



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Wesley Balbino Barros

A Dinâmica Inflacionária no Universo Rainbow

Campina Grande, Paraíba, Brasil

8 de outubro de 2021

Wesley Balbino Barros

A Dinâmica Inflacionária no Universo Rainbow

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Professor Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos

Coorientador: Professor Dr. Eugênio Bastos Maciel

Campina Grande, Paraíba, Brasil

8 de outubro de 2021

B277d Barros, Wesley Balbino.
A dinâmica inflacionária no universo Rainbow / Wesley Balbino
Barros. – Campina Grande, 2021.
51 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.

“Orientação: Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos, Prof.
Dr. Eugênio Bastos Maciel”.

Referências.

1. Cosmologia. 2. Gravitação. 3. Universo Rainbow. 4. Gravidade.
I. Passos, Eduardo Marcos Rodrigues dos. II. Maciel, Eugênio Bastos.
III. Título.

CDU 524.8(043)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
POS-GRADUACAO EM FISICA
Rua Aprigio Veloso, 882, - Bairro Universitario, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

FOLHA DE ASSINATURA PARA TESES E DISSERTAÇÕES

WESLEY BALBINO BARROS

Cosmologia Inflacionária no Universo Rainbow

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 31/08/2021

Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
Presidente da Comissão e Orientador

Eugênio Bastos Maciel
Coorientador

Carlos Heitor Gomes Bessa
Examinador Interno

Herondy Francisco Santana Mota
Examinador Externo



Documento assinado eletronicamente por **Carlos Heitor Gomes Bessa, Usuário Externo**, em 31/08/2021, às 16:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **EDUARDO MARCOS RODRIGUES DOS PASSOS, PROFESSOR 3 GRAU**, em 31/08/2021, às 16:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Eugênio Bastos Maciel, Usuário Externo**, em 31/08/2021, às 18:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufcg.edu.br/autenticidade>, informando o código verificador **1727162** e o código CRC **92CADAÉ9**.

Aos meus pais, Lucio e Ermita. Sua grande força foi a mola propulsora que permitiu o meu avanço, mesmo durante os dias mais nublados.

Agradecimentos

- A Deus que em sua eterna plenitude, me capacitou e fortaleceu ao longo da vida.
- Ao Prof. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos, pela orientação, sugestão, estímulo e competência com que conduziu este trabalho.
- Ao Prof. Eugênio Bastos Maciel que foi o coorientador, pela imensa paciência que demonstrou durante a fase de preparação desta dissertação.
- A todos os professores desta Unidade Acadêmica que contribuíram com a minha formação.
- A minha esposa, Ligia Barros, por todo amor, apoio e principalmente por ter compreendido minha ausência quando me dedicava aos estudos.
- Aos meus familiares pelo apoio, confiança e incentivo.
- Aos meus amigos que sempre me incentivaram, em especial a Alécio Soares, Flávio Fidelis e Jean Spinelly. Poder contar com a boa vontade e o conhecimento destas pessoas foi essencial para o meu êxito.
- Aos amigos e companheiros de estudo ao longo de toda graduação e mestrado; Wellington Benevenuto e Emerson Eduardo. Nossas discussões e debates foram fundamentais para meu desenvolvimento acadêmico e profissional.
- A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

*"Não é a morte que me importa, porque ela é um fato.
O que me importa é o que eu faço da minha vida,
enquanto a minha morte não acontece, para que essa
vida não seja banal, superficial, fútil e pequena."
(Mário Sérgio Cortella)*

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma breve introdução ao Modelo Cosmológico Padrão (MCP). Este modelo fornece a melhor explicação para a formação de estruturas em grande escala, bem como a dinâmica cosmológica observada, no entanto, ele não nos traz informações sobre a natureza da matéria escura e energia escura. Assim, a descrição e compreensão destas quantidades surgem como um dos grandes desafios para a Cosmologia. Assumimos o cenário atual da Cosmologia, que através das descobertas de Hubble e outras observações, considera um universo em expansão acelerada. Deduzimos as equações de Friedmann, que são fundamentais para modelagens do universo. Tratamos do modelo cosmológico que envolve o campo escalar ínflaton que depende apenas do tempo $\phi(t)$, que permite reproduzir uma fase de expansão cósmica acelerada e, portanto, se apresenta como uma alternativa promissora no estudo da inflação cósmica e da energia escura. Este trabalho investigou um modelo dinâmico, onde a gravidade rainbow surge como um contexto alternativo capaz de atender as necessidades do paradigma da inflação. Ele modifica alguns aspectos da Relatividade Geral, introduzindo as funções rainbow que dependem do fator red shift z . Derivamos as equações de Friedmann modificadas. Por fim, devemos considerar um cenário cosmológico com um campo de ínflaton sobre o efeito das funções rainbow que constitui um campo de fundo em termos do fator redshift.

Palavras-chave: Cosmologia. Campo de Ínflaton. Gravidade Rainbow.

Abstract

In this work we present a brief introduction to the Standard Cosmological Model (MCP). This model provides the best current explanation for the formation of structures in large scale, as well as observed cosmological dynamics, however, it does not give us information about the nature of dark matter and dark energy. So the description and Understanding these quantities emerges as one of the great challenges for Cosmology. We assume the current scenario of Cosmology, which through Hubble's discoveries and other observations, considers a universe in accelerated expansion. We deduce Friedmann's equations, which are fundamental for modeling the universe. We deal with the cosmological model that involves the scalar inflaton field that depends only on time $\phi(t)$, which allows the reproduction of an accelerated cosmic expansion phase and, therefore, presents itself as a promising alternative in the study of cosmic inflation and dark energy. This work investigated a dynamic model, where rainbow gravity appears as an alternative context capable of meeting the needs of the inflation paradigm. It modifies some aspects of General Relativity by introducing rainbow functions that depend on the red shift z factor. We derive the modified Friedmann equations. Finally, we must consider a cosmological scenario with an inflaton field on the effect of the rainbow functions which constitutes a background field in terms of the redshift factor.

Keywords: Cosmology. Inflaton Field . Rainbow Gravity.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	COSMOLOGIA RELATIVÍSTICA	15
2.1	Princípios Básicos da Cosmologia Padrão	15
2.1.1	Princípio Cosmológico	15
2.1.2	Postulado de Weyl	16
2.1.3	Relatividade Geral	16
2.2	Universo de Friedmann-Robertson-Walker	19
2.2.1	A métrica FRW	19
2.2.2	Equações de Friedmann	21
3	COSMOLOGIA INFLACIONÁRIA	25
3.1	Inflação guiada por um campo escalar	27
4	COSMOLOGIA INFLACIONÁRIA NO UNIVERSO RAINBOW	33
4.1	Métrica de Friedmann-Robertson-Walker no universo Rainbow	35
4.1.1	Índice de refração	36
4.2	Setor Gravitacional	38
4.3	Setor do Campo de Inflaton	39
4.3.1	Equação de Movimento	39
4.3.2	Tensor Energia-Momento para o inflaton	40
4.4	Parâmetros Cosmológicos	41
4.4.1	Equação de estado	41
4.4.2	O número de e-folds	43
4.4.3	Espectro de Potência	44
5	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS	47
	REFERÊNCIAS	49

1 Introdução

A metodologia do modelo de inflação [1], [2], representa um paradigma hegemônico (o modelo padrão a ser seguido) para a descrição do universo primordial nas últimas décadas. Neste paradigma inflacionário, o fator de escala $a(t)$ do universo, sofre um estágio de expansão exponencial em um curto intervalo de tempo. Isto conduz a um universo plano o suficiente para justificar o achatamento do universo (desde que o parâmetro de curvatura, tenha o comportamento, $|\Omega_k| \propto a^{-2}$). Por outro lado, isso revela que as escalas cosmológicas observadas atualmente, estão inseridas na escala de Hubble, o que explica o problema do horizonte. Além disso, as perturbações escalares cosmológicas podem ser suplementadas por flutuações quânticas primordiais que são ampliadas para fora do horizonte (ver [3] para uma melhor revisão). O espectro de potência escalar é previsto para ser adiabático, Gaussiano, e de certa forma, quase invariante de escala. Isto está consistente com as observações astronômicas da anisotropia da radiação cósmica de fundo e da formação de estruturas de grandes escalas. Embora o modelo de inflação se ajuste bem aos dados observacionais, ainda apresenta vários problemas significativos, tais como o ajuste fino do regime de rolagem lenta, as condições iniciais [4], etc. Além disso, necessita de um campo ínflaton (uma função dependente do tempo) para conduzir a expansão exponencial do universo primordial. Até o momento, as observações astronômicas ainda não detectaram tal campo escalar fundamental.

Neste contexto, é interessante estudar possíveis alternativas para compor o paradigma de inflação. Em um cenário alternativo, a exigência é que o universo observado esteja inserido no horizonte de partículas do universo primordial para explicar os problemas da cosmologia do big-bang. Neste trabalho de dissertação, estudamos gravidade rainbow como um cenário alternativo capaz de atender as necessidades do paradigma da inflação. O cenário da gravidade rainbow [5], aparece através de estudos fenomenológicos da gravidade quântica que deve desempenhar um significativo papel na descrição do universo primordial antes da formação da escala de Planck. Recentemente, este cenário tem sido utilizado para estudar comportamentos de universos primordiais [6]. A métrica do espaço-tempo sondada por uma partícula livre seria dependente da energia (ou do momento, de forma equivalente) da partícula no cenário da gravidade rainbow. Assim, a relação de dispersão pode ser modificada significativamente para uma dinâmica de partículas ultra relativística. Isto conduz a uma velocidade da luz efetiva. A modificação da velocidade da luz cosmológica foi proposta em [7], [8], e o universo observável foi assumido como sendo uma parte da estrutura causal, caso a velocidade da luz efetiva seja grande o suficiente no início do universo. Então o cenário da gravidade rainbow possui todos os ingredientes capazes de compreender os problemas do horizonte e achatamento do universo.

No cenário da gravidade rainbow, a métrica de FRW é modificada pelos efeitos das funções, $f(E)$ e $g(E)$, dependentes da energia tal que a evolução do universo seja determinada pelas equações de Friedmann modificadas. Outro ponto a se destacar, é que as funções rainbow podem estabelecer conexões diretas com operadores de altas ordens derivativas ao longo de um quadri-vetor constante que violam a invariância de Lorentz via teorias efetivas. Especificamente, ambas as teorias modificam a relação de dispersão que reproduz velocidades das partículas ultra energéticas com dependência da energia e momento. Tal efeito é um indício de ocorrência da violação de Lorentz na natureza [9]. Nesta dissertação, devemos focar numa estrutura teórica que considera um campo de inflaton num Universo inicialmente inflacionário e depois acelerado. O ponto principal é que as funções rainbow desempenhem o papel de um campo de fundo efetivo permeando o espaço responsável pela energia escura em grandes distâncias (baixo redshifts). Tal como operadores de altas ordens derivativas violando a invariância de Lorentz, as funções rainbow funcionam como um subconjunto de teorias que violam a invariância de Lorentz, preservando a invariância do rotacional [10]. Como discutido por [11], a radiação cósmica de fundo (CMB) é um sistema apropriado para se realizar estudos fenomenológicos os quais preservam a invariância do rotacional, adotado por [12] na abordagem de uma cosmologia com violação da invariância de Lorentz num Universo com dinâmica dependente da posição (redshift). Tema em destaque desse trabalho de dissertação.

A presente dissertação está organizada como segue. No Cap. 02, apresentamos uma breve revisão sobre os princípios que fundamentam a Cosmologia Relativística e o Modelo Cosmológico Padrão (MCP), finalizamos com as equações de Friedmann que são fundamentais para entendermos o comportamento do Universo. No Cap. 03, descrevemos tópicos sobre a cosmologia inflacionária, assumindo que o inflaton é o campo responsável pela expansão do Universo. Apresentamos o modelo através do qual estudamos o método de obtenção das equações de movimento relacionadas: setor do campo escalar, setor do campo gravitacional (ação de Einstein-Hilbert) e as equações de Friedmann. No Cap. 04, consideramos a gravidade rainbow modificando alguns aspectos da Relatividade Geral. Neste cenário, a métrica de FRW é modificada e conseqüentemente, a relação de dispersão da partícula. Neste ponto, investigamos a possibilidade de estabelecer um vínculo para uma das funções rainbow com parâmetros do índice de refração da ótica cosmológica. Os impactos sobre a dinâmica inflacionária são investigados no regime da energia escura. No Cap. 05, apresentamos as conclusões e perspectivas.

Na maior parte dessa dissertação, adotaremos o sistema natural de unidades (por exemplo, $c = \hbar = 1$).

2 Cosmologia Relativística

A cosmologia moderna é responsável pela descrição do Universo como um todo, estudando-o em larga escala, algo superior a $10^2 Mpc$ [13], [14]. Nessa escala, planetas e galáxias são tidos como objetos pequenos. Neste capítulo vamos mostrar, de forma sucinta, os três pilares fundamentais que dão sustento à cosmologia: o princípio cosmológico; o postulado de Weyl; e a Teoria da Relatividade Geral.

2.1 Princípios Básicos da Cosmologia Padrão

2.1.1 Princípio Cosmológico

A versão atual do princípio cosmológico, foi formulada em meados de 1930 por Edward A. Milne (1896-1950). De acordo com esse princípio, dois observadores que acompanham o movimento cosmológico, devem estar expostos a mesma interpretação do Universo. As propriedades do Universo devem ser exatamente as mesmas para ambos [15].

Podemos afirmar que, em essência, o princípio cosmológico é uma generalização do princípio copernicano ¹. A consequência do princípio cosmológico é que, em larga escala, o Universo, em cada época, é homogêneo e isotrópico [16], [13]. A homogeneidade estabelece que ele apresente as mesmas características de densidade e temperatura em todos os pontos. A isotropia do Universo significa que ele se apresenta igual, em qualquer direção que olhemos.

Existem pelo menos dois motivos que sugerem a necessidade de tais afirmações: o primeiro é que, devido à imensa dimensão do universo, estamos sujeitos a observações limitadas, por causa da finitude da velocidade da luz. Logo, se regiões muito distantes, fora do nosso horizonte causal, fossem drasticamente distintas, não conseguiríamos realizar previsões; o segundo trata da complexidade que envolveria em resolver as equações da Teoria da Relatividade Geral, caso não considerássemos que o universo é igual em todas as regiões. Estes problemas iriam inviabilizar uma descrição teórica do Universo.

Contudo, observações da distribuição da radiação cósmica de fundo, ou CMB (do inglês Cosmic Microwave Background Radiation), que provém do período pós desacoplamento do universo, em que a radiação deixou de interagir com a matéria, corroboram com tais afirmações, tendo em vista que, medidas feitas em diferentes direções no céu resultam no mesmo espectro de energia.

¹ Afirma que a Terra, o Sol ou o sistema solar não são o centro do Universo, não há um observador privilegiado no universo.

2.1.2 Postulado de Weyl

Não conseguimos descrever o Universo como um todo apenas através da observação, pois ela é limitada. Quando olhamos localmente, percebemos que as galáxias interagem gravitacionalmente e estão em constante movimento. No entanto, quando consideramos o Universo em larga escala e adotamos o sistema de coordenadas comóveis, para o qual as galáxias e aglomerados estão fixos, podemos afirmar que a velocidade com que as galáxias se afastam ocorre devido à expansão do universo [17], [18].

Herman Weyl introduz a ideia de que no sistema de coordenadas comóveis podemos tratar o Universo em larga escala como um fluido perfeito. Desta forma, galáxias são comparadas a partículas em um fluido, que não interagem entre si, podendo-se desprezar os movimentos peculiares [19]. Fluidos, em geral, são descritos por parâmetros como: resistividade, condução de calor e viscosidade. No entanto, Weyl facilita a construção de modelos cosmológicos para o Universo, pois, fluidos perfeitos só precisam de dois parâmetros: densidade de energia (ρ) e pressão (p). Conforme [20], o tensor energia-momento que envolve os parâmetros citados de um fluido perfeito para a assinatura que adotaremos é dado

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

Sendo ρ e p , devido ao princípio cosmológico, funções apenas do tempo e U^μ é a quadri-velocidade do fluido com $c = 1$, da forma [21]:

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (2.2)$$

2.1.3 Relatividade Geral

Antes de tratarmos dos princípios da Relatividade Geral, é importante entendermos como alguns conceitos da Física eram definidos antes de Albert Einstein. A mecânica Newtoniana, juntamente com a Teoria da Gravitação Universal, até meados de 1905 "definiam bem" os conceitos de espaço e tempo.

O espaço é basicamente a arena geométrica onde os fenômenos físicos ocorrem, o "palco do teatro", que permanece indiferente aos fenômenos físicos que tomam parte nele. O tempo absoluto flui de modo contínuo e sempre ao mesmo ritmo, perfeitamente indiferente aos vários modos como nós, seres humanos, escolhemos marca-lo [22].

Dessa forma, tempo e espaço eram absolutos, não possuíam relação entre si, independente do referencial adotado. Esta interpretação da natureza prevista na mecânica clássica era a ferramenta utilizada para descrever qualquer movimento na natureza, seja a queda de uma pedra nas proximidades da Terra, até movimentos de corpos celestes [23].

Porém, em 1905, Albert Einstein (1879-1955), analista no Escritório de Patentes, publica um artigo sobre a Teoria da Relatividade Especial (TRE) intitulado: "On The Electrodynamics of Moving Bodies". Neste trabalho, ele modifica a maneira de observar os fenômenos físicos, unificando os conceitos de espaço e tempo (espaço-tempo), massa e energia. A mecânica de Newton, tão bem defendida e utilizada ao longo de séculos, agora é substituída pela TRE, quando tratamos de altas velocidades e altas energias. Einstein postula [24]:

- As leis da física tomam a mesma forma em todos os sistemas de referenciais inerciais;
- Em qualquer sistema de referencial inercial a velocidade da luz c é a mesma.

Como consequência dos postulados de Einstein, o conceito de simultaneidade torna-se relativo. Com isso, por exemplo, dois observadores inerciais, onde um se encontra em movimento em relação ao outro, vão discordar sobre o intervalo de tempo entre dois eventos determinados. Isso vai contra as nossas noções intuitivas e, dessa forma, o tempo deixa de ser absoluto. A noção de espaço também é modificada por ele, mais especificamente, medidas efetuadas ao longo da direção em que um observador inercial se move em relação a outro são diferentes para ambos [24], [25].

Einstein não parou por aí, em 1915 ele publica a Teoria da Relatividade Geral (TRG), buscando criar uma teoria que também seja válida para referenciais não-inerciais. Segundo a qual, a estrutura geométrica do espaço-tempo é modificada pela presença de matéria e/ou energia contida nele, ou seja, temos uma curvatura no espaço [26].

Dessa forma, o espaço-tempo passa a se comportar como um campo dinâmico em que o conteúdo de matéria e energia definem as suas propriedades físicas. Neste trabalho, ele traz uma compreensão da gravidade que é diferente daquela tratada na mecânica de Newton. Na mecânica clássica, a gravidade tem sua origem em uma força atrativa entre corpos massivos, já na relatividade geral, é justificada como uma curvatura no espaço-tempo, uma entidade geométrica com três dimensões espaciais e uma temporal.

É preciso saber de que maneira matéria e energia influenciam na distribuição geométrica do espaço-tempo, e, para tal descrição devemos nos apropriar das equações de Einstein. Dentre as possibilidades de dedução das equações de campo da Relatividade Geral, escolhemos aquela que é baseada no princípio de mínima ação. Partindo da ação de Einstein-Hilbert, definida como [17]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (\kappa R + \mathcal{L}). \quad (2.3)$$

Na ação (2.3), g é o determinante da métrica ($g = |g_{\mu\nu}|$) escolhida. Com $\kappa = -c^4/16\pi G$, $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$, o escalar de curvatura e \mathcal{L} a densidade lagrangeana associada aos campos de matéria. Aplicando o princípio variacional de Hamilton, que implica em $\delta S = 0$. Assim,

$$\delta S = \int d^4x \left[(\delta\sqrt{-g}) (\kappa R + \mathcal{L}) + \sqrt{-g} \delta (\kappa R + \mathcal{L}) \right] = 0. \quad (2.4)$$

De posse de $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$. Podemos reescrever (2.4) da seguinte maneira:

$$\delta S = \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} (\kappa R + \mathcal{L}) + \sqrt{-g} (\kappa\delta R + \delta\mathcal{L}) \right] = 0, \quad (2.5)$$

ou ainda,

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu} (\kappa R + \mathcal{L}) \delta g^{\mu\nu} + \kappa (g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) + \delta\mathcal{L} \right] = 0. \quad (2.6)$$

Após algumas manipulações matemáticas, temos:

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\kappa \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{1}{2\kappa}g_{\mu\nu}\mathcal{L} \right) \delta g^{\mu\nu} + \kappa g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + \delta\mathcal{L} \right] = 0. \quad (2.7)$$

Observando o Teorema de Gauss aplicado à integral do termo $\kappa g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$, que faz com que a integral no volume dê espaço a uma integral de superfície, que se anula devido às condições de contorno que exigem que os campos sejam nulos no infinito, para mais detalhes [27]. Segue que

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \kappa \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \frac{1}{2\kappa} \left(2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L} \right) \right] \delta g^{\mu\nu} = 0, \quad (2.8)$$

de modo que podemos identificar o tensor energia-momento como

$$T_{\mu\nu} = 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (2.9)$$

Para que a condição seja satisfeita, sabendo que $\delta g^{\mu\nu}$ assume valores arbitrários,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \frac{1}{2\kappa}T_{\mu\nu} = 0. \quad (2.10)$$

Portanto, como consequência do princípio variacional, $\delta S = 0$, da ação de Einstein-Hilbert, substituindo o valor de "κ" na expressão (2.10), podemos escrever as equações de Einstein, como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

Sendo o primeiro membro da equação identificado como o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, no segundo temos o já definido tensor energia-momento. Em resumo, o lado esquerdo mede a curvatura do espaço-tempo, enquanto o lado direito mede a energia e o momento

nele contidos. Nestas equações, $g_{\mu\nu}$ é conhecido como tensor métrico, que definiremos posteriormente e R é o escalar de Ricci, definido como

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

Sendo $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}. \quad (2.13)$$

Em que,

$$\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \right), \quad (2.14)$$

são os Símbolos de Christoffel.

2.2 Universo de Friedmann-Robertson-Walker

Nesta seção trataremos do modelo matemático de Friedmann-Robertson-Walker que é à base do Modelo Cosmológico Padrão. De acordo com o modelo de FRW, a dinâmica do Universo é governada pelas chamadas equações de Friedmann. Partindo do elemento de linha que obedece ao princípio cosmológico, denominado métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), e do tensor energia-momento, aplicados às equações de campo de Einstein, que as equações de Friedmann são obtidas [28].

2.2.1 A métrica FRW

Incorporar a homogeneidade e isotropia à parte espacial da métrica nos permite considerar espaços de curvatura constante, sendo este espaço globalmente isotrópico. Logo, podemos definir o tensor de Riemann em termos da curvatura k e da métrica $g_{\alpha\beta}$ [16]

$$R_{abcd} = k (g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}). \quad (2.15)$$

Contraindo (2.15), com a métrica g^{ca} , obtemos o tensor de Ricci

$$R_{bd} = g^{ca} R_{abcd} = R_{bcd}^c. \quad (2.16)$$

$$= k (g^{ca} g_{ac} g_{bd} - g^{ca} g_{ad} g_{bc}), \quad (2.17)$$

$$= k (\delta_c^c g_{bd} - \delta_d^c g_{bc}), \quad (2.18)$$

$$= k (3g_{bd} - g_{bd}) = 2k g_{bd}. \quad (2.19)$$

O que nos mostra que em espaços de curvatura constante, o tensor de Ricci é diretamente proporcional à métrica. As geometrias destes espaços são qualitativamente diferentes, dependendo se a curvatura é positiva, negativa ou nula.

Vamos Considerar uma representação geométrica que atende à homogeneidade e isotropia do universo em larga escala, um modelo simples, que generaliza o espaço euclidiano, corrigido pelo fator de escala $a(t)$, que descreve a expansão do Universo, e escrito em coordenadas esféricas. A isotropia implica em simetria esférica (de rotação), e, assim, podemos escrever o elemento de linha ² como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[e^\lambda dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.20)$$

desde que qualquer variação na parte angular $r^2 d\Omega^2$ não altere a isotropia do espaço-tempo. Uma maneira de determinar e^λ , onde $\lambda = \lambda(r)$, conhecendo o elemento de linha (2.20), é, através das equações (2.14) e (2.13) determinar as componentes R_{11} e R_{22} , associadas ao espaço tridimensional do tensor de Ricci.

$$R_{11} = \frac{1}{r} \frac{d\lambda(r)}{dr} \quad e \quad R_{22} = 1 + \frac{1}{2} r e^{-\lambda(r)} \frac{d\lambda(r)}{dr} - e^{-\lambda(r)}. \quad (2.21)$$

Assim, comparando as equações (2.21), com as componentes que podem ser encontradas em (2.19), temos

$$\frac{1}{r} \frac{d\lambda(r)}{dr} = 2k e^{\lambda(r)} \quad (2.22)$$

e

$$1 + \frac{1}{2} r e^{-\lambda(r)} \frac{d\lambda(r)}{dr} - e^{-\lambda(r)} = 2kr^2. \quad (2.23)$$

Isolando $d\lambda/dr$ em (2.22) e substituindo em (2.23), obtemos

$$e^{-\lambda} = 1 - kr^2. \quad (2.24)$$

Dessa forma, o elemento de linha da métrica de FRW, para um Universo homogêneo e isotrópico, é descrito por

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.25)$$

Nesta métrica, o valor de k determina as possíveis geometrias para o nosso Universo, que são dadas por:

Geometria Plana ($k = 0$): Esta geometria representa um espaço plano, respeitando a geometria euclidiana e sua geodésica é uma linha reta. Nessa geometria o Universo pode possuir volume infinito. As observações atuais apontam que esta é a que mais se aproxima do nosso Universo real.

² adotamos a assinatura $(-, +, +, +)$

Geometria Esférica ($k = 1$): Este modelo, similar a uma esfera, também é chamado de Universo fechado. Possui volume espacial finito, porém ilimitado, já que não possui limites ou barreiras. O Universo passa por uma fase de expansão, seguido de uma contração, tendo seu fim numa singularidade.

Geometria Hiperbólica ($k = -1$): Este modelo, também conhecido como Universo aberto, que se expande indefinidamente, sendo, portanto, infinito e ilimitado.

2.2.2 Equações de Friedmann

Para que possamos compreender o comportamento do Universo, devemos construir um modelo cosmológico que consiste inicialmente em solucionar as equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.26)$$

Obtendo a solução para o fator de escala $a(t)$, através do qual é possível determinar a evolução do Universo. Nesta seção, vamos solucionar as equações de Einstein para a métrica (2.25), obtendo as equações de Friedmann para o fator de escala.

De acordo com a métrica citada, por conveniência, vamos considerar $c = 1$. Assim, observamos que o tensor métrico de FRW é dado por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

Com (2.27), podemos determinar os símbolos de Cristoffel não nulos

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= a\dot{a}/(1 - kr^2), & \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2, & \Gamma_{33}^0 &= \Gamma_{22}^0 \sin^2\theta, \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \dot{a}/a, & \Gamma_{11}^1 &= kr/(1 - kr^2), \\ \Gamma_{22}^1 &= -(1 - kr^2)r, & \Gamma_{33}^1 &= \Gamma_{22}^1 \sin^2\theta, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = 1/r, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta \cos\theta, & \Gamma_{23}^3 &= \cot\theta. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Neste caso, o "ponto" representa a derivada com respeito ao tempo. De posse dos símbolos, podemos determinar as componentes não nulas do tensor de Ricci através de (2.13)

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (2.29)$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{(1 - kr^2)}, \quad (2.30)$$

$$R_{22} = r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \quad (2.31)$$

$$R_{33} = r^2 \sin^2 \theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k). \quad (2.32)$$

Assim, o escalar de curvatura será

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{6}{a^2} (a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k). \quad (2.33)$$

Conforme vimos na subseção 2.1.2, em larga escala podemos considerar o Universo como homogêneo e isotrópico, com seu conteúdo de matéria e energia se comportando como um fluido perfeito, cujo tensor energia momento ³ é dado por (2.1)

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}. \quad (2.34)$$

Como estamos tratando do referencial comóvel, a quadri-velocidade é $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Assim, as componentes não nulas são

$$T_{00} = \sum_i \rho_i, \quad T_{11} = \frac{a^2}{(1 - kr^2)} \sum_i p_i, \quad T_{22} = a^2 r^2 \sum_i p_i, \quad T_{33} = a^2 r^2 \sin^2 \theta \sum_i p_i. \quad (2.35)$$

A necessidade do somatório surge quando consideramos todos os constituintes do Universo.

Por fim, de posse das quantidades obtidas, vamos determinar as equações de Einstein para as componentes $(\mu, \nu) = (0, 0)$,

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i - \frac{k}{a^2}, \quad (2.36)$$

sendo $H \equiv \dot{a}/a$ é conhecido como parâmetro de Hubble, que representa a taxa de expansão do Universo em um dado tempo t . Para as componentes $(\mu, \nu) = (1, 1) = (2, 2) = (3, 3)$, vamos obter a mesma equação, devido a simetria da métrica de FRW,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \sum_i (\rho_i + 3p_i). \quad (2.37)$$

As equações (2.36) e (2.37) são denominadas, respectivamente, a equação de Friedmann e a equação da aceleração, que são obtidas naturalmente, através das equações de Einstein para a métrica de FRW.

Para obtermos alguma solução do fator de escala torna-se necessário conhecermos o comportamento da densidade de energia do Universo. Para isso, tomamos a derivada da equação (2.36), em relação ao tempo, substituímos o termo \ddot{a} da equação (2.37), resultando

$$\dot{\rho}_i + 3H(\rho_i + p_i) = 0. \quad (2.38)$$

³ Assume essa forma devido à assinatura adotada.

Que é denominada de equação de continuidade para um fluido cosmológico [13], [14]. Uma vez que assumimos que o Universo em larga escala pode ser representado como um fluido homogêneo e isotrópico, podemos definir para substâncias de importância cosmológica, a equação de estado que é escrita em uma forma linear simples[13]:

$$p_i = \omega_i \rho_i \tag{2.39}$$

Sendo ω_i um número adimensional. De posse das equações de Friedmann, equação de continuidade e equação de estado, é possível realizar modelagens para o Universo.

3 Cosmologia Inflacionária

O modelo do Big Bang se mostra muito eficiente em diversos aspectos: determinar a abundância dos elementos leves presentes no Universo; estimar a temperatura da radiação cósmica de fundo, que foi realizada inicialmente por G. Gamow e R. Alpher (5K) em 1948 e medida na ordem de (3,5K) por A. Penzias e R. Wilson em 1965 [29]. No entanto, o modelo falha ao tentar justificar a presença de inomogeneidades da ordem de 10^{-4} ou 10^{-5} , na radiação cósmica de fundo, que segundo E. R. Harrison, P. J. E. Peebles e J. T. Yu, e Ya. B. Zel'dovich, seria necessária, entre outros requisitos, para a construção de um modelo capaz de descrever a formação de estruturas no Universo. A presença dessas inomogeneidades foi observada anos depois através do satélite observacional COBE. Mas, o Big Bang apresenta o conhecido como problema das condições iniciais do Universo, que inclui o problema da planura, o problema do horizonte e a abundância de relíquias cosmológicas, como os monopolos magnéticos, os gravitinos, dentre outras partículas supermassivas. Foi este cenário que levou Alan Guth, no início da década de 80, a propor modificações no Modelo Cosmológico Padrão, incluindo uma fase inflacionário na evolução do Universo.

Problema da planura

As observações astronômicas atuais apontam para um universo plano $k = 0$, pela equação (2.36):

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G} H^2, \quad (3.1)$$

essa relação é a densidade crítica, que representa a densidade de energia total para um universo plano. Outro parâmetro de interesse é o da densidade $\Omega = \rho/\rho_c$. Assim, podemos reescrever a equação de Friedmann:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (3.2)$$

Dessa relação, podemos concluir que Ω é uma medida indireta da geometria do Universo: como as observações apontam para $k = 0$, resulta em $\Omega \approx 1$, veja [30].

Vamos analisar o problema da planura através de (3.2), para o tempo presente, esta relação torna-se:

$$\Omega_0 - 1 = \frac{k}{a_0^2 H_0^2}. \quad (3.3)$$

Podemos relacionar as equações (3.2) e (3.3), eliminando k :

$$\Omega - 1 = (\Omega_0 - 1) \frac{a_0^2 H_0^2}{a^2 H^2}. \quad (3.4)$$

Conforme [13], os dados observacionais impõem o vínculo $|\Omega_0 - 1| < 0,02$. Isso implica em um universo muito próximo da planura hoje. Observando a equação anterior, percebemos que em tempos mais remotos esse universo foi cada vez mais plano, configurando assim, o chamado problema da planura. Pela teoria do Big Bang, para que o Universo seja plano, a densidade deve ser extremamente próxima da densidade crítica, qualquer variação considerável para mais, resultaria num universo fechado. Então o universo se curvaria sobre si mesmo para formar um espaço de volume finito, mas sem limite. No entanto, se a densidade média for menor que a densidade crítica, então teremos um espaço infinito chamado de universo aberto. Essa necessidade que o modelo do Big Bang impõe sobre a densidade crítica ser extremamente próxima à unidade parece não ser natural. Por exemplo, considere um segundo após o big bang, o momento em que os processos relacionados a nucleossíntese do Big Bang estavam apenas começando. Mesmo que a densidade seja diferente da unidade hoje por um fator de 10, um segundo após o Big Bang, deve ter sido igual a um com uma precisão de 15 casas decimais [31]!

Problema do horizonte

O problema do horizonte questiona a homogeneidade e isotropia do Universo em larga escala. Dados do satélite COBE, confirmados por observações subsequentes na terra, mostram que a radiação proveniente do Universo tem a mesma temperatura em todas as direções que olhemos (depois de corrigir para o movimento da Terra) com uma precisão de uma parte em 100.000 [31]. Em muitas circunstâncias, tal uniformidade seria fácil de entender, uma vez que qualquer coisa chegará a uma temperatura uniforme se não for perturbada por um tempo longo o suficiente. Então, por que isso seria um problema? Para entendermos melhor, precisamos definir dois parâmetros cosmológicos: a distância própria e o horizonte de partícula. Aqui entenda o termo "horizonte" como a superfície esférica centrada no observador [29].

A distância própria é dada por:

$$d_p(t_0) = a_0 \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a}, \quad (3.5)$$

sendo t_e o tempo de emissão do sinal da partícula, e t_0 o tempo físico atual. Considerando as equações de Friedmann, determinamos o horizonte de partícula como:

$$d_h(t_0) = a_0 \int_0^{t_0} \frac{dt}{a}, \quad (3.6)$$

no limite em que $t_e \rightarrow 0$, as duas distâncias são equivalentes. Através da radiação cósmica de fundo, podemos constatar a homogeneidade e isotropia do Universo. Tendo a última superfície de espalhamento, impressa no fundo cósmico, sido emitida muito antes do tempo físico presente $t_e \ll t_0$, neste caso, a distância própria e o horizonte da partícula são resultados bastante aproximados. Com isso, vamos analisar dois pontos, que são diametralmente opostos no Universo, cuja distância até o observador é $d_h(t_0)$; considerando agora a separação entre esses dois pontos, será igual a distância própria $d_p(t_0) = 2d_h(t_0)$, portanto, esses pontos não podem se comunicar no Universo, não podendo atingir um equilíbrio térmico, devido a finitude da velocidade da luz. Não obstante, observações revelam que todos os pontos da última superfície de espalhamento têm aproximadamente as mesmas propriedades; como isso é possível?

Na teoria do big bang o universo evolui tão rapidamente que não há tempo para que a uniformidade seja estabelecida. Cálculos mostram que a energia e a informação teriam que ser transportadas por volta de 100 vezes a velocidade da luz para alcançar uniformidade em 300.000 anos após a grande explosão. Assim, a teoria tradicional do big bang exige que postulamos, sem explicação prévia, que essa pequena, densa e quente região primordial preencheu o espaço desde o início, com a mesma temperatura em todos os lugares, isso tudo por suposição, e não como consequência de qualquer processo físico. Essa deficiência é conhecida como o problema do horizonte [31].

Outro problema que segue sem solução, é o porquê do Universo estar em expansão acelerada. Conseguimos comprovar que ele está em expansão agora, porque já esteve no passado. Mas o motivo fundamental da expansão continua sem explicação. Muitos acreditam que apenas uma cosmologia quântica será capaz de responder muitos destes problemas. No entanto, acredita-se que algumas respostas já podem ser obtidas no regime de energia por volta de $10^{15} GeV$ fazendo uso da Relatividade Geral. Essa é uma questão fundamental que motiva a teoria do Universo inflacionário [15].

3.1 Inflação guiada por um campo escalar

Na parte final deste capítulo, faremos uma rápida revisão de uma possível solução para esses problemas que é apresentada a partir da teoria da inflação cósmica, que propõe a inclusão de uma fase de expansão acelerada à evolução do Universo primordial. A inflação não acaba com a teoria do big bang, mas em vez disso adiciona uma breve pré-história que se junta suavemente à descrição tradicional. A propriedade física que torna a inflação possível é a existência de estados da matéria que têm uma alta densidade de energia que

não pode ser diminuída rapidamente. Tal estado é chamado de falso vácuo, onde a palavra vácuo indica um estado de menor densidade de energia possível, e a palavra falsa é usado para significar temporário. O falso vácuo age como se a densidade de energia não pudesse ser reduzida, uma vez que a redução da energia é um processo lento [31]. Considerando uma parte do universo primitivo no estado de falso vácuo, o efeito gravitacional repulsivo leva a um período inflacionário de expansão exponencial. Eventualmente o falso vácuo decai, e a energia que havia sido bloqueada no falso vácuo é liberada. Esta energia produz uma sopa quente e uniforme de partículas, que é exatamente o ponto de partida assumido da teoria tradicional do big bang. Neste ponto a teoria inflacionária se junta à teoria mais antiga, como podemos observar na figura abaixo.

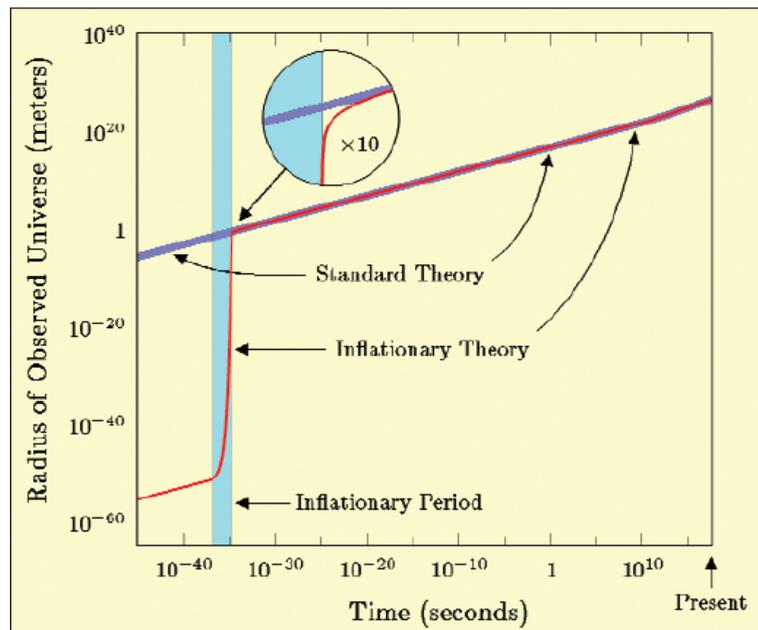


Figura 1: Comparação entre a teoria do Big Bang e o modelo inflacionário. Retirado de [31].

No gráfico, identificamos que o surto da expansão começou numa região que era cerca de 10^{25} vezes menor que o raio da teoria tradicional. Embora a região fosse tão pequena, havia muito tempo para chegar a uma temperatura uniforme. Então no modelo inflacionário, a temperatura uniforme foi estabelecida antes da inflação iniciar. O processo de inflação então esticou esta região para se tornar grande o suficiente para abranger todo o universo observado. A uniformidade é preservada por esta expansão, pela covariância das leis da Física [31], [32]. O modelo inflacionário também fornece uma resolução simples para o problema de planura, o ajuste fino exigido da densidade de massa do universo primitivo. Durante a era inflacionária, a natureza peculiar do estado de falso vácuo resulta em algumas mudanças de sinal importantes nas equações que descrevem a evolução do universo.

Vamos considerar o modelo de universo de FRW (Friedmann-Robertson-Walker), onde um campo escalar, *ínflaton*, espalhado de forma homogênea e isotrópica, proposto inicialmente por A. Guth, é responsável pelo universo inflacionário, através de uma pressão negativa que acelera a expansão cósmica inicial [31], [32], [33]. Através da ação,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [\kappa R + \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)], \quad (3.7)$$

vamos estudar a equação de movimento para o setor de campo ínflaton e, posteriormente para o setor gravitacional. Na equação anterior, $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ é densidade Lagrangeana associada ao ϕ que é o campo escalar ínflaton, com este campo escalar dependendo apenas do tempo $\phi(t)$. O estudo será feito para o regime em que o ínflaton é dominante, e a lagrangeana para a assinatura que adotamos é dada por [20]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi - V(\phi), \quad (3.8)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial do campo de ínflaton. De posse destas informações, estudaremos a equação de movimento por dois mecanismos distintos.

Equação de movimento

De posse da ação (3.7), vamos fazer uso do cálculo variacional e aplicar o princípio de Hamilton, que implica em $\delta S = 0$. Assim, nós obtemos a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0. \quad (3.9)$$

A dinâmica de campos escalares obedece à equação (3.9). Com isso, aplicando a Lagrangeana (3.8) na equação de Lagrange, o campo escalar que estamos considerando assume a seguinte equação de movimento:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) - V_\phi = 0. \quad (3.10)$$

Sendo g o determinante da métrica (2.27), dado por $g = -a^6 r^4 \sin^2 \theta / (1 - kr^2)$, e $V_\phi = dV/d\phi$. Como g e ϕ são funções apenas do tempo, a equação anterior torna-se

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_0 (\sqrt{-g} g^{00} \partial_0 \phi) - V_\phi = 0 \iff -3H\dot{\phi} - \ddot{\phi} - V_\phi = 0, \quad (3.11)$$

Assim, podemos reescrever a equação de movimento do campo escalar ϕ (3.10) para o modelo de FRW, na seguinte forma

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0, \quad (3.12)$$

que é a própria equação de movimento. Uma outra possibilidade, é obtermos a equação anterior, via equações de FRW, como veremos a seguir.

Tensor Energia-Momento

Considerando que no universo primordial o ínflaton é o termo dominante da lagrangeana (3.8). Neste caso, substituindo-a na equação (2.9) podemos escrever o tensor energia-momento como

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + g_{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (3.13)$$

A equação anterior fica com os dois termos positivos para satisfazer a equação de conservação $\Delta^\nu T_{\mu\nu} = 0$, reproduzindo a equação de Klein-Gordon ¹. Dessa forma, adotando que a métrica que descreve a geometria do Universo em expansão é a de Friedmann-Robertson-Walker (2.27). Assumindo que ϕ depende apenas de t, podemos concluir que as componentes não-nulas são:

$$T_{00} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (3.14)$$

$$T_{11} = \frac{a^2}{(1-kr^2)} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right), \quad (3.15)$$

$$T_{22} = a^2 r^2 \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right), \quad (3.16)$$

$$T_{33} = a^2 r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right). \quad (3.17)$$

Comparando com os resultados obtidos em (2.35), naturalmente, observamos que a densidade de energia ρ_ϕ e a de pressão p_ϕ , são, respectivamente ,

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \quad e \quad p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (3.18)$$

Sabemos que o universo, além da energia escura, também é preenchido por matéria e radiação. No entanto, vamos considerar que estamos numa fase onde a energia escura é dominante. Logo, as equações de Friedmann obtidas em (2.36) e (2.37), ficam do tipo:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right) - \frac{k}{a^2} \quad (3.19)$$

¹ Mais detalhes em [20]

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3} (\dot{\phi}^2 - V(\phi)). \quad (3.20)$$

Derivando a equação (3.19) em relação ao tempo, obtemos:

$$2H\dot{H} = \frac{8\pi G}{3} (\dot{\phi}\ddot{\phi} + V_\phi\dot{\phi}) + \frac{2k}{a^2}H. \quad (3.21)$$

Fazendo o mesmo para o parâmetro de Hubble,

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2. \quad (3.22)$$

Substituindo as equações (3.19) e (3.20) em (3.22) e combinando estas relações em (3.21), podemos escrever a equação de movimento do ínflaton como

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0. \quad (3.23)$$

Representando uma consistência da teoria. Admitindo que o ínflaton sofre o processo de slow roll [33], o qual considera que ϕ varia muito lentamente em um potencial $V(\phi)$ temos então

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi). \quad (3.24)$$

Tal aproximação nos diz que ao longo de um tempo considerável o potencial é aproximadamente constante, e portanto, considerando uma solução para o universo plano ($k = 0$), substituindo estas considerações na equação (3.19)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}V(\phi), \quad (3.25)$$

a equação acima nos fornece uma solução do tipo exponencial para o fator de escala

$$a(t) \simeq a_0 \exp \left[\sqrt{\frac{8\pi G}{3}V(\phi)}t \right]. \quad (3.26)$$

Esse fator de expansão da inflação impulsiona o universo em direção à planura. Assim, resolvemos os problemas de condições iniciais como vimos anteriormente. O processo de reaquecimento só ocorre com o término da inflação. Isso só é possível quando o termo cinético supera o potencial, onde a energia do ínflaton decai em energia de radiação e assim ocorre um aumento da energia térmica do Universo [34]. Alan Guth faz uma analogia interessante, ao analisar o planeta Terra que tem uma determinada curvatura, porém, ao amplificar uma pequena região, ela parecerá plana [2].

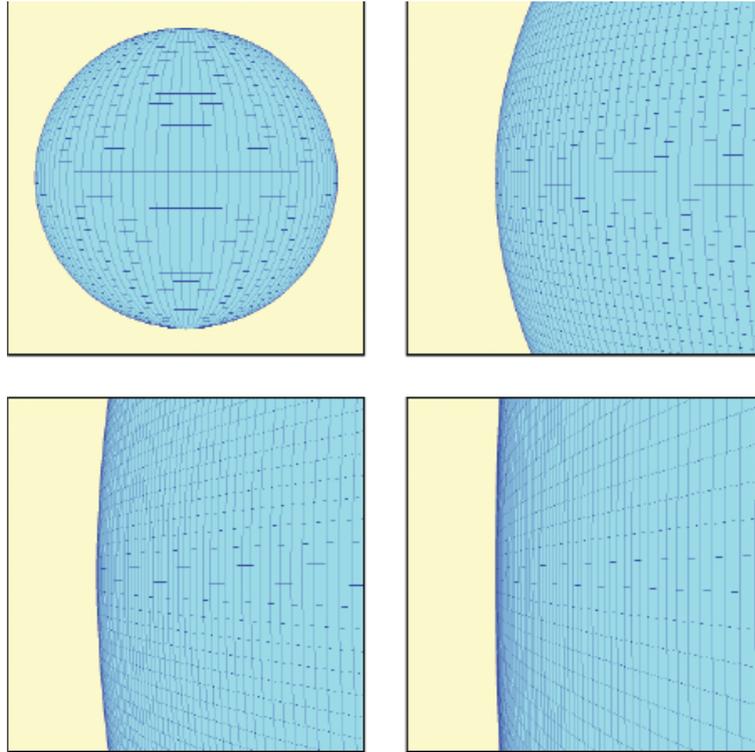


Figura 2: Solução para o problema da planura. Retirado de [31].

A esfera em expansão ilustra a solução ao problema da planura na inflação. À medida que a esfera se torna maior, a superfície se torna mais plana e mais plana. a inflação do espaço faz com que ele se torne geometricamente plano. Assim, um curto período de inflação pode direcionar o valor da densidade crítica para um, com grande precisão. Não é mais preciso assumir que o valor inicial era incrivelmente perto de um. Além disso, há uma previsão de que surge desse comportamento, o mecanismo que leva a um quase sempre overshoots, o que significa que até hoje o a densidade de massa deve ser igual ao valor crítico com um alto grau de precisão.

4 Cosmologia Inflacionária no Universo Rainbow

Acredita-se que a descrição geométrica do espaço-tempo sofrerá mudanças quando se trata de energias superiores à energia da escala de Planck $E_{PL} = \sqrt{\hbar c^5/G}$, sendo esta o possível limiar entre as descrições Clássica e Quântica [5], [35]. A relação de dispersão padrão em unidades naturais é dada por

$$E^2 - p^2 = m^2. \quad (4.1)$$

Além disso, na relatividade especial, a escala de Planck não é invariante mediante transformações de Lorentz. Com isso, surge a necessidade de se criar uma relação de dispersão modificada (MDR). Nesse contexto, foi desenvolvida a relatividade duplamente especial (DSR - Doubly Special Relativity), modificando alguns princípios da relatividade especial [5]:

- (i) A relatividade dos referenciais inerciais;
- (ii) No limite $E/E_{PL} \rightarrow 0$, a velocidade do fóton vai para c , que é uma constante para todos os observadores iniciais;
- (iii) Na condição acima, E_{PL} também é uma constante, e possui o mesmo valor para todos os observadores inerciais.

O nome duplamente especial se dá ao fato do princípio da relatividade coexistir com escalas de velocidade e comprimento, independentes do observador. Posteriormente, com a generalização da DSR para espaços curvos, temos uma família de métricas parametrizadas pela razão E/E_{PL} . Esta versão geral da DSR é chamada de *Rainbow Gravity* (RG). A Gravidade Rainbow modifica os princípios de equivalência e correspondência [5]. Pelo princípio de equivalência modificado, numa região do espaço-tempo, com curvatura R muito maior que E_{PL}^{-1} , observadores caindo livremente, medindo partículas e campos com energia E , tal que $1/R \ll E \ll E_{PL}$, vão observar as mesmas leis físicas que um observador inercial no espaço plano de rainbow. Com o princípio de correspondência modificado, no limite $E/E_{PL} \rightarrow 0$ a Relatividade Geral é recuperada.

Vamos observar como as funções rainbow modificam a relação de dispersão [5], [6]. Primeiro vamos definir a métrica de Minkowski para o espaço plano, em coordenadas cartesianas, afetada pelas funções rainbow [36]

$$ds^2 = \tilde{\eta}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -f^{-2} dt^2 + g^{-2} (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.2)$$

Com isso, podemos reescrever a relação de dispersão modificada:

$$p^\mu p^\nu \tilde{\eta}_{\mu\nu} = -m^2. \quad (4.3)$$

Tal que,

$$-p^0 p^0 f^{-2} + p^i p^i g^{-2} = -m^2. \quad (4.4)$$

Ou melhor,

$$E^2 f^{-2} (E/E_{PL}) - p^2 g^{-2} (E/E_{PL}) = m^2, \quad (4.5)$$

onde a modificação ocorre devido às funções rainbow, $f(E/E_{PL})$ e $g(E/E_{PL})$. Não há apenas uma escolha para as funções rainbow, no entanto, elas devem obedecer à condição de que, no limite $E/E_{PL} \rightarrow 0$, devemos recuperar a relação de dispersão padrão. Para isso, o princípio de correspondência exige

$$\lim_{E/E_{PL} \rightarrow 0} f(E/E_{PL}) = \lim_{E/E_{PL} \rightarrow 0} g(E/E_{PL}) \rightarrow 1. \quad (4.6)$$

Neste ponto, vamos estudar a relação de dispersão (4.5), para uma configuração particular das funções rainbow: $f = 1$, $g = 1/\sqrt{1 + \tilde{\lambda}p}$ (sendo $\tilde{\lambda} = 1/E_{PL}$). Em $m = 0$, temos

$$E^2 - (1 + \tilde{\lambda}p) p^2 = 0. \quad (4.7)$$

Assim, ficamos com

$$E = p\sqrt{1 + \tilde{\lambda}p}. \quad (4.8)$$

A relação de dispersão, (4.8), conduz a velocidade de grupo modificada para uma partícula sem massa e com momento p :

$$v_g = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{2 + 3\tilde{\lambda}p}{2\sqrt{1 + \tilde{\lambda}p}}. \quad (4.9)$$

Por outro lado, a velocidade de fase pode ser obtida com $v_f = E/p$:

$$v_f = \sqrt{1 + \tilde{\lambda}p}. \quad (4.10)$$

Note que, com as velocidades de grupo e de fase, podemos relacionar facilmente através de:

$$\frac{v_f - v_g}{v_g} = -\frac{\tilde{\lambda}p}{2 + 3\tilde{\lambda}p}. \quad (4.11)$$

Analisando a equação anterior, percebemos que $v_g > v_f$, reproduzindo um meio anômalo (efeitos anisotrópicos). No caso em que ($\tilde{\lambda} \rightarrow 1$), observamos que $v_g \approx v_f$, implicando no caso usual.

4.1 Métrica de Friedmann-Robertson-Walker no universo Rainbow

Como afirma [5], com essas modificações consideramos que a geometria do espaço-tempo vai depender da energia da partícula ou conjunto de partículas que estão sendo observadas. Assim,

$$\tilde{e}_0(E) = f^{-1}(E/E_{PL}) e_0, \quad \tilde{e}_i(E) = g^{-1}(E/E_{PL}) e_i, \quad (4.12)$$

onde as quantidades sem til, referem-se as bases que independem da energia. Logo, a métrica é fornecida por

$$\tilde{g}(E) = \tilde{\eta}^{\mu\nu} \tilde{e}_\mu \otimes \tilde{e}_\nu. \quad (4.13)$$

Vale ressaltar, que o argumento (E) em $\tilde{g}(E)$ não trata da energia do espaço-tempo em si. Em vez disso, é a escala de energia da partícula que está sendo analisada nesse espaço-tempo.

Várias quantidades presentes na Relatividade Geral também serão modificadas, incluindo as que determinamos no capítulo 3; símbolos de Christoffel, tensor de Ricci, tensor energia-momento, equações de Friedmann. Inclusive, até as equações de Einstein serão reescritas como

$$\tilde{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{R} = 8\pi G\tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (4.14)$$

sendo

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = -f^{-2}T_{\mu\nu}. \quad (4.15)$$

Com isso, vamos determinar as modificações que surgem nas quantidades citadas, bem como, determinar a nova forma das equações de Friedmann. Com as modificações que surgem devido à teoria rainbow e suas funções, vamos considerar $f(E/E_{PL})$ como dependente do tempo, e $g(E/E_{PL}) = 1$, podemos reescrever o elemento de linha de FRW em coordenadas esféricas da seguinte forma

$$ds^2 \rightarrow d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -f^{-2} dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (4.16)$$

Observamos que o elemento de linha depende da função rainbow. Portanto, a energia da partícula influenciará diretamente na geometria do espaço-tempo. O tensor métrico é dado por

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2/1 - kr^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

podemos observar claramente que no limite $E/E_{PL} \rightarrow 0$, a métrica padrão de FRW é retomada.

4.1.1 Índice de refração

Analisando a métrica FRWR (Friedmann-Robertson-Walker-Rainbow) definida em (4.16), podemos determinar que a velocidade efetiva para o ínflaton devido à gravidade rainbow é dada por ¹ :

$$v_{ef} = f^{-1}c. \quad (4.18)$$

A presente escolha introduz a violação da invariância de Lorentz, porque ela muda os impulsos de Lorentz reproduzindo velocidades dependentes de energia devido à presença da função rainbow. Por outro lado, as velocidades efetiva e da luz estão relacionadas por um índice de refração análogo sentido pelo campo ínflaton como segue

$$n \equiv \frac{c}{v_{ef}} = f. \quad (4.19)$$

Observe que o índice de refração é, em geral, uma quantidade dependente do comprimento de onda. Isso nos dá a possibilidade de obter uma expressão para a função Rainbow, f , em termos de distâncias ópticas. Primeiro, temos uma relação entre o índice de refração e comprimento de onda, esta dependência é dada pela equação de Sellmeier [37]:

$$\begin{aligned} n^2 &= 1 + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\lambda_{0i}^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{0i}^2} \\ &= 1 + NB_0 \frac{\lambda_{0i}^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{0i}^2}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

¹ Aqui, vamos considerar $c \neq 1$, para uma melhor compreensão da velocidade efetiva.

Note que na última passagem do resultado acima, assume-se que todas as "moléculas" do sistema, ressoam com a mesma frequência, significando que $B_i = B_0$. Este comportamento é análogo a equação de dispersão de Sellmeier que é bem conhecida na ótica [37]. Na expressão original, B_i , são conhecidos como coeficientes de Sellmeier que podem ser determinados de forma experimental. Pela perspectiva cosmológica, identificamos $\lambda_0/\lambda \equiv a_0/a(t)$, para pequenas variações temporais, onde λ_0 e λ são os comprimentos de onda observados no tempo presente e no tempo posterior, respectivamente. Relembrando a definição de redshift $z + 1 = \lambda_0/\lambda$, com $\lambda \geq \lambda_0$, encontramos:

$$n^2 = 1 - \frac{C_1}{1 - (z + 1)^2}, \quad (4.21)$$

onde $C_1 = NB_0\lambda_0^2$. Comparando o resultado anterior com a equação (4.19), estabelecemos uma relação entre a função rainbow e o redshift

$$f^2 = 1 - \frac{C_1}{1 - (z + 1)^2}. \quad (4.22)$$

No limite em que $z \ll 1$

$$f(z) \simeq \sqrt{1 + \frac{C_1}{2z}}. \quad (4.23)$$

Agora, podemos considerar as relações

$$1 + z = \frac{a_0}{a}, \quad (4.24)$$

Assim,

$$\dot{z} = -(1 + z)H. \quad (4.25)$$

Vamos reescrever a função rainbow (4.23) com a dependência temporal

$$f(t) = \sqrt{1 - \frac{C_1}{2} \frac{a}{a - a_0}}. \quad (4.26)$$

Isto implica que a velocidade efetiva, dada pela Equação (4.18), pode ser descrita com dependência do desvio para o vermelho. Bem como, através da variável temporal, respectivamente:

$$v_{ef}(z) \simeq \sqrt{\frac{2z}{2z + C_1}}c, \quad (4.27)$$

$$v_{ef}(t) \simeq \sqrt{\frac{2(a - a_0)}{(2 - C_1)a - 2a_0}}c. \quad (4.28)$$

Então, o campo de ínflaton possui velocidade, $v_{ef}(z) \approx 0$ para redshifts muito pequenos, porém esta velocidade efetiva, aproxima-se da velocidade da luz, para redshifts muito

grandes. Assim, espera-se que na fase de reaquecimento (em ultravioleta), o campo desenvolva uma fase dominada por radiação, enquanto no regime atual (em infravermelho) espera-se que seja responsável pela energia escura.

4.2 Setor Gravitacional

Para encontrarmos a equação de movimento via equações de Friedmann, precisamos determinar como as funções rainbow vão modificá-las. Para isso, vamos encontrar os símbolos de Cristoffel não nulos modificados através de:

$$\tilde{\Gamma}_{\nu\alpha}^{\mu} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial\tilde{g}_{\lambda\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial\tilde{g}_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\tilde{g}_{\nu\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \right), \quad (4.29)$$

aplicando a métrica rainbow, ficamos com

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{00}^0 &= -\dot{f}/f, \quad \tilde{\Gamma}_{11}^0 = f^2 a \dot{a} / (1 - kr^2), \quad \tilde{\Gamma}_{22}^0 = f^2 a \dot{a} r^2, \quad \tilde{\Gamma}_{33}^0 = \tilde{\Gamma}_{22}^0 \sin^2 \theta, \\ \tilde{\Gamma}_{01}^1 &= \tilde{\Gamma}_{02}^2 = \tilde{\Gamma}_{03}^3 = \dot{a}/a, \quad \tilde{\Gamma}_{11}^1 = kr / (1 - kr^2), \\ \tilde{\Gamma}_{22}^1 &= -(1 - kr^2) r, \quad \tilde{\Gamma}_{33}^1 = \tilde{\Gamma}_{22}^1 \sin^2 \theta, \quad \tilde{\Gamma}_{12}^2 = \tilde{\Gamma}_{13}^3 = 1/r, \\ \tilde{\Gamma}_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \quad \tilde{\Gamma}_{23}^3 = \cot \theta. \end{aligned} \quad (4.30)$$

O "ponto" representa a derivada com respeito ao tempo. De posse dos símbolos, podemos determinar as componentes não nulas do tensor de Ricci através de

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = \frac{\partial\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\tilde{\Gamma}_{\mu\rho}^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\sigma}\tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\rho} - \tilde{\Gamma}_{\mu\rho}^{\sigma}\tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}^{\rho}. \quad (4.31)$$

Com isso,

$$\tilde{R}_{00} = -3 \frac{(\ddot{a}f + \dot{a}\dot{f})}{af}, \quad (4.32)$$

$$\tilde{R}_{11} = \frac{\ddot{a}af^2 + 2\dot{a}^2 f^2 + \dot{a}a\dot{f}f + 2k}{(1 - kr^2)}, \quad (4.33)$$

$$\tilde{R}_{22} = r^2 (\ddot{a}af^2 + 2\dot{a}f^2 + \dot{a}a\dot{f}f + 2k), \quad (4.34)$$

$$\tilde{R}_{33} = \tilde{R}_{22} \sin^2 \theta. \quad (4.35)$$

Através do escalar de curvatura do tipo

$$\tilde{R} = \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{R}_{\mu\nu} = \frac{6}{a^2} (\ddot{a}af^2 + \dot{a}^2 f^2 + \dot{a}a\dot{f}f + k). \quad (4.36)$$

O tensor energia-momento para fluidos perfeitos pode ser escrito como

$$T_{\mu\nu} = -((\rho + p)U_{\mu}U_{\nu} - pg_{\mu\nu}). \quad (4.37)$$

Onde a isotropia espacial não permite componentes espaciais da velocidade macroscópica do meio $U_\mu = (1, \vec{0})$, esta abordagem modifica suas componentes da seguinte forma, $T_{\mu\nu} = \text{diag}(-\rho, -a^2 f^2 p/(1 - kr^2), -a^2 r^2 f^2 p, -a^2 r^2 \sin^2 \theta f^2 p)$. Observando a definição dada em (4.15), as componentes não nulas modificadas pela função rainbow são

$$\tilde{T}_{00} = f^{-2} \sum_i \rho_i, \quad \tilde{T}_{11} = \frac{a^2}{(1 - kr^2)} \sum_i p_i, \quad \tilde{T}_{22} = a^2 r^2 \sum_i p_i, \quad \tilde{T}_{33} = a^2 r^2 \sin^2 \theta \sum_i p_i. \quad (4.38)$$

Logo, com essas modificações surgidas pela nova métrica. Vamos obter, as equações de Friedmann para a gravidade Rainbow. para as componentes $(\mu, \nu) = (0, 0)$

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3f^2} \sum_i \rho_i - \frac{k}{a^2 f^2} \quad (4.39)$$

e para as componentes $(\mu, \nu) = (1, 1) = (2, 2) = (3, 3)$, vamos obter a mesma equação,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3f^2} \sum_i (\rho_i + 3p_i) - \frac{\dot{f}}{f} H. \quad (4.40)$$

4.3 Setor do Campo de Ínflaton

4.3.1 Equação de Movimento

Na seção (3.1) determinamos a equação de movimento para o setor de campo ínflaton, fazendo uso da métrica padrão de FRW, aplicada na equação (3.10). Conforme vimos, a métrica de FRW foi modificada pelas funções rainbow (4.17). Portanto, vamos reescrever a equação de movimento modificada. Partindo da equação de movimento citada:

$$\frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \partial_\mu \left(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right) - V_\phi = 0. \quad (4.41)$$

Neste caso, \tilde{g} é dado por $\tilde{g} = -f^{-2} a^6 r^4 \sin^2 \theta / (1 - kr^2)$, e $V_\phi = dV/d\phi$. Como \tilde{g} e ϕ permanecem dependendo apenas do tempo, a equação anterior torna-se

$$\frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \partial_0 \left(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{00} \partial_0 \phi \right) - V_\phi = 0 \iff 3 \frac{\dot{a}}{a} f^2 \dot{\phi} + f \dot{f} \dot{\phi} + f^2 \ddot{\phi} + V_\phi = 0, \quad (4.42)$$

o parâmetro de Hubble continua do tipo $H \equiv \dot{a}/a$. Assim, podemos reescrever a equação de movimento do campo escalar ϕ (4.41) com a presença da gravidade rainbow, na seguinte forma

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\dot{f}}{f} \dot{\phi} + f^{-2} V_\phi = 0. \quad (4.43)$$

Portanto, a presença da função rainbow e de sua derivada na equação de movimento (4.52) indicará novos efeitos que observaremos mais adiante. Notamos que, no regime de baixas energias, quando ($f \rightarrow 1$), recuperamos o caso usual.

4.3.2 Tensor Energia-Momento para o ínlaton

Com as modificações devido a gravidade rainbow, e considerando $\phi(t)$ como constituinte dominante na lagrangeana,

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi f^{-2} \eta_{\mu\nu} \partial^\nu \phi - V(\phi), \quad (4.44)$$

aplicando a lagrangeana na equação (2.9) obtemos a equação

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = f^{-2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} \tilde{\mathcal{L}}. \quad (4.45)$$

Com isso, obtemos as componentes do tensor energia-momento modificado

$$\tilde{T}_{00} = f^{-2} \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \dot{f} f^{-3} \dot{\phi} \phi + V(\phi), \quad (4.46)$$

$$\tilde{T}_{11} = \frac{a^2}{(1 - kr^2)} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - \phi \dot{\phi} \frac{\dot{f}}{f} - f^2 V(\phi) \right), \quad (4.47)$$

$$\tilde{T}_{22} = a^2 r^2 \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - \phi \dot{\phi} \frac{\dot{f}}{f} - f^2 V(\phi) \right), \quad (4.48)$$

$$\tilde{T}_{33} = a^2 r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - \phi \dot{\phi} \frac{\dot{f}}{f} - f^2 V(\phi) \right). \quad (4.49)$$

Assim, quando comparamos com os resultados obtidos em (4.38)

$$\tilde{\rho}_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \phi \dot{\phi} \frac{\dot{f}}{f} + f^2 V(\phi) \quad e \quad \tilde{p}_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \phi \dot{\phi} \frac{\dot{f}}{f} - f^2 V(\phi). \quad (4.50)$$

Podemos reescrever as equações anteriores como [38]:

$$\tilde{\rho}_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \int \dot{\phi}^2 \frac{\dot{f}}{f} dt + \int f^2 dV \quad e \quad \tilde{p}_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \int \dot{\phi}^2 \frac{\dot{f}}{f} dt - \int f^2 dV. \quad (4.51)$$

Substituindo esta informação na equação de continuidade para um fluido cosmológico (2.38), vamos chegar à equação de movimento modificada pela gravidade Rainbow

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\dot{f}}{f}\dot{\phi} + f^{-2}V_\phi = 0. \quad (4.52)$$

Esta expressão é equivalente a equação de movimento obtida através dos campos escalares.

4.4 Parâmetros Cosmológicos

4.4.1 Equação de estado

Considerando (2.39), com os resultados obtidos em (4.50) podemos escrever a equação de estado para o campo do inflaton, dado por

$$\omega = \frac{\frac{\dot{\phi}^2}{2} - \phi \dot{\phi} \frac{\dot{f}}{f} - f^2 V(\phi)}{\frac{\dot{\phi}^2}{2} + \phi \dot{\phi} \frac{\dot{f}}{f} + f^2 V(\phi)}. \quad (4.53)$$

Quando o potencial é a parte dominante, temos o caso inflacionário usual ($\omega = -1$). Por outro lado, quando a parte cinética no final da inflação domina a parte do potencial escalar, encontramos a interessante equação de estado:

$$\omega = \frac{1 - 2f^{-1} \dot{f} \dot{\phi} \dot{\phi}^{-1}}{1 + 2f^{-1} \dot{f} \dot{\phi} \dot{\phi}^{-1}}, \quad (4.54)$$

Ao considerar a equação (4.26) no regime: $a_0 \ll a$ e $C_1 \ll 1$, encontramos

$$\frac{\dot{f}}{f} \rightarrow \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} = \frac{a_0 C_1}{4} H. \quad (4.55)$$

Então, a equação (4.54) pode ser escrita na forma

$$\omega(t) = \frac{2 - a_0 C_1 H \phi (\dot{\phi})^{-1}}{2 + a_0 C_1 H \phi (\dot{\phi})^{-1}} \quad (4.56)$$

que deve concordar com o regime dominado pela radiação, $\omega \rightarrow \frac{1}{3}$, com $a_0 C_1 H \phi (\dot{\phi})^{-1} \rightarrow 1$. Por outro lado, o regime dominado pela matéria, $\omega = 0$, pode ser garantido em $a_0 C_1 H \phi (\dot{\phi})^{-1} \rightarrow 2$. Note também que é possível obter uma equação de estado dependente do desvio para o vermelho. Primeiro, consideramos a seguinte mudança de variável: $d/dt = -H(z)(1+z)d/dz$. Assim, a equação (4.56) assume a forma

$$\omega = \frac{1 + 2f^{-1} \dot{f} \phi(z) (H(z)(1+z)\phi'(z))^{-1}}{1 - 2f^{-1} \dot{f} \phi(z) (H(z)(1+z)\phi'(z))^{-1}}, \quad (4.57)$$

onde usamos a notação, $\phi'(z) = d\phi/dz$. E a equação (4.23) nos conduz a

$$\frac{\dot{f}}{f} \simeq \frac{(1+z)}{2z} H. \quad (4.58)$$

Substituindo na equação anterior, ficamos com

$$\omega(z) = \frac{z + \phi(z) (\phi'(z))^{-1}}{z - \phi(z) (\phi'(z))^{-1}}. \quad (4.59)$$

E no limite, $z \rightarrow 0$ que leva a $\omega(z) \rightarrow -1$, que representa o regime de energia escura.

As equações de Friedmann e a equação (4.52) especificam completamente a evolução do sistema. O regime de rolagem lenta, trata apenas dos efeitos da velocidade, desconsiderando os efeitos da aceleração [33]. Para que isso ocorra, a primeira condição afirma que durante o regime inflacionário, o ínflaton varia lentamente em um potencial $V(\phi)$, tal que, considerando o regime de rolagem lenta

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} + \phi \dot{\phi} \frac{\dot{f}}{f} \ll f^2 V(\phi) \quad (4.60)$$

Tal condição nos diz que os termos de energia e pressão em (4.50) podem ser aproximados por, $\tilde{\rho}_\phi \approx V(\phi) f^2$ e $\tilde{p}_\phi \approx -V(\phi) f^2$ respectivamente, da equação (4.53) podemos concluir que $\omega \approx -1$. Portanto, o ínflaton gera uma rápida expansão no Universo primitivo, o que permite resolver o problema das condições iniciais do Universo, que passam agora a ser determinadas pelo ínflaton. Para compreendermos as consequências destes resultados, vamos analisar uma solução do espaço plano ($k = 0$). Assim, a equação de Friedmann (4.39) pode ser escrita

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\tilde{\rho}_\phi}{f^2}, \quad (4.61)$$

logo

$$H = \frac{d \log a}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G V(\phi)}{3}}. \quad (4.62)$$

Para que a primeira condição de rolagem lenta se mantenha por um longo período, devemos impor que a derivada temporal dessa condição também seja válida. Isso dá a segunda condição [33], $|\ddot{\phi}| \ll |V_\phi|$. Aplicando na equação de movimento

$$3H\dot{\phi} + \frac{\dot{f}}{f}\dot{\phi} + f^{-2}V_\phi = 0. \quad (4.63)$$

Ou, na forma explícita

$$3H\dot{\phi} + \frac{a_0 C_1}{4} H \dot{\phi} + \frac{2(a - a_0)}{(2 - C_1)a - 2a_0} V_\phi = 0. \quad (4.64)$$

Usando a equação anterior, podemos escrever

$$\dot{\phi} = -\frac{4}{12 + (a_0 - 6)C_1} \frac{V_\phi}{H}. \quad (4.65)$$

Vamos considerar o potencial do campo de ínflaton do tipo; $V(\phi) = m^2 \phi^2 / 2$. Logo, podemos reescrever

$$\dot{\phi} = -\frac{m}{\sqrt{12\pi G}} \frac{1}{(1 + \frac{1}{12}(a_0 - 6)C_1)}. \quad (4.66)$$

Integrando a expressão anterior, obtemos a equação para o campo em função do tempo

$$\phi(t) = \phi_0 - \frac{m}{\sqrt{12\pi G}} \frac{t}{(1 + \frac{1}{12}(a_0 - 6)C_1)}. \quad (4.67)$$

Finalmente, inserimos a equação (4.67) na expressão do potencial, depois substituímos na equação (4.62). Assim, podemos determinar o fator de escala

$$a(t) = a_0 \exp \left[\sqrt{\frac{4\pi G}{3}} m \phi_0 t - \frac{m^2 t^2}{6(1 + \frac{1}{12}(a_0 - 6)C_1)} \right]. \quad (4.68)$$

Note que a modificação devido a função rainbow, afeta a parte quadrática no tempo.

4.4.2 O número de e-folds

Agora, para entendermos o efeito da violação de Lorentz na fase inflacionária do Universo, vamos encontrar o número de e-folds, definido como:

$$N_e = \int_{t_i}^{t_f} H dt, \quad (4.69)$$

podemos fazer

$$N_e = \int_{t_i}^{t_f} H \frac{d\phi}{d\phi} dt = \int_{\phi(t_i)}^{\phi(t_f)} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi, \quad (4.70)$$

agora, utilizando o resultado obtido em (4.65) encontramos

$$\begin{aligned} N_e &= -3(1 + \frac{1}{12}(a_0 - 6)C_1) \int_{\phi(t_i)}^{\phi(t_f)} \frac{H^2}{V_\phi} d\phi \\ &= -8\pi G(1 + \frac{1}{12}(a_0 - 6)C_1) \int_{\phi(t_i)}^{\phi(t_f)} \frac{V(\phi)}{V_\phi} d\phi. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Para o potencial definido anteriormente, obtemos o número de e-folds modificado

$$\begin{aligned} N_e &= -4\pi G(1 + \frac{1}{12}(a_0 - 6)C_1) \int_{\phi(t_i)}^{\phi(t_f)} \phi d\phi \\ &= 2\pi G(1 + \frac{1}{12}(a_0 - 6)C_1)(\phi(t_i)^2 - \phi(t_f)^2). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Podemos assumir $\phi(t_f) \approx 0$, logo

$$N_e = 2\pi G(1 + \frac{1}{12}(a_0 - 6)C_1)\phi(t_i)^2. \quad (4.73)$$

Assim,

$$\phi(t_i)^2 = \frac{6N_e}{\pi G(12 + (a_0 - 6)C_1)}, \quad (4.74)$$

representando uma modificação na estrutura do campo de inflaton.

4.4.3 Espectro de Potência

Além das abordagens acima, existem outras propriedades cosmológicas que podem ser derivadas do parâmetro de rolagem lenta, bem como do espectro de potência. Vamos primeiro observar as consequências deste modelo inflacionário para os dois primeiros parâmetros de rolagem lenta, cujas formas explícitas no regime de rolagem lenta são [39]

$$\epsilon = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V_\phi}{V} \right)^2 \quad (4.75)$$

e

$$\eta = \frac{1}{8\pi G} \frac{V_{\phi\phi}}{V} \quad (4.76)$$

que nos leva ao resultado

$$\epsilon = \eta = \frac{1}{4\pi G \phi^2}. \quad (4.77)$$

Este resultado é consistente com um regime inflacionário caótico a partir de um potencial quadrático. Através da equação (4.74), a equação (4.77) nos conduz a

$$\epsilon = \eta = \frac{(12 + (a_0 - 6)C_1)}{24N_e}. \quad (4.78)$$

A condição de planura é alcançada quando os parâmetros de rolagem lenta são muito pequenos, ou melhor, no limite $|\epsilon| \ll 1$ e $|\eta| \ll 1$; alternativamente, a inflação cósmica termina quando esse limite é violado, ou melhor, no limite $\epsilon \approx 1$, $\eta \approx 1$.

Em um cenário inflacionário padrão, a força das perturbações do tensor é diretamente relacionado com a amplitude da densidade de energia. Sabemos que o espectro da potência para perturbação escalar é dado por [11]

$$P_\zeta = \frac{H^4}{4\pi^2 \dot{\phi}^2}, \quad (4.79)$$

onde ϕ é o campo escalar. Observamos que todas as quantidades são determinadas em um horizonte cruzado [37]. Tal parâmetro nos permite calcular o chamado índice espectral escalar, o qual é dado

$$n_s - 1 \equiv \frac{1}{HP_\zeta} \frac{dP_\zeta}{dt}, \quad (4.80)$$

e este parâmetro é muito importante como um teste para modelos cosmológicos, uma vez que é medido diretamente na CMB. Uma maneira equivalente de representar n_s é considerando a expressão

$$n_s = -6\epsilon + 2\eta = -4\epsilon \quad (4.81)$$

onde usamos o fato de que $\epsilon = \eta$ devido a aproximação de rolagem lenta. Considerando a Eq.(4.77), temos que:

$$n_s = -4\epsilon = -\frac{4}{4\pi G \phi(t)^2} = -\frac{2}{N_e} - \frac{(a_0 - 6)C_1}{6N_e}. \quad (4.82)$$

Tal que,

$$n_s - 1 = -\frac{2}{N_e} - 1 - \frac{(a_0 - 6)C_1}{6N_e}. \quad (4.83)$$

E, pela condição: $-2/N_e > -1$, teremos

$$n_s - 1 \approx -\frac{2}{N_e} - \delta_{n_s}, \quad (4.84)$$

onde

$$\delta_{n_s} = \frac{(a_0 - 6)C_1}{6N_e} \quad (4.85)$$

com a condição de que $6N_e > (a_0 - 6)C_1$ e $\phi(t) = \phi(t_i)$, consistente com o regime da energia escura. Recentemente em "Planck 2015 results XIII. Cosmological Parameters"[40] foi obtido um valor para o índice espectral escalar $n_s = 0.9655 \pm 0.0062$. Neste cenário, podemos estabelecer um limite para o fator $C_1 = NB_0\lambda_0^2$ através dos dados da CMB. Este, é um ponto de perspectiva desta dissertação.

5 Conclusão e Perspectivas

Nesta dissertação, estudamos a cosmologia inflacionária através de uma visão alternativa: a métrica de FRW modificada pelas funções rainbow com dependência da posição (o redshift).

Desenvolvemos um trabalho de revisão de pontos da relatividade geral e da cosmologia padrão. No caso da relatividade geral, destacamos as demonstrações para se obter as equações de Einstein, tensor energia- momento e as equações de Friedman. No caso da cosmologia inflacionária, estudamos a dinâmica de um campo de ínflaton e as equações de estado associadas.

Ao considerar os efeitos das funções rainbow sobre a métrica FRW, inicialmente introduzimos tais funções e verificamos os seus impactos na relação de dispersão, reproduzindo uma forte modificação nas velocidades de grupo e de fase. Ao estudar as propriedades do índice de refração, vinculamos a função rainbow (f), que modifica o setor temporal da métrica de FRW, ao redshift e comprimento de onda. Neste ponto, foi possível estabelecer uma associação para a função rainbow com parâmetros da ótica cosmológica. Neste caso, a sua associação com o redshift, estabeleceu a dependência temporal dessa quantidade, resultado chave desse trabalho, pois abre a possibilidade de uma relação direta da função rainbow com parâmetros da cosmologia inflacionária no regime da energia escura. A velocidade efetiva do campo de ínflaton, agora descrita por $v(z)$ é identicamente zero para $z = 0$ (baixos redshifts) e próxima da velocidade da luz para redshifts muito grandes. Isto indica que na fase de aquecimento cosmológico (no regime UV), o campo de ínflaton desenvolveu uma fase dominada pela radiação. Enquanto que no contexto atual (regime IR) espera-se que o campo seja responsável pela dinâmica da energia escura.

Os impactos da função rainbow sobre as estruturas das equações de Einstein, da dinâmica do campo ínflaton e das equações de Friedmann foram investigados. Neste caso, verificamos que de fato, essa função modifica tais estruturas, resultando numa forte modificação nas densidades de energia e de pressão, obtidas através do tensor energia-momento. Com isto, foi possível obter uma equação de estado com dependência da posição (redshift e comprimento de onda). Onde, através do regime de rolagem lenta podemos reproduzir um universo com expansão acelerada.

Destacamos também, a combinação do regime de rolagem lenta com o regime dominado pela função rainbow, que nos possibilitou desenvolver correções para alguns parâmetros cosmológicos. Isto, certamente nos conduzirá a desenvolver outros estudos capazes compreender, como este cenário impacta sobre a fase inflacionária do Universo. Uma outra investigação interessante desta dissertação foi a determinação do índice espectral

escalar, n_s , que abre a perspectiva de estabelecer vínculos aos parâmetros óticos associados a função rainbow via dados experimentais da radiação cósmica de fundo (CMB).

Referências

- 1 ALBRECHT A E STEINHARDT, P. Cosmologia para grandes teorias unificadas com quebra de simetria induzida por radiação. v. 3, p. 158, 1987. Citado na página 13.
- 2 GUTH, A. H. Universo inflacionário: Uma possível solução para os problemas de horizonte e planura. *Physical Review D*, APS, v. 23, n. 2, p. 347, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 31.
- 3 MUKHANOV, V. F.; FELDMAN, H. A.; BRANDENBERGER, R. H. Theory of cosmological perturbations. *Physics Reports*, Elsevier, v. 215, n. 5-6, p. 203–333, 1992. Citado na página 13.
- 4 WANG, Z. C. S. Nearly scale-invariant power spectrum and quantum cosmological perturbations in the gravity's rainbow scenario. *THE EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL C*, n. 259, p. 1–2, 2015. Citado na página 13.
- 5 MAGUEIJO JOÃO E SMOLIN, L. Gravity's rainbow. *INSTITUTE OF PHYSICS*, v. 21, n. 7, p. 1725, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 13, 33 e 35.
- 6 LING YI E WU, Q. The big bounce in rainbow universe. Elsevier, v. 687, n. 2-3, p. 103–109, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 33.
- 7 Moffat, J. W. Superluminary Universe:. a Possible Solution to the Initial Value Problem in Cosmology. *International Journal of Modern Physics D*, v. 2, n. 3, p. 351–365, jan. 1993. Citado na página 13.
- 8 Barrow, J. D.; Magueijo, J. Solving the flatness and quasi-flatness problems in Brans-Dicke cosmologies with a varying light speed. *Classical and Quantum Gravity*, v. 16, n. 4, p. 1435–1454, abr. 1999. Citado na página 13.
- 9 MYERS, R. C.; POSPELOV, M. Ultraviolet modifications of dispersion relations in effective field theory. *Phys. Rev. Lett.*, v. 90, p. 211601, 2003. Citado na página 14.
- 10 PASSOS, E. et al. Lorentz invariance violation and simultaneous emission of electromagnetic and gravitational waves. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 772, p. 870–876, 2017. Citado na página 14.
- 11 KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Electrodynamics with lorentz-violating operators of arbitrary dimension. *Physical Review D*, APS, v. 80, n. 1, p. 015020, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 44.
- 12 ALMEIDA, C. et al. Cosmology in the universe with distance dependent lorentz-violating background. *Advances in High Energy Physics*, Hindawi, v. 2017, 2017. Citado na página 14.
- 13 RYDEN, B. *Introduction to cosmology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 15, 23 e 26.
- 14 MUKHANOV, V. *Physical foundations of cosmology*. [S.l.]: Cambridge university press, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 23.

- 15 SOUZA, R. E. D. *Introdução à cosmologia*. [S.l.]: Edusp, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 27.
- 16 D'INVERNO, R. A. *Introducing Einstein's relativity*. [S.l.]: Clarendon Press, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 19.
- 17 WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. First edition. [S.l.: s.n.], 1972. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- 18 RINDLER, W. *Relativity: special, general, and cosmological*. First edition. [S.l.]: Oxford University Press, 2006. Citado na página 16.
- 19 WALD, R. M. *General relativity*. [S.l.]: University of Chicago press, 2010. Citado na página 16.
- 20 FARAONI, V. *Correspondência entre um campo escalar e um fluido perfeito efetivo*. [S.l.]: APS, 2012. 024040 p. Citado 3 vezes nas páginas 16, 29 e 30.
- 21 LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *The classical theory of fields*. [S.l.]: Pergamon, 1971. Citado na página 16.
- 22 GLEISER, M. *A dança do universo: dos mitos de criação ao Big-Bang*. [S.l.]: Editora Companhia das Letras, 2006. Citado na página 16.
- 23 ON, O. N. *Cosmologia: Da origem ao fim do Universo. Curso à distância*. [S.l.: s.n.], 2015. Acesso em: 10 Mar 2020. Citado na página 16.
- 24 FALCIANO, F. Geometria, espaço-tempo e gravitação: conexão entre conceitos da relatividade geral. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 31, n. 4, p. 4308–4317, 2009. Citado na página 17.
- 25 PORTO, C. M.; PORTO, M. Uma visão do espaço na mecânica newtoniana e na teoria da relatividade de einstein. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 30, n. 1, p. 1603–1, 2008. Citado na página 17.
- 26 RESNICK, R.; WATANABE, S. *Introdução à relatividade especial*. [S.l.]: Editora da Universidade de São Paulo, 1971. Citado na página 17.
- 27 CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry: an introduction to General Relativity*. [S.l.]: Benjamin Cummings, 2004. Citado na página 18.
- 28 SANTOS, J. J. R. dos. *Tópicos em Cosmologia com Campos Escalares*. [S.l.]: Universidade Federal da Paraíba, 2011. Citado na página 19.
- 29 SANTOS, J. J. R. d. et al. *Tópicos em cosmologia com campos escalares*. Universidade Federal da Paraíba, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- 30 DODELSON, S. *Modern cosmology*. [S.l.]: Elsevier, 2003. Citado na página 25.
- 31 GUTH, A. H. Inflation and the new era of high-precision cosmology. *Physics @ MIT*, p. 28–39, 2002. Citado 5 vezes nas páginas 26, 27, 28, 29 e 32.
- 32 HEECK, J. *Introduction to inflation*. 2011. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.

- 33 LESGOURGUES, J. *Inflationary cosmology*. [S.l.]: Troisième cycle de la physique en Suisse romande, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 29, 31 e 42.
- 34 SHANKS, T. et al. *Observational tests of cosmological inflation*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 348. Citado na página 31.
- 35 ASHOUR A E ALCHEIKH, M. e. C. N. Equações de friedmann modificadas gerais no universo plano do arco-íris, por termodinâmica. Springer, v. 79, p. 127, 2019. Citado na página 33.
- 36 LING, Y. Rainbow universe. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2007, n. 08, p. 017, 2007. Citado na página 33.
- 37 HECHT, E. Optics (addision wesley, san francisco). *Chap*, v. 10, p. 500, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 36, 37 e 44.
- 38 LIN, K.; YANG, S.-Z. Exact scalar field inflationary solution in rainbow universe. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, v. 47, n. 11, p. 2991–2996, 2008. Citado na página 40.
- 39 ELLIS, J.; FAIRBAIRN, M.; SUEIRO, M. Rescuing quadratic inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2014, n. 02, p. 044–044, feb 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2014/02/044>>. Citado na página 44.
- 40 ADE, P. A. et al. Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, EDP sciences, v. 594, p. A13, 2016. Citado na página 45.