UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Estudo sobre o Conceito de Volume.

Flávio Franklin Fidelis Alves

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos

Campina Grande - PB
Agosto/2014.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

A474e Alves, Flávio Franklin Fidelis.
Estudo sobre o conceito de volume / Flávio Franklin Fidelis Alves. – Campina Grande, 2014.
26 f. :

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.

"Orientação: Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos".
Referências.

1. Função - Volume. 2. Volume - Sólido. 3. Supremo - Conjunto. I. Santos, Jefferson Abrantes dos. II. Título.

CDU 517.518.26(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

PROFMAT

Estudo Sobre o Conceito de Volume

por

Flávio Franklin Fidelis Alves †

Trabalho Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

†Bolsista CAPES

Estudo Sobre o Conceito de Volume

por

Flávio Franklin Fidelis Alves

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado por:

Rosana Marq

Profa. Dra. Rosana Marques da Silva - UFCG

Luciana Freitas

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas - UEPB

Jefferson Abrantes dos Santos

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Agosto/2014

Dedicatória

A todos que estiveram comigo nestes dois anos e me trouxeram aquilo que algumas vezes me faltou: confiança. Muito obrigado!

Agradecimentos

Inicialmente agradeço a Deus, a essência do universo, pelo dom da vida e por esta oportunidade de conhecer um pouco mais da beleza da matemática.

Aos colegas da minha turma que, em dois anos interagimos fraternamente e levo um pouco de cada um deles para toda a vida...Pena que foi tudo tão rápido!

Aos meus amigos Ângela Cristina, Darlan, Jonas, Laurita, Marivândia, Marta Danielly e Valber, com quem dividi muitos diálogos sobre o PROFMAT e sempre souberam me apoiar para que tudo desse certo. Vocês foram essenciais para esta realização!

Aos irmãos Alécio, Damião e Weslley, que dividimos amizades, estudos, brincadeiras, enfim, foi uma experiência inesquecível!

Ao professor Jefferson Abrantes pela orientação, por todo conhecimento que me possibilitou durante o PROFMAT.

Às professoras Rosana Marques e Luciana Roze por aceitarem participar da Banca Examinadora e pelas sugestões bastante relevantes à conclusão deste Trabalho.

À secretária Andrezza, exemplo de profissionalismo que exerce junto à UFCG.

À minha família, que sempre esteve presente e muito me apoio neste Trabalho! Em especial, a minha irmã Karla, pela contribuição às correções e elaboração do abstract.

Aos colegas das Escolas Nelson Carneiro e Carlota Barreira, em especial aos diretores Gilberto e Samid e todos os mestres! Sou muito grato a vocês pelo apoio recebido!

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

Resumo

Neste trabalho realizamos um estudo a cerca de volumes de sólidos espaciais com o objetivo de passar de forma mais concreta o conceito de volume. Dessa forma, consideramos o volume como uma função, onde estabelecemos sua definição a partir de um grupo de axiomas bem como da teoria de supremo de um conjunto. Assim, mostramos que é possível obter aproximações de volumes de sólidos com tanta precisão quanto se deseje por meio de volumes de poliedros retangulares neles contidos e, dessa forma, dar um significado preciso ao conceito de volume.

Palavras Chaves: Função volume. Volume de um sólido. Supremo de um conjunto.

Abstract

In this work we study about the spatial volume of solids in order to convey more precisely the concept of volume. We consider it as a function. We establish its definition from a set of axioms and the theory of the supreme of a set. In this way, we have shown that's possible to obtain approximations of a solid volume as accurately as is desired by means of volumes of rectangular polyhedron contained in it, and thus give a precise meaning to the concept of volume.

Keywords: Volume function. Solid volume. Supreme of a set.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O estudo a cerca do tema"**Volume de um Sólido**" é abordado desde os primeiros anos da educação básica e ganha realce, de forma mais abrangente, na 2ª série do Ensino Médio. Pelo fato de normalmente ser apresentado apenas no final do livro didático, muitos professores não trabalham esse tema, justificado pela excessiva quantidade de conteúdos exigida na grade curricular. Dessa forma, ou transferem aos alunos a tarefa de estudarem individualmente esse assunto ou optam em atribuir às universidades a tarefa de ensiná-lo.

A realidade nos mostra que, muitos docentes expõem o conteúdo superficialmente, preocupando-se em fazer com que os alunos decorem regras e memorizem fórmulas, sem apresentar qualquer justificativa à origem das mesmas. Privam-se de aplicações e contextualizações e explanam o conteúdo de forma mecânica, contribuindo para a monotonia das aulas.

O fato de os alunos conviverem diariamente com figuras geométricas tridimensionais favorece, antes de tudo, a dedução de algumas fórmulas ao cálculo do volume e, por conseguinte, à realizāção com precisão de algumas atividades de natureza aplicativa. Por se tratar de figuras essencialmente visuais e concretas, é possível manipulá-las e, assim, provocar de forma mais eficaz a construção do conhecimento. É uma boa oportunidade para motivar o estudo da matemática por meio, por exemplo, de recursos computacionais disponíveis, como é o caso de alguns softwares educacionais.

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é estabelecer uma associação entre um sólido dado e um número real positivo, que corresponde ao volume deste sólido e se refere à quantidade de espaço por ele ocupado, para, à partir daí, deduzir-se algumas fórmulas ao cálculo do volume de alguns sólidos geométricos do tipo paralelepípedo retangular, prisma reto e cilindro.

Ao mesmo tempo, apresenta como objetivos específicos:

- Expor uma ideia intuitiva quanto ao Volume de um Sólido;
- Reconhecer o cubo de aresta igual a uma unidade de comprimento como unidade de volume;
- Deduzir uma fórmula ao cálculo do volume do paralelepípedo retangular cujas arestas têm por medidas quaisquer números reais positivos;
- Definir Volume de um Sólido, de forma mais geral, por meio de aproximações por falta por volumes de poliedros retangulares nele contidos;
- Compreender o conceito de supremo de um conjunto;
- Definir precisamente Cilindro e deduzir uma fórmula ao cálculo de seu Volume.

1.2 Organização

Este trabalho encontra-se organizado em cinco capítulos e obedece a seguinte distribuição:

No Capítulo 1, **"Introdução"**, fazemos uma breve apresentação a cerca do tema estudado, enfatizando como o conteúdo Volume de Sólidos é tratado nas escolas e os níveis da Educação Básica em que é abordado.

No Capítulo 2, **"Noções Preliminares de Volume de um Sólido"**, iniciamos definindo, sem rigor formal, o que vem a ser o volume de um sólido e fazemos referência à unidade padrão que comumente usamos para calcular o volume de sólidos. Seguimos fixando alguns Axiomas, com o objetivo de construir a função que associa sólidos a um número real positivo. Logo depois, trabalhamos com o paralelepípedo retangular, onde demonstramos como calcular o volume deste sólido, tanto para o caso particular de cubos como para o caso mais geral. Neste último, nos valemos de um resultado de natureza bastante aplicativa em diversas situações no âmbito da matemática: o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, que inicialmente foi demonstrado para, só depois, ser aplicado.

Já no Capítulo 3, **"Definição Geral do Volume de um Sólido"**, formalizamos o conceito de volume de um sólido e introduzimos o conceito de supremo de um conjunto. À partir daí, possibilitamos a definição de volume de sólido geométrico através de aproximações, por falta, por meio de poliedros retangulares nele contidos.

No Capítulo 4, **"O Volume do Cilindro"**, expomos precisamente a definição de Cilindro apoiado em um plano horizontal, com o objetivo de estabelecer uma fórmula ao cálculo do volume deste sólido.

Quanto ao Capítulo 5, "**Considerações Finais**", expomos alguns comentários a cerca dos resultados obtidos após a pesquisa e fazemos uma análise de como o tema dissertado neste trabalho é explorado nas escolas.

Finalizamos o Trabalho com as "**Referências Bibliográficas**" e a seção destinada aos "**Anexos**".

1.3 Caráter da pesquisa

No que compete à pesquisa, este Trabalho caracteriza-se pelo aspecto bibliográfico onde, por meio de algumas leituras, buscamos colocar os conceitos trabalhados em uma base firme, em comum relevância ao tema trabalhado, tudo isso aliado à coerência textual e à precisão matemática nos Teoremas demonstrados.

1.4 Público-alvo

Dada a relevância do tema proposto, este Trabalho destina-se, principalmente, a professores e alunos que desejem utilizá-lo como leitura complementar e, assim, adquirirem mais precisão quanto ao embasamento teórico do conteúdo trabalhado.

Capítulo 2

Noções Preliminares de Volume de um Sólido

A noção de volume está constantemente presente em nosso cotidiano nas mais diversas situações. À partir do momento em que colocamos cadeiras em uma sala de aula, por exemplo, temos a preocupação de saber o espaço ocupado por cada uma delas e a quantidade possível de ser colocada naquele ambiente, supondo que os lugares vão sendo ocupados até que o espaço fique totalmente preenchido.

Neste capítulo enfatizaremos ideias iniciais a respeito do volume de um sólido espacial, onde trataremos mais especificamente dos sólidos geométricos do tipo paralepípedo retângulo.

2.1 Ideia intuitiva de volume de um sólido

Volume, segundo o dicionário Aurélio, (ver [5] p. 822), é a "Medida do espaço ocupado por um sólido". Ao medir, por exemplo, a quantidade de água presente em um reservatório por meio de uma escala impressa em sua parede, estamos observando no mostrador o resultado de uma medição de volume.

Igualmente, ao considerarmos uma caixa d'água no formato de um bloco retangular, podemos realizar algumas medições, tais como: sua altura, seu comprimento, sua largura, mais ainda, medir o espaço ocupado por ela. Para esta última tarefa, estamos interessados em medir a grandeza volume através de um número e, para tal, devemos compará-la com outra de mesma espécie tomada como unidade. O resultado desta comparação será um número chamado a **medida do volume**.

Tradicionalmente elegemos como unidade de volume um cubo de aresta igual a uma unidade de comprimento, também chamado de cubo unitário, que, via definição, terá volume igual a 1. Assim, ao usar uma unidade de volume, podemos medir a porção do espaço ocupado por um sólido. De acordo com a correspondente unidade de medida da aresta do cubo, teremos paralelamente uma unidade de volume. Sempre que a unidade de medida da aresta for o metro (m), a unidade correspondente de volume do cubo considerado será o metro cúbico (m^3); Analogamente, se a aresta tiver como unidade de medida o decímetro (dm), a unidade de volume do cubo será o decímetro cúbico (dm^3) (ver [10] p.97).

Conquanto que queiramos calcular o volume de um determinado sólido, é suficiente descobrirmos o número que representa a quantidade de vezes que esse sólido contém o cubo unitário. Essa quantidade de vezes será, justamente, o volume do sólido considerado. Uma questão a se levantar é que nem todo sólido apresenta uma disposição espacial totalmente regular e, neste sentido, torna-se praticamente impossível descobrirmos o seu volume realizando tal procedimento quantitativo (ver [3] p.252).

2.2 Axiomas da Função Volume

No que segue, consideraremos P como o conjunto de todos os sólidos homeomorfos à esfera, ou seja, o conjunto de todos os sólidos onde é possível obtê-los após esticar e repuxar, sem cortar ou furar a esfera.

Definição 2.1 *Dizemos que dois sólidos S_0, $S_1 \in$ P são congruentes quando um deles pode ser obtido do outro através de translações, rotações, simetrias ou composições desses movimentos.*

Um dos objetivos deste trabalho é estabelecer uma relação $V : P \to \mathbb{R}_+$, entre sólidos e um número real positivo, que chamamos de volume. Para isto, fixaremos alguns axiomas:

(I) Existe uma função $V : P \to \mathbb{R}_+$ que associa a todo $S \in P$ um elemento $V(S) \in \mathbb{R}_+$, chamado o **volume do sólido** S.

(II) Se um sólido S é formado pela reunião de um número finito de sólidos $\{S_i\}_{i=1}^n \subset P$, dois a dois disjuntos ou possuem em comum pontos de suas cascas, então o volume de S é a soma dos volumes dos sólidos $S_1, \ldots, S_n$, isto é:

$$V(S) = V(\bigcup_{i=1}^{n} S_i) = \sum_{i=1}^{n} V(S_i).$$

(III) Se $S_1 \subset S_2$, com $S_1 \neq S_2$,

$$V(S_1) < V(S_2).$$

(IV) Se x, y, z constituem as medidas do comprimento, largura e altura de um paralelepípedo retângulo (x,y,z), veja Figura 2.1, então, seu volume será denotado por $V(x,y,z)$ e, assumimos que:

$$V(1,1,1) = 1.$$

2.3 Volume do Paralelepípedo Retângulo

Paralelepípedo Retângulo ou, como muitos preferem chamar, bloco retangular (ou simplesmente ortoedro), é um sólido delimitado por seis retângulos, cada um representando uma face do bloco. Essas faces constituem três pares, onde, em cada par, as faces são idênticas e paralelas entre si. Os lados dos retângulos são chamados de arestas do bloco e qualquer uma das faces pode funcionar como base do sólido.

Todo bloco retangular fica perfeitamente determinado quando conhecemos as medidas de três de suas arestas, que concorrem em um mesmo vértice: o comprimento, a largura e a altura, (ver [3] p.252), como podemos observar na figura seguinte:

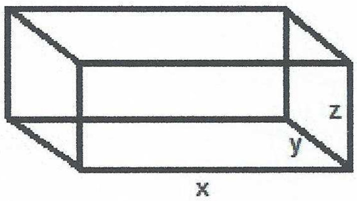

Figura 2.1: Bloco retangular de arestas medindo x, y e z.

Quando as três dimensões do bloco retangular são congruentes entre si, ou seja, quando as arestas têm todas o mesmo comprimento, temos um caso particular de paralelepípedo retângulo denominado **cubo**. Neste caso, as 6 faces do bloco são quadrados iguais, como podemos observar na Figura 2.2 a seguir:

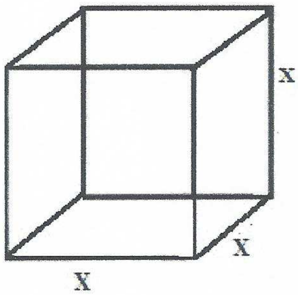

Figura 2.2: Cubo de aresta medindo x.

Verificaremos a seguir que o volume do cubo de aresta de comprimento x é igual a

x^3. Para tal, tomamos por referência o livro "Áreas e Volumes: Fundamentos da Matemática Elementar", do Professor Elon Lages (ver [8] p.35).

Teorema 2.1 *Se a medida da aresta de um cubo C é um número real positivo x, então o volume do cubo será* x^3.

Demonstração: A fim de demonstrar tal resultado, vamos considerar três casos:

1º caso: A medida x da aresta do cubo C é um número inteiro positivo, como mostra a Figura seguinte.

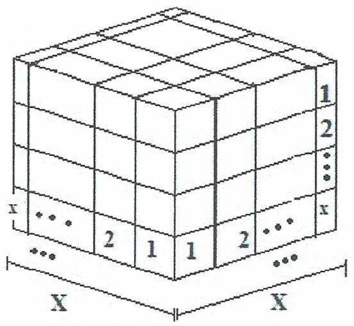

Figura 2.3: Cubo de aresta de comprimento igual a x.

Neste caso, podemos decompor o cubo considerado em x^3 cubos unitários justapostos. Dessa forma, o volume de C será x^3.

2º caso: A medida x da aresta do cubo C é um número racional, não inteiro.

Se a medida x da aresta de C for um número da forma $x = \frac{1}{k}$, com $k \in \mathbb{Z}_+{}^*$, tomemos um cubo unitário e dividamos cada uma de suas arestas em um mesmo número inteiro k de partes iguais (veja Figura 2.4). Cada aresta fica formada por k partes de tamanho $\frac{1}{k}$. Dessa forma,

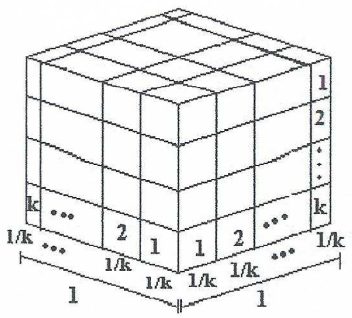

Figura 2.4: Aresta do cubo unitário dividida em um mesmo número k de partes iguais.

decompomos o cubo unitário em k^3 cubos justapostos, cada um com aresta $\frac{1}{k}$. Como, de acordo com o Axioma (IV) deste capítulo, assumimos que o volume do cubo unitário é 1, segue que o volume de cada cubo de aresta $x = \frac{1}{k}$ será igual a $\frac{1}{k^3}$, ou seja,

$$1 = V(1,1,1) = \sum_{i=1}^{k^3} V\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right) = k^3 \cdot V\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right).$$

Logo:

$$V\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k^3} = \left(\frac{1}{k}\right)^3 = x^3.$$

Consideremos o caso geral em que a medida x da aresta de C é um número da forma $x = \frac{m}{k}$, com $m,k \in \mathbb{Z}_+{}^*$. Neste caso, vamos dividir cada aresta de C em um mesmo número m de partes iguais, onde cada divisão tenha um tamanho $\frac{1}{k}$, como mostra a figura seguinte.

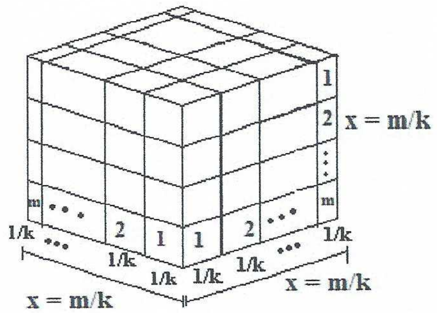

Figura 2.5: Cubo de aresta de comprimento $x = \dfrac{m}{k}$.

Dessa forma, C fica decomposto em m^3 cubos justapostos, todos de aresta $\frac{1}{k}$. Ora, cada cubo com aresta medindo $\frac{1}{k}$ tem por volume $\frac{1}{k^3}$, como visto anteriormente. Assim, temos m^3 cubos justapostos, cada um com volume $\dfrac{1}{k^3}$. Segue, pelo Axioma (II), que:

$$V(x,x,x) = V\left(\frac{m}{k},\frac{m}{k},\frac{m}{k}\right) = \underbrace{\frac{1}{k^3}+\frac{1}{k^3}+\frac{1}{k^3}+\frac{1}{k^3}+\ldots+\frac{1}{k^3}}_{m^3\ vezes} = \sum_{i=1}^{m^3}\frac{1}{k^3} = \frac{m^3}{k^3} = \left(\frac{m}{k}\right)^3 = x^3.$$

3º caso: A aresta do cubo C tem por medida um número irracional x.
Vamos utilizar um raciocínio indireto e mostrar que o volume do cubo de aresta x, irracional, ainda será dado por x^3. Inicialmente mostraremos que, para todo $a < x^3$, então o volume do cubo dado é tal que $a < V(x,x,x)$. Em seguida, mostraremos que, qualquer que seja b de tal forma que $b > x^3$, então $b > V(x,x,x)$. Concluiremos, à partir daí, que:

$$V(x,x,x) = x^3.$$

De fato, seja a um número de tal modo que $a < x^3$ e consideremos um número racional r, próximo de x, tal que $\sqrt{x} < r < x$, ou seja,

$$a < r^3 < x^3. \tag{2.1}$$

Desse modo, o cubo C de aresta igual a x contém um cubo (r, r, r) cuja aresta tem por medida o número racional r. Ora, mas sendo r um número racional, vimos anteriormente que $V(r, r, r) = r^3$. Segue, do Axioma (III), que:

$$V(r, r, r) < V(x, x, x). \tag{2.2}$$

De (2.1) e (2.2) concluímos que:

$$a < r^3 < V(x, x, x).$$

De modo análogo ao feito anteriormente, também podemos mostrar que, se $x^3 < b$, então $V(x, x, x) < b$. Assim, concluímos que, se um cubo C tem aresta medindo um número irracional x, seu volume será dado por x^3.

$\square$

Agora, caminharemos com o intuito de mostrar o caso mais geral, isto é, dado um paralelepípedo retangular (x, y, z), com $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, queremos mostrar que:

$$V(x, y, z) = x \cdot y \cdot z.$$

Para isto, precisamos do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, Teorema 2.2 (ver [2] p.95).

Teorema 2.2 *Seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ uma função com as seguintes propriedades:*

(i) f é uma função crescente, isto é, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

(ii) $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}_+$.

Então:

$$f(c \cdot x) = c \cdot f(x),$$

para todo $c \in \mathbb{R}_+$ e todo $x \in \mathbb{R}_+$.

Demonstração: Vamos inicialmente mostrar que o Teorema é válido para qualquer número racional. De fato, de (ii), dado um número racional $r = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}_+$, vale

$$n \cdot f(r \cdot x) = f(n \cdot r \cdot x) = f(m \cdot x) = m \cdot f(x)$$

e, assim,

$$f(r \cdot x) = \frac{m}{n} \cdot f(x) = r \cdot f(x). \tag{2.3}$$

Agora, por contradição, suponha que o Teorema seja falso para algum $c > 0$, irracional, isto é, que $f(c \cdot x) \neq c \cdot f(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}_+$. Dessa forma, devemos ter:

$$f(c \cdot x) < c \cdot f(x) \tag{2.4}$$

ou

$$f(c \cdot x) > c \cdot f(x). \tag{2.5}$$

Sem perda de generalidade, suponha que (2.4) seja verificada. Como $f(x) > 0$, dividindo ambos os membros dessa desigualdade (2.4) por $f(x)$, temos que:

$$\frac{f(c \cdot x)}{f(x)} < c.$$

Considere um número racional r verificando

$$\frac{f(c \cdot x)}{f(x)} < r < c. \tag{2.6}$$

Logo,

$$f(c \cdot x) < r \cdot f(x) < c \cdot f(x).$$

Donde, segue-se de (2.3), que

$$f(c \cdot x) < f(r \cdot x) < c \cdot f(x).$$

No entanto, uma vez que $r < c$, temos de (i) que

$$f(r \cdot x) < f(c \cdot x)$$

contradizendo (2.6)

□

Teorema 2.3 *Sendo a, b e c as dimensões de um paralelepípedo retângulo, temos:*

$$V(a,b,c) = a \cdot b \cdot c.$$

Demonstração: Sabendo que $V(a, b, c)$ representa o volume de um paralelepípedo retângulo S, com arestas medindo a, b e c, afirmamos que $V(a,b,c)$ é uma função crescente. De fato, sejam S e S' blocos retangulares cujas arestas medem a, b, c e a', b, c, respectivamente, com $a < a'$. Logo, $S \subset S'$, implicando, pelo Axioma (III) deste Capítulo, que

$$V(a,b,c) < V(a',b,c).$$

De forma inteiramente análoga, mostramos que V é uma função crescente tanto em relação à largura b quanto à altura c do paralelepípedo considerado.

Agora, observe que, para todo $n \in \mathbb{N}$, um bloco retangular $(n.a,b,c)$ pode ser decomposto em n blocos retangulares, todos com arestas a,b e c. Dessa forma,

$$V(n \cdot a,b,c) = n \cdot V(a,b,c).$$

Analogamente, para todo $n \in \mathbb{N}$, qualquer bloco retangular $(a,n \cdot b,c)$, $(a,b,n \cdot c)$ pode ser decomposto em n blocos retangulares, todos com arestas a,b e c. Daí, segue que:

$$V(a,n \cdot b,c) = n \cdot V(a,b,c) \quad e \quad V(a,b,n \cdot c) = n \cdot V(a,b,c).$$

Utilizando o Teorema Fundamental da Proporcionalidade (ver Teorema 2.2), temos:

$$\begin{aligned} V(a,b,c) = V(a \cdot 1,b,c) &= a \cdot V(1,b,c) = a \cdot V(1,b \cdot 1,c) \\ &= a \cdot b \cdot V(1,1,c) = a \cdot b \cdot V(1,1,c \cdot 1) \\ &= a \cdot b \cdot c \cdot V(1,1,1). \end{aligned}$$

Segue, do Axioma (IV) deste Capítulo, que

$$V(a,b,c) = a \cdot b \cdot c.$$

Em qualquer caso, sendo a, b e c as dimensões de um paralelepípedo retângulo, o volume deste sólido será dado pelo produto destas dimensões.

$\square$

Capítulo 3

Definição Geral do Volume de um Sólido

Até o momento não encontramos dificuldades em expressar o volume de um bloco retangular qualquer, ainda que, pelo menos uma de suas arestas, tenha por medida um número irracional. Conforme estudamos, é possível obter o volume de cada bloco através do produto das medidas de suas arestas. Todavia, em nosso cotidiano, não lidamos apenas com sólidos de natureza relativamente simples ao cálculo do volume. Por isso, necessitamos de uma formulação mais geral, de uma definição mais precisa da ideia de volume. Aprender a aproximar o volume de um sólido qualquer por meio de poliedros retangulares nele contidos é a finalidade deste capítulo.

3.1 Volume de sólido qualquer.

Como dito no Capítulo 2, consideraremos P o conjunto de sólidos homeomorfos à esfera. Para obtermos os volumes destes sólidos, utilizaremos a técnica de aproximação por falta. Antes, porém, estabeleceremos a seguinte definição:

Definição 3.1 *Chamaremos de Poliedro Retangular ao sólido formado pela união de um número finito de blocos retangulares justapostos.*

A fim de calcularmos o volume de um poliedro retangular, é suficiente, de acordo com o Axioma(II), Capítulo 2, somarmos os volumes correspondentes a cada bloco retangular nele contido.

Seja S um sólido pertencente a P. Tendo em vista a tarefa de calcular o volume de S, $Vol(S)$, tomaremos como referência o volume de poliedros retangulares, R, contidos em S (isto é, $R \subset S$). Uma vez que R é a união de um número finito de blocos retangulares, segue, de acordo com o Axioma(II), Capítulo 2, que o volume de R está bem definido. Por outro lado, o mesmo não ocorre ao sólido S, isto é, dado nosso estudo até o momento, não dispomos de uma fundamentação suficiente para afirmarmos como calcular o valor exato do número $Vol(S)$. Todavia, como cada poliedro retangular R está contido em S, sabemos que o número $Vol(S)$ que estamos procurando deve satisfazer a condição

$$Vol(R) \leq Vol(S),$$

de acordo com o Axioma (III), Capítulo 2. Isto significa que os números que representam os volumes dos poliedros retangulares R contidos em S nos fornecem aproximações inferiores para o volume do sólido S. Ao introduzirmos, cautelosamente, mais blocos retangulares ao sólido R, tendo o cuidado de sempre permanecer interiormente a S, obteremos um novo poliedro retangular R', $R' \leq S$, maior que R, de tal maneira que $Vol(R')$ será uma aproximação melhor para o $Vol(S)$ e, mais ainda, $Vol(R') < Vol(S)$, de acordo com o Axioma (III), Capítulo 2. Quanto mais blocos formos inserindo a R, obteremos aproximações melhores para $Vol(S)$. Observe que,

$$Vol(R) \leq Vol(R') \leq Vol(S),$$

implica dizer que $Vol(R)$ e $Vol(R')$ são aproximações por falta para $Vol(S)$, porém $Vol(R')$ é uma aproximação ainda melhor (ver [4] p.82).

Com esta tarefa de introduzirmos cada vez mais blocos retangulares ao poliedro R, estamos interessados em obter aproximações para o volume do sólido $S \in P$, com tanta precisão quanto se queira, por meio de volumes de poliedros retangulares contidos em S. Em outras palavras, o $Vol(S)$ que procuramos será um número real cujas aproximações por falta são os volumes dos poliedros retangulares contidos em S.

Isto significa que, dado um sólido $S \in P$, temos:

(a) Qualquer que seja o poliedro retangular R, com $R \subset S$, tem-se

$$Vol(R) \leq Vol(S),$$

de acordo com o Axioma (III), Capítulo 2.

(b) Qualquer que seja o número real r, com $r < Vol(S)$, sempre é possível encontrar um poliedro retangular $Q \subset S$ com

$$r < Vol(Q) \leq Vol(S).$$

Para esclarecer melhor, consideremos um conjunto X formado por números reais positivos e que representam os volumes dos poliedros retangulares $Vol(R)$ contidos em um sólido S. Esses números são obtidos sempre que acrescentarmos a R novos blocos retangulares, de modo que, cada poliedro R' formado esteja contido em S. Desta forma, X é limitado, pois,

$$0 < Vol(R) \leq Vol(S),$$

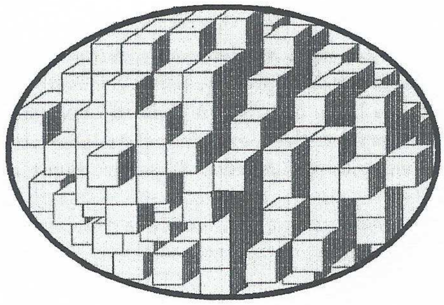

Figura 3.1: Poliedro retangular inserido em um sólido. Fonte: Lima [9].

de acordo com o Axioma (III), Capítulo 2. Mais ainda, $Vol(S)$ é uma cota superior de X (ver Apêndice A).

Por outro lado, segue do item (b) que $Vol(S)$ é a menor das cotas superiores de X, chamada de supremo, ou seja,

$$Vol(S) = \sup X = \sup\{Vol(R); R \subset S \text{ e } R \textbf{ é um poliedro retangular.}\}$$

Neste momento, a função $V : P \to \mathbb{R}_+$ fica bem definida, verificando os Axiomas (I-IV), qualquer que seja o sólido $S \in P$ considerado.

Capítulo 4

O Volume do Cilindro

Este capítulo é destinado ao estudo destes sólidos, onde definiremos e apresentaremos uma fórmula ao cálculo de seu volume.

4.1 Cilindros Retos e Prismas

Sólidos do tipo cilindro constituem o que chamamos de corpos redondos. Para um melhor entendimento, vejamos a seguir uma definição criteriosa de cilindro (ver [8] p.52).

Definição 4.1 *Seja F uma figura plana* [1] *contida em um plano horizontal π e considere um segmento de reta g não paralelo a este plano. A reunião de todos os segmentos de reta que são paralelos e congruentes a g e que foram levantados por cada ponto de F é chamado **Cilindro C, de base F e geratriz g**.*

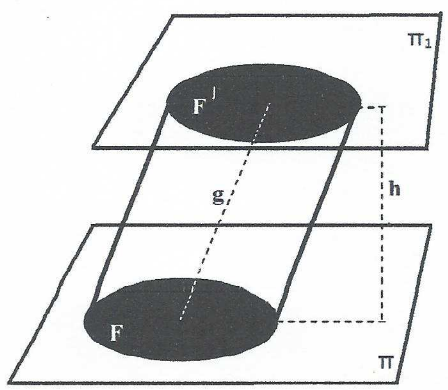

Figura 4.1: Cilindro de base F e geratriz g.

[1] A figura plana pode ser vista como uma região plana fechada em duas dimensões e para que exista é preciso, no mínimo, três lados.

Note que a figura plana obtida por uma seção paralela ao plano π é congruente a F (ver [3] p.264). Desta forma, tomando uma seção na extremidade da geratriz, obtemos uma figura F', congruente a F, e contida em um plano π_1, paralelo a π (veja Figura 4.1).

Fixado um ponto P de F', o comprimento da perpendicular baixada de P ao plano da base que contém F será denominado **altura do cilindro** C, que corresponde à distância h entre os planos das bases (π e π_1) (veja Figura 4.1).

Existe um caso especial de cilindro que é aquele em que consideramos a base um polígono. Neste caso, o cilindro é chamado de **prisma.**

Definição 4.2 *Prisma é o nome dado ao cilindro em que sua base é um polígono.*

Observe que o paralelepípedo retângulo é um caso particular de prisma. Quando a geratriz é perpendicular ao plano da base, denotaremos este cilindro de **cilindro reto**. Caso a base seja um polígono, denotaremos de **prisma reto.**

Teorema 4.1 *O volume de um prisma reto de base triangular ABC é o produto da área da base pela altura.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo cujo lado BC mede $\mid BC \mid = a$ e considere h como a medida da distância do vértice A à reta BC. Seja A' a área deste triângulo, isto é, $A' = A(ABC)$, (veja Figura 4.2). Fixe D como o extremo de um segmento com origem em A, paralelo a BC, tal que $\mid BC \mid = \mid AD \mid$.

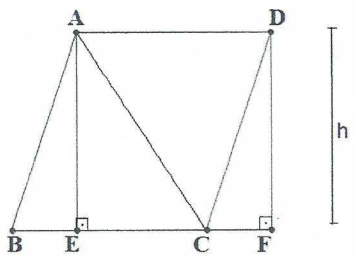

Figura 4.2: Área de um triângulo ABC, que é base de um prisma.

Neste sentido, pelo caso LAL, o triângulo ABC é congruente ao triângulo CDA. Sejam ainda E e F os pés das perpendiculares baixadas de A e D à reta BC e, sem perda de generalidade, que $E \in BC$. Pelo caso CH (cateto-hipotenusa), os triângulos ABE e DCF são congruentes, com $BAE \equiv CDF$. Consequentemente,

$$\mid BE \mid = \mid CF \mid \quad e \quad A(BAE) = A(CDF).$$

Logo:

$$A(BCDA) = A(BAE) + A(CEAD) = A(CDF) + A(CEAD) = A(EFDA).$$

Por outro lado, $EFDA$ é um retângulo de altura h e base EF, tal que:

$$|EF|=|EC|+|CF|=|EC|+|BE|=|BC|=a.$$

Portanto, $A(BCDA)=A(EFDA)=ah.$

Agora, como A' representa a área do triângulo ABC, segue que a área do paralelogramo $ABCD$ equivale a $2\cdot A'$, visto que os triângulos ABC e ACD são congruentes. Dessa forma:

$$2\cdot A(ABC)=2\cdot A'=a\cdot h, \text{ implicando } \quad A'=\frac{a\cdot h}{2}=\frac{A(EFDA)}{2}.$$

Agora voltemos ao prisma reto de base triangular ABC. Este prisma reto pode ser visto como a união de dois prismas retos de bases ABE e AEC. Como visto anteriormente, $ABE\equiv DCF$. Assim, "coloquemos" o prisma ABE na posição DCF. Em seguida, como $ABC\equiv CDA$, podemos colocar o mesmo prisma reto de base ABC na posição CDA. Deste modo, à partir de dois prismas retos de base ABC, formamos um paralelepípedo retangular de base $EFAD$, cujo volume é $A(EFAD)\cdot H$, onde H é a altura do prisma reto. Daí, o volume do prisma reto de base ABC é

$$\frac{A(EFAD)\cdot H}{2}=A'\cdot H.$$

□

Teorema 4.2 *O volume de um prisma reto P_n, cuja base é um polígono regular de n lados, é o produto da área A_n da base pela altura H do prisma.*

Demonstração: Basta observar que o prisma reto P_n, cuja base é um polígono regular R_n de n lados, pode ser visto como a união de n prismas retos P_t, todos congruentes, de base triangular. Segue do Teorema 4.1 que o volume de cada prisma P_t é o produto da área de sua respectiva base pela altura. Considerando T como a área da base de cada um desses prismas e H a respectiva altura, temos, de acordo com o Axioma (II), Capítulo 2, que o volume de P_n é:

$$V(P_n)=V(\bigcup_{i=1}^{n}P_t)=\sum_{i=1}^{n}V(P_t)=\sum_{i=1}^{n}T\cdot H=(n\cdot T)\cdot H.$$

Observando que $n\cdot T$ determina a área de R_n, segue que

$$V(P_n)=A_n\cdot H,$$

finalizando, assim, a demonstração.

□

Verificaremos adiante que o volume do cilindro reto também é dado pelo produto da área da base pela altura. Antes, porém, vejamos dois Lemas. Para o Lema 4.3 tomamos por referência o livro de Geometria Euclidiana Plana (ver [1] p.179).

Lema 4.3 *Seja R_n um polígono regular de n lados, inscrito em uma circunferência de centro O e raio r. A área de R_n é dada por:*

$$A(R_n) = \frac{1}{2} n r^2 sen \left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Demonstração: Considere $A_1, A_2, \ldots, A_n$ os vértices do polígono regular R_n. Note que $A_i A_{i+1} O$, com $1 \leq i \leq n$ e $A_{i+1} = A_1$, determina um triângulo isósceles. Além disso,

$$A_i O A_{i+1} \equiv A_j O A_{j+1}, \quad \forall\, i,\, j \in \{1, \ldots\, n\}.$$

Uma vez que R_n é um polígono regular, podemos definir:

$$\alpha := \widehat{A_i O A_{i+1}} = \frac{2\pi}{n}, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Se h é altura relativa do triângulo isósceles $A_i O A_{i+1}$, então

$$h = r \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{4.1}$$

Por outro lado, desde que o pé da altura, a mediana, e a bissetriz em relação à base $A_i A_{i+1}$ são iguais (pois o triângulo $A_i O A_{i+1}$ é isósceles de base $A_i A_{i+1}$), temos

$$\frac{A_i A_{i+1}}{2} = r \text{ sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{4.2}$$

De (4.1) e (4.2) segue que:

$$A\left(A_i O A_{i+1}\right) = r^2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Lembrando que

$$\text{sen}\,(\alpha) = \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \text{sen}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} + \text{sen}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 2 \cdot \text{sen}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2},$$

temos que

$$A(A_i O A_{i+1}) = \frac{r^2}{2} sen(\alpha).$$

Tendo em vista que R_n é formado por n triângulos $A_i O A_{i+1}$, todos congruentes, temos:

$$\begin{aligned} A\left(R_n\right) &= \sum_{i=1}^{n} A(A_i O A_{i+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{r^2}{2} sen\,\alpha \\ &= \frac{n \cdot r^2}{2} sen\,\alpha, \end{aligned}$$

ou seja,

$$A(R_n) = \frac{1}{2} n\, r^2\, sen \left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

$\square$

Lema 4.4 *Para $x > 0$, mas bem próximo de zero, temos $\dfrac{sen\,x}{x}$ bem próximo de 1, mas menor que 1, ou seja,*

$$\frac{sen\,x}{x} \approx 1 \quad e \quad \frac{sen\,x}{x} < 1,$$

para $x \approx 0$ e $x > 0$

Para a Demonstração desse Lema, tomamos por base o livro "Cálculo A - Funções, limite, derivação e integração,"(ver [6] p.99).

Teorema 4.5 *O volume de um cilindro reto C, de altura H e base circular com centro O e raio r, é dado pelo produto da área da base pela altura, isto é:*

$$V(C) = \pi r^2 H.$$

Demonstração: Seja P_n um prisma reto, cuja base é um polígono regular de n lados, inscrito na base de C. Considere X o conjunto de todos os poliedros retangulares Q contidos em C. Vimos anteriormente que

$$V(C) = \sup_{Q \in X} V(Q).$$

Mostraremos agora que

$$V(C) = \sup_{n \in \mathbb{N}} V(P_n).$$

Para isto, assumimos que, dado $Q \in X$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $Q \subset P_{n_0} \subset C$, implicando do Axioma (III), Capítulo 2, que

$$V(Q) \leq V(P_{n_0}) \leq V(C). \tag{4.3}$$

Primeiramente, desde que $P_n \in X$, o supremo do conjunto $\{V(Q);\ Q \in X\}$ é uma cota superior para o conjunto $\{V(P_n);\ n \in \mathbb{N}\}$. Deste fato, como o supremo é a menor das cotas superiores (ver Apêndice A),

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} V(P_n) \leq \sup_{Q \in X} V(Q). \tag{4.4}$$

Agora, verificaremos que,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} V(P_n) \geq \sup_{Q \in X} V(Q). \tag{4.5}$$

Com efeito, suponha por contradição que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} V(P_n) < \sup_{Q \in X} V(Q).$$

Assim, existe $Q_0 \in X$ verificando:

$$V(P_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} V(P_n) < V(Q_0), \forall n \in \mathbb{N},$$

o que é uma contradição com (4.3). De (4.4) e (4.5), temos

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} V(P_n) = \sup_{Q\in X} V(Q) = V(C).$$

A partir desta igualdade seremos capazes de mostrar que

$$V(C) = \pi r^2 H,$$

onde r é o raio da base circular de C. Lembrando, P_n é um prisma reto cuja base é um polígono regular de n lados, inscrito na circunferência de centro O e raio r, que determina a base de C. Segue do Teorema 4.2 que o volume de P_n é dado por:

$$V(P_n) = \frac{1}{2} H\, r^2\, n\, sen\left(\frac{2\pi}{n}\right). \tag{4.6}$$

Uma vez que $\dfrac{2\pi}{n} \approx 0$, para n suficientemente grande, temos pelo Lema 4.4 que:

$$\frac{sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \approx 1 \quad e \quad \frac{sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)} < 1. \tag{4.7}$$

De (4.6) e (4.7), vem:

$$V(P_n) = \pi H r^2 \left(\frac{sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)}\right) \approx \pi h r^2 \quad e \quad V(P_n) < \pi H r^2 \tag{4.8}$$

para n suficientemente grande.

Afirmamos que $\pi H r^2$ é a menor das cotas superiores para o conjunto $\{V(P_n); n \in \mathbb{N}\}$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, por (4.8), tal que

$$\pi H r^2 - V(P_{n_0}) < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\pi H r^2 - \varepsilon < V(P_{n_0}).$$

Logo,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} V(P_n) = \pi H r^2,$$

consequetemente, o volume do cilindro C é dado por

$$V(C) = \pi H r^2, 0 < \pi H r^2 - V(P_n) < \varepsilon$$

□

Capítulo 5

Considerações Finais

Com este trabalho buscamos enteder o conceito de volume utilizando a técnica de aproximação por falta. Neste sentido, nos restringimos ao cálculo do volume dos sólidos do tipo paralelepípedos retangulares, cilindro reto e prisma reto, a fim de motivar a definição aqui estabelecida. Acreditamos que a técnica de aproximação por falta é a mais concreta para se entender bem o conceito de volume. Deixamos ao leitor como desafio o cálculo do volume do cone e da esfera, para que o mesmo compreenda a dificuldade de tal cálculo.

É importante colocar que, a partir do Princípio de Cavalieri [1], estes cálculos são simples, rápido, porém, se perde o entendimento teórico, como foi estabelecido aqui do que seria o volume. Por este motivo, não utilizamos o Princípio de Cavalieri, mas, deixamos para o leitor sua aplicabilidade para determinar volume de cilindros, prismas e cones inclinados e esfera.

A partir deste estudo foi possível aplicar a teoria de supremo de um conjunto, visto no curso de análise real dado no curso superior. Este fato vem motivar professores do Ensino Básico, e até mesmo alunos de análise real, da importância de tal ferramenta matemática. Dessa forma, este texto tem como público alvo, também, alunos do Ensino Médio, uma vez que todos os resultados aqui são devidamente provados e expostos de forma clara. Sugerimos, caso seja necessário, uma leitura no Apêndice A sobre supremo de um conjunto, ou ainda no livro do Professor Elon Lages (ver [6] p.16).

À partir do momento em que esse conteúdo for explorado de forma mais objetiva nas Escolas, com contextualizações e realizado um trabalho interdisciplinar, supomos que teremos um público mais fiel ao estudo da matemática, que interaja e perceba mais aplicações

[1] Princípio de Cavalieri: Tomemos dois sólidos A e B apoiados em um plano horizontal π. Cada plano horizontal α, paralelo ao plano da base, π, determina nos dois sólidos seções planas que indicaremos por $\pi \cap A$ e $\pi \cap B$ e que constituem as intersecções do plano α com cada um dos sólidos A e B. O Princípio de Cavalieri nos assegura que, se para cada plano horizontal α que secciona os sólidos A e B forem produzidas seções do tipo $\pi \cap A$ e $\pi \cap B$ de mesma área, então os sólidos dados apresentarão o mesmo volume.

desta disciplina no seu dia-a-dia. Dessa maneira, o estudo a cerca de volume de sólidos não será limitado apenas ao professor expor fórmulas e resolver uma série de exercícios, muitas vezes enfadonhos e bastante repetitivos. O conteúdo será exposto de forma mais precisa, fundamentado em definições e se utilizando materiais que, via regra, auxiliarão demasiadamente na consolidação do conhecimento.

Por fim, acreditamos que, pelo fato de convivermos com muitos objetos tridimensionais diariamente, seria mais um motivo de explorar esse cnteúdo em sala de aula, tornando as aulas mais estimulantes e possibilitando uma melhor interação no conjunto ensino-aprendizagem. Essa aplicabilidade diversifica o estudo, permitindo ao discente vislumbrar a prática dessa disciplina sob uma ótica mais acessível em situações corriqueiras vividas em seu cotidiano.

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*, SBM, Coleção do Professor de Matemática, 10. ed., Rio de Janeiro, (2006).

[2] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César; LIMA, Elon Lages. *A Matemática do Ensino Médio*, volume 1. SBM, Coleção do Professor de Matemática, 8. ed., Rio de Janeiro, (2005).

[3] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César; LIMA, Elon Lages. *A Matemática do Ensino Médio*, volume 2. SBM, Coleção do Professor de Matemática, 6. ed., Rio de Janeiro, (2006).

[4] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César; LIMA, Elon Lages. *Temas e Problemas*, SBM, Coleção do Professor de Matemática, 3. ed., Rio de Janeiro, (2010).

[5] FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. *Míni Aurélio: O Dicionário da Língua Portuguesa*, 6. ed., Curitiba, Positivo, (2006).

[6] FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. *Cálculo A: Funções, limite, derivação e integração*, 6. ed., Florianópolis, Pearson , (2006).

[7] LIMA, Elon Lages. *Análise Real: Funções de Uma Variável*, volume 1. IMPA, Coleção Matemática Universitária, 8. ed., Rio de Janeiro, (2006).

[8] LIMA, Elon Lages. *Áreas e Volumes: Fundamentos da Matemática Elementar*, Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, (1973)

[9] LIMA, Elon Lages. *Medida e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança*, SBM, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, (1991).

[10] RIBEIRO, Jackson. *Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia*, Ensino Médio, Volume 3. São Paulo, Scipione (2011).

Apêndice A

Supremo e ínfimo de um conjunto

De acordo com Elon, (ver [7] p.16), um subconjunto X do conjunto $\mathbb{R}$ será dito **limitado inferiormente** se existir um elemento $a \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in X$, tivermos $x \geq a$. Neste caso, dizemos que a é uma **cota inferior** do conjunto X. De forma análoga, dizemos que o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ será dito **limitado superiomente** se existir $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Em outras palavras, existe um elemento b pertencente ao conjunto $\mathbb{R}$ que é maior do que ou igual a todos os elementos do conjunto X. Afirmamos, neste caso, que $b \in \mathbb{R}$ é **cota superior** do conjunto X. Um conjunto quando limitado superiormente e inferiormente será dito, simplesmente, **limitado**.

Observemos que um conjunto não tem, necessariamente, uma única cota superior nem uma única inferior. Se o elemento a, por exemplo, é uma cota inferior para o conjunto X, todos os elementos menores que a também serão cotas inferiores. Além disso, se o elemento a é uma cota inferior de X e, mais ainda, é a maior de todas as cotas inferiores, diremos que a é o **ínfimo** do conjunto X e representamos $a = \inf X$. Isto significa que:

$\checkmark$ Qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, temos $a \leq x$.

$\checkmark\checkmark$ Caso exista um elemento c tal que $c \leq x$, para todo $x \in X$, ainda assim, $c \leq a$.

A condição ($\checkmark\checkmark$) pode ser reescrita como segue: se $a < c$, então existe $x \in X$ de tal forma que $x < c$, isto é, nenhum elemento maior que a pode ser considerado cota inferior do conjunto X. Em outras palavras: Para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $x < a + \varepsilon$.

De forma totalmente análoga, seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente e b uma cota superior para este conjunto. É fato que todos os elementos maiores que b são, também, cotas superiores de X. Todavia, se dentre as cotas superiores, b for a maior de todas, diremos que b é o **supremo** do conjunto X e indicaremos por $b = \sup X$. Isto equivale a afirmar que:

1– Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $x \leq b$.

2– Se existir algum elemento c tal que $x \leq c$, para todo $x \in X$, ainda assim, $b \leq c$.

A condição (2) pode ser reescrita da seguinte forma: se $c < b$, existe $x \in X$ de tal forma que $c < x$. Isto significa que nenhum número menor que b pode ser cota superior do conjunto X. De forma equivalente, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ de tal forma que $b - \varepsilon < x$.