UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Construções Geométricas Por Régua e Compasso e Números Construtíveis.

Luís Pereira da Silva Júnior

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto

Campina Grande - PB
Abril/2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG.

S586c Silva Júnior, Luís Pereira da.

Construções Geométricas por Régua e Compasso
e Números Construtíveis / Luís Pereira da Silva Júnior.
Campina Grande, 2013.
40 f.:il. color
Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal
de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.
Referências.
Orientador: Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto.
1. Régua e Compasso 2. Problemas Classicos da Geometria
Grega 3. Números Construtíveis
I. Construções Geométricas por Régua e Compasso e Números
Construtíveis.

CDU-514.(043)

Construções Geométricas Por Régua e Compasso e Números Construtíveis

por

Luís Pereira da Silva Júnior

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado por:

Prof. Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho - UFCG

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro - UFPB

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Unidade Acadêmica de Matemática

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Abril/2013

Agradecimentos

Aos meus pais.

À Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Francisco Ernesto do Rego pelo apoio e liberação parcial de minha carga horária semanal para dedicação ao PROFMAT.

Ao Professor Marco Aurélio Soares Souto, pela orientação e estímulo desenvolvido no decurso deste trabalho e a todos os professores e tutores do PROFMAT.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática-SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos uma proposta de ensino com aplicação direta em sala de aula de Matemática do Ensino Básico, contribuindo para o aprendizado de conteúdos utilizando as construções geométricas por régua e compasso. Emfocaremos conceitos teóricos e fatos históricos sobre as construções geométricas, os Problemas Clássicos da Geometria Grega e os números construtíveis. Apresentaremos propostas de atividades que envolvem os conceitos básicos e que serão resolvidas com a utilização destas construções. O trabalho poderá servir como base para professores do ensino básico ou para pessoas que se interessam pelo assunto.

Palavras Chaves: Régua e Compasso. Problemas Clássicos da Geometria Grega. Números Construtíveis.

Abstract

In this paper we propose a direct application in teaching mathematics in basics education, contributing to the learning content, using geometric constructions by ruler and compass. We will focus on theoretical concepts and hitorical facts about the geometric construtions and the Classic Problems of Greek Geometry and constructible numbers. We will present proposals for activities that involve the basics and by resolved with the use these constructions. The work could serve as a basis for elementary scholl teachers or people who are interested in the subject.

Keywords: Ruler and Compass. The Classic Problems of Greek Geometry. Constructible Numbers.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Uma das dificuldades do professor é apresentar atividades que prendam a atenção dos alunos em sala de aula, principalmente quando se trata da disciplina Matemática, que é considerada pela maioria, muito difícil. Buscando novas maneiras para diminuir este interesse, este Trabalho de Conclusão de Curso apresenta sugestões de atividades de diversos conteúdos do Ensino Fundamental utilizando as construções geométricas por régua e compasso, na tentativa de inovar em suas resoluções, buscando com isso, uma maior interação entre os alunos, que poderão trabalhar em grupos, e o professor.

1.1 Objetivo geral

Este trabalho tem como objetivo geral desenvolver um trabalho com construções geométricas por régua e compasso, utilizando-as nas resoluções de questões das séries do Ensino Fundamental, do 6º ao 9º ano. Para isso, sugerimos algumas atividades que foram adaptadas de livros didáticos, com o intuito de usar estes materiais, enriquecendo ainda mais os conceitos matemáticos abordados nas questões.

1.2 Objetivos específicos

- Exibir algumas construções geométricas elementares;
- Compreender o significado de número construtível;
- Mostrar que nem todo número é construtível;
- Sugerir atividades do Ensino Fundamental que possam ser aplicadas construções geométricas em suas soluções.

1.3 Organização

Este TCC está organizado da seguinte forma: Capítulo 1, que é esta Introdução, o Capítulo 2 que aborda uma fundamentação teórica e histórica das construções geométricas, o Capítulo 3 que exibe a definição de números construtíveis e suas propriedades, o Capítulo 4 que apresenta sugestões de questões do Ensino Fundamental que podem ser inseridas construções geométricas por régua e compasso em suas soluções e por fim, as considerações finais, referências bibliográficas e apêndice.

1.4 Materiais utilizados

Para realizar as atividades sugeridas o aluno necessitará apenas de lápis, régua e compasso. Em algumas atividades, ele poderá usar esquadros e transferidor, mas estes não serão efetivos na resolução. Poderia ainda usar algum software de geometria dinâmica, mas, como nem toda escola dispõe de laboratório de informática, nos restringiremos apenas a estes materiais, pois são de fácil acesso ao discente.

1.5 Recomendações metodológicas

Recomendamos que este material seja aplicado nas turmas do 6^o ao 9^o ano do Ensino Fundamental, e que o professor trabalhe 2 aulas de 50 minutos sobre as construções geométricas por régua e compasso antes de inseri-las nas resoluções de questões de algum conteúdo da série em que esteja lecionando. Daremos no trabalho algumas sugestões de questões sobre alguns conteúdos, mas o professor poderá usar as construções em outros conteúdos que achar conveniente.

Sugerimos que sejam utilizadas construções geométricas após a exploração dos conteúdos das questões e que estas construções sirvam para melhorar o entendimento do aluno, já que ele estudou a base teórica em aulas anteriores. Os alunos poderão trabalhar em grupos ou individualmente nas resoluções das atividades.

1.6 Possíveis continuações

A proposta deste TCC poderá ser ampliada para o Ensino Médio, pois os alunos já estarão mais acostumados com as construções geométricas e a presença de alguns conteúdos desta fase são propícios para a sua utilização, tais como Conjuntos Numéricos, Intervalos, Funções, Geometria Plana , Geometria Analítica, etc.

1.7 Motivo da escolha

A maioria dos livros didáticos traz os conteúdos de geometria nos capítulos finais. Se a escola não possuir dois professores de matemática para dividir o conteúdo com a turma, provavelmente, o aluno deixará de ver os capítulos sobre geometria, e a justificativa será o tempo que não foi suficiente para o professor apresentar os conteúdos. Por isso, escolhemos as construções geométricas para que os alunos trabalhem a parte da geometria durante todo o ano letivo e não apenas no final.

Capítulo 2

Construções Geométricas.

Neste capítulo, exibiremos os passos possíveis na construção por régua e compasso, considerando uma régua não graduada e enfocaremos historicamente os Três Problemas Clássicos da Geometria Grega.

2.1 Construção Utilizando Régua e Compasso.

As construções geométricas utlizando uma régua não graduada e um compasso devem seguir algumas regras básicas:

- Conhecendo-se dois pontos distintos, é possível traçar uma reta utilizando a régua.
- Com o compasso, é possível traçar uma circunferência com centro em um ponto conhecido e que passa por um segundo ponto determinado.

É permitido obter pontos que podem ser construídos através de uma sequência finita de operações: intersecções de retas, intersecções de circunferências e intersecções de retas com circunferências. Com esses pontos obtidos, podemos traçar novas retas e novas circunferências e assim sucessivamente.

A construção com estes instrumentos tem sido a marca registrada da Geometria desde o aparecimento dos elementos de Euclides em torno de 300 a.C, conforme relata Stillwell apud [8].

Os matemáticos da Grécia Antiga já tinham um grande interesse por estas construções e segundo [6] , o traçado de construções era conhecido como um jogo, que tinha suas regras, e era considerado como um dos jogos mais fascinantes e absorventes daquela época.

Com o uso da régua e compasso, os gregos realizaram uma grande quantidade de construções geométricas e solucionaram diversos problemas geométricos, tais como: construção de retas paralelas a uma reta dada, a bissecção de um ângulo, a bissecção de um segmento, a construção de circunferência e arco, a construção de uma reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto dado, entre outras.

Apesar da resolução de diversos problemas geométricos, alguns problemas não foram solucionados com uso da régua e compasso: a duplicação do cubo, a quadratura do círculo e a trissecção de um ângulo. Estes problemas ficaram conhecidos como os Três Problemas Clássicos da Geometria Grega.

> Como os postulados dos Elementos de Euclides restringem o uso da régua e compasso, de acordo com as regras acima, estes instrumentos, assim utilizados tornaram-se conhecidos como instrumentos euclidianos,**[6]**.

2.2 Construções Elementares com Régua e Compasso.

Exibiremos nesta seção, algumas construções elementares utilizando régua e compasso.

2.2.1 Construção da mediatriz de um segmento de reta.

Considere um segmento de reta $\overline{AB}$. Chamamos de mediatriz do segmento $\overline{AB}$ a reta perpendicular a $\overline{AB}$ que passa pelo seu ponto médio. Para construi-la utilizamos os seguintes procedimentos:

- Com centros em A e B, traçamos dois círculos de mesmo raio, sendo este raio maior que a medida do comprimento desse segmento. Chamaremos de C e D os pontos de intersecção destes os dois círculos.

- Traçamos a reta que passa pelo ponto C e D. Essa reta é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

A justificativa é que por construção, $ABCD$ forma um losango, e com isso, suas diagonais são perpendiculares e cortam-se ao meio.

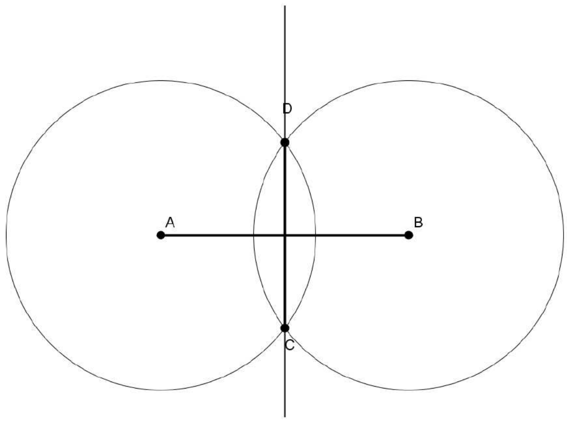


Figura 2.1: Mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

2.2.2 Construção de uma reta paralela a uma reta dada que passa por um ponto exterior.

Considere uma reta r e um ponto P exterior a reta r. Podemos traçar uma reta paralela a r passando por P utilizando os seguintes procedimentos:

- Utilizando o compasso centrado em P traçamos um arco de circunferência que intersecte a reta r e obtemos com isso o ponto que chamaremos de B.
- Com centro em B e raio igual ao do arco anterior, traçemos um arco que intersecta r num ponto que chamaremos de C.
- Com centro em B e raio $\overline{PC}$ traçamos um arco que intersecte o arco de circunferência de raio $\overline{PB}$ inicial. Chamaremos de D este ponto.
- Traçemos a reta que passa por P e D, ela será a paralela a reta r.

A justificativa é simples, pois da forma como foi feita a construção, $PCBD$ é um losango e portanto seus lados $\overline{PD}$ e $\overline{CB}$ são paralelos.

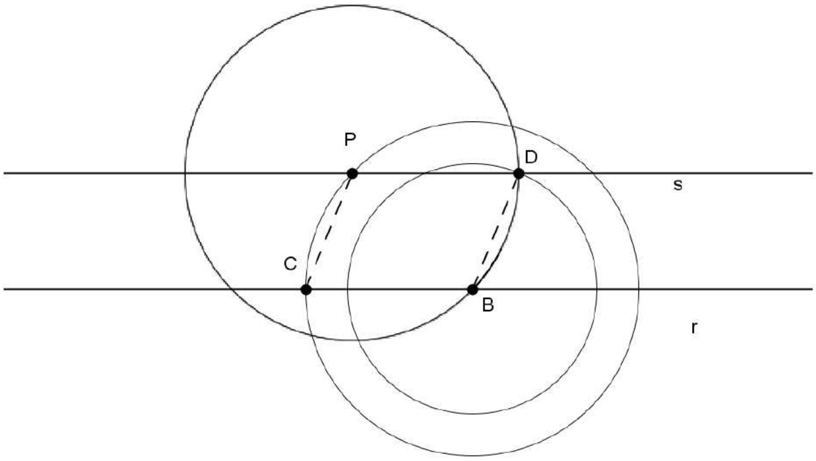


Figura 2.2: Reta s paralela à reta r.

2.2.3 Construção de uma reta perpendicular a uma reta dada que passe por um ponto exterior.

Considere uma reta r e um ponto P exterior. Podemos traçar uma perpendicular a r passando por P utilizando os seguintes procedimentos:

- Com centro em P, traçamos um arco de circunferência que corte a reta r em dois pontos A e B.
- Com centros em A e B, traçamos arcos de circunferência que intersectem em um ponto C.
- Traçamos a reta PC, que é perpendicular à reta r.

A justificativa é simples: como $\overline{PA} = \overline{PB}$ e $\overline{CA} = \overline{CB}$, então a reta PC é a mediatriz de $\overline{AB}$, e portanto, é perpendicular à r.

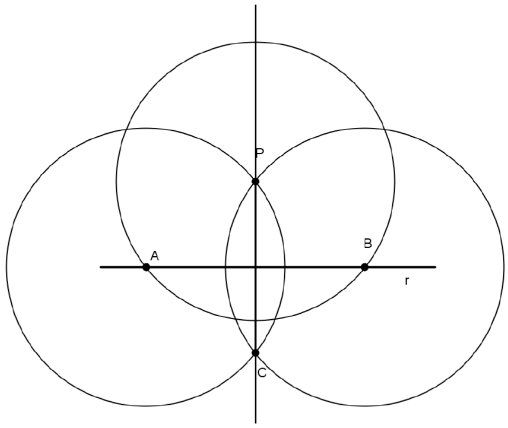


Figura 2.3: Reta perpendicular à reta r.

2.3 Problemas Clássicos da Geometria.

Como já foi dito na Seção (2.1), os gregos não conseguiram realizar algumas construções, que ficaram conhecidas como os Três Problemas Clássicos da Geometria Grega:

- Trissecção do Ângulo
- Quadratura do Círculo
- Duplicação do Cubo

Estes problemas despertaram interesse durante dois mil anos e só no final do século XIX, com o desenvolvimento da Álgebra e da Análise é que foi provado que estes problemas não possuem solução, já que os gregos não conseguiram provar que estas construções eram impossíveis com a utilização da régua não graduada e do compasso.

> A importância desses problemas reside no fato de que eles não podem ser resolvidos, a não ser aproximadamente, com régua e compasso , embora que esses instrumentos sirvam para a resolução de muitos problemas de construção,**[6]**.
>
> Depois de 2200 anos depois seria provado que todos os três são impossíveis de resolver só com a régua e compasso. No entanto, a maior parte da metemática grega e muito da investigação matemática posterior, foi motivada pelos esforços para conseguir o impossível ou à falta disso, para modificar as regras. A Idade Heróica fracassou em seu objetivo imediato sob as regras, mas seus esforços foram coroados por brilhante sucesso em outros pontos,**[1]**.

2.3.1 Duplicação do Cubo.

O problema da duplicação do cubo pode ser colocado da segunite forma: considerando um cubo de aresta a, determinar com régua e compasso, a aresta b de um outro cubo, cujo volume seja o dobro do volume do primeiro (Problema de Delos, Carneiro, apud [8]).

Seja um cubo de aresta a então seu volume é a^3. Logo, para a duplicação do volume do cubo de aresta a, devemos construir um cubo de aresta b tal que $b^3 = 2a^3$, ou seja, devemos ter:

$$b = a\sqrt[3]{2} \ .$$

O problema aqui, como veremos mais adiante é que $\sqrt[3]{2}$ não é construtível com régua e compasso.

Uma das lendas relata que este problema surgiu na época de uma grande praga que ocorreu em Atenas $(430a.C)$ e na procura de uma solução para acabar com a praga, a população procurou o oráculo de Delos, e o deus Apolo ordenou que fosse duplicado o seu altar. Então, dobraram as dimensões do altar , mas, com isso seu volume foi aumentado num fator 8, como o deus não ficou satisfeito, a praga continuou matando a população.

Várias foram as tentativas de solucionar este problema, de acordo com [6], o primeiro progresso real foi sem dúvidas a redução do problema, feito por Hipócrates (440 a.C), à construção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de retas. Usando seu caminho, Arquitas (400 a.C), Eudoxo (370 a.C), Nemacmo (350 a.C), Eratóstones (230 a.C), Apolônio (225 a.C) e Dioclés (180 a.C), e outros matemáticos da época, também tentaram resolver o problema.

O matemático alemão Carl Friedrich Gauss afirmou a impossibilidade do problema de dobrar o volume do cubo usando apenas régua e compasso, e isso foi provado por Pierre Wantzel em 1837 conforme relata [9].

2.3.2 Quadratura do Círculo.

Este problema consiste em construir um quadrado cuja área seja igual à área de um círculo dado, utilizando apenas régua e compasso.

Considere uma círculo de raio r. Sua área é dada por πr^2. Se o quadrado de lado x tem área igual à πr^2, então, $x^2 = \pi r^2$, ou seja,

$$x = r\sqrt{\pi} \ .$$

o principal problema é então construir um segmento de medida $\sqrt{\pi}$.

O principal problema é então construir um segmento de medida $\sqrt{\pi}$. Este problema está relacionado com o filósofo grego Anaxágoras $(500-428a.C)$, que foi preso por negar que o sol fosse uma divindade. Enquanto estava na prisão ele ocupou-se tentando descobrir uma maneira de resolver o problema utilizando uma régua não graduada e um compasso, mas não obteve sucesso.

> Alguns anos mais tarde, Hípias de Elis (425 a.C) inventou uma curva que se tornou conhecida como quadratiz. Esta curva resolve tanto o problema da trissecção como o da quadratura, mas a tradução não é unânime sobre quem a usou primeiro na quadratura. É possível que Hípias a tivesse usado para trissecionar ângulos e que Dinostrato (350 a.C) ou algum outro geômetra posterior, a tivesse aplicado ao problema da quadratura, [6].

Por volta de $250a.C$, Arquimedes deu uma solução para este problema utilizando outros artifícios além da régua não graduada e o compasso.

Passados 20 séculos é que foi apresentado uma prova rigorosa para este problema, onde Ferdinand Lindemann em 1882 mostrou que π é um número transcendente, conforme relata [8], e que mostra que é impossível construir um segmento cujo comprimento seja π.

2.3.3 Trissecção do Ângulo.

Este é o mais antigo dos três problemas. É possível que tenha surgido da necessidade dos egípcios em medir ângulos entre estrelas para determinar o tempo da noite.

O problema é colocado da seguinte maneira: dado um ângulo qualquer, construir com uma régua e compasso um ângulo igual a terça parte do ângulo dado.

De acordo com [6], os gregos podem ter se deparado com o problema da trisecção do ângulo no esforço para resolver o problema análogo da multisecção de ângulo, ou até talvez, o estudo tenha surgido de esforços para construir um polígono regular de nove lados, para o que é preciso trisseccionar um ângulo de 60°.

Se um ângulo θ qualquer é construtível, consequentemente seu *seno* e seu *cosseno* também são. Então, trissectar um ângulo, é o mesmo que construir $cos\frac{\theta}{3}$ ou $sen\frac{\theta}{3}$, já que

$$cos(\theta) = cos\left[2\left(\frac{\theta}{3}\right) + \left(\frac{\theta}{3}\right)\right] = 4cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right) - 3cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \quad .$$

Tomando $cos\,(\theta) = k$ e $cos\left(\frac{\theta}{3}\right) = y$ teremos que encontar a raiz da equação:

$$k = 4y^3 - 3y \quad .$$

Segundo [6], nas tentativas de solucionar o problema, descobriram-se várias curvas superiores, como a Conchóide, inventada por Nicomedes (240 a.C) e curvas transcedentes (não algébricas), que não só trisseccionam um ângulo dado como também, mutisseccionam-no num número qualquer de ângulos. Dentre essas curvas está a quadratiz (Hípias-425 a.C) e a espiral de Arquimedes.

A busca de solucionar estes problemas foi de grande valia para o desenvolvimento da geometria, levando a diversas descobertas.

> O grande estímulo ao desenvolvimento da matemática inclusive para a criação de novas teorias, dado pelos esforços continuados para se resolverem os três famosos problemas da antiguidade, ilustra o valor heurístico de problemas matemáticos atraentes não resolvidos, **[6].**

Capítulo 3

Sobre a Construtibilidade de Números e Pontos no Plano.

Neste capítulo, definiremos um número construtível através do uso de uma régua não graduada e um compasso, tomando como referência um segmento unitário, e mostraremos que é possível realizar as operações fundamentais entre eles e a extração da raiz quadrada. Estenderemos o conceito de número construtível para o plano e mostraremos critérios de construtibilidade e de não construtibilidade.

3.1 Definição de Números Construtíveis.

Um número real positivo a é chamado de construtível se conseguirmos usando apenas um compasso e uma régua não graduada construir com um número finito de passos um segmento de reta cujo comprimento seja a, a partir de um segmento cujo comprimento tomamos como a unidade.

Números construtíveis utilizando régua não graduada e compasso nada mais são do que números que podem ser obtidos apenas com as quatro operações fundamentais e a extração da raiz quadrada. Para isto temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1.1 *Se a e b são números reais e positivos construtíveis, então $a+b$, $a-b$ $(a>b)$, $a.b$, $\frac{a}{b}$ e $\sqrt{a}$ são construtíveis.*

Demostração

Tome um segmento de reta cujo comprimento é considerado a unidade e considere dois segmentos de reta de comprimentos construtíveis a e b, como na Fig.(3.1)

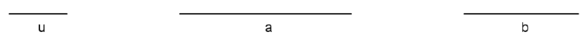


Figura 3.1: Segmento unitário e segmentos de medidas a e b.

Considere agora um segmento $\overline{AB}$ tal que $\left|\overline{AB}\right| = a$ e tracemos sobre a reta AB, um segmento $\overline{CD}$ tal que $\left|\overline{CD}\right| = b$ de modo que C coincida com B e esteja entre A e D.

Construindo agora uma circunferência com centro no ponto B e raio b. Chamamos o ponto diferente de D, da intersecção da reta com a circunferência de E. Então, $\left|\overline{AD}\right| = a+b$ e $\left|\overline{AE}\right| = a-b$, o que mostra que $a+b$ e $a-b$ são números construtíveis.

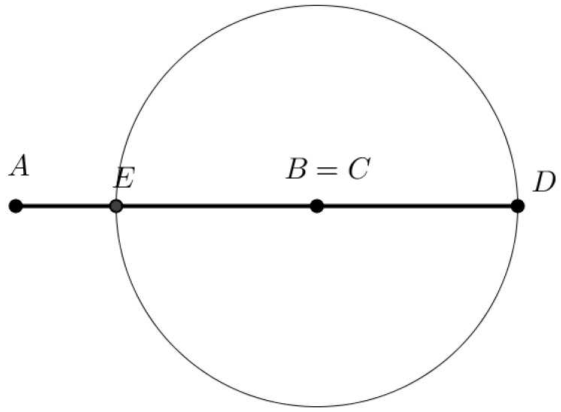


Figura 3.2: Determinando $a+b$ e $a-b$.

Agora, sobre uma reta r tracemos um segmento $\overline{AB}$. Por A tracemos uma outra reta s concorrente com r onde marcaremos o segmento unitário $\overline{AC} = 1$. Em seguida, sob a reta s, marcaremos o segmento $\overline{AD} = b$. Supomos $b > 1$ (se $b < 1$ a construção será análoga). Tracemos agora a reta que passa por C e B e tracemos uma paralela a essa reta passando por D e que intersecta r num ponto P.

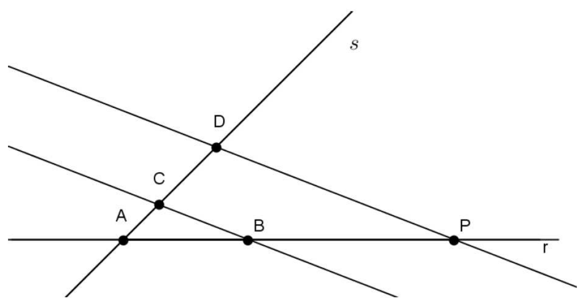


Figura 3.3: Construção para determinar $a.b$.

Usando a semelhança entre os triângulos ΔACB e ΔADP teremos que:

$$\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AD}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AP}|} \quad ,$$

ou seja,

$$\frac{1}{b} = \frac{a}{|\overline{AP}|} \quad .$$

Logo

$$a.b = |\overline{AP}| \quad ,$$

o que mostra que $a.b$ é construtível.

Agora utilizando as mesmas condições do caso anterior construimos uma reta que passa por B e D e construimos uma paralela a BD passando por C e intersectando $\overline{AB}$. A esse ponto de intersecção chamaremos de Q.

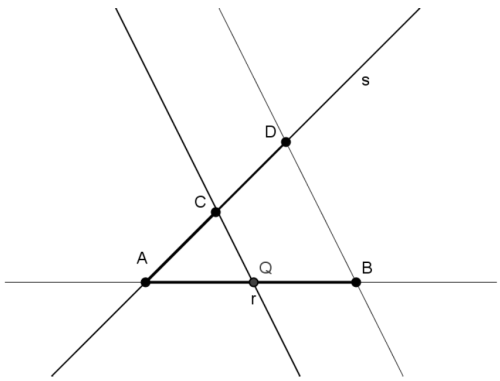


Figura 3.4: Construção para determinar $\frac{a}{b}$.

Usando a semelhança entre os triângulos ΔADB e ΔACQ obteremos

$$\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AQ}|} \quad .$$

Isto significa que:

$$\frac{b}{1} = \frac{a}{|\overline{AQ}|} \quad .$$

Logo

$$\frac{a}{b} = |\overline{AQ}| \quad ,$$

o que nos mostra que $\frac{a}{b}$ é construtível.

Agora mostraremos que $\sqrt{a}$ é construtível. Considere uma reta r e um segmento $|\overline{AB}| = a$, sobre a reta r. Considere o ponto C, tal que a medida do segmento $\overline{BC}$ seja a unidade. Traçamos agora a semicircunferência com centro no ponto médio de AC.

Passando por B, tracemos um segmento de reta perpendicular a $\overline{AC}$ intersectando a semicircunferência num ponto D e construimos o triângulo ΔADC.

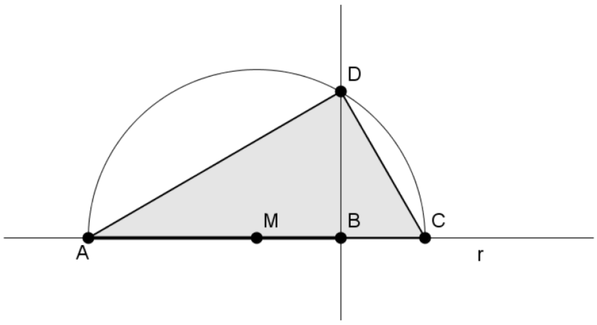


Figura 3.5: Construção para determinar $\sqrt{a}$.

Considerando que o ângulo determinado pelo vértice D do triângulo ΔADC é reto (ver Apêndice A), pois está inscrito numa semicircunferência e utilizando as relações métricas do triângulo retangulo temos que:

$$\left|\overline{BD}\right|^2 = \left|\overline{AB}\right| . \left|\overline{BC}\right|$$

ou seja

$$\left|\overline{BD}\right|^2 = a.1$$

$$\left|\overline{BD}\right| = \sqrt{a}$$

o que mostra que $\sqrt{a}$ é construtível.

Um número real é construtível se for zero ou se seu módulo for um número real construtível, isto é α é construtível quando $|\alpha|$ é construtível. Portanto, todos os naturais são construtíveis, assim como todos os inteiros. Sendo a e b construtíveis então $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, também é construtível. Logo se $n \in \mathbb{Q}$, então n é construtível.

A raiz quadrada de um número a positivo construtível é construtível. Logo os números irracionais tais como, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, também são construtíveis. Então podemos dizer também que os números do tipo $2+\sqrt{2}$, $4+\sqrt{\frac{2}{5}+\sqrt{3}}$ e $2+\sqrt{3-\frac{1}{5}+\sqrt{7}}$ são construtíveis.

3.2 Pontos Construtíveis no Plano.

Podemos estender a noção de números construtíveis para o sistema de coordenadas cartesianas, expressando a construtibilidade de um ponto P em termos de coordenadas (a,b), onde a e b são construtíveis.

Um ponto $P=(a,b)$ será construtivel se e somente se, os números a e b forem construtíveis.

> Os pontos obtidos por estas construções (segundo as mesmas regras do jogo) serão chamados de pontos construtíveis do plano. Com este conceito, é imediato que um ponto $P = (a,b)$ será construtível se e somente se os números a e b forem construtíveis, [11].

Uma reta que passa por dois pontos (α,β) e (γ,δ) de coordenadas racionais, possui equação da seguinte forma:

$$ax+by+c=0 \ ,$$

onde a, b e c também são racionais. O coeficiente angular de uma reta que passa por dois pontos $P=(x_1,y_1)$ e $Q=(x_2,y_2)$ é dado por:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \ ,$$

como $P_1=(\alpha,\beta)$ e $P_2=(\gamma,\delta)$, então

$$m=\frac{\delta-\beta}{\gamma-\alpha} \ .$$

Substituindo na equação geral da reta

$$y-y_p=m(x-x_p)$$

e tomando P como sendo $P_1=(\alpha,\beta)$ obteremos

$$y-\beta=\frac{\delta-\beta}{\gamma-\alpha}.(x-\alpha) \ .$$

Desenvolvendo a equação obteremos

$$(\delta-\beta)x+(\alpha-\gamma)y+\beta\gamma-\delta\alpha=0 \ .$$

Tomando $a=\delta-\beta$, $b=\alpha-\gamma$ e $c=\beta\gamma-\delta\alpha$, obtemos:

$$ax+by+c=0 \ ,$$

onde a, b e c são resultados de operações elementares dos racionais α, β, γ e δ. Portanto, a b e c são racionais.

Determinando a intersecção de duas retas deste tipo, o ponto de interseção será a solução deste sistema:

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \ , \\ a'x+b'y+c'=0 \ , \\ \end{cases}$$

ou seja, é da seguinte forma:

$$x=-\left(\frac{c'b-cb'}{ab'-a'b}\right) \qquad y=-\left(\frac{ac'-a'c}{a'b-ab'}\right) \ .$$

Logo, x e y são racionais, já que a, a', b, b', c e c' são racionais.

Uma circunferência de centro $C(\alpha;\beta)$ de coordenadas racionais e que passa pelo ponto $P(\gamma;\delta)$ também de coordenadas racionais, terá equação da forma:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \ .$$

Como r é o raio da circunferência, temos então que é igual a medida da distância entre o centro e o ponto, ou seja

$$r=\sqrt{(\gamma-\alpha)^2+(\delta-\beta)^2} \ ,$$

ou seja

$$r^2=(\gamma-\alpha)^2+(\delta-\beta)^2 \ .$$

Então desenvolvendo a equação da circunferência obteremos:

$$x^2-2\alpha x+\alpha^2+y^2-2\beta y+\beta^2=\gamma^2-2\gamma\alpha+\alpha^2+\delta^2-2\delta\beta+\beta^2 \ ,$$

ou

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+2\gamma\alpha+2\delta\beta-\gamma^2-\delta^2=0 \ .$$

Tomando $-2\alpha=a$, $-2\beta=b$ e $2\alpha\gamma\ +2\beta\delta-\gamma^2-\delta^2=c$, obteremos:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \ ,$$

onde a, b e c são racionais.

Agora, determinando a intersecção entre uma reta e uma circunferência destes tipos mostrados, devemos obter a solução de um sistema do tipo:

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \ , \\ a'x+b'y+c'=0 \ . \end{cases}$$

Se estes sistema possuir solução, então esta poderá ser um ou dois pontos, com ambas as coordenadas da forma $p+q\sqrt{r}$, onde p, q e r são racionais e $r\geq 0$. De fato, pois se isolarmos y na segunda equação do sistema obteremos que:

$$y=-\frac{a'}{b'}x-\frac{c'}{b'} \ .$$

Substituindo y na primeira equação temos para a abscissa x uma equação da forma:

$$Ax^2+Bx+C=0 \ ,$$

onde $A=(a')^2+(b')^2$, $B=2a'c'+a(b')^2-bb'a'$ e $C=(c')^2-bb'c'+c$ e cuja solução é:

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \ .$$

Analogamente, a coordenada y terá uma fórmula semelhante, onde foram utilizadas apenas adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes quadradas dos números racionais a, b, c, a', b' e c'.

Para obtermos um novo ponto pela interseção de duas circunferências cujas equações possuem coeficientes racionais recaímos em um sistema do tipo:

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \ , \\ x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0 \ , \end{cases}$$

o qual é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \ , \\ (a-a')x+(b-b')y+(c-c')=0 \ . \end{cases}$$

Notando que este sistema é da mesma forma que o anterior, chegamos à conclusão de que se existir solução, então esta será um ou dois pontos, com ambas as coordenadas na forma $p+q\sqrt{r}$ onde p, q e r são racionais e $r \geq 0$. Todos os pontos obtidos são da forma $p+q\sqrt{r}$.

> Se partirmos de todos os pontos do plano com coordenadas racionais, e fizermos construções com régua e compasso envolvendo apenas intersecção de reta à reta, reta com círculo ou círculo com círculo, as coordenadas dos novos pontos obtidos, ou continuam sendo racionais ou, no máximo passam a ser da forma $a+b\sqrt{c}$, onde a, b e c são racionais e $c \geq 0$ ",**[11]**.

Se construirmos novas retas e novas circuferências com os pontos obtidos das interseções e procurarmos novos pontos de interseções estes serão racionais ou da forma $a'+b'\sqrt{c'}$, onde a', b' e c' são da forma $a+b\sqrt{c}$ dos pontos de interseção anteriores.

> Numa segunda etapa de nossa construção com régua e compasso, os novos números obtidos serão da forma $a+b\sqrt{c}$, onde, por sua vez , a, b e c são da forma anteriormente indicada. Por exemplo se na primeira etapa tivermos obtido, por exemplo, $1+\sqrt{2}$, na segunda etapa poderemos ter por exemplo, $4(1+\sqrt{2})+5\sqrt{3(1+\sqrt{2})}$",**[11]**.

3.3 Números não Construtíveis e os Problemas Clássicos da Geometria

Para o leitor que queira se aprofundar no conteúdo, indicamos livros [7] sobre a teoria de extensão dos corpos, onde observará que um número construtível será sempre da forma $a+b\sqrt{c}$ e pertencerá a um dos corpos da cadeia:

$$\mathbb{Q} < K_1 < K_2 < K_3 \ldots < K_{m-1} < K_m < \ldots$$

onde K é um subcorpo de $\mathbb{R}$ e $K_0, K_1, \ldots, K_m$ é uma sequência finita de corpos, com $K_0 = \mathbb{Q}$ e $K_m = K_{m-1}(\sqrt{c})$ c $\in K_{m-1}$, $c > 0$, $\sqrt{c} \notin K_{m-1}$, ou seja,

$$K_m\left(\sqrt{c}\right) = \left\{a + b\sqrt{c};\ \ a,\ \ b,\ \ c \in \mathbb{Q}\right\} \tag{3.1}$$

concluindo então que todo número construtível é um número algébrico sobre os racionais. Enunciaremos um teorema, sem demonstrá-lo, [10] que reforça a afirmação acima.

Teorema 3.3.1 *Se um número real a é construtível, então a é algébrico e o grau do polinômio mínimo de a sobre $\mathbb{Q}$ é uma potência de 2.*

Pelo Teorema (3.31), podemos dizer que $\sqrt{2}$ é construtível, pois $\sqrt{2}$ é algébrico e o grau do polinômio sobre $\mathbb{Q}$ é uma potência de 2.

Já o número $\sqrt[3]{2}$, que também é algébrico, não é construtível, pois o grau do polinômio sobre $\mathbb{Q}$ é uma potência de 3. Como por este caminho usamos uma Matemática muito avançada e não é escopo deste trabalho, mostraremos de maneira mais simples a inconstrutibilidade de alguns números.

Para dar idéia de que $\sqrt[3]{2}$ não é construtível, vamos mostrar que ela não pode ser da forma $a + b\sqrt{c}$, com a, b e $c \in \mathbb{Q}$.

Inicialmente vamos supor que $r = \sqrt[3]{2}$ seja construtível. Então $r = \sqrt[3]{2}$ é da forma $a + b\sqrt{c}$.

Se $r = a + b\sqrt{c}$, com a, b e $c \in \mathbb{Q}$, então elevando-se ambos os lados ao cubo obteremos:

$$r^3 = a^3 + 3a^2b\sqrt{c} + 3ab^2c + b^3c\sqrt{c}\ \ .$$

Como $r^3 = 2$, temos:

$$2 = a^3 + 3a^2b\sqrt{c} + 3ab^2c + b^3c\sqrt{c}\ \ ,$$

ou

$$2 = \left(a^3 + 3ab^2c\right) + \left(3a^2b + b^3c\right)\sqrt{c}\ \ ,$$

ou seja,

$$\begin{cases} a^3 + 3ab^2c = 2\ \ , \\ 3ab^2 + b^3c = 0\ \ . \end{cases} \tag{3.2}$$

Se $r = a + b\sqrt{c}$ é raiz da equação $r^2 - 2 = 0$, então $r_1 = a - b\sqrt{c}$ também é raiz pois:

$$r_1^3 = \left(a - b\sqrt{c}\right)^3\ \ ,$$

$$2 = a^3 - 3a^2b\sqrt{c} + 3ab^2c - b^3c\sqrt{c}\ \ ,$$

$$2 = \left(a^3 + 3ab^2c\right) - \left(3a^2b + b^3c\right)\sqrt{c}\ \ ,$$

cuja solução, é a mesma do sistema (3.2)

Logo $r_1^3 = r^3$ e consequentemente $r_1 = r$, ocorrendo assim, que $b = 0$ e $r = a$, o que é um absurdo.

Podemos escrever $\sqrt{c}$ da seguinte forma:

$$\sqrt{c} = \frac{2 - (a^3 + 3ab^2c)}{3a^2b + b^3c} \quad ,$$

o que é um absurdo, pois $\sqrt{c}$ é irracional e não uma razão de números racionais. Portanto $\sqrt[3]{2}$ não é construtível, e o problema da duplicação do cubo é impossível de ser resolvido com régua e compasso.

Verificaremos agora que é impossível de solucionar o problema de triseccionar um ângulo genérico com régua e compasso.

Definiremos um ângulo construtível como um ângulo que pode ser construído por régua e compasso. Mostraremos que um ângulo é construtível se e somente se seu *cosseno* (ou seu *seno*) for construtível.

Considere um ângulo α e o ponto P, onde $\overline{OP}$ é o segmento unitário. Traçando uma reta perpendicular à r que passa por P obtemos o ponto Q que intersecta r. O segmento $\overline{OQ}$ representa o $cos\,\alpha$ e o segmento $\overline{PQ}$ representa o $sen\,\alpha$, conforme a Figura (3.6):

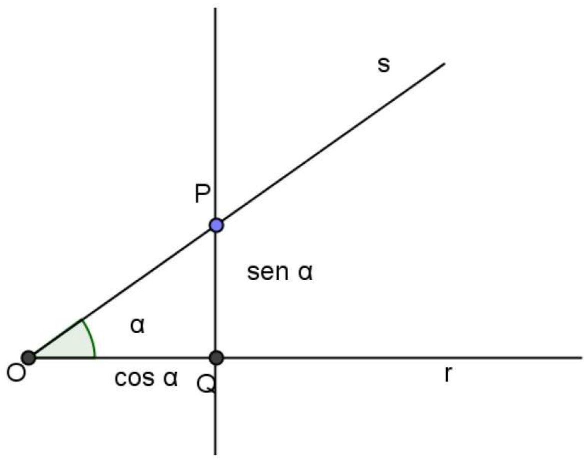


Figura 3.6: Ângulo Construtível.

Tomando por exemplo o ângulo de $60°$. Temos que $cos\,60° = \frac{1}{2}$, que é racional, e portanto é construtível.

Alguns ângulos podem ser trisseccionados por régua e compasso. Mas, se fosse possível a trissecção de qualquer ângulo, então poderíamos construir um ângulo de $20°$, e consequentemente o $cos\,20°$.

Para mostrar que é impossível construir o ângulo de $20°$ façamos o seguinte. Tome $\theta = 20°$ na fórmula trigonométrica

$$cos(3\theta) = 4cos^3(\theta) - 3cos(\theta) \quad .$$

Como $cos 60° = \frac{1}{2}$ e $3\theta = 60°$ obtemos:

$$cos(60°) = 4cos^3(20°) - 3cos(20°) \ ,$$

ou

$$\frac{1}{2} = 4cos^3(20°) - 3cos(20°) \ .$$

Multiplicando por 2 e fazendo $y = cos 20°$ obtemos:

$$1 = 8y^3 - 6y \ .$$

Substituindo $2y = \alpha$ obtemos:

$$\alpha^3 - 3\alpha - 1 = 0 \ .$$

Segundo [14] uma equação do terceiro grau com coeficientes racionais só tem raízes construtíveis se ao menos uma delas for racional. Se somente uma delas for racional, as duas outras serão raízes de uma equação do segundo grau também construtíveis. Em outras palavras, ou as três raízes são construtíveis e, nesse caso, pelo menos uma é racional, ou nenhuma é construtível.

De acordo com o resultado a cima, as raízes da equação $\alpha^3 - 3\alpha - 1 = 0$ somente serão construtíveis se pelo menos uma delas for racional.

Supomos então que $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, racional, seja uma raiz. Então

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 3\left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0 \ ,$$

ou seja

$$\frac{b^3}{a} = (a^2 - 3b^2) \ . \tag{3.3}$$

Por esta última expressão, a divide b, já que divide o seu cubo. Como a e b não possuem fatores em comum as únicas alternativas para a são $+1$ e -1. Reescrevendo a expressão obtemos $a^3 = b^2(b + 3ab)$, ou seja o quadrado de b divide o cubo de a, logo b divide a. Da mesma forma, como a e b não possuem fatores em comum as únicas alternativas para b são $+1$ e -1. Uma simples verificação mostra que $+1$ e -1 não são raízes. Portanto não é possível construir o $cos 20°$, e com isso, impossível de construir o ângulo de $20°$

No caso da quadratura do círculo a demonstração é longa e trabalhosa e envolve conhecimentos avançados da disciplina Análise Matemática. Os resultados mostram que π não é construtível e com isso, não é possível resolver este problema. Em [7] é exibido um teorema sobre esta afirmação.

Capítulo 4

Atividades Propostas

Neste capítulo exibiremos como algumas atividades propostas de livros de matemática do Ensino Fundamental são colocadas para os alunos e indicaremos sugestões de como elas poderão ser aplicadas usando as construções geométricas por régua e compasso.

4.1 Atividades para o 6º ano do Ensino Fundamental

No 6º ano do Ensino Fundamental os alunos conhecem apenas os números naturais. Não podemos fazer demonstrações porque eles não possuem base matemática adequada. Trabalharemos apenas com a noção de que os números naturais são construtíveis. Mostraremos atividades relacionadas a construção de retas paralelas e perpendiculares e também sobre frações.

4.1.1 Retas Paralelas e Retas Perpendiculares

Alguns livros didáticos do 6º ano definem as posições de duas retas distintas contidas em um mesmo plano e nas atividades pedem para que os alunos construam retas paralelas e retas perpendiculares à uma reta dada usando régua e esquadro. Lembrando que o uso do esquadro é permitido, pois já sabemos que é possível determinar retas paralelas e retas perpendiculares à uma reta dada.

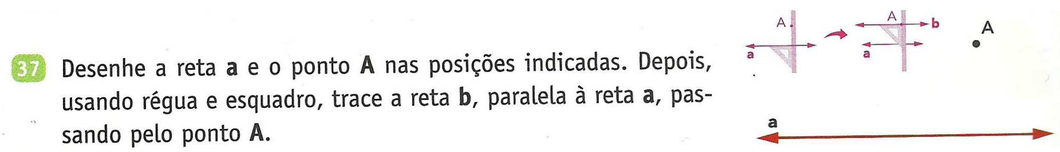

37 Desenhe a reta **a** e o ponto **A** nas posições indicadas. Depois, usando régua e esquadro, trace a reta **b**, paralela à reta **a**, passando pelo ponto **A**.

Figura 4.1: Atividade Sobre Construção de Reta Paralela, [2].

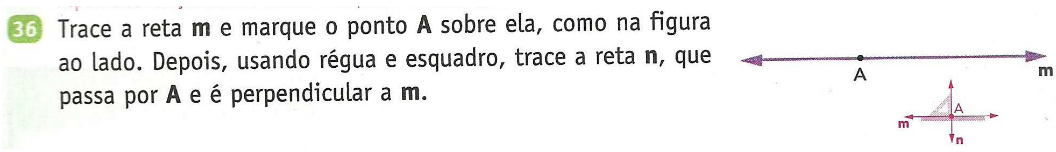

36 Trace a reta **m** e marque o ponto **A** sobre ela, como na figura ao lado. Depois, usando régua e esquadro, trace a reta **n**, que passa por **A** e é perpendicular a **m**.

Figura 4.2: Atividade Sobre Construção de Reta Perpendicular, [2].

Sugerimos então que as atividades sejam modificadas e as resoluções sejam com régua e compasso. O objetivo desta mudança é enriquecer as construções geométricas e definir de maneira simples o conceito de números construtível, mostrando mesmo sem usar a demosntração, que números naturais são construtíveis.

É necessário que os alunos já tenham noção dos conceitos introdutórios de geometria plana e das construções elementares usando régua e compasso, onde o professor já deve ter separado no mínimo 2 aulas de 45 mim para esta introdução. Vejamos a seguinte atividade:

ATIVIDADE 1

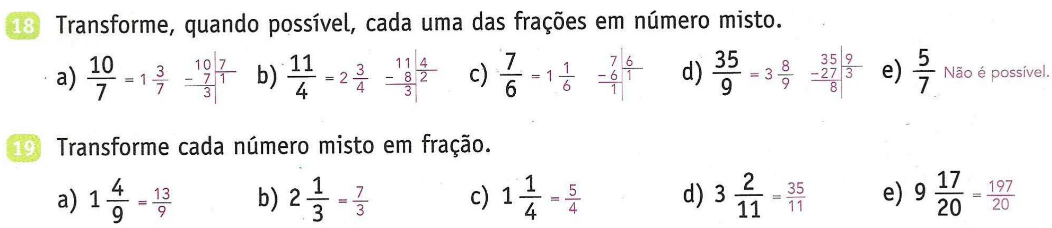
Considere um segmento u. Trace uma reta r e sobre ela trace um segmento $\overline{AB}$ com medida de comprimento $2u$, usando agora régua e compasso, obtenha um quadrado $ABCD$

COMENTÁRIO

Na atividade, o aluno usará as construções geométricas para determinar as retas perpendiculares e a reta paralela à reta r que formarão o quadrado $ABCD$, e a noção de números construtíveis para determinar os segmentos de comprimentos $2u$ formadores da figura. Esta atividade poderia ser estendida para obtenção de retângulos.

4.1.2 Frações e Números Mistos

Os números mistos são apresentados nos livros didáticos de maneira bem simples e prática, e suas atividades contemplam apenas transformações de números mistos para fração ou vice-versa. Vejamos dois exemplos.


18 Transforme, quando possível, cada uma das frações em número misto.

a) $\frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$ b) $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$ c) $\frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$ d) $\frac{35}{9} = 3\frac{8}{9}$ e) $\frac{5}{7}$ Não é possível.

19 Transforme cada número misto em fração.

a) $1\frac{4}{9} = \frac{13}{9}$ b) $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ c) $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ d) $3\frac{2}{11} = \frac{35}{11}$ e) $9\frac{17}{20} = \frac{197}{20}$

Figura 4.3: Atividades envolvendo números mistos, [2].

Para melhor fixação do conteúdo, sugerimos que sejam utilizadas as construções geométricas nas atividades, para que o aluno tenha uma maior visão e compreenda melhor os conceitos que envolvem fração. Observem a seguinte atividade:

ATIVIDADE 2

Construa geometricamente a localização do número misto $2\frac{1}{2}$ na reta r dada utilizando apenas régua e compasso. Indique o ponto com sua fração correspondente

COMENTÁRIO

Para realizar esta atividade o aluno deve ter conhecimentos prévios sobre frações, números mistos e as construções elementares. Ele deve verificar que:

$$2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \tag{4.1}$$

Como o segmento unitário foi dado na reta r, é fácil verificar que para localizar o número na reta basta adicionar os segmentos de comprimento 2 e $\frac{1}{2}$.

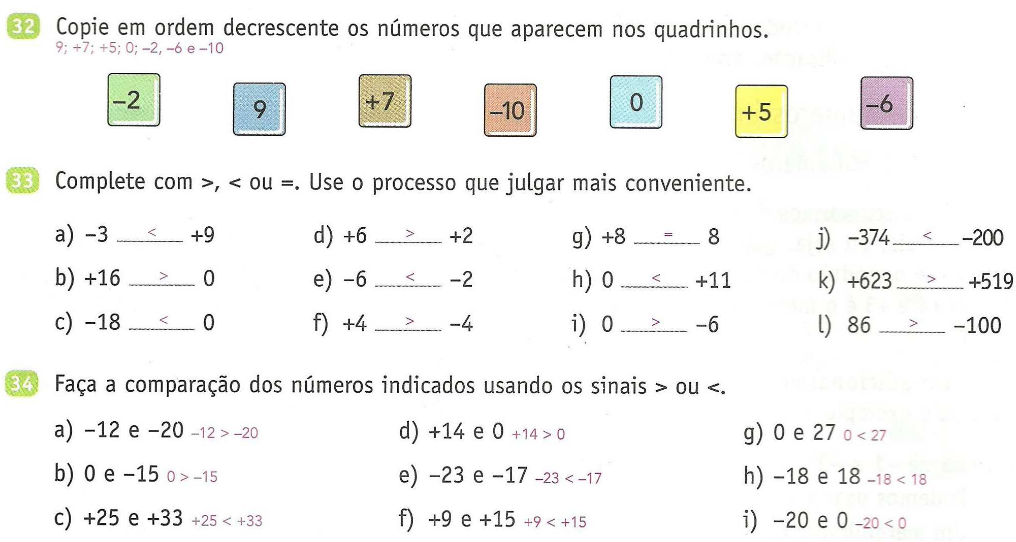
O professor poderá ampliar o nível da questão, onde o aluno terá dificuldades em dividir o segmento unitário em mais de duas partes.

4.2 Atividades para o 7º ano do Ensino Fundamental

Os alunos do 7º ano do Ensino Fundamental já conhecem os números inteiros, por isso, podemos considerar pontos à esquerda do zero. A reta dos naturais será ampliada para o lado esquerdo. Exibiremos atividades relacionadas com números inteiros, bissetriz de um ângulo e construções geométricas.

4.2.1 Os Números Inteiros

Quando se explora a definição dos números inteiros, a grande maioria dos livros didáticos apresentam atividades simples, como por exemplo:


32 Copie em ordem decrescente os números que aparecem nos quadrinhos.
9; +7; +5; 0; −2, −6 e −10

−2 9 +7 −10 0 +5 −6

33 Complete com >, < ou =. Use o processo que julgar mais conveniente.

a) −3 < +9
b) +16 > 0
c) −18 < 0
d) +6 > +2
e) −6 < −2
f) +4 > −4
g) +8 = 8
h) 0 < +11
i) 0 > −6
j) −374 < −200
k) +623 > +519
l) 86 > −100

34 Faça a comparação dos números indicados usando os sinais > ou <.

a) −12 e −20 −12 > −20
b) 0 e −15 0 > −15
c) +25 e +33 +25 < +33
d) +14 e 0 +14 > 0
e) −23 e −17 −23 < −17
f) +9 e +15 +9 < +15
g) 0 e 27 0 < 27
h) −18 e 18 −18 < 18
i) −20 e 0 −20 < 0

Figura 4.4: Atividade com números inteiros, [3].

Sugerimos então que eles sejam resolvidos com o auxílio das construções geométricas com régua e compasso.

ATIVIDADE 3

Construa uma reta de números inteiros contendo os números $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ e 5. Agora, use os sinais de $>$, $<$ ou $=$ para fazer a comparação entre os números indicados nos ítens a seguir:

(a) -1 e -5

(b) -3 e 2

(c) 2 e -1

(d) -2 e 0

(e) 0 e -4

COMENTÁRIO

Tomando um segmento de reta como unidade padrão, o aluno construirá uma reta de números inteiros e sabendo que a reta s é ordenada, facilmente irá comparar cada ítem. Ele já deve ter a noção prévia do conteúdo, e a construção da reta é para fixar o melhor entendimento.

4.2.2 Bissetriz de um ângulo

No 7º ano do Ensino Fundamental são apresentados os conceitos de ângulo e de bissetriz de um ângulo. Vejamos alguns exemplos:

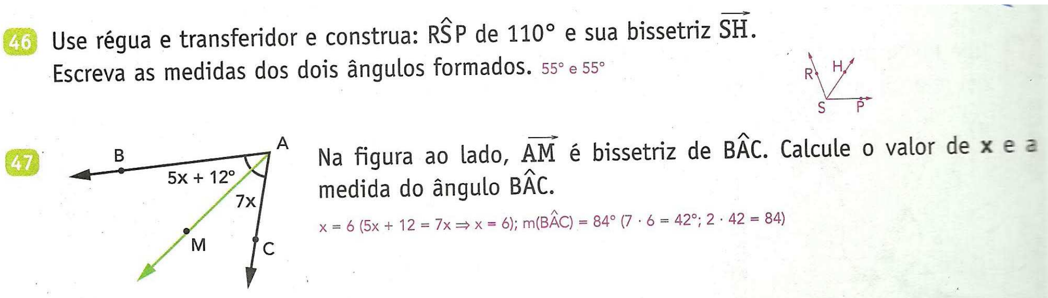


Figura 4.5: Atividades envolvendo Bissetriz de Ângulos, [3].

Podemos então sugerir que as atividades sejam feitas com construções por régua e compasso.

ATIVIDADE 4

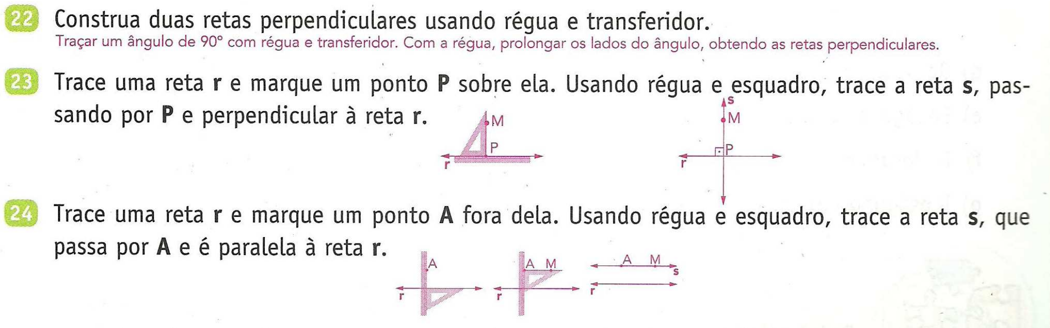
Use régua e transferidor e construa um ângulo de 100°. Agora construa usando régua e compasso a sua bissetriz e escreva as medidas dos dois ângulos formados.

COMENTÁRIO

Construindo o ângulo e depois construindo a sua bissetriz o aluno ficará com a teoria mais clara sobre o conteúdo. Como ele já tem a noção básica das construções elementares por régua e compasso, facilmente construirá a bissetriz. Ele própio construindo e depois verificando que os ângulos formados são a metade do ângulo inicial dará mais segurança no aprendizado.

4.2.3 Construções Geométricas

A maioria dos livros do 7º ano apresentam construções utilizando régua e transferidor, conforme exemplo:


22 Construa duas retas perpendiculares usando régua e transferidor.
Traçar um ângulo de 90° com régua e transferidor. Com a régua, prolongar os lados do ângulo, obtendo as retas perpendiculares.

23 Trace uma reta **r** e marque um ponto **P** sobre ela. Usando régua e esquadro, trace a reta **s**, passando por **P** e perpendicular à reta **r**.

24 Trace uma reta **r** e marque um ponto **A** fora dela. Usando régua e esquadro, trace a reta **s**, que passa por **A** e é paralela à reta **r**.

Figura 4.6: Atividades envolvendo construções geométricas, [3].

Como o aluno já tem estudado as construções utilizando régua e compasso, ele pode repetir as construções com uso destes materiais. Sugerimos então que as atividades sejam da seguinte maneira:

ATIVIDADE 5

(a) Construa duas retas perpendiculares utilizando régua e esquadros.

(b) Trace uma reta r e marque um ponto P sobre ela. Agora, usando régua e compasso, trace a reta s passando por P e perpendicular à r.

(c) Trace uma reta r e marque um ponto A fora dela. Use régua e compasso para traçar uma reta s que passe por A e é paralela à r.

COMENTÁRIO

As atividades sugeridas reforçarão o aprendizado de paralelismo e de perpendicularismo entre retas e dará mais prática nas construções elementares, que servirão para atividades mais avançadas.

4.3 Atividades para o 8º ano do Ensino Fundamental

A apresentação dos números irracionais e do conjunto dos números reais acontece para o aluno no 8º ano do Ensino Fundamental. Então, vamos explorar esses novos conceitos nas atividades. Exibiremos atividades de números racionais, reta real e área de regiões planas.

4.3.1 Números Racionais e a Reta Real

Geralmente, os livros didáticos apresentam a reta numérica e mostram alguns pontos marcados com alguns números irracionais, inclusive o número π. Vejamos um exemplo:

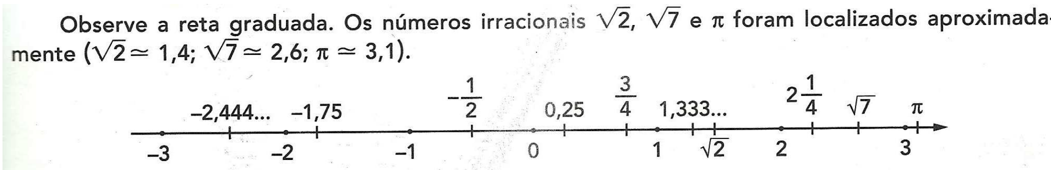


Figura 4.7: Exemplo da Reta Real, [5].

O livro fez uma aproximação para os números irracionais, $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$ e π e os marcou na reta numérica.

Deixamos como sugestão, que seja construída a reta dos reais através da construção geométrica por régua e compasso, onde teremos com exatidão um ponto para $\sqrt{2}$, outro para $\sqrt{7}$. Seria bom comentar que nunca conseguiremos obter um segmento de medida π, por isso o número π é marcado na reta com um valor aproximado.

Vejamos agora algumas atividades que podem ser incluidas construções com régua e compasso para o 8º ano do Ensino Fundamental:

ATIVIDADE 6

Escolhendo um segmento unitário, vamos construir a reta numérica localizando os seguintes números: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 4, \sqrt{2}$ e $\sqrt{7}$ usando construções geométricas por régua e compasso.

COMENTÁRIO

Com o auxílio das construções geométricas por régua e compasso o aluno vai fixar mais a idéia sobre números irracionais e vai aprender a localizar com exatidão o número $\sqrt{n}$, com n $\in \mathbb{N}$, verificando que nem sempre será um número racional, mas que podemos construir um segmento com sua medida. Seria bom fazer comentários de que existem números que não são marcáveis na reta numérica, dando a definição de números construtíveis e dando exemplos, sem demonstrações, de números não construtíveis.

O professor pode optar também em mostrar a espiral pitagórica, que é um processo prático para localizar irracionais na forma $\sqrt{n}$ com n $\in \mathbb{N}$. Alguns livros já mostram de maneira bem mais simples esse processo.

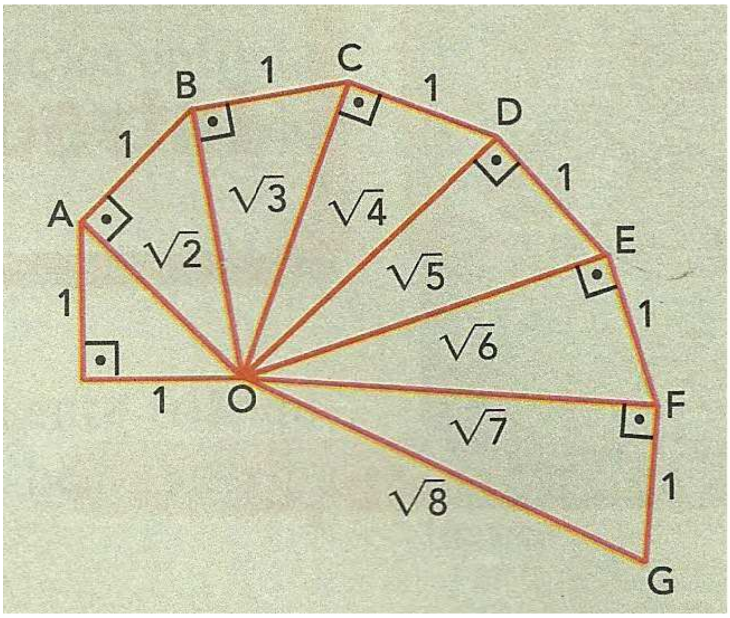


Figura 4.8: Espiral Pitagórica, [5].

4.3.2 Áreas de Regiões Planas

Muitas atividades sobre áreas de regiões planas são apresentadas nos livros de 8º ano do Ensino Fundamental. A maioria são de forma simples e necessita apenas do cálculo algébrico. Vejamos alguns exemplos:

65 Calcule em seu caderno a área, em centímetros quadrados (cm^2), da região determinada pelos seguintes polígonos:

a) Quadrado com 17,2 cm de perímetro. $18{,}49\ cm^2$ $(17{,}2 : 4 = 4{,}3;\ 4{,}3 \cdot 4{,}3 = 18{,}49)$

b) Retângulo de 120 mm por 9 cm. $108\ cm^2$ $(120\ mm = 12\ cm;\ 12 \cdot 9 = 108)$

c) Losango cujas diagonais medem 39 mm e 0,2 dm. $3{,}9\ cm^2$ $\left(39\ mm = 3{,}9\ cm;\ 0{,}2\ dm = 2\ cm;\ \frac{3{,}9 \cdot 2}{2} = 3{,}9\right)$

d) Trapézio com 4 cm de altura e bases de 0,03 m e 0,7 dm. $20\ cm^2$ $\left(\frac{(7+3)\cdot 4}{2}\right)$

e) Triângulo retângulo com lados de 3 dm, 400 mm e 50 cm. $600\ cm^2$ $\left(3\ dm = 30\ cm;\ 400\ mm = 40\ cm;\ \frac{30 \cdot 40}{2} = 600\right)$

f) Triângulo com 40 cm de base e altura medindo $\frac{2}{5}$ da base. $320\ cm^2$ $\left(\frac{2}{5} \text{ de } 40 = 16;\ \frac{40 \cdot 16}{2} = 320\right)$

g) Paralelogramo com $7\frac{1}{2}$ cm de base e altura medindo 20% da base. $11{,}25\ cm^2$ $(20\% \text{ de } 7{,}5\ cm = 1{,}5\ cm;\ 7{,}5 \cdot 1{,}5 = 11{,}25)$

h) Retângulo cujo comprimento mede o triplo da largura e tem perímetro de 16,8 cm. $13{,}23\ cm^2$ $\left(\begin{cases} 2x + 2y = 16{,}8 \\ x = 3y \end{cases} \rightarrow x = 6{,}3 \text{ e } y = 2{,}1 \rightarrow x \cdot y = 13{,}23\right)$

66 Determine a medida:

a) do lado de uma região quadrada com $151{,}29\ cm^2$ de área. $12{,}3\ cm$ $(\ell^2 = 151{,}29 \rightarrow \ell = \sqrt{151{,}29} = 12{,}3)$

b) da altura de uma região triangular com 5,5 cm de base e $8{,}25\ cm^2$ de área. $3\ cm$ $\left(\frac{5{,}5 \cdot x}{2} = 8{,}25 \rightarrow x = 3\right)$

c) da diagonal menor de uma região determinada por um losango que tem 7,6 cm de diagonal maior e $17{,}1\ cm^2$ de área. $4{,}5\ cm$ $\left(\frac{d \cdot 7{,}6}{2} = 17{,}1 \rightarrow d = 4{,}5\right)$

d) da altura de uma região determinada por um trapézio na qual a área é de $30\ dm^2$, a base maior mede 12,5 dm e a base menor é 5 dm a menos do que a base maior. $3\ dm$ $\left(\frac{(12{,}5 + 7{,}5)a}{2} = 30 \rightarrow \frac{20a}{2} = 30 \rightarrow a = 3\right)$

Figura 4.9: Atividades sobre áreas de regiões planas, [5].

Sugerimos atividades que contemplem construções geométricas envolvendo números irracionais.

ATIVIDADE 7

Uma região quadrangular possui $3cm^2$ de área. Determine a medida do lado dessa região e a desenhe.

COMENTÁRIO

Para resolver esta atividade o aluno deverá resolver algebricamente usando a fórmula que calcula a área quadrangular e achará como resposta que a medida do lado é um número irracional. Para desenhar então o quadrado cujo lado mede $\sqrt{3}$ cm, ele deve tomar como segmento unitário um segmento cuja medida seja $1cm$ e através da construção geométrica por régua e compasso determinar um segmento de medida $\sqrt{3}$ cm. Por fim, usando as construções elementares, deverá traçar retas perpendiculares e paralelas até desenhar um quadrado de lado $\sqrt{3}$ cm.

4.4 Atividades para o 9º ano do Ensino Fundamental

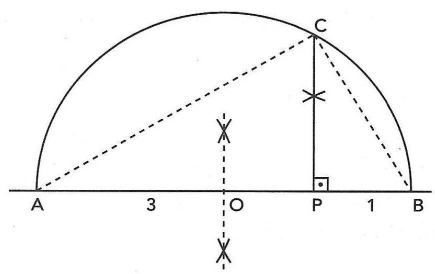
Ao chegar no último ano do Ensino Fundamental o aluno já tem muita base em construções geométricas, isso considerando que ele veio trabalhando com elas desde o 6º ano.

O professor tem um amplo leque de conteúdos que permitem aplicar as construções geométricas. Exibiremos atividades de localização de números irracionais na reta e gráficos de uma função quadrática.

4.4.1 Triângulo inscrito numa circunferência para localizar números irracionais na reta

Alguns livros didáticos já trabalham com construções geométricas com régua e compasso. O exemplo que mostraremos justifica esta afirmação.

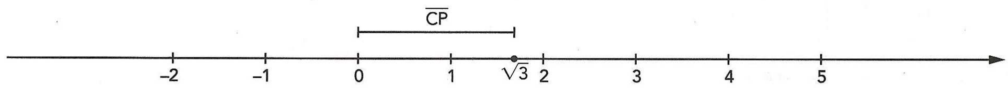
E números irracionais como $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{6}$? Como localizá-los na reta numerada?
Conforme já estudamos neste capítulo, usando régua e compasso, podemos fazê-lo.
Veja por exemplo a localização do ponto correspondente a $\sqrt{3}$:



1º) Traçamos um segmento $\overline{AB}$ de 4 unidades com AP = 3 e PB = 1.
2º) Determinamos **O**, ponto médio de $\overline{AB}$.
3º) Traçamos a semicircunferência de centro **O** e raio $\overline{OA}$ ou $\overline{OB}$.
4º) Traçamos $\overline{CP}$ perpendicular a $\overline{AB}$ com **C** sobre a semicircunferência.

Nessas condições, o $\triangle ABC$ é retângulo em **C** e $\overline{CP}$ é a altura relativa à hipotenusa. Logo:
$(CP)^2 = 3 \cdot 1 = 3 \Rightarrow CP = \sqrt{3}$

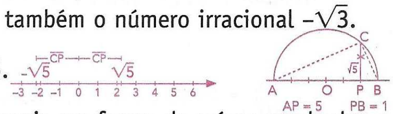
Transportando $\overline{CP}$ para a reta numerada obtemos o ponto correspondente a $\sqrt{3}$:



Atividades e problemas

33 Reproduza a reta numerada acima e localize, além de $\sqrt{3}$, também o número irracional $-\sqrt{3}$.
($-\sqrt{3}$ é o simétrico de $\sqrt{3}$ em relação ao zero.)

34 Localize mais estes números na reta numerada: $\sqrt{5}$ e $-\sqrt{5}$.



35 Junte-se com um colega, escolham alguns números irracionais em forma de raízes quadradas e localizem esses números e seus opostos na reta numerada.
Como vocês procederam para localizar as raízes negativas como $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$ e outras? Resposta pessoal.

Figura 4.10: Construção de $\sqrt{3}$ na reta e atividades, [4].

Achamos as atividades bem elaboradas, vimos que o autor já da ênfase às construções geométricas por régua e compasso e sugerimos que além desta maneira, usando o triângulo inscrito numa semicircunferência, seja pedido que o aluno construa também a localização dos pontos usando o teorema de Pitágoras e verifique se as medidas correspondem.

ATIVIDADE 8

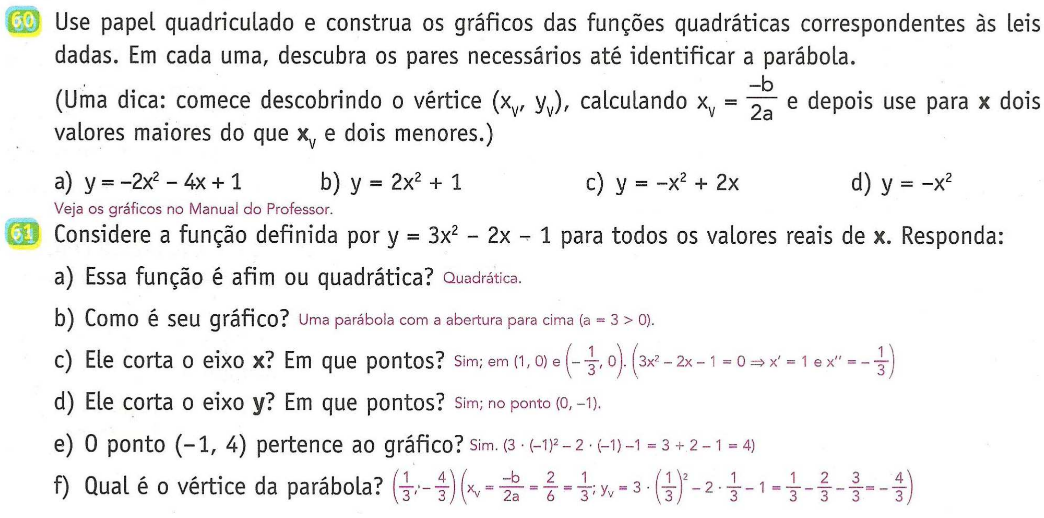
Considerando um segmento unitário cuja medida seja de $1cm$, construa uma reta numerada e determine a localização de alguns números irracionais em forma de raízes quadradas, localizando também seus opostos na reta usando duas formas: a Espiral Pitagórica e o triângulo inscrito numa semicircunferência.

COMENTÁRIO

Essa atividade faz com que o aluno se familiarize com a localização dos números irracionais em forma de raízes quadradas utilizando-se duas maneiras diferentes, mostrando as aplicações destes conteúdos, e com isso, obtendo maturidade para utilizá-los em algumas situações práticas no decorrer de sua vida acadêmica.

4.4.2 Gráfico de uma função quadrática

As atividades relacionadas aos gráficos de funções quadráticas apresentadas nos livros, em sua maioria, possuem valores inteiros para os zeros de função. Vejamos alguns exemplos de como são apresentados



60 Use papel quadriculado e construa os gráficos das funções quadráticas correspondentes às leis dadas. Em cada uma, descubra os pares necessários até identificar a parábola.
(Uma dica: comece descobrindo o vértice (x_V, y_V), calculando $x_V = \frac{-b}{2a}$ e depois use para **x** dois valores maiores do que $\mathbf{x}_V$ e dois menores.)

a) $y = -2x^2 - 4x + 1$ b) $y = 2x^2 + 1$ c) $y = -x^2 + 2x$ d) $y = -x^2$

Veja os gráficos no Manual do Professor.

61 Considere a função definida por $y = 3x^2 - 2x - 1$ para todos os valores reais de **x**. Responda:

a) Essa função é afim ou quadrática? Quadrática.

b) Como é seu gráfico? Uma parábola com a abertura para cima $(a = 3 > 0)$.

c) Ele corta o eixo **x**? Em que pontos? Sim; em $(1, 0)$ e $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$. $\left(3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x' = 1 \text{ e } x'' = -\frac{1}{3}\right)$

d) Ele corta o eixo **y**? Em que pontos? Sim; no ponto $(0, -1)$.

e) O ponto $(-1, 4)$ pertence ao gráfico? Sim. $(3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 1 = 3 + 2 - 1 = 4)$

f) Qual é o vértice da parábola? $\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ $\left(x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; y_V = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{3}{3} = -\frac{4}{3}\right)$

Figura 4.11: Atividades sobre gráficos de funções quadráticas, [4].

Sugerimos então atividades semelhantes às apresentadas, mas que os zeros da função sejam números irracionais em forma de raíz ou uma adição de um inteiro com uma raíz.

ATIVIDADE 9

Considere uma função definida pela fórmula:

$$y = x^2 - 6x + 7 \tag{4.2}$$

para todos os valores de x.
Construa o gráfico dessa função usando construções geométricas por régua e compasso, para localizar seus pontos.
(Considere um segmento unitário de medida $1cm$)
COMENTÁRIO

Ao determinar os zeros da função verifica-se que eles são irracionais: $3+\sqrt{2}$ e $3-\sqrt{2}$. Então, para localizar esses pontos no gráfico, deverá ser usado os conhecimentos sobre construção geométrica.

Esta atividade pode ser elaborada quando o aluno já domina a construção de gráficos de função quadráticas mas ainda não tinha se deparado com zeros de funções do tipo irracional.

Capítulo 5

Conclusões

Introduzimos uma nova metodologia na resolução de atividades de conteúdos do Ensino Fundamental de 6º ao 9º ano, possibilitando ao aluno uma nova visão e contribuindo assim no processo de ensino-aprendizagem.

Os Capítulos 2 e 3 do TCC exibem um embasamento teórico das construções geométricas por régua e compasso e sobre números construtíveis e o professor se apoiará neles para poder utilizar as sugestões de atividades propostas no Capítulo 4 ou para formular questões envolvendo outros conteúdos não abordados.

Esperamos que a utilização do trabalho possibilite ao professor novas maneiras de abordar alguns conteúdos no Ensino Fundamental e que deixe em aberto o seu uso nas séries do Ensino Médio.

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, C.B. *História da Matemática*. 2ª Edição. São Paulo. Editora Edgar Blücher, 1996. 512 p.

[2] DANTE, L.R. *Tudo é Matemática*. 3ª Edição. Editora Ática, São Paulo, 6º, 2010. 396 p.

[3] DANTE, L.R. *Tudo é Matemática*. 3ª Edição. Editora Ática, São Paulo, 7º, 2010. 356 p.

[4] DANTE, L.R. *Tudo é Matemática*. 3ª Edição. Editora Ática, São Paulo, 9º, 2010. 388 p.

[5] DANTE, L.R. *Tudo é Matemática*. 2ª Edição. Editora Ática, São Paulo, 7ª Série, 2007.

[6] EVES, H. *Introdução a História da Matemática. Tradução de Higino H. Domingues*. Campinas, São Paulo: Unicamp, 1994. 844 p.

[7] GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra*. 5ª Edição. IMPA. Rio de Janeiro 2008, 194 p.

[8] GUERRA, V.C. *Impossibilidades em Construções Geométricas: Aspectos Históricos e Matemáticos.* Disponível em: <http://www.dm.ufscar.br/dm/attachments/article/5/vanessaguerraTcc2011.pdf>. Acesso em 20 de Dezembro de 2012.

[9] ROONEY, A. *A História da Matemática Desde a Criação da Pirâmides até a Exploração do Infinito.* Editora M. Books, São Paulo, 2012. 216 p.

[10] SANTOS, J.R.G.S.R. *Temas da Geometria nos Ensino Básico e Secundário.* Dissertação de Mestrado. Universidade de Aveiro. 2007. Disponível em :<ria.ua.pt/bitstream/10773/2893/1/2008000864.pdf>. Acesso em 21 de Dezembro 2012.

[11] WAGNER, E. *Construções Geométricas.* Com a colaboração de João Paulo Carneiro. Coleção do Professor de Matemática. SBM, 1993, 110 p.

[12] http://www.ime.usp.br/rpm/conteudo/70/triangulo. Acesso em 10 de fevereiro de 2013.

[13] www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm11/pi%20transc.htm. Acesso em 20 de fevereiro de 2013

[14] GARBI, G.G. *A Rainha das Ciências.* Editora Livraria da Física, 2006. 346 p.

Apêndice A

Demonstrações Úteis

A.1 Triângulo inscrito numa semicircunferência

Considere AB o diâmetro da semicircunferência e seja C um ponto que será o outro vértice do triângulo.

Seja O o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Tracemos o segmento $\overline{OC}$. Note que OC=AB=OB=raio da circunferência. Portanto os triângulos OAC e OCB são isósceles. Logo $O\widehat{A}C$=$O\widehat{C}A$=X e $O\widehat{C}B$=$O\widehat{B}C$=Y.

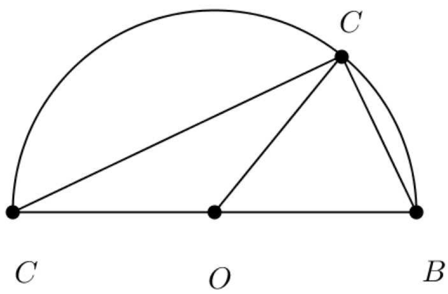


Figura A.1: Triângulo inscrito numa semicircunferência.

Considerando agora o triângulo CAB temos que:

- $\widehat{C} = O\widehat{C}A + O\widehat{C}B = X + Y$
- $\widehat{A} = X$
- $\widehat{B} = Y$

Do fato que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, então:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = X + Y + X + Y = 180^\circ \tag{A.1}$$

$$2X + 2Y = 180^\circ \tag{A.2}$$

$$X + Y = 90^\circ \tag{A.3}$$

como $\widehat{C} = X + Y$, então $\widehat{C} = 90^\circ$

Outra demonstração podemos encontrar em [12]

A.2 Artigo sobre a transcendência de π

Este artigo foi retirado de [13]

TRANSCENDENTE

O π é um número com características muito especiais. Uma delas é ser transcendente, ou seja, não é um número algébrico, pois não é raiz de nenhum polinómio com coeficientes racionais. Para demonstrarmos a transcendência do π vamos recuar um pouco no tempo e conhecer alguns resultados que são importantes para a nossa demonstração.

Em 1873, Charles Hermite $(1822 - 1901)$ provou que o número e é transcendente. Disto conclui-se que a equação finita

$$ae^r + be^s + ce^t + \ldots = 0 \tag{A.4}$$

não pode ser satisfeita se r, s, t,... forem números naturais e a, b, c,... forem números racionais, nem todos iguais a zero.

Em 1882, Ferdinand Lindemann $(1852 - 1939)$ teve finalmente sucesso em encontrar uma extensão do teorema de Hermite, para o caso em que r, s, t,... e a, b, c,...são números algébricos, não necessariamente reais. O teorema de Lindemann pode então ser enunciado da seguinte forma:

Se r, s, t,... z são números algébricos, reais ou complexos distintos, e a, b, c,... n são números algébricos reais ou complexos, em que pelo menos um difere de zero, então

$$ae^r + be^s + ce^t + \ldots + ne^z \tag{A.5}$$

não pode ser igual a zero.

Usando a fórmula de Euler, na forma

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \tag{A.6}$$

temos uma expressão da forma $(A.4)$ com $a = b = 1$ algébricos, todos os outros coeficientes iguais a zero. Substituímos $s = 0$ algébrico e $r = i\pi$. Então $i\pi$ tem de ser transcendente, e como i é algébrico, π tem de ser transcendente.

A possibilidade da quadratura do círculo pela construção euclideana dependia inteiramente do π ser ou não algébrico. O teorema de Lindemann provou então a irracionalidade do

π , e provou que o problema da quadratura do círculo é impossível pelas regras da geometria grega. Portanto a transcendência do π implica que não existe uma construção com régua e compasso, para construir um quadrado com igual área a um círculo dado. Isto é o fim da história do π e da quadratura do círculo.