**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**
**Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG**

# Uma Contribuição ao Ensino do Cálculo de Raízes Quadradas e Cúbicas

Marcos Vinícius Aurelio de Lima

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros

Campina Grande - PB
Agosto/2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG.

L732c LIMA, Marcos Vinicius Aurelio de.

Uma contribuição ao ensino do cálculo de raízes quadradas e cúbicas / Marcos Vinicius Aurelio de Lima. Campina Grande, 2013.
59 f.:il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso ( Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2013.

"Orientação: Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros".
Referências.

1. Raiz Quadrada. 2. Raiz Cúbica. 3. Métodos Iterativos.
I. Medeiros, Luiz Antônio da Silva. II. Título

CDU-511.14(043)

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**
**Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG**

# Uma Contribuição ao Ensino do Cálculo de Raízes Quadradas e Cúbicas

**por**

**Marcos Vinicius Aurelio de Lima** †

Trabalho Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Bolsista CAPES

# Uma Contribuição ao Ensino do Cálculo de Raízes Quadradas e Cúbicas

**por**

**Marcos Vinicius Aurelio de Lima**

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado por:

Débora Borges Ferreira

Prof. Dra. Débora Borges Ferreira, UFRN

Rosana Marques

Prof. Dra. Rosana Marques da Silva, UFCG

Luiz A. Medeiros

Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros - UFCG
Orientador

**Universidade Federal de Campina Grande**
**Centro de Ciências e Tecnologia**
**Unidade Acadêmica de Matemática**
**Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**

**Agosto/2013**

# Dedicatória

A minha mãe, Helena Nunes, pelo exemplo de vida, pelo incentivo constante e por tudo que me ensinou.

# Agradecimentos

A Deus, por Sua infinita misericórdia e amor incondicional.

A Lucas e Matheus, meus filhos amados, pela compreensão e inspiração.

A Elizete, Eliete, Helena, Elizabeth ( In Memorian) e Eli, minhas irmãs queridas, pelo carinho e apoio.

Aos professores Aldo Trajano e Fernando Luiz, pelo apoio e incentivo para essa empreitada.

A Soraya Martins, por está presente em todos os momentos dessa jornada, apoiando-me e incentivando-me, e pela sua imensa contribuição.

Ao meu orientador, professor Luiz Antônio, pela paciência, dedicação, apoio e incentivo, e pelas valorosas contribuições para engrandecimento do meu trabalho.

As professoras Débora Borges e Rosana Marques, que gentilmente participaram da banca e apresentaram significativas contribuições para o enrequecimento deste trabalho.

Agradeço à Universidade Estadual da Paraíba pelo apoio e pela liberação parcial de minha carga horária semanal para que eu pudesse me dedicar ao PROFMAT.

Agradeço à Universidade Federal de Campina Grande pelo oferecimento do curso.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

# Resumo

Neste trabalho elaboramos um resgate de métodos para o cálculo de raízes quadradas e cúbicas de um número real que, embora sejam muito antigos, podem ser desconhecidos por determinados professores de matemática. A fim de possibilitar a compreensão desses métodos, procuramos justificar e explicar os métodos envolvivos, os quais, levados à sala de aula, permitem ao aluno encontrar raízes exatas ou não, sem decorar resultados, de modo mais significativo: utilizando operações aritméticas. Para tal, elaboramos uma atividades didática pautada na utilização do conceito de sequências, com vistas à obter resultados de forma dinâmica, favorecendo a compreensão do conceito de radiciação, mais especificamente as raízes quadrada e cúbica.
**Palavras Chaves:** Raiz Quadrada. Raiz Cúbica. Métodos Iterativos.

# Abstract

In this work, we propose a rescue methods for calculating square and cube roots of a real number which, although very old, may be unfamiliar to some of the math teachers. To facilitate the understanding of these methods, we seek to justify and explain the procedures involved. Such methods, allow the student, finding exact roots or not, results without decorating, more significantly, through arithmetic operations. To this end, we developed a propost of learning activities that allow the use of the term and closing sequences to obtain results dynamically, promoting understanding the concept of root extraction, more specifically the square root and cube root.
**Keywords:** Square root. Cubic root. Iteratives Methods.

# Lista de Figuras

# Lista de Tabelas

# Lista de Abreviaturas e Siglas

ABNT . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . Associação Brasileira de Normas Técnicas
SBM . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . Sociedade Brasileira de Matemática
UAMAT . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . Unidade Acadêmica de Matemática

# Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$ .......... Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$ .......... Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$ .......... Conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$ .......... Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ .......... Conjunto dos números irracionais
$\mathbb{C}$ .......... Conjunto dos números complexos

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

Na antiguidade, muitos problemas de geometria envolvendo divisões de terras, estavam relacionados à obtenção de uma raiz quadrada. De fato, atualmente tais problemas podem ser modelados por equações do segundo grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, cuja solução, devido à *Bháskara,* envolve a raiz do discriminante

$$\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Não obstante, o problema da quadratura do círculo de cerca de 2.000 a. C. (ver [2], pg. 245) que consiste em construir, com régua e compasso, um quadrado que tenha exatamente a mesma área do círculo dado revela a necessidade de se obter a raiz quadrada de $\pi$. Ora, sendo este um número irracional, a obtenção de $\sqrt{\pi}$ por um procedimento finito é impossível, uma vez que $\sqrt{\pi}$ também é um número irracional, portanto possui uma representação decimal infinita e não periódica, assim como as raízes quadradas de números primos. Naquela época, já estava clara a necessidade de se trabalhar com aproximações, ou pelo menos os matemáticos daquele período se contentavam em obter estimativas aproximadas das raízes $n-$ésimas.

Com o passar do tempo, vários métodos para obtenção das raízes quadradas exatas ou aproximadas foram surgindo. Atualmente, é possível encontrar a raiz n-ésima de quase todo número usando uma calculadora, um computador ou até mesmo um celular. Isso por que não se pode determinar exatamente as raízes quadradas de números irracionais. Pode-se ter, np máximo, uma boa aproximação desta. Por outro lado, tanto as calculadoras quanto os computadores mais modernos podem apresentar erros de arrendondamento ou truncamento que surgem ao se tentar representar numeros decimais que não possuem representação binária finita ([0], pg. 10).

Ao efetuarmos o cálculo

$$\frac{\sqrt{1 + (10^{-6})^2} - 1}{10^{-8}},$$

em uma calculadora convencional ou mesmo em calculadora científica CASIO $HPfx-$

82*MS* por exemplo, obtemos como resultado o valor igual a *zero*, isto é

$$\frac{\sqrt{1+10^{-12}}-1}{10^{-8}}=0,$$

o que é obviamente um absurdo, uma vez que sendo $1+10^{-12}>1$.

O cálculo da raiz quadrada ou da raiz cúbica de um número real não é ou não deve ser um problema que paralise um aluno do Ensino Médio da Educação Básica, principalmente se os envolvidos no processo de ensino aprendizagem estiverem usufruindo das novas tecnologias de informação.

Tal situação desperta alguns questionamentos acerca do uso das Tecnologias de Informação (TI) e o cálculo das raízes $n$-ésimas de um número real:

1. A utilização de novas TI's podem trazer dificuldades para o ensino?

2. Podemos incorporar à prática pedagógica um recurso didático simplesmente por conta de sua importância utilitária?

3. Os alunos, ou até mesmo os professores, sabem interpretar os resultados dos cálculos realizados por uma calculadora ou um computador?

A fim de refletir sobre o primeiro questionamento, Pais ([11], p. 43) afirma que a condução da prática pedagógica requer do educador a disponibilidade de um espírito de vigilância permanente ([11], pg. 43) e que a existência de condições para ocorrer a aquisição do conhecimento não é condição suficiente para uma aprendizagem efetiva ([11], pg. 45).

Neste sentido, o professor não deve utilizar uma tecnologia como recurso didático sem que tenha explorado as potencialidades e as limitações dos vários recursos que esta tecnologia oferece. Borba e Penteado ([1], pg. 69) lembram que a opção por utilizar ou não uma tecnologia deve ser feita pelo professor com base no seu próprio conhecimento. Isto é, o professor deve estar aberto à experimentação e, principalmente, buscar e trocar informações que maximizem o aproveitamento das novas tecnologias no ensino.

Com relação ao segundo questionamento, Pais ([11], pg. 103) enfatiza que a máquina em si não é capaz de produzir qualquer inovação em termos de novos conhecimentos, corroborando com os PCN para o Ensino Médio (Parâmetros Curriculares Nacionais).

> “ Não se trata de incorporar elemento de ciência contemporâneo simplesmente por conta de sua importância utilitária. Trata-se, isso sim, de prover os alunos condições para desenvolver uma visão de mundo atualizada, que inclue uma compreensão mínima das técnicas e dos princípios cientìficos em que se baseiam” (pg. 209)

Os PCN ([3]) ainda ressaltam que um Ensino Médio concebido para a universalização da Educação Básica precisa desenvolver o saber matemático, científico e tecnológico como condições da cidadania e não como prerrogativa de especialistas. Ao mesmo tempo, afirma que é necessário a compreensão dos princípios científicos presentes nas tecnologias para explicar o funcionamento do mundo, planejar, executar e avaliar as ações de intervenções e julgamentos práticos da realidade.

De acordo com Borba e Penteado ([1]) os efeitos do uso de tecnologias no ensino estão relacionados com a forma como ela é usada bem como com suas características intrínsecas, sendo "preciso entender as relações que estão estabelecidas pelo software". Portanto, é fundamental que os alunos sejam encorajados a interpretar e avaliar, com base em argumentos matemáticos, os resultados da máquina e a desenvolver uma atitude crítica em relação a estes. Para tal, é fundamental que o aluno tenha domínio dos conceitos teóricos e procedimentos operacionais envolvidos.

Porém, em particular, alguns procedimentos para o cálculo de raiz quadrada e cúbica não vêm sendo abordados no Ensino Fundamental. Geralmente, professores e alunos contam apenas com métodos não muito eficientes para cálculo de raízes não exatas e para aquelas onde o radicando é um número com grande quantidade de dígitos (algarismos). Observamos que os alunos, no Ensino Médio, apenas memorizam os algorítmos sem entender sua estrutura e dificilmente desenvolvem qualquer noção das relações entre os resultados e os operandos.

Diante das reflexões acima expostas, sentimo-nos motivados para elaborar um texto de resgate dos procedimentos para a obtenção das raízes quadrada e cúbica de um número real, além de uma sequência de atividades didáticas que tem como objetivo justificar os procedimentos para obtenção de raízes, estabelecendo uma base para a compreensão deste conceito tão elementar e fundamental no âmbito das operações ariméticas.

Tais atividades buscam desenvolver, nos alunos, a capacidade de questionar processos naturais e tecnológicos, identificar padrões, prever, interpretar e criticar resultados a partir de experimentos e demonstrações, ao mesmo tempo em que tentamos evitar a memorização indiscriminada de algoritmos,uma vez que essa prática pode trazer prejuízos ao aprendizado, conforme estabelece os PCNEM ([3]).

A escolha do tema é então bastante natural, uma vez que ele interage com os princípios tecnológicos e da formação do pensamento humano, utilizando-se desde o princípio da indução finita à análise de convergência de sequências de números reais, apresentando de forma introdutória a idéia de aproximação.

## 1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivos principais :

1. Estabelecer os procedimentos diretos e indiretos para o cálculo das raízes quadrada e cúbica;

2. Apresentar uma proposta de atividades didáticas para o ensino das raízes quadradas e cúbicas.

## 1.2 Organização

Tendo em vista à obtenção dos nossos objetivos, organizamos o texto em seis capítulos assim distribuídos: o Capítulo 1 apresenta uma breve introdução ao tema, destacando a problematização e a correspondente motivação para a elaboração deste trabalho. O Capítulo 2 descreve o conceito e as propriedades de potência de números reais, incluindo a definição e propriedades das raízes quadradas e cúbicas. No Capítulo 3 apresentamos uma análise de livros didáticos sobre o tema e resgatamos procedimentos diretos para o cálculo das raízes quadradas e cúbicas. O Capítulo 4 apresenta procedimentos indiretos para o cálculo de aproximações de raízes quadradas ou cúbicas. O Capítulo 5 descreve as atividades didáticas propostas com fundamentação, objetivos e sugestão de carga horária. E o último capítulo, 6, trará as considerações finais e a conclusão do trabalho.

# Capítulo 2

# Potência de um número real

## 2.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos a definição de potência de um número real e suas propriedades operatórias, além das definições das raízes quadradas cúbicas de um número real.

## 2.2 Potência de um número real com expoente racional

Para todo $n \in \mathbb{N}$, a potência $a^n$, de base $a$ e expoente $n$, é definida como o produto de n fatores iguais a $a$. Mais precisamente, definimos indutivamente a $n-$ésima potência de um número real pela seguinte definição:

**Definição 2.1** *Seja a um número real positivo. Defina,*

$$a^1 = a,$$
$$a^{n+1} = a \cdot a^n \ \ \textit{para cada} \ \ n > 1, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Uma consequência imediata da definição acima é o fato que em produto de potências de números naturais de mesma base conserva-se a base e somam-se os expoentes.

**Proposição 2.1** *Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ tem-se $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.*

**Demonstração.** Observe que,

$$\begin{aligned} a^m a^n &= \underbrace{a \ldots a}_{m \ vezes} \cdot \underbrace{a \ldots a}_{n \ vezes} = \\ &= \underbrace{a \cdot a \ldots a \cdot a}_{m+n \ vezes} = \\ &= a^{m+n}. \end{aligned}$$

■

**Corolário 2.2** *Para quaisquer $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$a^{m_1} a^{m_2} \dots a^{m_k} = a^{m_1+m_2+\dots+m_k}.$$

Em particular, considerando $m_1 = \dots = m_k = m$, no Corolário 2.2, obtemos o seguinte resultado:

**Corolário 2.3** *Seja a um número real. Para quaisquer $m, k \in \mathbb{N}$, vale*

$$(a^m)^k = a^{mk}.$$

**Proposição 2.4** *Sejam $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$. Então*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

**Demonstração.** Por definição de potência de expoente natural, temos

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \dots a}^{n \text{ vezes}}}{\underbrace{b \cdot b \dots b}_{n \text{ vezes}}} = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \dots \left(\frac{a}{b}\right)}_{n \text{ vezes}} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

■

**Proposição 2.5** *Se $a > 1$ e $n \in \mathbb{N}$, então $a^{n+1} > a^n$. Isto é, se $a > 1$ então*

$$1 < a < a^2 < \dots < a^n < a^{n+1} < \dots.$$

*Por outro lado, se $0 < a < 1$, então*

$$1 > a > a^2 > \dots > a^n > a^{n+1} > \dots.$$

A Proposição 2.5 mostra que a sequência cujo n-ésimo termo é $a^n$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Para $a = 1$, esta sequência é constante, com todos os seus termos iguais a 1.

Em vista de se tentar definir a potência $a^n$, quando $n$ é um número inteiro (que pode ser negativo ou zero), procuramos estender o conceito de potência de modo que sejam mantidas as propriedades anteriormente verificadas para expoentes naturais. Pela Proposição 2.1 a igualdade $a^0 \cdot a^1 = a^{0+1}$ deve ser válida, da qual se conclui que $a^0 \cdot a = a$, para qualquer $a \neq 0$. Por outro lado, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, devemos ter $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$, assim, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Estas observações motivam a definição a seguir.

**Definição 2.2** *Seja a um número real diferente de zero. Definimos:*

$$a^0 = 1 \quad e \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

**Proposição 2.6** *Para quaisquer $m,n \in \mathbb{Z}$ tem-se*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{2.1}$$

$$(a^n)^m = a^{mn} \tag{2.2}$$

**Demonstração.** Da Proposição 2.1 e do Corolário 2.3 segue que a tese é válida para $m,n \in \mathbb{N}$. Assim, Resta-nos verificar os casos em que $m$ e $n$ são inteiros não positivos. Dividiremos a análise em casos:

**Caso 1** Se $m = 0$, então

$$a^0 \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^n = a^{0+n}$$

e, desde que $a \neq 0$ então, $a^n \neq 0$. Assim,

$$(a^n)^0 = 1 = a^0 = a^{0 \cdot n},$$

provando a tese.

**Caso 2** O caso $n = 0$ é análogo ao Caso 1.

**Caso 3** Suponha $m,n < 0$. Logo, $-m,-n \in \mathbb{N}$. Utilizando a Definição 2.2 e a Proposição 2.4 obtemos,

$$a^m a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m}a^{-n}} = \frac{1}{a^{(-m)+(-n)}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

e

$$\begin{aligned} (a^n)^m &= (\frac{1}{a^{-n}})^m = \frac{1^m}{(a^{-n})^m} = \frac{1}{\underbrace{a^{-n}\ldots a^{-n}}_{m\ vezes}} \\ &= \frac{1}{a^{\underbrace{(-n)+(-n)\cdots+(-n)}_{m\ vezes}}} = \frac{1}{a^{(-n)m}} = \frac{1}{a^{-nm}} = a^{mn}. \end{aligned}$$

■

Para se definir a potência de um número real positivo com exponte racional e ao mesmo tempo manter as propriedades já definidas, deve-se exigir que para $r = \frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, tenha-se

$$\begin{aligned} (a^r)^n &= \underbrace{a^r \ldots a^r}_{n\ vezes} \\ &= a^{\overbrace{r+r+\cdots+r}^{n\ vezes}} \\ &= a^{rn} = a^m. \end{aligned}$$

Diante disso, segue a definição abaixo.

**Definição 2.3** *Sejam $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, r = \frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, e $a \in \mathbb{R}^+$. A $r-$ésima potência de $a$, denotado por $a^r$, é o número real positivo cuja n-ésima potência é igual a $a^m$.*

O sinal positivo do número $a$ da definição acima é necessário para evitar ambiguidades.

**Exemplo 2.1** *1.* $4^{\frac{3}{2}} = 8$ *uma vez que* $8^2 = 64 = 4^3$.

*2.* $(8)^{\frac{2}{3}} = 4$ *uma vez que* $4^3 = 64 = (8)^2$.

*3.* $(125)^{\frac{-1}{3}} = \frac{1}{5}$ *uma vez que* $(\frac{1}{5})^3 = \frac{1}{125} = (125)^{-1}$.

Para representar a potenciação de expoentes racionais com base positiva, utilizamos o símbolo da radiciação. Ou seja, escrevemos

$$\sqrt[n]{a^m}$$

para representar $a^{\frac{m}{n}}$.

A próxima proposição demonstra que a Definição 2.3 está bem posta, no sentido de que a potenciação de um número real positivo com expoente racional independe da representação na forma de fração desse número racional.

**Proposição 2.7** *Seja $a \in \mathbb{R}^+$. Então, para cada $p \in \mathbb{N}$ tem-se*

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}}.$$

*Ou equivalentemente,*

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}.$$

**Demonstração.** Seja $b$ o número real positivo tal que $b = \sqrt[n]{a^m}$. Por definição, $b^n = a^m$. Logo,

$$(b^n)^p = (a^m)^p \Leftrightarrow b^{np} = a^{mp}.$$

Segue que (por definição), $b = a^{\frac{mp}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp}}$. ■

**Proposição 2.8** *Para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$ e $a \in \mathbb{R}^+$ tem-se*

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}.$$

**Demonstração.** Sejam $r = \frac{m_1}{n_1}, s = \frac{m_2}{n_2}$. Suponha que $A = a^r = a^{\frac{m_1}{n_1}}$ e $B = a^s = a^{\frac{m_2}{n_2}}$. Defina $C = A \cdot B$. Mostraremos que $C = a^{r+s}$. Ora, por definição, temos

$$A^{n_1} = a^{m_1}, \ B^{n_2} = a^{m_2}. \tag{2.3}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
C^{n_1 \cdot n_2} &= (A \cdot B)^{n_1 \cdot n_2} \\
&= (A^{n_1})^{n_2} \cdot (B^{n_2})^{n_1} = (a^{m_1})^{n_2} \cdot (a^{m_2})^{n_1} \\
&= a^{m_1 n_2} \cdot a^{m_2 n_1} = a^{m_1 n_2 + m_2 n_1},
\end{aligned}
$$

que implica,

$$C = a^{\frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 \cdot n_2}} = a^{\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}} = a^{r+s}.$$

■

As duas próximas proposições encerram a análise de crescimento de uma potência de um número real positivo com expoente inteiro negativo e expoente racional.

**Proposição 2.9** *Sejam $m, n \in \mathbb{Z}^-$ e $a \in \mathbb{R}^+$.*

**(a)** *Se $a > 1$ e $m < n$, então $a^m < a^n$.*

**(b)** *Se $0 < a < 1$ e $m < n$, então $a^m > a^n$.*

*Se $m < n$, então $a^m > a^n$.*

**Demonstração.** Desde que $m, n \in \mathbb{Z}^-$ então $-m, -n \in \mathbb{Z}^+$. Além disso,

$$m < n \Leftrightarrow -m > -n.$$

Aplicando a Proposição 2.5 obtemos,

**(a)** Se $a > 1$, então

$$a^{-m} > a^{-n} \Leftrightarrow \frac{1}{a^m} > \frac{1}{a^n} \Leftrightarrow a^n > a^m.$$

**(b)** Se $0 < a < 1$, então

$$a^{-m} < a^{-n} \Leftrightarrow \frac{1}{a^m} < \frac{1}{a^n} \Leftrightarrow a^n < a^m.$$

■

**Proposição 2.10** *Sejam $r, s \in \mathbb{Q}$ com $r < s$ e $a \in \mathbb{R}^+$.*

**(a)** *Se $a > 1$, então $a^r < a^s$.*

**(b)** *Se $0 < a < 1$, então $a^r > a^s$.*

**Demonstração.** Provemos inicialmente o item (a). Sejam $r = \frac{m_1}{n_1}$ e $s = \frac{m_2}{n_2}$, com $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, e $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. O caso em $r = 0$ é trivial. Vejamos então quando $r \neq 0$, assim $m_1 \neq 0$. Suponha por contradição que $r < s$, $a > 1$ mas $a^r \geq a^s$. Colocando $a^r = b_1 > 0$ com $b_1^{n_1} = a^{m_1}$ e $a^s = b_2 > 0$ com $b_2^{n_2} = a^{m_2}$ temos,

$$b_1 = a^r \geq a^s = b_2 > 0 \text{ } e \text{ } m_1 \cdot n_2 < m_2 \cdot n_1. \tag{2.4}$$

Desde que $b_1 \geq b_2 > 0$ e $n_1 \cdot n_2 \in \mathbb{N}$ temos

$$(b_1)^{n_1 \cdot n_2} \geq (b_2)^{n_2 \cdot n_1}.$$

Dividimos o restante da demonstração em casos:

**Caso 1** Suponha $m_1 \cdot m_2 > 0$. Logo, $m_1$ e $m_2$ possuem o mesmo sinal. Da Proposição 2.9, item (a), da Proposição 2.5 e da desigualdade (2.4) segue que

$$\begin{aligned} a > 1 \Rightarrow a^{m_1 \cdot n_2} < a^{m_2 \cdot n_1} &\Rightarrow (a^{m_1})^{n_2} < (a^{m_2})^{n_1} \\ &\Rightarrow (b_1^{n_1})^{n_2} < (b_2^{n_2})^{n_1} \\ &\Rightarrow (b_1)^{n_1 \cdot n_2} < (b_2)^{n_2 \cdot n_1}. \end{aligned}$$

Logo, $b_1 < b_2$, que é uma contradição. ■

**Caso 2** Suponha $m_1 \cdot m_2 < 0$. Suponha sem perda de generalidade que $m_1 < 0 < m_2$. Do fato que $a > 1$ e $m_1 < 0$ então, $-m_1 \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{a} < 1$ e

$$0 < a^{m_1} = \frac{1}{a^{-m_1}} = (\frac{1}{a})^{-m_1} \leq \frac{1}{a} < 1. \tag{2.5}$$

Portanto,

$$a^{m_1} < 1 \Rightarrow (a^{m_1})^{n_2} < 1 < a^{m_2} \leq (a^{m_2})^{n_1} \tag{2.6}$$

$$\Rightarrow (b_1^{n_1})^{n_2} < (b_2^{n_2})^{n_1} \tag{2.7}$$

$$\Rightarrow (b_1)^{n_1 \cdot n_2} < (b_2)^{n_2 \cdot n_1}. \tag{2.8}$$

A última desigualdade implica que $b_1 < b_2$, uma contradição. ■

Passamos a demonstrar o item (b). Ora, desde que $0 < a < 1$ temos $\dfrac{1}{a} > 1$. Logo, se $r < s$ resulta do item (a) que

$$\left(\frac{1}{a}\right)^r < \left(\frac{1}{a}\right)^s \Rightarrow a^r > a^s.$$

■

**Obs. 2.1** *A potenciação de um expoente racional* $r = \frac{m}{n}$ *envolvendo uma base negativa pode não estar definida no conjunto dos números reais. Depende da paridade dos números m e n. Ilustramos esse fato considerando* $a = -1$. *Se m é par então* $a^{m/n} = ((-1)^m)^{1/n} = 1^{1/n} = 1$. *Se m é ímpar* $a^{m/n}$ *não está definido. Com efeito, se existisse* $b > 0$ *tal que* $b^n = a^m = (-1)^m$, *teríamos do lado esquerdo da última igualdade um número positivo, enquanto do lado direito, para m ímpar, teríamos o número* $-1$, *número negativo, portanto, um absurdo.*

Com vistas ao exposto e trazendo o tema à luz para o cálculo das raízes n-ésimas de números reais positivos, podemos reescrever as propriedades acima com o uso do símbolo da radiciação resumidos no Teorema 2.11 a seguir.

**Teorema 2.11** *Sejam* $a,b \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{Z}$ *e* $n \in \mathbb{N}$. *Então,*

**(a)** $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

**(b)** $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

**(c)** $\sqrt[n]{a^n} = a$.

**(d)** $\sqrt[n]{(a \cdot b)^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m}$.

Finalizamos esta seção introdutória definindo as raízes quadradas e cúbicas que são objetos de investigação deste trabalho.

**Definição 2.4** *Seja* $a \in \mathbb{R}^+$. *Define-se a raiz quadrada de* $a$, *denotada por* $\sqrt{a}$, *o número real positivo b cujo quadrado é igual ao número* $a$, *isto é*

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = b \Leftrightarrow b^2 = a, \text{ com } a,b > 0.$$

*Por definição, a raiz quadrada de zero é zero.*

**Definição 2.5** *Seja* $a \in \mathbb{R}$. *Define-se a raiz cúbica de* $a$, *denotada por* $\sqrt[3]{a}$, *o número real b cujo cubo é igual ao número* $a$, *isto é*

$$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} = b \Leftrightarrow b^3 = a, \text{ com } a,b \in \mathbb{R}.$$

A completeza da reta real, que assegura ser a reta contínua sem ausência de "buracos", garante que as definições na seção anterior estão bem postas e bem definidas, mesmo quando a base $a$ for um número irracional. Neste caso, podemos calcular a raiz quadrada (ou cúbica, se for o caso) de $a$ como o limite das raízes quadradas (cúbicas) dos termos de uma sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números racionais que convergem para $a$. Em termos da notação de limite,

$$a \notin \mathbb{Q}, \ \sqrt{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} \quad \text{com} \quad \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

O estudo de raízes de números irracionais - como limites de raízes de números racionais - não é objeto deste trabalho. O leitor interessado pode consultar o livro *Números e Funções Reais* do professor (Lima: 2012).Porém, o estudo de raízes de números irracionais será abordado neste trabalho no Capítulo 4, no qual apresentamos alguns algoritmos iterativos para a obtenção de aproximações de raízes reais, sejam elas racionais ou irracioinais, através de limites de sequências de números reais estabelecidas apenas pelas operações elementares de adição, subtração, multiplicação e divisão.

## 2.3 Potência de um número real com expoente irracional

Na seção anterior, definimos a potência de um número real com expoente racional e algumas de suas propriedades. O caso em que o expoente é um número irracional foge ao escopo deste trabalho, entretanto, apresentaremos a sua definição e ilustraremos o caso com um exemplo, sem no entanto nos aprofundarmos. Assim, os leitores que manifestarem interesse, podem consultar Lima (2012).

Definimos a potência de um número real positivo $a$ com expoente irracional $x$ como o limite de potencias de $a$ com expontes racionais $r_n$ que congervem para $x$. A completeza da reta assegura ser este limite único. Em termos matemáticos, segue a definição.

**Definição 2.6** *Seja $a \in \mathbb{R}^+$ e $x$ real arbitrário. Definimos $a^x$ ao limite $L$ dado por*

$$L = \lim_{n \to \infty} a^{r_n}, \tag{2.9}$$

*onde $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é qualquer sequência de números racionais convergindo para $x$.*

Para ilustrar esta definição, considere o problema de calcular $2^\pi$ com uma aproximação com dez casas decimais. Desde que

$$\pi \simeq 3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058^1$$

é uma aproximação de $\pi$ com 52 casas decimais, podemos utilizar a sequência $\{r_n\}$ de números racionais, obtida a partir de $\pi$ acresentando mais dígitos significativos em relação ao termo anterior para estimar uma aproximação para $2^\pi$. A Tabela 2.1, obtida a apartir da planilha eletrônica Excel, fornece na segunda coluna a aproximação da $r_n$-ésima potência de 2 com dezenove dígitos. Como se observa, $2^{r_8}, 2^{r_9}$, e $2^{r_{10}}$ concordam até a décima casa decimal, sendo portanto

$$2^\pi \approx 8,8249778270$$

com uma precisão até o décimo dígito significativo.

[1] Fonte "http://pt.wikipedia.org/wiki/Pi". Acesso em 26/07/2013.

| $n$ | $r_n$ | $2^{r_n}$ |
|---|---|---|
| 1 | $3,141500000000000000$ | $8,824411082479120000$ |
| 2 | $3,141590000000000000$ | $8,824961595059890000$ |
| 3 | $3,141592000000000000$ | $8,824973829062870000$ |
| 4 | $3,141592600000000000$ | $8,824977499267070000$ |
| 5 | $3,141592650000000000$ | $8,824977805117490000$ |
| 6 | $3,141592653000000000$ | $8,824977823468520000$ |
| 7 | $3,141592653500000000$ | $8,824977826527020000$ |
| 8 | $3,141592653580000000$ | $8,824977827016380000$ |
| 9 | $3,141592653589000000$ | $8,824977827071440000$ |
| 10 | $3,141592653589700000$ | $8,824977827075720000$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

Tabela 2.1: Aproximações da $\pi$-ésima potência de dois.

# Capítulo 3

# Procedimentos Diretos para o Cálculo de Raízes Quadradas e Cúbicas

## 3.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos algumas considerações sobre como o cálculo de raízes quadradas e cúbicas aparecem nos livros didáticos e alguns procedimentos diretos para o cálculo das mesmas acompanhados de exemplos resolvidos ilustrando os métodos[1]. A forma como são geradas as estimativas definem os métodos, que descreveremos nas próximas seções.

## 3.2 Cálculo de Raízes Quadradas e Cúbicas nos Livros Didáticos

Apresentamos, a seguir, uma análise sobre o ensino de raízes quadradas e cúbicas, a partir de dois livros didáticos adotados por escolas públicas de Campina Grande-PB no ano de 2013.

O livro "A Conquista da Matemática”, $8^o$ ano, de Giovanni Jr. e Castrucci lançado em 2009, em seu primeiro capítulo, na Seção 1 "Raiz Quadrada Exata de um Número Racional", introduz o assunto através de um problema de cálculo da medida do lado de um quadrado de área conhecida, em seguida, define número quadrado perfeito e inclui uma tabela com os quadrados dos números naturais de 1 a 20 e dos dez primeiros múltiplos de 10. Ensina a reconhecer um número quadrado perfeito por meio de figuras geométricas e só então passa a ensinar o cálculo da raiz quadrada exata de um número racional, definindo-a da seguinte forma: *"Se um número representa um produto de dois fatores iguais não negativos, então cada fator é a raiz quadrada desse número."* Apresenta, por conseguinte, três exemplos de

[1]Entende-se como procedimento direto todo algoritmo que gera uma solução em um número finito de passos.

cálculo de raízes quadradas, dois deles de números naturais e um de número racional positivo e propõe uma sequênciaque busca a repetição dos exemplos através do método de tentativa e erro. Na Seção 2 "Raiz Quadrada Aproximada de um Número Racional", em seu primeiro exemplo, utiliza-se do método de tentativas e erro com o auxílio de uma calculadora. No segundo exemplo, aborda o cálculo apenas através do método de tentativa e erro, finalizando o estudo de raízes quadradas com mais 3 atividades repetitivas. O livro não menciona cálculo de raízes cúbicas.

O livro "Matemática, Compreensão e Prática", 8° ano, de Silveira e Marques, lançado em 2008, em seu segundo capítulo na Seção 2 "Radiciação", precedido pelo estudo da potenciação, define radiciação da seguinte forma: *"Radiciação é a operação inversa da potenciação. Dados $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, define-se*

$$\sqrt[n]{a} = b \Longleftrightarrow b^n = a,$$

*sendo a o radicando, b a raiz e n o índice."*

O referido livro, além de apresentar alguns exemplos de cálculos de raízes com índices pares e índices ímpares, faz a observação de que raiz de índice par de um número negativo não tem valor real. Assim, ele escreve uma sequência dos doze primeiros quadrados perfeitos naturais, comentando que eles têm como raízes os fatores que os originaram, mostrando que a raiz quadrada de um número quadrado perfeito pode ser calculada através da decomposição do mesmo em fatores primos, segue com exemplificações e propõe 6 atividades. O estudo de raiz quadrada aproximada é introduzido através do método da tentativa e erro, e, para finalizar o estudo de radiciação, oferece 10 questões.

**Obs. 3.1** *Os livros acima analisados, além de não fazerem referência ao cálculo de raízes cúbicas, não trabalham outros métodos para o cálculo de raízes quadradas ou cúbicas além do método de tentativa e erro e da decomposição em fatores primos e não mencionam aproximações.*

## 3.3 Método de Tentativa e Erro

Este método é o preferido pelos livros didáticos da Educação Básica ([5],[14]), pois o processo utiliza-se da definição da raiz quadrada e é de fácil utilização, apesar de necessitar de muitas iterações para a obtenção da raiz.

### 3.3.1 Cálculo de Raízes Quadradas

Seja $a$ um número real positivo para o qual se deseja determinar sua raiz quadrada, digamos $r$, isto é, desejamos encontrar a solução $r$ da seguinte equação não linear

$$x^2 = a, \quad \text{com} \quad x \in \mathbb{R} \; e \; x > 0.$$

O *método das tentativas* consiste em determinar em cada passo o algarismo mais significativo à esquerda da representação decimal da raiz quadrada do número $a$.

A escolha da nova aproximação do dígito depende de como o quadrado da aproximação anterior da raiz se aproxima por falta ou por excesso do número $a$. Caso esta aproximação ocorra por falta, adotamos um dígito maior àquele anteriormente testado, no caso em que esta aproximação ocorra por excesso adotamos um dígito menor.

O método pode ser utilizado para o cálculo de raízes exatas ou raízes aproximadas. No caso de raízes exatas, o método das aproximações termina em um número de passos finito. Naturalmente, se a raiz quadrada do número $a$ possui uma representação decimal infinita, o processo que define o método das aproximações continua indefinidamente, porém, ele fornece uma aproximação com a estimativa que se desejar.

**Exemplo 3.1** *Encontrando a raiz quadrada exata do número* $a = 1369$, *pelo método de tentaviva e erro.*

Dado que o número $a$ possui quatro dígitos, a sua raiz terá dois dígitos. Separando o número $a = 1369$ em classes de dois dígitos (no caso 13.69), concluimos que o primeiro dígito da sua raiz é 3, pois seu quadrado não ultrapassa 13, enquanto o quadrado de 4 excede esse valor. De fato, $3^2 = 9$ e $4^2 = 16$.

Para obter o segundo dígito, escolhemos um dígito qualquer, por exemplo 3, determinando assim a primeira aproximação $x_1 = 33$. Desde que, $33^2 = 1089 < 1369$, definimos a segunda aproximação $x_2$ a partir de $x_1$ acrescentando uma unidade no dígito que queremos determinar, no caso o das unidades. Assim, $x_2 = 34$. O processo segue conforme Tabela 3.1, fornecendo $\sqrt{1369} = 37$.

| $k$ | $x_k$ | $x_k^2$ | Comparação entre $x_k^2$ e $n$ | Conclusão |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 34 | 1156 | $1156 < 1369$ | Acrescenta-se 1 unidade |
| 3 | 35 | 1225 | $1225 < 1369$ | Acrescenta-se 1 unidade |
| 4 | 36 | 1296 | $1296 < 1369$ | Acrescenta-se 1 unidade |
| 5 | 37 | 1369 | $1369 = 1369$ | $x_5$ é a raiz de $n$. |

Tabela 3.1: Exemplo 3.1: Método de tentativa e erro para raízes quadradas

**Exemplo 3.2** *Calculando a raiz quadrada de $a = 74529$.*

Separando o número $a$ em classes de dois algarismos, da direita para a esquerda, temos $a = 7.45.29$, como o número tem três classes, a raiz quadrada tem três dígitos. O primeiro dígito será 2, pois $2^2 = 4$ e $3^2 = 9$, logo $200^2 = 70000$, que é menor que 74529. Escolhendo o segundo dígito, digamos 7, temos $270^2 = 72900 < a$ ao passo que $280^2 = 78400 > a$. Portanto, o segundo dígito da representação da raiz é 7. Para o terceiro dígito da raiz escolhamos 4. Como $274^2 = 75076 > a$, o dígito das unidades deve ser menor ou igual a 3. Desde que $273^2 = a$, temos $\sqrt{a} = 273$

Vejamos agora a resolução na Tabela 3.2

| $k$ | $x_k$ | $x_k^2$ | Comparação entre $x_k^2$ e $n$ | Conclusão |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 200 | 40000 | $40000 < 74529$ | procurar segundo dígito |
| 2 | 270 | 72900 | $72900 < 74529$ | acrescenta-se 1 unidade |
| 3 | 280 | 78400 | $78400 > 74529$ | é a tentativa anterior |
| 4 | 274 | 75076 | $75076 > 74529$ | Procurar o terceiro dígito |
| 5 | 273 | 74529 | $74529 = 74529$ | é a raiz de $n$. |

Tabela 3.2: Exemplo 3.2: Método de tentativa e erro para raízes quadradas

**Exemplo 3.3** *Calculando a raiz quadrada de $a = 12,3201$.*

Para obtermos a raiz quadrada de $a$ pelo método de tentativa e erro, podemos, inicialemente, utilizar a relação

$$a = 12,3201 = 123201 \cdot 10^4.$$

Logo,

$$\sqrt{a} = \sqrt{123201 \cdot 10^{-4}} = \sqrt{123201} \cdot \sqrt{10^{-4}} = \sqrt{123201} \cdot 10^{-2}.$$

Portanto, o cálculo de raiz quadrada de número decimal resume-se ao cálculo de raiz quadrada de número inteiro positivo. A Tabela 3.3 apresenta a resolução para o cálculo da raiz quadrada de $\bar{a} = 123201$. Em consequência, obtemos $\sqrt{a} = 3,51$.

| $k$ | $x_k$ | $x_k^2$ | Comparação entre $x_k^2$ e $n$ | Conclusão |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 300 | 90000 | $90000 < \bar{a}$ | Procurar segundo dígito |
| 3 | 350 | 122500 | $122500 < \bar{a}$ | acrescenta-se 1 unidade |
| 4 | 360 | 129600 | $129600 > \bar{a}$ | é a tentativa anterior |
| 6 | 352 | 123904 | $123904 > \bar{a}$ | diminui-se 1 unidade |
| 7 | 351 | 123201 | $123201 = \bar{a}$ | é a raiz de $n$. |

Tabela 3.3: Exemplo 3.3: Método de tentativa e erro para raízes quadradas

### 3.3.2 Cálculo de Raízes Cúbicas

O método das aproximações, utilizado para estimar a raiz quadrada de um número $a$ pode ser ligeiramente modificado e aplicado à obtenção de raíz $n$-ésima de um número real $a$, com $n \geq 3$ e $n \in \mathbb{N}$. A única diferença reside no fato de que desejamos comparar a $n$-ésima potência de aproximações com o valor de $a$, ao invés de compararmos o quadrado das aproximações com o número $a$ dado.

A seguir apresentamos um exemplo para o cálculo de raízes cúbicas.

**Exemplo 3.4** *Cálculo da raiz cúbica do número* $a = 13,824$.

Apresentamos a solução diretamente na Tabela 3.4 que segue.

| $k$ | $x_k$ | $x_k^3$ | Comparação entre $x_k^2$ e $a$ | Conclusão |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $2,0$ | $8,0$ | $8,0 < 13,824$ | acrescenta-se 1 unidade |
| 2 | $3,0$ | $27,0$ | $27,0 > 13,824$ | é a tentativa anterior |
| 3 | $2,1$ | $9,261$ | $9,261 < 13,824$ | acrescentar 1 unidade decimal |
| 4 | $2,2$ | $10,648$ | $10,648 < 13,824$ | acrescentar 1 unidade decimal |
| 5 | $2,3$ | $12,167$ | $12,167 < 13,824$ | acrescentar 1 unidade decimal |
| 6 | $2,4$ | $13,824$ | $13,824 < 13,824$ | é a raiz cúbica de $a$. |

Tabela 3.4: Exemplo 3.4: Método de tentativa e erro para raízes cúbicas

## 3.4 Método da Fatoração

O *método da fatoração* baseia-se no Teorema Fundamental da Aritmética, dado a seguir.

**Teorema 3.1** "Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos."

**Demonstração.** A demonstração deste Teorema pode ser encontrada em ([6]) e utiliza a segunda forma do Princípio de Indução. No que segue, apresentamos a sua demonstração incluindo os detalhes.

Se $n = 2$, o resultado é obviamente verificado. Suponhamos o resultado válido para todo número natural menor do que $n$ e vamos provar que vale para $n$. Se o número $n$ é primo, nada temos a demonstrar. Suponhamos, então, que $n$ seja composto. Assim existem números naturais $n_1$ e $n_2$ tais que $n = n_1n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Pela hipótese de indução, temos que existem números primos $p_1, \ldots, p_r$ e $q_1, \ldots, q_s$ tais que $n_1 = p_1 \ldots p_r$ e $n_1 = q_1 \ldots q_s$. Portanto, $n = p_1 \ldots p_r \cdot q_1 \ldots q_s$.

Vamos agora provar a unicidade da escrita do número natural $n > 1$, como produto de fatores primos. Suponha que $n = p_1 \ldots p_r = q_1 \ldots q_s$, onde os $p_i$ e os $q_j$ são números primos. Como $p_1 | q_1 \ldots q_s$ temos que $p_1 = q_j$ para algum $j$, que, após reordenamento de $q_1,...,q_s$, podemos supor que seja $q_1$. Portanto,

$$p_2 \ldots p_r = q_2 \ldots q_s.$$

Como $p_2 \ldots p_r < n$, a hipótese de indução acarreta que $r = s$ e os $p_i$ e $q_i$ são iguais aos pares. ■

Esse método é utilizado no cálculo de raízes exatas de números inteiros ou decimais, seja ela uma raiz quadrada ou cúbica.

### 3.4.1 Cálculo de Raízes Quadradas

Seja $a$ um número real positivo para o qual se deseja calcular a sua raiz quadrada. Inicialmente, decompõe-se $a$ em potências de fatores primos. Note que. Se $a$ é um número quadrado perfeito, então os expoentes de seus fatores primos são todos pares. Nesse caso, a sua raiz quadrada é o número real $r$ que possui os mesmos fatores primos do número $a$ com expoentes iguais a um meio dos expoentes de $a$, ou seja,

$$a = (p_1)^{\alpha}(p_2)^{\beta} \ldots (p_k)^{\theta},$$

com $p_i$, primo, $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ e $\alpha, \beta, \ldots, \theta$ números pares.

Assim,

$$\sqrt{a} = (p_1)^{\frac{\alpha}{2}}(p_2)^{\frac{\beta}{2}} \ldots (p_k)^{\frac{\theta}{2}}.$$

O Método da Fatoração não é um método adequado para o cálculo de raízes de números relativamente grandes ou com grande quantidade de casas decimais. No método da fatoração, é necessário encontrar todos os divisores do número $a$ dado, contando com suas multiplicidades. Assim, se considerarmos

$$a = p_1^{\alpha} \cdot p_2^{\beta}$$

com $p_1$ e $p_2$ números primos distintos relativamente grandes, então, a decomposição de $a$ como produto de fatores primos torna-se impraticável algébrica e computacionalmente.

**Exemplo 3.5** *Calculando a raiz quadrada do número $a = 44100$ pelo método da fatoração.*

Decompondo $a$ em fatores primos, obtemos

$$44100 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2.$$

Calculando agora a sua raiz quadrada,

$$\begin{aligned} \sqrt{44100} &= 2^{\frac{2}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{2}} \cdot 5^{\frac{2}{2}} \cdot 7^{\frac{2}{2}} \\ \Rightarrow \sqrt{44100} &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210. \end{aligned}$$

No caso dos números racionais com representação decimal finita, podemos proceder de duas formas distintas:

i) Escrever o número real $a$ como uma fração irredutível de dois números reais inteiros, e decompor separadamente o numerador e o denominador dessa fração.

**Exemplo 3.6** *Calcule* $\sqrt{2,25}$.

Para encontrar a raiz quadrada de $2,25$, escreva-o como uma fração irredutível,

$$2,25 = \frac{225}{100} = \frac{9}{4}.$$

Calcular a raiz quadrada de $2,25$ é equivalente a calcular a raiz quadrada de $\frac{9}{4}$. Assim, temos

$$\sqrt{2,25} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3^{\frac{2}{2}}}{2^{\frac{2}{2}}} = \frac{3}{2}.$$

ii) Escreve-se a representação decimal do número real $a$ como sendo o produto de um número inteiro e uma potência de 10 e tenta-se decompor cada um de seus fatores.

**Exemplo 3.7** *Calculando* $\sqrt{1,5876}$.

Reescrevendo $1,5876$ como um produto de um número inteiro por uma potência de 10, temos $1,5876 = 15876 \times (10)^{-4}$, e decompondo os seus fatores, obtemos

$$1,5876 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 2^{-4} \cdot 5^{-4}.$$

Daí segue que,

$$\begin{aligned} \sqrt{1,5876} &= 2^{\frac{2}{2}} \cdot 3^{\frac{4}{2}} \cdot 7^{\frac{2}{2}} \cdot 2^{\frac{-4}{2}} \cdot 5^{\frac{-4}{2}} \\ &= 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 2^{-2} \cdot 5^{-2} \\ &= 126 \cdot 10^{-2} = 1,26. \end{aligned}$$

Logo, $\sqrt{1,5876} = 1,26.$

### 3.4.2 Cálculo de Raízes Cúbicas

Seja $a$ um número real para o qual se deseja calcular a sua raiz cúbica. Inicialmente, decompõe-se $a$ em potências de fatores primos distintos. Note que. Se $a$ é um número cubo perfeito. Então os expoentes de seus fatores são todos múltiplos de 3. Nesse caso, a sua raiz cúbica é o número real $r$ que possui os mesmos fatores primos do número $a$ com expoentes iguais a um terço dos expoentes de $a$, ou seja,

$$a = (p_1)^{\alpha} \cdot (p_2)^{\beta} \cdot \cdots \cdot (p_k)^{\theta},$$

com $p_1, p_2, \ldots, p_k$ primos distintos e $\alpha, \beta, \ldots, \theta$ múltiplos de 3. Assim,

$$\sqrt[3]{a} = (p_1)^{\frac{\alpha}{3}} \cdot (p_3)^{\frac{\beta}{3}} \cdot \cdots \cdot (p_k)^{\frac{\theta}{3}}.$$

**Exemplo 3.8** *Calculando a raiz cúbica do número* 59319*, usando o método proposto.*

Decompondo 59319 em fatores primos, obtemos

$$59319 = 3^3 \cdot 13^3.$$

Assim, $\sqrt[3]{59319} = 3^{\frac{3}{3}} \cdot 13^{\frac{3}{3}} = 3 \cdot 13 = 39$. Isto é,

$$\sqrt{59319} = 39.$$

**Exemplo 3.9** *Calculando a raiz cúbica de* $33,076161$.

Reescrevendo $33,076161$ como $33.076.161 \times 10^{-6}$ e decompondo-o cada fator em fatores primos, obtemos

$$33,076161 = 3^3 \cdot 107^3 \cdot 2^{-6} \cdot 5^{-6}.$$

Elevando cada membro da igualdade acima a um terço e aplicando as propriedades da potenciação, teremos

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{33,076161} &= 3^{\frac{3}{3}} \cdot 2^{\frac{-6}{3}} \cdot 5^{\frac{-6}{3}} \\ &= 3 \cdot 107 \cdot 10^{-2} \cdot 5^{-2} = 3,21. \end{aligned}$$

Logo, $\sqrt[3]{33,076161} = 3,21.$

## 3.5 Método Chinês

O método Chinês é utilizado apenas para obtenção da raiz quadrada de um número natural quadrado perfeito e baseia-se no fato de que todo número quadrado perfeito pode ser escrito como soma de $n$ inteiros ímpares. Mais precisamente, para cada número natural $n$, temos

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2. \tag{3.1}$$

A igualdade (3.1), válida para todo número inteiro positivo, pode ser demonstrada pelo Princípio de Indução. Uma demonstração dessa igualdade encontra-se no Apêndice .

A igualdade pode ser reescrita por:

$$(((n^2-1)-3)-\cdots-(2n-1))=0 \tag{3.2}$$

que é o algorítmo do método chinês.

Do exposto acima, para verificar se um número é ou não quadrado perfeito, subtrai-se dele a sucessão de números ímpares $(1,3,5,7,9,\cdots)$. Se uma das diferenças for zero ou um número negativo, o algorítmo para. Caso em uma dessas subtrações obtem-se o zero como resultado, conclui-se que o número em questão é um quadrado perfeito e o número de subtrações realizadas é a sua raiz quadrada. Caso não se obtenha zero em nenhuma dessas subtrações, e sim um número negativo, conclui-se que o número não possui raiz quadrada exata, inviabilizando o uso do método para o cálculo de sua raiz quadrada.

**Exemplo 3.10** *Segue abaixo o cálculo da raiz quadrada do número* 36*, através do método chinês.*

$$\begin{aligned}
36-1 &= 35 \Longrightarrow 36=1+35\\
35-3 &= 32 \Longrightarrow 35=3+32 \Longrightarrow 36=1+3+32\\
32-5 &= 27 \Longrightarrow 32=5=27 \Longrightarrow 36=1+3+5+27\\
27-7 &= 20 \Longrightarrow 27=7+20 \Longrightarrow 36=1+3+5+7+20\\
20-9 &= 11 \Longrightarrow 20=9+11 \Longrightarrow 36=1+3+5+7+9+11\\
11-11 &= 0 \Longrightarrow 11=11+0 \Longrightarrow 36=1+3+5+7+9+11.
\end{aligned}$$

Note que obtivemos zero como resultado na última subtração, logo 36 tem raiz quadrada exata. Como foram efetuadas 6 subtrações, assim

$$\sqrt{36}=6.$$

**Exemplo 3.11** *Cálculo da raiz quadrada do número* 85*:*

Aplicando o Método Chinês, temos

$$
\begin{aligned}
85-1 &= 84 \Longrightarrow 85 = 1+84 \Longrightarrow 85 = 1+84\\
84-3 &= 81 \Longrightarrow 84 = 3+81 \Longrightarrow 85 = 1+3+81\\
81-5 &= 76 \Longrightarrow 81 = 5+76 \Longrightarrow 85 = 1+3+5+76\\
76-7 &= 69 \Longrightarrow 76 = 7+69 \Longrightarrow 85 = 1+3+5+7+69\\
69-9 &= 60 \Longrightarrow 69 = 9+60 \Longrightarrow 85 = 1+3+5+7+9+60\\
60-11 &= 49 \Longrightarrow 60 = 11+49 \Longrightarrow 85 = 1+3+5+7+9+11+49\\
49-13 &= 36 \Longrightarrow 49 = 13+36 \Longrightarrow 85 = 1+3+5+7+9+11+13+36\\
36-15 &= 21 \Longrightarrow 36 = 15+21 \Longrightarrow 85 = 1+3+5+7+9+11+13+15+21\\
21-17 &= 4 \Longrightarrow 21 = 17+4 \Longrightarrow 85 = 1+3+5+7+9+11+13+15+17+4\\
4-19 &= -15 \Longrightarrow 4 = 19+(-15) \Longrightarrow 85 = 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+(-5),
\end{aligned}
$$

em nenhuma das etapas obtivemos zero como resultado, e sim um número negativo, logo, o número 85 não tem raiz quadrada exata, e sua raiz quadrada aproximada está entre 9 e 10.

## 3.6 Método de Heron

O Método de Heron baseia-se no desenvolvimento do quadrado ou do cubo da soma de dois termos. No procedimento para a obtenção da raiz quadrada ou cúbica de um número real positivo, desenvolve-se o produto notável e calcula-se, inicialmente, o algarismo mais significativo da raiz quadrada ou cúbica, e sucessivamente os próximos algarismos até o algarismo das unidades, finalizando assim o processo e obtendo-se o resultado desejado. O método também permite calcular a raiz quadrada ou cúbica de números decimais quadrados perfeitos, pois os mesmos podem ser escritos como o quociente de um número inteiro por um potência de 10 ou como o produto de um número inteiro por uma potência de 10, calculando-se separadamente as suas raízes e, posteriormente, o seu quociente ou produto, conforme o caso.

### 3.6.1 Cálculo da Raizes Quadradas

Mostremos para números cuja raiz quadrada tem unidade das dezenas diferente de zero. Seja $a$ um número natural, quadrado perfeito, do qual desejamos calcular a sua raiz quadrada. Escrevemos

$$a = (k+u)^2,$$

onde $k$ é um múltiplo de 10, cujo quadrado mais se aproxima de $a$ por falta e $u$ é um número natural (dígito) compreendido entre 0 e 9, podendo inclusive assumir os valores 0 e 9.

Dessa forma, temos $a = (k+u)^2 = k^2 + 2ku + u^2$. Como $k$ é um múltiplo de 10, segue que $k = 10d$ com $0 < d \leq 9$, ou seja, $a = (10d+u)^2$. Logo,

$$a = (10d+u)^2 = (10d)^2 + 2 \cdot (10d) \cdot u + u^2.$$

Segue, por definição, que

$$\sqrt{a} = 10d + u. \tag{3.3}$$

Note que $d$ é o algarismo mais significativo de $\sqrt{a}$. Devemos encontrar agora o algarismo das unidades $u$ da raiz quadrada de $a$. Elevando ambos os membros da igualdade (3.3) e reagrupando apropriadamente, obtemos

$$a - (10d)^2 = 2 \cdot (10d) \cdot u + u^2 = (2 \cdot (10d) + u) \cdot u. \tag{3.4}$$

Uma primeira tentativa para encontrar o algarismo das unidades pode ser com o auxílio do Algoritmo da Divisão de Euclides. Dividindo-se $a - (10d)^2$ por $2 \cdot (10d)$, obtemos um número, cuja parte inteira chamaremos de $\lambda$. Assim, podemos escrever

$$a - (10d)^2 = 2 \cdot (10d) \cdot \lambda + r, \ \text{ com } \ 0 \leq r < \lambda. \tag{3.5}$$

Das igualdades (3.4) e (3.5), concluímos que

$$2 \cdot (10d) \cdot \lambda + r = 2 \cdot (10d) \cdot u + u^2. \tag{3.6}$$

Se $r = \lambda^2$, da igualdade (3.6) segue que $u = \lambda$. Se $r < \lambda^2$, definindo $\lambda' = \lambda - 1$, temos

$$\begin{aligned} a - (10d)^2 &= 2 \cdot (10d) \cdot \lambda + r \\ &= 2 \cdot (10d) \cdot (\lambda' + 1) + r \\ &= 2 \cdot (10d) \cdot \lambda' + (2 \cdot (10d) + r). \end{aligned}$$

Fazendo $2 \cdot (10d) + r = r'$, obtemos

$$a - (10d)^2 = 2 \cdot (10d) \cdot \lambda' + r'. \tag{3.7}$$

Das igualdades (3.4) e (3.7), concluímos que

$$2 \cdot (10d) \cdot \lambda' + r' = 2 \cdot (10d) \cdot u + u^2.$$

Se $r' = (\lambda')^2$, de (3.7) concluímos que $\lambda' = u$. Se $r' < (\lambda')^2$, define-se $\lambda'' = \lambda' - 1$ e procede-se analogamente ao procedimento anterior para $\lambda'$, sucessivamente, até que se encontre algum $u = \lambda$ tal que $r = (\lambda)^2$ em (3.6).

**Obs. 3.2** *A igualdade (3.4) mostra que para encontrar a unidade $u$, devemos dobrar o algarismo das dezenas $d$ e multiplicá-lo por* 10. *A unidade $u$ será o algarismo que somado ao resultado anterior e multiplicado por ele mesmo é igual à diferença $a - (10d)^2$. Como $2 \cdot (10d)$ é um multiplo de dez, o resultado da soma $2 \cdot (10d) + u$ equivale a dobrar o algarismo $d$ e posicionar o algarismo $u$ à sua direita. Portanto,* **a unidade $u$ será o número que acrescentado ao lado direito do dobro do algarismo das dezenas $d$ e multiplicado por ele ($u$) mesmo mais aproxima, por falta, da diferença $a - (10d)^2$.**

Para exemplificar, vamos calcular as raízes quadradas de 625, 1024 e 1444.

**Exemplo 3.12** *Calcule $\sqrt{625}$.*

Observe que, se $625 = (10d + u)^2$ então,

$$625 = (10d)^2 + 2 \cdot (10d) \cdot u + u^2,$$

ou ainda,

$$625 - (10d)^2 = 2 \cdot (10d) \cdot u + u^2.$$

Sabe-se que $10d$ é um número cujo quadrado mais se aproxima, por falta, de 625. Logo, $10d = 20$, ou seja, $d = 2$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} 625 - 20^2 &= 2 \cdot (10 \cdot 2) \cdot u + u^2 \Rightarrow \\ 225 &= 40u + u^2. \end{aligned}$$

Dividindo-se 225 por 40, obtemos o número 5 (cinco) como parte inteira, $(225 = 40 \cdot 5 + 25)$ ou seja,

$$225 = 40 \cdot 5 + 25 = 40 \cdot 5 + 5^2.$$

Portanto, $\lambda = 5$ e a raiz quadrada de 625 tem algarismo das dezenas 2 e algarismo das unidades 5, ou melhor,

$$\sqrt{625} = 2 \cdot 10 + 5 = 25.$$

**Exemplo 3.13** *Encontre a raiz de* 1024.

Desde que 1024 tem quadro algarismos, ele deve ser o quadrado de um número formado por, no máximo, dois algarismos. Então, escrevendo

$$1024 = (10d + u)^2,$$

percebemos que $d = 30$, por ser o múltiplo de 10, cujo quadrado mais se aproxima de 1024. Para encontrar o algarismo das unidades, utilizamos a igualdade

$$124 = 1024 - (10d)^2 = 1024 - (30)^2 = (2 \cdot 30 + u) \cdot u.$$

Dividindo-se 124 por 60, obtemos $124 = 60 \cdot 2 + 4 = 60 \cdot 2 + 2^2$, portanto, a raiz quadrada de 1024 tem algarismo das dezenas 3 e algarismo das unidades 2, ou seja,

$$\sqrt{1024} = 30 + 2 = 32.$$

**Exemplo 3.14** *Encontre a raiz de* 1444.

Note que o múltiplo de 10, cujo quadrado mais se aproxima de 1444, por falta, é 30. Logo,

$$544 = 1444 - 900 = (2 \cdot 30 + u) \cdot u.$$

Dividindo-se 544 por 60, obtemos $544 = 60 \cdot 9 + 4 = 60 \cdot 9 + 2^2 \neq 60 \cdot 9 + 9^2$. Isto mostra que nove não é o algarismo das unidades procurado. Seguindo o algoritmo apresentado, escolhe-se um número menor que 9, ou seja, 8, e verifica-se que

$$544 = 60 \cdot 8 + 64 = 60 \cdot 8 + 8^2,$$

de onde segue que a raiz quadrada de 1444 tem algarismo das dezenas 3 e algarismo das unidades 8, isto é,

$$\sqrt{1444} = 30 + 8 = 38.$$

O processo acima é válido para números cujas raízes quadradas consistem em três ou mais algarismos. Mostremos para números cuja raiz quadrada tem unidade das centenas diferente de zero, os demais seguem de forma análoga.

Seja $a$ um número real positivo, quadrado perfeito, cuja representação da sua raiz quadrada na base dez seja $\sqrt{a} = \underline{cdu}$, ou seja, $a = (\underline{cdu})^2$. Assim,

$$\begin{aligned} a &= (\underline{cdu})^2 = (100c + \underline{du})^2 \\ &= (100c)^2 + 2 \cdot (100c) \cdot (10d + u) + (10d + u)^2. \end{aligned}$$

De onde,

$$\begin{aligned} a - (100c)^2 &= 2 \cdot (100c) \cdot (10d) + 2 \cdot (100c) \cdot u + (10d)^2 + 2 \cdot (10d) \cdot u + u^2 \\ &= [2 \cdot (100c) + (10d)] \cdot (10d) + 2 \cdot (100c) \cdot u + 2 \cdot (10d) \cdot u + u^2 \\ &= [\underline{(2c)d0}] \cdot (d0) + 2 \cdot (100c) \cdot u + 2 \cdot (10d) \cdot u + u^2 \end{aligned}$$

Na última igualdade, o termo $\underline{(2c)d0}$ representa o número cujo algarismo das centenas é $2c$, das dezenas é $d$ e possui o zero como unidade. Percebemos também que, para encontrar o algarismo das dezenas, procuramos o algarismo $d$ que posicionado à direita do dobro de $c$ e multiplicado por ele mesmo, mais aproxima, por falta, da diferença $a - (100c)^2$. Supondo já termos encontrado "os algarismos"das centenas e das dezenas, precisamos determinar a unidade $u$. Para tanto, observe que:

$$\begin{aligned} a - (100c)^2 - [2 \cdot (100c) + (10d)] \cdot (10d) &= 2 \cdot (100c) \cdot u + 2 \cdot (10d) \cdot u + u^2 \\ &= [2 \cdot (100c + 10d) + u] \cdot u. \end{aligned}$$

Portanto, para encontrar a unidade $u$, seguimos os mesmos passos anteriores.

**Exemplo 3.15** *Encontre a raiz de* 12544.

Note que o múltiplo de 100, cujo quadrado mais se aproxima de 12544, por falta, é 100. Logo, $c = 1$, e temos

$$2544 = 12544 - (100)^2 = [2 \cdot (100c) + (10d)] \cdot (10d) + 2 \cdot (100c) \cdot u + 2 \cdot (10d) \cdot u + u^2.$$

Observe que,

$$d = 1 \Rightarrow [2 \cdot (100c) + (10d)] \cdot (10d) = [210] \cdot 10 = 2,100$$
$$d = 2 \Rightarrow [2 \cdot (100c) + (10d)] \cdot (10d) = [220] \cdot 20 = 4,400.$$

Assim, o dígito das dezenas admissível corresponde a $d = 1$. Para encontrar o algarismo das unidades, observe que

$$444 = [12544 - (100)^2] - 2100 \quad = \quad [2 \cdot (100c + 10d) + u] \cdot u.$$

Dividindo-se 444 por $2 \cdot 110$ obtemos $444 = 220 \cdot 2 + 4 = 220 \cdot 2 + 2^2$, de onde segue que a raiz quadrada de 12544 tem algarismo das centenas 1, das dezenas 1 e algarismo das unidades 2, isto é,

$$\sqrt{12544} = 112.$$

### 3.6.2 Dispositivo Prático para o Cálculo de Raízes Quadradas.

O cálculo de raízes quadradas pode ser realizado através da sequência de procedimentos a seguir. A mesma será chamada de Dispositivo Prático para o Cálculo de Raízes Quadradas e tem como base o método de Heron. O número de classes indicará quantos algarismos compõem a raiz quadrada.

Apresentamos, a seguir, os passos do algoritmo acompanhado de um exemplo para ilustração.

**I.** Para se calcular a raiz quadrada de um número, separa-se o número em classes de dois algarismos, da direita para a esquerda.

Escrevemos o número 12544 separado em classes de dois algarismos, isto é, 1.25.44.

**II.** Acha-se o maior quadrado perfeito contido na primeira classe da esquerda, e escreve-se a sua raiz ao lado direito do número, em forma de divisor. Subtrai-se o quadrado do algarismo encontrado da primeira classe e o resto junto com a segunda classe formará o novo dividendo.

| | |
|---|---|
| $\sqrt{1.25.44}$ | 1 |
| $1 - 1^2 = 0$ | |
| 025 | |

**III.** Duplica-se a raiz achada e multiplica-se por 10, e o produto será o primeiro divisor auxiliar. Divide-se o dividendo pelo divisor auxiliar, e o quociente será um candidato a segundo algarismo da raiz. Adiciona-se esse segundo algarismo da raiz ao divisor auxiliar, a soma será o divisor completo.

| $\sqrt{1.25.44}$ | $11$ |
|---|---|
| | $2\cdot 1\cdot 10=20$ |
| $025$ | $025\div 20=1\cdot 20+5$ |
| | $20+1=21$ |

**IV.** Multiplica-se o divisor completo pelo último algarismo da raiz encontrado, e o produto subtrai-se do novo dividendo. Baixa-se a classe seguinte ao lado do resto, formando o novo número.

| $\sqrt{1.25.44}$ | $11$ |
|---|---|
| | $21\cdot 1=21$ |
| $025-21=4$ | $025\div 20=1\cdot 20+5$ |
| $444$ | |

**V.** Repete-se os passos III e IV até à última classe.

| $\sqrt{1.25.44}$ | $112$ |
|---|---|
| | $21\cdot 1=21$ |
| $444$ | $444\div(11\cdot 2\cdot 10)=2$ |
| | $(220+2)\cdot 2=444$ |
| $444-444=0$ | |

### 3.6.3 Cálculo de Raízes Cúbicas

Mostremos o caso do número cuja raiz cúbica tem algarismo das dezenas diferente de zero. O procedimento para o cálculo de raízes cúbicas é análogo ao utilizado no cálculo de raízes quadradas.

Seja $a$ um número natural, cubo perfeito, do qual desejamos calcular a sua raiz cúbica. Sendo $a$ um cubo perfeito, então $a=(k+u)^3$, onde $k$ é um múltiplo de 10 cujo cubo mais se aproxima de $a$ por falta e $u$ é um número natural compreendido entre 0 e 9, podendo inclusive assumir os valores 0 e 9. Dessa forma,

$$a=(k+u)^3=k^3+3\cdot k^2\cdot u+3\cdot k\cdot u^2+u^3, \tag{3.8}$$

como $k$ é um múltiplo de 10, existe $1 < d \leqslant 9,\ \ d \in \mathbb{N}$ tal que $k = 10 \cdot d$.

Substituindo $k = 10d$ em (3.8), obtemos

$$\begin{aligned} a &= k^3 + 3 \cdot k^2 \cdot u + 3 \cdot k \cdot u^2 + u^3 \Longrightarrow \\ a &= (10d)^3 + 3 \cdot (10d)^2 \cdot u + 3 \cdot (10d) \cdot u^2 + u^3 \Longrightarrow \\ a - (10d)^3 &= 3 \cdot (10d)^2 \cdot u + 3 \cdot (10d) \cdot u^2 + u^3. \end{aligned}$$

Note que $d$ é o algarismo das dezenas da raiz cúbica de $a$. Devemos encontrar agora o algarismo das unidades. Portanto, utilizamos a identidade

$$a - (10d)^3 = \{3 \cdot (10d) \cdot [(10d) + u] + u^2\} \cdot u. \tag{3.9}$$

Observe que o resultado da adição $(10d) + u$ tem o mesmo efeito que colocar o algarismo $u$ ao lado direito do algarismo $d$. Portanto a identidade (3.9) mostra que para encontrarmos o próximo algarismo significativo, no caso acima, o das unidades, devemos encontrar o maior algarismo $u$ que substituindo no espaço destacado abaixo

$$\{3 \cdot (10d) \cdot [d\underline{u}] + \underline{u}^2\} \cdot \underline{u}, \tag{3.10}$$

não exceda a diferença $a - (10d)^3$.

Dessa forma, os procedimentos para se obter o próximo algarismo significativo da representação da raiz cúbica de um número real consiste em seguir os seguintes passos:

**Algoritmo 3.1**

**I.** Adiciona o candidato $u$ que se deseja encontrar ao lado do(s) dígito(s) anteriormente determinando, equivalente a efetuar a adição

$$(10 \cdot d) + u.$$

**II.** Multiplica-se o resultado do Item I anterior pelo triplo do(s) dígito(s) anteriormente determinando e depois por dez.

**III.** O resultado do Item II deve ser somado ao quadrado do candidato e o resultado das operações multiplicado pelo próprio candidato $u$.

**IV.** O dígito requerido será o candidato obtido pelos passos I-III que mais se aproximar da diferença $a - (10d)^3$ por falta.

**Exemplo 3.16** *Para exemplificar o algoritmo acima vamos calcular a raiz cúbica de* 1728.

Desde que 1728 possui menos de seis dígitos na sua representação na base dez, a representação da sua raiz cúbica possui apenas dois dígitos. Considere então, o problema de encontrar $d$ e $u$ tais que

$$1728 = (10 \cdot d + u)^3.$$

Note que o múltiplo de 10, cujo cubo mais se aproxima de 1728, por falta, é 10. Assim, $d = 1$ e

$$\begin{aligned} 1728 - 10^3 &= 3 \cdot (10d)^2 \cdot u + 3 \cdot (10d) \cdot u^2 + u^3 \\ &= 3 \cdot (10d)^2 \cdot u + 3 \cdot (10d) \cdot u^2 + u^3, \end{aligned}$$

que implica,

$$728 = 3 \cdot (10d)^2 \cdot u + 3 \cdot (10d) \cdot u^2 + u^3.$$

Dividindo-se 728 por $3 \cdot 10^2$, obtemos um candidato para $u$, a saber $u = 2$. Desde que $d = 1$ então,

$$\begin{aligned} u = 1 &\Rightarrow \{3 \cdot (10 \cdot 1) \cdot [1\underline{1}] + \underline{1}^2\} \cdot \underline{1} = 331 \\ u = 2 &\Rightarrow \{3 \cdot (10 \cdot 1) \cdot [1\underline{2}] + \underline{2}^2\} \cdot \underline{2} = 728. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$728 = 3 \cdot (10 \cdot 1)^2 \cdot 2 + 3 \cdot (10 \cdot 1) \cdot 2^2 + 2^3.$$

Portanto, $u = 2$ corresponde ao algarismo das unidades da raiz cúbica de 1728.

### 3.6.4 Dipositivo Prático para o cálculo de Raízes Cúbicas

O cálculo de raízes cúbicas pode ser realizado através da sequência de procedimentos a seguir. A mesma será chamada de Dispositivo Prático para o Cálculo de Raízes Cúbicas que utiliza como princípio o Algoritmo 3.1 da Seção 3.6.3. Ilustraremos com um exemplo para melhor entendimento.

**I.** Para se calcular a raiz cúbica de um número, divide-se o número em classes de três algarismos. O número de classes indicará quantos algarismos compõem a raiz cúbica.

Escrevemos o número 1815848 separado em classes de três algarismos, na forma

1.815.848.

**II.** Acha-se o maior cubo perfeito contido na primeira classe da esquerda, e escreve-se a sua raiz ao lado direito do número, em forma de divisor. Subtrai-se o cubo perfeito da primeira classe e o resto junto com a segunda classe formará o novo dividendo.

| $\sqrt[3]{1.815.848}$ | 1 |
|---|---|
| $1-1^3=0$ | |
| 0815 | |

Logo, o algarismo das centenas é $c=1$.

**III.** Calcula-se o quadrado da raiz encontrada e multiplica-se por 300 ($c^2\cdot 300=300$), e o produto será o primeiro divisor auxiliar. Divide-se o dividendo (815) pelo divisor auxiliar (300), e a parte inteira do quociente (2) será o primeiro candidato a segundo algarismo da raiz. Monta-se a operação auxiliar a partir da expressão dada em (3.10) com o candidato. No caso em que este exceda a diferença dada no Item II, consideramos como próximo candidato o algarismo imediatamente anterior ao candidato testado.

| $\sqrt[3]{1.815.848}$ | 1 |
|---|---|
| 815 | $u=2\Rightarrow\{3\cdot(10\cdot 1)\cdot[1\underline{2}]+\underline{2}^2\}\cdot\underline{2}=728$<br>$u=3\Rightarrow\{3\cdot(10\cdot 1)\cdot[1\underline{3}]+\underline{3}^2\}\cdot\underline{3}=1.197>815$ |

Logo, o algarismo das dezenas é $d=2$.

**IV.** Substrai-se o dividendo obtido no Passo III pelo resultado da operação auxiliar e junto com a terceira classe formará o novo dividendo.

| $\sqrt[3]{1.815.848}$ | 1 |
|---|---|
| 815 | $d=2\Rightarrow\{3\cdot(10\cdot 1)\cdot[1\underline{2}]+\underline{2}^2\}\cdot\underline{2}=728$ |
| $815-728=87$ | |
| 87.848 | |

**V.** Repete-se os passos II - IV até à última classe.

| $\sqrt[3]{1.815.848}$ | 12 |
|---|---|
| 87.848 | $(12)^2=144$<br>$300\cdot 144=43200$<br>$87.848\div 43200\approx 2$<br>$u=2\Rightarrow\{3\cdot(10\cdot 12)\cdot[12\underline{2}]+\underline{2}^2\}\cdot\underline{2}=87848$ |
| $87.848-87848=0$ | |

Logo, o algarismo das unidades é $u=2$, e $\sqrt[3]{1815848}=122$.

# Capítulo 4

# Métodos Iterativos

## 4.1 Introdução

Nesse capítulo, apresentamos alguns métodos de aproximação para o cálculo de raízes quadradas ou cúbicas, que podem ser implementadas numa planilha eletrônica ou em uma linguagem computacional, à qual gera um arquivo executável que rode em ambientes computacionais para simulações numéricas, tais como o *Octave* e o *Scilab* (softwares livres) ou o *Matlab*.

Os métodos iterativos permitem efetuar o cálculo de raízes quadradas ou cúbicas aproximadas através do uso de uma fórmula (de recorrência), propiciando uma rápida aproximação com poucas iterações e permite a utilização de softwares para as aproximações desejadas.

Alguns métodos iterativos aqui apresentados para o cálculo de raízes quadradas ou cúbicas provêm do Método do Ponto Fixo. Iniciaremos o capítulo com uma seção dedicada a esse método, mesmo não o utilizando para tratar de convergência das sequências definidas por ele. Sua apresentação objetiva apenas motivar a definição dos dois primeiros métodos que se seguem e a sua interpretação geométrica ajuda a entender como as sequências são definidas.

## 4.2 Método do Ponto Fixo

Considere o problema de encontrar uma solução $r$ da equação

$$F(x) = 0, \tag{4.1}$$

onde $F$ é uma função contínua em um intervalo $[a,b]$ contendo $r$.

O Método do Ponto Fixo (M.P.F) consiste em transformar a equação (4.1) em uma equação equivalente

$$x = f(x), \tag{4.2}$$

onde $f$ é chamada de *"função de iteração"*. A partir de uma primeira aproximação $x_0$, define-se

$$x_1 = f(x_0),\ \ x_2 = f(x_1),\ \ x_3 = f(x_2),\ \ x_4 = f(x_3),\ldots$$

gerando uma sequência $\{x_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ definida iterativamente pela fórmula

$$x_{n+1} = f(x_n). \tag{4.3}$$

Sob certas condições sobre a função $f$, pode-se provar que a sequência definida pela fórmula de recorrência (4.3) converge para um ponto fixo de $f$ ($r = f(r)$) e, portanto, para uma raiz da equação (4.2).

As condições suficientes que asseguram a convergência do Método do Ponto Fixo estão contidas no Teorema 4.1 abaixo, cuja demonstração foge ao escopo deste trabalho. Entretanto, leitores interessados podem consultar ([13], p.p. 58) e ([0], p.p. 133).

**Teorema 4.1** *Seja $r \in [a,b] \subset \mathbb{R}$ uma raiz da equação $f(x) = x$, onde $f$ é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $(a,b)$. Se $|f^{'}(x)| \leq k < 1$ para cada $x \in (a,b)$ então, a sequência $\{x_n\}_{n=0,1,2,3,\ldots}$ definida por (4.3), com $x_0 \in (a,b)$, converge para r.*

O Teorema acima mostra que devemos escolher a função de iteração com critério, bem como a aproximação inicial $x_0$. Uma escolha que não cumpre as condições do Teorema 4.1 pode gerar uma sequência que não converge para a raiz $r$. Por outro lado, exigir que $x_0$ esteja contido no intervalo para o qual se verificam as condições do Teorema 4.1 para a função $f$ implica construir a sequência $\{x_n\}_{n=0,1,2,3,\ldots}$, definida por (4.3), que permanecerá em $(a,b)$ e, portanto, as condições do Teorema se verificarão para todos os seus termos. Com efeito, se $r$ for uma raiz exata da equação $f(x) = x$. Assim, $f(r) = r$ e para qualquer $k \in \mathbb{N}$, tem-se

$$x_{k+1} - r = f(x_k) - f(r). \tag{4.4}$$

Sendo $f$ contínua e diferenciável em $(a,b)$, do Teorema do Valor Intermediário, se $x_k \in (a,b)$, existe $y_k$ entre $x_k$ e $r$ tal que

$$f(x_k) - f(r) = f^{'}(y_k)(x_k - r). \tag{4.5}$$

De (4.4) e (4.5), e da hipótese sobre a derivada de $f$, resulta

$$|x_{k+1} - r| = |f(x_k) - f(r)| = |f^{'}(y_k)(x_k - r)| \leq |f^{'}(y_k)| \cdot |(x_k - r)| < b - a,$$

que implica dizer que $x_{k+1} \in (a,b)$.

Do ponto de vista geométrico, o método M.P.F. consiste em, a partir de um ponto $A_0$ de coordenadas $(x_0, f(x_0))$, construir uma linha poligonal

$$A_0B_1 \cup A_1B_2 \cup A_2B_3 \cup \cdots \cup A_nB_{n+1} \cup \ldots,$$

cujos segmentos $A_iB_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, são, alternadamente, paralelos aos eixos coordenados, sendo os pontos $A_{i's}$ pertencentes à curva de equação $y = f(x)$, enquanto os pontos $B_{i's}$ pertencem à reta $y = x$.

As Figuras 4.1 e 4.2 ilustram o M.P.F para sequências convergentes. A Figura 4.3 ilustra um caso em que o método gera uma sequência não convergente pela escolha inapropriada da função de iteração.

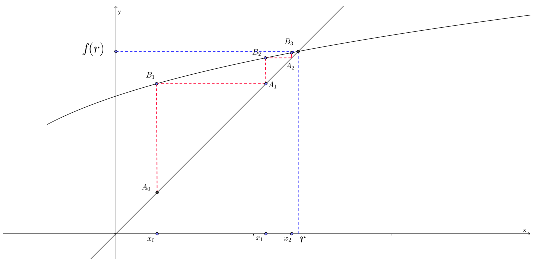


Figura 4.1: Iteração Linear com $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$, $f'(x) < 0$ e sequência convergente para $x_0 = 0,3$.

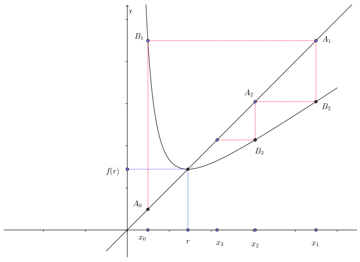


Figura 4.2: Iteração Linear com $f(x) = \frac{1}{3}\left(2x - \frac{3}{x^2}\right)$, $f'(x) > 0$ e sequência convergente para $x_0 = 0,5$.

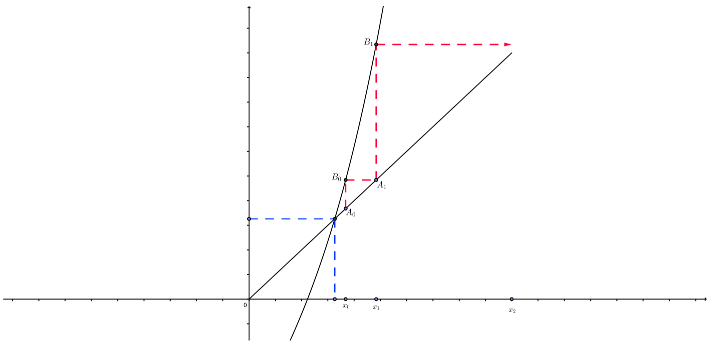


Figura 4.3: Sequência gerada pelo M.P.F não convergentente para $f(x) = 0.05x^2 + 2x - 5, x_0 = 3,68$.

O Método do Ponto Fixo pode ser aplicado para determinar a raiz $n$-ésima de um número real. Com efeito, utilizando as equivalências

$$x^n = a \Leftrightarrow x = \frac{a}{x^{n-1}} \Leftrightarrow nx - (n-1)x = \frac{a}{x^{n-1}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{n}\left((n-1)x + \frac{a}{x^{n-1}}\right), \qquad (4.6)$$

transformamos o problema de encontrar a raiz da equação $x^n = a$ no problema de determinar a raiz da equação $x = f(x)$, com

$$f(x) = \frac{1}{n}\left((n-1)x + \frac{a}{x^{n-1}}\right). \qquad (4.7)$$

Como
$$f^{'}(x) = \frac{1}{n}\left((n-1) - \frac{a(n-1)}{x^n}\right) < 1, \forall x > \sqrt[n]{a},$$
segue que $f$ é uma opção admissível para ser uma função de iteração.

Para o Método Babilônico, introduzido na Seção 4.3 adiante, que estabelece uma sequência para o cálculo da raiz quadrada de um número real positivo, adotamos a função de iteração dada em (4.7) com $n = 2$. A mesma função de iteração estabece a sequência definida na Seção 4.4 para o cálculo de raízes cúbicas.

## 4.3 Método Babilônico

Para a demonstração do Teorema 4.4 precisamos da Proposição 4.2 e do Lema 4.3 abaixo. A demonstração do Lema 4.3 encontra-se em PATERLINE [12], assim como a demonstração do Teorema 4.4, a qual reproduziremos com detalhes.

**Proposição 4.2** *Seja $a \in \mathbb{Z}$. Se $a^2$ é par, então $a$ é par.*

**Demonstração.** De fato, se $a$ fosse ímpar, $a = 2q+1$, para $q$ inteiro, então $a^2 = (2q+1)^2 = 4q^2+4q+1 = 2(2q^2+2q)+1 = 2t+1$, sendo $t$ inteiro, logo $a^2$ é ímpar. Portanto, se $a^2$ é par, então $a$ é par.

**Lema 4.3** *Sejam $a, p, q \in \mathbb{R}^+$ tais que $a = pq$. Fazendo $c = \frac{(p+q)}{2}$. Valem as seguintes propriedades:*

*i) Se $p = \sqrt{a}$ (ou se $q = \sqrt{a}$), então $c = \sqrt{a}$;*

*ii) Se $p < q$, então $p < \sqrt{a} < c < q$;*

*iii) Se $p < q$, então $0 < c - \sqrt{a} < \frac{1}{2}(q - \sqrt{a})$.*

**Teorema 4.4** *Seja $a \in \mathbb{R}^+$. A sequência $(a_k)_{k \geqslant 0}$, definida por*
$$\begin{cases} a_0 > 0 \\ a_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + \frac{a}{a_{k-1}}), \quad k \geqslant 1 \end{cases}$$
*converge para $\sqrt{n}$.*

**Demonstração.**

Notemos que $a_1$ é a média aritmética de $a_0$ e $a/a_0$, e que $a_0(a/a_0) = a$. Notemos ainda que $a_2$ é a média aritmética de $a_1$ e $a/a_1$, e que $a_1(a/a_1) = a$, e assim por diante. Estamos na posição de aplicar o Lema 4.3 para cada $k \geq 1$, com $p = a_{k-1}$ e $q = a/a_{k-1}$ ou vice-versa, e $c = a_k$.

Se $a_0 \neq 0$, examinamos os casos $a_0 < \sqrt{a}$ e $a_0 > \sqrt{a}$. Suponhamos primeiro $a_0 < \sqrt{a}$. Aplicando o Lema 4.3 com $p = a_0$ e $q = \frac{a}{a_0}$ temos $\sqrt{a} < q$, portanto $p < q$. Pela parte ii) do

Lema 4.3 vem $\sqrt{a} < a_1$. Aplicando agora o Lema 4.3 com $p = a/a_1$ e $q = a_1$, temos

$$\sqrt{a} < a_1 \Rightarrow p < \sqrt{a} \Rightarrow p < q.$$

Novamente da parte ii) do Lema 4.3 segue $\sqrt{a} < a_2$. Aplicando a parte iii) do Lema 4.3 vem que

$$0 < a_2 - \sqrt{a} < \frac{1}{2}(a_1 - \sqrt{a}).$$

Repetindo o argumento para $p = \frac{a}{a_2}$ e $q = a_2$ segue que

$$\sqrt{a} < a_3 \text{ e } 0 < a_3 - \sqrt{a} < \frac{1}{2}(a_2 - \sqrt{a}) < \frac{1}{2^2}(a_1 - \sqrt{a}).$$

Procedendo indutivamente temos $\sqrt{a} < a_k$ para todo $k \geq 1$ e

$$0 < a_k - \sqrt{a} < \frac{1}{2^{k-1}}(a_1 - \sqrt{a}), \ \forall\, k \geq 2. \tag{4.8}$$

Por outro lado $\frac{1}{2^{k-1}}$ tende para zero quando $k$ tende para o infinito e o valor $a_1 - \sqrt{a}$ está fixo, segue da relação (4.8) que $a_k - \sqrt{a}$ tende a zero, quando se toma valores de $k$ cada vez maiores. Isto significa que $a_k$ se aproxima de $\sqrt{a}$ tanto quanto desejarmos, conforme queríamos demonstrar. ■

**Obs. 4.1** *A definição da sequência definida no Teorema 4.4 para $n = 2$, pode ser entendida a partir do método do ponto fixo e das seguintes implicações:*

$$x \neq 0, \ \ x^2 = a \Rightarrow x = a/x \Rightarrow 2x - x = a/x \Rightarrow 2x = x + a/x \Rightarrow x = 1/2(x + a/x).$$

*Conforme discutido na Seção 4.2, equação (4.7).*

**Exemplo 4.1** *Usando o Método do Ponto Fixo, vamos encontrar a raiz quadrada do número 2, com aproximação de quatro casas decimais.*

Tomando $a_0 = 1$, temos

$$a_1 = \frac{(1+\frac{2}{1})}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5000000$$

$$a_2 = \frac{(\frac{3}{2}+\frac{2}{\frac{3}{2}})}{2} = \frac{17}{12} = 1{,}4166666,$$

$$a_3 = \frac{(\frac{17}{12}+\frac{2}{\frac{17}{12}})}{2} = \frac{577}{408} = 1{,}41421 5686,$$

$$a_4 = \frac{(\frac{577}{408}+\frac{2}{\frac{577}{408}})}{2} = 1{,}41423562.$$

Note que as quatro primeiras casas decimais de $a_3$ são iguais as de $a_4$, assim $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ com aproximação até a quarta casa decimal.

## 4.4 Cálculo de Raízes Cúbicas

Sejam $a > 0$ um número real e $x_0$ uma aproximação de $\sqrt[3]{a}$, por excesso, isto é:

$$x_0^3 > a \Longleftrightarrow x_0 > \sqrt[3]{a}.$$

Definindo a sequência

$$x_{k+1} = \frac{1}{3}(2x_k + \frac{a}{{x_k}^2}), \;\; k = 0,1,2,3,\ldots \tag{4.9}$$

e considerando a desigualdade entre a média geométrica e a média aritmética entre os números $x_k, x_k$ e $\frac{a}{x_k}$, para cada valor $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$x_{k+1} = \tfrac{1}{3}(x_k + x_k + \tfrac{a}{x_k^2}) \geq \sqrt[3]{x_k \cdot x_k \cdot \tfrac{a}{x_k^2}} = \sqrt[3]{a},$$

ou seja, cada aproximação $x_k$ é uma aproximação por excesso de $\sqrt[3]{a}$. Como $x_k \geq \sqrt[3]{a} > 0$ para todo $k = 0,1,2,3,...$ temos que

$$\begin{aligned} x_k^2 &\geq \sqrt[3]{a^2} \Longrightarrow \\ \frac{1}{x_k^2} &\leq \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = a^{\frac{-2}{3}} \Longrightarrow \\ \frac{a}{x_k^2} &\leq a^{\frac{-2}{3}} \cdot a = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\tfrac{a}{x_k^2} \leq \sqrt[3]{a} \leq x_k, \forall k = 0,1,2,...$$

Considere para cada $k = 0,1,2,...$, o intervalo $I_k = [\frac{a}{x_k^2}, x_k]$. Observe que $I_{k+1} \subset I_k, \forall k \in \mathbb{N}$, e além disso $\sqrt[3]{a} \in I_k, \;\; \forall k$. Isto é:

$$\tfrac{a}{x_0^2} < \tfrac{a}{x_1^2} < \tfrac{a}{x_2^2} < \cdots < \tfrac{a}{x_k^2} \cdots < \sqrt[3]{a} < \cdots < x_k < \cdots < x_2 < x_1 < x_0.$$

De fato, como $x_k^3 > a \Longrightarrow x_k > \frac{a}{x_k^2}$ então,

$$x_{k+1} = \tfrac{1}{3}(2x_k + \tfrac{a}{x_k^2}) < \tfrac{1}{3}(2x_k + x_k) = x_k.$$

Isto é,

$$\sqrt[3]{a} < \cdots < x_{k+1} < x_k < \cdots < x_3 < x_2 < x_1.$$

Por outro lado,

$$0 < x_{k+1} < x_k \Longrightarrow x_{k+1}^2 < x_k^2 \Longrightarrow \tfrac{1}{x_{k+1}^2} > \tfrac{1}{x_k^2},$$

como estamos supondo $a > 0$, temos $\frac{a}{x_{k+1}^2} > \frac{a}{x_k^2}$.. Portanto,

$$\frac{a}{x_0^2} < \frac{a}{x_1^2} < \frac{a}{x_2^2} < \cdots < \frac{a}{x_k^2} < \frac{a}{x_{k+1}^2} < \cdots < \sqrt[3]{a}.$$

**Afirmação 4.1** *Para cada $k \in \mathbb{N}$ o comprimento $l(I_{k+1})$ do $k+1$-ésimo intervalo $I_{k+1} = [\frac{a}{x_{k+1}}, x_{k+1}]$ é menor ou igual a dois terços do comprimento do k-ésimo intervalo $I_k = [\frac{a}{x_k}, x_k]$.*

**Demonstração.** Seja $k \in \mathbb{N},\ k > 1$. Temos

$$\begin{aligned} l(I_k) &= x_k - \frac{a}{x_k^2} \leq x_k - \frac{a}{x_{k-1}^2} = \frac{1}{3}\left(2x_{k-1} + \frac{a}{x_{k-1}^2}\right) - \frac{a}{x_{k-1}^2} \\ &= \frac{1}{3}\left(2x_{k-1} - \frac{2a}{x_{k-1}^2}\right) = \frac{2}{3}\left(x_{k-1} - \frac{a}{x_{k-1}^2}\right) \\ &= \frac{2}{3} l(I_{k-1}). \end{aligned}$$

■

Da Afirmação 4.1, mostra-se a partir do Princípio de Indução Finita que

**Afirmação 4.2** *Para cada $k \in \mathbb{N}$, vale a relação*

$$l(I_k) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k l(I_0). \tag{4.10}$$

De fato, da Afirmação 4.1

$$\begin{aligned} l(I_1) &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^1 l(I_0) \Longrightarrow \\ l(I_2) &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^1 l(I_1) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 l(I_0) \Longrightarrow \\ l(I_3) &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^1 l(I_2) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^3 l(I_0) \Longrightarrow \\ &\vdots \end{aligned}$$

Suponha por hipótese de indução que $l(I_k) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k l(I_0)$. Assim,

$$\begin{aligned} l(I_{k+1}) &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^1 l(I_k) \leq \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k l(I_0) \Longrightarrow \\ l(I_{k+1}) &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} l(I_0). \end{aligned}$$

Mostramos, pelo Princípio de Indução finita, que

$$l(I_n) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n l(I_0), \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

■

A Afirmação 4.2 diz que os comprimentos dos intervalos $I_k$ ficam cada vez menores quanto maior for o número de iteração $k$. Ou seja, quando $k$ tende para o infinito o comprimento do intervalor $I_k$ tende a zero. E desde que $\sqrt[3]{a} \in I_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$, segue que o ponto médio do intervalo $I_k$ se aproxima de $\sqrt[3]{a}$ tanto quanto desejarmos. Matematicamente,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_k^2} + x_k\right) = \sqrt[3]{a}.$$

Para analisar a convergência à luz da sequência definida em (4.9) observe que, sendo $x_k, \sqrt[3]{a} \in I_k$, então

$$|x_k - \sqrt[3]{a}| < l(I_k) < (\frac{2}{3})^k l(I_0). \tag{4.11}$$

Ou seja, quanto mais iterações forem realizadas mais próximo as aproximições $x_k$ ficam de $\sqrt[3]{a}$, tanto quanto desejarmos!

A desigualdade (4.11) também fornece uma estimativa para o erro entre a aproximação $x_k$ e a raiz cúbica de $a$. Com efeito, definindo o erro $e_k = |x_k - \sqrt[3]{a}|$, se desejarmos uma aproximação com um erro menor do que $\varepsilon$, basta impormos

$$e_k \leq (\frac{2}{3})^k l(I_0) \leq \varepsilon.$$

e resolvendo a inequação para $k$, obter uma estimativa para o número de iterações necessárias

$$k \leq \frac{log(\varepsilon) - log(l(I_0))}{log(\frac{2}{3})}.$$

## 4.5 Método da Bissecção

O Método da Bissecção baseia-se no Teorema 4.5 (Teorema do valor Intermediário) cuja demonstração pode ser encontrada na grande maioria dos livros de Cálculo diferencial e Integral I.

**Teorema 4.5** "Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua tal que $f(a)f(b) < 0$, então existe $r \in (a,b)$ tal que $f(r) = 0$."

O Método consiste em escolher uma sequência infinita de intervalos encaixados, de comprimentos cada vez menores, de modo que todos eles contenham a raiz desejada.

Para o cálculo da raiz $n-$ésima de um número $a \in \mathbb{R}^+$, considera-se a função polinomial auxiliar $f(x) = x^n - a$, que é contínua em todo intervalo fechado $[a,b] \subset \mathbb{R}$, e portanto satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Intermediário. A seguir, encontra-se um intervalo $[a_0,b_0] \subset \mathbb{R}^+$ para o qual o sinal da função $f$ alterna nos extremos desse intervalo. Compara-se o sinal dos extremos com o sinal da função $f$ no ponto médio do intervalo $[a_k,b_k]$ e considera-se a parte menor do intervalo formado por um dos extremos e do ponto médio computado que contêm a raiz $n-$ésima de $f$. O Processo segue até se obter a raiz como ponto médio de algum dos subintervalos ou até o comprimento de um subintervalos restar tão pequeno quanto se desejar. No último caso, obtém-se uma estimativa para raiz $n-$ésima com um erro pré-estabelecido.

Apesar da velocidade de convergência do Método da Bisecção ser bastante lenta, ele pode ser aplicado para obter uma aproximação para qualquer raiz $n-$ésima de um número real positivo com qualquer estimativa definida.

### 4.5.1 Cálculo de Raízes Quadradas

Tomando um intervalo $[a_0, b_0]$, contendo $\sqrt{a}$, define-se a sequência $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ para $k = 0, 1, 2, ...$ e

$$\begin{cases} a_{k+1} &= x_k \text{ e } b_{k+1} = b_k \text{ se } x_k^2 < a, \\ b_{k+1} &= x_k \text{ e } a_{k+1} = a_k \text{ se } x_k^2 > a. \end{cases}$$

Desta forma, constroi-se uma sequência de intervalos $I_k = [a_k, b_k]$ contendo $\sqrt{a}$ tal que

$$l(I_k) = b_k - a_k = \frac{1}{2^n} l(I_0) = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0). \tag{4.12}$$

A igualdade (4.12) afirma que o comprimento $l(I_k)$ do $k-$ésimo intervalo tende a zero quando $k$ tende para infinito. Portanto, $\frac{a_k+b_k}{2}$ tende para $\sqrt{a}$, quando $k$ tende ao infinito.

**Exemplo 4.2** *A tabela abaixo ilustra o cálculo de $\sqrt{2}$ usando o método da bissecção.*

| $k$ | $a_k$ | $b_k$ | $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ | $x_k^2$ | Análises |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 3 | 2 | 4 | $a_1 = a_0$ e $b_1 = x_0$ |
| 1 | 1 | 2 | 1.5 | 2.25 | $a_2 = a_0$ e $b_2 = x_1$ |
| 2 | 1 | 1.5 | 1.25 | 1.5625 | $a_3 = x_2$ e $b_3 = b_2$ |
| 3 | 1.25 | 1.5 | $1,375$ | $1,890625$ | $a_4 = x_3$ e $b_4 = b_2$ |
| 4 | $1,375$ | 1.5 | $1,4375$ | $2,06640625$ | $a_5 = a_4$ e $b_5 = x_4$ |
| 5 | $1,375$ | $1,4375$ | $1,40625$ | $1,97753906$ | $a_6 = x_5$ e $b_6 = b_5$ |

# Capítulo 5

# Atividades Propostas

## 5.1 Introdução

Neste capítulo, propusemos uma sequência de atividades que visam fixar os procedimentos envolvidos em cada método de forma prática, através de exercícios. As sete primeiras atividades têm por objetivo a fixação dos procedimentos e as demais são de aplicações práticas. Não apresentamos exemplos referentes aos métodos das tentativas e da fatoração por estarem presentes na maioria dos livros didáticos. As atividaddes são destinadas a alunos do $1^\circ$ ano do Ensino Médio e devem ser apresentadas em forma de projeto. Esse conjunto de atividades poderá ser aplicado em 20 aulas de 45 minutos.

## 5.2 Atividades

### 5.2.1 Atividade 1

Complete a Tabela seguinte.

| Números | Representação como soma de ímpares consecutivos | Total de parcelas |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 4 | $1+3$ | 2 |
| 9 | $1+3+5$ | 3 |
| 16 | $1+3+5+7$ | |
| 25 | | 5 |
| 36 | | |
| 49 | | |
| 64 | | |

De acordo com os dados da tabela, responda:

1. Qual a relação entre a 1ª coluna e a 3ª coluna, ou seja, qual a relação entre o número e o total da parcelas ímpares da sua representação?

2. Existe algum padrão na tabela ?

3. Os números da 1ª coluna da tabela são quadrados perfeitos?

4. Qual a relação existente entre a soma de ímpares que representam um número quadrado perfeito e sua raiz quadrada?

5. Será que o mesmo ocorre com os números 2, 5 e 14? O que você conclui?

6. Sugira uma expressão para o cálculo da soma dos primeiros $k$ números ímpares.

7. Qual é a raiz quadrada de 25? E de 81? E de 121? E de 225?

*Método Abordado*: Método Chinês

*Objetivo*: Os métodos comumente apresentados para obtenção de raízes quadradas de números quadrados perfeitos, recaem sempre em divisões, usando o procedimento de fatoração, ou multiplicações, através do procedimento de tentativa. O objetivo dessa atividade é levar o aluno a perceber que existe um recurso para cálculo de raízes quadradas, de números quadrados perfeitos, que recai em adições.

*Orientação*: Posteriormente, a demonstração matemática é feita pelo professor respeitando o nível de escolaridade dos alunos.

### 5.2.2 Atividade 2

Com o número 676. Realize os seguintes passos.

1. Escreva-o como classes de dois algarismos, da direita para a esquerda.

   6.76.

2. Encontre o número cujo quadrado mais se aproxima da classe à esquerda, por falta. Reserve esse número.

   A classe à esquerda é o número 6. O número cujo quadrado mais se aproxima de 6 é 2, ou seja, $2^2 = 4$. 2 é o número reservado

3. Subtraia o quadrado desse número do grupo mais a esquerda.

   $6 - 4 = 2$.

4. Escreva o resultado dessa subtração e ao seu lado o grupo seguinte.

   276.

5. Divida o número obtido no Passo 4 por 20 vezes o número reservado no Passo 2.(divisão com resto).

   $276 \div (20 \cdot 2) = 6$ com resto 36.

6. Some o resultado da divisão com 20 vezes o número reservado no Passo 2.

   $20 \cdot 2 + 6 = 46.$

7. Multiplique os resultados obtidos nos Passos 5 e 6 e subtraia o número obtido no Passo 4, verifique se o resultado obtido é zero.

   $46 \cdot 6 = 276 \Longrightarrow 276 - 276 = 0.$

8. Se o resultado obtido for zero, escreva o número formado pelos algarismos obtidos nos Passos 2 e 5, nessa ordem e eleve-o ao quadrado. Passe para o último questionamento.

   $26 \Longrightarrow 26^2 = 676.$

9. Se o resultado obtido no Passo 7 for diferente de zero, então subtraia 1 do número obtido no Passo 5 e, com esse a número faça o procedimento dado no Passo 7;

10. Se o resultado obtido foi zero, escreva o número formado pelos algarismos obtidos nos Passos 2 e 9, nessa ordem.

11. Há alguma relação entre a raiz quadrada de 676 e o número obtido no Passo 8 ou nos Passos 2 e 9?

    Sim, temos $\sqrt{676} = 26.$

    Apresentamos agora a solução organizada em uma Tabela.

| $\sqrt{6.76}$ | $26$ |
|---|---|
| $276$ | $2^2 = 4$<br>$6 - 4 = 2$<br>$276 \div (20 \cdot 2) = 6$, com resto 36<br>$(20 \cdot 2 + 6) \cdot 6 = 276$ |
| $276 - 276 = 0$ | |

*Método Abordado*: Método de Heron (Algoritmo)

*Objetivo*: Apresentar, por etapas, o algoritmo para o cálculo de raízes quadradas, levando os alunos à relacionarem o resultado obtido com a raiz quadrada do número por ele escolhido. Esse método é particularmente importante quando trabalhamos com números relativamente grandes.

*Orientação*: Para validar o algoritmo, o professor deve certificar-se de que os alunos dominam o sistema de numeração de números reais na base 10 e que já viram os principais produtos notáveis. A descoberta da validação do método pelos alunos com apenas estes dois conteúdos matemáticos deve despertar interesse e afastar o discurso do emprego indicriminado da "fórmula".

### 5.2.3 Atividade 3

Calcule a raiz quadrada do número 1296 utilizando a sequência de comandos da atividade anterior.

Espera-se que o aluno resolva com tranquilidade a questão

*Método Abordado*: Método de Heron

*Objetivo*: Praticar e fixar os procedimentos do método.

*Orientação*: Oriente e auxilie o aluno a sistematizar as etapas do método em uma tabela, desse modo facilitará a compreensão e visualização.

### 5.2.4 Atividade 4

Execute os seguintes comandos no Software Geogebra.

1. Crie um seletor $a$ positivo.
2. Construa os gráficos de $g(x) = x$ e $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$; para $x > 0$.
3. Marque o ponto $A(x', y')$ de intersecção dos gráficos.

Observe o gráfico construído na Figura 5.1.

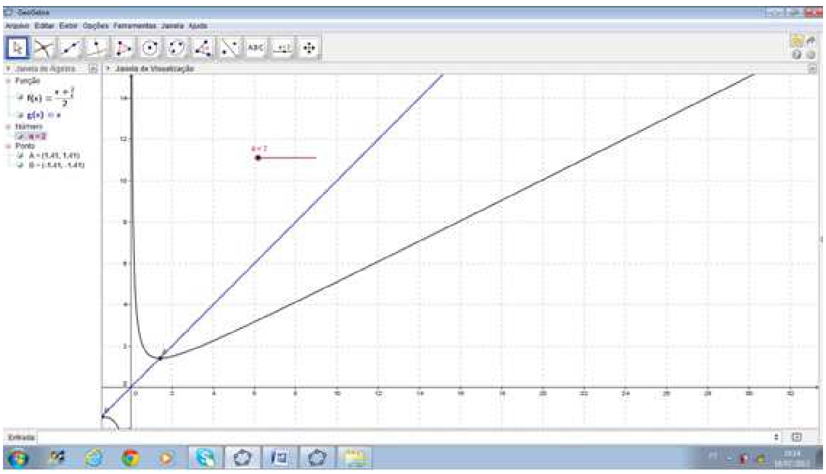


Figura 5.1: funções $g(x) = x$ e $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$

1. Varie o valor de $a$ e observe o ponto $A = (x', y')$.
2. Faça uma tabela relacionando alguns valores de $x'$ com $(x')^2$.

| $x'$ | 1 | $2,5$ | 3 | $4,5$ | 5 | $6,5$ | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x')^2$ | 1 | $6,25$ | 9 | $20,25$ | 25 | $42,25$ | 49 |

3. Qual é a relação existente entre $(x')^2$ e $a$?

   $(x')^2$ é igual a $a$.

4. Se variarmos o valor de ”$a$”, a relação permanece?

   A relação permanecerá

5. Resolva a equação $x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$ para $x$ e compare com suas conclusões.

   $x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) \Longrightarrow 2x = (x + \frac{a}{x}) \Longrightarrow 2x - x = \frac{a}{x} \Longrightarrow$

   $x = \frac{a}{x} \Longrightarrow x^2 = a \Longrightarrow x = \sqrt{a}$

   Após as comparações, observamos que a abscissa do ponto $A$ é a raiz quadrada do número $a$.

*Método Abordado*: Método Iterativo Babilônico

*Objetivo*: Levar o aluno a relacionar a raiz quadrada de um número $a$ com a representação gráfica das expressões apresentadas. Mostrar que podemos encontrar a raiz do número $a$ pela intersecção do gráfico de $y = x$ com $y = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$. Estimular a aprendizagem dos alunos pelo uso de recursos computacionais. Interpretar resultados a partir da análise de gráficos e reconhecer a importância da aproximação inicial.

*Orientação*: Posteriormente comprovar matematicamente, respeitando o nível de ensino dos alunos.

### 5.2.5 Atividade 5

Construa uma planilha eletrônica de acordo com a tabela abaixo. Após a planilha pronta, escolha valores positivos distintos para o número $a$, escolha um valor para $x_1$ e utilize a planilha para calcular os demais valores. Com o auxílio de uma calculadora, calcule o valor de $\sqrt{a}$.

| $n$ | $x_n$ | $x_{n+1} = \varphi(x) = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ | $\Delta_n = x_{n+1} - x_n$ | $\lvert x_{n+1}^2 - a\rvert$ | $x_{n+1} - \sqrt{a}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_1$ | | | | |
| 2 | $x_2$ | | | | |
| 3 | $x_3$ | | | | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$ | $x_n$ | | | | |

Abrir uma discussão com os alunos, questionando a respeito das observações feitas por eles. Concluir a discussão afirmando que $x_n$ se torna tão próximo de $\sqrt{a}$ quanto maior for o índice $n$.

*Método Abordado*: Método Iterativo Babilônico

*Objetivo*: Levar o aluno a calcular a raiz quadrada de um número através de aproximações sucessivas. Estimular a aprendizagem dos alunos com o uso de recursos computacionais. Interpretar resultados a partir da análise de tabelas.

*Orientação*: A Posteriori, comprovar matematicamente, respeitando o nível de ensino dos alunos.

### 5.2.6 Atividade 6

Execute o seguinte comando no Software Geogebra.

1. Crie um seletor $a$ positivo.
2. Construa os gráficos de $g(x) = x$ e $f(x) = \frac{1}{3}(2x + \frac{a}{x^2})$ para $x > 0$;
3. Marque o ponto $A(x', y')$ de intersecção dos gráficos.

Observe o gráfico construído na Figura 5.2.

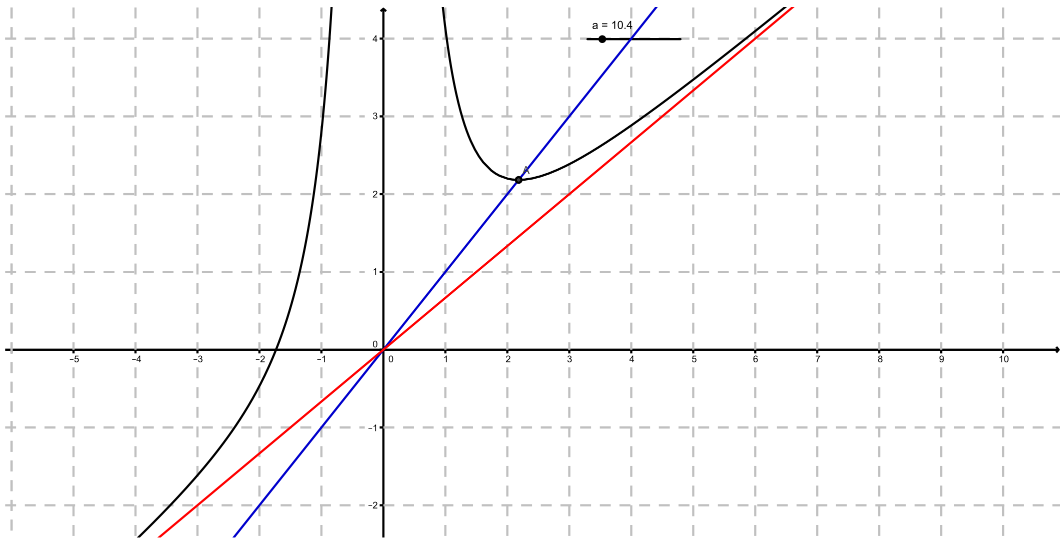



Figura 5.2: funções $g(x) = x,\ y = \frac{2}{3}x\ e\ f(x) = \frac{1}{3}(2x + \frac{a}{x^2})$

1. Varie o valor de $a$ e observe o ponto $A = (x', y')$.

2. Faça uma tabela relacionando alguns valores de $x'$ e $(x')^3$.

| $x'$ | 1 | 2,5 | 3 | 4,5 | 5 | 6,5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x')^3$ | 1 | 15,625 | 27 | 91,125 | 125 | 274,625 | 343 |

3. Qual é a relação existente entre $(x')^3$ e $a$?

   $(x')^3$ é igual a $a$.

4. Se variarmos o valor de "$a$", a relação permanece?

   A relação permanecerá.

5. Resolva a equação $x = \frac{1}{3}(2x + \frac{a}{x^2})$ para $x$ e compare com suas conclusões.

   $x = \frac{1}{3}(2x + \frac{a}{x^2}) \Longrightarrow 3x = (2x + \frac{a}{x^2}) \Longrightarrow 3x - 2x = \frac{a}{x^2} \Longrightarrow$
   $x = \frac{a}{x^2} \Longrightarrow x^3 = a \Longrightarrow x = \sqrt[3]{a}.$

   Após as comparações, observamos que a abscissa do ponto $A$ é a raiz cúbica do número $a$.

*Método Abordado*: Método Iterativo Babilônico

*Objetivo*: Levar o aluno a relacionar a raiz cúbica de um número $a$ com a representação gráfica das expressões apresentadas. Mostrar que podemos encontrar a raiz do número $a$ pela intersecção do gráfico de $y = x$ com $y = \frac{1}{3}(2x + \frac{a}{x^2})$. Estimular a aprendizagem dos alunos pelo uso de recursos computacionais. Interpretar resultados a partir da análise de gráficos e reconhecer a importância da escolha da aproximação inicial.

*Orientação*: A posteriori, comprovar matematicamente, respeitando o nível de ensino dos alunos.

### 5.2.7 Atividade 7

Construa uma planilha eletrônica de acordo com a tabela abaixo. Após a planilha pronta, escolha valores positivos distintos para o número $a$, escolha um valor para $x_1$ e utilize a planilha para calcular os demais valores. Com o auxílio de uma calculadora, calcule o valor de $\sqrt[3]{a}$.

| $n$ | $x_n$ | $x_{n+1} = \varphi(x) = \frac{1}{3}(2x_n + \frac{a}{x_n^2})$ | $\Delta_n = x_{n+1} - x_n$ | $\lvert x_{n+1}^3 - a\rvert$ | $x_{n+1} - \sqrt[3]{a}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_1$ | | | | |
| 2 | $x_2$ | | | | |
| 3 | $x_3$ | | | | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$ | $x_n$ | | | | |

Abrir uma discussão com os alunos, questionando a respeito das observações feitas por eles. Concluir a discussão afirmando que $x_n$ se torna tão próximo de $\sqrt[3]{a}$ quanto maior for o índice $n$.

*Método Abordado*: Método Iterativo Babilônico

*Objetivo*: Levar o aluno a calcular a raiz cúbica de um número através de aproximações sucessivas. Estimular a aprendizagem dos alunos pelo uso de recursos computacionais. Interpretar resultados a partir da análise de Tabelas.

*Orientação*: A posteriori, comprovar matematicamente, respeitando o nível de ensino dos alunos.

As próximas atividades objetivam relacionar o tema à problemas práticos ou geométricos, fazendo uso de quaisquer dos métodos anteriormente estabelecidos no texto. De preferência, o professor deve escolher um dos métodos citados para resolver os problemas inerentes à utilização de calculadoras, planilhas eletrônicas ou mesmo do geogebra. No último caso, deve-se utilizar a solução gráfica. Neste ponto, ressaltamos a necessidade do professor conhecer os comandos do geogebra que permitem operar com o número de casas décimas desejados. Um bom treino permitirá levantar os problemas técnicos inerentes da utilização do software que podem surgir durante as aplicações.

### 5.2.8 Atividade 8

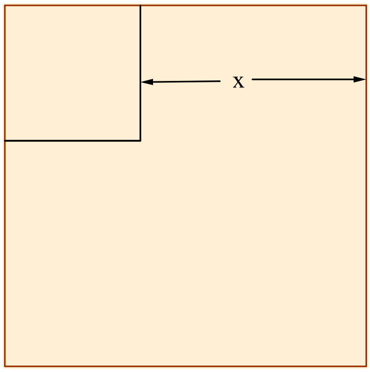
Determinar, com aproximação exata em pelo menos três casas decimais, o comprimento do lado do quadrado de área $1,5cm^2$.

### 5.2.9 Atividade 9

Junto a um pátio da escola, encontra-se uma zona de merendas com $500m^2$ de área e com a forma de um quadrado. É necessário vedar com redes dos três lados do quadrado que separam a referida zona do estacionamento envolvente. Determinar o número de metros de tela necessários para o efeito.

### 5.2.10 Atividade 10

Uma sala quadrada tem área de $164m^2$ e colocou-se um tapete quadrado de $12,25m^2$ encostado a um dos cantos, como ilustra a Figura 5.2.10. Determinar a distância $x$ do tapete à parede oposta.




### 5.2.11 Atividade 11

Determinar, com aproximação exata de três casas decimais, o comprimento da aresta do cubo com volume de $200m^3$.

# Capítulo 6

# Conclusão

Consideramos que a ausência da abordagem de procedimentos diretos e indiretos, para cálculo de raízes quadradas e cúbicas, numa sequência de ensino ou proposta didática, pode acarretar em prejuízo ao desenvolvimento do pensamento conceitual de raiz quadrada e cúbica. Limitando, por exemplo, a raiz quadrada à busca de um número que fora elevado à segunda potência, com base no princípio multiplicativo. Isto posto, não é dada ao aluno a oportunidade de elaborar pensamento matemático em que um quadrado perfeito e, por extensão, a sua raiz possam estar relacionados por ideias aditivas, subtrativas ou geométricas. A proposta apresentada neste trabalho, lança mão de ideias e pensamentos humanos historicamente produzidos e constitui a generalização da raiz quadrada como um conceito amplo formado sobre os sistemas de cálculos, utilizando de processos que tratam de aproximações sucessivas e o uso de tecnologias para facilitar o entendimento da essência do cálculo. O aluno de posse desse conhecimento não é um dependente de tecnologias para tais cálculos, podendo também interpretar com mais propriedade, resultados obtidos em calculadora, computador e outros. Esperamos que este trabalho colabore com o professor de matemática, seja em sua formação ou em sua prática docente.

# Referências Bibliográficas


[0] BARROSO, Leônidas Conceição; BARROSO, Magali Maria de Araújo; CAMPOS FILHO, Frederico Ferreira; CARVALHO, Márcio Luiz Bunte de; MAIA, Miriam Lourenço. *Cálculo Numérico*, 2ª ed.-São Paulo: Harbas, 1987.

[1] BORBA, M. Carvalho; PENTEADO, M. Penteado. *Informática e Educação Matemática*, 5º Ed.-Belo Horizonte: Ed. Autêntica, 2012.

[2] CONTADOR, P. R. M. *Matemática, uma Breve História*, Vol. I - 3ª Ed.-São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008

[3] BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.* - Brasília: Ministério da Educação, 1999, pp. 203–273.

[4] FILHO, E. A. *Teoria Elementar dos Números*, NOBEL, 1981.

[5] GIOVANNI JR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedivto. *A conquista da Matemática, 8° ano*, Edição Renovada-São Paulo: FTD, 2009.

[6] HEFEZ, Abramo. *Elementos de Aritmética*, 2º Ed.-Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[7] GIRALDO, Victor; CAETANO, Paulo; MATTOS, Francisco. *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*, SBM, 2012.

[8] LIMA, E. L. *Análise Real.* Volume 1, Rio de Janeiro: IMPA, 1995.

[9] LIMA, E. L. *Números e Funções Reais :* Coleções PROFMAT. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[10] MILIES, C. P; COELHO, S. P. *Números* Uma Introdução à Matemática. 3 Ed. 2 reimpr. - São Paulo; Editora da universidade de São Paulo, 2006.

[11] PAIS, L. Carlos.*Educação Escolar e as Tecnologias da Informática*, 1º Ed., 3º reimp.- Belo Horizonte: Ed. Autêntica, 2010.

[12] PATERLINE, R. R. *Aritmetica dos Números Reais* Departamento de Matemática, UFSCar. Disponivel em ‘‘ http://www.dm.ufscar.br/profs/ptlini/ ”. Acessado em feveveiro de 2013.

[13] RUGGIERO, M. A. G; LOPES, V. L R. *Cálculo Numérico* Aspectos Teóricos e Computacionais. 2º Ed. São Paulo: MAKRON Books, 1996.

[14] SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. *Matemática: Compreensão e prática, 8° ano*, 1º Ed.-São Paulo: Moderna, 2008.

[15] `http://arquivoescolar.org/bitstream/arquivo-e/191/1/paterlini_reais_`

# Capítulo 7

# Apêndice

O *Princípio de Indução Finita* (*P.I.F*) é um resultado que permite demonstrar que uma sentença aberta no conjunto dos números naturais é válida para cada número natural.

Nesse Apêndice, apresentamos algumas definições e resultados que estão relacionados ao (*P.I.F.*), destacando a fórmula que permite definir o Método Chinês para o cálculo de raízes quadradas.

**Definição 7.1** *Uma sentença aberta $p(n)$ no conjunto dos números naturais na variável $n$ é uma afirmação que depende de $n$ e ao substituirmos $n$ por um número natural torna-se verdadeira ou falsa, assumindo apenas um e apenas um desses resultados lógicos.*

São exemplos de sentenças abertas no conjunto dos números naturais na variável $n$ :

1.
$$p(n): \quad n^2+n+41 \quad \text{é primo.} \tag{7.1}$$

2.
$$p(n): \quad 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{7.2}$$

3.
$$p(n): \quad 1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{7.3}$$

4.
$$p(n): \quad (1+x)^n \geq 1+n\cdot x, \quad x>-1. \tag{7.4}$$

Observando a sentença aberta no Exemplo 7.1, vemos que

$$P(1) \quad : \quad 43 \ \text{é primo,} \quad \text{é verdade} \tag{7.5}$$
$$P(2) \quad : \quad 47 \ \text{é primo,} \quad \text{é verdade} \tag{7.6}$$
$$P(3) \quad : \quad 53 \ \text{é primo,} \quad \text{é verdade.} \tag{7.7}$$
$$\tag{7.8}$$

Entretanto, $P(41): 41^2+41+41 = 41\cdot 43$ é primo, é falsa. Isso mostra que a verificação de que uma sentença aberta é válida para cada número natural $n$ não pode ser inferida pela verificação de um número qualquer de casos particulares. E, sendo impossível verificar todos os casos particulares, precisamos do Princípio de Indução Finita para termos certeza de que tal sentença é válida para todos os números naturais.

A seguir, apresentamos o Princípio de Indução Finita como axioma. Leitores interessados em se aprofundar mais sobre o tema ou ver outras formulações do P.I.F podem consultar ([4],p.p. 31–45), ([10],p.p. 24–35) e ([6], p.p. 14–23).

**Axioma 7.1** *Princípio da Indução Finita. Seja $p(n)$ uma sentença aberta no conjunto dos números naturais na variável $n$. Se*

**a)** *$p(1)$ é verdade.*

**b)** *$p(k)$ é verdade implica que $p(k+1)$ é verdade.*

*Então, $p(n)$ é verdade para todo número n natural.*

Podemos reformular o P.I.F. fazendo uso da linguagem de conjuntos como segue:

**Axioma 7.2** *Seja $S$ um subconjunto não vazio do conjunto do números naturais $\mathbb{N}$. Se*

**a)** $1 \in S$.

**b)** $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$.

*Então, $S = \mathbb{N}$.*

**Exemplo 7.1** *Mostre que a identidade*

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{7.9}$$

*é válida para cada número natural $n$.*

**Solução.** Para fazer uso do Princípio de Indução Finita, precisamos verificar as duas hipóteses (a-b) do Axioma 7.1. Defina a seguinte setenção aberta em $n$ :

$$p(n): 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{7.10}$$

Inicialmente, observe que para $n = 1$ a fórmula acima fornece

$$1 = \frac{1(1+1)}{2},$$

que é claramente verdadeira. Logo, $p(1)$ é verdade. Para verificar a hipótese b, suponha que $p(k)$ é verdadeira para $k \in \mathbb{N}$, isto é:

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}. \tag{7.11}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
1+2+\cdots+k+(k+1) &= [1+2+\cdots+k]+(k+1) && (7.12)\\
&= [\frac{n(n+1)}{2}]+(k+1) && (7.13)\\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}, && (7.14)\\
& && (7.15)
\end{aligned}$$

que significa dizer que $p(k+1)$ é verdade. Portanto, aplicando o Princípio de Indução Finita conclui-se que $p(n)$ é válida para cada número natural $n$.

O próximo exemplo apresenta a identidade que é utilizada para definir o Método Chinês para o cálculo de raízes exatas de números naturais.

**Exemplo 7.2** *Mostre que a identidade*

$$1+3+\cdots+(2n-1)=n^2 \tag{7.16}$$

*é válida para cada número natural $n$.*

**Solução.** Novamente, para fazer uso do Princípio de Indução Finita, precisamos verificar as duas hipóteses (a-b) do Axioma 7.1. Para isto, defina

$$p(n): 1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}. \tag{7.17}$$

Note que para $n=1$ a fórmula acima fornece

$$1=1^2,$$

que é claramente verdadeira. Logo, $p(1)$ é verdade. Para verificar a hipótese b, suponha que $p(k)$ é verdadeira para $k \in \mathbb{N}$, isto é:

$$1+3+\cdots+(2k-1)=k^2. \tag{7.18}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1) &= [1+3+\cdots+(2k-1)]+(2k+1) \qquad (7.19)\\ &= [k^2]+(k+1) \qquad (7.20)\\ &= (k+1)^2, \qquad (7.21)\end{aligned}$$

que significa dizer que $p(k+1)$ é verdade. Portanto, aplicando o Princípio de Indução Finita conclui-se que $p(n)$ é válida para cada número natural $n$.

Para finalizar, deixamos algumas identidades para serem verificadas com o Princípio de Indução Finita.

**EXERCÍCIOS**

Utilize o Princípio da Indução Finita para provar no conjunto dos números naturais, cada sentença aberta abaixo.

1. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}, \;\; \forall n \geq 1.$

2. $1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \;\; \forall n \geq 1 ex > -1.$

3. $2^n > n, \;\; \forall n \geq 1.$

4. $1^3+2^3+\cdots+n^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2, \;\; \forall n \geq 1.$

5. $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\ldots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}, \;\; \forall n \geq 1.$

6. O número de lados de um polígono convexo de $n$ lados é $\frac{n(n-3)}{2}$.