



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG**



# **Utilizando o Método de Aproximação por Falta para o Cálculo do Volume do Cilindro**

Leonardo Dias da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos

Campina Grande - PB  
Janeiro/2018

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG**

S586u Silva, Leonardo Dias da.  
Utilizando o método de aproximação por falta para o cálculo do volume do cilindro / Leonardo Dias da Silva. – Campina Grande, 2018.  
35 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.  
"Orientação: Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos".  
Referências.

1. Geometria. 2. Geometria Espacial. 3. Sólido- Volume. 4. Método de Aproximação. I. Santos, Jefferson Abrantes dos. II. Título.

CDU 514 (043)



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG**



## **Utilizando o Método de Aproximação por Falta para o Cálculo do Volume do Cilindro**

**por**

**Leonardo Dias da Silva<sup>†</sup>**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

---

<sup>†</sup>Bolsista CAPES

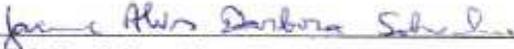
# Utilizando o Método de Aproximação por Falta para o Cálculo do Volume do Cilindro

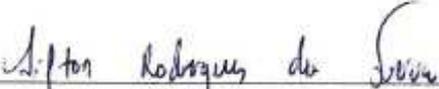
por

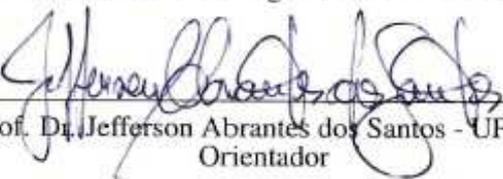
**Leonardo Dias da Silva**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:

  
Prof. Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho - UFCG

  
Prof. Dr. Ailton Rodrigues da Silva - UFRN

  
Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos - UFCG  
Orientador

**Universidade Federal de Campina Grande**  
**Centro de Ciências e Tecnologia**  
**Unidade Acadêmica de Matemática**  
**Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**

**janeiro/2018**

# Dedicatória

À minha querida mãe, Maria José Dias da Silva, por seu empenho em investir na minha educação e por sua alegria em ver o meu sucesso. Dedico!

# Agradecimentos

Ao senhor JESUS CRISTO, por ter me dado saúde, força e coragem para chegar ao fim de mais essa etapa da minha vida. Glórias e honras sejam dadas ao nome Dele. Amém!

À minha querida família, por estar ao meu lado, dando-me forças para não desistir, em especial, à minha amada esposa, Letícia Ihorani, que soube compreender minhas ausências para me dedicar aos estudos.

Aos meus irmãos em CRISTO JESUS da amada Igreja Evangélica Assembleia de Deus, na cidade de Aroeiras-PB, por suas constantes orações e por seu apoio espiritual.

Aos professores, Aparecido Jesuíno e Luiz Antônio, coordenadores do PROFMAT - UFCG, por seus empenhos e atenções.

Ao professor Dr. Jefferson Abrantes do Santos, pelas leituras sugeridas ao longo dessa orientação e pela dedicação.

Aos professores do PROFMAT-UFCG, em especial, Braulio Maia (*in memorian*), Daniel Cordeiro, Jaime Barbosa, Alciônio Saldanha, Luiz Antônio, José de Arimateia, Rodrigo Cohen e Alexsandro Cavalcanti, que contribuíram ao longo de vinte e quatro meses, por meio das disciplinas e debates, para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos professores Jaime Barbosa e Aílton Rodrigues, por aceitarem participar da Banca Examinadora e pelas sugestões bastante relevantes à conclusão deste Trabalho.

À secretária Andrezza, pela presteza e atenção quando nos foi necessário.

Aos colegas de classe, pelos momentos de amizade e apoio, em especial, aos irmãos em Cristo Jesus: Oseias Matias e Welhington Sérgio.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM, pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

# Resumo

Neste trabalho, estudamos o conceito de volume de um sólido por meio do Método de aproximação por falta. Para tanto, fazemos uso do conceito de supremo de um conjunto limitado. Acreditamos que esse método é uma forma mais concreta de se compreender o conceito de volume de um sólido qualquer. Como motivação e aplicação desse método, calculamos o volume do cilindro, por meio de prismas nele contido.

**Palavras-Chaves:** Supremo de um conjunto. Método de aproximação por falta. Volume de um sólido.

# Abstract

In this work, we study the concept of volume of a solid from the approach Method by lack. Therefore, we make use of the concept of supreme of a limited set. We believe that this method is a more concrete way of understanding the concept of any solid volume. As motivation and application of this method, we calculate the volume of the cylinder, by means of prisms contained therein.

**Keywords:** Supreme of a set. Approach method for lack. Volume of a solid.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
1.1	Objetivos . . . . .	3
1.2	Organização . . . . .	3
1.3	Caráter da pesquisa . . . . .	4
1.4	Público-alvo . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Noções de Supremo e Ínfimo de um Conjunto</b>	<b>5</b>
2.1	Supremo e ínfimo de um conjunto . . . . .	5
2.2	Algumas propriedades de supremo . . . . .	9
<b>3</b>	<b>A Função Volume</b>	<b>11</b>
3.1	Volume de um Sólido: ideia intuitiva. . . . .	11
3.2	A Função Volume. . . . .	12
3.3	Volume do Paralelepípedo Retângulo. . . . .	13
3.4	Volume de um Sólido. . . . .	14
<b>4</b>	<b>Paralelepípedos e Polígonos Equidecomponíveis</b>	<b>17</b>
4.1	Alguns resultados envolvendo paralelepípedos. . . . .	17
4.2	Polígonos Equidecomponíveis. . . . .	21
<b>5</b>	<b>O Volume do Cilindro</b>	<b>25</b>
5.1	Volume do Paralelepípedo. . . . .	25
5.2	Volume do Prisma. . . . .	27
5.3	Volume do Cilindro. . . . .	29
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>32</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Ao analisarmos livros de matemática do Ensino Médio em nosso país, dentre eles, Contexto e Aplicações (Luiz Roberto Dante), Matemática: ciência e aplicação (Gelson Iezzi e colaboradores), Novo Olhar: Matemática (Joamir Souza), observamos que a técnica usada para realização do cálculo do volume de alguns sólidos geométricos é o **Princípio de Cavalieri**<sup>1</sup>. De acordo com as Orientações Curriculares Nacionais para o ensino de matemática no Ensino Médio, “O Princípio de Cavalieri deve ser tomado como ponto de partida para o estudo de volumes de sólidos (cilindro, prisma, pirâmide, cone e esfera), permitindo ao aluno compreender o significado das fórmulas” (ver [3], p. 76).

Em contrapartida, procuraremos em nosso trabalho, compreender o conceito de volume de um sólido a partir do Método de aproximação por falta, que utiliza o conceito de supremo de um conjunto, estudado no curso de Análise Real, a fim de calcularmos o volume do cilindro por meio de prismas nele contido. Neste sentido, a assimilação do conceito de supremo de um conjunto não requer um estudo mais profundo e, por sua vez, é útil, pois cria a possibilidade de se calcular o volume de sólidos e de se absorver mais profundamente a ideia de limite, além disso, serve de ótima introdução para o estudo do Cálculo Integral. Vale salientar que os poliedros retangulares que utilizamos na definição do volume de um sólido qualquer podem ser substituídos por outros sólidos, cujos volumes são conhecidos.

Ao fazermos uma leitura no trabalho de Alves (ver [1]), percebemos que o autor se restringiu apenas ao cálculo do volume dos sólidos do tipo paralelepípedos retangulares e prismas retos, a fim de aproximar o volume do cilindro reto, por meio de prismas retos nele contido. Desse modo, o autor não demonstrou que os seus resultados também são válidos para o caso em que esses sólidos são oblíquos. Por esse fato, procuramos, em nosso trabalho, estudar e desenvolver o cálculo do volume desses sólidos, no intuito de aproximarmos o volume do cilindro (reto ou oblíquo) a partir de prismas (retos ou oblíquos) nele contido.

Desse modo, o presente trabalho constitui-se em dar continuidade ao Trabalho de Conclusão de Curso, “Estudo sobre o Conceito de Volume”, do discente Flávio Alves [1], no

---

<sup>1</sup>**Princípio de Cavalieri:** Dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então, esses sólidos têm o mesmo volume (ver [4], p. 285).

intuito de desenvolver uma melhor compreensão do conceito de volume a partir do Método de aproximação por falta. Além disso, pretendemos também motivar professores e alunos do Ensino Médio, e até mesmo alunos de Análise Real, da importância de tal ferramenta matemática para o cálculo do volume de sólidos.

## 1.1 Objetivos

Este trabalho apresenta como objetivo principal estudar o TCC, “Estudo sobre o Conceito de Volume”, do discente Flávio Alves (ver [1]), e mostrar que o Método de aproximação por falta, apresentado em seu trabalho, para o cálculo do volume do cilindro reto, continua válido para o caso de um cilindro oblíquo.

Ao mesmo tempo, tem como objetivos específicos:

- Apresentar noções de supremo e ínfimo de um conjunto limitado;
- Demonstrar algumas propriedades envolvendo supremo de um conjunto limitado;
- Apresentar a técnica de aproximação por falta para o cálculo do volume de um sólido qualquer a partir de poliedros retangulares nele contido;
- Apresentar e demonstrar alguns resultados envolvendo poliedros e polígonos equidecomponíveis;
- Calcular os volumes do paralelepípedo e do prisma;
- Calcular o volume do cilindro a partir de prismas nele contido.

## 1.2 Organização

Este trabalho encontra-se organizado em seis capítulos e obedece a seguinte distribuição:

No Capítulo 1, “**Introdução**”, fazemos uma breve apresentação acerca do tema abordado, enfatizando que o nosso trabalho consiste em dar continuidade ao TCC, “Estudo sobre o Conceito de Volume”, do discente Flávio Alves, com o objetivo de mostrar que a técnica utilizada em seu trabalho para o cálculo do volume do cilindro reto também é válida para o caso em que o cilindro é oblíquo.

No Capítulo 2, “**Noções de Supremo e Ínfimo de um Conjunto**”, iniciamos com as definições de supremo e ínfimo de um conjunto limitado, seguidas de exemplos, para uma melhor compreensão. Logo após, apresentamos algumas propriedades envolvendo supremo que foram utilizadas na obtenção de resultados posteriores.

No Capítulo 3, “**A Função Volume**”, estudamos e apresentamos os principais resultados contidos no trabalho de Alves [1], a fim de os aplicarmos na obtenção dos volumes do paralelepípedo, do prisma e do cilindro.

No Capítulo 4, “**Paralelepípedos e Polígonos Equidecomponíveis**”, apresentamos definições e alguns resultados envolvendo paralelepípedos e polígonos equidecomponíveis, que empregamos para a obtenção dos volumes do paralelepípedo e do prisma oblíquos.

Já no Capítulo 5, “**O Volume do Cilindro**”, iniciamos com o cálculo dos volumes do paralelepípedo e do prisma, mostrando que o volume desses sólidos é dado pelo produto entre as áreas de suas bases pelas respectivas alturas. Concluindo este capítulo, calculamos o volume do cilindro a partir de prismas nele contido e destacamos que o Método de aproximação por falta, utilizado para calcular o volume do cilindro reto, continua válido quando temos um cilindro oblíquo.

Quanto ao Capítulo 6, “**Considerações Finais**”, expomos alguns comentários acerca dos resultados obtidos após a pesquisa e realizamos uma análise da importância do tema dissertado neste trabalho.

Por fim, elencamos as “**Referências Bibliográficas**”, que nortearam o nosso estudo.

### **1.3 Caráter da pesquisa**

O caráter da pesquisa é do tipo bibliográfica, que pode ser definida como aquela que se realiza a partir do registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, realizando-se o levantamento de informações, através de consultas a livros, monografias, dissertações, artigos publicados na *Internet* e em *sites* de periódicos.

### **1.4 Público-alvo**

Este trabalho destina-se, principalmente, a professores e alunos que desejem utilizá-lo como leitura complementar e, assim, adquirirem mais precisão quanto ao embasamento teórico do conteúdo trabalhado.

## Capítulo 2

# Noções de Supremo e Ínfimo de um Conjunto

Este capítulo é destinado a apresentar as definições e propriedades de supremo e ínfimo de um conjunto limitado. Para mais detalhes, sugerimos as seguintes referências: Curso de Análise vol. 1, do professor Elon Lages (ver [6], capítulo 3) e Fundamentos de Cálculo, do professor Antônio Caminha (ver [10], pp. 68-72).

### 2.1 Supremo e ínfimo de um conjunto

A definição mais simples do conjunto dos números reais ( $\mathbb{R}$ ) consiste em dizer que se trata de um corpo ordenado completo. Deixamos para o leitor a revisão e caracterização de  $\mathbb{R}$  ser um corpo ordenado, para isto veja [6], capítulo 3. A fim de caracterizar a completude de  $\mathbb{R}$ , estabeleceremos agora algumas definições.

**Definição 2.1** Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}$ , não-vazio, é dito **limitado superiormente** se existir um número real  $M$  tal que

$$x \leq M, \forall x \in X.$$

Nesse caso, dizemos que  $M$  é uma **cota superior** para  $X$ .

**Exemplo 1** O conjunto  $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$  é limitado superiormente, pois 1 é uma cota superior de  $X$ . De fato, basta notar que  $1 \geq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Definição 2.2** Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}$ , não-vazio, é dito **limitado inferiormente** se existir um número real  $m$  tal que

$$x \geq m, \forall x \in X.$$

Nesse caso, dizemos que  $m$  é uma **cota inferior** para  $X$ .

**Exemplo 2** O conjunto  $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$  é limitado inferiormente, pois 0 é uma cota inferior de  $X$ . De fato, observe que  $0 \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Por fim, um conjunto não-vazio  $X \subset \mathbb{R}$  é **limitado** se  $X$  for simultaneamente limitado superiormente e inferiormente. Diante disso, podemos dizer que o conjunto  $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$  é **limitado**.

A partir do conceito de limitação de um conjunto não vazio, podemos caracterizar a reta  $\mathbb{R}$  como completa, desde que a mesma cumpra o axioma abaixo:

**Axioma 2.1** *Todo conjunto  $X \subset \mathbb{R}$ , não-vazio e limitado superiormente, possui uma menor cota superior, isto é, o problema*

$$\min \{M; x \leq M, \forall x \in X\},$$

*possui solução. Neste caso, denotaremos*

$$\sup X := \min \{M; x \leq M, \forall x \in X\},$$

como sendo o **supremo do conjunto  $X$** .

**Exemplo 3** Vimos que o conjunto  $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$  é **limitado superiormente** e 1 é uma cota superior de  $X$ . Por outro lado, como  $1 \in X$ , nenhum número real menor que 1 pode ser cota superior para  $X$ , então 1 é a menor das cotas superiores de  $X$ , i.e.,  $\sup X = 1$ .

**Proposição 2.2** *Um número real  $M$  é igual ao supremo de  $X$  (i.e.,  $M = \sup X$ ) se, e somente se, forem satisfeitas as duas condições abaixo:*

$$S_1: x \leq M, \forall x \in X.$$

$$S_2: \text{se existir um número } c \text{ tal que } x \leq c, \forall x \in X, \text{ então } M \leq c.$$

A condição  $S_2$  pode ser reescrita assim:

$$S'_2: \text{se } c < M, \text{ existe } x_c \in X \text{ tal que } c < x_c,$$

Sendo assim, se tomarmos  $c = M - \varepsilon$ , com  $\varepsilon > 0$ , podemos reescrever ( $S'_2$ ) da seguinte forma:

$$S''_2: \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X \text{ tal que } M - \varepsilon < x_\varepsilon.$$

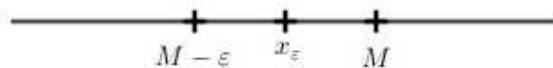


Figura 2.1: Interpretação geométrica do supremo.

**Exemplo 4** Seja  $X = \{-\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$ . Então  $\sup X = 0$ .

De fato, basta observar os seguintes fatos:

(i)  $-\frac{1}{n} \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , isto é, 0 é uma cota superior de  $X$ .

(ii) se  $c < 0$ , existe  $n_c \in \mathbb{N}$  tal que

$$n_c > -\frac{1}{c} \Leftrightarrow cn_c < -1 \Leftrightarrow c < -\frac{1}{n_c},$$

mostrando que  $c$  não é cota superior de  $X$ .

De (i) e (ii),  $\sup X = 0$ .

**Proposição 2.3** *Um conjunto não vazio  $X \subset \mathbb{R}$  é limitado superiormente se, e somente se, o conjunto  $-X = \{-x; x \in X\}$  é limitado inferiormente.*

**Demonstração:** Com efeito, se  $X$  é limitado superiormente e  $c > 0$  é tal que

$$x \leq c, \forall x \in X,$$

então

$$-x \geq -c, \forall x \in X,$$

equivalentemente,

$$y \geq -c, \forall y \in -X,$$

donde concluímos que o conjunto  $-X$  é limitado inferiormente. A recíproca é feita de modo análogo.

□

Como consequência do Axioma 2.1 e da Proposição 2.3, temos o seguinte resultado:

**Proposição 2.4** *Se  $X \subset \mathbb{R}$  é não-vazio e limitado inferiormente, então o problema*

$$\max \{c \in \mathbb{R} / c \leq x, \forall x \in X\}$$

*existe solução.*

**Demonstração:** Segue da Proposição 2.3 que  $-X$  é limitado superiormente, deste fato, o problema

$$\min \{\lambda \in \mathbb{R} / x \leq \lambda, \forall x \in -X\},$$

possui solução (ver Axioma 2.1). Logo, existe  $c_0 \in \mathbb{R}$  tal que

$$-c_0 = \min \{\lambda; x \leq \lambda, \forall x \in -X\}. \quad (2.1)$$

Afirmamos, agora, que

$$c_0 = \max \{\lambda / \lambda \leq x, \forall x \in X\}. \quad (2.2)$$

Com efeito, desde que  $c_0 \in X$  e

$$[-c_0 \geq x, \forall x \in -X] \Leftrightarrow [-c_0 \geq -x, \forall x \in X] \Leftrightarrow [c_0 \leq x, \forall x \in X],$$

podemos concluir que  $c_0$  é uma cota inferior para  $X$ . Além disso, se  $c_0 < \lambda$ , então  $-c_0 > -\lambda$ , e segue de (2.1) que existe  $x_\lambda \in X$  tal que

$$[-c_0 > -x_\lambda > -\lambda] \Leftrightarrow [c_0 < x_\lambda < \lambda].$$

Mostrando que  $c_0$  é a maior das cotas superiores de  $X$ , e portanto é solução de (2.2).

□

Segue da Proposição 2.4, que se  $X$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}$  não-vazio, limitado inferiormente, podemos definir:

$$\inf X := \max \{c \in \mathbb{R} / c \leq x, \forall x \in X\},$$

como sendo o **ínfimo do conjunto**  $X$ . Neste caso,  $\inf X$  é definido como sendo a maior das cotas inferiores de  $X$ .

**Exemplo 5** Já sabemos que o conjunto  $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$  é limitado inferiormente e 0 é uma cota inferior. Mostraremos, agora, que  $\inf X = 0$ . Com efeito, suponha que  $c > 0$  seja uma cota inferior de  $X$ , isto é,  $c \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ , isto implica que  $n \leq \frac{1}{c}, \forall n \in \mathbb{N}$ , acarretando que o conjunto  $\mathbb{N}$  é limitado superiormente, o que é uma contradição. Logo, nenhum  $c > 0$  é cota inferior para  $X$ , daí,  $\inf X = 0$ .

Visto que o ínfimo de um conjunto limitado inferiormente  $X$  é a maior das cotas inferiores, podemos afirmar que  $m = \inf X$  se, e só se,  $m$  cumpre as seguintes condições:

$$I_1: m \leq x, \forall x \in X.$$

$$I_2: \text{se existir um número } c \text{ tal que } c \leq x, \forall x \in X, \text{ então } c \leq m.$$

A condição  $I_2$  pode ser reescrita da seguinte forma:

$$I'_2: \text{se } c > m, \text{ então existe } x_c \in X \text{ tal que } c > x_c.$$

Sendo assim, se tomarmos  $c = m + \varepsilon$ , com  $\varepsilon > 0$ , podemos reescrever ( $I'_2$ ) da seguinte forma:

$$I''_2: \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X \text{ tal que } x_\varepsilon < m + \varepsilon.$$

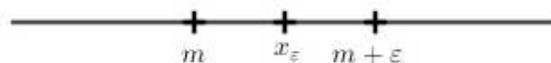


Figura 2.2: Interpretação geométrica do ínfimo.

**Exemplo 6** Seja  $X = \{-\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$ . Então,  $\inf X = -1$ . Com efeito, observe que

(i)  $-\frac{1}{n} \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}$ , isto é,  $-1$  é uma cota inferior de  $X$ .

(ii)  $-1 \in X$ , logo todo número maior que  $-1$  não é mais cota inferior.

De (i) e (ii), podemos concluir que  $\inf X = -1$ .

## 2.2 Algumas propriedades de supremo

Nesta seção, demonstraremos algumas propriedades envolvendo o conceito de supremo.

**Proposição 2.5** *Sejam  $A, B \subset \mathbb{R}$  não-vazios e limitados superiormente. Se  $A \subset B$ , então*

$$\sup A \leq \sup B.$$

**Demonstração:** Uma vez que

$$x \leq \sup B, \forall x \in B,$$

em particular,

$$x \leq \sup B, \forall x \in A,$$

pois  $A \subset B$ . Logo,  $\sup B$  é uma cota superior de  $A$ . Tendo em vista que  $\sup A$  é a menor das cotas superiores de  $A$ , segue que  $\sup A \leq \sup B$ .

□

**Proposição 2.6** *Dados  $A, B$  subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , não vazios e limitados superiormente, temos:*

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \quad \text{onde} \quad A + B = \{x + y / x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

**Demonstração:** Defina  $\sup A := a$  e  $\sup B := b$ . Logo,

$$x \leq a, \forall x \in A \quad \text{e} \quad y \leq b, \forall y \in B.$$

Somando essas duas desigualdades, obtemos

$$x + y \leq a + b, \forall x \in A \text{ e } \forall y \in B,$$

donde concluímos que  $a + b$  é uma cota superior do conjunto  $A + B$ .

Mostraremos que  $a + b$  é a menor das cotas. De fato,  $\forall \varepsilon > 0$ , existem  $x_\varepsilon \in A$  e  $y_\varepsilon \in B$ , tais que

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < x_\varepsilon \quad \text{e} \quad b - \frac{\varepsilon}{2} < y_\varepsilon.$$

Efetuando a soma nestas desigualdades, obtemos:

$$(a + b) - \varepsilon < x_\varepsilon + y_\varepsilon,$$

mostrando que  $a + b$  é a menor das cotas superiores de  $A + B$ . Por estes fatos,

$$\sup(A + B) = a + b = \sup A + \sup B.$$

□

# Capítulo 3

## A Função Volume

Neste capítulo, faremos um breve estudo sobre volume, com a finalidade de compreender seu conceito e mensurar determinados sólidos, a saber: paralelepípedo, prisma e cilindro. Para mais detalhes veja Alves [1], Lima [7] e [8], e Neto [12].

### 3.1 Volume de um Sólido: ideia intuitiva.

Intuitivamente, entende-se por **volume** de um sólido  $S$ , a medida do espaço que esse sólido ocupa, ou seja, a medida de seu conteúdo. Assim, ao medirmos, por exemplo, a quantidade de água contida em um reservatório no formato de um cilindro, por meio de uma escala contida em sua parede, estamos observando no mostrador o resultado de uma medição de volume (ver Lima [8]).

Observe que, ao utilizarmos o procedimento anterior, para calcular o volume de tal reservatório, estamos interessados em medir a grandeza volume por meio de um número e, para isso, devemos compará-la com outra de mesma espécie tomada como unidade. Daí, o resultado desta comparação será um número chamado a **medida do volume**.

Para que possamos expressar algebricamente o volume de um sólido, é preciso estabelecer uma unidade de medida que sirva de referência. Tradicionalmente, o cubo de aresta, igual a uma unidade de medida de comprimento, é a unidade de referência que utilizamos para expressar numericamente o volume de um sólido. Assim, se quisermos calcular o volume de um determinado sólido, é suficiente descobrirmos o número que representa a quantidade de vezes que esse sólido contém o cubo unitário. Portanto, essa quantidade de vezes será, justamente, o volume do sólido considerado (ver Lima [8]). No entanto, nem todo sólido pode ser visto como uma união justaposta de cubos. Motivados por este fato, neste trabalho buscamos compreender como podemos mensurar tais sólidos.

## 3.2 A Função Volume.

**Definição 3.1** Um sólido é dito homeomorfo a uma esfera quando ele é obtido após esticar e repuxar a esfera, sem cortá-la ou furá-la (ver Lima [8]).

No que segue, consideraremos  $P$  como o conjunto de todos os sólidos homeomorfos a uma esfera.

**Definição 3.2** Dados dois sólidos,  $S_1, S_2 \in P$ , dizemos que  $S_1$  e  $S_2$  são **congruentes** quando um deles for obtido do outro através de uma translação, rotação ou composições desses movimentos.

Esclarecendo melhor: dois sólidos são congruentes se for possível mover um deles no espaço, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro. Assim, se dois sólidos,  $S_1$  e  $S_2$  forem congruentes, deve existir uma correspondência biunívoca entre  $S_1$  e  $S_2$ .

Agora, em um contexto algébrico, iremos definir **função volume de um sólido**  $S$  do conjunto  $P$ , uma aplicação  $V : P \rightarrow \mathbb{R}_+$  de modo que:

- (I)  $V : P \rightarrow \mathbb{R}_+$ , é uma função, isto é, associa a cada  $S \in P$  um único valor real positivo  $V(S)$ , chamado de **volume do sólido**  $S$ ;
- (II) Se dois sólidos,  $S_1$  e  $S_2$ , são congruentes, então

$$V(S_1) = V(S_2);$$

- (III) Se um sólido  $S$  é formado pela reunião de um número finito de sólidos  $S = \{S_i\}_{i=1}^n \subset P$ , dois a dois disjuntos, ou possuindo em comum apenas pontos de suas cascas, então o volume de  $S$  é a soma dos volumes de  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , isto é:

$$V(S) = V\left(\bigcup_{i=1}^n S_i\right) = \sum_{i=1}^n V(S_i).$$

- (IV) Se  $S_1 \subset S_2$ , com  $S_1 \neq S_2$ , então

$$V(S_1) < V(S_2).$$

- (V) Se  $x, y$  e  $z$  constituem as medidas do comprimento, largura e altura de um paralelepípedo retângulo  $(x, y, z)$ , então seu volume será denotado por  $V(x, y, z)$  e, assumimos que:

$$V(1, 1, 1) = 1.$$

### 3.3 Volume do Paralelepípedo Retângulo.

O **Paralelepípedo** é um sólido delimitado por seis paralelogramos, cada um representando uma face desse sólido. Essas faces constituem três pares, onde, em cada par, as faces são congruentes e paralelas entre si. Os lados do paralelepípedo são chamados de arestas e qualquer uma das faces pode funcionar como base do sólido. Quando as faces do paralelepípedo são retângulos, ele é chamado de **paralelepípedo retângulo**, também conhecido como **bloco retangular** (ou simplesmente **ortóedro**). (ver Figura 3.1).

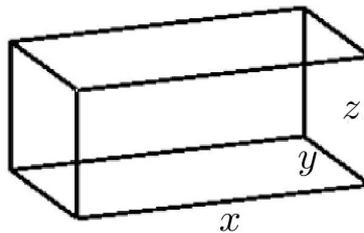


Figura 3.1: Paralelepípedo Retângulo.

Um caso particular de paralelepípedo retângulo é o **cubo**, que ocorre quando as três dimensões (comprimento, largura e altura) são congruentes entre si, isto é, quando elas têm o mesmo comprimento (ver Figura 3.2).

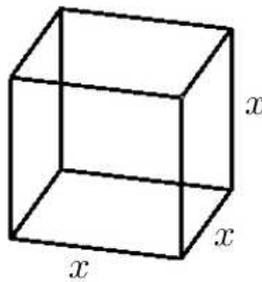


Figura 3.2: Cubo com aresta medindo  $x$ .

Verificaremos agora que o volume de um cubo de aresta  $x$  é igual a  $x^3$ .

**Teorema 3.1** Se  $C$  é um cubo de aresta  $x$ ,  $C = (x, x, x)$ , então  $V(x, x, x) = x^3$ .

**Demonstração:** Se  $x$  é um número racional, é possível justapor cubos de arestas racionais de modo que a sua união forme todo o cubo  $(x, x, x)$ , com isso, pode-se mostrar que  $V(x, x, x) = x^3$  (ver [1], pp. 8-9). Sendo assim, vejamos o caso que  $x$  é um número irracional. Seja  $a$  um número real de sorte que  $a < x^3$  e consideremos um número racional  $r$ , próximo de  $x$ , tal que  $\sqrt[3]{a} < r < x$ , ou seja,

$$a < r^3 < x^3. \quad (3.1)$$

Com isso, o cubo  $C$  de aresta igual a  $x$  contém um cubo  $(r, r, r)$ . Deste fato, segue do Axioma (IV) que

$$V(r, r, r) < V(x, x, x). \quad (3.2)$$

Ora, mas sendo  $r$  um número racional, temos que  $V(r, r, r) = r^3$ , e portanto, temos de (3.1)

$$a < r^3 < V(x, x, x), \quad (3.3)$$

como queríamos demonstrar. Analogamente ao feito anteriormente, mostra-se que: se  $b > x^3$ , temos  $b > V(x, x, x)$ .

Afirmamos agora que  $V(x, x, x) = x^3$ . Com efeito, utilizando argumento de contradição, suponha que  $V(x, x, x) \neq x^3$  e, sem perda de generalidade, assuma

$$V(x, x, x) < x^3.$$

Ora, mas segue de (3.3) que

$$V(x, x, x) < V(x, x, x),$$

uma contradição. Mostrando assim que  $V(x, x, x) = x^3$ .

□

A partir do Teorema 3.1, é possível mostrar, utilizando o Teorema Fundamental da Proporcionalidade (ver [3], p. 95), que o volume de um paralelepípedo retangular é dado pelo produto de suas dimensões (altura, largura e comprimento), conforme enunciado a seguir:

**Teorema 3.2** *Sendo  $x$ ,  $y$  e  $z$  as dimensões de um paralelepípedo retângulo, temos*

$$V(x, y, z) = x \cdot y \cdot z.$$

### 3.4 Volume de um Sólido.

Nesta seção, apresentamos um procedimento para obter o volume de um sólido  $S$  pertencente ao conjunto  $P$ . Com este propósito, verificaremos inicialmente o volume do Poliedro Retangular. Assim, lembremos que o **Poliedro Retangular** é um sólido formado pela união de um número finito de blocos retangulares justapostos. Por este fato, seu volume é obtido utilizando o Axioma (III), a partir da soma do volume de cada bloco retangular.

Sabendo disso, para obter o valor do volume de  $S \in P$ , iremos tomar como referência o volume do maior Poliedro Retangular,  $R$ , contido em  $S$  (i.e.,  $R \subset S$ ). No entanto, até o momento, não dispomos ainda de uma fundamentação teórica suficiente para obter o volume exato do sólido  $S$ . Todavia, dado um Poliedro Retangular  $R$ , contido em  $S$ , temos de acordo com o Axioma (IV)

$$V(R) \leq V(S).$$

A ideia intuitiva é a seguinte: se introduzirmos mais blocos retangulares ao sólido  $R$ , tendo sempre o cuidado destes blocos permanecerem contidos em  $S$ , obtemos um novo Poliedro Retangular  $R'$ ,  $R' \subset S$ , maior que  $R$ . De tal modo que  $V(R')$  será uma aproximação melhor para o  $V(S)$ . Assim, quanto mais blocos forem inseridos em  $R$ , obteremos aproximações melhores para  $V(S)$ .

Observe que  $V(R)$  e  $V(R')$  são aproximações por falta para  $V(S)$ , porém  $V(R')$  é uma aproximação melhor de  $V(S)$ .

Este procedimento de introduzirmos cada vez mais blocos retangulares ao poliedro  $R$  é uma maneira de compreendermos que podemos construir um Poliedro Retangular tão próximo de  $S$ , quanto se queira. Em outras palavras, dado um sólido  $S \in P$ , temos:

- (i) Qualquer que seja o poliedro retangular  $R$ , com  $R \subset S$ , tem-se

$$V(R) \leq V(S),$$

de acordo com o Axioma (III).

- (ii) Qualquer que seja o número real positivo  $\lambda$ , com  $\lambda < V(S)$ , sempre é possível encontrar um poliedro retangular  $R \subset S$ , com

$$\lambda < V(R) \leq V(S).$$

Mais precisamente: seja  $X$  um conjunto formado por números reais positivos dados por  $V(R)$ . Neste caso,  $X$  é um conjunto limitado, pois,

$$0 < V(R) \leq V(S),$$

e  $V(S)$  é uma cota superior para o conjunto  $X$ . Além disso, segue do item (ii), que  $V(S)$  é a menor das cotas superiores de  $X$ , isto é,

$$V(S) = \sup X = \sup \{V(R) \mid R \subset S \text{ e } R \text{ é um poliedro retangular}\}.$$

Portanto, a função  $V : P \rightarrow \mathbb{R}_+$  dada por

$$V(S) = \sup X = \sup \{V(R) \mid R \subset S \text{ e } R \text{ é um poliedro retangular}\}, \quad (3.4)$$

fica bem definida, satisfazendo assim o Axioma (I).

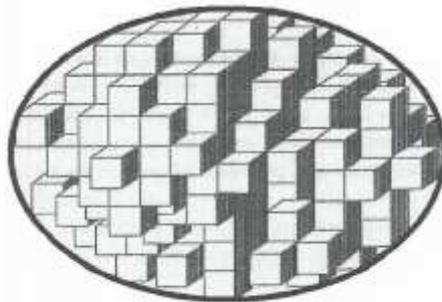


Figura 3.3: Poliedro retangular inserido em um sólido. Fonte: Lima [8]

Nosso objetivo agora é mostrar que  $V : P \rightarrow \mathbb{R}_+$ , dado como (3.4), define uma função volume. Para isso, mostraremos que  $V$  satisfaz os Axiomas (II) - (V).

**Verificação de (II):** É imediato, basta observar que o conjunto de poliedros contidos em  $S_1$  é igual ao conjunto de poliedros contidos em  $S_2$ .

**Verificação de (III):** Inicialmente, observe que dado um poliedro retangular  $R$ , com  $R \subset \bigcup_{i=1}^n S_i$ , podemos considerar  $R$  como sendo uma união de Poliedros Retangulares  $\{R_i\}_{i=1}^n$ , isto é,  $R = \bigcup_{i=1}^n R_i$ , de sorte que  $R_i \subset S_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$  e  $\{R_i\}_{i=1}^n$  são dois a dois disjuntos ou possuem em comum pontos de suas cascas. Sabendo disto, observe que

$$\begin{aligned} V(S) &= \sup \left\{ V(R) \mid R \subset S = \bigcup_{i=1}^n S_i \right\} \\ &= \sup \left\{ V \left( \bigcup_{i=1}^n R_i \right) \mid R_i \subset S_i \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^n V(R_i) \mid R_i \subset S_i \right\} \\ &= \sup \left( \sum_{i=1}^n \{V(R_i) \mid R_i \subset S_i\} \right), \end{aligned}$$

donde segue-se, da Proposição 2.6, que:

$$V(S) = \sum_{i=1}^n \sup \{V(R_i) \mid R_i \subset S_i\} = \sum_{i=1}^n V(S_i).$$

**Verificação de (IV):** Note que,  $R \subset S_1 \Rightarrow R \subset S_2$ , pois  $S_1 \subset S_2$ . Por este fato,

$$\{R \mid R \subset S_1\} \subset \{R \mid R \subset S_2\} \Rightarrow \{V(R) \mid R \subset S_1\} \subset \{V(R) \mid R \subset S_2\},$$

implicando pela Proposição 2.5 que

$$V(S_1) = \sup \{V(R) \mid R \subset S_1\} \leq \sup \{V(R) \mid R \subset S_2\} = V(S_2).$$

**Verificação de (V):** Assuma agora que  $S$  é um cubo de aresta 1,  $S = (1, 1, 1)$ . Neste caso,  $S$  é um Poliedro Retangular, e portanto,

$$V(S) = \max \{V(R) \mid R \subset S = (1, 1, 1)\} = V(1, 1, 1) = 1.$$

# Capítulo 4

## Paralelepípedos e Polígonos Equidecomponíveis

Seguindo o trabalho de Neto [12], apresentaremos ao longo deste capítulo alguns resultados envolvendo paralelepípedos, retos ou oblíquos<sup>2</sup>, a fim de calcular seus respectivos volumes.

### 4.1 Alguns resultados envolvendo paralelepípedos.

Nosso objetivo aqui é mostrar que paralelepípedos de mesma base e mesma altura possuem o mesmo volume. A fim de simplificarmos nossa escrita, trataremos paralelepípedos como paralelepípedo oblíquo ou reto.

**Teorema 4.1** *Se um paralelepípedo for cortado ao meio por um plano que passa por duas de suas arestas opostas (veja Figura 4.1), então os prismas que ficam determinados por esse corte possuem o mesmo volume.*

**Demonstração:** Seja  $ABCDEFGH$  um paralelepípedo e  $BCHE$  o plano que passa por duas de suas arestas opostas. Os prismas  $ABCDHE$  e  $EFGHCB$ , determinados por este plano, possuem o mesmo volume. De fato, como em um paralelepípedo as faces opostas são congruentes, segue que os paralelogramos  $ABCD$  e  $EFGH$  são congruentes, com a seguinte relação  $ABCD \equiv EFGH$ . O mesmo ocorrendo com os paralelogramos  $ADHE$  e  $BCGF$ , com  $ADHE \equiv BCGF$ . Temos ainda que a diagonal  $BE$  divide o paralelogramo  $ABFE$  em dois triângulos congruentes,  $ABE \equiv FEB$  (caso  $LLL$ ); o mesmo ocorrendo com a diagonal  $CH$ , que divide o paralelogramo  $CDHG$  em dois triângulos congruentes,  $DCH \equiv GHC$ , (caso  $LLL$ ). Deste modo, tendo em vista que as faces dos prismas  $ABCDHE$  e  $EFGHCB$  são duas

---

<sup>2</sup>Um paralelepípedo é dito oblíquo, quando as arestas das faces laterais são oblíquas em relação aos planos das bases, ou seja, formam com as bases ângulos que podem ser maiores (obtusos) ou menores (agudos) que  $90^\circ$ .

a duas congruentes, podemos concluir que tais prismas são congruentes, ou seja, possuem o mesmo volume (Axioma II).

□

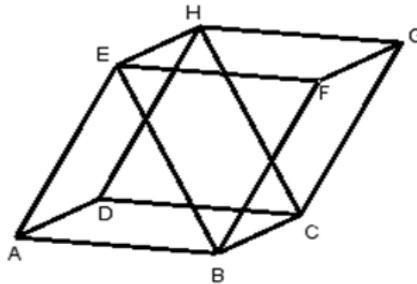


Figura 4.1: Plano dividindo um paralelepípedo ao meio.

**Teorema 4.2** *Se dois paralelepípedos possuem mesma base, mesma altura e, além disso, as extremidades de suas arestas laterais são pontos colineares, então eles possuem o mesmo volume.*

**Demonstração:** A fim de demonstrar tal resultado, vamos considerar três casos:

1º caso: As faces superiores possuem um segmento em comum, a ver Figura 4.2.

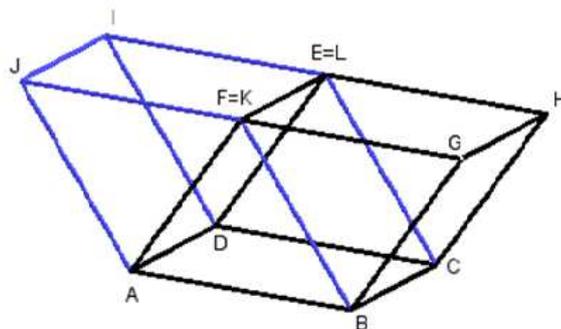


Figura 4.2: Faces superiores com um segmento em comum.

Como as extremidades das arestas laterais desses paralelepípedos são pontos colineares, temos que:  $\overline{JK} = \overline{AB} = \overline{FG}$  e  $\overline{EH} = \overline{CD} = \overline{IL}$ . Note que os paralelogramos  $ADEF$  e  $BCHG$  são congruentes, pois são faces opostas do paralelepípedo  $ABCDEFGH$ . O mesmo ocorrendo com os paralelogramos  $ADIJ$  e  $BCLK$ , pois são faces opostas do paralelepípedo  $ABCDIJKL$ . Daí, como os paralelepípedos  $ABCDEFGH$  e  $ABCDIJKL$  possuem faces duas a duas congruentes, concluímos que esses paralelepípedos são congruentes, ou seja, têm o mesmo volume ( Axioma II).

2° caso: Os paralelogramos que constituem a face superior possuem como interseção um paralelogramo, a ver Figura 4.3.

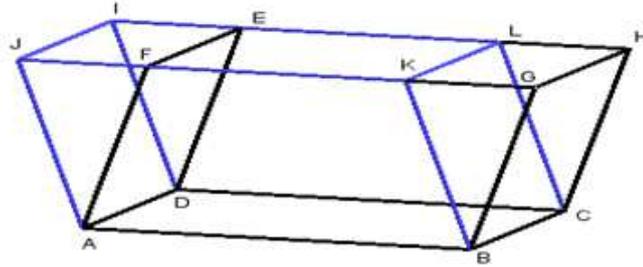


Figura 4.3: Faces superiores com um paralelogramo em comum.

Tendo em vista que as extremidades das arestas laterais desses paralelepípedos são pontos colineares, temos:

$$\overline{JK} = \overline{AB} = \overline{FG} \quad (4.1)$$

e

$$\overline{EH} = \overline{CD} = \overline{IL} \quad (4.2)$$

Além disso, valem as igualdades:

$$\overline{JF} = \overline{JK} - \overline{FK} \stackrel{(4.1)}{=} \overline{FG} - \overline{FK} = \overline{KG} \quad e \quad \overline{IE} = \overline{IL} - \overline{EL} \stackrel{(4.2)}{=} \overline{EH} - \overline{EL} = \overline{LH}.$$

Note ainda que os paralelogramos  $ADEF$  e  $BCHG$  são congruentes, pois são faces opostas do paralelepípedo  $ABCDEFHG$ . O mesmo ocorre com os paralelogramos  $ADIJ$  e  $BCLK$ , pois são faces opostas do paralelepípedo  $ABCDIJKL$ . Daí, concluímos que os prismas  $ADEIJF$  e  $BCHLKG$  são congruentes, com a seguinte relação  $ADEIJF \cong BCHLKG$ . Por este fato, podemos concluir que (ver Axioma II)

$$V := V(ADEIJF) = V(BCHLKG).$$

Por outro lado, o sólido  $ABCDEFKL$  é comum aos paralelepípedos em questão e, além disso, cada um desses paralelepípedos é formado pela união desse sólido com um prisma de volume  $V$ . Dessa forma, sendo  $V'$  o volume desse sólido, temos que o volume de cada um dos paralelepípedos é dado por  $V + V'$ , conseqüentemente,

$$V(ABCDIJKL) = V + V' = V(ABCDEFHG).$$

3° caso: Os paralelogramos que constituem a face superior possuem interseção vazia como mostra a Figura 4.4.

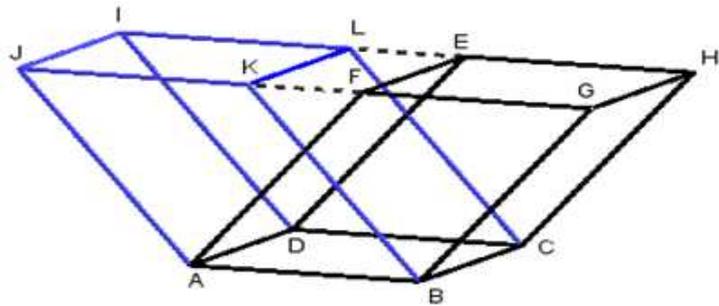


Figura 4.4: Faces superiores com interseção vazia.

Suponha que  $KF \leq JK$ . Inicialmente, tome dois pontos,  $M$  e  $N$ , pertencentes aos segmentos  $JK$  e  $FG$ , respectivamente, de modo que  $\overline{MN} = \overline{AB}$ . De modo análogo, fixe os pontos  $P$  e  $O$  pertencentes aos segmentos  $IL$  e  $EH$ , respectivamente, de sorte que  $\overline{PO} = \overline{DC}$ , e  $PD \parallel MA$  e  $CO \parallel BN$ . A partir desta construção, obtemos o paralelepípedo  $ABCDPMNO$  (a ver Figura 4.5), que por sua vez, possui o mesmo volume que o paralelepípedo  $ABCDIJKL$  (veja 1° e 2° casos). O caso onde  $KF > JK$ , basta escolher um certo número de paralelepípedos de modo que podemos recair aos 1° e/ou 2° casos.

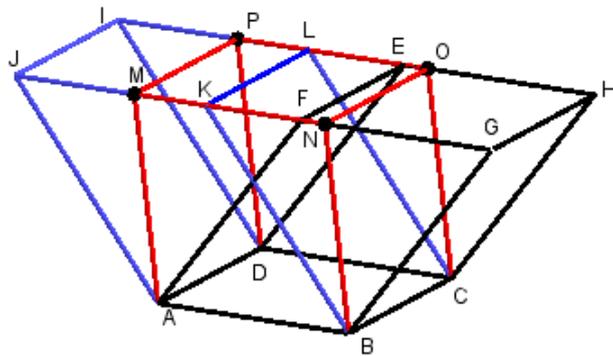


Figura 4.5: Três paralelepípedos com o mesmo volume.

Do 1° ao 3° caso, concluímos que se dois paralelepípedos possuem mesma base, mesma altura e, além disso, as extremidades de suas arestas laterais são pontos colineares, então eles possuem o mesmo volume.

□

**Teorema 4.3** *Se paralelepípedos tiverem mesma base e mesma altura, então eles têm o mesmo volume.*

**Demonstração:** Com o auxílio da Figura 4.6, iremos tomar os paralelepípedos  $ABCDIJKL$  (azul) e  $ABCDPMNO$  (vermelho). Deste modo, a partir destes paralelepípedos, podemos

construir um paralelepípedo  $ABCDEFGH$  (preto), a ver Figura 4.6, de sorte que suas arestas superiores são colineares com as arestas superiores dos outros dois paralelepípedos.

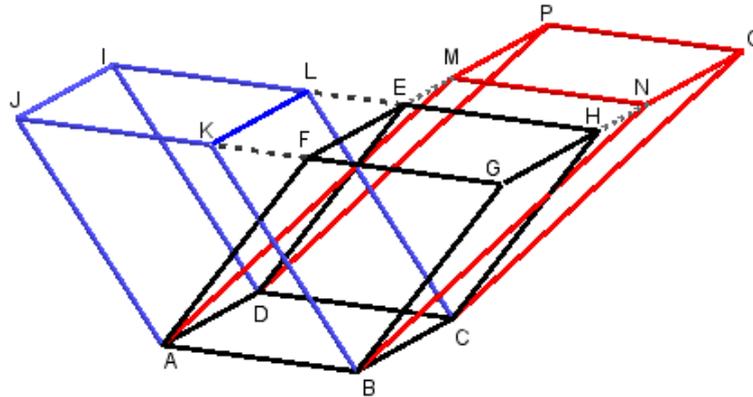


Figura 4.6: Comparando o volume de três paralelepípedos de mesma base e altura.

Sendo assim, segue do Teorema 4.2, que os três paralelepípedos possuem o mesmo volume.

□

## 4.2 Polígonos Equidecomponíveis.

Para os resultados apresentados aqui, usamos como referencial teórico Lima (ver [9], pp. 10-15) e Neto (ver [12], pp. 2-3).

**Definição 4.1** *Dois polígonos,  $P$  e  $P'$ , são ditos equidecomponíveis quando existem decomposições*

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$$

e

$$P' = P'_1 \cup P'_2 \cup \dots \cup P'_n$$

*de tal forma que cada polígono  $P_i$  é congruente ao polígono  $P'_i$ , com  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Além disso, exige-se que os polígonos  $P_i$  tenham seus interiores, dois a dois disjuntos, o mesmo ocorrendo com os  $P'_i$ .*

**Exemplo 7** *Todo triângulo é equidecomponível a um retângulo.*

No intuito de mostrarmos tal resultado, considere um triângulo  $BAC$  de base  $AC$  e altura  $BD$  relativa à base. Sejam  $E$  e  $F$  os pontos médios dos lados  $BA$  e  $BC$ , respectivamente. Tracemos a reta  $r$  que passa pelos pontos  $E$  e  $F$  e que é paralela a base  $AC$ ,  $AG$  e  $CH$  que são perpendiculares a essa reta. Considere ainda o ponto  $O$  que é interseção entre a reta  $r$  e a

altura  $BD$  (ver figura 4.7). Além disso, fixe os pontos  $G$  e  $H$  da reta  $r$  de modo que  $AG$  e  $CH$  são perpendiculares a  $r$ , e fixe  $O$  como sendo a interseção entre  $r$  e  $BD$ .

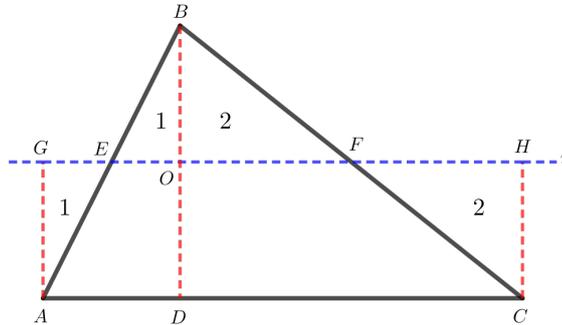


Figura 4.7: Triângulo e retângulo equidecomponíveis.

Para concluirmos que o triângulo  $BAC$  e o retângulo  $GACH$  são equidecomponíveis, devemos mostrar que os triângulos  $EOB$  e  $EGA$  são congruentes, assim como os triângulos  $FOB$  e  $FHC$ . Com efeito, como  $E$  e  $F$  são pontos médios de  $BA$  e  $BC$ , respectivamente, segue-se que  $\overline{EB} = \overline{EA}$  e  $\overline{FC} = \overline{FB}$ . Além disso,  $\widehat{AEG} = \widehat{BEO}$  (ângulos opostos pelo vértice) e  $\widehat{EGA} = \widehat{EOB} = 90^\circ$ . O mesmo ocorrendo com os ângulos  $\widehat{BFO} = \widehat{CFH}$  (opostos pelo vértice) e  $\widehat{BOF} = \widehat{CHF} = 90^\circ$ . Daí, pelo caso  $LAA_0$  (lado, ângulo e ângulo oposto) os triângulos  $EOB$  e  $EGA$  são congruentes, o mesmo ocorrendo com os triângulos  $FOB$  e  $FCB$ , isto é,  $EOB \equiv EGA$  e  $FOB \equiv FHC$ . Diante disso, concluímos que o triângulo  $BAC$  e o retângulo  $GACH$  são equidecomponíveis.

**Lema 4.4** *Se um polígono  $P$  é equidecomponível a um polígono  $P'$ , e o polígono  $P'$  é equidecomponível a um polígono  $P''$ , então os polígonos  $P$  e  $P''$  também são equidecomponíveis.*

**Demonstração:** Como  $P$  e  $P'$  são equidecomponíveis, isto significa que é possível dividir  $P$  em um número finito de partes, que, reorganizadas, resultam em  $P'$ . Assim, considere  $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$  uma decomposição de  $P$ , os quais, reagrupados, formam  $P' = P'_1 \cup P'_2 \cup \dots \cup P'_n$ , em que cada  $P_i$  é congruente a cada  $P'_i$ , com  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Por outro lado, como  $P'$  é equidecomponível a  $P''$ , podemos cortar  $P'$  em um número finito de partes ainda menores que  $P'_i$ ,  $\tilde{P}_i$ , de modo a obtermos  $P''$ . Com isso, os polígonos  $\tilde{P}_i$  ainda menores, podem ser reagrupados de um modo para formar o polígono  $P$  e de outro modo para formar  $P''$ . Logo,  $P$  e  $P''$  são equidecomponíveis.

□

**Lema 4.5** *Se dois paralelogramos possuem mesma base e áreas iguais, então eles são equidecomponíveis.*

**Demonstração:** Sejam  $ABCD$  e  $ABEF$  dois paralelogramos que têm base comum  $\overline{AB}$  e igual área. Como eles possuem mesma base e igual área, suas alturas são idênticas. Sendo assim, os segmentos  $\overline{CD}$  e  $\overline{EF}$  estão sobre uma mesma reta. Se tais segmentos forem coincidentes não há o que demonstrar. Caso contrário, tracemos na reta  $\overleftrightarrow{AB}$  consecutivamente, uma série de segmentos iguais ao segmento  $\overline{AB}$  e por cada ponto de divisão tracemos retas paralelas aos segmentos  $\overline{AD}$  e  $\overline{AF}$ . Com isso, os feixes de retas paralelas formados por  $\overline{AD}$  e  $\overline{AF}$  formam uma série de polígonos, como podemos ver na figuras 4.8.

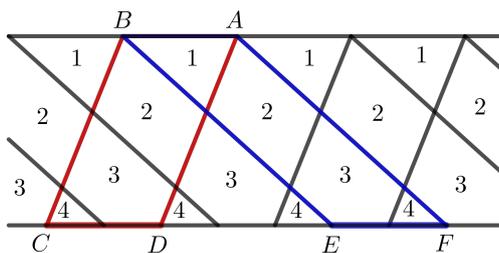


Figura 4.8: Feixes de retas paralelas.

Além disso, cada um destes polígonos de um paralelogramo pode ser deslocado para o outro paralelogramo. A figura 4.8 mostra que os polígonos do paralelogramo  $ABEF$  podem ser deslocados para o paralelogramo  $ABCD$ , uma vez que o polígono  $ABCD$  é composto pelos polígonos representados por 1, 2, 3 e 4, assim como o polígono  $ABEF$ . Portanto, estes paralelogramos são equidecomponíveis.

□

**Lema 4.6** *Se dois paralelogramos possuem mesma área, então eles são equidecomponíveis.*

**Demonstração:** Sejam  $ABCD$  e  $EFGH$  dois paralelogramos de mesma área, representados nas figuras 4.9 e 4.10, respectivamente. Sem perda de generalidade, dentre os segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{EF}$  e  $\overline{FG}$ , considere o segmento  $\overline{AB}$ , como o de maior medida.



Figura 4.9: Paralelogramo ABCD.

Agora, considere o ponto  $P$  pertencente à reta  $\overleftrightarrow{GH}$ , em que  $P$  está situado à esquerda de  $H$ , de sorte que  $\overline{PE} = \overline{AB}$ , como podemos ver na figura 4.10.

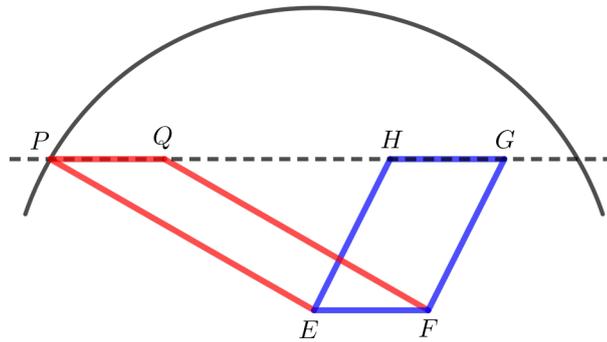


Figura 4.10: Paralelogramos EFPQ e EFGH.

Em seguida, construa uma circunferência de raio  $\overline{AB}$  e de centro  $E$ . Como  $\overline{AB} > \overline{EH}$ , então teremos dois pontos de interseção da circunferência com a reta  $\overleftrightarrow{GH}$ . Seja  $Q$  o ponto situado à esquerda de  $H$  e pertencente a  $\overleftrightarrow{GH}$  tal que  $\overline{PQ} = \overline{HG}$ . Daí, temos que o paralelogramo  $EFPQ$  tem mesma área e um lado comum ao retângulo  $EFGH$ . Como paralelogramos de mesma área e mesma base são equidecomponíveis (ver Lema 4.5), segue que  $EFGH$  e  $EFPQ$  são equidecomponíveis. Por outro lado, como os paralelogramos  $ABCD$  e  $EFPQ$  têm mesma base e mesma área, então eles também são equidecomponíveis. Por estes fatos, segue do Lema 4.4, que  $ABCD$  e  $EFGH$  são equidecomponíveis.

□

# Capítulo 5

## O Volume do Cilindro

Neste capítulo, faremos uso do Método de aproximação por falta para calcular o volume do cilindro (reto ou oblíquo) e, a partir da função volume  $V : P \rightarrow \mathbb{R}_+$ , apresentada no Capítulo 3, seção 3.4, concluiremos que seu volume é dado pelo produto entre a área da base pela altura.

### 5.1 Volume do Paralelepípedo.

A partir dos resultados apresentados no capítulo anterior, envolvendo paralelepípedos e polígonos equidecomponíveis, apresentamos o teorema a seguir, que é uma consequência do Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien<sup>1</sup> (ver [12]), para sólidos do tipo paralelepípedos.

**Teorema 5.1** *Se dois paralelepípedos possuem mesma altura e bases com a mesma área, então eles têm o mesmo volume.*

**Demonstração:** Considere  $P$  e  $P'$  dois paralelepípedos com a mesma altura e bases  $B$  e  $B'$ , respectivamente, com mesma área. Como  $B$  e  $B'$  têm a mesma área (ver Figura 5.1), segue do Lema 4.6, que  $B$  e  $B'$  são equidecomponíveis, ou seja, é possível escrever  $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$  como união de  $n$  partes disjuntas, de modo que  $B' = B'_1 \cup B'_2 \cup \dots \cup B'_n$ , onde  $B_i$  e  $B'_i$  são congruentes.

---

<sup>1</sup>Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien: Dois polígonos de áreas iguais são equidecomponíveis.

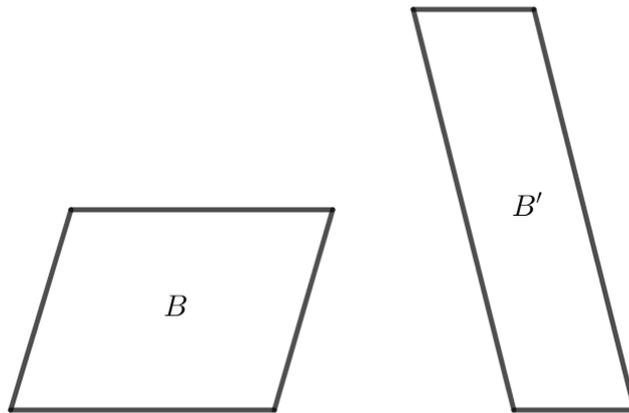


Figura 5.1: Bases  $B$  e  $B'$  de mesma área.

Com isso, as decomposições de  $B$  e  $B'$  nos levam a decomposições naturais de  $P$  e  $P'$  em paralelepípedos  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , tais que  $P = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n$  e  $P' = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n$  sendo que, para  $i \neq j$ , os paralelepípedos  $R_i$  e  $R_j$  têm exatamente uma face em comum. Em particular,  $P$  e  $P'$  têm o mesmo volume.

□

**Teorema 5.2** *O volume de um paralelepípedo é igual ao produto da área da base pela respectiva altura.*

**Demonstração:** Considere um paralelepípedo  $ABCDEFGH$  de base  $ABCD$  e altura  $h$  como ilustrado na Figura 5.2.

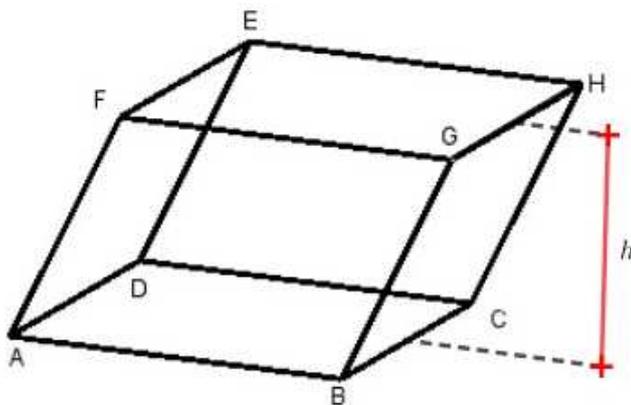


Figura 5.2: Paralelepípedo  $ABCDEFGH$ .

Tracemos, agora, dois planos perpendiculares à base  $ABCD$ : o primeiro que passa pela aresta  $\overline{BC}$  e o segundo que passa pela aresta  $\overline{AD}$ . Considere os pontos  $A_1, C_1$  e  $B_1, D_1$ , que pertencem, respectivamente, as retas  $\overleftrightarrow{FG}$  e  $\overleftrightarrow{EH}$  e aos planos perpendiculares à base  $ABCD$ .

Note que, a partir deste procedimento, obtemos o paralelepípedo retângulo  $ABCDB_1A_1C_1D_1$  que possui mesma base  $ABCD$  e mesma altura  $h$  que o paralelepípedo  $ABCDEFGH$  (ver Figura 5.3), logo, eles possuem o mesmo volume (ver Teorema 5.1).

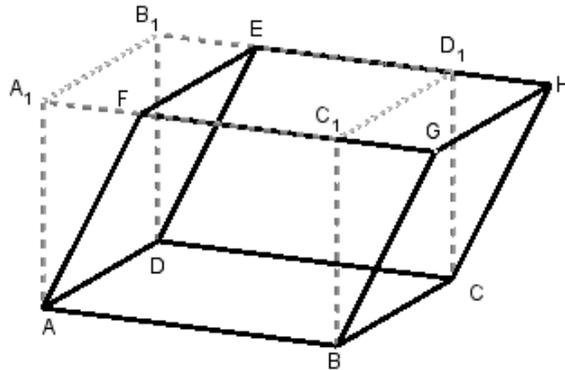


Figura 5.3: Paralelepípedo retângulo  $ABCDB_1A_1C_1D_1$ .

Como o volume de um paralelepípedo retângulo é dado pelo produto da área da base pela respectiva altura (ver Teorema 3.2), segue que

$$V(ABCDEFGH) = V(ABCDB_1A_1C_1D_1) = A(ABCD) \cdot h.$$

□

## 5.2 Volume do Prisma.

O objetivo desta seção é apresentar uma fórmula para o cálculo do volume de um prisma, cuja base é um polígono regular (um caso particular de cilindro). Para isso, veremos, inicialmente, a definição de cilindro (ver [7], p. 52):

**Definição 5.1** *Sejam  $F$  uma figura plana contida em um plano horizontal  $\pi$  e  $g$  um segmento de reta não paralelo a este plano. A reunião de todos os segmentos de retas com origem em  $F$ , paralelos e congruentes a  $g$  é chamado de **Cilindro  $C$ , de base  $F$  e geratriz  $g$**  (ver Figura 5.3).*

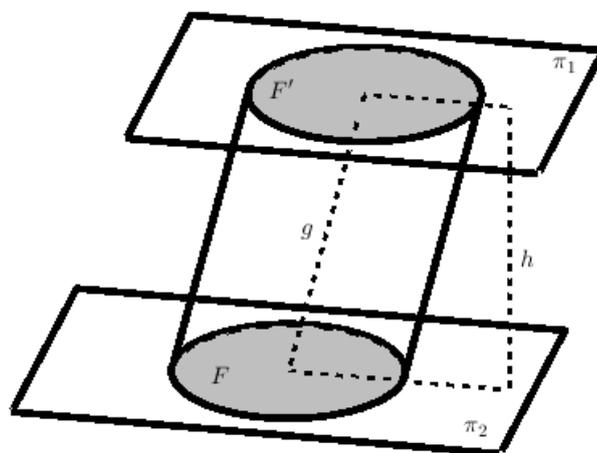


Figura 5.4: Cilindro de base  $F$  e geratriz  $g$ .

**Teorema 5.3** *O volume de um prisma de base triangular é igual ao produto da área da base pela respectiva altura.*

**Demonstração:** Seja  $ABCDHEFG$  um paralelepípedo de base  $ABCD$  e altura  $h$  como ilustrado na Figura 5.5. Considere  $BDHF$  o plano que passa por duas de suas arestas opostas. Diante disso, o paralelepípedo  $ABCDHEFG$  fica dividido em dois prismas de bases triangulares de mesmo volume (ver Teorema 4.1). Pelo Teorema 5.2, o volume do paralelepípedo  $ABCDHEFG$  é dado por

$$V(ABCDHEFG) = A(ABCD) \cdot h.$$

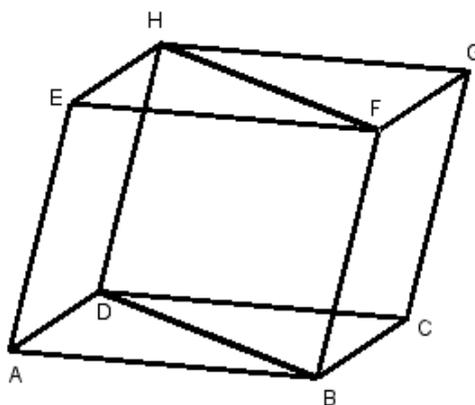


Figura 5.5: Paralelepípedo  $ABCDHEG$ .

Por outro lado, os volumes dos prismas de base triangular que compõem esse paralelepípedo é dado por

$$V(ABDHEF) = \frac{V(ABCDHEFG)}{2} = \frac{A(ABCD) \cdot h}{2},$$

mas,  $A(ABCD) = 2 \cdot A(ABD)$ . Assim,

$$V(ABDHEF) = A(ABD) \cdot h.$$

□

Veremos agora o caso onde o prisma possui como base um polígono regular.

**Teorema 5.4** *O volume de um prisma  $P_n$ , cuja base é um polígono regular de  $n$  lados, é dado pelo produto entre a área da base,  $A_n$ , e a altura do prisma,  $H$ , isto é,*

$$V(P_n) = A_n \cdot H.$$

**Demonstração:** Observe que o prisma  $P_n$ , cuja base é um polígono regular, de  $n$  lados, pode ser visto como a união de  $n$  prismas,  $P_t$ , todos congruentes, de base triangular. Por outro lado, segue do Teorema 5.3, que o volume de cada prisma  $P_t$  é dado pelo produto da área de sua respectiva base pela altura. Considerando, agora,  $T$  como a área da base de  $P_t$ , temos, pelo Axioma (III), que o volume de  $P_n$  é:

$$V(P_n) = V\left(\bigcup_{i=1}^n P_t\right) = \sum_{n=1}^n V(P_t) = \sum_{n=1}^n T \cdot H = (n \cdot T) \cdot H.$$

Note que,  $n \cdot T$  determina a área da base de  $P_n$ , isto é,  $n \cdot T = A_n$ , logo

$$V(P_n) = A_n \cdot H.$$

□

### 5.3 Volume do Cilindro.

Esta seção é destinada ao cálculo do volume do cilindro de base circular. Aqui apresentamos a fórmula de seu volume utilizando o Método de aproximação por falta. A fim de mostrar que o seu volume é dado pelo produto da área da base pela altura, enunciaremos agora dois lemas, nos quais suas respectivas demonstrações podem ser vistas em Alves (ver [1], pp. 19-20) e em Flemming e Gonçalves (ver [6], p. 99).

**Lema 5.5** *Seja  $R_n$  um polígono regular de  $n$  lados, inscrito em uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ . A área de  $R_n$  é dada por:*

$$A(R_n) = \frac{1}{2} n r^2 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right).$$

**Lema 5.6** *Para  $x > 0$ , bem próximo de zero, temos  $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$  bem próximo de 1, e menor que 1, ou seja,*

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \approx 1 \quad e \quad \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1,$$

para  $x \approx 0$  e  $x > 0$ .

**Teorema 5.7** *O volume de um cilindro  $C$ , de altura  $H$  e base circular com centro  $O$  e raio  $r$ , é dado pelo produto entre a área da base e a altura, isto é:*

$$V(C) = \pi r^2 H.$$

**Demonstração:** Seja  $P_n$  um prisma, cuja base é um polígono regular de  $n$  lados, inscrito na base de  $C$ . Considere, agora,  $X$  como sendo o conjunto de todos os poliedros retangulares  $R$  contidos em  $C$ . Neste caso,

$$V(C) = \sup_{R \in X} V(R).$$

Mostraremos agora que

$$V(C) = \sup_{n \in \mathbb{N}} V(P_n). \quad (5.1)$$

Afim de mostrarmos esta igualdade, é importante observar, inicialmente, que para cada  $R \in X$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , suficientemente grande, tal que  $R \subset P_{n_0} \subset C$ . Neste caso, segue do Axioma (IV) que

$$V(R) \leq V(P_{n_0}) \leq V(C). \quad (5.2)$$

Sabendo disto, verificaremos agora que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} V(P_n) \geq V(C) = \sup_{R \in X} V(R).$$

Com efeito, suponha por contradição que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} V(P_n) < \sup_{R \in X} V(R).$$

Assim, existe  $R_0 \in X$  verificando:

$$V(P_n) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} V(P_n) < V(R_0), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o que é uma contradição com (5.2). A outra desigualdade segue pelo fato de  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ . Provando assim a igualdade (5.1).

Usaremos agora (5.1) para provar, finalmente, que

$$V(C) = \pi r^2 H.$$

Segue do Lema 5.6 que o volume de  $P_n$  é dado por:

$$V(P_n) = \frac{1}{2} H n r^2 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right).$$

E, uma vez que  $\frac{2\pi}{n} \approx 0$ , para  $n$  suficientemente grande, temos pelo Lema 3.6 que:

$$V(P_n) = \pi H r^2 \left( \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right)}{\left( \frac{2\pi}{n} \right)} \right) \approx \pi H r^2 \quad e \quad V(P_n) < \pi H r^2, \quad (5.3)$$

para  $n$  suficientemente grande.

Afirmamos que  $\pi Hr^2$  é a menor das cotas superiores para o conjunto  $\{V(P_n); n \in \mathbb{N}\}$ . De fato, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , por (5.3), tal que

$$0 < \pi Hr^2 - V(P_{n_0}) < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\pi Hr^2 - \varepsilon < V(P_{n_0}).$$

Logo,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} V(P_n) = \pi Hr^2,$$

donde segue-se de (5.1) que

$$V(C) = \pi Hr^2,$$

como queríamos demonstrar.

□

# Capítulo 6

## Considerações Finais

Com este trabalho, ficou evidente a importância de compreendermos o conceito de volume de um sólido a partir do Método de aproximação por falta. Utilizando esse método, mostramos que é possível obter aproximações de volumes de sólidos com tanta precisão quanto se queira, por meio de volumes de poliedros retangulares neles contidos ou por meio de volumes de outros sólidos que já conhecemos o seu volume e, dessa forma, dar um significado preciso ao conceito de volume.

Ao longo do trabalho, não fizemos uso do Princípio de Cavalieri para realização do cálculo do volume dos sólidos citados aqui. É importante salientar que, a partir do Princípio de Cavalieri, esses cálculos são simples, rápidos; contudo, perde-se o entendimento teórico, como estabelecemos aqui do que seria volume. Por essa razão, não utilizamos esse princípio, mas o leitor interessado pode ver sua aplicabilidade para determinar volume de cones e de esferas.

Na demonstração do Teorema 5.1, o resultado apresentado é uma consequência do Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, segundo o qual, dois polígonos de áreas iguais são equidecomponíveis. Utilizando esse teorema, vimos que dois paralelepípedos que possuem o mesmo volume são equidecomponíveis. Mas será que esse resultado é válido para outros sólidos? A resposta é não. Max Dehn (1878-1952), aluno do matemático David Hilbert (1862-1943), demonstrou que não é possível estender o Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien para sólidos quaisquer, ou seja, dois sólidos podem ter o mesmo volume sem serem equidecomponíveis. Diante disso, não é possível usar tal teorema para concluir que pirâmides de mesma base e altura possuem o mesmo volume. Neste caso, deve-se usar o Método da Exaustão ou o Princípio de Cavalieri para concluir tal resultado. Deixamos a prova desse resultado como motivação para o nosso leitor.

A partir do estudo realizado, foi possível aplicar o conceito de supremo de um conjunto. Os resultados foram devidamente provados e expostos de forma clara, tendo em vista que, os alunos do Ensino Médio não têm um contato direto com essa teoria. Por esse motivo, acreditamos que nossa pesquisa venha motivar professores do ensino básico, alunos do Ensino Médio e, até mesmo, alunos de Análise Real, da importância do Método de aproximação

por falta.

Por fim, acreditamos que se o Método de aproximação por falta for explorado nas escolas de forma mais objetiva e interdisciplinar, teremos alunos mais interessados pelo estudo da matemática, de modo que possam interagir e perceber as aplicações desta disciplina no seu cotidiano. Dessa maneira, o estudo sobre o volume de sólidos não ficará limitado apenas a exposição de fórmulas por parte do professor e a resolução de uma série de exercícios, muitas vezes, enfadonhos e repetitivos. O conteúdo será exposto de forma mais precisa, fundamentado em definições e utilizando materiais concretos ou *softwares* de geometria dinâmica que, via regra, auxiliarão na consolidação do conhecimento.

## Referências Bibliográficas

- [1] ALVES, F. F. F.; *Estudo Sobre o Conceito de Volume*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia. Orientação: Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos. Campina Grande, (2014).
- [2] BARBOSA, J. L. M.; *Geometria Euclidiana Plana*. SBM, Coleção do Professor de Matemática, 10.ed., Rio de Janeiro, (2006).
- [3] BRASIL, *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*, v. 2, Brasília, MEC/SEB, (2006), 140p.
- [4] CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C.; LIMA, E. L.; *A Matemática do Ensino Médio, volume 1*. SBM, Coleção do Professor de Matemática, 8. ed., Rio de Janeiro, (2005).
- [5] CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C.; LIMA, E. L.; *A Matemática do Ensino Médio, volume 2*. SBM, Coleção do Professor de Matemática, 6. ed., Rio de Janeiro, (2005).
- [6] FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B.; *Cálculo A: Funções, limite, derivação e integração*, 6. ed., Florianópolis, Pearson (2006).
- [7] LIMA, E. L.; *Análise Real: Funções de Uma Variável, volume 1*. IMPA, Coleção Matemática Universitária, 13. ed., Rio de Janeiro, (2011).
- [8] LIMA, E. L.; *Áreas e Volumes: Fundamentos da Matemática Elementar*. Ao Livro Técnico S. A., Rio de Janeiro, (1973).
- [9] LIMA, E. L.; *Medida e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança*. SBM, Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, (1991).
- [10] LIMA, F. N.; *Estudo Sobre o Cálculo de Áreas e Volumes Utilizando o Método de Exaustão e o Princípio de Cavalieri*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e da Natureza. Orientação: Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza. João Pessoa, (2013).

- [11] NETO, A. C. M.; *Fundamentos de Cálculo*. SBM, Coleção Profmat, 1. ed., Rio de Janeiro, (2015).
- [12] NETO, A. P.; *Volumes e o Princípio de Cavalieri*. Portal da Matemática - OBMEP. Material Teórico - Módulo de Geometria Espacial 2 - Volumes e Áreas de Prismas e Pirâmides. Terceiro Ano - Médio. Disponível em: <http://matematica.obmep.org.br/>.