x_{\max}$ . Assim,

$$L(t = T_p) = x_{\max} = -\frac{\beta}{\sigma} + A \cdot e^{-\sigma T_p}$$

donde

$$A = \left(x_{\max} + \frac{\beta}{\sigma}\right) e^{\sigma T_p}.$$

Portanto, a solução para esta equação com as condições atuais é

$$L(t) = \left(x_{\max} + \frac{\beta}{\sigma}\right) e^{\sigma T_p} \cdot e^{-\sigma t} - \frac{\beta}{\sigma}.$$

#### A.6 - Resolução da equação:

$$\int_0^{T_p} \left(\frac{\rho}{\sigma} \beta - \frac{\rho - \beta}{\sigma} e^{-\sigma t}\right) dt + \int_{T_p}^d \left(\left(\frac{\rho}{\sigma} e^{\sigma T_p} - \frac{\rho - \beta}{\sigma}\right) e^{-\sigma t} - \frac{\beta}{\sigma}\right) dt = \frac{1}{\sigma}(x - \beta d).$$

Integrando o 1º membro, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\rho - \beta}{\sigma} T_p + \frac{\rho - \beta}{\sigma^2} (e^{-\sigma T_p} - 1) + \left(-\frac{1}{\sigma}\right) \left(\frac{\rho}{\sigma} e^{\sigma T_p} - \frac{\rho - \beta}{\sigma}\right) (e^{-\sigma d} - e^{-\sigma T_p}) - \\ - \frac{\beta}{\sigma}(d - T_p) = \frac{1}{\sigma}(x - \beta d) \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por  $\sigma$ , resulta

$$\begin{aligned} \rho \cdot T_p - \beta \cdot T_p + \frac{\rho - \beta}{\sigma} (e^{-\sigma T_p} - 1) - \left(\frac{\rho}{\sigma} e^{\sigma T_p} - \frac{\rho - \beta}{\sigma}\right) (e^{-\sigma d} - e^{-\sigma T_p}) - \\ - \beta d + \beta T_p = x - \beta d \end{aligned}$$

$$\frac{\rho - \beta}{\sigma} (e^{-\sigma T_p} - 1) - \left( \frac{\rho}{\sigma} e^{\sigma T_p} - \frac{\rho - \beta}{\sigma} \right) (e^{-\sigma d} - e^{-\sigma T_p}) = 0$$

$$(\rho - \beta) (e^{-\sigma T_p} - 1) - (\rho e^{\sigma T_p} - (\rho - \beta)) (e^{-\sigma d} - e^{-\sigma T_p}) = 0$$

$$(\rho - \beta) e^{-\sigma T_p} - (\rho - \beta) - \left( \rho e^{\sigma T_p} e^{-\sigma d} - \rho - (\rho - \beta) e^{-\sigma d} + (\rho - \beta) e^{-\sigma T_p} \right) = 0$$

$$(\rho - \beta) e^{-\sigma d} + \beta - \rho e^{\sigma T_p} \cdot e^{-\sigma d} = 0$$

$$e^{-\sigma d} (\rho - \beta - \rho e^{\sigma T_p}) = -\beta$$

$$\rho - \beta - \rho e^{\sigma T_p} = -\beta e^{\sigma d}$$

$$\rho e^{\sigma T_p} = \rho - \beta + \beta e^{\sigma d}$$

$$e^{\sigma T_p} = 1 - \beta/\rho + \frac{\beta}{\rho} \cdot e^{\sigma d}$$

$$\sigma T_p = \ln(1 - \beta/\rho (1 - e^{\sigma d}))$$

$$\sigma \cdot \frac{x}{\rho} = \ln(1 - \beta/\rho (1 - e^{\sigma d}))$$

$$x = \frac{\rho}{\sigma} \ln(1 - \beta/\rho (1 - e^{\sigma d})).$$

A.7 - Prova da afirmação que a função  $\hat{H}(d)$  tem um mínimo no ponto em que  $\frac{\partial \hat{H}}{\partial d} = 0$ .

A derivada primeira de  $\hat{H}$  conforme dedução em (3.2) é:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial d} = -\frac{k_f}{d^2} + \left( \frac{k_e + \sigma k_p}{\sigma^2} \right) \cdot \left\{ \frac{\beta \sigma d e^{\sigma d} / \left[ 1 - \frac{\beta}{\rho} (1 - e^{\sigma d}) \right] - \rho \ln \left[ 1 - \frac{\beta}{\rho} (1 - e^{\sigma d}) \right]}{d^2} \right\}$$

Assim, derivando-se novamente a expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial d^2} = & \frac{2k_f}{d^3} + \left( \frac{k_e + \sigma k_p}{\sigma^2} \right) \cdot \left( \frac{1}{d^2} \cdot \left( \frac{\left[ 1 - \frac{\beta}{\rho} (1 - e^{\sigma d}) \right] \cdot (\beta \sigma^2 d e^{\sigma d} + \beta \sigma e^{\sigma d})}{\left[ 1 - \frac{\beta}{\rho} (1 - e^{\sigma d}) \right]^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\beta e^{\sigma d}}{1 - \frac{\beta}{\rho} (1 - e^{\sigma d})} \right) - \frac{2}{d^3} \cdot \left( \frac{\beta \sigma d e^{\sigma d}}{1 - \frac{\beta}{\rho} (1 - e^{\sigma d})} - \rho \ln \left[ 1 - \frac{\beta}{\rho} (1 - e^{\sigma d}) \right] \right) \right) \end{aligned}$$

Mas, no ponto em que  $\frac{\partial \hat{H}}{\partial d} = 0$  temos:

$$\frac{\sigma^2 k_f}{k_e + \sigma \cdot k_p} = \frac{\beta \sigma d e^{\sigma d}}{1 - \frac{\beta}{\rho} (1 - e^{\sigma d})} - \rho \ln \left( 1 - \frac{\beta}{\rho} (1 - e^{\sigma d}) \right)$$

Por isso, temos agora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial d^2} = & \frac{2k_f}{d^3} + \left( \frac{1}{d^2} \cdot \frac{\left[ 1 - \frac{\beta}{\rho} (1 - e^{\sigma d}) \right] \cdot (\beta \sigma^2 d e^{\sigma d} + \beta \sigma e^{\sigma d}) - \left[ 1 - \frac{\beta}{\rho} (1 - e^{\sigma d}) \right] \cdot \beta e^{\sigma d}}{\left[ 1 - \frac{\beta}{\rho} (1 - e^{\sigma d}) \right]^2} \right. \\ & \left. - \frac{2}{d^3} \cdot \left( \frac{\sigma^2 \cdot k_f}{k_e + \sigma \cdot k_p} \right) \right) \cdot \left( \frac{k_e + \sigma k_p}{\sigma^2} \right) \\ = & \frac{2k_f}{d^3} + \left( \frac{1}{d^2} \cdot \frac{\left[ 1 - \frac{\beta}{\rho} (1 - e^{\sigma d}) \right] \beta \sigma^2 d e^{\sigma d}}{\left[ 1 - \frac{\beta}{\rho} (1 - e^{\sigma d}) \right]^2} - \frac{2}{d^3} \cdot \left( \frac{\sigma^2 k_f}{k_e + \sigma k_p} \right) \right) \cdot \left( \frac{k_e + \sigma k_p}{\sigma^2} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{2k_f}{d^3} + \left( \frac{1}{d^2} \cdot \frac{\beta \sigma^2 d e^{\sigma d}}{1 - \frac{\beta}{\rho} (1 - e^{\sigma d})} - \frac{2}{d^3} \cdot \left( \frac{\sigma^2 k_f}{k_e + \sigma k_p} \right) \right) \left( \frac{k_e + \sigma k_p}{\sigma^2} \right)$$

$$= \frac{2k_f}{d^3} + \frac{\beta \sigma^2 e^{\sigma d}}{d \cdot \left[ 1 - \frac{\beta}{\rho} (1 - e^{\sigma d}) \right]} \cdot \frac{k_e + \sigma k_p}{\sigma^2} - \frac{2k_f}{d^3}$$

$$= \frac{\beta \sigma^2 e^{\sigma d}}{d \left[ 1 - \frac{\beta}{\rho} + \frac{\beta}{\rho} e^{\sigma d} \right]} \cdot \frac{k_e + \sigma k_p}{\sigma^2} = \frac{\beta e^{\sigma d} (k_e + \sigma k_p)}{d \left[ 1 - \frac{\beta}{\rho} + \frac{\beta}{\rho} e^{\sigma d} \right]} > 0.$$

Logo,  $\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial d^2} > 0$ , pois os termos da fração são positivos.

Isto prova a nossa afirmação.



## APÊNDICE B

Neste Apêndice, encontra-se a listagem do programa utilizado na determinação dos lotes ótimos, custos mínimos e tabelas de sensibilidade, correspondentes a cada um dos Modelos desenvolvidos nos Capítulos 1, 2 e 3. Os dados de entrada de um determinado exemplo, bem como os resultados obtidos são também apresentados. Esta listagem foi fornecida pelo microcomputador CP-500 da Prológica.

```

10 CLEAR 750
20 DIM AA(1,25), BB(1,25), CC(1,25), DD(25), H(25)
30 CLS
40 FOR Y=0 TO 51
50 SET(Y,0)
60 SET(Y,47)
70 NEXT Y
80 FOR Y=52 TO 73
90 SET(Y,47)
100 NEXT Y
110 FOR Y=74 TO 127
120 SET(Y,0)
130 SET(Y,47)
140 NEXT Y
150 FOR X=0 TO 47
160 SET(0,X)
170 SET(127,X)
180 NEXT X: GOSUB 3360
190 GOSUB 3440: A#=INKEY$
200 IF A#="" THEN 190
210 GOSUB 530
220 CLS
230 PRINT "ENTRE COM UMA OPCAO:"
240 INPUT IOP
250 IF IOP>4 THEN 340
260 ON IOP GOSUB 410, 730, 1450, 2010
270 INPUT "DESEJA CONCLUIR O TRABALHO (S/N)";X1$
280 IF X1#="S" THEN 3580
290 INPUT "DESEJA OUTRA OPCAO (S/N)";X2$
300 IF X2#<>"S" THEN GOSUB 560: GOTO 250
310 INPUT "QUER VER AS EXPLICACOES (S/N)";X3$
320 IF X3#="S" THEN CLS: GOTO 30
330 CLS: GOTO 210
340 CLS
350 PRINT "NAO EXISTE ALTERNATIVA";I
360 GOSUB 450
370 INPUT "FINALIZAR ? (S/N)"; Z$
380 IF Z#<>"S" THEN 230
390 STOP
400 REM *****
410 SIGMA = 0
420 GOSUB 670
430 RETURN
440 REM *****
450 FOR I = 1 TO 20
460 PRINT @ 128, " "
470 PRINT @ 128, " 0 que voce pretende?"
480 FOR JJ = 1 TO 10
490 NEXT JJ
500 NEXT I
510 RETURN
520 REM *****

```

```

530 CLS
540 PRINT "ENTRE COM TODOS OS DADOS NECESSARIOS"
550 PRINT "AS QUATRO ALTERNATIVAS:"
560 INPUT "TAXA DE PERDA (SIGMA)"; SIGMA
570 INPUT "DEMANDA TOTAL (BETA)"; B
580 INPUT "FORNECIMENTO TOTAL (RO)"; P#
590 INPUT "CUSTO DE SET-UP (Kf)"; KF
600 INPUT "CUSTO DE ESTOCAGEM (Ke)"; KE
610 INPUT "CUSTO DE PRODUCAO (Kp)"; KP
620 A1=KP/KE
630 IF P# = "INFINITO" THEN Z1=0:GOTO 650
640 Z1 = B/VAL(P#)
650 RETURN
660 REM *****
670 CLS
680 PRINT "ESCREVENDO O MODELO CLASSICO"
690 LPRINT TAB(10) "MODELO CLASSICO"
700 LPRINT: LPRINT
710 GOTO 780
720 REM *****
730 CLS
740 PRINT "ESCREVENDO MODELO APROXIMADO COM PERDA"
750 LPRINT "      MODELO APROXIMADO"
760 LPRINT "      COM PERDA"
770 LPRINT: LPRINT
780 LPRINT STRING$(34,"-")
790 LPRINT "  LOTE OTIMO      I      CUSTO TOTAL";TAB(43)"*DADOS:"
800 LPRINT STRING$(16,"-");"I"; STRING$(17,"-");TAB(43) "SIGMA =";
    SIGMA
810 LPRINT TAB(16) "I"; TAB(44) "BETA =";B
820 X(I)=SQR((2*KF*B)/((KE+SIGMA*KP)*(1-Z1)))
830 K(I)=KP*B+KF*(SIGMA/2)+SQR(2*(KE+SIGMA*KP)*(1-Z1)*KF*B)
840 LPRINT TAB(5) X(I);TAB(16) "I";TAB(22) K(I); TAB(46) "RO = ";P#
850 LPRINT TAB(16) "I"; TAB(46) "Kf ="; KF
860 LPRINT TAB(16) "I"; TAB(46) "Ke ="; KE
870 LPRINT STRING$(34,"-"); TAB(46) "Kp ="; KP
880 LPRINT
890 Y#=INKEY#
900 IF Y#="" THEN 890
910 IF (P#<>"INFINITO")AND(SIGMA=0) THEN GOSUB 1000 :GOTO 950
920 IF SIGMA=0 THEN GOSUB 1000 :GOSUB 2430 :GOTO 950
930 GOSUB 1090
940 IF P#="INFINITO" THEN GOSUB 2530
950 INPUT "DESEJA ESTE MODELO COM OUTROS DADOS (S/N)"; Z1#
960 IF Z1# <> "S" THEN 990
970 GOSUB 530
980 GOTO 670
990 RETURN
1000 CLS
1010 PRINT "ESCREVENDO SENSIBILIDADE DO MODELO CLASSICO"
1020 PRINT "      EM RELACAO AO LOTE ECONOMICO"
1030 INPUT "NUMERO DA TABELA ";K#

```



```

1040 LPRINT TAB(14) "TABELA "; K$: LPRINT: LPRINT
1050 LPRINT TAB(3) "SENSIBILIDADE DO MODELO CLASSICO"
1060 LPRINT TAB(7) "EM RELACAO AO LOTE OTIMO"
1070 LPRINT: LPRINT
1080 GOTO 1190
1090 CLS
1100 PRINT"ESCREVENDO A TABELA DE SENSIBILIDADE DO MODELO APROXIMADO"
1110 PRINT "          EM RELACAO AO LOTE OTIMO"
1120 INPUT "NUMERO DA TABELA"; K$
1130 LPRINT
1140 LPRINT TAB(14) "TABELA "; K$
1150 LPRINT: LPRINT
1160 LPRINT "  SENSIBILIDADE DO MODELO APROXIMA-"
1170 LPRINT "    DO EM RELACAO AO LOTE OTIMO"
1180 LPRINT:LPRINT
1190 INPUT "ENTRE COM O NUMERO DE COLUNAS DA TABELA";NN
1200 PRINT "VALORES DE ALFA : "
1210 FOR J=1 TO NN
1220 INPUT "ALFA = ";AA(1,J)
1230 BB(1,J)=1 + AA(1,J)*SQRT((1 + SIGMA*A1)*(1-Z1))
1240 CC(1,J)=0.5*(BB(1,J) + 1/BB(1,J))
1250 NEXT J
1260 LPRINT "  -----"
1270 IF SIGMA<>0 THEN GOTO 1310
1280 LPRINT TAB(4) "ALFA"; TAB(10) "I"; TAB(15) "X'/X0";
1290 LPRINT TAB(27) "K'/K0"
1300 LPRINT "  -----I";STRING$(23,"-"): GOTO 1340
1310 LPRINT TAB(4) "ALFA"; TAB(10) "I"; TAB(15) "X'/X0";
1320 LPRINT TAB(27) "F'/F0"
1330 LPRINT "  -----I"; STRING$(23,"-")
1340 FOR II=1 TO NN
1350 LPRINT TAB(4) AA(1,II); TAB(10) "I"; TAB(13) BB(1,II);
1360 LPRINT TAB(25) CC(1,II)
1370 NEXT II
1380 LPRINT "  -----"
1390 IF P$<>"INFINITO" THEN LPRINT "Obs: B/P ="; Z1
1400 LPRINT
1410 A$=INKEY$
1420 IF A$="" THEN 1410
1430 RETURN
1440 REM *****
1450 CLS
1460 PRINT "ESCREVENDO O MODELO EXATO COM PERDA"
1470 LPRINT "  MODELO EXATO COM PERDA"
1480 LPRINT:LPRINT
1490 LPRINT STRING$(32,"-")
1500 LPRINT
1510 IF P$="INFINITO" THEN GOTO 1550
1520 GOSUB 3230
1530 X0=VAL(P$)/SIGMA*LOG(1-Z1*(1-EXP(SIGMA*DD(L))))
1540 GOTO 1590
1550 D=1-(SIGMAI2*KF)/(B*(KE+SIGMA*KP))

```



```

1560 X0=(B/SIGMA)*(EXP(SQR(-2*LOG(D)))-1)
1570 D0=SQR((-2*LOG(D))/(SIGMA^2))
1580 G0=KP*B+KF/D0+(KE/SIGMA+KP)*((B*(EXP(SIGMA*D0))-1)/(SIGMA*D0))-B)
1590 LPRINT "   LOTE OTIMO   I   CUSTO TOTAL";
1600 LPRINT TAB(43) "*DADOS:"
1610 LPRINT STRING$(32,"-"); TAB(43) "SIGMA ="; SIGMA
1620 LPRINT TAB(16) "I"; TAB(44) "BETA ="; B
1630 LPRINT TAB(4)X0; "   I   "; G0; TAB(46) "RO = "; P$
1640 LPRINT TAB(16) "I"; TAB(46) "Kf ="; KF
1650 LPRINT TAB(16) "I"; TAB(46) "Ke ="; KE
1660 LPRINT STRING$(32,"-"); TAB(46) "Kp ="; KP
1670 IF P$<>"INFINITO" THEN GOTO 2000
1680 PRINT "PARA ESCREVER O RESULTADO PELO METODO"
1690 PRINT "   DE NEWTON, APERTE <ENTER>"
1700 B$=INKEY$
1710 IF B$="" GOTO 1700
1720 LPRINT STRING$(49,"-")
1730 LPRINT TAB(4) "*** RESULTADO PELO METODO DE NEWTON ***"
1740 LPRINT STRING$(49,"-")
1750 INPUT "ENTRE COM UM VALOR INICIAL ENTRE 0 E 1";X0
1760 IF X0<0 OR X0>1 THEN GOTO 1750
1770 LPRINT "VALOR INICIAL =";X0
1780 INPUT "ENTRE COM A PRECISAO REQUERIDA";E
1790 LPRINT "PRECISAO REQUERIDA ="; E
1800 INPUT "ENTRE COM O LIMITE DE ITERACOES";LI
1810 LPRINT "LIMITE DE ITERACOES =";LI
1820 Y0=(1-(SIGMA^2*KF)/(B*(KE+SIGMA*KP)))*EXP(-SIGMA*X0)+SIGMA*X0-1
1830 LPRINT "I=";0,"X=";X0,"F(X)=";Y0
1840 FOR IND=1 TO LI
1850 YL=(-SIGMA)*(1-(SIGMA^2*KF)/(B*(KE+SIGMA*KP)))*EXP(-SIGMA*X0)+
      SIGMA
1860 X1=X0-Y0/YL
1870 Y1=(1-(SIGMA^2*KF)/(B*(KE+SIGMA*KP)))*EXP(-SIGMA*X1)+SIGMA*X1-1
1880 LPRINT "I=";IND,"X=";X1,"F(X)=";Y1
1890 B9=B/SIGMA*(EXP(SIGMA*X1)-1)
1900 IF ABS(X0-X1)<E THEN LPRINT "LOTE OTIMO=";B9;GOTO 1950
1910 X0=X1;Y0=Y1
1920 NEXT IND
1930 PRINT "NAO CONVERGIU EM ";LI;"ITERACOES"
1940 GOTO 1970
1950 C8=KP*B+KF/X1+(KE/SIGMA+KP)*((B*(EXP(SIGMA*X1))-1)/(SIGMA*X1))-B)
1960 LPRINT "CUSTO TOTAL ="; C8
1970 LPRINT STRING$(49,"-")
1980 C$=INKEY$
1990 IF C$="" THEN GOTO 1980
2000 RETURN
2010 REM *****
2020 REM LOTE OTIMO
2030 X(1)=SQR((2*KF*B)/(KE*(1-Z1)))
2040 X(2)=SQR((2*KF*B)/((KE+SIGMA*KP)*(1-Z1)))
2050 D=1-(SIGMA^2*KF)/(B*(KE+SIGMA*KP))
2060 X(3)=(B/SIGMA)*(EXP(SQR(-2*LOG(D)))-1)

```



```

2070 REM CUSTO TOTAL
2080 X(4)=KF*B+SQR(2*KE*(1-Z1)*KF*B)
2090 X(5)=KP*B+KF*(SIGMA/2)+SQR(2*(KE+SIGMA*KP)*(1-Z1)*KF*B)
2100 IF P#<>"INFINITO" THEN GOTO 2140
2110 D0=SQR((-2/SIGMAE2)*LOG(D))
2120 X(6)=KF*B+KF/D0+(KE/SIGMA+KP)*(B*(EXP(SIGMA*D0)-1)/(SIGMA*D0)-B)
2130 GOTO 2180
2140 GOSUB 3230
2150 X0=VAL(P#)/SIGMA*LOG(1-Z1*(1-EXP(SIGMA*DD(L))))
2160 CLS
2170 PRINT "ESCREVENDO A COMPARACAO DOS TRES MODELOS"
2180 LPRINT TAB(16) "COMPARACAO DOS MODELOS"
2190 LPRINT: LPRINT
2200 LPRINT STRING$(62,"-")
2210 LPRINT "   MODELO   I   LOTE OTIMO       CUSTO TOTAL   I       D A D O S
"
2220 LPRINT STRING$(12,"-");"I";STRING$(29,"-");"I";STRING$(19,"-")
2230 LPRINT TAB(12) "I"; TAB(42) "I"
2240 LPRINT " CLASSICO   I"; TAB(15) X(1); TAB(30) X(4);
2250 LPRINT TAB(42) "I   SIGMA =";SIGMA
2260 LPRINT TAB(12) "I"; TAB(42) "I   BETA = "; B
2270 LPRINT TAB(12) "I"; TAB(42) "I   RO = "; P#
2280 LPRINT TAB(12) "I"; TAB(42) "I   Kf = "; KF
2290 LPRINT " APROXIMADO I"; TAB(15) X(2); TAB(30) X(5);
2300 LPRINT TAB(42) "I   ke =";KE
2310 LPRINT TAB(12) "I"; TAB(42) "I   Kp = ";KP.
2320 LPRINT TAB(12) "I"; TAB(42) "I"
2330 LPRINT " EXATO COM I"; TAB(42) "I"
2340 IF P#<>"INFINITO" THEN GOTO 2370
2350 LPRINT " PERDA      I";TAB(15)X(3);TAB(30)X(6);TAB(42) "I"
2360 GOTO 2380
2370 LPRINT " PERDA      I";TAB(15) X0;TAB(30) GO;TAB(42) "I"
2380 LPRINT STRING$(62,"-")
2390 LPRINT "Obs: no Modelo Classico SIGMA = 0."
2400 A5#=INKEY#
2410 IF A5#="" THEN 2400
2420 RETURN
2430 CLS: INPUT "NUMERO DA TABELA"; K#
2440 LPRINT TAB(25) "TABELA ";K#: LPRINT:LPRINT
2450 LPRINT TAB(7) "SENSIBILIDADE DO MODELO CLASSICO QUANDO"
2460 LPRINT TAB(11) "ESTIMATIVAS INCORRETAS SAO USADAS"
2470 LPRINT: LPRINT
2480 CLS
2490 PRINT "ESCREVENDO A TABELA DE SENSIBILIDADE QUANDO"
2500 PRINT "   OS PARAMETROS VARIAM DE + OU - XX%"
2510 GOTO 2610
2520 REM *****
2530 CLS
2540 PRINT "ESCREVENDO A TABELA DE SENSIBILIDADE QUANDO"
2550 PRINT "   OS PARAMETROS VARIAM DE + OU - XX%"
2560 INPUT "NUMERO DA TABELA";K#

```



```

2570 LPRINT TAB(25) "TABELA "; K$: LPRINT:LPRINT
2580 LPRINT TAB(7) "SENSIBILIDADE DO MODELO APROXIMADO QUANDO"
2590 LPRINT TAB(11) "ESTIMATIVAS INCORRETAS SAO USADAS"
2600 LPRINT:LPRINT
2610 IF SIGMA = 0 THEN M=3 ELSE M=4
2620 PRINT "ENTRE COM O NUMERO DE COLUNAS DA TABELA"
2630 INPUT "N = "; N
2640 INPUT "DESEJA A TABELA COM OS AFASTAMENTOS ATUAIS (S/N)"; Z$
2650 IF Z$="S" THEN Z=1000
2660 PRINT "RAZAO DE AFASTAMENTO DOS PARAMETROS:"
2670 FOR J=1 TO N
2680 IF Z$="S" AND (A(1,J)<>0 AND A(3,J)<>0) THEN 2850
2690 IF Z$="S" THEN 2790
2700 Z=1000
2710 PRINT "ENTRE COM OS DADOS DA COLUNA "; J
2720 INPUT "B'/B="; A(1,J)
2730 INPUT "Ke'/Ke="; A(2,J)
2740 INPUT "Kf'/Kf="; A(3,J)
2750 IF SIGMA<>0 THEN INPUT "Kp'/Kp ="; A(4,J) ELSE A(4,J) = 1
2760 PRINT
2770 Z$="S"
2780 GOTO 2680
2790 CLS
2800 PRINT "AFASTAMENTOS INICIAIS INCORRETOS -"
2810 GOSUB 450
2820 INPUT "ENTRAR COM OS AFASTAMENTOS DOS PARAMETROS (S/N)"; Z4$
2830 IF Z4$="S" THEN 2710
2840 GOTO 3100
2850 B1 = A(3,J)*A(1,J)
2860 B2 = (1+SIGMA*A1)/(A(2,J)+SIGMA*A(4,J)*A1)
2870 B(J) = SQR(B1*B2)
2880 C(J) = 0.5*(B(J)+1/B(J))
2890 IF Z<N THEN 2920
2900 INPUT "CONFIRMA OS DADOS (S/N)"; D$
2910 IF D$="N" THEN 2710 ELSE Z$="N"
2920 NEXT J
2930 CLS
2940 PRINT "ESCREVENDO A TABELA DE SENSIBILIDADE"
2950 IF SIGMA = 0 THEN GOSUB 3110 : GOTO 3070
2960 LPRINT STRING$(62,"-")
2970 LPRINT TAB(1) "B'/B"; TAB(10) "Ke'/Ke"; TAB(20) "Kf'/Kf";
2980 LPRINT TAB(30) "Kp'/Kp"; TAB(38) "I"; TAB(41) "X'/X0";
2990 LPRINT TAB(51) "F'/F0"
3000 LPRINT STRING$(38,"-"); "I"; STRING$(23,"-")
3010 FOR I=1 TO N
3020 LPRINT TAB(1) A(1,I); TAB(10) A(2,I); TAB(20) A(3,I);
3030 LPRINT TAB(30) A(4,I); TAB(38) "I"; TAB(40) B(I); TAB(50) C(I)
3040 NEXT I
3050 LPRINT STRING$(62,"-")
3060 LPRINT "Obs: RO = INFINITO."
3070 INPUT "DESEJA CONCLUIR O TRABALHO? (S/N)"; A$
3080 IF A$="S" THEN 3580

```

```

3090 GOTO 290
3100 RETURN
3110 REM *****
3120 LPRINT STRING$(55,"-")
3130 LPRINT TAB(1) "B'/B"; TAB(10) "Ke'/ke"; TAB(20) "Kf'/Kf";
3140 LPRINT TAB(30) "I"; TAB(35) "X'/X0"; TAB(45) "K'/K0"
3150 LPRINT STRING$(30,"-"); "I"; STRING$(24,"-")
3160 FOR I=1 TO N
3170 LPRINT TAB(1) A(1,I); TAB(10) A(2,I); TAB(20) A(3,I);
3180 LPRINT TAB(30) "I"; TAB(34) B(I); TAB(44) C(I)
3190 NEXT I
3200 LPRINT STRING$(55,"-")
3210 LPRINT "Obs: RO = INFINITO."
3220 RETURN
3230 REM *****
3240 DD(0)=0
3250 K=1
3260 DD(K)=DD(K-1)+0.1
3270 H(K)=KP*B+KF/DD(K)+((KE+SIGMA*KP)/SIGMA^2)*((VAL(P#)*
      LOG(1-Z1*(1-EXP(SIGMA*DD(K)))))/DD(K)-SIGMA*B)
3280 IF DD(K)>2 THEN GOTO 3310
3290 K=K+1
3300 GOTO 3260
3310 GO=H(1): L=1
3320 FOR I=2 TO 20
3330 IF H(I)<GO THEN GO=H(I): L=I
3340 NEXT I
3350 RETURN
3360 REM *****
3370 FOR I=1 TO 20
3380 PRINT@ 26, " ";
3390 FOR J=2 TO 10
3400 NEXT J
3410 PRINT@ 26, "EXPLICACOES";
3420 NEXT I
3430 RETURN
3440 REM *****
3450 PRINT@ 133, "Este programa tem por meta encontrar o lote otimo, o";
3460 PRINT@ 197, "CUSTO TOTAL da FUNCAO OBJETIVA com este lote e ela-";
3470 PRINT@ 261, "borar tabelas para o estudo da SENSIBILIDADE em re-";
3480 PRINT@ 325, "lacao ao lote otimo e parametros de cada Modelo ora";
3490 PRINT@ 389, "apresentado neste trabalho.";
3500 PRINT@ 453, " ";
3510 PRINT@ 517, "As opcoes para obter estes resultados sao:";
3520 PRINT@ 581, " ";
3530 PRINT@ 645, "1 - MODELO CLASSICO";
3540 PRINT@ 709, "2 - MODELO APROXIMADO";
3550 PRINT@ 773, "3 - MODELO EXATO COM PERDA";
3560 PRINT@ 837, "4 - COMPARACAO DOS MODELOS";
3570 RETURN
3580 END

```



## MODELO CLASSICO

LOTE OTIMO	I	CUSTO TOTAL
100	I	3360
	I	
	I	
	I	
	I	

\*DADOS:  
 SIGMA = 0  
 BETA = 200  
 RO = INFINITO  
 Kf = 40  
 Ke = 1.6  
 Kp = 16

TABELA 1

SENSIBILIDADE DO MODELO CLASSICO  
 EM RELACAO AO LOTE OTIMO

ALFA	I	X'/X0	K'/K0
-.5	I	.5	1.25
-.2	I	.8	1.025
-.1	I	.9	1.00556
0	I	1	1
.1	I	1.1	1.00455
.2	I	1.2	1.01667
.5	I	1.5	1.08333
1	I	2	1.25
1.5	I	2.5	1.45

TABELA 5

SENSIBILIDADE DO MODELO CLASSICO QUANDO  
 ESTIMATIVAS INCORRETAS SAO USADAS

B'/B	Ke'/ke	Kf'/Kf	I	X'/X0	K'/K0
1.2	1.2	1.2	I	1.09545	1.00416
.8	1.2	1.2	I	.894427	1.00623
1.2	.8	1.2	I	1.34164	1.0435
1.2	1.2	.8	I	.894427	1.00623
.8	.8	1.2	I	1.09545	1.00416
.8	1.2	.8	I	.730297	1.0498
1.2	.8	.8	I	1.09545	1.00416
.8	.8	.8	I	.894427	1.00623

Obs: RO = INFINITO.

## MODELO CLASSICO

LOTE OTIMO	I	CUSTO TOTAL
458.258	I	3234.92

## \*DADOS:

SIGMA = 0  
 BETA = 200  
 RO = 210  
 Kf = 40  
 Ke = 1.6  
 Kp = 16

TABELA 2b

 SENSIBILIDADE DO MODELO CLASSICO  
 EM RELACAO AO LOTE OTIMO

ALFA	I	X'/X0	K'/K0
-0.5	I	.890891	1.00668
-0.2	I	.956357	1.001
-0.1	I	.978178	1.00024
0	I	1	1
0.1	I	1.02182	1.00023
0.2	I	1.04364	1.00091
0.5	I	1.10911	1.00537
1	I	1.21822	1.01954
1.5	I	1.32733	1.04036

Obs: B/P = .952381



MODELO APROXIMADO  
COM PERDA

.88.

LOTE OTIMO	I	CUSTO TOTAL
	I	
70.7107	I	3428.27
	I	
	I	

\*DADOS:  
SIGMA = .1  
BETA = 200  
RO = INFINITO  
Kf = 40  
Ke = 1.6  
Kp = 16

TABELA 6a

SENSIBILIDADE DO MODELO APROXIMADO EM RELACAO AO LOTE OTIMO

ALFA	I	X'/X0	F'/F0
	I		
-.5	I	.292893	1.85355
-.2	I	.717157	1.05578
-.1	I	.858579	1.01165
0	I	1	1
.1	I	1.14142	1.00876
.2	I	1.28284	1.03118
.5	I	1.70711	1.14645
1	I	2.41421	1.41421
1.5	I	3.12132	1.72085

TABELA 8b

SENSIBILIDADE DO MODELO APROXIMADO QUANDO ESTIMATIVAS INCORRETAS SAO USADAS

B'/B	Ke'/Ke	kf'/Kf	Kp'/Kp	I	X'/X0	F'/F0
				I		
1.2	1.2	1.2	1.2	I	1.09545	1.00416
.8	1.2	1.2	1.2	I	.894427	1.00623
1.2	.8	1.2	1.2	I	1.2	1.01667
1.2	1.2	.8	1.2	I	.894427	1.00623
1.2	1.2	1.2	.8	I	1.2	1.01667
.8	.8	.8	1.2	I	.8	1.025
.8	.8	1.2	.8	I	1.09545	1.00416
.8	1.2	.8	.8	I	.8	1.025
1.2	.8	.8	.8	I	1.09545	1.00416
.8	.8	.8	.8	I	.894427	1.00623

Obs: RO = INFINITO.

MODELO APROXIMADO  
COM PERDA

LOTE OTIMO	I	CUSTO TOTAL
	I	
	I	
324.037	I	3251.38
	I	
	I	

## \*DADOS:

SIGMA = .1  
BETA = 200  
RO = 210  
Kf = 40  
Ke = 1.6  
Kp = 16

TABELA 6

SENSIBILIDADE DO MODELO APROXIMADO  
EM RELACAO AO LOTE OTIMO

ALFA	I	X'/X0	F'/F0
	I		
	I		
-.5	I	.845697	1.01408
-.2	I	.938279	1.00203
-.1	I	.969139	1.00049
0	I	1	1
.1	I	1.03086	1.00046
.2	I	1.06172	1.00179
.5	I	1.1543	1.01031
1	I	1.30861	1.03639
1.5	I	1.46291	1.07324

Obs: B/P = .952381

## MODELO EXATO COM PERDA

LOTE OTIMO	I	CUSTO TOTAL
71.9786	I I I I	3427.64

## \*DADOS:

SIGMA = .1  
 BETA = 200  
 RO = INFINITO  
 Kf = 40  
 Ke = 1.6  
 Kp = 16

## \*\*\* RESULTADO PELO METODO DE NEWTON \*\*\*

VALDR INICIAL = .5

PRECISAO REQUERIDA = 5E-05

LIMITE DE ITERACOES = 20

I= 0	X= .5	F(X)= 6.34909E-04
I= 1	X= .371385	F(X)= 7.89166E-05
I= 2	X= .350091	F(X)= 2.26498E-06
I= 3	X= .349444	F(X)= -5.96046E-08
I= 4	X= .349461	F(X)= 0

LOTE OTIMO= 71.1279

CUSTO TOTAL = 3427.62

## MODELO EXATO COM PERDA

LOTE OTIMO	I	CUSTO TOTAL
341.308	I	3248.15

\*DADOS:  
SIGMA = .1  
BETA = 200  
RO = 210  
Kf = 40  
Ke = 1.6  
Kp = 16



## COMPARACAO DOS MODELOS

MODELO	I	LOTE OTIMO	CUSTO TOTAL	I	D A D O S
CLASSICO	I	100	3360	I	SIGMA = .1
	I			I	BETA = 200
	I			I	RO = INFINITO
	I			I	Kf = 40
APROXIMADO	I	70.7107	3428.27	I	ke = 1.6
	I			I	Kp = 16
EXATO COM PERDA	I	71.9786	3427.64	I	

Obs: no Modelo Classico SIGMA = 0.

## COMPARACAO DOS MODELOS

MODELO	I	LOTE OTIMO	CUSTO TOTAL	I	D A D O S
CLASSICO	I	316.228	32506	I	SIGMA = .1
	I			I	BETA = 2000
	I			I	RO = INFINITO
	I			I	Kf = 40
APROXIMADO	I	223.607	32717.5	I	ke = 1.6
	I			I	Kp = 16
EXATO COM PERDA	I	224.731	32717.5	I	

Obs: no Modelo Classico SIGMA = 0.



## COMPARACAO DOS MODELOS

MODELO	I	LOTE OTIMO	CUSTO TOTAL	I	D A D O S
CLASSICO	I	458.258	3234.92	I	SIGMA = .1
	I			I	BETA = 200
	I			I	RO = 210
	I			I	Kf = 40
APROXIMADO	I	324.037	3251.38	I	ke = 1.6
	I			I	Kp = 16
EXATO COM PERDA	I	341.308	3248.15	I	

Obs: no Modelo Classico SIGMA = 0.

## COMPARACAO DOS MODELOS

MODELO	I	LOTE OTIMO	CUSTO TOTAL	I	D A D O S
CLASSICO	I	105.132	3352.19	I	SIGMA = .1
	I			I	BETA = 200
	I			I	RO = 2100
	I			I	Kf = 40
APROXIMADO	I	74.3392	3417.23	I	ke = 1.6
	I			I	Kp = 16
EXATO COM PERDA	I	81.4643	3417.14	I	

Obs: no Modelo Classico SIGMA = 0.

## COMPARACAO DOS MODELOS

MODELO	I	LOTE OTIMO	CUSTO TOTAL	I	D A D O S
CLASSICO	I	100.48	3359.24	I	SIGMA = .1
	I			I	BETA = 200
	I			I	RO = 21000
	I			I	Kf = 40
APROXIMADO	I	71.0498	3427.19	I	ke = 1.6
	I			I	Kp = 16
EXATO COM PERDA	I	60.8716	3426.3	I	

Obs: no Modelo Classico SIGMA = 0.

## COMPARACAO DOS MODELOS

,94.

MODELO	I	LOTE OTIMO	CUSTO TOTAL	I	D A D O S
CLASSICO	I	1449.14	32110.4	I	SIGMA = .1
	I			I	BETA = 2000
	I			I	RO = 2100
	I			I	Kf = 40
APROXIMADO	I	1024.69	32158.1	I	ke = 1.6
	I			I	Kp = 16
EXATO COM PERDA	I	1001.17	32154.9	I	

Obs: no Modelo Classico SIGMA = 0.

## COMPARACAO DOS MODELOS

MODELO	I	LOTE OTIMO	CUSTO TOTAL	I	D A D O S
CLASSICO	I	332.455	32481.3	I	SIGMA = .1
	I			I	BETA = 2000
	I			I	RO = 21000
	I			I	Kf = 40
APROXIMADO	I	235.081	32682.6	I	ke = 1.6
	I			I	Kp = 16
EXATO COM PERDA	I	200.861	32675.4	I	

Obs: no Modelo Classico SIGMA = 0.

## COMPARACAO DOS MODELOS

MODELO	I	LOTE OTIMO	CUSTO TOTAL	I	D A D O S
CLASSICO	I	317.744	32503.6	I	SIGMA = .1
	I			I	BETA = 2000
	I			I	RO = 210000
	I			I	Kf = 40
APROXIMADO	I	224.679	32714.1	I	ke = 1.6
	I			I	Kp = 16
EXATO COM PERDA	I	200.678	32617.1	I	

Obs: no Modelo Classico SIGMA = 0.

APENDICE C

Alguns valores da Funcao Objetiva do Modelo  
Exato com Perda, quando RO e' FINITO.

C. 1 - \*DADOS:  
SIGMA = .1  
BETA = 200  
RO = 200  
Kf = 40  
Ke = 1.6  
Kp = 16

D	I	H(D)
.1	I	3599.84
.2	I	3399.93
.3	I	3333.28
.4	I	3299.99
.5	I	3280
.6	I	3266.65
.7	I	3257.14
.8	I	3249.99
.9	I	3244.45
1	I	3240
1.1	I	3236.36
1.2	I	3233.34
1.3	I	3230.77
1.4	I	3228.57
1.5	I	3226.67
1.6	I	3225
1.7	I	3223.54
1.8	I	3222.23
1.9	I	3221.06
2	I	3220

O VALOR MINIMO OCORRE EM D = 2  
O VALOR MINIMO E': 3220  
LOTE OTIMO = 400

PARA  $0 < D \leq 1$  O MINIMO OCORRE EM D0 = 1  
O VALOR MINIMO DA FUNCAO NESTE INTERVALO E': 3240  
LOTE OTIMO NESTE INTERVALO = 200

## C. 2 - \*DADOS:

SIGMA = .1  
 BETA = 200  
 RD = 210  
 Kf = 40  
 Ke = 1.6  
 Kp = 16

D	I	H(D)
.1	I	3601.44
.2	I	3402.94
.3	I	3337.85
.4	I	3306.03
.5	I	3287.49
.6	I	3275.66
.7	I	3267.59
.8	I	3261.9
.9	I	3257.79
1	I	3254.79
1.1	I	3252.59
1.2	I	3250.98
1.3	I	3249.82
1.4	I	3249.03
1.5	I	3248.53
1.6	I	3248.24
1.7	I	3248.15
1.8	I	3248.22
1.9	I	3248.42
2	I	3248.71

O VALOR MINIMO OCORRE EM D = 1.7  
 O VALOR MINIMO E': 3248.15  
 LOTE OTIMO = 341.308

PARA  $0 < D \leq 1$  O MINIMO OCORRE EM  $D_0 = 1$   
 O VALOR MINIMO DA FUNCAO NESTE INTERVALO E': 3254.79  
 LOTE OTIMO NESTE INTERVALO = 200.462



C. 3 - \*DADOS:  
 SIGMA = .1  
 BETA = 200  
 RD = 2100  
 Kf = 40  
 Ke = 1.6  
 Kp = 16

D	I	H(D)
	I	
.1	I	3627.54
.2	I	3457.66
.3	I	3420.93
.4	I	3417.14
.5	I	3426.53
.6	I	3443.06
.7	I	3463.64
.8	I	3486.6
.9	I	3511.24
1	I	3537.43
1.1	I	3564.45
1.2	I	3592.09
1.3	I	3620.56
1.4	I	3649.58
1.5	I	3678.93
1.6	I	3708.66
1.7	I	3738.85
1.8	I	3769.38
1.9	I	3800.09
2	I	3831.2

O VALOR MINIMO OCORRE EM  $D = .4$   
 O VALOR MINIMO E': 3417.14  
 LOTE OTIMO = 81.4643

PARA  $0 < D \leq 1$  O MINIMO OCORRE EM  $D_0 = .4$   
 O VALOR MINIMO DA FUNCAO NESTE INTERVALO E': 3417.14  
 LOTE OTIMO NESTE INTERVALO = 81.4643



C. 4 - \*DADOS:  
 SIGMA = .1  
 BETA = 200  
 RO = 21000  
 Kf = 40  
 Ke = 1.6  
 Kp = 16

D	I	H(D)
.1	I	3621.71
.2	I	3463.35
.3	I	3426.3
.4	I	3429.29
.5	I	3439.97
.6	I	3461.43
.7	I	3483.51
.8	I	3510.47
.9	I	3538.85
1	I	3567.94
1.1	I	3598.05
1.2	I	3629.85
1.3	I	3660.39
1.4	I	3693.9
1.5	I	3726.09
1.6	I	3759.29
1.7	I	3793.65
1.8	I	3827.73
1.9	I	3861.74
2	I	3897.2

O VALOR MINIMO OCORRE EM D = .3  
 O VALOR MINIMO E': 3426.3  
 LOTE OTIMO = 60.8716

PARA  $0 < D \leq 1$  O MINIMO OCORRE EM  $D_0 = .3$   
 O VALOR MINIMO DA FUNCAO NESTE INTERVALO E': 3426.3  
 LOTE OTIMO NESTE INTERVALO = 60.8716

C. 5 - \*DADOS:  
 SIGMA = .1  
 BETA = 2000  
 RD = 2000  
 Kf = 40  
 Ke = 1.6  
 Kp = 16

D	I	H(D)
.1	I	32398.4
.2	I	32199.3
.3	I	32132.8
.4	I	32099.9
.5	I	32080
.6	I	32066.5
.7	I	32057.1
.8	I	32049.9
.9	I	32044.5
1	I	32040
1.1	I	32036.4
1.2	I	32033.4
1.3	I	32030.8
1.4	I	32028.6
1.5	I	32026.7
1.6	I	32025
1.7	I	32023.6
1.8	I	32022.3
1.9	I	32021.1
2	I	32020

O VALOR MINIMO OCORRE EM  $D = 2$   
 O VALOR MINIMO E': 32020  
 LOTE OTIMO = 4000

PARA  $0 < D \leq 1$  O MINIMO OCORRE EM  $D_0 = 1$   
 O VALOR MINIMO DA FUNCAO NESTE INTERVALO E': 32040  
 LOTE OTIMO NESTE INTERVALO = 2000

C. 6 - \*DADOS:  
 SIGMA = .1  
 BETA = 2000  
 RO = 2100  
 Kf = 40  
 Ke = 1.6  
 Kp = 16

D	I	H(D)
.1	I	32414.4
.2	I	32229.4
.3	I	32178.5
.4	I	32160.3
.5	I	32154.9
.6	I	32156.6
.7	I	32161.6
.8	I	32169
.9	I	32177.9
1	I	32187.9
1.1	I	32198.6
1.2	I	32209.8
1.3	I	32221.3
1.4	I	32233.1
1.5	I	32245.3
1.6	I	32257.4
1.7	I	32269.7
1.8	I	32282.2
1.9	I	32294.7
2	I	32307.1

O VALOR MINIMO OCORRE EM D = .5  
 O VALOR MINIMO E': 32154.9  
 LOTE OTIMO = 1001.17

PARA  $0 < D \leq 1$  O MINIMO OCORRE EM DO = .5  
 O VALOR MINIMO DA FUNCAO NESTE INTERVALO E': 32154.9  
 LOTE OTIMO NESTE INTERVALO = 1001.17

C. 7 - \*DADOS:  
 SIGMA = .1  
 BETA = 2000  
 RD = 21000  
 Kf = 40  
 Ke = 1.6  
 Kp = 16

D	I	H(D)
	I	
.1	I	32675.4
.2	I	32776.6
.3	I	33009.3
.4	I	33271.4
.5	I	33545.3
.6	I	33830.6
.7	I	34122.1
.8	I	34416
.9	I	34712.4
1	I	35014.3
1.1	I	35317.3
1.2	I	35620.9
1.3	I	35928.6
1.4	I	36238.6
1.5	I	36549.3
1.6	I	36861.6
1.7	I	37176.8
1.8	I	37493.8
1.9	I	37811.4
2	I	38132

O VALOR MINIMO OCORRE EM D = .1  
 O VALOR MINIMO E': 32675.4  
 LOTE OTIMO = 200.861

PARA  $0 < D \leq 1$  O MINIMO OCORRE EM  $D_0 = .1$   
 O VALOR MINIMO DA FUNCAO NESTE INTERVALO E': 32675.4  
 LOTE OTIMO NESTE INTERVALO = 200.861



C. 8 - \*DADOS:  
 SIGMA = .1  
 BETA = 2000  
 RD = 210000  
 Kf = 40  
 Ke = 1.6  
 Kp = 16

D	I	H(D)
.1	I	32617.1
.2	I	32833.5
.3	I	33063
.4	I	33392.9
.5	I	33679.7
.6	I	34014.3
.7	I	34320.8
.8	I	34654.7
.9	I	34988.5
1	I	35319.4
1.1	I	35653.2
1.2	I	35998.5
1.3	I	36326.9
1.4	I	36681.8
1.5	I	37020.9
1.6	I	37367.9
1.7	I	37724.7
1.8	I	38077.3
1.9	I	38427.9
2	I	38792

O VALOR MINIMO OCORRE EM  $D = .1$   
 O VALOR MINIMO  $E'$ : 32617.1  
 LOTE OTIMO = 200.678

PARA  $0 < D \leq 1$  O MINIMO OCORRE EM  $D_0 = .1$   
 O VALOR MINIMO DA FUNCAO NESTE INTERVALO  $E'$ : 32617.1  
 LOTE OTIMO NESTE INTERVALO = 200.678