



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**A Eletrodinâmica e a Gravidade Linearizada Sob os
Efeitos da Violação da Invariância de Lorentz na
Escala de Planck**

Thiago Alves de Sá Muniz Sampaio

Campina Grande - PB

Março 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**A Eletrodinâmica e a Gravidade Linearizada Sob os
Efeitos da Violação da Invariância de Lorentz na
Escala de Planck**

Thiago Alves de Sá Muniz Sampaio

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Áreas de Concentração: Teoria Quântica de Campos e Relatividade Geral.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos.

Campina Grande - PB

Março de 2018

S192e

Sampaio, Thiago Alves de Sá Muniz.

A eletrodinâmica e a gravidade linearizada sob os efeitos da violação da invariância de Lorentz na escala de Planck / Thiago Alves de Sá Muniz Sampaio. – Campina Grande, 2018.

75 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.

"Orientação: Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos".

Referências.

1. Violação da Invariância de Lorentz. 2. Teoria de Campos Efetiva. 3. Fenomenologia de Ondas Eletromagnéticas. 4. Fenomenologia de Ondas Gravitacionais. 5. Lentes Gravitacionais. I. Passos, Eduardo Marcos Rodrigues dos. II. Título.

CDU 537.8(043)

ELECTRODYNAMICS AND LINEARIZED GRAVITY UNDER
PLANCK-SCALE LORENTZ INVARIANCE VIOLATION
EFFECTS

THIAGO ALVES DE SÁ MUNIZ SAMPAIO

Aprovada em _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
Orientador

Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos
Examinador

Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota
Examinador

Prof. Dr.
Examinador

Mantenha seus pensamentos positivos, porque
seus pensamentos tornam-se suas palavras.
Mantenha suas palavras positivas, porque suas
palavras tornam-se suas atitudes. Mantenha suas
atitudes positivas, porque suas atitudes
tornam-se seus hábitos. Mantenha seus hábitos
positivos, porque seus hábitos tornam-se seus
valores. Mantenha seus valores positivos, porque
seus valores... Tornam-se seu destino.

Mahatma Gandhi

Agradecimentos

Quero agradecer a Deus, inteligência suprema do Universo, por possibilitar a minha existência neste mundo. Agradeço muito aos meus pais, ao meu irmão Thulio e a Silmara, pelo constante apoio, dedicação e atenção. Agradeço aos meus colegas do mestrado, pelos momentos de descontração no departamento e aos meus amigos em geral, pelas resenhas. Agradeço a todos os professores que, de alguma forma, contribuíram para o meu desenvolvimento acadêmico durante todo esse tempo. Agradeço em particular ao meu orientador, Prof. Dr. Eduardo Passos, pela oportunidade da realização deste trabalho e por toda a paciência que teve em me orientar. Por fim, sou grato ao programa de pós-graduação em Física da UFCG pelo acolhimento, e pela CAPES, pelo suporte financeiro.

Lista de Abreviaturas e Siglas

VIL - Violação da Invariância de Lorentz

TRG - Teoria da Relatividade Geral

EMP - Extensão do Modelo Padrão

GQ - Gravitação Quântica

TCE - Teoria de Campos Efetiva

CPT - *Charge-Parity-Time* (Carga, paridade e tempo)

GRB - *Gamma-ray burst* (Explosão de Raios Gamma)

Resumo

Partindo da motivação de que algumas teorias de gravitação quântica preveem a Violação da Invariância de Lorentz (VIL) em níveis de energia em torno da escala de Planck, propomos a construção de novos formalismos que abordam possíveis efeitos da VIL na Eletrodinâmica e na Gravidade linearizada. Esses formalismos se baseiam em teorias de campos efetivas capazes de modificar as lagrangianas comumente usadas através de termos de dimensão de massa arbitrária com altas ordens derivativas que incluem um campo de fundo constante controlando a intensidade da VIL nos modelos. Isso produz modificações nas equações de movimento e nas relações de dispersão das teorias de modo semelhante ao procedimento de Myers-Pospelov. Espera-se que estes operadores sejam capazes de descrever a VIL típica das escalas fundamentais de altas energias da gravitação quântica. Também estudamos aspectos teóricos relacionados a consistência da Eletrodinâmica modificada por meio da estabilidade, causalidade e unitariedade, com o cálculo do propagador de Feynman do fóton na presença da VIL. Depois estudamos o contexto fenomenológico dos modelos considerando efeitos de atraso temporal entre dois fótons e entre dois grávitons, bem como efeitos de birrefringência entre dois fótons, utilizando para isso dados vindos de eventos astrofísicos de emissão de ondas eletromagnéticas provenientes de explosões de raios gamma, bem como da emissão de ondas gravitacionais detectadas até então. Também consideramos o fenômeno de atraso temporal devido a presença de lentes gravitacionais. Por fim, discutimos os limites experimentais sobre a VIL em torno da escala da energia de Planck.

Palavras-chave: Violação da invariância de Lorentz, Teoria de campos efetiva, Fenomenologia de ondas eletromagnéticas, Fenomenologia de ondas gravitacionais, Lentes gravitacionais.

Abstract

Based on the motivation that some quantum gravity theories predict the Lorentz Invariance Violation (LIV) around Planck-scale energy levels, we propose the construction of new formalisms that addresses the possible effects of LIV in Electrodynamics and in Linearized Gravity. These formalisms are based on effective field theories capable to modify the commonly used lagrangians through high-derivative arbitrary mass dimension terms that includes a constant background field controlling the intensity of LIV in the models. This produces modifications in the equations of motion and in the dispersion relations of the theories in a manner that is similar to the Myers-Pospelov approach. We expect that these operators could be able to describe the typical LIV of the fundamental quantum gravity high-energy scales. We also studied theoretical aspects related to the consistency of the modified Electrodynamics through the stability, the causality and the unitarity, with the photon Feynman propagator computation in the presence of LIV. Then we have studied the phenomenological context of the models considering time delay effects between two photons and between two gravitons, as well as effects of birefringence between two photons, using the data coming from astrophysical events of electromagnetic waves emissions coming from gamma-ray bursts, as well as the gravitational waves emissions detected so far. We also consider the time delay phenomena due to the presence of gravitational lenses. Finally, we discuss the experimental limits on LIV around the Planck energy scale.

Keywords: Lorentz invariance violation, Effective field theory, Electromagnetic waves phenomenology, Gravitational waves phenomenology, Gravitational lenses.

Sumário

Introdução	1
1 A Eletrodinâmica e a Gravitação Linearizada	5
1.1 A Eletrodinâmica Clássica	5
1.2 Gravitação	8
1.2.1 A Relatividade Geral	8
1.2.2 Linearização da gravidade	9
1.2.3 Propagação de Ondas Gravitacionais	11
2 Extensão de altas ordens derivativas para a Eletrodinâmica	14
2.1 O modelo de Myers-Pospelov	15
2.2 Construção dos operadores de altas ordens derivativas	16
2.3 Extensão CPT-Par	21
2.4 Extensão CPT-Ímpar	22
2.5 Análise de consistência das teorias	24
2.5.1 Teoria modificada CPT-par	24
2.5.2 Teoria modificada CPT-ímpar	28
3 Extensão de altas ordens derivativas para a Gravidade Linearizada	32
3.1 Construção de operadores de altas ordens derivativas	32
3.2 Extensão CPT-Par	35
3.3 Extensão CPT-ímpar	37

4 Aspectos fenomenológicos	39
4.1 Atraso temporal de voo	40
4.1.1 Dispersão nas ondas gravitacionais	41
4.1.2 Dispersão nas ondas eletromagnéticas	43
4.2 Birrefringência cosmológica	44
4.3 Atraso temporal por lentes gravitacionais	45
4.3.1 Modelo para o estudo de lentes gravitacionais	46
4.3.2 Estudo fenomenológico	48
5 Considerações Finais	50
A Transformações CPT	52
A.1 Inversão espacial (paridade)	52
A.2 Inversão temporal	52
A.3 Conjugação de carga	53
A.4 Teste da invariância CPT	53
B Paralelo com a Extensão do Modelo Padrão	55
B.1 Setor Eletromagnético	55
B.2 Setor da Gravidade Linearizada	57
C Cálculo dos propagadores	59
C.1 Caso CPT-Par	60
C.2 Caso CPT-Ímpar	61
D Decomposição do campo de calibre na gravidade	62
D.1 Caso CPT-Par	63
D.2 Caso CPT-Ímpar	64
E Demonstração da fórmula para o atraso temporal cosmológico	65
F Demonstração da fórmula para a rotação do vetor de polarização	68
Referências Bibliográficas	69

Introdução

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) de Einstein [1] e o modelo padrão de física de partículas representam juntas a mais elegante e bem sucedida descrição da natureza que existe até o momento na física. A primeira teoria descreve a gravidade a nível clássico, enquanto que a segunda engloba todos os outros fenômenos envolvendo as interações entre as partículas a nível quântico. Atualmente, espera-se que em energias próximas da escala de Planck, mais precisamente, da massa de Planck $M_P = 1,22 \times 10^{19}$ GeV¹, essas duas teorias de campo se fundam em uma única teoria unificada e quanticamente consistente da natureza [2].

As atuais candidatas para teoria de Gravitação Quântica (GQ) ainda enfrentam enormes dificuldades no que diz respeito a possibilidade de confirmação experimental direta, visto que qualquer experimento que vise identificar a natureza quântica da gravidade ou do espaço-tempo necessitaria de energias da ordem da escala de Planck, o que ainda está muito longe de se conseguir com os atuais aceleradores de partículas, como o LHC (*Large Hadron Collider*). No entanto, existe a possibilidade de detecção indireta de possíveis efeitos advindos da GQ em baixas energias [3].

Uma das possíveis janelas para se detectar esses resquícios experimentais seria através da quebra espontânea de simetrias do espaço-tempo. Na escala de Planck, acredita-se que o espaço-tempo deixa de assumir uma forma contínua para assumir uma forma discretizada ou granulada, com a presença de um comprimento fundamental mínimo $l_P = 1,6 \cdot 10^{-35}$ m, chamado de comprimento de Planck. Isso pode sugerir que uma das simetrias fundamentais da física, a simetria de Lorentz, pode ser quebrada nesse nível de

¹No sistema de unidades naturais que utilizamos neste trabalho, a energia de Planck e a massa de Planck são indistinguíveis.

energia. Na verdade, é esperado que o efeito de Violação da Invariância de Lorentz (VIL), se existir, seja muito pequeno em um regime de baixas energias devido a várias restrições experimentais [3], no entanto, é sugerido por Collins *et al.* [4] que pequenos efeitos de VIL ocorridos na escala de Planck possam ser detectados a um nível de baixas energias.

Apesar do importante papel desempenhado pela simetria de Lorentz na física de partículas fundamental, nas últimas duas décadas tem havido grande motivação para trabalhos que consideram a possível violação desta simetria [5]. De fato, as principais teorias candidatas de GQ, como a gravitação quântica em *loops* [6, 7], a gravidade de Horava-Lifshitz [8] e a teoria de cordas [9] predizem que em algum momento isto pode ocorrer na natureza.

Após Carroll, Field e Jackiw [10] utilizarem um quadri-vetor de fundo¹ para estudar possíveis efeitos da VIL na eletrodinâmica de Maxwell, Colladay e Kostelecky [11, 12] construíram uma Teoria de Campos Efetiva (TCE) a fim de investigarem a VIL em todos os setores do modelo padrão de partículas. Esse formalismo ficou conhecido como Extensão do Modelo Padrão (EMP), e foi incorporado ao formalismo da gravidade na Ref.[2].

O mecanismo da TCE com VIL consiste em se adicionar termos com operadores que violem a invariância de Lorentz nas respectivas lagrangianas de cada modelo, a fim de avaliar as possíveis modificações na equação de movimento e na relação de dispersão da teoria. Este método mostra-se bastante eficaz para propósitos de estudos fenomenológicos, visto que ele fornece um conjunto de regras suficientemente robustas para descrever efeitos de VIL sem a necessidade de saber detalhes sobre qualquer teoria fundamental de GQ [3]. De fato, muitos modelos de GQ podem ser reduzidos a uma TCE com uma VIL presente, como é mostrado nas Refs.[13, 14, 15].

Os operadores de VIL podem ser renormalizáveis, isto é, com dimensão de massa 3 ou 4 (nos quais a EMP se concentra), ou podem ser não-renormalizáveis, com dimensões iguais ou maiores que 5. Os operadores de VIL de dimensão 5 foram introduzidos pela primeira vez no trabalho pioneiro de Myers e Pospelov [16], que descobriram relações de dispersão modificadas de altas ordens advindas de uma TCE para os setores escalar, fermiônico e eletromagnético. Os operadores não-renormalizáveis, de maneira geral, ganharam

¹Um vetor de origem desconhecida

mais notoriedade nos últimos anos devido a possibilidade de que os termos possam ser suprimidos pela escala da energia/massa de Planck. Desta forma, estes operadores poderiam de alguma forma sondar possíveis relíquias de efeitos advindos de fenômenos na escala da GQ. Neste trabalho, iremos propor um formalismo para estudar a VIL utilizando um modelo diferenciado de TCE através de um vetor de fundo isotrópico.

Vários trabalhos tem focado em trabalhar com relações de dispersão modificadas (que podem ser advindas de uma TCE adjacente) para se estudar possíveis impactos que a VIL pode induzir fenomenologicamente, como visto nas Refs[17, 18]. O exemplo mais comum de uso de tais conceitos na fenomenologia é em eventos astrofísicos ou cosmológicos com emissão de partículas altamente energéticas. Tais eventos podem promover um efeito de VIL acumulativo devido as enormes distâncias das fontes e à expansão do Universo, podendo trazer uma esperança para validar ou invalidar teorias com VIL.

Muitos trabalhos apontaram que uma VIL ocorrida na produção de ondas eletromagnéticas pode resultar em variações consideráveis na forma como os fótons de fontes distantes se propagam, podendo sugerir inclusive efeitos de birrefringência no vácuo [10]. Amelino-Camelia foi o primeiro a propor que uma relação de dispersão modificada com VIL induz a um atraso temporal no tempo de voo entre fótons de altas energias e de baixas energias em fenômenos de emissão de raios gamma vindos de fontes a distâncias cosmológicas, conhecidos na astrofísica como *Gamma Ray Bursts* (GRBs) [19]. Desde então, inúmeros trabalhos tem utilizado eventos de GRBs para estudar os limites da VIL no setor do fóton [20, 21, 22, 23, 24]. Conseqüentemente, no setor gravitacional, vários trabalhos também proporam estudar possíveis efeitos de atraso temporal e/ou birrefringência em eventos de ondas gravitacionais [25, 26, 27, 28].

Este trabalho está organizado da seguinte forma: No Capítulo 1, é feita uma revisão sobre o formalismo covariante e lagrangiano na teoria clássica de campos para a Eletrodinâmica e para a linearização da TRG, com a demonstração de suas respectivas equações de onda usuais. No Capítulo 2, damos início a contribuição neste trabalho com a introdução e construção de um novo formalismo para operadores de VIL com dimensão arbitrária na eletrodinâmica de Maxwell, criando equações de onda e relações de dispersão modificadas. Também fizemos uma análise de consistência das teorias modificadas através

da estabilidade, causalidade e unitariedade, com o cálculo do propagador de Feynman das teorias.

No Capítulo 3, aplicamos o mesmo formalismo de maneira análoga para o caso da gravidade linearizada, criando equações de onda gravitacional modificadas com os efeitos da VIL, junto de relações de dispersão modificadas. No Capítulo 4, damos ênfase a análise fenomenológica dos modelos, estudando por meio de alguns eventos astrofísicos a possibilidade de atraso temporal ou birrefringência na propagação de ondas eletromagnéticas e gravitacionais. Também estudamos o possível efeito de VIL do atraso temporal devido a presença de lentes gravitacionais em eventos de emissão de ondas eletromagnéticas e gravitacionais. Por fim, no Capítulo 5 apresentamos as considerações finais do trabalho.

Neste trabalho utilizamos o formalismo covariante¹, onde um quadrivetor é representado pela notação x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), em que as três coordenadas espaciais x^i ($i = 1, 2, 3$) correspondem a posição espacial do evento, enquanto a coordenada x^0 denota o tempo ($x^0 = ct$), onde c é a velocidade da luz no vácuo. Utilizaremos o sistema de unidades naturais, no qual $c = \hbar = 1$, em que \hbar é a constante de Planck. A métrica de fundo utilizada é a métrica de Minkowski². Nesta métrica, um infinitesimal de distância (elemento de linha) entre dois eventos no espaço-tempo é dado por $ds^2 = c^2 dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$, onde dx_0 é o intervalo infinitesimal de tempo, e dx_i é um deslocamento infinitesimal na direção espacial x^i . Em notação covariante, o elemento de linha acima pode ser reescrito na forma $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, onde $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski. Aqui, usaremos a convenção $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

¹Formalismo adotado na relatividade especial e na teoria quântica de campos, onde reina a invariância por transformações de Lorentz.

²Métrica correspondente a um espaço-tempo plano

Capítulo 1

A Eletrodinâmica e a Gravitação Linearizada

1.1 A Eletrodinâmica Clássica

A Eletrodinâmica elaborada por Maxwell se mostrou uma das teorias de maior sucesso em toda a física por conseguir estudar uma ampla gama de fenômenos naturais - como a propagação das ondas eletromagnéticas - através de poucas equações. Nesta seção, utilizaremos o formalismo da teoria clássica de campos para mostrar que, se partimos de uma dada densidade de lagrangiana, conseguiremos obter as equações de Maxwell, bem como a equação de propagação da onda eletromagnética no vácuo.

Utilizando o formalismo lagrangiano, podemos definir a densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + j_{\mu}A^{\mu}, \quad (1.1)$$

em que $j^{\mu} \equiv (\rho, \vec{j})$ é a quadri-corrente e $F^{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético. Esse tensor é antissimétrico e sem traço, e é dado em função dos campos elétrico e magnético por $F^{0i} = E^i$ e $F^{ij} = \epsilon^{ijk}B_k$, em que ϵ^{ijk} é o símbolo de Levi-Civita. É importante ressaltar que o escalar $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ é um invariante sob transformações de Lorentz, o que torna a densidade de lagrangiana (1.1) invariante de Lorentz.

Sabendo das relações dos campos com os potenciais escalar e vetor ($\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

e $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$), podemos escrever $F^{\mu\nu}$ em termos do quadri-potencial $A^\mu \equiv (\phi, \vec{A})$ como

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (1.2)$$

onde $\partial_\mu \equiv (\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla})$ é o quadri-divergente. Substituindo a (1.2) na (1.1), obtemos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu \right) + j_\mu A^\mu. \quad (1.3)$$

A partir dela, podemos obter as equações de Maxwell não-homogêneas utilizando o processo variacional na ação $S = \int d^4x \mathcal{L}$. Após realizar integrações por partes, podemos variar esta ação com respeito à A_μ e igualar a zero, determinando a equação de movimento

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = \square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu + j^\mu = 0. \quad (1.4)$$

Desta forma, utilizando novamente a Eq.(1.2), somos levados à

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (1.5)$$

que corresponde as equações de Maxwell não-homogêneas: lei de Gauss ($\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$) e lei de Ampère-Maxwell ($\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}$). Definindo o tensor eletromagnético dual $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\rho\sigma\mu\nu} F_{\rho\sigma}$, escrito em termos do tensor de Levi-Civita unitário e totalmente antissimétrico, ficamos com a equação de movimento

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (1.6)$$

Em termos dos campos, temos $\tilde{F}^{0i} = -B^i$ e $\tilde{F}^{ij} = \epsilon^{ijk} E_k$. Logo, a (1.6) consiste nas duas equações de Maxwell homogêneas: a lei de Gauss magnética ($\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$) e a lei de Faraday ($\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$).

Quando realizamos uma transformação de calibre no potencial vetor:

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda, \quad (1.7)$$

o tensor eletromagnético permanece inalterado, e portanto, tem a propriedade de ser invariante por transformações de calibre. Devido a essa propriedade, A^μ é também chamado de campo de calibre, e desempenha um papel mais importante na teoria de campos do que os próprios campos elétrico e magnético.¹

¹Na teoria quântica de campos, o quadri-vetor A_μ consiste no campo vetorial que descreve os fótons (bósons de spin-1), que são as partículas intermediadoras das interações eletromagnéticas.

Aplicando a transformação de calibre (1.7) na quantidade $\partial_\mu A^\mu$, obtemos

$$\partial_\mu A^\mu \rightarrow \partial_\mu A^\mu + \square \Lambda, \quad (1.8)$$

onde $\square \equiv \partial_\alpha \partial^\alpha$ é o quadri-Laplaciano (ou operador d'Alambertiano). Escolhendo um Λ particular que satisfaça $\square \Lambda = -\partial_\mu A^\mu$, ficamos com a condição $\partial_\mu A^\mu = 0$, que é chamada de calibre de Lorentz. Se considerarmos o vácuo, ou seja, a ausência de fontes ($j^\mu = 0$), podemos partir da Eq.(1.5) ou da Eq.(1.6) e utilizar a Eq.(1.2) e o calibre de Lorentz para obtermos a equação de onda eletromagnética

$$\square A^\mu = 0. \quad (1.9)$$

Podemos considerar o Ansatz de onda plana monocromática, ou seja,

$$A^\mu = \chi^\mu e^{-ik_\lambda x^\lambda}, \quad (1.10)$$

onde $k^\mu \equiv (\omega, \vec{k})$ é o quadrivetor de onda, dado em função da frequência angular ω e do vetor de onda \vec{k} ².

Substituindo a (1.10) na (1.9), ficamos com,

$$-k^2 \chi^\mu e^{-ik_\lambda x^\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad -k^2 A^\mu = 0, \quad (1.11)$$

onde $k^2 \equiv k_\mu k^\mu$. Para $A^\mu \neq 0$, obtemos

$$k^2 = 0, \quad (1.12)$$

que é a relação de dispersão covariante. Em termos das componentes, a Eq.(1.12) fica

$$\omega^2 - |\vec{k}|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \pm |\vec{k}|. \quad (1.13)$$

Esta é a relação de dispersão usual para a propagação de ondas eletromagnéticas de frequência ω em um espaço na ausência de fontes. A velocidade de grupo $\frac{d\omega}{d|\vec{k}|}$ e a velocidade de fase $\frac{\omega}{|\vec{k}|}$ são ambas iguais a 1, que é o valor da velocidade da luz no vácuo no nosso sistema de unidades. Isso nos mostra que o meio considerado é não dispersivo, visto que a velocidade de propagação da onda não depende da frequência da mesma.

²O quadrivetor k^μ também pode ser chamado de quadri-momento, visto que no sistema de unidades naturais, a frequência é indistinguível da energia assim como o vetor de onda é indistinguível do momento linear.

1.2 Gravitação

1.2.1 A Relatividade Geral

A teoria de Newton da gravitação obteve sucesso ao descrever muitos aspectos que estão presentes no nosso dia a dia, além de explicar com precisão os movimentos dos corpos celestes no universo. A TRG de Einstein, por outro lado, criou um conceito mais amplo para gravidade, conseguindo explicar como se dá a interação gravitacional para corpos em altas velocidades (comparáveis a da luz) e em campos gravitacionais intensos.

Conceitualmente, a relatividade geral é diferente da teoria de Newton, visto que ela introduz a noção de geometria do espaço-tempo. O pano de fundo geométrico onde ocorrem os fenômenos descritos pela TRG é o espaço-tempo, que é matematicamente descrito como um *manifold* (variedade ou caracterização da geometria do espaço-tempo) quadri-dimensional cujos pontos são chamados de eventos. O movimento de uma partícula teste é descrito por uma curva no espaço-tempo. A distância ds entre dois eventos vizinhos, um com coordenadas x^μ e o outro com coordenadas $x^\mu + dx^\mu$, pode ser expressa como uma função de coordenadas via um tensor de segunda ordem simétrico $g_{\mu\nu}(x^\lambda) = g_{\nu\mu}(x^\lambda)$ da seguinte forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.14)$$

O tensor simétrico é chamado de tensor métrico (ou simplesmente métrica). A Eq.(1.14) é uma generalização quadridimensional do processo de medição de distâncias entre dois pontos de um espaço Euclidiano tridimensional. Para o espaço-tempo de Minkowski (o espaço-tempo plano da relatividade especial), tem-se que $g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

A informação sobre o grau de curvatura do espaço-tempo está codificada na métrica. De acordo com a TRG, qualquer distribuição de massa ‘distorce’ o espaço-tempo. O tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ é uma função do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e das suas derivadas primeira e segunda, e é dado por

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (1.15)$$

onde os gammas (Γ) são os símbolos de Christoffel, definidos como

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}(\partial_{\alpha}g_{\beta\delta} + \partial_{\beta}g_{\delta\alpha} - \partial_{\delta}g_{\alpha\beta}). \quad (1.16)$$

O tensor de Riemann mede o nível de curvatura que há no espaço-tempo, e é derivado de fundamentos da geometria diferencial. Ele contém 20 componentes independentes. No caso particular em que o tensor de Riemann é nulo, o espaço-tempo é o de Minkowsky (plano). Outras quantidades importantes são o tensor de Ricci, definido pela contração com o tensor de Riemann ($R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta\mu\nu}$), e o escalar de Ricci, definido pela contração com o tensor de Ricci ($R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$). Esses símbolos se conectam através das equações de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.17)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o chamado tensor de Einstein, que contém toda a informação geométrica do espaço-tempo. Do lado direito da equação, temos a informação da distribuição de matéria e de radiação do espaço-tempo, determinada pelo tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, em que $\kappa = 8\pi\mathcal{G}$ é a constante de acoplamento da teoria, onde \mathcal{G} é a constante de Newton da gravitação. Vemos que, se o tensor de Ricci for nulo, corresponderá a um espaço-tempo sem matéria. Contudo, isto não implica que o tensor de Riemann também seja nulo. Como consequência disto, pode haver curvatura em um espaço-tempo vazio longe de distribuições de matéria, que seriam as ondas gravitacionais. Deste modo, ao considerarmos apenas a propagação de ondas gravitacionais em um espaço vazio, podemos partir da equação homogênea de Einstein (equação de vácuo)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0. \quad (1.18)$$

1.2.2 Linearização da gravidade

Vamos agora assumir que um observador esteja muito distante de uma dada distribuição de matéria estática e que o espaço-tempo em que se encontra seja aproximadamente plano. Qualquer mudança nessa distribuição de matéria irá induzir uma mudança no campo gravitacional detectado pelo observador distante como uma mudança na métrica. Essa nova métrica será

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1.19)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski e $h_{\mu\nu}$ é uma pequena perturbação no espaço-tempo. Como iremos expor analiticamente mais adiante, $h_{\mu\nu}$ será o tensor que descreve essa pequena distorção que se propaga no espaço-tempo, em outras palavras, a onda gravitacional. Como consideraremos apenas perturbações fracas, podemos fazer a aproximação $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ e desprezar termos de ordens maiores em h a fim de tornar mais fácil a resolução das equações de Einstein, que produzem soluções não-lineares por natureza. Esse processo denomina-se linearização da GR (também chamada de aproximação de campo fraco) e é utilizado para se estudar a propagação de ondas gravitacionais em um espaço-tempo vazio.

Podemos expandir a métrica contravariante $g^{\mu\nu}$ até primeira ordem em h (desprezando termos de ordem maior), obtendo

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (1.20)$$

Inserindo as equações (1.19) e (1.20) na (1.16) e desprezando termos de segunda ordem ou maior em h , teremos o símbolo de Christoffel devidamente linearizado

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}(\partial_{\alpha}h_{\beta\delta} + \partial_{\beta}h_{\delta\alpha} - \partial_{\delta}h_{\alpha\beta}). \quad (1.21)$$

Substituindo (1.21) em (1.15) e desprezando termos quadráticos em Γ (pois já são de segunda ordem em h), obtemos o tensor de Riemann linearizado

$$R_{\alpha\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\partial_{\sigma}h_{\nu\alpha} - \partial_{\mu}\partial_{\alpha}h_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}\partial_{\alpha}h_{\mu\sigma} - \partial_{\nu}\partial_{\sigma}h_{\mu\alpha}), \quad (1.22)$$

que pela contração $\eta^{\mu\alpha}R_{\alpha\sigma\mu\nu}$, resulta no tensor de Ricci linearizado

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_{\sigma}\partial_{\nu}h_{\mu}^{\sigma} + \partial_{\sigma}\partial_{\mu}h_{\nu}^{\sigma} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h - \square h_{\mu\nu}), \quad (1.23)$$

e da contração $R = \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, resulta no escalar de Ricci linearizado

$$R = \partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{\mu\nu} - \square h. \quad (1.24)$$

Substituindo tudo na equação de Einstein homogênea (1.18), obtemos

$$\frac{1}{2}(\partial_{\sigma}\partial_{\nu}h_{\mu}^{\sigma} + \partial_{\sigma}\partial_{\mu}h_{\nu}^{\sigma} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_{\rho}\partial_{\lambda}h^{\rho\lambda} + \eta_{\mu\nu}\square h) = 0. \quad (1.25)$$

Essa é a equação de Einstein devidamente linearizada na ausência de fontes [29], que consiste na equação de movimento da teoria.

Pode ser verificado que, se partimos da seguinte ação:

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\lambda h^{\mu\nu} + \partial_\mu h_{\nu\lambda} \partial^\nu h^{\mu\lambda} - \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h + \frac{1}{2} \partial_\lambda h \partial^\lambda h \right], \quad (1.26)$$

podemos chegar na equação de movimento (1.25) através do processo variacional da ação. A ação (1.26) também pode ser obtida pela linearização da ação de Einstein-Hilbert usual da TRG $S = \int d^4x \sqrt{-g} R$, e portanto é chamada de ação de Einstein-Hilbert linearizada.

1.2.3 Propagação de Ondas Gravitacionais

Uma das principais diferenças entre a TRG e a gravitação de Newton se dá na velocidade na qual a mudança de um campo gravitacional possa ser sentida por um observador (ou uma partícula teste, por exemplo) a uma certa distância. Newton pensava que essa propagação seria instantânea (se propagaria com velocidade infinita), porém, Einstein afirmou que esta se daria a velocidade da luz no vácuo, pois, de acordo com um dos postulados da relatividade especial, nenhuma informação no universo pode se propagar com uma velocidade maior que a da luz. Essas informações de mudanças nos campos gravitacionais são justamente as ondas gravitacionais, que também podem ser interpretadas como pequenas flutuações na geometria do espaço-tempo. A existência de ondas gravitacionais é uma consequência imediata de uma teoria relativística para a gravitação.

A melhor evidência da existência das ondas gravitacionais vinha de um trabalho de Taylor e Hulse de 1974. Eles observaram que um sistema binário de estrelas de nêutrons estavam perdendo energia na forma de emissão de ondas gravitacionais pela sua variação na taxa de aceleração orbital [30]. No entanto, em 2015 houve a primeira detecção direta de uma onda gravitacional proveniente da colisão de dois buracos negros, feita pelo LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*³) no evento que ficou conhecido como GW150914 [31]. Desde então já foram detectados cinco eventos de ondas gravitacionais, incluindo o último em 2017, GW170817 [32], que registrou a colisão de duas estrelas

³Observatório astronômico baseado em interferometria laser para fins de detecção das ondas gravitacionais

de nêutrons .

Partindo da equação (1.25), podemos encontrar soluções tipo onda plana. O tensor $h_{\mu\nu}$ possui 16 componentes (matriz 4x4), mas, por ser um tensor simétrico, há apenas 10 componentes independentes, que estão relacionadas com as identidades de Bianchi $D_\mu G_\nu^\mu = 0$, onde D_μ é a derivada covariante que depende da métrica de fundo. Desta forma, temos 6 equações independentes para $h_{\mu\nu}$, que implicam em 4 graus de liberdade.

Consideremos uma transformação do tipo

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu, \quad (1.27)$$

que é chamada transformação de calibre, pela analogia com o eletromagnetismo. Nesse tipo de transformação, o tensor de Riemann linearizado (1.22) permanece inalterado na troca de $h_{\mu\nu}$ por $h'_{\mu\nu}$. Pode ser verificado que a Eq.(1.25) também é invariante sob esta transformação. Existe uma certa liberdade para a escolha de calibre. Podemos usar a condição de calibre de Lorentz, dada por

$$\square \Lambda_\mu = \partial_\nu h_\mu^\nu - \frac{1}{2} \partial_\mu h = 0, \quad (1.28)$$

Inserindo essa condição na (1.25), alguns termos se cancelam, sobrando apenas a relação

$$\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h = 0. \quad (1.29)$$

Contudo, ainda resta liberdade para a escolha de $\square \Lambda_\mu$ na Eq.(1.28). Podemos então utilizar o chamado calibre transversal e sem traço [29] (que vamos denotar com um índice TT), que satisfaz as condições

$$\text{Tr } h \equiv h_\mu^\mu = 0 \quad , \quad h_{0i} = 0. \quad (1.30)$$

Aplicando essas condições na (1.28), ficamos com

$$\square h_{TT}^{\mu\nu} = 0, \quad (1.31)$$

que é uma equação de onda. Na tentativa de resolver (1.31), consideremos o *Ansatz* de onda plana

$$h_{\mu\nu}(x) = \alpha_{\mu\nu}(k) e^{i k_\mu x^\mu}, \quad (1.32)$$

onde o tensor $\alpha_{\mu\nu}$ é chamado de tensor de polarização e, por ser simétrico, também possui 10 componentes independentes.

Substituindo a (1.32) na (1.31), obtemos

$$k^2 = k_\mu k^\mu = 0, \quad (1.33)$$

ou, em termos das componentes

$$\omega^2 - |\vec{k}|^2 = 0, \quad (1.34)$$

que é a relação de dispersão da onda gravitacional, implicando que essas ondas se propagam no vácuo com a velocidade da luz. Da (1.30), temos

$$\text{Tr } \alpha \equiv \alpha^\mu{}_\mu = 0 \quad , \quad \alpha_{0i} = 0. \quad (1.35)$$

Aplicando (1.35) e (1.32) na condição de calibre de Lorentz (1.28), obtemos $\alpha_{00} = 0$ e $\alpha_{0\mu} = 0$ (ou seja, 4 componentes da matriz são nulos) e a relação

$$k^i \alpha_{ij} = 0, \quad (1.36)$$

que é a condição de transversalidade, que exige que a direção de propagação da onda seja perpendicular ao vetor de polarização. Após isso, vemos que, no calibre transversal e sem traço, de 10 componentes independentes da matriz $\alpha_{\mu\nu}$, menos o vínculo da condição sem traço, menos 4 componentes nulas e menos 3 vínculos da (1.36), ficamos com apenas duas polarizações independentes (que contém significado físico) para as ondas gravitacionais.

Capítulo 2

Extensão de altas ordens derivativas para a Eletrodinâmica

A fim de estudar efeitos da VIL na escala de Planck, Myers e Pospelov [16] construíram uma TCE baseada em operadores com altas ordens de derivadas com a presença de um quadrivetor constante, interagindo com os campos escalar, fermiônico e eletromagnético. Eles propuseram a construção de lagrangianas¹ modificadas que podem ser acrescentadas na lagrangiana usual de cada setor a fim de obter relações de dispersão modificadas. Tais lagrangianas obedecem aos seguintes critérios: (i) são quadráticas nos campos; (ii) são invariantes por transformações de calibre; (iii) são invariantes por transformações de Lorentz, exceto pela presença de um quadrivetor externo u^λ ; (iv) não são redutíveis à operadores com dimensão menor pelas equações de movimento; (v) não são redutíveis à uma derivada total; (vi) possuem uma derivada à mais que o termo usual.

A motivação para a construção de uma TCE com altas ordens derivativas que viole a invariância de Lorentz reside no fato de que os termos podem ser suprimidos por uma certa escala de energia onde efeitos de gravitação quântica podem aparecer. Neste nível de energia, espera-se que o espaço-tempo adquira uma forma discretizada, justificando portanto que a simetria de Lorentz, por ser uma simetria do tipo contínua, seria quebrada nesse cenário.

Neste capítulo, iremos construir lagrangianas com dimensão de massa arbitrária

¹Daqui em diante, iremos nos referir às densidades de lagrangiana como lagrangianas apenas.

$d \geq 3$ para o setor do campo eletromagnético. Tais termos devem respeitar a todos os critérios estabelecidos por Myers e Pospelov, exceto o (vi), visto que queremos gerar termos com altas ordens derivativas de maneira generalizada.

2.1 O modelo de Myers-Pospelov

O termo modificado de Myers-Pospelov para o setor do fóton consiste de um termo CPT-ímpar, isto é, que viola a invariância de CPT por um sinal². O termo proposto por eles é dado por [16]

$$\mathcal{L}_{MP} = \frac{\xi}{2M_P} F_{\mu\alpha} u^\alpha u_\beta (u \cdot \partial) \tilde{F}^{\mu\beta}. \quad (2.1)$$

onde ξ é um parâmetro adimensional que controla a VIL, u^α é o quadrivetor de fundo, M_P é a massa de Planck e $\tilde{F}^{\mu\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\beta\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$. Ao se acrescentar essa lagrangiana com a lagrangiana usual de Maxwell acrescida do termo de fonte (1.1) pode-se obter a seguinte equação de movimento no calibre de Lorentz [33]:

$$\square A^\nu + 2\frac{\xi}{M_P} \epsilon^{\nu\alpha\lambda\sigma} u_\alpha (u \cdot \partial)^2 \partial_\lambda A_\sigma = j^\nu \quad (2.2)$$

que produz portanto, na ausência de fontes, uma relação de dispersão covariante da forma

$$k^2 \pm \frac{\xi}{M_P} (u \cdot k)^2 [(u \cdot k)^2 - u^2 k^2]^{1/2} = 0. \quad (2.3)$$

A Ref.[16] considerou para a análise o caso do quadrivetor tipo tempo $u_\lambda = (1, \vec{0})$, que também é chamado de modelo isotrópico³. Desta forma, para $|\vec{k}| < M_P/(2\xi)$, a (2.3) pode ser aproximada por

$$\omega \approx |\vec{k}| - \lambda \frac{\xi}{M_P} |\vec{k}|^2 \quad (2.4)$$

que induz a uma velocidade de grupo sub-luminal para fótons que estejam sujeitos ao efeito da VIL.

No artigo original, Myers e Pospelov assumiram que a Eq.(2.1) representava o único termo possível que pudesse satisfazer os 6 critérios estabelecidos por eles para a criação

²No Apêndice A é feito um detalhamento maior sobre a transformação CPT.

³Pois garante que o campo externo não forneça direções espaciais privilegiadas.

de um termo no setor eletromagnético puro. No entanto, por curiosidade, é interessante notar que a mesma relação de dispersão (2.3) pode ser obtida através da lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{\xi}{M_P} \tilde{F}_{\mu\alpha} u^\alpha u_\beta (u \cdot \partial) \tilde{F}^{\mu\beta}, \quad (2.5)$$

quando consideramos o calibre de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ e o calibre axial $u_\mu A^\mu = 0$. Na equação acima, o tensor duplo dual de Maxwell é definido como

$$\tilde{F}^{\mu\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\beta\rho\sigma} \tilde{F}_{\rho\sigma} = \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\beta\rho\sigma} \epsilon_{\rho\sigma\kappa\tau} F^{\kappa\tau}. \quad (2.6)$$

Fora isto, Campanelli [34] também percebeu que existia outro termo que poderia ser adicionado ao termo usual de Myers-Pospelov que também satisfazia os critérios e que induzia um novo tipo de modificação na relação de dispersão. Já na Ref.[35], foi proposto um termo de dimensão cinco feito por uma expansão em séries do termo CFJ⁴ na forma

$$\mathcal{L} = \frac{\xi}{2M_\gamma} \epsilon^{\mu\lambda\rho\alpha} u_\alpha \left(u^\nu u^\sigma F_{\mu\nu} \partial_\lambda F_{\rho\sigma} - u^2 \eta^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} \partial_\lambda F_{\rho\sigma} \right), \quad (2.7)$$

que também satisfaz os mesmos critérios. É interessante notar que o primeiro termo da equação acima produz a mesma lagrangiana de Myers-Pospelov (2.1) a menos de uma derivada total. Portanto, há muitos termos invariantes de calibre que podem ser criados no setor eletromagnético a fim de produzir modificações de altas ordens derivativas na relação de dispersão da teoria, ao contrário do que a Ref.[16] aponta.

2.2 Construção dos operadores de altas ordens derivativas

Nesta seção damos início a contribuição neste trabalho. Discutimos a possibilidade de generalizar operadores de VIL de altas ordens derivativas para o setor eletromagnético. Os efeitos da VIL podem ser inseridos à partir de uma modificação do tensor métrico do espaço plano $\eta_{\alpha\beta}$. Essa modificação pode consistir na adição de um quadri vetor não-dinâmico u_λ à métrica, ao qual chamaremos de quadri vetor externo (ou quadri vetor de fundo). Essa abordagem pode ser dada na forma

$$\eta_{\alpha\beta} \rightarrow \bar{\eta}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} - \xi u_\alpha u_\beta, \quad (2.8)$$

⁴Termo originalmente proposto por Carroll-Field-Jackiw [10].

onde ξ é um parâmetro adimensional que controla a intensidade da VIL. Definindo o parâmetro como sendo positivo, o sinal de menos garantirá que a teoria modificada não tenha um comportamento superluminal.

Agora, vamos analisar o impacto desta perturbação na métrica na lagrangiana usual de Maxwell sem termo de fonte, que pode ser escrita em termos dos tensores duais do campo eletromagnético na forma

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = \frac{1}{4} \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}^{\rho\sigma} \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma}. \quad (2.9)$$

Inserindo a (2.8) na (2.9), recuperamos a mesma lagrangiana de Maxwell acrescentada da seguinte extensão:

$$\mathcal{L}_{ext} = -\frac{\xi}{2} \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}^{\rho\sigma} \eta_{\mu\rho} u_\nu u_\sigma. \quad (2.10)$$

Nesse sentido, os efeitos da VIL são completamente caracterizados pela presença do quadrivetor u_λ . Note que a lagrangiana acima é invariante por transformações de calibre $\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$. A contribuição dada na (2.10) é conhecida na literatura como termo de violação de Lorentz tipo *aether*⁵ [36].

Definindo o operador

$$\Pi_{\mu\nu} \equiv \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} u^\rho \partial^\sigma, \quad (2.11)$$

que é antissimétrico e tem as propriedades $\partial_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$ e $u_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$, além da propriedade de comutação $\Pi_{\mu\nu} \Pi_{\rho\sigma} = \Pi_{\rho\sigma} \Pi_{\mu\nu}$, podemos reescrever a ação associada à (2.10) de uma forma compacta em termos dos campos de calibre a menos de um termo de superfície como

$$S_{ext} = - \int d^4x \frac{\xi}{2} A_\mu \Pi^\mu{}_\rho \Pi^{\rho\nu} A_\nu. \quad (2.12)$$

Fazendo uma rápida análise dimensional no no integrando, vemos que, como o campo de calibre A_μ e o operador $\Pi_{\mu\nu}$ possuem dimensão de massa, este termo tem dimensão de massa elevada à quarta potência (M^4), como o esperado. Também é possível mostrar que este termo é do tipo CPT-par, e portanto, preserva a invariância por transformações CPT⁶.

⁵Esse termo apareceu originalmente no estudo de teorias com dimensões extra.

⁶Isso é demonstrado no Apêndice A

Agora, queremos construir uma generalização para operadores de VIL com dimensão de massa arbitrária d . Podemos considerar uma generalização para o operador associado na forma

$$\xi \Pi^\mu{}_\rho \Pi^{\rho\nu} \rightarrow \frac{\xi^{(d)}}{M_\gamma^{d-4}} \left(\Pi^\mu{}_\rho \right)^l \left(\Pi^{\rho\nu} \right)^m. \quad (2.13)$$

em que M_γ é uma escala de massa onde os efeitos de VIL se tornam evidentes⁷, e $d = 2 + l + m$ é a dimensão de massa do operador⁸. A notação $(\Pi^{\mu\nu})^l$ se refere a uma contração de l tensores $\Pi^{\mu\nu}$, sempre com o segundo índice de um tensor contraído com o primeiro índice do outro.

Com isto, obtemos uma ação geral

$$S_{ext} \rightarrow \tilde{S}_{ext} = - \int d^4x \frac{\xi^{(d)}}{M_\gamma^{d-4}} A_\mu \left(\Pi^\mu{}_\rho \right)^l \left(\Pi^{\rho\nu} \right)^m A_\nu. \quad (2.14)$$

Para construirmos a generalização, temos que estabelecer a álgebra do operador $\Pi_{\mu\nu}$. Consideremos a fórmula geral para a contração de dois tensores de Levi-Civita [29]

$$\epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p \alpha_1 \dots \alpha_{q-p}} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p \beta_1 \dots \beta_{l-p}} = -p!(l-p)! \delta_{\beta_1}^{[\alpha_1} \dots \delta_{\beta_{l-p}}^{\alpha_{l-p}]}, \quad (2.15)$$

onde q é o número de índices do tensor e p o número de índices contraídos. A notação $[\mu \dots \nu]$ se refere a um produto antissimetrizado dos índices, por exemplo: $[\mu\nu\alpha] = \mu\nu\alpha - \mu\alpha\nu + \alpha\nu\mu - \alpha\nu\mu + \nu\alpha\mu - \nu\mu\alpha$. Como trabalhamos em um espaço-tempo de quatro dimensões, usaremos sempre $q = 4$, que nos dá as fórmulas

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} &= -2\delta_\alpha^{[\mu} \delta_\beta^{\nu]} \quad , \text{ para } p = 2; \\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\alpha\beta\lambda\sigma} &= -6\delta_\alpha^{[\mu} \delta_\beta^\nu \delta_\lambda^{\rho]} \quad , \text{ para } p = 1; \\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\alpha\beta\lambda\gamma} &= -24\delta_\alpha^{[\mu} \delta_\beta^\nu \delta_\lambda^\rho \delta_\gamma^{\sigma]} \quad , \text{ para } p = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Usando as duas primeiras fórmulas, é fácil mostrar as seguintes propriedades envolvendo o operador $\Pi_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} \Pi_{\nu\mu} &= 2\hat{D}; \\ \Pi_{\mu\kappa} \Pi^{\kappa\nu} &= \hat{D}\delta_\mu^\nu - u^2 \partial^\nu \partial_\mu + u^\nu (u \cdot \partial) \partial_\mu - u^\nu u_\mu \square + (u \cdot \partial) u_\mu \partial^\nu, \end{aligned} \quad (2.17)$$

⁷A *priori*, não vamos assumir de imediato que esta seja a massa de Planck

⁸Essa dimensão é contabilizada pela análise dimensional da lagrangiana com respeito a dimensão dos campos e das derivadas contidas no operador

onde $\hat{D} \equiv u^2 \square - (u \cdot \partial)^2$ é um operador que irá aparecer em todas as equações de movimento modificadas daqui pra frente.

Da segunda fórmula da Eq.(2.17), é fácil ver que uma contração entre três operadores $\Pi^{\mu\nu}$ irá resultar em

$$\Pi^{\mu\rho}\Pi_{\rho\lambda}\Pi^{\lambda\nu} = \Pi^{\mu\rho}\hat{D}\delta_{\rho}^{\nu} = \Pi^{\mu\nu}\hat{D}. \quad (2.18)$$

Utilizando as equações (2.17) e (2.18), pudemos construir a tabela 2.1, que mostra o formato dos operadores para cada dimensão de massa e suas respectivas classificações sobre transformações de CPT. Os termos do tipo CPT-ímpar violam a invariância por transformações de CPT por um sinal. Pela tabela 2.1, podemos inferir que operadores com dimensão par(ímpar), são classificados como CPT-par(ímpar)⁹. Nesta abordagem, é interessante notar que, realizando-se a substituição $A_{\rho} \rightarrow \frac{1}{M_{\gamma}}\Pi_{\rho\sigma}A^{\sigma}$ em um termo de dimensão d , obtém-se um termo de dimensão $d + 1$.

Tabela 2.1: Operadores de VIL com dimensão d no eletromagnetismo.

Dimensão (d)	Operador	CPT
$d = 4$	$\xi_{(4)}A_{\mu}\Pi^{\mu\rho}\Pi_{\rho}^{\nu}A_{\nu}$	Par
$d = 5$	$\frac{\xi_{(5)}}{M_{\gamma}}A_{\mu}\Pi^{\mu\nu}\hat{D}A_{\nu}$	Ímpar
$d = 6$	$\frac{\xi_{(6)}}{M_{\gamma}^2}A_{\mu}\Pi^{\mu\rho}\Pi_{\rho}^{\nu}\hat{D}A_{\nu}$	Par
$d = 7$	$\frac{\xi_{(7)}}{M_{\gamma}^3}A_{\mu}\Pi^{\mu\nu}\hat{D}^2A_{\nu}$	Ímpar
$d = 8$	$\frac{\xi_{(8)}}{M_{\gamma}^4}A_{\mu}\Pi^{\mu\rho}\Pi_{\rho}^{\nu}\hat{D}^2A_{\nu}$	Par
\vdots	\vdots	\vdots

A partir da tabela, vemos que os operadores podem ser construídos respeitando-se basicamente um formato para tipo CPT-par e outro formato para tipo CPT-ímpar, apenas aumentando sucessivamente as potências do operador \hat{D} . É interessante ver que a parte CPT-ímpar pode ser vista como uma generalização para altas ordens derivativas do termo CFJ, que é um termo de dimensão $d = 3$ e CPT-ímpar que pode ser escrito em nossa notação como $\xi_{(3)}M_{\gamma}A_{\alpha}\Pi^{\alpha\beta}A_{\beta}$.

⁹Mais informações sobre transformações CPT estão dispostas no Apêndice A

De fato, $d = 3$ é a menor dimensão possível para um operador de VIL ser escrito através de um vetor externo na eletrodinâmica. Um possível termo de dimensão $d = 2$ já se caracteriza como um termo de Proca¹⁰. Com essa motivação, podemos escrever as ações generalizadas CPT-par e CPT-ímpar para $d \geq 3$ de maneira separada na forma:

$$S_{(\bar{d})}^{CPT-par} = -\frac{1}{2} \int d^4x \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} A_\mu \Pi^{\mu\rho} \Pi_\rho{}^\nu \hat{D}^n A_\nu; \quad (2.19)$$

$$S_{(\bar{d})}^{CPT-impair} = -\frac{1}{2} \int d^4x \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} A_\mu \Pi^{\mu\nu} \hat{D}^n A_\nu, \quad (2.20)$$

onde $n = (0, 1, 2, 3, \dots)$, $\tilde{d} = 3 + 2n$ e $\bar{d} = 4 + 2n$. Para $n = 0$, o termo ímpar recupera o termo CFJ, enquanto o termo par recupera o termo de dimensão $d = 4$ (2.12). Para $n > 0$, obtemos os termos de altas ordens derivativas nos quais estamos interessados. As densidades de lagrangiana contidas nessas ações satisfazem aos 5 critérios estabelecidos anteriormente.

Podemos reescrever a (2.19) e a (2.20) em termos do tensor eletromagnético dual na forma

$$S_{(\bar{d})}^{CPT-par} = \int d^4x \frac{\xi_{(\bar{d})}}{2M_\gamma^{2n}} u^\alpha u_\beta \tilde{F}_{\mu\alpha} \hat{D}^n \tilde{F}^{\mu\beta}; \quad (2.21)$$

$$S_{(\bar{d})}^{CPT-impair} = \int d^4x \frac{\xi_{(\bar{d})}}{2M_\gamma^{2n-1}} u_\sigma A_\mu \hat{D}^n \tilde{F}^{\mu\sigma} \quad (2.22)$$

Na Seção B.1 do Apêndice B demonstramos que os operadores inclusos nas ações acima podem ser escritos como peças dos operadores CPT-par (K_F) e CPT-ímpar (K_{AF}) presentes na EMP estabelecida na Ref.[12], e generalizada pelas Refs .[37, 38]. Portanto, o formalismo proposto neste trabalho, que partiu da motivação e dos critérios utilizados originalmente por Myers e Pospelov para a construção de operadores com dimensão arbitrária, consiste em uma simplificação bastante útil da EMP generalizado para o setor do fóton, visto que, deste modo, podemos analisar todo o comportamento da VIL através da natureza do quadrivetor de fundo.

Neste trabalho, iremos nos concentrar em investigar as violações de Lorentz por

¹⁰Termo do fóton massivo que viola a simetria de calibre e preserva a invariância de Lorentz.

transformações de *boost*¹¹. Para isto, vamos seguir a maioria dos trabalhos da área e assumir sempre que o quadrivetor de fundo u^λ é tipo-tempo, possuindo a forma $u^\lambda = (1, \vec{0})$, com a componente temporal normalizada em termos do parâmetro ξ . Com essa abordagem, estamos excluindo efeitos anisotrópicos que possam existir no espaço-tempo devido a VIL. Esse estudo se justifica no capítulo 4, onde iremos discutir aspectos fenomenológicos relacionados a dispersão no tempo de voo das partículas, que podem ter suas velocidades alteradas no cenário em que a VIL está presente.

2.3 Extensão CPT-Par

Nesta seção vamos estudar a equação de movimento e a relação de dispersão associadas a modificação com o termo CPT-Par (2.19) somado com o termo de Maxwell. Desta forma, partimos da ação

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j_\mu A^\mu + \frac{\xi_{(\bar{d})}}{2M_\gamma^{2n}} A_\mu \Pi^{\mu\rho} \Pi_\rho{}^\nu \hat{D}^n A_\nu \right). \quad (2.23)$$

A equação de movimento associada a essa ação é

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta A^\mu} &= \square A_\mu - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu - \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} \Pi_{\mu\lambda} \Pi^{\lambda\alpha} \hat{D}^n A_\alpha + j_\mu \\ &= \square A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A_\nu + \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} \hat{D}^n \left(-\hat{D} A_\mu + u_\nu u^\mu \square A^\nu - u^\mu \partial_\nu (u \cdot \partial) A^\nu - u_\nu \partial^\mu (u \cdot \partial) A^\nu \right. \\ &\quad \left. + u^2 \partial^\mu \partial_\nu A^\nu \right) + j_\mu = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Para investigar as equações de Maxwell modificadas para o caso do quadrivetor u^λ tipo-tempo (caso isotrópico), podemos abrir a equação acima em termos das componentes, considerando que $j_\mu = (\rho, \vec{J})$, obtendo duas equações de movimento. Vemos que o termo isotrópico não irá produzir uma modificação na equação para $\mu = 0$, que é a lei de Gauss da eletrostática. Porém, para a $\mu = i$, a Lei de Ampère-Maxwell modificada toma a forma:

$$\left[1 - \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} (-\nabla^2)^n \right] \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.25)$$

¹¹Se refere as transformações de Lorentz na troca de um referencial para outro à uma velocidade diferente, o que do ponto de vista das partículas se verifica como "empurrões".

produzindo uma alteração no rotacional do campo magnético.

Para investigarmos a propagação de ondas eletromagnéticas e obtermos a relação de dispersão covariante da teoria, podemos considerar um espaço na ausência de fontes, isto é, $j_\mu = 0$. Usando o calibre de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ e o calibre axial $u_\mu A^\mu = 0$ na Eq.(2.24), ficamos com

$$\left(\square - \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} \hat{D}^{n+1} \right) A_\mu = 0. \quad (2.26)$$

No espaço dos momentos ($\partial_\mu \rightarrow -ik_\mu$), resulta a relação de dispersão covariante

$$k^2 + \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} D^{n+1} = 0, \quad (2.27)$$

na qual $D = \hat{D}(\partial_\mu \rightarrow -ik_\mu) = (u \cdot k)^2 - u^2 k^2$.

No caso isotrópico, onde $u^\alpha = (1, \vec{0})$, a Eq.(2.27) pode ser reescrita como

$$\omega = \pm |\vec{k}| \sqrt{1 - \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} |\vec{k}|^{2n}}. \quad (2.28)$$

É importante notar que o caso usual $\omega = \pm |\vec{k}|$ é recuperado quando $\xi_{(d)} \rightarrow 0$. A velocidade de grupo obtida da Eq.(2.28) é

$$v_g = \frac{d\omega}{d|\vec{k}|} = \frac{1 - \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} (n+1) |\vec{k}|^{2n}}{\sqrt{1 - \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} |\vec{k}|^{2n}}}, \quad (2.29)$$

já a velocidade de fase é expressa por

$$v_f = \frac{\omega}{|\vec{k}|} = \sqrt{1 - \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} |\vec{k}|^{2n}}, \quad (2.30)$$

caracterizando portanto um meio dispersivo.

2.4 Extensão CPT-Ímpar

Nesta seção iremos estudar o caso do termo de Maxwell acrescentado ao termo CPT-ímpar (2.20). Nesse caso, partimos da ação

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j_\mu A^\mu - \frac{\xi_{(\bar{d})}}{2M_\gamma^{2n-1}} A_\mu \Pi^{\mu\nu} \hat{D}^n A_\nu \right). \quad (2.31)$$

A equação de movimento obtida é

$$\frac{\delta S}{\delta A^\mu} = \square A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A^\nu + j_\mu - \frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} \Pi_{\mu\nu} \hat{D}^n A^\nu = 0 \quad (2.32)$$

Assim como o caso CPT-par, a lei de Gauss não será modificada pelo termo CPT-ímpar isotrópico, a modificação se dará apenas na lei de Ampère-Maxwell, que assume a forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} (-\nabla^2)^n \vec{B}. \quad (2.33)$$

Desta vez, a modificação ocorre no laplaciano do campo magnético.

Agora, consideremos o vácuo na ausência de fontes e a escolha de calibre de Lorentz $\partial_\lambda A^\lambda = 0$. Com isso, a (2.32) fica

$$\left[\eta_{\mu\nu} \square - \frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} \Pi_{\mu\nu} \hat{D}^n \right] A^\nu = 0. \quad (2.34)$$

No espaço dos momentos, obtemos

$$\left[k^2 \eta_{\mu\nu} + \frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} \tilde{\Pi}_{\mu\nu} D^n \right] A^\nu = 0, \quad (2.35)$$

onde $\tilde{\Pi}_{\mu\nu} = \Pi_{\mu\nu}(\partial_\alpha \rightarrow -ik_\alpha) = -i\epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} u^\rho \partial^\sigma$. Para obter a relação de dispersão covariante, podemos multiplicar a equação acima pelo seu conjugado:

$$k^2 \eta^{\rho\mu} - \frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} \tilde{\Pi}^{\rho\mu} D^n. \quad (2.36)$$

Após alguma álgebra, podemos mostrar a relação

$$\left[(k^2)^2 - \left(\frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} \right)^2 D^{2n+1} \right] A^\rho = 0. \quad (2.37)$$

Por fim, obtemos a relação de dispersão

$$k^2 - \lambda \frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} D^{n+\frac{1}{2}} = 0, \quad (2.38)$$

em que $\lambda = \pm 1$ são os dois modos de polarização da onda eletromagnética.

Considerando novamente o caso isotrópico $u_\mu = (1, \vec{0})$, a Eq.(2.38) fica na forma

$$\omega_\pm = |\vec{k}| \sqrt{1 + \lambda \frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} |\vec{k}|^{2n-1}}. \quad (2.39)$$

Com isso, podemos constatar que a velocidade de grupo possui a forma

$$v_g = \frac{d\omega}{d|\vec{k}|} = \frac{1 + (n + \frac{1}{2})\lambda \frac{\xi_{\vec{d}}}{M_\gamma^{2n-1}} |\vec{k}|^{2n-1}}{\sqrt{1 + \lambda \frac{\xi_{\vec{d}}}{M_\gamma^{2n-1}} |\vec{k}|^{2n-1}}}, \quad (2.40)$$

enquanto a velocidade de fase é

$$v_f = \frac{\omega}{|\vec{k}|} = \sqrt{1 + \lambda \frac{\xi_{\vec{d}}}{M_\gamma^{2n-1}} |\vec{k}|^{2n-1}}. \quad (2.41)$$

Comparando as (2.40) e (2.41) com as velocidades obtidas na seção 1.1 para a eletrodinâmica usual, percebe-se que a modificação VIL CPT-ímpar impõe dois modos de polarização diferentes entre si. Isto sugere que o próprio vácuo se comportaria como um meio birrefringente¹² (além de dispersivo, como no caso CPT-par), visto que as velocidades de grupo dos dois modos de polarização serão diferentes.

2.5 Análise de consistência das teorias

Nesta seção analisaremos três propriedades fundamentais de uma teoria de campos consistente: estabilidade, causalidade e unitariedade. Essas três condições são indispensáveis para que a teoria possa ser eventualmente quantizada de acordo com os métodos da teoria quântica de campos. Nas seções seguintes vamos analisar a consistência da eletrodinâmica modificada com o termo CPT-par e com o termo CPT-ímpar, ambas para o modelo isotrópico.

2.5.1 Teoria modificada CPT-par

Estabilidade

Um modo é dito estável quando a sua energia é real e positivo-definida. Isto ocorre se a condição $\omega^2 \geq 0$ for sempre satisfeita na relação de dispersão.

¹²Um meio birrefringente é um meio que induz índices de refração diferentes dependendo da direção do vetor de polarização da onda. Portanto, ondas polarizadas com direções diferentes se propagam nesse meio com velocidades diferentes.

Da relação de dispersão da teoria modificada CPT-par (2.28), vemos que a teoria é estável se $\xi_{(\bar{d})} \leq \frac{M_\gamma^{2n}}{|\vec{k}|^{2n}}$, que para $n = 0$, resulta em $\xi_{(\bar{d})} \leq 1$. Como estabelecemos que $\xi_{(\bar{d})}$ é positivo-definido, a teoria CPT-par será em geral estável para quaisquer valores de $\xi_{(\bar{d})}$ no intervalo $0 \leq \xi_{(\bar{d})} \leq \frac{M_\gamma^{2n}}{|\vec{k}|^{2n}}$.

Causalidade

A causalidade é mantida quando não há modos super-luminais (taquiônicos) na teoria, ou seja, quando são satisfeitas as condições $v_g < 1$ e $v_{frente} \leq 1$, onde $v_{frente} = \lim_{|\vec{k}| \rightarrow \infty} v_f$ é a velocidade de frente de onda.

Da velocidade de grupo (2.29), vemos que a condição de causalidade é mantida se a seguinte inequação for satisfeita:

$$1 - \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}}(n+1)|\vec{k}|^{2n} \leq \sqrt{1 - \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}}|\vec{k}|^{2n}}, \quad (2.42)$$

o que acontece para valores $0 \leq \xi_{(\bar{d})} \leq \frac{M_\gamma^{2n}}{|\vec{k}|^{2n}}$, que concorda com a condição de estabilidade.

Agora, usando a velocidade de fase (2.30), obtemos que

$$v_{frente} = \lim_{|\vec{k}| \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}}|\vec{k}|^{2n}} = \begin{cases} -\infty, & \text{se } n > 0, \\ \sqrt{1 - \xi_{(\bar{d})}}, & \text{se } n = 0. \end{cases} \quad (2.43)$$

Portanto, em geral a causalidade é mantida para valores $0 \leq \xi_{(\bar{d})} \leq 1$. Vemos então que, em geral, se $\xi_{(\bar{d})}$ permanecer entre 0 e 1, o que é fortemente suportado pelo que se espera da fenomenologia, a teoria é causal e estável ao mesmo tempo. Para vermos isso através de um gráfico, consideremos a (2.28) tomada até a primeira ordem de aproximação em $|\vec{k}|$,

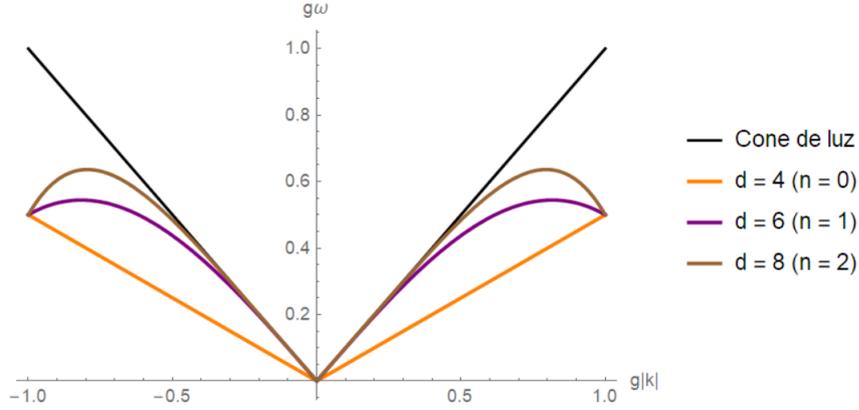
$$\omega \approx \pm |\vec{k}| \left(1 - \frac{1}{2} (g|\vec{k}|)^{2n} \right) \quad (2.44)$$

onde¹³ $g \equiv \xi/M_\gamma$, com $|\vec{k}| < g^{-1}$. Da Eq.(2.44), podemos gerar um gráfico $g\omega$ versus $g|\vec{k}|$, para os casos $d = 4$, $d = 6$ e $d = 8$, como mostra a Figura 2.1.

Vemos que todos os casos se concentram fora do cone de luz, o que garante a causalidade pelo comportamento sub-luminal dos fótons. A estabilidade só é garantida pelos valores de $\xi_{(\bar{d})}$ discutidos anteriormente, visto que os prolongamentos das curvas para $d > 4$ induziriam energias negativas.

¹³Consideramos um valor de ξ arbitrário.

Figura 2.1: Gráfico das relações de dispersão modificadas com os termos de CPT-Par.



Fonte: autor.

Unitariedade e Propagador associado

A unitariedade está relacionada a propriedade da matriz de espalhamento da teoria quântica de campos. Esta condição garante a hermiticidade, ou seja, garante que os estados definidos no espaço de Hilbert possuam normas positivas. Quando há estados de norma negativa, a teoria será não-unitária, e temos os chamados modos fantasmas (do inglês, *ghosts*).

A condição de unitariedade pode ser verificada através do propagador de Feynman saturado da teoria. Esta técnica consiste em calcular, utilizando o propagador da teoria considerada, a contração tensorial entre as correntes conservadas J^μ e J^ν e a matriz do propagador escrita em cada um dos seus pólos, o que envolve naturalmente o cálculo do resíduo do propagador nestes pólos. Deste modo, se o resíduo for sempre positivo, a teoria será unitária; se for igual a zero, será não-física, visto que não contribui em cálculos da matriz de espalhamento em interações; e se for menor que zero, será não-unitária, com o aparecimento de fantasmas.

Primeiramente, vamos calcular o propagador de Feynman associado à teoria CPT-par. Para isto, vamos acrescentar o termo de fixação de calibre de Feynman¹⁴ $-\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$

¹⁴Este procedimento é comumente usado para se obter o propagador através do inverso do operador

na ação (2.23) sem o termo de fonte. Partimos portanto da ação

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} A^\sigma \Pi_{\sigma\mu} \Pi^{\mu\lambda} \hat{D}^n A_\lambda - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right), \quad (2.45)$$

que resulta em

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} A^\sigma \left(\square \delta_\sigma^\lambda - \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} \Pi_{\sigma\mu} \Pi^{\mu\lambda} \hat{D}^n \right) A_\lambda. \quad (2.46)$$

Podemos reescrever a ação acima como

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} A_\sigma \mathcal{O}^{\lambda\sigma} A_\lambda, \quad (2.47)$$

onde

$$\mathcal{O}^{\lambda\sigma} = \square \eta^{\lambda\sigma} - \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} \Pi^\sigma{}_\mu \Pi^{\mu\lambda} \hat{D}^n, \quad (2.48)$$

é o operador de onda associado. O propagador de Feynman é o inverso deste operador, e pode ser obtido de acordo com a seguinte relação de identidade

$$\mathcal{O}^{\lambda\sigma} \Delta_{\lambda\rho} = i \delta_\rho^\sigma. \quad (2.49)$$

O cálculo detalhado deste procedimento foi feito no Apêndice C. O propagador obtido no espaço dos momentos é

$$\begin{aligned} \Delta_{\lambda\rho}(k) = & \frac{i}{k^2 \left(k^2 + \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} D^{n+1} \right)} \left[-\frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} D^n [D + (u \cdot k)^2] \frac{k_\lambda k_\rho}{k^2} - k^2 \eta_{\lambda\rho} \right. \\ & \left. - \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} D^n (u \cdot k) (u_\lambda k_\rho + u_\rho k_\lambda) - \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} k^2 D^n u_\lambda u_\rho \right]. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Do denominador do propagador, temos dois polos: $k^2 = 0$ e $k^2 + \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} D^{n+1} = 0$, o primeiro consiste na relação de dispersão usual, e o segundo, na relação de dispersão modificada que desenvolvemos na (2.27). Vemos que, no limite $\xi_{(\bar{d})} \rightarrow 0$, recuperamos o propagador usual do fóton no calibre de Feynman [39],

$$\Delta_{\lambda\rho}^{usual}(k) = -\frac{i}{k^2} \eta_{\lambda\rho}. \quad (2.51)$$

de onda, e não altera qualquer significado físico na ação, pois é zero pela invariância de calibre. Sem esse termo de fixação, o operador de onda não pode ser invertido, e portanto, o propagador não pode ser obtido.

Agora, com o propagador (2.50) em mãos, devemos obter o propagador saturado, que é definido como

$$PS = J^\lambda \Delta_{\lambda\rho}(k) J^\rho, \quad (2.52)$$

onde J^μ é uma quadri-corrente conservada, ou seja, temos que $\partial_\mu J^\mu = 0$, o que implica $k_\mu J^\mu = 0$ no espaço dos momentos. Com isso, substituindo a Eq.(2.50) na Eq.(2.52), somos levados à

$$PS = -\frac{i[J^2 + \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} D^n (u \cdot J)^2]}{k^2 + \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} D^{n+1}}, \quad (2.53)$$

onde $J^2 \equiv J_\mu J^\mu$. No caso isotrópico, ficamos com

$$PS = -i \frac{J^2 + \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} |\vec{k}|^{2n} J_0^2}{k^2 + \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} |\vec{k}|^{2n+2}}. \quad (2.54)$$

Para simplificar o problema podemos fazer a escolha $k_\mu = (\omega, 0, 0, k_3)$ sem perda de generalidade [40]. Com isso, pela conservação da corrente $k_\mu J^\mu = 0$, obtemos $J_\mu = (J_0, J_1, J_2, \frac{\omega J_0}{k_3})$. Desta forma, a (2.53) fica

$$PS = \frac{-i \left(J_0^2 - J_1^2 J_2^2 - \frac{\omega^2 J_0^2}{k_3^2} + \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} k_3^{2n} \right)}{\omega^2 k_3^2 \left(1 - \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} k_3^{2n} \right)}. \quad (2.55)$$

Com isso, podemos calcular o resíduo no pólo $\omega^2 \rightarrow k_3^2 \left(1 - \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} k_3^{2n} \right)$, o que nos leva ao resultado

$$Res[PS] \Big|_{\omega^2 \rightarrow k_3^2 \left(1 - \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_\gamma^{2n}} k_3^{2n} \right)} = i(J_1^2 + J_2^2), \quad (2.56)$$

que é sempre positivo. Portanto, a teoria de Maxwell com o termo de modificação CPT-par é unitária.

2.5.2 Teoria modificada CPT-ímpar

Estabilidade

Da relação de dispersão (2.39), iremos obter duas condições para cada modo de polarização, na forma $\xi_{(\bar{d})} \leq -\lambda \frac{M_\gamma^{2n-1}}{|\vec{k}|^{2n-1}}$. Vemos que $\lambda = +1$ induzirá obrigatoriamente um modo não-estável, visto que definimos $\xi_{(\bar{d})}$ como sendo positivo. Já para $\lambda = -1$, a

estabilidade pode ser garantida pelo mesmo motivo que discutimos no caso CPT-par. No entanto, em geral a teoria é instável.

Causalidade

Da velocidade de grupo (2.40), a condição de causalidade é verificada pela seguinte inequação:

$$1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda \frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} |\vec{k}|^{2n-1} \leq \sqrt{1 + \lambda \frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} |\vec{k}|^{2n-1}}. \quad (2.57)$$

No caso $\lambda = +1$, a inequação acima não é obedecida para qualquer valor de $\xi_{(\tilde{d})}$ positivo. Já no caso $\lambda = -1$, a condição para $\xi_{(\tilde{d})}$ é $0 \leq \xi_{(\tilde{d})} \leq \frac{M_\gamma^{2n-1}}{|\vec{k}|^{2n-1}}$ com $n > 0$, recaindo em um caso análogo ao CPT-par.

A velocidade de frente de onda obtida a partir da velocidade de fase (2.41) é

$$v_{frente} = \lim_{|\vec{k}| \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \lambda \frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} |\vec{k}|^{2n-1}}. \quad (2.58)$$

Para $n = 0$ e qualquer valor de λ , temos $v_{frente} = 1$, que corresponde ao caso usual. Porém, para valores de $n \geq 1$, temos que, no caso $\lambda = +1$, $v_{frente} = +\infty$, o que corresponde a um modo não-causal. Já no caso $\lambda = -1$, temos $v_{frente} = -\infty$, o que corresponde ao caso CPT-par para $n \geq 1$.

Consideremos a análise da aproximação tomada até primeira ordem em $|\vec{k}|$ da Eq.(2.39), ou seja,

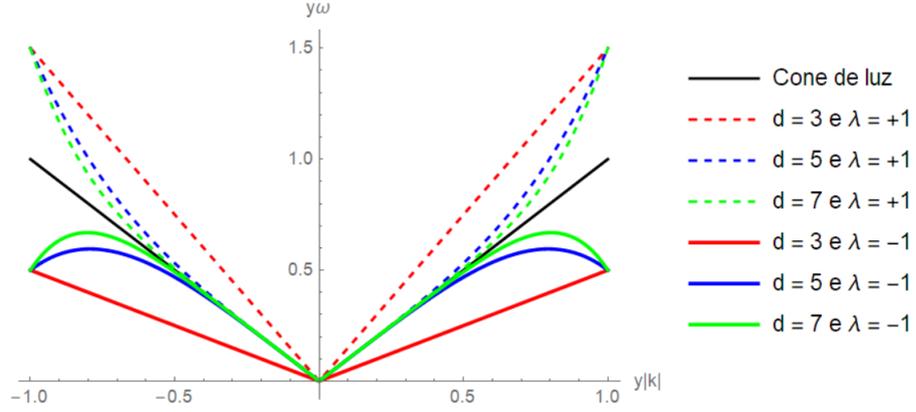
$$\omega_\pm \approx |\vec{k}| \left(1 + \frac{1}{2} \lambda (y|\vec{k}|)^{2n+1} \right), \quad (2.59)$$

onde $y \equiv \xi/M_\gamma$, com $|\vec{k}| < y^{-1}$. Podemos analisar o comportamento causal da teoria por um gráfico $y\omega$ versus $y|\vec{k}|$, para os casos $d = 3$, $d = 5$ e $d = 7$, como mostra a Figura 2.2.

Vemos que os modos $\lambda = +1$ se encontram dentro do cone de luz, o que indica um comportamento super-luminal. Portanto, a teoria modificada CPT-ímpar no caso isotrópico é não-causal, visto que um dos modos de polarização sempre induz a existência de táquions¹⁵. Essa análise concorda com a análise feita pela Ref.[33], a qual mostra que a teoria modificada com o termo CPT-ímpar de Myers-Pospelov no setor eletromagnético para o caso isotrópico também é em geral não-causal e instável.

¹⁵Partículas com velocidades superluminais que quebram os postulados da relatividade especial.

Figura 2.2: Gráfico das relações de dispersão modificadas com os termos de CPT-Ímpar.



Fonte: autor.

Unitariedade e Propagador associado

Para obtermos o propagador do caso CPT-ímpar, consideremos a ação (2.31) sem o termo de fonte com o termo de fixação de calibre:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} A_\mu \sigma \Pi_{\mu\nu} \hat{D}^n A_\nu - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right), \quad (2.60)$$

que resulta em

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} A^\sigma \left(\square \delta_\sigma^\lambda - \frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} \Pi^{\lambda\sigma} \hat{D}^n \right) A_\lambda. \quad (2.61)$$

Reescrevendo a ação acima como

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} A_\sigma \tilde{\mathcal{O}}^{\lambda\sigma} A_\lambda, \quad (2.62)$$

onde

$$\tilde{\mathcal{O}}^{\lambda\sigma} = \square \eta^{\lambda\sigma} - \frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} \Pi^{\lambda\sigma} \hat{D}^n \quad (2.63)$$

é o operador de onda associado, podemos obter o propagador de acordo com a relação (2.49). O cálculo detalhado é feito no Apêndice C. O propagador obtido no espaço dos

momentos é

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{\lambda\rho}(k) = & -\frac{i}{k^2 \left(k^4 - \left(\frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} \right)^2 D^{2n+1} \right)} \left[\left(\frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} \right)^2 D^{2n} u^2 k^2 \frac{k_\lambda k_\rho}{k^2} + k^4 \eta_{\lambda\rho} - \frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} D^n k^2 \tilde{\Pi}_{\lambda\rho} \right. \\ & \left. - i \left(\frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} \right)^2 D^{2n} (u \cdot k) \left(u_\lambda k_\rho + u_\rho k_\lambda \right) + \left(\frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} \right)^2 D^{2n} k^2 u_\lambda u_\rho \right]. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Do denominador, obtemos os pólos $k^2 = 0$, que é a relação de dispersão usual, e $k^4 - \frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} D^{2n+1} = 0$, que é a relação de dispersão modificada do caso CPT-ímpar (2.38).

Vemos que, no limite $\xi_{(\tilde{d})} \rightarrow 0$, recuperamos o propagador usual do fóton (2.51).

O propagador saturado obtido da (2.64) no caso isotrópico será

$$PS = -\frac{i \left[k^2 J^2 + \left(\frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} \right)^2 |\vec{k}^{4n}| J_0^2 \right]}{(k^2)^2 - \left(\frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} \right)^2 |\vec{k}|^{4n+2}}. \quad (2.65)$$

Realizando a escolha $k_\mu = (\omega, 0, 0, k_3)$, obtemos

$$PS = \frac{-i \left[\left(\omega^2 - k_3^2 \right) \left(J_0^2 - J_1^2 - J_2^2 - \frac{\omega^2 J_0^2}{k_3^2} \right) + \left(\frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} \right)^2 k_3^{4n} J_0^2 \right]}{\omega^2 - k_3^2 \left(1 \pm \frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} k_3^{2n-1} \right)}. \quad (2.66)$$

Com isso, temos dois pólos simples $\omega \rightarrow m_\pm^2$, onde $m_\pm^2 = k_3^2 \left(1 \pm \frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_\gamma^{2n-1}} k_3^{2n-1} \right)$. Após alguma álgebra, o resíduo obtido da (2.66) é

$$Res[PS]_{\omega \rightarrow m_\pm^2} = \pm \frac{i}{2} (-J_1^2 - J_2^2). \quad (2.67)$$

Claramente vemos que o resíduo não é positivo-definido. Logo, a teoria não é unitária. Neste caso, o modo birrefringente de polarização induz o aparecimento de modos fantasmas no modelo. Este resultado concorda com a Ref.[40], que mostrou que a teoria modificada com o termo CPT-ímpar de Myers-Pospelov isotrópico também viola a unitariedade para o caso isotrópico devido aos modos birrefringentes.

Capítulo 3

Extensão de altas ordens derivativas para a Gravidade Linearizada

Seguindo os mesmos passos feitos para o setor eletromagnético, podemos construir uma classe de operadores de violação de Lorentz CPT-par e CPT-ímpar que respeite os mesmos critérios estabelecidos anteriormente. Para isto, precisamos partir da ação de Einstein-Hilbert linearizada (1.26), que pode ser reescrita como uma contração de dois tensores de Levi-Civita a menos de uma derivada total na forma [28]

$$S_{EH} = -\frac{M_g^2}{4} \int d^4x \epsilon^{\mu\rho\alpha\kappa} \epsilon^{\nu\sigma\beta\tau} \eta_{\kappa\tau} h_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta h_{\rho\sigma}, \quad (3.1)$$

onde M_g é uma escala de massa¹.

3.1 Construção de operadores de altas ordens derivativas

Procuramos por termos com operadores que, somados à ação de Einstein-Hilbert linearizada possam gerar relações de dispersão similares àquelas encontradas no setor do fóton estudadas no Capítulo 2. Na verdade, a criação de operadores na gravidade linearizada com altas ordens de derivadas que satisfaçam os cinco critérios de Myers-

¹*A priori* não vamos assumir essa massa como sendo necessariamente a massa de Planck

Pospelov não é tão simples quanto parece. As opções que gozam da invariância de calibre em geral não reproduzem uma modificação relevante.

Por analogia com o caso eletromagnético, partimos do mesmo formato de métrica com uma extensão de VIL que utilizamos no Capítulo 2, isto é

$$\eta_{\alpha\beta} \rightarrow \tilde{\eta}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} - \zeta u_\alpha u_\beta, \quad (3.2)$$

onde ζ é um parâmetro adimensional positivo análogo ao ξ . Com isso, ao substituímos a Eq.(3.2) na Eq.(3.1), iremos recuperar a mesma ação (3.1) acrescida de uma extensão de VIL CPT-par de dimensão $d = 4$ na forma

$$S_{(4)}^{CPT-par} = \frac{\zeta_{(4)} M_g^2}{4} \int d^4x \epsilon^{\mu\rho\alpha\kappa} \epsilon^{\nu\sigma\beta\tau} u_\kappa u_\tau h_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta h_{\rho\sigma}. \quad (3.3)$$

Note que esse termo é invariante pela transformação de calibre (1.27)².

Em termos do operador $\Pi^{\mu\nu}$ definido na Eq.(2.11), a Eq.(3.3) pode ser reescrita como

$$S_{(4)}^{CPT-par} = \frac{\zeta_{(4)} M_g^2}{4} \int d^4x h_{\mu\nu} \Pi^{\mu\rho} \Pi^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma}. \quad (3.4)$$

De fato, a única opção viável na gravidade para um termo com VIL de dimensão 4 que satisfaça a condição de calibre e que possa ser escrita em termos de uma contração de tensores de Levi-Civita (assim como o termo usual de Einstein-Hilbert linearizado), é quando esses tensores não possuem índices contraídos entre si. É pertinente ressaltar que, na gravitação, é impossível construir um termo de VIL com dimensão 3 que seja invariante de calibre, pois, como nesta teoria trabalhamos com tensores de segunda ordem, uma derivada apenas não é suficiente para satisfazer a condição de calibre $\partial_\mu \Lambda_\nu + \partial_\nu \Lambda_\mu = 0$.

Para gerar operadores com uma dimensão $d \geq 4$ arbitrária, podemos considerar uma generalização análoga ao do caso eletromagnético:

$$\zeta_{(4)} \Pi^{\mu\rho} \Pi^{\nu\sigma} \rightarrow \frac{\zeta_{(d)}}{M_g^{d-4}} \left(\Pi^{\mu\rho} \right)^l \left(\Pi^{\nu\sigma} \right)^m. \quad (3.5)$$

Deste modo, M_g passa a ser a escala de massa em que os efeitos de violação de Lorentz

²Note que a invariância de calibre na gravidade linearizada é garantida desde que os índices dos campos $h_{\mu\nu}$ estejam todos contraídos com tensores de Levi-Civita, garantindo que $\partial_\mu \Lambda_\nu + \partial_\nu \Lambda_\mu = 0$.

se tornam relevantes para o setor do gráviton³ e $d = 2 + l + m$, com $l = 1, 2, 3, \dots$ e $m = 1, 2, 3, \dots$.

Se considerarmos $l \neq m$, podemos utilizar a Eq.(2.18) para obter operadores do tipo CPT-par e CPT-ímpar, que podem ser vistos na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Operadores de VIL com dimensão d na gravidade linearizada.

Dimensão (d)	Operador $\times (M_g^2)$	CPT
$d = 4$	$\zeta_{(4)} h_{\mu\nu} \Pi^{\mu\rho} \Pi^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma}$	Par
$d = 5$	$\frac{\zeta_{(5)}}{M_g} h_{\mu\nu} \Pi^{\mu\rho} \Pi^{\nu\lambda} \Pi_{\lambda}^{\sigma} h_{\rho\sigma}$	Ímpar
$d = 6$	$\frac{\zeta_{(6)}}{M_g^2} h_{\mu\nu} \Pi^{\mu\rho} \Pi^{\nu\sigma} \hat{D} h_{\rho\sigma}$	Par
$d = 7$	$\frac{\zeta_{(7)}}{M_g^3} h_{\mu\nu} \Pi^{\mu\rho} \Pi^{\nu\lambda} \Pi_{\lambda}^{\sigma} \hat{D} h_{\rho\sigma}$	Ímpar
$d = 8$	$\frac{\zeta_{(8)}}{M_g^4} h_{\mu\nu} \Pi^{\mu\rho} \Pi^{\nu\sigma} \hat{D}^2 h_{\rho\sigma}$	Par
$d = 9$	$\frac{\zeta_{(9)}}{M_g^5} h_{\mu\nu} \Pi^{\mu\rho} \Pi^{\nu\lambda} \Pi_{\lambda}^{\sigma} \hat{D}^2 h_{\rho\sigma}$	Ímpar
\vdots	\vdots	\vdots

Com isso, podemos escrever as ações generalizadas CPT-par e CPT-ímpar na forma

$$S_{(\bar{d})}^{CPT-par} = \frac{M_g^2}{4} \int d^4x \frac{\zeta_{(\bar{d})}}{M_g^{2n}} h_{\mu\nu} \Pi^{\mu\rho} \Pi^{\nu\sigma} \hat{D}^n h_{\rho\sigma}; \quad (3.6)$$

$$S_{(\hat{d})}^{CPT-impair} = \frac{M_g^2}{4} \int d^4x \frac{\zeta_{(\hat{d})}}{M_g^{2n+1}} h_{\mu\nu} \Pi^{\mu\rho} \Pi^{\nu\lambda} \Pi_{\lambda}^{\sigma} \hat{D}^n h_{\rho\sigma}, \quad (3.7)$$

com $n = (0, 1, 2, 3, \dots)$, $\bar{d} = 4 + 2n$ e $\hat{d} = 5 + 2n$. As lagrangianas contidas nestas ações respeitam aos cinco critérios estabelecidos no Capítulo 2, e portanto, são invariantes pela transformação de calibre $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_{\mu}\Lambda_{\nu} + \partial_{\nu}\Lambda_{\mu}$. É interessante notar que a contração $h_{\mu\nu} \Pi^{\mu\rho} \Pi_{\lambda\sigma} \Pi^{\lambda\nu} h_{\rho}^{\sigma}$ é a única alternativa viável para a criação de um termo de dimensão 5 CPT-Ímpar que viole a invariância de Lorentz na gravidade linearizada e que seja invariante de calibre. Qualquer outra forma de contração entre os operadores $\Pi^{\mu\nu}$ e os campos $h^{\mu\nu}$ não satisfazem os critérios para a criação de operadores de altas derivadas nessa teoria.

Na Seção B.2 do Apêndice B foi demonstrado que os operadores associados às ações CPT-par e CPT-ímpar desenvolvidas aqui podem ser reescritos como peças do formalismo

³Neste trabalho, este termo é utilizado como um jargão útil para se referir ao setor de spin-2 da teoria de campos.

EMP estendido para a gravidade linearizada, estabelecido pela Ref.[28]. É importante ressaltar que o caso particular $l = m$ irá produzir uma nova classe de termos do tipo CPT-par, como mostrado no Apêndice B. No entanto, a relação de dispersão desse novo termo no calibre considerado não será diferente da que vamos calcular a seguir para o termo CPT-par geral (3.6).

Portanto, vemos que o formalismo que desenvolvemos através da generalização proposta na (3.5) é suficiente para abranger todos os casos desenvolvidos para a EMP na gravidade linearizada, sendo portanto útil por ser o primeiro formalismo de altas derivadas criado na gravidade linearizada escrito em termos de um quadri vetor de fundo.

3.2 Extensão CPT-Par

Nesta seção iremos estudar os impactos dos termos de CPT-Par ao modificar a TRG linearizada. Portanto, podemos partir da ação

$$S = S_{EH} + S_{(\bar{d})}^{CPT-par}, \quad (3.8)$$

cuja equação de movimento é

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta h_{\mu\nu}} &= \frac{1}{2} \left[-\square h^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu} \square h - \partial^\mu \partial^\nu h - \eta^{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\lambda h^{\rho\lambda} + \partial_\sigma \partial^\nu h^{\sigma\mu} + \partial_\sigma \partial^\mu h^{\sigma\nu} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\zeta(\bar{d})}{M_g^{2n}} \Pi^{\mu\rho} \Pi^{\nu\sigma} \hat{D}^n h_{\rho\sigma} = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Usando a terceira fórmula da Eq.(2.16), obtemos a relação

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\rho} \Pi^{\nu\sigma} &= \hat{D}(\eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma}) + \eta^{\rho\sigma} u^\mu u^\nu \square - \eta^{\mu\sigma} u^\nu u^\rho \square - \eta^{\nu\rho} u^\mu u^\sigma \square + \eta^{\mu\nu} u^\rho u^\sigma \square \\ &+ \eta^{\rho\sigma} u^2 \partial^\mu \partial^\nu - \eta^{\mu\sigma} u^2 \partial^\nu \partial^\rho - \eta^{\nu\rho} u^2 \partial^\mu \partial^\sigma + \eta^{\mu\nu} u^2 \partial^\rho \partial^\sigma - \eta^{\rho\sigma} u^\mu (u \cdot \partial) \partial^\nu \\ &- \eta^{\rho\sigma} u^\nu (u \cdot \partial) \partial^\mu + \eta^{\mu\sigma} u^\nu (u \cdot \partial) \partial^\rho + \eta^{\mu\sigma} u^\rho (u \cdot \partial) \partial^\nu + \eta^{\nu\rho} u^\mu (u \cdot \partial) \partial^\sigma \\ &- \eta^{\mu\nu} u^\rho (u \cdot \partial) \partial^\sigma + \eta^{\nu\rho} u^\sigma (u \cdot \partial) \partial^\mu - \eta^{\mu\nu} u^\sigma (u \cdot \partial) \partial^\rho - u^\mu u^\nu \partial^\rho \partial^\sigma + u^\nu u^\rho \partial^\mu \partial^\sigma \\ &+ u^\mu u^\sigma \partial^\nu \partial^\rho - u^\rho u^\sigma \partial^\mu \partial^\nu. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Com isso, a equação de movimento (3.9) fica

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left[-\square h^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu} \square h - \partial^\mu \partial^\nu h - \eta^{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\lambda h^{\rho\lambda} + \partial_\sigma \partial^\nu h^{\sigma\mu} + \partial_\sigma \partial^\mu h^{\sigma\nu} \right] + \frac{1}{2} \frac{\zeta(\bar{d})}{M_g^{2n}} \hat{D}^n \left[\hat{D}(h^{\mu\nu} \right. \\
& - \eta^{\mu\nu} h) + u^\mu u^\nu \square h - u^\nu u^\rho \square h_\rho^\mu - u^\mu u^\sigma \square h_\sigma^\nu + \eta^{\mu\nu} u^\rho u^\sigma \square h_{\rho\sigma} + u^2 \partial^\mu \partial^\nu h - u^2 \partial^\nu \partial^\rho h_\rho^\mu \\
& - u^2 \partial^\mu \partial^\sigma h_\sigma^\nu + \eta^{\mu\nu} u^2 \partial^\rho \partial^\sigma h_{\rho\sigma} - u^\mu (u \cdot \partial) \partial^\nu h - u^\nu (u \cdot \partial) \partial^\mu h + u^\nu (u \cdot \partial) \partial^\rho h_\rho^\mu + u^\rho (u \cdot \partial) \partial^\nu h_\rho^\mu \\
& + u^\mu (u \cdot \partial) \partial^\sigma h_\sigma^\nu - 2\eta^{\mu\nu} u^\rho (u \cdot \partial) \partial^\sigma h_{\rho\sigma} + u^\sigma (u \cdot \partial) \partial^\mu h_\sigma^\nu - u^\mu u^\nu \partial^\rho \partial^\sigma h_{\rho\sigma} + u^\nu u^\rho \partial^\mu \partial^\sigma h_{\rho\sigma} \\
& \left. + u^\mu u^\rho \partial^\nu \partial^\sigma h_{\rho\sigma} - u^\rho u^\sigma \partial^\mu \partial^\nu h_{\rho\sigma} \right] = 0. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Como queremos investigar a propagação de ondas gravitacionais em um espaço-tempo vazio, podemos recorrer à escolha de calibre TT, que nos dá as condições $\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$, $\eta_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = h = 0$, $h_{0i} = 0$, além de recorrer ao calibre axial $u_\mu h^{\mu\nu} = 0$ (no Apêndice D é feito a análise dessa escolha de calibre). Com essas escolhas, a (3.11) se reduz à

$$\left(\square - \frac{\zeta(\bar{d})}{M_g^{2n}} \hat{D}^{n+1} \right) h_{TT}^{\mu\nu} = 0. \tag{3.12}$$

No espaço dos momentos, obtemos a relação de dispersão covariante

$$k^2 + \frac{\zeta(\bar{d})}{M_g^{2n}} D^{n+1} = 0. \tag{3.13}$$

Obtemos uma relação de dispersão na forma idêntica a obtida para o caso CPT-par do setor eletromagnético. Considerando o caso isotrópico $u^\alpha = (1, \vec{0})$, obtemos a relação de dispersão em termos das componentes

$$\omega = \pm |\vec{k}| \sqrt{1 - \frac{\zeta(\bar{d})}{M_g^{2n}} |\vec{k}|^{2n}}, \tag{3.14}$$

a velocidade de grupo

$$v_g = \frac{d\omega}{d|\vec{k}|} = \frac{1 - \frac{\zeta(\bar{d})}{M_g^{2n}} (n+1) |\vec{k}|^{2n}}{\sqrt{1 - \frac{\zeta(\bar{d})}{M_g^{2n}} |\vec{k}|^{2n}}}, \tag{3.15}$$

e a velocidade de fase

$$v_f = \frac{\omega}{|\vec{k}|} = \sqrt{1 - \frac{\zeta(\bar{d})}{M_g^{2n}} |\vec{k}|^{2n}}, \tag{3.16}$$

idênticas as do setor eletromagnético, (2.29) e (2.30).

3.3 Extensão CPT-ímpar

Agora, considerando uma extensão de VIL com os operadores de CPT-Ímpar, partimos de uma ação na forma

$$S = S_{EH} + S_{(\hat{d})}^{CPT-ímpar}, \quad (3.17)$$

obtemos a seguinte equação de movimento:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta h_{\mu\nu}} &= \frac{1}{2} \left(\partial_\sigma \partial^\nu h^{\mu\sigma} + \partial_\sigma \partial^\mu h^{\nu\sigma} - \partial^\mu \partial^\nu h - \square h^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\lambda h^{\rho\lambda} + \eta^{\mu\nu} \square h \right) \\ &+ \frac{1}{4} \frac{\zeta(\hat{d})}{M_g^{2n+1}} \Pi_{\lambda\sigma} \hat{D}^n \left(\Pi^{\mu\rho} \Pi^{\lambda\nu} + \Pi^{\nu\rho} \Pi^{\lambda\mu} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Na escolha de calibre TT ($\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$; $h = 0$; $h_{0i} = 0$) e axial ($u_\mu h^{\mu\nu} = 0$), é fácil ver que, pela segunda fórmula da Eq.(2.16), da contração $\Pi^{\lambda\nu} \Pi_{\lambda\sigma}$ só irá restar o termo $-\hat{D}\delta_\sigma^\nu$ e da contração $\Pi^{\lambda\mu} \Pi_{\lambda\sigma}$ só restará $-\hat{D}\delta_\sigma^\mu$. Logo, a equação de movimento fica

$$\frac{1}{2} \square h_{TT}^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \frac{\zeta(\hat{d})}{M_g^{2n+1}} \hat{D}^{n+1} \left(\Pi^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \Pi^{\nu\rho} \eta^{\mu\sigma} \right) h_{\rho\sigma}^{TT} = 0. \quad (3.19)$$

No espaço dos momentos, obtemos

$$\left[-k^2 \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\zeta(\hat{d})}{M_g^{2n+1}} D^{n+1} \left(\tilde{\Pi}^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \tilde{\Pi}^{\nu\sigma} \eta^{\mu\rho} \right) \right] h_{\rho\sigma} = 0. \quad (3.20)$$

Multiplicando a equação acima pelo seu conjugado:

$$-k^2 \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} - \frac{1}{2} \frac{\zeta(\hat{d})}{M_g^{2n+1}} D^{n+1} \left(\tilde{\Pi}_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \tilde{\Pi}_{\nu\alpha} \eta_{\mu\beta} \right), \quad (3.21)$$

somos levados à

$$\left[(k^2)^2 \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma - \frac{1}{4} \left(\frac{\zeta(\hat{d})}{M_g^{2n+1}} \right)^2 D^{2n+2} \left(\tilde{\Pi}^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \tilde{\Pi}^{\nu\rho} \eta^{\mu\sigma} \right) \left(\tilde{\Pi}_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \tilde{\Pi}_{\nu\alpha} \eta_{\mu\beta} \right) \right] h_{\rho\sigma} = 0. \quad (3.22)$$

Usando novamente a segunda fórmula da Eq.(2.16), obtemos, após alguma álgebra,

$$\left[(k^2)^2 - \left(\frac{\zeta(\hat{d})}{M_g^{2n+1}} \right)^2 D^{2n+3} \right] h_{\alpha\beta} = 0, \quad (3.23)$$

que nos dá a relação de dispersão covariante

$$k^2 - \lambda \frac{\zeta(\hat{d})}{M_g^{2n+1}} D^{n+\frac{3}{2}} = 0. \quad (3.24)$$

onde $\lambda = \pm 1$ são os dois modos de polarização da onda gravitacional modificada.

Vemos que essa relação é similar à relação (2.38) obtida para o caso CPT-ímpar do caso eletromagnético. Considerando portanto o caso isotrópico $u^\alpha = (1, \vec{0})$, ficamos com

$$\omega_\pm = |\vec{k}| \sqrt{1 + \lambda \frac{\zeta(\hat{d})}{M_g^{2n+1}} |\vec{k}|^{2n+1}}. \quad (3.25)$$

A velocidade de grupo e a velocidade de fase são, respectivamente:

$$v_g = \frac{d\omega}{d|\vec{k}|} = \frac{1 + (n + \frac{3}{2})\lambda \frac{\zeta(\hat{d})}{M_g^{2n+1}} |\vec{k}|^{2n+1}}{\sqrt{1 + \lambda \frac{\zeta(\hat{d})}{M_g^{2n+1}} |\vec{k}|^{2n+1}}}, \quad (3.26)$$

e

$$v_f = \frac{\omega}{|\vec{k}|} = \sqrt{1 + \lambda \frac{\zeta(\hat{d})}{M_g^{2n+1}} |\vec{k}|^{2n+1}}, \quad (3.27)$$

semelhantes às (2.40) e (2.41) do caso CPT-ímpar do fóton.

Como as relações de dispersão CPT-par e CPT-ímpar para o setor gravitacional assumiram as mesmas formas das obtidas para o setor eletromagnético, a análise de estabilidade e causalidade que fizemos na seção 2.5 também é válida para as modificações discutidas neste capítulo.

Capítulo 4

Aspectos fenomenológicos

Existe uma literatura bem estabelecida quanto às restrições experimentais e observacionais de parâmetros de violação de Lorentz para operadores de dimensão 3 ou 4 renormalizáveis. Como tais operadores não são *a priori* suprimidos por uma escala de alta energia (como a escala de Planck), os testes experimentais restringem os parâmetros como sendo muito pequenos [3]. Portanto, neste trabalho iremos nos concentrar na restrição de parâmetros com dimensão maior que quatro, mais especificamente de dimensão 5 e 6, visto que dimensões mais altas de massa implicam em supressão com uma potência muito alta de energia relativamente próxima da escala de Planck, o que torna bastante inviável a detecção de tais modificações com os atuais métodos experimentais.

Existem dois testes astrofísicos que são mais utilizados para a restrição de parâmetros de VL. O primeiro deles é o atraso temporal de voo entre duas partículas, que seriam emitidas simultaneamente de um mesmo evento astrofísico e que, durante o percurso, pudessem encontrar algum tipo de efeito de granulação do espaço tempo, o que induziria uma violação de Lorentz e, por consequência, efeitos dispersivos, implicando que pulsos de diferentes frequências emitidos simultaneamente chegariam à Terra em tempos diferentes.

O outro tipo de teste envolve o caso da birrefringência do vácuo. Neste tipo de efeito, o fato de que os dois modos de polarização de uma onda possuem velocidades diferentes induzem a uma rotação do ângulo de polarização da onda, que pode ser medida por métodos observacionais. Esse método também é bastante utilizado para eventos de escala astrofísica ou cosmológica, visto que distâncias maiores aumentam a esperança de

detecção dos efeitos de quebra de Lorentz. Analisemos primeiro o atraso temporal no tempo de voo.

4.1 Atraso temporal de voo

Esse tipo de teste foi pela primeira vez proposto no artigo seminal de Amelino-Camelia *et al.* [19], no qual foi proposto a utilização de explosões de raios gamma (GRBs - *gamma ray bursts*) vindas de objetos astrofísicos para detectar uma possível violação de Lorentz por efeitos dispersivos. A partir daí, o uso de GRBs se tornou uma busca padrão. De fato, devido aos curtos atrasos temporais observados, às grandes distâncias cosmológicas, e às partículas (fótons) altamente energéticas, as GRBs são uma das melhores esperanças para uma possível detecção futura de violação de Lorentz [41, 42, 43]. Desde então, vários limites nos efeitos dispersivos da VIL através da observação de GRBs já foram obtidos [44, 45, 46, 47, 48, 49].

No entanto, há um problema experimental neste tipo de abordagem, e este reside no fato de que não há maneiras efetivamente seguras de saber se dois ou mais fótons são emitidos simultaneamente ou não de um mesmo evento astrofísico (que é geralmente desconhecido no experimento), visto que a própria astrofísica não possui modelos que possam nos dar tais informações. Com isso, o intervalo de tempo ΔT_{obs} observado na Terra entre a chegada de duas astropartículas pode ser expresso como[49]

$$\Delta t_{obs} = \Delta t_{VIL} + \Delta t_{int}, \quad (4.1)$$

onde Δt_{VIL} é o atraso temporal devido ao efeito dispersivo provocado pela violação da invariância de Lorentz, e Δt_{int} é o intervalo de tempo intrínseco do próprio evento astrofísico. Para duas astropartículas emitidas simultaneamente de um mesmo evento, teríamos $\Delta t_{int} = 0$ e $\Delta t_{obs} = \Delta t_{VIL}$.

O cálculo detalhado para a obtenção de Δt_{VIL} é feito no Apêndice E. Para o caso

CPT-ímpar sub-luminal e CPT-par, as fórmulas são, respectivamente,

$$\Delta t_{VIL}^{CPT-ímpar} = (n+1) \frac{\xi_{(\hat{d})} E^{2n+1}}{M_\gamma^{2n+1}} \int_0^z \frac{(1+z')^{2n+1} dz'}{H_z}, \quad (4.2)$$

$$\Delta t_{VIL}^{CPT-par} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\xi_{(\bar{d})} E^{2n}}{M_\gamma^{2n}} \int_0^z \frac{(1+z')^{2n} dz'}{H_z}. \quad (4.3)$$

Esses resultados representam o atraso temporal entre um fóton de energia E , sujeito ao efeito dispersivo devido ao termo CPT-ímpar ou CPT-par e um fóton luminal, ambos emitidos de uma mesma fonte astrofísica com um *redshift*¹ z . As mesmas relações acima também são válidas para os casos CPT-ímpar e CPT-par do setor gravitacional (ou seja, para a propagação de ondas gravitacionais), sendo dadas em função de $\zeta_{(d)}$ e M_g .

4.1.1 Dispersão nas ondas gravitacionais

Podemos obter restrições nos parâmetros $\zeta_{(d)}$ analisando a propagação de ondas gravitacionais. Para isto, consideremos um evento de emissão de ondas gravitacionais que emite grávitons à uma determinada energia E_g , que sofrem efeitos dispersivos advindos da VIL no espaço-tempo. Utilizando primeiro o caso CPT-ímpar derivado na (4.2) para $d = 5$ ($n = 0$), a expressão para o atraso temporal entre a chegada de tais grávitons e grávitons luminiais é dada por

$$\begin{aligned} \Delta t_{VIL} &= \frac{\zeta_{(5)}}{M_g} E_g \int_0^z \frac{(1+z')}{H_z} dz' \\ &= \frac{\zeta_{(5)}}{M_g H_0} E_g \int_0^z \frac{(1+z')}{\sqrt{\Omega_m (1+z')^3 + \Omega_\Lambda}} dz'. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Logo, obtemos a relação

$$\frac{\zeta_{(5)}}{M_g} = \frac{\Delta t_{VIL} H_0}{E_g I_1(z)}, \quad (4.5)$$

onde $I_1(z) = \int_0^z [(1+z')(\Omega_m(1+z')^3 + \Omega_\Lambda)^{-1/2}] dz'$.

Podemos usar como dados os valores obtidos para o evento GW150914, que corresponde a primeira detecção de onda gravitacional feita pelo LIGO [31]. Neste evento, a fonte estava localizada em um *redshift* $z = 0,09_{-0,04}^{+0,03}$, o que nos dá $I_1(0,09) \simeq 0,09$,

¹Do inglês, desvio para o vermelho. É a medida observacional do quanto o comprimento de onda de uma fonte astrofísica/cosmológica está aumentando. Com isso, estima-se a velocidade de afastamento da fonte pelo efeito Doppler.

para valores de $\Omega_m = 0,315$ e $\Omega_\Lambda = 0,685$. Na amplitude máxima do sinal de pico de onda observado, o tamanho do pico foi de aproximadamente 0,003s, como aponta a Ref.[28]. A frequência do sinal teve um alcance entre 35Hz à 250Hz. Iremos portanto adotar o mesmo valor de frequência adotado em [28] por questões de comparação, isto é, de aproximadamente 100Hz, que convertido em energia fica $E_g = 4,13 \times 10^{-13}\text{eV}$.

Portanto, considerando que os grávitons, no pico de amplitude, foram enviados praticamente de modo simultâneo, podemos considerar $\Delta t_{int} = 0$, e portanto $\Delta t_{VIL} = \Delta t_{obs} \leq 0,003\text{s} = 4,53 \times 10^{12}\text{eV}^{-1}$. Substituindo esses valores na (4.5), obtemos o limite superior

$$\frac{\zeta_{(5)}}{M_g} \leq 1,84 \times 10^{-7}\text{eV}^{-1}. \quad (4.6)$$

Convertendo em metros, obtemos $\frac{\zeta_{(5)}}{M_g} \leq 3,64 \times 10^{-14}\text{m}$, que corresponde ao valor obtido em [28] para operadores de dimensão 5.

Vemos que a escala de energia onde os efeitos de gravitação quântica são relevantes para o gráviton precisa ser muito menor do que a massa de Planck, se quisermos valores de $\zeta_{(5)}$ fenomenologicamente relevantes (entre um intervalo de 10^{-3} à 10^3). Outras escalas de energias menores que a da escala de Planck podem ser sugeridas em alguns cenários². Podemos usar o valor $M_g \sim 10^5\text{eV}$ sugerido em [51], o qual nos dá um limite de $\zeta_{(5)} \sim 10^{-2}$, que é relevante do ponto de vista fenomenológico. No entanto, tal escala de energia é apenas uma hipótese, visto que, com as atuais teorias, não é possível saber à partir de que energia efeitos de gravitação quântica podem atuar em determinadas partículas.

Já para a expressão do caso CPT-par (4.3) de dimensão $d = 6$ ($n = 1$), obtemos a relação

$$\Delta t_{VIL} = \frac{3}{2} \frac{\zeta_{(6)}}{M_g^2} E_g^2 \int_0^z \frac{(1+z')^2}{\sqrt{\Omega_m(1+z')^3 + \Omega_\Lambda}} dz', \quad (4.7)$$

que nos dá

$$\frac{\zeta_{(6)}}{M_g^2} \leq \frac{2}{3} \frac{\Delta t_{VIL} H_0}{E_g^2 I_2(z)}, \quad (4.8)$$

com $I_2(z) = \int_0^z [(1+z')^2(\Omega_m(1+z')^3 + \Omega_\Lambda)^{-1/2}] dz'$.

²Na Ref.[50] por exemplo, é discutido a possível existência de outra escala de energia para efeitos da VIL, que pode ser justificada pelo formalismo de Horava-Lifshitz de gravitação quântica.

Substituindo os mesmos valores para o evento GW150914, com $I_2(0,09) \simeq 0,09$, obtemos o limite superior

$$\frac{\zeta_{(6)}}{M_g^2} \leq 2,95 \times 10^5 \text{eV}^{-2}. \quad (4.9)$$

convertendo para metros quadrados, obtemos $\frac{\zeta_{(6)}}{M_g^2} \leq 1,15 \times 10^{-8} \text{m}^2$, que corresponde ao valor obtido na Ref.[28] para operadores de dimensão 6.

Vemos que para o caso de dimensão 6, a escala de energia M_g precisaria ser menor ainda que no caso de dimensão 5 para que houvesse relevância fenomenológica. Se utilizarmos casos para $d > 6$, obteremos sempre restrições mais distantes do padrão detectável possível. Deste modo, o caso de dimensão 5, que é suprimido apenas por uma potência da escala de energia M_g , é a melhor esperança futura para detectar possíveis efeitos VIL em eventos de ondas gravitacionais.

4.1.2 Dispersão nas ondas eletromagnéticas

Aqui, vamos seguir a abordagem feita pela Ref.[52], onde o valor de Δt_{int} foi estimado utilizando o modelo de jato magnético, que pode ser válido devido ao comportamento das várias GRBs detectadas pelo satélite *Fermi* ao longo dos anos. Pelas observações desse satélite, foi constatado que fótons da escala de GeV chegam à Terra alguns segundos depois de fótons na escala de MeV [45].

Com a utilização desse modelo, podemos estimar a escala de energia em que a VIL ocorre para quatro eventos: GRB08091c, GRB090510, GRB090902b e GRB090926. Como a Ref.[3] sugere que os efeitos birrefringentes em emissões de fótons possam anular ou modificar o fenômeno do atraso temporal direto entre os fótons, iremos utilizar como modelo de estudo a extensão CPT-par (que não possui birrefringência) de dimensão 6.

A partir da Eq.(4.3) para $d = 6$ ($n = 1$), obtemos a fórmula

$$M_\gamma = \sqrt{\frac{3E_\gamma^2 I_2(z) \xi_{(6)}}{2\Delta t_{VIL} H_0}}. \quad (4.10)$$

Com isso, podemos estimar o valor M_γ com os respectivos dados de cada um dos GRBs tirados da Ref.[52]. As estimativas para M_γ considerando o caso ideal $\xi_{(6)} \approx 1$ podem ser conferidas na tabela 4.1.

Tabela 4.1: Estimativa para a escala de energia da VIL no formalismo CPT-par $d = 6$ para quatro GRBs detectadas pelo telescópio *Fermi*. Os valores de tempo Δt_{VIL} foram estimados pela Ref.[52].

GRB	E_γ (GeV)	Δt_{obs} (s)	Δt_{VIL} (s)	M_γ (GeV)
080916c	13,22	12,94	0,24	$4,56 \times 10^{10}$
090510	31	0,20	0,14	$8,10 \times 10^{10}$
090902b	11,16 7	9,5	0,10	$5,57 \times 10^{10}$
090926	19,6	21,5	0,20	$7,64 \times 10^{10}$

Vemos que $M_\gamma \simeq 10^{10}$ é um valor bem abaixo do esperado se considerarmos que a VIL é motivada por efeitos de gravitação quântica a nível da escala de Planck. No entanto, no futuro essa estimativa pode mudar se dispormos de eventos com emissões de fótons na escala de TeV ou mais, conhecidos como UHECRs (*Ultrahigh energy cosmic rays*), como é sugerido nas Refs.[53, 54, 55].

4.2 Birrefringência cosmológica

Como a relação de dispersão obtida para o caso CPT-Ímpar claramente implica na ocorrência de uma birrefringência, visto que os dois modos de polarização possuem velocidades de propagação diferentes, podemos estudá-la à partir de fenômenos na escala astrofísica ou cosmológica, como emissões de fótons à altas energias (GRBs) vindas de estrelas ou galáxias distantes.

Partimos do princípio que, um meio birrefringente atua rotacionando o vetor de polarização da onda. O cálculo para a obtenção da fórmula que relaciona a rotação do vetor de polarização com a energia E das partículas subluminais (sujeitas ao efeito da VIL) e o *redshift* z da fonte é feito no Apêndice F. O resultado é [56]

$$\Delta\theta = \frac{\xi^{(\hat{d})}}{M_\gamma^{2n+1}} E^{2n+2} \int_0^z \frac{(1+z')^{2n+1}}{H_z} dz'. \quad (4.11)$$

Da (4.11) para o caso $d = 5$, obtemos

$$\frac{\xi^{(5)}}{M_\gamma} = \frac{\Delta\theta H_0}{E^2 I_1(z)}. \quad (4.12)$$

Como as atuais observações de ondas gravitacionais não conseguem obter informações polarimétricas, temos que nos restringir ao setor do fóton e buscar por possíveis GRBs com variações consideráveis no ângulo do vetor de polarização. Para isto, vamos considerar os dados advindos da explosão de raios gamma GRB041219A. Neste evento, foi observado um alto grau de polarização durante a emissão, e a variação chegou a ser medida em $\Delta\theta \leq 47^\circ$ [57]. A fonte estava localizada em um *redshift* de $z = 0,02$. Usaremos como medida de energia o valor obtido para a energia de pico, que foi de $E = 3,92 \times 10^5 \text{eV}$.

Resolvendo a integral, encontramos $I_1(0,02) \simeq 0,02$. Substituindo tudo na (4.12), obtemos

$$\frac{\xi_{(5)}}{M_\gamma} \leq 2,31 \times 10^{-41} \text{eV}^{-1}. \quad (4.13)$$

Usando como exemplo a escala de massa sendo igual à massa de Planck: $M_\gamma = M_P = 1,22 \times 10^{28} \text{eV}$, encontramos $\xi_{(5)} \leq 2,81 \times 10^{-13}$, que é aproximadamente o limite obtido na Ref.[57] (nesse artigo os autores utilizaram a massa de Planck reduzida). Portanto, nesse caso, para obtermos restrições relevantes, teríamos que optar por uma escala de energia ainda maior que a própria escala de Planck, o que praticamente não é reforçado por nenhum trabalho. Outra perspectiva é dispor de eventos envolvendo raios cósmicos na escala de *TeV* ou mais (UHECRs).

4.3 Atraso temporal por lentes gravitacionais

Existe uma maneira proposta recentemente capaz de nos dar informações precisas sobre possíveis atrasos temporais de partículas em um dado evento astrofísico sem ter a necessidade de conhecer o tempo intrínseco de emissão Δt_{int} . Esta consiste em um evento com a presença de uma lente gravitacional entre o observador e a fonte de emissão³, que age alterando o caminho traçado pela luz (ou por qualquer forma de radiação). Se este efeito de curvatura for intenso o suficiente para produzir duas ou mais imagens virtuais da fonte aos arredores da linha de visada da lente, chamamos o efeito de lente gravitacional forte⁴.

³Essa lente geralmente é uma galáxia ou um aglomerado de galáxias.

⁴Praticamente todos os sistemas de lente forte conhecidos (CASTLES Survey: <http://www.cfa.harvard.edu/castles/>) consistem de um quasar como fonte e uma galáxia atuando

De acordo com a relatividade geral, quando um dado evento astronômico passa por uma lente gravitacional forte, as imagens podem se formar em intervalos de tempo diferentes, ou seja, há um certo atraso temporal entre a formação das imagens que pode ser observado devido as configurações de posição e de caminhos de trajetória diferentes [58]. Esse atraso é tido como acromático, ou seja, se dá de maneira equivalente para fótons de diversas frequências e energias. Porém, se partimos do pressuposto de que pode haver um certo nível de dispersão, podemos aplicar estes conceitos para a restrição dos parâmetros da VIL.

4.3.1 Modelo para o estudo de lentes gravitacionais

Em geral, o tempo para a formação de uma dada imagem pode ser escrito como [58]

$$t(x) = (1 + z_l) \frac{D_l D_s}{D_{ls}} \left[\frac{1}{2} (x - \beta)^2 - \psi(x) \right], \quad (4.14)$$

onde x e β são as posições projetadas na esfera celestial da imagem e da fonte, respectivamente; $\psi(x)$ é o potencial gravitacional; D_l , D_s e D_{ls} são as distâncias de diâmetro angular entre o observador e a lente, entre o observador e a fonte, e entre a lente e a fonte, respectivamente, dadas em função do *redshift* da fonte z_s e do *redshift* da lente z_l .

Em uma lente gravitacional forte, a posição da fonte se encontra dentro do chamado anel de Einstein, um círculo de raio θ_E . Nesse caso, múltiplas imagens podem aparecer no evento. Para a obtenção do potencial $\psi(x)$, utiliza-se comumente o modelo de uma esfera isotérmica singular (SIS - *singular isothermal sphere*) [59], que consiste em um modelo realístico para a descrição da maioria das lentes fortes por apresentar resultados precisos, além de ser o mais comumente usado para a descrição de tais fenômenos [58, 60]. Outro modelo que pode trazer resultados um pouco mais precisos é o de elipsóide isotérmica singular (SIE - *singular isothermal sphere*), porém, para fins de estimativa, o modelo SIS já se apresenta suficiente [58].

O raio do anel de Einstein para o modelo SIS é dado por

$$\theta_E = 4\pi\sigma^2 \frac{D_{ls}}{D_s}, \quad (4.15)$$

como lente.

onde σ denota a dispersão de velocidade unidimensional das estrelas na lente galáctica. Para lentes fortes, temos que $|\beta| < \theta_E$, e duas imagens colineares A e B serão formadas em lados opostos da lente, nas distâncias radiais de $R_A = \theta_E + \beta$ e $R_B = \theta_E - \beta$. O atraso temporal entre a formação dessas imagens será, de acordo com a Ref.[58],

$$\Delta t_{SIS} = \frac{1}{2}(1 + z_l) \frac{D_l D_s}{D_{ls}} (R_A^2 - R_B^2), \quad (4.16)$$

ou, em termos do anel de Einstein,

$$\Delta t_{SIS} = 2(1 + z_l) \frac{D_l D_s}{D_{ls}} \theta_E \beta. \quad (4.17)$$

Substituindo a (4.15), obtemos

$$\Delta t_{SIS} = 8\pi r_l \beta \sigma^2, \quad (4.18)$$

onde $r_l = (1 + z_l)D_l$ é a distância comóvel entre o observador e a lente.

Imaginemos agora uma fonte localizada em uma distância cosmológica emitindo fótons de alta energia (na escala TeV, por exemplo) que sofre uma lente gravitacional devido a uma galáxia que se encontra entre o observador e a fonte. Caso exista algum efeito dispersivo induzido por uma violação de Lorentz já proposta, tais fótons estariam sujeitos a uma velocidade inferior em relação à fótons de baixa energia ($\ll TeV$). O observador então irá notar um atraso temporal combinado do efeito provocado pela lente e do efeito dispersivo. Logo, a (4.18) não será mais acromática e dependerá da frequência do fóton.

A distância comóvel que tais fótons percorrem será $\tilde{r} = r_l + r_{VIL}$, onde r_{VIL} é a contribuição devido ao efeito de violação de Lorentz. Realizando a substituição $r_l \rightarrow \tilde{r}$ na (4.18), obtemos a fórmula para o atraso temporal entre a formação das imagens A e B para fótons de alta energia que sofrem dispersão:

$$\Delta t_{VIL,SIS} = 8\pi \tilde{r} \beta \sigma^2. \quad (4.19)$$

Vamos utilizar como primeira abordagem o caso desenvolvido para o operador CPT-ímpar. O cálculo de r_{VIL} foi feito no Apêndice E (Eq. E.9). Logo,

$$\tilde{r} = r_l + \frac{\xi_{(\hat{d})}}{M_\gamma^{2n+1}} E_\gamma^{2n+1} (n+1) \int_0^{z_l} \frac{(1+z')^{2n+1}}{H_z} dz'. \quad (4.20)$$

Com isso, a diferença de tempo entre a observação dos fótons de alta energia e os fótons luminiais $\Delta\tau_\gamma = \Delta t_{VIL,SIS} - \Delta t_{SIS}$ será de

$$\Delta\tau_\gamma^{CPT-impair} = 8\pi\beta\sigma^2 \frac{\xi(\hat{d})}{M_\gamma^{2n+1}} E_\gamma^{2n+1} (n+1) \int_0^{z_l} \frac{(1+z')^{2n+1}}{H_z} dz'. \quad (4.21)$$

De modo análogo, podemos obter a mesma grandeza considerando a extensão CPT-par:

$$\Delta\tau_\gamma^{CPT-par} = 8\pi\beta\sigma^2 \frac{\xi(\bar{d})}{M_\gamma^{2n}} E_\gamma^{2n} \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_0^{z_l} \frac{(1+z')^{2n}}{H_z} dz'. \quad (4.22)$$

4.3.2 Estudo fenomenológico

Como não há eventos de lentes gravitacionais com medições para $\Delta\tau_\gamma$ até o presente momento, podemos estimar essa quantidade de acordo com a precisão observacional atual, supondo os casos ideais de violação de Lorentz para dimensões 5 e 6, com $\xi_{(5)} = 1$ e $\xi_{(6)} = 1$, ou seja, quando o efeito devido a VIL seja mais intenso na própria escala de gravitação quântica M_γ .

Da (4.21), para $d = 5$ ($n = 0$), podemos estimar $\Delta\tau_\gamma$ com a relação

$$\Delta\tau_\gamma = \frac{8\pi\beta\sigma^2 E_\gamma I_1(z_l)}{M_\gamma H_0}. \quad (4.23)$$

Vamos seguir a abordagem feita pela Ref.[58] e utilizar o evento de lente forte HST14176-5226, descoberto pelo Telescópio Espacial Hubble. A fonte era um quasar em um *redshift* $z_s = 3,4$, enquanto que a lente era uma galáxia elíptica com um *redshift* $z = 0,809$. Logo, $I_1(0,809) \simeq 8,00 \times 10^{-1}$. O raio do anel de Einstein foi calculado em $\theta_E = 1,489\text{arcsec}$ e $\beta = 0,13\text{arcsec} = 8,4 \times 10^{-7}\text{rad}$. A velocidade de dispersão foi calculada em $\sigma = 290 \pm 8\text{km s}^{-1}$. Substituindo tudo na (4.23) e utilizando fótons de 20TeV, obtemos

$$\Delta\tau_\gamma = \frac{1}{M_\gamma} 2,02 \times 10^{35} \text{eV}^{-1}. \quad (4.24)$$

Se considerarmos que a escala de efeitos da gravitação quântica é a própria escala de Planck, isto é, $M_\gamma = M_P = 1,22 \times 10^{28}\text{eV}$, obtemos,

$$\Delta\tau_\gamma = 1,71 \times 10^7 \text{eV}^{-1} = 1,12 \times 10^{-8}\text{s}, \quad (4.25)$$

equivalente à restrição obtida na Ref.[58].

Já para o caso de dimensão 6, partindo da Eq.(4.22) obtemos a relação

$$\Delta\tau_\gamma = \frac{8\pi\beta\sigma^2 E_\gamma^2 I_2(z_l)}{M_\gamma^2 H_0}. \quad (4.26)$$

Substituindo os valores do caso anterior na Eq.(4.26), ficamos com

$$\Delta\tau_\gamma = 3,37 \times 10^{-2} \text{eV} = 2,21 \times 10^{-17} \text{s}, \quad (4.27)$$

que é bem mais restritivo que o obtido com dimensão 5.

Como as atuais observações de lentes gravitacionais não diferem muito da utilizada aqui como exemplo, vemos que a precisão para a medição de um possível atraso temporal entre as imagens devido a efeitos dispersivos precisa ser muito grande, a fim de justificar essa dispersão pela motivação presente, que é a de que a ocorrência se dê na escala de Planck. A precisão conseguida com os atuais telescópios gira em torno de 10^{-3} s. Porém, no futuro, com a evolução de instrumentos de observação, a medição de tempo em tais eventos pode facilmente se reduzir a uma incerteza menor do que microsegundos, o que facilitaria a identificação de uma possível dispersão através do valor obtido na (4.25). Espera-se que essa precisão seja alcançada com a futura construção do Telescópio de Einstein, como aponta a Ref.[61].

Futuramente também pode ser possível utilizar essa abordagem em eventos de emissão simultânea de ondas gravitacionais e eletromagnéticas, como o caso da GW170817, mas com a presença de uma lente gravitacional, como destaca a Ref.[62]. Dessa forma, pode ser possível estimar qual será a velocidade de propagação de ambos os sinais de acordo com as imagens produzidas pela lente, como foi sugerido na Ref.[60]. Essa abordagem tem a vantagem de que não precisamos saber a variação de tempo intrínseca do evento.

Capítulo 5

Considerações Finais

Neste trabalho, elaboramos um novo tipo de formalismo na forma de uma teoria de campos efetiva com a criação de lagrangianas modificadas com operadores de altas ordens derivativas a fim de incluir o efeito de VIL através de um quadri vetor de fundo isotrópico. A abordagem foi feita tanto para a eletrodinâmica usual de Maxwell quanto para a gravitação linearizada advinda da ação de Einstein-Hilbert usual da relatividade geral. Na eletrodinâmica modificada, estudamos estudar a consistência das relações de dispersão das teorias, mostrando que a classe de teorias com modificação CPT-par preserva a estabilidade, causalidade e unitariedade, enquanto que a classe CPT-ímpar viola essas propriedades, com o aparecimento de modos fantasmas e táquions. Isso mostra que as teorias de CPT-par podem ser boas candidatas para teorias quânticas de campos, e portanto, merecem um estudo mais aprofundado nesse sentido.

Na análise fenomenológica do setor gravitacional, percebe-se que as restrições obtidas para eventos de emissão de ondas gravitacionais detectadas até o momento pelo LIGO são de baixa frequência, e conseqüentemente de baixa energia, o que dificulta a possível detecção de efeitos da VIL. A futura detecção de eventos de ondas gravitacionais adicionais, bem como a construção de interferômetros mais avançados, como o LISA (*Laser Interferometer Space Antenna*), pode nos dar no futuro uma restrição menor nos parâmetros obtidos neste trabalho. Uma sensibilidade maior é esperada com ondas gravitacionais de maior frequência, como por exemplo, emitidas de um colapso de supernova [28]. Essas perspectivas são brilhantes no que se refere a possibilidade definitiva pela validação ou

invalidação da simetria de Lorentz na natureza futuramente.

Já no setor do fóton, as GRBs se mostram mais promissoras por se tratarem de eventos muito mais energéticos que as ondas gravitacionais. No entanto, o formalismo da TCE nos possibilita apenas o estudo do atraso temporal com efeito suprimido pela massa de Planck ao quadrado, resultando em restrições maiores dos parâmetros. Porém, isso também pode indicar que uma nova escala de energia da gravitação quântica menor que a massa de Planck esteja envolvida no processo, o que é sugerido por algumas teorias.

No caso da birrefringência, as atuais detecções de ondas gravitacionais carecem de informações polarimétricas. No futuro, esse estudo poderá ser considerado. Já no caso das GRBs, os limites obtidos até então para a birrefringência do vácuo são muito restritivos, o que sugere que o efeito pode não existir, ou que é tão pequeno que muito dificilmente será detectado em um futuro próximo.

O atraso temporal em eventos com lentes gravitacionais se mostra bastante promissor, visto que dispensa o conhecimento do intervalo de tempo intrínseco dos eventos. O limite experimental no intervalo de tempo que obtemos neste trabalho se mostra experimentalmente detectável em um futuro próximo, com a construção de equipamentos mais precisos. Isso pode nos dar a validação ou a invalidação da VIL por meio de eventos cosmológicos. Outro ponto importante é a possibilidade futura de analisar um evento de emissão simultânea de ondas eletromagnéticas e gravitacionais atravessando uma lente gravitacional. Isso pode servir de base para um estudo de princípios fundamentais da física, como a imposição de limites para as velocidades do fóton e do gráviton.

Por fim, talvez os limites experimentais para os parâmetros obtidos neste trabalho e em muitos outros são uma possível indicação de que a invariância de Lorentz possa ser uma simetria exata da natureza, ou de que o formalismo da TCE possa ser insuficiente para sondar tais efeitos [3]. Contudo, é encorajador que os futuros avanços nas precisões experimentais dos equipamentos de medição possam nos dar uma melhor perspectiva quanto a estimativa dessas possíveis relíquias de uma teoria mais fundamental de gravitação quântica.

Apêndice A

Transformações CPT

Existe uma classe de simetrias discretas na teoria de campos que necessitam ser descritas de maneira diferente das simetrias contínuas usuais. Basicamente existem três simetrias discretas de maior importância: a simetria de inversão espacial (paridade) $\hat{\mathcal{P}}$, a simetria de inversão temporal $\hat{\mathcal{T}}$ e a simetria de conjugação de carga $\hat{\mathcal{C}}$. As teorias de campo usuais costumam ser invariantes por essas três transformações, porém, termos com interações podem quebrar uma ou mais dessas simetrias. No entanto, de acordo com o teorema CPT [39], toda e qualquer teoria de campos deve preservar a invariância sobre a transformação tripla $\hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}$. Vamos investigar cada uma das transformações:

A.1 Inversão espacial (paridade)

A transformação de paridade inverte apenas as componentes espaciais de um dado sistema físico. Essa transformação atua no campo de calibre da seguinte maneira:

$$\hat{\mathcal{P}} A^\mu(\vec{x}, t) \hat{\mathcal{P}}^{-1} = A_\mu(-\vec{x}, t). \quad (\text{A.1})$$

A.2 Inversão temporal

Essa transformação mantém as coordenadas espaciais fixas, enquanto que o sinal da coordenada temporal é invertido:

$$\hat{\mathcal{T}} A^\mu(\vec{x}, t) \hat{\mathcal{T}}^{-1} = A_\mu(\vec{x}, -t). \quad (\text{A.2})$$

A.3 Conjugação de carga

Essa importante transformação nada tem a ver com coordenadas espaciais ou temporais. Ela é relacionada aos graus de liberdade das partículas e anti-partículas de uma teoria. A conjugação de carga transforma uma partícula na sua anti-partícula e vice-versa. Essa transformação atua no campo do fóton como

$$\hat{\mathcal{C}}A^\mu(\vec{x}, t)\hat{\mathcal{C}}^{-1} = -A_\mu(\vec{x}, t). \quad (\text{A.3})$$

Uma teoria invariante sobre a transformação $\hat{\mathcal{C}}$ garante que a partícula e a sua anti-partícula possuam cargas de mesmo módulo e de sinais contrários.

A.4 Teste da invariância CPT

Sabendo que a quadri-derivada ∂_μ se transforma sobre $\hat{\mathcal{P}}$, $\hat{\mathcal{T}}$ e $\hat{\mathcal{C}}$ da mesma maneira que o campo A^μ , podemos testar a invariância de CPT das teorias propostas no Cap.2. De fato, o campo e a derivada se transformam sobre CPT como

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}A^\mu\hat{\mathcal{C}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{T}}^{-1} &= -A^\mu; \\ \hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}\partial^\mu\hat{\mathcal{C}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{T}}^{-1} &= -\partial^\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Logo, isso nos permite inferir que a lagrangiana $\mathcal{L}_{(\bar{d})}^{CPT-Par} = \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_{\bar{\gamma}}^{2n}} A_\mu \Pi^{\mu\rho} \Pi_\rho^\nu \hat{D}^n A_\nu$ associada a ação CPT-Par (2.19) se transforma em CPT como

$$\hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}\mathcal{L}_{(d)}^{CPT-par}\hat{\mathcal{C}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{T}}^{-1} = \mathcal{L}_{(d)}^{CPT-par}, \quad (\text{A.5})$$

deste modo, ela é dita invariante por transformações de CPT, e portanto recebe o nome de CPT-par (pois não muda o sinal na transformação).

Já a lagrangiana $\mathcal{L}_{(\bar{d})}^{CPT-impar} = \frac{\xi_{(\bar{d})}}{M_{\bar{\gamma}}^{2n-1}} A_\mu \Pi^{\mu\nu} \hat{D}^n A_\nu$ associada a ação CPT-ímpar (2.20) se transforma como

$$\hat{\mathcal{C}}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}\mathcal{L}_{(d')}^{CPT-impar}\hat{\mathcal{C}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{T}}^{-1} = -\mathcal{L}_{(d')}^{CPT-impar}, \quad (\text{A.6})$$

ou seja, viola a invariância CPT por um sinal, e por isso é chamada de CPT-ímpar.

De modo geral, é fácil ver que um operador de dimensão de massa par será sempre CPT-par, pois contém um número par de derivadas, já um operador de dimensão ímpar será sempre CPT-ímpar, pois contém um número ímpar de derivadas. As transformações discutidas acima também servem para o setor da gravidade discutido no Capítulo 3.

Apêndice B

Paralelo com a Extensão do Modelo Padrão

B.1 Setor Eletromagnético

Podemos verificar que a (2.19) pode ser reescrita como uma peça do termo CPT-par da EMP estabelecida na Ref.[12]. Neste formalismo, a peça CPT-par é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{EMP-foton}^{CPT-par} &= -\frac{1}{4}(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{4}(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}A^\mu\partial^\nu\partial^\alpha A^\beta.\end{aligned}\tag{B.1}$$

onde o tensor $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ é antissimétrico na troca dos dois primeiros índices e dos dois últimos, e simétrico na troca do primeiro par pelo segundo par de índices, ou seja

$$(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = -(K_F)_{\nu\mu\alpha\beta} = -(K_F)_{\mu\nu\beta\alpha} = (K_F)_{\alpha\beta\mu\nu},\tag{B.2}$$

e possui um traço duplo nulo: $(K_F)^{\rho\sigma}{}_{\rho\sigma} = 0$.

Esse tensor possui 19 componentes independentes, onde 10 estão associadas a efeitos birrefringentes, enquanto que as outras 9 são não-birrefringentes. Um modo interessante de parametrizar as 9 componentes não-birefringentes do tensor (K_F) é escrevê-lo em termos de um tensor simétrico $C_{\mu\nu}$ na forma [9, 63, 64, 65]

$$(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\eta_{\mu\alpha}C_{\nu\beta} - \eta_{\nu\alpha}C_{\mu\beta} + \eta_{\nu\beta}C_{\mu\alpha} - \eta_{\mu\beta}C_{\nu\alpha}\right),\tag{B.3}$$

onde podemos definir $C_{\mu\nu}$ em termos do vetor de fundo u_λ como

$$C_{\tau\kappa} = u_\tau u_\kappa - \frac{1}{2} u^2 \eta_{\tau\kappa}. \quad (\text{B.4})$$

Substituindo as equações acima na lagrangiana (B.1), podemos comparar com a (2.19) para o caso $d = 4$, de onde inferimos que $\mathcal{L}_{EMP-foton}^{CPT-par} = -\mathcal{L}_{(4)}^{CPT-par}$. Logo, podemos escrever o coeficiente K_F em função do vetor de fundo como

$$(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = -\xi_{(4)} \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} \eta^{\tau\lambda} u^\rho u^\sigma. \quad (\text{B.5})$$

Portanto, vemos que as componentes não-birefringentes do formalismo CPT-par para o setor do fóton desenvolvido na EMP podem ser reescritas em termos de um vetor de fundo utilizando o formalismo desenvolvido neste trabalho.

Já para o caso CPT-ímpar, a lagrangiana da EMP é definida como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EMP-foton}^{CPT-impair} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} A_\lambda (K_{AF})_\kappa F_{\mu\nu} \\ &= \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} A_\lambda (K_{AF})_\kappa \partial_\mu A_\nu, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

onde $(K_{AF})_\kappa$ é um quadrivetor com dimensão de massa. Por comparação com a Eq.(2.20) para o caso $d = 3$, podemos escrever a (B.6) em termos do vetor externo u_κ , do parâmetro de violação ξ e da escala de massa M_γ na forma

$$(K_{AF})_\kappa = \xi_{(3)} M_\gamma u_\kappa. \quad (\text{B.7})$$

Os trabalhos [37, 38] construíram uma generalização a fim de abranger também operadores de dimensão $d > 4$. As partes par e ímpar da EMP para operadores de dimensão arbitrária d são escritas como

$$\mathcal{L}_{(\bar{d})}^{EMP-par} = -\frac{1}{4} (\mathcal{K}_F^{(\bar{d})})_{\mu\nu\alpha\beta} A^\mu \partial^\nu \partial^\alpha A^\beta; \quad (\text{B.8})$$

$$\mathcal{L}_{(\bar{d})}^{EMP-impair} = \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} A_\lambda (\mathcal{K}_{AF}^{(\bar{d})})_\kappa \partial_\mu A_\nu, \quad (\text{B.9})$$

onde

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}_F^{(\bar{d})})_{\mu\nu\alpha\beta} &= (K_F^{(\bar{d})})_{\mu\nu\alpha\beta\rho_1 \dots \rho_{(\bar{d}-4)}} \partial^{\rho_1} \dots \partial^{\rho_{(\bar{d}-4)}}, \\ (\mathcal{K}_{AF}^{(\bar{d})})_\kappa &= (K_{AF}^{(\bar{d})})_\kappa^{\rho_1 \dots \rho_{(\bar{d}-3)}} \partial_{\rho_1} \dots \partial^{\rho_{(\bar{d}-3)}}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Usando a (B.7) e a (B.5), podemos escrever

$$\begin{aligned} (K_F^{(\bar{d})})_{\mu\nu\alpha\beta\omega_1\cdots\omega_{(\bar{d}-4)}} &= -\frac{\xi^{(d)}}{M_\gamma^{\bar{d}-4}} \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} \eta^{\tau\lambda} u^\rho u^\sigma X_{\omega_1\cdots\omega_{(\bar{d}-4)}}; \\ (K_{AF}^{(\bar{d})})_\kappa^{\alpha_1\cdots\alpha_{(\bar{d}-3)}} &= \frac{\xi^{(d')}}{M_\gamma^{\bar{d}-4}} u_\kappa Q^{\alpha_1\cdots\alpha_{(\bar{d}-3)}}, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

onde os tensores Q e X são totalmente simétricos.

Através de uma rápida análise, é fácil perceber que os termos generalizados que propomos nas Eq.(2.19) e (2.20) podem ser escritos como os coeficientes acima assumindo que os tensores Q e X sejam escritos em função do vetor externo u^λ .

B.2 Setor da Gravidade Linearizada

A gravidade foi incluída no formalismo da EMP a partir da Ref.[2]. Contudo, recentemente Kostelecký e Mewes [28] particularizaram o formalismo para a gravidade linearizada escrevendo a lagrangiana completa com possíveis operadores de violação de Lorentz de dimensão $d \geq 4$ invariantes de calibre pela transformação $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \Lambda_\nu + \partial_\nu \Lambda_\mu$. Para o caso CPT-par, existem duas possibilidades na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} h_{\mu\nu} \mathcal{S}_{(d)}^{\mu\rho\nu\sigma} h_{\rho\sigma} \quad \text{e} \quad \mathcal{L} = \frac{1}{4} h_{\mu\nu} \mathcal{K}_{(d)}^{\mu\rho\nu\sigma} h_{\rho\sigma}, \quad (\text{B.12})$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{(d)}^{\mu\rho\nu\sigma} &= s_{(d)}^{\mu\rho\nu\sigma} \partial_o \cdots \partial_{o^{d-3}}; \\ \mathcal{K}_{(d)}^{\mu\nu\rho\sigma} &= k_{(d)}^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_o \cdots \partial_{o^{d-5}}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

O operador $\mathcal{S}^{\mu\rho\nu\sigma}$ é antissimétrico nas trocas $\mu \rightarrow \rho$ e $\nu \rightarrow \sigma$ e produz apenas termos CPT-par, sendo válido para $d \geq 4$ par. Já $\mathcal{K}^{\mu\nu\rho\sigma}$ é totalmente simétrico e produz termos CPT-par com dimensão $d \geq 6$ par. A notação de índices " o " representa o número de contrações com derivadas parciais ∂_o .

Através de uma rápida análise, vemos que o operador CPT-par presente na ação (3.6) pode ser reescrito em termos do operador $\mathcal{S}_{(d)}$ na forma:

$$\mathcal{S}_{(d)}^{\mu\rho\nu\sigma} = \frac{\zeta^{(\bar{d})}}{M_g^{2n}} \Pi^{\mu\rho} \Pi^{\nu\sigma} \hat{D}^n. \quad (\text{B.14})$$

Já o operador $\mathcal{K}_{(d)}$ é advindo da generalização feita na (3.5) para $l = m$, para $d' = (6, 8, 10, 12, \dots)$. Com isso, podemos escrever

$$\mathcal{K}_{(d')}^{\mu\rho\nu\sigma} = \frac{\zeta_{(d')}}{M_g^{d'-4}} \Pi^{\mu\lambda} \Pi^\rho{}_\lambda \Pi^{\nu\alpha} \Pi^\sigma{}_\alpha \hat{D}^n. \quad (\text{B.15})$$

No entanto, para a parte CPT-ímpar, só há um tipo de operador que pode ser construído pelo formalismo da EMP, que possui uma lagrangiana na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} h_{\mu\nu} \mathcal{Q}_{(d)}^{\mu\rho\nu\sigma} h_{\rho\sigma}, \quad (\text{B.16})$$

onde

$$\mathcal{Q}_{(d)}^{\mu\rho\nu\sigma} = q_{(d)}^{\mu\rho\nu\sigma} \partial_o \cdots \partial_{o^{d-3}} \quad (\text{B.17})$$

é antissimétrico na troca $\mu \rightarrow \rho$ e simétrico na troca $\nu \rightarrow \sigma$ e produz apenas termos CPT-ímpar, sendo válido para $d \geq 5$ ímpar. Podemos escrever esse operador em termos do operador CPT-ímpar associado à ação (3.7) na forma

$$\mathcal{Q}_{(\hat{d})}^{\mu\rho\nu\sigma} = \frac{\zeta_{(\hat{d})}}{M_g^{2n+1}} \Pi^{\mu\rho} \Pi^{\lambda\nu} \Pi_\lambda{}^\sigma \hat{D}^n. \quad (\text{B.18})$$

Apêndice C

Cálculo dos propagadores

Para facilitar a tarefa de obter de inverter os operadores (2.48) e (2.63), iremos recorrer a representação dos operadores projetores transversal $\theta_{\alpha\beta}$ e longitudinal $\omega_{\alpha\beta}$, escritos como

$$\theta_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\beta} \quad \text{e} \quad \omega_{\alpha\beta} = \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{\square}. \quad (\text{C.1})$$

Em termos destes operadores, podemos reescrever o operador de onda modificado com o termo CPT-par (2.48) como

$$\mathcal{O}^{\lambda\sigma} = \theta^{\lambda\sigma} \square + \omega^{\lambda\sigma} \square - g \hat{D}^n f^{\lambda\sigma}, \quad (\text{C.2})$$

e o operador de onda modificado com o termo CPT-ímpar (2.63) como

$$\tilde{\mathcal{O}}^{\lambda\sigma} = \theta^{\lambda\sigma} \square + \omega^{\lambda\sigma} \square - y \hat{D}^n \Pi^{\lambda\sigma}, \quad (\text{C.3})$$

onde $f^{\lambda\sigma} = \Pi^\sigma_\mu \Pi^{\mu\lambda}$, $g \equiv \frac{\xi_{(\hat{d})}}{M^{2n}}$ e $y \equiv \frac{\xi_{(\hat{d})}}{M^{2n-1}}$. Com isso em mãos, para a obtenção dos propagadores temos que completar a álgebra que envolve os operadores $\theta_{\alpha\beta}$, $\omega_{\alpha\beta}$, $\Pi_{\alpha\beta}$ e $f_{\alpha\beta}$. A tabela abaixo mostra os produtos obtidos entre esses três operadores, considerando que o operador $f_{\alpha\beta}$ pode ser decomposto em termos dos operadores projetores e outros três operadores na forma

$$f_{\beta\nu} = \hat{D}\theta_{\beta\nu} - \lambda^2 \omega_{\beta\nu} + \lambda(\Sigma_{\beta\nu} + \Sigma_{\nu\beta}) - \square \Lambda_{\beta\nu}, \quad (\text{C.4})$$

com $\lambda \equiv (u \cdot \partial)$.

Tabela C.1: Tabela de contração entre operadores.

	ω_{ν}^{α}	θ_{ν}^{α}	Π_{ν}^{α}	Σ_{ν}^{α}	Σ_{ν}^{α}	Λ_{ν}^{α}
$\omega_{\beta\alpha}$	$\omega_{\beta\nu}$	0	0	$\lambda\omega_{\beta\nu}$	$\Sigma_{\nu\beta}$	$\frac{\lambda}{\square}\Sigma_{\nu\beta}$
$\theta_{\beta\alpha}$	0	$\theta_{\beta\nu}$	$\Pi_{\beta\nu}$	$\Sigma_{\beta\nu} - \lambda\omega_{\beta\nu}$	0	$\Lambda_{\beta\nu} - \frac{\lambda}{\square}\Sigma_{\nu\beta}$
$\Pi_{\beta\alpha}$	0	$\Pi_{\beta\nu}$	$f_{\beta\nu}$	0	0	0
$\Sigma_{\beta\alpha}$	$\Sigma_{\beta\nu}$	0	0	$\lambda\Sigma_{\beta\nu}$	$\square\Lambda_{\beta\nu}$	$\lambda\Lambda_{\beta\nu}$
$\Sigma_{\alpha\beta}$	$\lambda\omega_{\beta\nu}$	$\Sigma_{\nu\beta} - \lambda\omega_{\beta\nu}$	0	$u^2\square\omega_{\beta\nu}$	$\lambda\Sigma_{\nu\beta}$	$u^2\Sigma_{\nu\beta}$
$\Lambda_{\beta\alpha}$	$\frac{\lambda}{\square}\Sigma_{\beta\nu}$	$\Lambda_{\beta\nu} - \frac{\lambda}{\square}\Sigma_{\beta\nu}$	0	$u^2\Sigma_{\beta\nu}$	$\lambda\Lambda_{\beta\nu}$	$u^2\Lambda_{\beta\nu}$

Deste modo, podemos considerar um *Ansatz* geral para o propagador CPT-par e CPT-ímpar na forma

$$\Delta_{\lambda\rho} = a\omega_{\lambda\rho} + b\theta_{\lambda\rho} + c\Pi_{\lambda\rho} + d\Sigma_{\lambda\rho} + e\Sigma_{\rho\lambda} + h\Lambda_{\lambda\rho}. \quad (\text{C.5})$$

C.1 Caso CPT-Par

Para calcular o propagador do caso CPT-par, podemos substituir a (C.2) e a (C.5) na (2.49). Usando as relações da tabela acima, obtemos a relação

$$b\square\theta_{\sigma\rho} + c\square\Pi_{\sigma\rho} + d\square\Sigma_{\sigma\rho} + h\square\Lambda_{\sigma\rho} + a\square\omega_{\sigma\rho} + e\square\Sigma_{\rho\sigma} - g\hat{D}^n b(\hat{D}\theta_{\sigma\rho} - \lambda^2\omega_{\sigma\rho} + \lambda\Sigma_{\sigma\rho} + \lambda\Sigma_{\rho\sigma} - \square\Lambda_{\sigma\rho}) - g\hat{D}^{n+1}c\Pi_{\sigma\rho} = i(\theta_{\sigma\rho} + \omega_{\sigma\rho}). \quad (\text{C.6})$$

Podemos separar os blocos de equações para construir o sistema

$$\begin{aligned} b\square - bg\hat{D}^{n+1} &= i; \\ a\square + bg\lambda^2\hat{D}^n &= i; \\ c\square - cg\hat{D}^{n+1} &= 0; \\ d\square - bg\hat{D}^n\lambda &= 0; \\ e\square - bg\hat{D}^n\lambda &= 0; \\ h\square - bg\hat{D}^n\square &= 0, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

do qual obtemos $b = \frac{i}{\square - g\hat{D}^{n+1}}$, $a = \frac{\beta}{\square} [\square - g\hat{D}^n(\hat{D} - \lambda^2)]$, $c = 0$, $d = e = \frac{bg\hat{D}^n\lambda}{\square}$, $h = bg\hat{D}^n$. Desta forma, o propagador será:

$$\Delta_{\lambda\rho} = \frac{i}{\square - g\hat{D}^{n+1}} \left\{ \frac{1}{\square} \left[\square - g\hat{D}^n(\hat{D} - \lambda^2) \right] \omega_{\lambda\rho} + \theta_{\lambda\rho} + \frac{g\hat{D}^n\lambda}{\square} (\Sigma_{\lambda\rho} + \Sigma_{\rho\lambda}) + g\hat{D}^n\Lambda_{\lambda\rho} \right\}, \quad (\text{C.8})$$

que, no espaço dos momentos, resulta na (2.50).

C.2 Caso CPT-Ímpar

Para o caso CPT-ímpar, consideramos a (C.3) para ser substituída na (2.49), obtendo a relação

$$b\square\theta_{\sigma\rho} + c\square\Pi_{\sigma\rho} + d\square\Sigma_{\sigma\rho} + h\square\Lambda_{\sigma\rho} + a\square\omega_{\sigma\rho} + e\square\Sigma_{\rho\sigma} - y\hat{D}^nb\Pi_{\sigma\rho} - y\hat{D}^nc(\hat{D}\theta_{\sigma\rho} - \lambda^2\omega_{\sigma\rho} + \lambda\Sigma_{\sigma\rho} + \lambda\Sigma_{\rho\sigma} - \square\Lambda_{\sigma\rho}) = i(\theta_{\sigma\rho} + \omega_{\sigma\rho}). \quad (\text{C.9})$$

Fazendo um processo análogo ao do caso CPT-par, obtemos $c = \frac{iy\hat{D}^n}{\square^2 - y^2\hat{D}^{2n+1}}$, $a = \frac{i - y\hat{D}^n\lambda^2c}{\square}$, $b = \frac{c\square}{y\hat{D}^n}$, $d = e = \frac{y\hat{D}^nc\lambda}{\square}$, $h = -y\hat{D}^nc$. Isso nos dá o propagador

$$\Delta_{\lambda\rho} = \frac{i}{\square^2 - y^2\hat{D}^{2n+1}} \left\{ \frac{\square^2 - y^2\hat{D}^{2n}(\hat{D} + \lambda^2)}{\square} \omega_{\lambda\rho} + \square\theta_{\lambda\rho} + y\hat{D}^n\Pi_{\lambda\rho} + \frac{y^2\hat{D}^{2n}\lambda}{\square} (\Sigma_{\lambda\rho} + \Sigma_{\rho\lambda}) - y^2\hat{D}^{2n}\Lambda_{\lambda\rho} \right\}, \quad (\text{C.10})$$

que, no espaço dos momentos, corresponde a (2.64).

Apêndice D

Decomposição do campo de calibre na gravidade

Para esclarecer as escolhas de calibre utilizadas nas seções 3.1 e 3.2, podemos seguir a Ref.[29] e decompor o campo $h_{\mu\nu}$ em duas componentes escalares ϕ e ψ , em uma componente vetorial w_i , e uma componente tensorial sem traço s_{ij} como:

$$h_{00} = -2\phi \quad , \quad h_{0i} = w_i \quad , \quad h_{ij} = 2s_{ij} - 2\psi\delta_{ij}. \quad (\text{D.1})$$

Com isso¹,

$$\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} \equiv h = 2\phi - 6\psi. \quad (\text{D.2})$$

Mediante a transformação de calibre 4.4, as componentes se transformam como

$$\phi' \rightarrow \phi - \partial_0\xi_0 \quad , \quad w'_i \rightarrow w_i + \partial_0\xi_i + \partial_i\xi_0 \quad , \quad \psi' \rightarrow \psi - \frac{1}{3}\partial_i\xi^i \quad , \quad s'_{ij} \rightarrow s_{ij} + \partial_{(i}\xi_{j)} - \frac{1}{3}\partial_k\xi^k\delta_{ij}. \quad (\text{D.3})$$

A notação $(i \cdots j)$ se refere a um produto simetrizado dos índices, por exemplo: $(ij) = ij + ji$.

¹Nesta seção, estamos utilizando a convenção $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

D.1 Caso CPT-Par

Vamos considerar primeiramente o caso CPT-par gravitacional. Podemos reescrever a equação de movimento (3.9) como

$$G_{\mu\nu} + C_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{D.4})$$

com $C_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \frac{\zeta(\bar{d})}{M_g^{2n}} \Pi^{\mu\rho} \Pi^{\nu\sigma} \hat{D}^n h_{\rho\sigma}$.

Utilizando a decomposição (D.1) e assumindo que o quadri-vetor u^λ seja tipo-tempo, isto é, com $u^0 \neq 0$ e $u^i = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} G_{00} &= 2\nabla^2\psi + \partial_i\partial_j s^{ij} \quad , \quad G_{0i} = \frac{1}{2}\partial_j\partial_i w^j + 2\partial_0\partial_i\psi - \frac{1}{2}\nabla^2 w_i + \partial_0\partial_j s_i^j \\ G^{ij} &= -\partial_0\partial_{(i}w_{j)} + 2\partial_k\partial_{(i}s_{j)}^k + (\nabla^2\delta_{ij} - \partial_i\partial_j)(\phi - \psi) - \square s_{ij} + 2\partial_0^2\psi\delta_{ij} - \partial_k\partial_l s^{kl}\delta_{ij} + \partial_0\partial_k w^k\delta_{ij} \\ C_{00} &= 0 \quad , \quad C_{0i} = 0 \quad , \quad C_{ij} = \frac{\zeta(\bar{d})}{M_g^{2n}} (-\nabla^2)^n u_0^2 (\nabla^2\psi\delta_{ij} - \partial_i\partial_j\psi + \nabla^2 s_{ij}). \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Quanto à escolha de calibre, consideremos a condição de calibre de Lorentz

$$\square\xi^n = -\partial_\mu h^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial^n h = 0. \quad (\text{D.6})$$

Note que esta condição não esgota completamente toda a liberdade de escolha de calibre. A fim de obtermos o calibre utilizado nas seções 3.1 e 3.2, vemos que a condição $u^\rho h_{\rho\sigma} = 0$ nos dá as relações

$$u^0 h_{00} = -2u^0\phi = 0 \quad \text{e} \quad u^0 h_{0i} = u^0 w_i = 0, \quad (\text{D.7})$$

que nos levam à $\phi = 0$ e $w_i = 0$. Escolhendo a condição sem traço $\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \equiv h = 0$, obtemos que

$$h = 2\phi - 6\psi = 0, \quad (\text{D.8})$$

o que nos dá $\psi = 0$. Logo, da Eq.(D.6), ficamos com

$$\square\xi^j = -\partial_i h^{ij} = -2\partial_i s^{ij} = 0, \quad (\text{D.9})$$

implicando naturalmente na condição de transversalidade $\partial_i s^{ij} = \partial_i h_{TT}^{ij} = 0$. Desta forma, é justificável a utilização do calibre TT e axial: $\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0, h = 0$ e $u_\mu h^{\mu\nu} = 0$. Essas

escolhas implicam que $G_{00} = 0$ e $G_{0i} = 0$. Para a parte puramente espacial da (D.4), obtemos a equação de movimento (com $u^0 = 1$):

$$G_{ij} + C_{ij} = -\square h_{ij}^{TT} + \frac{\zeta(\bar{d})}{M_g^{2n}} (-\nabla^2)^n \nabla^2 h_{ij}^{TT} = 0, \quad (\text{D.10})$$

que no espaço dos momentos recupera a relação de dispersão isotrópica do caso CPT-par (3.14).

D.2 Caso CPT-Ímpar

Agora, consideremos reescrever a Eq.(3.18) como

$$G_{\mu\nu} + E_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{D.11})$$

onde $E_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \frac{\zeta(\hat{d})}{M_g^{2n+1}} \hat{D}^n \Pi_{\lambda\sigma} (\Pi^{\mu\rho} \Pi^{\lambda\nu} + \Pi^{\nu\rho} \Pi^{\lambda\mu}) h_{\sigma}^{\rho}$. Em termos das componentes, obtemos para o caso isotrópico

$$E_{00} = 0 \quad , \quad E_{0i} = 0 \quad , \quad E_{ij} = \frac{\zeta(\hat{d})}{M_g^{2n+1}} (-\nabla^2)^n \nabla^2 \epsilon_{pm(i} \partial_{\pi} s_{j)}^m. \quad (\text{D.12})$$

Logo, ficamos com a equação de movimento

$$G_{ij} + E_{ij} = -\square s_{ij} + \frac{\zeta(\hat{d})}{M_g^{2n+1}} (-\nabla^2)^n \nabla^2 \epsilon_{pm(i} \partial_{\pi} s_{j)}^m = 0, \quad (\text{D.13})$$

o que dá, no espaço dos momentos,

$$\left[k^2 \delta_{im} \delta_{jl} + i \frac{\zeta(\hat{d})}{M_g^{2n+1}} |\vec{k}|^{2n+2} \epsilon_{pm(i} k^p \delta_{j)}^l \right] s_{lm} = 0. \quad (\text{D.14})$$

Multiplicando pelo seu conjugado complexo, obtemos

$$k^2 - \lambda \frac{\zeta(\hat{d})}{M_g^{2n+1}} |\vec{k}|^{2n+3} = 0, \quad (\text{D.15})$$

que corresponde a relação de dispersão do caso isotrópico CPT-ímpar (3.25).

Apêndice E

Demonstração da fórmula para o atraso temporal cosmológico

Seguindo a abordagem feita pelas Refs. [43, 46], podemos derivar a fórmula de Δt_{VIL} para o formalismo de violação de Lorentz desenvolvido nos capítulos anteriores. Para isto, temos que levar em conta que as fontes de emissão das ondas estão em distâncias cosmológicas, e portanto estão sujeitas ao efeito de expansão do universo. As distâncias próprias (físicas) percorridas pelas partículas com frequências (ou energias) diferentes irão ser também diferentes. O tipo de comprimento que é por definição sempre fixado entre a fonte e o observador (provido de que os dois se movem juntos com a expansão do universo) é a distância comóvel.

A distância comóvel percorrida por uma partícula durante um intervalo de tempo $t_f - t_0$, em que t_0 é o tempo de emissão e t_f é o tempo de detecção, é

$$r(t) = \int_{t_0}^{t_f} v(t) dt, \quad (\text{E.1})$$

onde $v(t)$ é a velocidade da partícula em função do tempo. Para escrevermos em termos do *redshift* z , podemos usar a relação

$$dt = \frac{dz}{(1+z)H_z}, \quad (\text{E.2})$$

onde

$$H_z = H_0 \sqrt{\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}, \quad (\text{E.3})$$

é a taxa de expansão de Hubble expressa em termos da constante de Hubble $H_0 \simeq 67,3 \text{ km/s/Mpc} \simeq 1,51 \cdot 10^{-42} \text{ GeV}$, da densidade de radiação Ω_r , da densidade de matéria Ω_m , da densidade de curvatura Ω_k e da densidade de vácuo (energia escura) Ω_Λ . No modelo de Universo ΛCDM ¹, que é o modelo cosmológico mais aceito atualmente, temos que $\Omega_r = \Omega_k \simeq 0$.

Usando a (E.2), podemos reescrever a (E.1) como

$$r(z) = \int_0^z v(z') \frac{dz'}{H_z(1+z')}, \quad (\text{E.4})$$

onde $v(z)$ é a velocidade da partícula em termos do *redshift*.

Para determinar o atraso temporal entre uma partícula de maior energia e outra de menor energia, temos que partir das suas trajetórias comóveis. A trajetória comóvel de uma partícula é obtida escrevendo-se a Hamiltoniana (associada à relação de dispersão) em termos do momento comóvel. Para isto, consideremos a relação de dispersão do caso CPT-ímpar eletromagnético, Eq.(2.39), para $d \geq 5$ (usando $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ e $\hat{d} = 5 + 2n$)¹. O momento, que é o mesmo que o módulo do vetor de onda $|\vec{k}|$, deverá ser substituído pelo momento comóvel $(1+z)|\vec{k}|$. Logo, a Hamiltoniana associada escrita em termos do momento comóvel será

$$\mathcal{H} = (1+z)k \sqrt{1 + \lambda \frac{\xi_{(\hat{d})}}{M_\gamma^{2n+1}} [(1+z)k]^{2n+1}}, \quad (\text{E.5})$$

onde fizemos $|\vec{k}| \equiv k$ para simplificar a notação. A velocidade de grupo associada é

$$v(z) = \frac{d\mathcal{H}}{dk} = \frac{(1+z) \left[1 + \lambda(n + \frac{3}{2}) \frac{\xi_{(\hat{d})}}{M_\gamma^{2n+1}} [(1+z)k]^{2n+1} \right]}{\sqrt{1 + \lambda \frac{\xi_{(\hat{d})}}{M_\gamma^{2n+1}} [(1+z)k]^{2n+1}}}. \quad (\text{E.6})$$

Considerando valores $k < \frac{M_\gamma}{\xi_{(\hat{d})}}$, podemos expandir em Taylor a raiz da equação acima até primeira ordem em k :

$$\left(1 + \lambda \frac{\xi_{(\hat{d})}}{M_\gamma^{2n+1}} [(1+z)k]^{2n+1} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \lambda \frac{\xi_{(\hat{d})}}{2M_\gamma^{2n+1}} [(1+z)k]^{2n+1}. \quad (\text{E.7})$$

¹Universo dominado pela constante cosmológica e matéria escura fria

¹Iremos desconsiderar para análise fenomenológica o caso CPT-ímpar $d = 3$, visto que não é o foco deste trabalho.

Logo, podemos escrever

$$v(z) \approx \left(1+z\right) \left(1+\lambda(n+1) \frac{\xi_{(\hat{d})}}{M_\gamma^{2n+1}} [(1+z)k]^{2n+1}\right). \quad (\text{E.8})$$

Escolhendo o caso subluminal $\lambda = -1$ e substituindo a (E.8) na (E.4), obtemos, para fótons com altas energias:

$$r(z, E) = \int_0^z \frac{dz'}{H_z} + r_{VIL}^{CPT\text{-}impar}. \quad (\text{E.9})$$

onde $r_{VIL}^{CPT\text{-}impar} = -(n+1) \frac{\xi_{(\hat{d})}}{M_\gamma^{2n+1}} [(1+z')E]^{2n+1} \left\} \frac{dz'}{H_z}$. Fizemos a substituição do momento k pela energia E da partícula, visto que são indistinguíveis em escalas altas de energia. Apenas partículas com altas energias (por exemplo, da escala de TeV) podem produzir efeitos de violação de Lorentz (e portanto, efeitos dispersivos) notáveis. Portanto, podemos de fato desprezar os efeitos dispersivos provocados pela violação de Lorentz em partículas com energias mais baixas (muito menor que E), sendo portanto partículas luminiais, de modo que a distância comóvel percorrida por uma partícula de baixa energia durante um tempo t pode ser escrita como $r_0 = ct$ (com $c = 1$). Igualando as distâncias comóveis $r_0 = r(z, E)$, obtemos o tempo de percurso para fótons de altas energias

$$t_{VIL} = \int_0^z \left\{ 1 - (n+1) \frac{\xi_{(\hat{d})}}{M_\gamma^{2n+1}} [(1+z')E]^{2n+1} \right\} \frac{dz'}{H_z}. \quad (\text{E.10})$$

ou seja, a variação (ou atraso) temporal entre um fóton luminal (de baixa energia) e um fóton subluminal (de alta energia) que sofre o efeito dispersivo de violação de Lorentz pelo formalismo CPT-ímpar é justamente dado pela Eq.(4.2). Também podemos partir da Hamiltoniana associada à relação de dispersão do caso CPT-par do fóton, Eq.(2.28), e, analogamente, chegar a expressão (4.3).

O procedimento para a obtenção das fórmulas de atraso temporal no setor gravitacional é análogo, bastando partir das relações de dispersão CPT-par e CPT-ímpar obtidas no Capítulo 3. Como as relações de dispersão são semelhantes, os resultados também serão semelhantes aos obtidos no caso eletromagnético, com a troca dos parâmetros $\xi \rightarrow \zeta$ e $M_\gamma \rightarrow M_g$.

Apêndice F

Demonstração da fórmula para a rotação do vetor de polarização

O ângulo rotacionado do vetor de polarização $d\theta$ durante um intervalo de tempo infinitesimal dt é dado pela fórmula

$$d\theta = \frac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)dt. \quad (\text{F.1})$$

Usando a (E.2), podemos expressar a (F.1) em termos do *redshift*:

$$d\theta = \frac{1}{2}[\omega_+(z, k) - \omega_-(z, k)] \frac{dz}{(1+z)H_z}. \quad (\text{F.2})$$

Consideremos a relação de dispersão do caso CPT-ímpar do fóton em termos do momento comóvel

$$\omega_{\pm} = (1+z)k \sqrt{1 \pm \frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_{\gamma}^{2n+1}} [(1+z)k]^{2n+1}}. \quad (\text{F.3})$$

Podemos considerar a expansão até a ordem principal:

$$\omega_{\pm} \approx (1+z)k \pm \frac{\xi_{(\tilde{d})}}{2M_{\gamma}^{2n+1}} [(1+z)k]^{2n+2}. \quad (\text{F.4})$$

Substituindo na (F.2), obtemos

$$d\theta = \frac{\xi_{(\tilde{d})}}{M_{\gamma}^{2n+1}} [(1+z)k]^{2n+2} \frac{dz}{(1+z)H_z}. \quad (\text{F.5})$$

Integrando ambos os lados, obtemos a fórmula para a rotação do vetor de polarização (4.11).

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, “Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie,” *Annalen der Physik*, vol. 354, no. 7, pp. 769–822, 1916.
- [2] V. A. Kostelecký, “Gravity, lorentz violation, and the standard model,” *Physical Review D*, vol. 69, no. 10, p. 105009, 2004.
- [3] S. Liberati and L. Maccione, “Lorentz Violation: Motivation and new constraints,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, vol. 59, pp. 245–267, 2009.
- [4] J. Collins, A. Perez, D. Sudarsky, L. Urrutia, and H. Vucetich, “Lorentz invariance and quantum gravity: an additional fine-tuning problem?,” *Physical review letters*, vol. 93, no. 19, p. 191301, 2004.
- [5] H. Belich, T. Costa-Soares, M. Santos, and M. Orlando, “Violação da simetria de lorentz,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 29, p. 57, 2007.
- [6] A. Ashtekar, “New Variables for Classical and Quantum Gravity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 57, pp. 2244–2247, 1986.
- [7] C. Rovelli, “Loop quantum gravity,” *Living Rev. Rel.*, vol. 1, p. 1, 1998.
- [8] P. Hořava, “Membranes at quantum criticality,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2009, no. 03, p. 020, 2009.
- [9] V. A. Kostelecký and S. Samuel, “Spontaneous breaking of lorentz symmetry in string theory,” *Physical Review D*, vol. 39, no. 2, p. 683, 1989.

- [10] S. M. Carroll, G. B. Field, and R. Jackiw, “Limits on a lorentz-and parity-violating modification of electrodynamics,” *Physical Review D*, vol. 41, no. 4, p. 1231, 1990.
- [11] D. Colladay and V. A. Kostelecký, “Cpt violation and the standard model,” *Physical Review D*, vol. 55, no. 11, p. 6760, 1997.
- [12] D. Colladay and V. A. Kostelecký, “Lorentz-violating extension of the standard model,” *Physical Review D*, vol. 58, no. 11, p. 116002, 1998.
- [13] R. Gambini and J. Pullin, “Nonstandard optics from quantum space-time,” *Phys. Rev.*, vol. D59, p. 124021, 1999.
- [14] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane, and T. Okamoto, “Non-commutative field theory and Lorentz violation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, p. 141601, 2001.
- [15] C. P. Burgess, J. M. Cline, E. Filotas, J. Matias, and G. D. Moore, “Loop generated bounds on changes to the graviton dispersion relation,” *JHEP*, vol. 03, p. 043, 2002.
- [16] R. C. Myers and M. Pospelov, “Ultraviolet modifications of dispersion relations in effective field theory,” *Physical Review Letters*, vol. 90, no. 21, p. 211601, 2003.
- [17] T. Jacobson, S. Liberati, and D. Mattingly, “TeV astrophysics constraints on Planck scale Lorentz violation,” *Phys. Rev.*, vol. D66, p. 081302, 2002.
- [18] L. Shao and B.-Q. Ma, “Lorentz violation effects on astrophysical propagation of very high energy photons,” *Mod. Phys. Lett.*, vol. A25, pp. 3251–3266, 2010.
- [19] G. Amelino-Camelia, J. R. Ellis, N. E. Mavromatos, D. V. Nanopoulos, and S. Sarkar, “Tests of quantum gravity from observations of gamma-ray bursts,” *Nature*, vol. 393, pp. 763–765, 1998.
- [20] G. Amelino-Camelia and T. Piran, “Planck scale deformation of Lorentz symmetry as a solution to the UHECR and the TeV gamma paradoxes,” *Phys. Rev.*, vol. D64, p. 036005, 2001.

- [21] P. Castorina, A. Iorio, and D. Zappala, “Violation of Lorentz invariance and dynamical effects in high energy gamma rays,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, vol. 136, pp. 333–337, 2004. [333(2004)].
- [22] L. Shao and B.-Q. Ma, “Lorentz violation induced vacuum birefringence and its astrophysical consequences,” *Phys. Rev.*, vol. D83, p. 127702, 2011.
- [23] C. Couturier, V. Vasileiou, A. Jacholkowska, F. Piron, J. Bolmont, J. Granot, F. Stecker, J. Cohen-Tanugi, and F. Longo, “Constraints on Lorentz Invariance Violation with Fermi-LAT Observations of Gamma-Ray Bursts,” in *Proceedings, 33rd International Cosmic Ray Conference (ICRC2013): Rio de Janeiro, Brazil, July 2-9, 2013*, p. 0127, 2013.
- [24] F. Kislat and H. Krawczynski, “Planck-scale constraints on anisotropic Lorentz and CPT invariance violations from optical polarization measurements,” *Phys. Rev.*, vol. D95, no. 8, p. 083013, 2017.
- [25] X. Li and Z. Chang, “Gravitational wave in Lorentz violating gravity,” 2011.
- [26] S. Mirshekari, N. Yunes, and C. M. Will, “Constraining Generic Lorentz Violation and the Speed of the Graviton with Gravitational Waves,” *Phys. Rev.*, vol. D85, p. 024041, 2012.
- [27] M. Schreck, “Fermionic Lorentz violation and its implications for interferometric gravitational-wave detection,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 34, no. 13, p. 135009, 2017.
- [28] V. A. Kostelecký and M. Mewes, “Testing local Lorentz invariance with gravitational waves,” *Phys. Lett.*, vol. B757, pp. 510–514, 2016.
- [29] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*, vol. 1. 2004.
- [30] K. D. Kokkotas, “Gravitational waves,” *Acta Phys. Polon.*, vol. B38, pp. 3891–3923, 2007.

- [31] B. P. Abbott *et al.*, “GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, no. 24, p. 241103, 2016.
- [32] B. P. Abbott *et al.*, “Gravitational Waves and Gamma-Rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A,” *Astrophys. J.*, vol. 848, no. 2, p. L13, 2017.
- [33] C. M. Reyes, “Causality and stability for Lorentz-CPT violating electrodynamics with dimension-5 operators,” *Phys. Rev.*, vol. D82, p. 125036, 2010.
- [34] L. Campanelli, “Electromagnetism with dimension-five operators,” *Phys. Rev.*, vol. D90, no. 10, p. 105014, 2014.
- [35] E. Passos, M. A. Anacleto, F. A. Brito, O. Holanda, G. B. Souza, and C. A. D. Zarro, “Lorentz invariance violation and simultaneous emission of electromagnetic and gravitational waves,” *Phys. Lett.*, vol. B772, pp. 870–876, 2017.
- [36] S. M. Carroll and H. Tam, “Aether Compactification,” *Phys. Rev.*, vol. D78, p. 044047, 2008.
- [37] V. A. Kostelecky and M. Mewes, “Lorentz-violating electrodynamics and the cosmic microwave background,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 99, p. 011601, 2007.
- [38] V. A. Kostelecky and M. Mewes, “Electrodynamics with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension,” *Phys. Rev.*, vol. D80, p. 015020, 2009.
- [39] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field quantization*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [40] E. Scatena and R. Turcati, “Unitarity and nonrelativistic potential energy in a higher-order Lorentz symmetry breaking electromagnetic model,” *Phys. Rev.*, vol. D90, no. 12, p. 127703, 2014.

- [41] J. R. Ellis, N. E. Mavromatos, D. V. Nanopoulos, and A. S. Sakharov, “Quantum-gravity analysis of gamma-ray bursts using wavelets,” *Astron. Astrophys.*, vol. 402, pp. 409–424, 2003.
- [42] J. R. Ellis, N. E. Mavromatos, D. V. Nanopoulos, A. S. Sakharov, and E. K. G. Sarkisyan, “Robust limits on Lorentz violation from gamma-ray bursts,” *Astropart. Phys.*, vol. 25, pp. 402–411, 2006. [Erratum: *Astropart. Phys.*29,158(2008)].
- [43] U. Jacob and T. Piran, “Lorentz-violation-induced arrival delays of cosmological particles,” *JCAP*, vol. 0801, p. 031, 2008.
- [44] J. Albert *et al.*, “Probing Quantum Gravity using Photons from a flare of the active galactic nucleus Markarian 501 Observed by the MAGIC telescope,” *Phys. Lett.*, vol. B668, pp. 253–257, 2008.
- [45] A. A. Abdo *et al.*, “Fermi Observations of High-Energy Gamma-Ray Emission from GRB 080916C,” *Science*, vol. 323, pp. 1688–1693, 2009.
- [46] M. Biesiada and A. Piorkowska, “Lorentz invariance violation-induced time delays in GRBs in different cosmological models,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 26, p. 125007, 2009.
- [47] V. A. Kostelecký and M. Mewes, “Constraints on relativity violations from gamma-ray bursts,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, no. 20, p. 201601, 2013.
- [48] J. Ellis and N. E. Mavromatos, “Probes of Lorentz Violation,” *Astropart. Phys.*, vol. 43, pp. 50–55, 2013.
- [49] J.-J. Wei, B.-B. Zhang, L. Shao, X.-F. Wu, and P. Mészáros, “A New Test of Lorentz Invariance Violation: the Spectral Lag Transition of GRB 160625B,” *Astrophys. J.*, vol. 834, no. 2, p. L13, 2017.
- [50] E. Passos, E. M. C. Abreu, M. A. Anacleto, F. A. Brito, C. Wotzasek, and C. A. D. Zarro, “Lifshitz scaling to Lorentz-violating high derivative operator and gamma-ray bursts,” *Phys. Rev.*, vol. D93, no. 8, p. 085022, 2016.

- [51] J. Ellis, N. E. Mavromatos, and D. V. Nanopoulos, “Comments on Graviton Propagation in Light of GW150914,” *Mod. Phys. Lett.*, vol. A31, no. 26, p. 1675001, 2016.
- [52] Z. Chang and S. Wang, “Lorentz invariance violation and electromagnetic field in an intrinsically anisotropic spacetime,” *Eur. Phys. J.*, vol. C72, p. 2165, 2012.
- [53] L. Maccione, A. M. Taylor, D. M. Mattingly, and S. Liberati, “Planck-scale Lorentz violation constrained by Ultra-High-Energy Cosmic Rays,” *JCAP*, vol. 0904, p. 022, 2009.
- [54] M. Galaverni and G. Sigl, “Lorentz Violation in the Photon Sector and Ultra-High Energy Cosmic Rays,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, p. 021102, 2008.
- [55] M. Galaverni and G. Sigl, “Lorentz Violation and Ultrahigh-Energy Photons,” *Phys. Rev.*, vol. D78, p. 063003, 2008.
- [56] K. Toma, “Polarization of GRB Prompt Emission,” 2013.
- [57] P. Laurent, D. Gotz, P. Binetruy, S. Covino, and A. Fernandez-Soto, “Constraints on Lorentz Invariance Violation using INTEGRAL/IBIS observations of GRB041219A,” *Phys. Rev.*, vol. D83, p. 121301, 2011.
- [58] M. Biesiada and A. Piorkowska, “Gravitational lensing time delays as a tool for testing Lorentz Invariance Violation,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 396, pp. 946–950, 2009.
- [59] P. Schneider, “Gravitational lensing statistics,” in *Gravitational Lenses*, pp. 196–208, Springer, 1992.
- [60] X.-L. Fan, K. Liao, M. Biesiada, A. Piorkowska-Kurpas, and Z.-H. Zhu, “Speed of Gravitational Waves from Strongly Lensed Gravitational Waves and Electromagnetic Signals,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 118, no. 9, p. 091102, 2017.
- [61] A. Piórkowska, M. Biesiada, and Z.-H. Zhu, “Strong gravitational lensing of gravitational waves in Einstein Telescope,” *JCAP*, vol. 1310, p. 022, 2013.

- [62] J.-J. Wei and X.-F. Wu, “Strongly Lensed Gravitational Waves and Electromagnetic Signals as Powerful Cosmic Rulers,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 472, no. 3, pp. 2906–2912, 2017.
- [63] C. Hernaski and H. Belich, “Lorentz violation and higher-derivative gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D89, no. 10, p. 104027, 2014.
- [64] R. Casana, M. M. Ferreira, Jr, and M. R. O. Silva, “Parity-odd and CPT-even electrodynamics of the SME at Finite Temperature,” *Phys. Rev.*, vol. D81, p. 105015, 2010.
- [65] R. Casana, M. M. Ferreira, A. R. Gomes, and F. E. P. dos Santos, “Feynman propagator for the nonbirefringent CPT-even electrodynamics of the Standard Model Extension,” *Phys. Rev.*, vol. D82, p. 125006, 2010.