UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

LER, ESCREVER E CALCULAR:
UM MÉTODO PARA REVER CONTEÚDOS MATEMÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Emerson Wagner da Nóbrega

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientadora: Profa. Dra. Rosana Marques da Silva

Campina Grande - PB
Fevereiro/2015

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

N754l Nóbrega, Emerson Wagner da.

Ler, escrever e calcular : um método para rever conteúdos matemáticos do ensino fundamental / Emerson Wagner da Nóbrega. – Campina Grande, 2015.

72 f. : il. color

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.

"Orientação: Prof.ª Dr.ª Rosana Marques da Silva".

Referências.

1. Aprendizagem - Matemática. 2. Revisar. 3. Calcular. I. Silva, Rosana Marques da. II. Título.

CDU 51:37(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

LER, ESCREVER E CALCULAR:
UM MÉTODO PARA REVER CONTEÚDOS MATEMÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

por

Emerson Wagner da Nóbrega †

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

†Bolsista CAPES

LER, ESCREVER E CALCULAR:
UM MÉTODO PARA REVER CONTEÚDOS MATEMÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

por

Emerson Wagner da Nóbrega

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:

Dávis Matias de Oliveira

Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira - UEPB

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes - UFCG

Rosana Marq

Profa. Dra. Rosana Marques da Silva - UFCG
Orientadora

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Fevereiro/2015

Dedicatória

À minha esposa pela cooperação. Ao meu filho Lucas Emanuel que foi meu alívio nos intervalos de descanso. E a todos os amigos e irmãos em Cristo que incentivaram-me a seguir em frente e não desistir e, através de suas palavras e orações, senti-me fortalecido para concluir esse trabalho.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela grande oportunidade de participar desse mestrado, o qual muito servirá em minha prática docente.

Agradeço à minha família pelo incentivo e compreensão durante todo o curso no decorrer dos dias de estudo em casa.

Agradeço à professora Dra Rosana Marques da Silva pelas precisas orientações que conduziram-me com sucesso ao término desse trabalho.

Agradeço à minha turma do PROFMAT 2012 que foi um diferencial no apoio, incentivo e nos grupos de estudos.

Agradeço à Igreja Evangélica Assembleia de Deus de Parelhas/RN pelas as orações e palavra de ânimo que me encorajaram chegar onde cheguei.

Agradeço a todos que de forma direta ou indireta cooperaram para que eu alcançasse essa vitória.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática - SBM pelo oferecimento desse Curso em rede nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

Resumo

Há uma realidade conhecida em sala de aula, principalmente na primeira série do Ensino Médio, em que sentimos a necessidade de dedicarmos algum tempo para revisão de conteúdos do Ensino Fundamental, que são necessários para a aquisição de novos conhecimentos nessa nova fase de ensino. Baseado nessa problemática, apresentamos neste trabalho uma proposta de rever saberes matemáticos que já deveriam ter sido adquiridos e que se tornaram obstáculos para a continuidade da vida estudantil pois não foram bem entendidos. Estamos propondo uma revisão de conteúdos matemáticos, através de atividades, inseridos numa ideia em que esperamos também contribuir para o resgate do prazer da leitura, da escrita e, evidentemente, do cálculo, fazendo parceria com a disciplina de Língua Portuguesa.
Palavras Chaves: Revisar. Aprendizagem. Calcular.

Abstract

There is a known reality in the classroom, especially in the first year of high school, when we feel the need to dedicate some time to Basic Education review contents, which are required for the acquisition of new knowledge in this new teaching phase. Based on these problems, we present in this paper a proposal to revise mathematical knowledge that should have been acquired and which have become obstacles to the continuation of student life because they were not well understood. We are proposing a review of math concepts through activities, within a idea on which we expect to contribute to the rescue of the pleasure of reading, writing and of course the calculation, partnering with the discipline of Portuguese Language.
Keywords: Review. Learning. Calculate.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Em um tempo onde verificamos a praticidade e a rapidez da informação pronta, e o uso de aparelhos tecnológicos tais como, computador, calculadora e celular, as pessoas, principalmente jovens e adolescentes, desprezam habilidades que os tornam melhores e os enriquecem: a leitura, a escrita e a contagem. Observamos também como a sociedade contemporânea propicia o conhecimento sem fronteiras capaz de romper limites na partilha de informações. Transformar essa facilidade e rapidez de acesso à informações em mecanismos que facilitem a aprendizagem de conteúdos formais, por parte dos alunos, é hoje um desafio para a escola. Outro grande desafio, particularmente no ensino de Matemática é criar as condições necessárias para um aprendizado com a compreensão e a profundidade necessárias que os conteúdos matemáticos básicos exigem para se consolidarem. Quando não há esse cuidado por parte dos professores e dos alunos, a aprendizagem pode ser superficial e os alunos avançam nos anos escolares e podem chegar ao Ensino Médio sem o domínio necessário dos conteúdos trabalhados no Ensino Fundamental, que são necessários para a aquisição dos novos conhecimentos nessa fase do ensino básico. E nessa direção, procuramos com este trabalho trazer uma proposta de revisão de conteúdos matemáticos ligada a uma ideia de interdisciplinaridade das áreas do conhecimento, contemplando a Matemática e a Língua Portuguesa. E com essa perspectiva, tentamos propiciar essa revisitação de saberes através de ações e atividades desenvolvidas de forma criativa e produtiva, onde cada etapa se processa atendendo as necessidades de melhoramento e revisão de conteúdos e habilidades que já deveriam ter sido adquiridas.

Partindo de uma breve reflexão sobre a prática educativa matemática nas escolas públicas, e reportando-se à interdisciplinaridade e a aprendizagem significativa, listamos alguns conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental, seguidos de tarefas envolvendo exercícios e situações-problema, cuja aprendizagem é essencial para o prosseguimento com êxito na nova etapa da Educação Básica, o Ensino Médio. O entrelace com a Língua Portuguesa acontece no momento da escrita de uma história elaborada e continuada pelos alunos onde são inseridas as atividades matemáticas conforme relatamos no Capítulo 4. A culminância será na confecção de um livro no formato de hipertexto que terá essa ideia de revisão para os alunos da primeira série do Ensino Médio.

1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é apresentar uma proposta de resgate de conhecimentos matemáticos para uma contribuição eficaz e significativa ao acesso aos conteúdos explorados no Ensino Médio. E tem como objetivos específicos:

- Refletir sobre a prática da educação matemática nas escolas públicas.
- Propor uma sequência de atividades abordadas de forma a contemplar a leitura, a escrita, a oralidade dos alunos e a interpretação e resolução de exercícios e situações-problema, visando a consolidação de conteúdos.

1.2 Organização

O trabalho está dividido em cinco capítulos descritos a seguir:

No Capítulo 1 está a introdução.

No Capítulo 2 é apresentada uma visão de algumas dificuldades encontradas no ensino da matemática nas escolas públicas, que interferem no desenvolvimento da aprendizagem matemática. Apresenta também, de forma suscinta, a interdisciplinaridade na visão de alguns pesquisadores do tema; uma reflexão sobre aprendizagem através de tarefas, enfocando o assunto na ótica da aprendizagem significativa.

No Capítulo 3 está a revisão bibliográfica dos conteúdos que serão contemplados nas atividades propostas, onde os conceitos e propriedades são revistos de uma forma mais formal que aquela trabalhada no Ensino Fundamental.

No Capítulo 4 é feito uma apresentação do projeto proposto, do surgimento da ideia ao desenvolvimento do trabalho, trazendo uma síntese de suas etapas bem como da sua possível implementação.

As atividades matemáticas, envolvendo exercícios e situações-problema aparecem no Capítulo 5, e estão distribuídas por conteúdo.

No Capitulo 6 estão os comentários finais e finalizamos o trabalho com o Capítulo contendo as Referências Bibliográficas e o Apêndice, com um exemplo do resultado da aplicação parcial do projeto proposto.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica - Ensino

Neste Capítulo apresentamos uma revisão bibliográfica, enfatizando a importância da interdisciplinaridade na recuperação de conteúdos e a sua consolidação através de tarefas, assim como a importância de tarefas contextualizadas e significativas, tanto para motivar como para fixar conteúdos.

2.1 Um Olhar na Matemática do Ensino Fundamental

Comunicar-se matematicamente, resolver situações-problema e estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e, entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares, são alguns dos objetivos gerais da Matemática para o Ensino Fundamental expostos nos Parâmetros Curriculares Nacionais [5] para o terceiro e quarto ciclos desta mesma modalidade de ensino. E é o que se encontra nos instrumentos de trabalho que referenciam os conteúdos, as metodologias, os procedimentos e as técnicas utilizadas no processo ensino-aprendizagem, os chamados planos de curso.

Porém, situações revelam que a negligência e o improviso na prática educativa afetam o alcance dos objetivos estabelecidos. E assim o aluno não consegue ver a Matemática como um instrumento de transformação da realidade, apenas como mais uma linguagem cheia de códigos e mistérios que tem o fim em si mesma. Segundo a edição 2013 da Talis (Pesquisa Internacional sobre Ensino e Aprendizagem) coordenada mundialmente pela OCDE (Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico) [27]:

> Cerca de metade dos professores brasileiros não têm formação didática para todas as matérias que ensinam. Por exemplo, o professor de história não aprendeu como ensinar esse conteúdo aos alunos do Ensino Fundamental 2, que vai do 6º ao 9º anos (chamado anteriormente de 5ª a 8ª série) ou o responsável por matemática não aprendeu métodos e técnicas para passar o conteúdo da sua disciplina.

Em muitos casos, o livro didático tem sido o planejamento anual já que nele encontra-se uma sequência de tópicos estabelecida a priori. Alguns professores deixam de planejar seu trabalho a partir da realidade de seus alunos para seguir o que o autor do livro considerou como o mais indicado.

Diante dos sérios problemas no ensino da Matemática, unido a dificuldade que a maioria dos alunos apresentam em aprendizagem de Matemática, o aluno tende a perder o interesse pela disciplina criando um bloqueio mental e alimentando o mito que reza que a Matemática é para os gênios. Segundo Machado [19] vários autores dizem que:

> Os alunos se dispersam quando o ensino da Matemática se faz rotineiro, ocultando consciente e inconscientemente sua verdadeira força e beleza, complicando-a inutilmente com fórmulas que não sabem de onde vem. O ensino tem que alcançar uma investigação em que o aluno sinta a sensação de estar fazendo algo com isso, em que se sinta mais confiante colocando em prática o seu trabalho efetivo e com isso, faça-o perceber o seu próprio rendimento.

E assim, somos sempre interrogados a respeito da importância desses objetos de estudos para vida, pois alguns percebem os conteúdos matemáticos apenas como uma organização dominada pela ideia de pré-requisito, cujo único critério é a estrutura lógica da Matemática. Nessa visão, a aprendizagem ocorre como se os conteúdos se articulassem apenas na forma de uma corrente, cada conteúdo sendo um pré-requisito para o que vai sucedê-lo [5]. Entretanto, a matemática sempre está associada com o dia a dia porém organizada de maneira contínua de forma que para entender um novo conteúdo é preciso entender o anterior.

Outra realidade desagradável na educação básica do Brasil, são os professores sem formação de uma licenciatura que ensinam Matemática no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Não é difícil encontrarmos docentes que tem apenas o Ensino Médio, que durante sua vida estudantil receberam destaque na aprendizagem matemática, em sala de aula ensinando, com apenas o conhecimento dos conteúdos compreendidos no Ensino Médio. Geralmente, esses profissionais apresentam domínio intelectual, porém sem conhecimento mais profundo e abrangente, necessário para fazer as pontes entre os conteúdos ensinados e/ou entre áreas de conhecimento, como também, para a escolha das metodologias de ensino e das formas de avaliação adequadas a cada conteúdo. E de uma forma bem grave, muitas vezes tendo a avaliação não só como instrumento de verificar a aprendizagem, mas como uma arma para punição das indisciplinas em sala de aula. A seguir dados de 2008, publicados em [27]:

> Cerca de 23% dos professores de matemática do ensino médio no País não têm curso superior. Eles completaram apenas o próprio Ensino Médio - mesmo nível de escolaridade para o qual dão aulas. Outros 21%, aproximadamente, são graduados em outras áreas, que podem ser próximas da Matemática, como Processamento de Dados e Ciências Contábeis, ou bem distantes, como Letras. Apenas 20% são formados de fato em Matemática. Nas regiões Norte e Nordeste o índice de professores sem formação superior é ainda mais alto, chegando a 36,9%. As notas do Saresp, a avaliação feita pelo Estado de São Paulo, mostraram que 71% dos alunos terminam o Ensino Médio sem conhecimentos básicos da área. Eles têm dificuldades para realizar operações de soma, subtração, multiplicação e divisão, além de não conseguirem mensurar grandezas e medidas.

Mesmo com profissionais qualificados, muitas vezes, os conteúdos matemáticos são apresentados sem nenhuma ligação com a realidade, sem contextualização e provocando a falsa visão da matemática: uma disciplina desconectada dos demais conhecimentos das outras áreas. Desta forma, os conteúdos são apresentados prontos e acabados, não se propõe questões e discussões que levem o aluno a argumentar na defesa de suas ideias. E isso reflete no ingresso dele no Ensino Médio, onde se espera um alicerce bem feito para a edificação do conhecimento. Como ensinar por exemplo, o conceito de função, análise combinatória ou geometria analítica, se o estudante não domina as habilidades mais básicas que são as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão? Neste contexto, as habilidades necessárias ao egresso do Ensino Fundamental, tais como, operações com os números inteiros, racionais e reais, propriedades das potências e radiciação, operações com polinômios e conhecimento geométrico são negligenciadas, de tal forma que, embora estejam inseridas nos objetivos da avaliação neste nível de ensino, os exercícios avaliativos e a maneira de verificar a aprendizagem não atendem ao que se espera. Elas não são inferidas de forma significativa. E, consequentemente, todo o processo da aprendizagem é afetado.

2.2 Interdisciplinaridade

Uma das metas colocadas pelos educadores para o desenvolvimento de um trabalho que tenta contribuir para o aprendizado do aluno é a integração dos conteúdos, ou seja, o entrelaçar de áreas do conhecimento, tentando superar a fragmentação das disciplinas. É a busca de harmonia entre elas para proporcionar a compreensão da realidade.

Segundo Fazenda [10],

> O pensar interdisciplinar parte do princípio de que nenhuma forma de conhecimento é em si mesma racional. Tenta, pois, o diálogo com outras formas de conhecimento, deixando-se interpenetrar por elas. Assim, por exemplo, aceita o conhecimento do senso comum como válido, pois é através do cotidiano que damos sentido às nossas vidas. Ampliado através do diálogo com o conhecimento científico, tende a ser uma dimensão utópica e libertadora, pois permite enriquecer nossa relação com o outro e com o mundo.

De acordo com Fazenda, todo conhecimento deve ser visto de forma que, para ser completo é preciso se libertar do isolamento e abrir pontes para as ligações com os saberes que o completam. Isso pode ser notado, pois no mundo atual nada é posto como tendo uma verdade única e absoluta, nesse cenário se tem cada vez mais a interação entre os saberes diversos. Já, conforme Ferreira [11],

> Apesar de não possuir definição estanque, a interdisciplinaridade precisa ser compreendida para não haver desvio na sua prática. A ideia é norteada por eixos básicos como: a intenção, a humildade, a totalidade, o respeito pelo outro etc. O que caracteriza uma prática interdisciplinar é o sentimento intencional que ela carrega. Não há interdisciplinaridade se não há intenção consciente, clara e objetiva por parte daqueles que a praticam. Não havendo intenção de um projeto, podemos dialogar, inter-relacionar e integrar sem, no entanto, estarmos trabalhando interdisciplinarmente.

A interdisciplinaridade pressupõe a ligação entre os conhecimentos dando-lhe o sentido correto do porquê saber, aprender. Sua grande importância, quando trabalhamos com a intenção consciente as disciplinas específicas na escola, está no aluno perceber nas áreas distintas do conhecimento a dependência que existe entre elas. Uma coopera com a outra tornando possível a existência dessas áreas e a compreensão de mundo.

Aprender conteúdos novos, relacionando-os com conteúdos já vistos e compreendidos anteriormente de forma sólida, ou seja, valorizando e dando continuidade ao que chamamos de conhecimento prévio, é uma condição favorável para que esta aprendizagem aconteça de forma significativa.

2.3 Aprendizagem Significativa

A teoria de aprendizagem, denominada de aprendizagem significativa, foi desenvolvida, nos anos 60, pelo psicologo David Ausubel [1] e segundo Moreira[20]

> Aprendizagem significativa segundo Ausubel é o processo através do qual uma nova informação (um novo conhecimento) se relaciona de maneira não arbitrária e substantiva (não-literal) à estrutura cognitiva do aprendiz. É no curso da aprendizagem significativa que o significado lógico do material de aprendizagem se transforma em significado psicológico para o sujeito.
>
> Não-arbitrariedade quer dizer que o material potencialmente significativo se relaciona de maneira não-arbitrária com o conhecimento já existente na estrutura cognitiva do aprendiz. O conhecimento prévio serve de matriz ideacional e organizacional para a incorporação, compreensão e fixação de novos conhecimentos quando estes "se ancoram" em conhecimentos especificamente relevantes (subsunçores) preexistentes na estrutura cognitiva, os quais Ausubel chama subsunçores. Novas ideias, conceitos, proposições, podem ser aprendidos significativamente (e retidos) na medida em que outras ideias, conceitos, proposições, especificamente relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do sujeito e funcionem como pontos de "ancoragem" aos primeiros.
>
> A Substantividade significa que o que é incorporado à estrutura cognitiva é o conceito (substância) do novo conhecimento, das novas ideias, não as palavras precisas usadas para expressá-las. Assim, uma aprendizagem significativa não pode depender do uso exclusivo de determinados signos em particular.

A essência do processo da aprendizagem significativa está, portanto, no ancoramento dos novos conhecimentos em conhecimentos prévios consolidados (conhecimentos significativos), propiciando ao aprendiz a construção do seu conhecimento.

Quando uma nova informação não interage com o conhecimento já existente, não ocorre a aprendizagem significativa, mas pode ocorrer a aprendizagem mecânica. Na aprendizagem mecânica o novo conhecimento é armazenado de maneira arbitrária e literal, sem significado para o aprendiz. Ambas podem estar presentes em muitas situações de aprendizagem, ou seja, podem ocorrer situações de aprendizagem mais próximas da significativa e outras mais próximas da aprendizagem mecânica [20]. O conhecimento aprendido de forma mecânica é facilmente esquecido.

Ainda de acordo com Ausubel, os fatores essenciais para ocorrer a aprendizagem significativa (indivíduo aprender) são:

- Disposição do aluno para aprender;

- Material ser potencialmente significativo;
- Existência de conhecimentos prévios, na estrutura cognitiva do aluno, que possibilitem a interação com os novos conhecimentos.

Esses três fatores indicam que a responsabilidade pela aprendizagem é tanto do aluno como do professor, o primeiro deve estar suficientemente motivado e o segundo ao planejar suas aulas, visando a aprendizagem significativa, segundo Moreira [21], deve analisar os conhecimentos prévios necessários para a aprendizagem da matéria de ensino, organizando sequencialmente o conteúdo; selecionando recursos materiais e didáticos, que favoreçam as pontes entre os conhecimentos que o aluno já tem, assim como, para o estabelecimento de relações explícitas entre o novo conhecimento e aquele já existente.

As tarefas escolares devem ter um potencial significativo para o aluno. Um professor pode preparar uma aula elaborando tarefas que contemplem todos os objetivos de sua aula; porém, se este material não tiver nenhuma relação com aquilo que o aluno já conhece, o material não tem potencial significativo. Isto é, se ocorrer uma aprendizagem nesta situação, é bem provável que esta seja mecânica.

Quanto ao desenvolvimento das aulas o professor deve promover a participação ativa do aluno, lançando mão da diversidade de estratégias de ensino. O ensino baseado somente em aulas expositivas (o professor escreve no quadro, os alunos copiam, decoram e reproduzem) favorecem a aprendizagem mecânica. O uso de distintas estratégias instrucionais que impliquem participação ativa do estudante e, de fato, promovam um ensino centralizado no aluno é fundamental para facilitar a aprendizagem significativa [21].

2.4 Tarefas Matemáticas

No ensino da Matemática, é comum no trabalho docente, a escolha de tarefas matemáticas[1] para a fixação de conteúdos através da prática. Essas tarefas ou atividades devem abordar desde o conceito mais símples até problemas mais complexos. Alguns exercícios objetivam apenas a aquisição de habilidades com fórmulas e algoritmos, outros visam uma

[1]Uma tarefa matemática inclui qualquer atividade envolvendo conteúdos matemáticos. Pode ser um exercício, um problema ou uma situação- problema. De acordo com Pozo [25], o exercício é uma atividade para a qual o indivíduo dispõe de mecanismos que o leva, de forma imediata à solução, tais como: a utilização direta de uma definição, de um algoritmo, de uma fórmula, de uma propriedade. Os exercícios destinam-se à fixação do conteúdo apresentado e ao desenvolvimento de habilidades operatórias. O problema é uma atividade em que o indivíduo não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução. O problema exige um processo de reflexão a partir dos conhecimentos adquiridos, uma certa dose de criatividade aliada ao conhecimento de algumas estratégias. A resolução de um problema exige do aluno conhecimentos com significados. A situação-problema tem as mesmas características de um problema, se diferenciam pela contextualização, em geral, retratando situações do dia-a-dia. Para uma discussão mais aprofundada sobre problemas e ensino através da resolução de problemas, consultar [25, 24].

aprendizagem na aplicação em uma situação problema do dia a dia. Todo conhecimento é válido quando nossa visão de mundo é ampliada, mas para isso acontecer é necessário que as ideias das tarefas aproximem do que se espera que seja aprendido.

Segundo Ponte, *apub* Gafanhoto e Canavarro [12], a escolha de uma atividade deve sempre levar em consideração os seguintes fatores: o grau de desafio matemático; a contextualização; o tempo necessário para realizá-la; ter clareza dos conceitos e procedimentos que irá desenvolver; dos que já estão aprendidos e os que devem ser aprofundados; qual a metodologia de aplicação dessa atividade em sala de aula (introdução, recursos e materiais didáticos, metodologia de trabalho com o aluno); quais os questionamentos que fará ao aluno para estimular a realização da atividade; prever os possíveis caminhos seguidos pelos alunos e, finalmente, como será a avaliação da aprendizagem conseguida pela sua realização.

Segundo Canavarro [7] o ensino exploratório da Matemática defende que os alunos aprendem a partir do trabalho que realizam com tarefas significativas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão coletiva. Os alunos tem a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática. Para que isto aconteça, é crucial o papel e a ação do professor, que começa com a escolha criteriosa da tarefa e o delineamento da respectiva exploração matemática com vista ao cumprimento do seu propósito matemático, orientado pelas indicações programáticas.

Já segundo o Programa de Matemática do Ensino Básico [6] é preciso que as tarefas no seu conjunto proporcionem um percurso de aprendizagem coerente que permitam aos alunos a construção dos conceitos fundamentais em jogo, a compreensão dos procedimentos matemáticos em causa, o domínio da linguagem matemática e das representações relevantes, bem como o estabelecimento de conexões dentro da Matemática e entre esta disciplina e outros domínios. Para Gafanhoto e Canavarro [12], na escolha de uma tarefa, é importante que o professor tenha presente diversas dimensões que a definem. O professor deve ter em conta os conceitos e procedimentos a desenvolver e pensar em questões que estimulem os alunos a envolverem-se na tarefa prevendo os possíveis caminhos a seguir pelos alunos para melhor identificar as questões a colocar.

Capítulo 3

Revisão Bibliográfica - Conteúdos Trabalhados

Este Capítulo apresenta os tópicos de Matemática que serão abordados nas atividades, envolvendo conteúdos do Ensino Fundamental, apresentadas no Capítulo 5. Aqui serão apresentados os conceitos, as propriedades e teoremas que remetem a uma compreensão mais aprofundada que aquela encontrada nos livros didáticos do ensino básico. Iniciaremos apresentando, segundo a abordagem de Elon L. Lima [17, 18], os números naturais, como modelos matemáticos para a contagem, seguido dos números reais, explorando a sua representação geométrica, como modelos matemáticos para medidas e uma rápida introdução do conceito de função real e seu gráfico. A seguir serão apresentados tópicos envolvendo polinômios, produtos notáveis e a noção de proporcionalidade, tendo como principal fonte os trabalhos de Caminha [22] e Avila [2].

3.1 Números Naturais

Os números naturais, representado por $\mathbb{N}$, podem ser vistos como um modelo matemático que permite a contagem. Segundo Elon L. Lima [18, 17], a essência da caracterização dos números naturais reside na palavra "sucessor". Intuitivamente, quando n' é o sucessor de n significa que n' vem logo depois de n, não havendo outros números naturais entre n e n'. Seu uso e suas propriedades são regidos pelos *axiomas de Peano*, listados abaixo:

a) Todo número natural tem um único sucessor;

b) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;

c) Existe um único número natural, chamado *um* e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;

d) Seja X um conjunto de números naturais, isto é, $X \subset \mathbb{N}$. Se $1 \in X$ e, além disso, se o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

O *sistema de numeração decimal*, permite representar todos os números naturais com o auxílio dos símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, denominados de dígitos. O conjunto $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,...\}$ dos números naturais é uma sequência de objetos abstratos que, em princípio, são vazios de significados e todo número tem um sucessor (único) e, com exceção de 1, tem também um único antecessor (número do qual é sucessor).

Visto desta maneira, podemos dizer que os números naturais são números ordinais[1]: sendo 1 o primeiro, 2 o segundo, etc..

3.1.1 O Princípio da Indução

O último dos axiomas de Peano quando enunciado sob a forma de propriedades, em vez de conjuntos, é conhecido como o axioma da indução, ou princípio da indução finita ou, simplesmente, princípio da indução, e é a base do método de demonstração de proposições referentes a números naturais.

Princípio da indução. Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Supondo que

i) $P(1)$ é válida;

ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n')$, onde n' é o sucessor de n.

Então $P(n)$ é válida qualquer que seja o número natural n.

Assim, se chamarmos de X o conjunto de números naturais n para os quais $P(n)$ é válida, veremos que $1 \in \mathbb{N}$ em virtude de i) e que n e $X \Rightarrow n' \in X$ em virtude de ii). Logo, pelo axioma da indução, concluimos que $X = \mathbb{N}$.

O axioma da indução é uma forma de dizer que qualquer número natural n pode ser alcançado se partirmos de 1 e repetirmos suficientemente a operação de tomar o sucessor de um número. Ele está presente (pelo menos de forma implícita) sempre que, ao afirmarmos a veracidade de uma proposição referente aos números naturais, verificamos que ela é verdadeira para $n = 1, n = 2, n = 3$ e dizemos "e assim por diante...". Mas é preciso ter cuidado com esta última frase. Ela pressupões que $P(n) \Rightarrow P(n')$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observe o seguinte exemplo [18]: Considerando os número naturais, 1 é um número pequeno. Se n é um número natural pequeno, $n+1$ também será pequeno. Logo, por indução,

[1]Os numerais podem ser ordinais ou cardinais. O número ordinal indica a ordem em que se encontra incluído em uma sequência de números, enquanto que o número cardinal expressa uma quantidade absoluta. Por exemplo: O mês de fevereiro, no ano bissexto, é composto por 29 dias. O número indica a quantidade de dias desse mês, portanto trata-se de um número cardinal. O dia 29 do mês de fevereiro do ano 2016, neste caso o número 29 está sendo usado para indicar o vigésimo nono dia do mês de fevereiro, estabelecendo uma ordem nos dias do mês, logo, é um número ordinal.

todo o número natural é pequeno. Neste caso o argumento é falho pois a noção de número pequeno não está bem definida. Certamente o número 1 é pequeno, e se n é pequeno, $n+1$ não vai subitamente tornar-se grande, porém quais são os números considerados pequenos ou grandes?

3.1.2 Aritmética dos Números Naturais

Nesta Seção apresentaremos as operações de adição e multiplicação de números naturais, as propriedades básicas dessas operações, o princípio da boa ordenação e as operações de subtração e divisão nos números naturais.

Operações de adição e de multiplicação. No conjunto dos números naturais estão definidas, por indução[2], duas operações: a *adição* e a *multiplicação*. A adição faz corresponder aos números n e p a soma $n+p$ e a multiplicação faz corresponder o produto np, definidas da seguinte forma [16]:

Adição: Seja $n+1$ o sucessor de n e $n+(p+1)$ o sucessor de $n+p$, isto é, $n+(p+1) = (n+p)+1$.

A soma $n+1$ é tomar o sucessor de n. A soma $n+p$ é o número natural obtido, partindo de n, iterando p vezes a operação de tomar o sucessor de n.

Multiplicação: Seja $n \cdot 1 = n$ e $n(p+1) = np+n$.

As operações adição e multiplicação gozam das propriedades de associatividade, comutatividade, distributividade e a lei do corte. As demonstrações dessas propriedades, apresentadas nos teoremas a seguir, são exemplos do uso do princípio da indução finita, baseadas nas demonstrações apresentadas em Lima [18].

Teorema 3.1 (Associatividade)*:* $\forall n,m,p \in \mathbb{N}, (n+m)+p = n+(m+p)$ *e* $(nm)p = n(mp)$.

Demonstração. Fixando os números m, $n \in \mathbb{N}$, provaremos, usando indução, que $m+(n+p) = (m+n)+p$ é válida para todo $p \in \mathbb{N}$.

Tomando $p = 1$, temos que $m+(n+1) = (m+n)+1$, é válida pela definição da adição.

Supondo a propriedade válida para um certo $p \in \mathbb{N}$, queremos mostrar que é válida para $p+1$. De fato, como
$m+[n+(p+1)] = m+[(n+p)+1] = [m+(n+p)]+1$, pela hipótese de indução, temos que $n+(m+p) = (n+m)+p$, portanto, $[m+(n+p)]+1 = [(m+n)+p]+1 = (m+n)+(p+1)$. Assim, concluímos que $m+(n+p) = (m+n)+p$ é válida para todo $p \in \mathbb{N}$.

Para a multiplicação $(nm)p = n(mp)$ a demonstração segue o mesmo raciocínio. $\square$

[2]As definições por indução se baseiam na possibilidade de iterar um objeto um número arbitrário de vezes.

Teorema 3.2 (Comutatividade)*:* $\forall n,m \in \mathbb{N},\ n+m=m+n \quad e \quad nm=mn.$

Demonstração. Fixando $n \in \mathbb{N}$, vamos mostrar, por indução, que a propriedade $n+m=m+n$ é válida para todo $m \in \mathbb{N}$.

Para $m=1$, temos que $n+1=1+n$. De fato: usando indução em n, temos, para $n=1$, $1+1=1+1$. Supondo verdadeiro para n ou seja, $n+1=1+n$, então tomando $n+1$ temos, $(n+1)+1=(1+n)+1$, por associatividade, $(1+n)+1=1+(n+1)$.

Suponhamos, agora, que $n+m=m+n$ é válida para um certo $m \in \mathbb{N}$. Logo é válida para $m+1$.
De fato, $n+(m+1)=(n+m)+1=1+(n+m)=1+(m+n)=(m+1)+n$.

Analogamente para a propriedade $nm=mn$

□

Teorema 3.3 (Distributividade da multiplicação com relação a adição)*:* $\forall n,m,p \in \mathbb{N}$, $n(m+p)=nm+np$.

Demonstração. Fixando n, $m \in \mathbb{N}$, faremos indução em p.

Para $p=1$, temos, por definição da operação multiplicação, $n(m+1)=nm+n$.

Suponhamos que $n(m+p)=nm+np$ é válido para certo $p \in \mathbb{N}$, queremos mostrar que é valida também para $p+1$. De fato,

$$\begin{aligned} n[m+(p+1)] &= n[(m+p)+1] = n(m+p)+n=(nm+np)+n= \\ &= nm+(np+n) = nm+n(p+1). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.4 (Lei do corte)*: Se* $n+m=n+p$*, então* $m=p$ *e se* $nm=np$*, então* $m=p$*.*

Demonstração. Fazendo indução em n, para $n=1$, $1+m=1+p \Rightarrow m+1=p+1$. Sendo $m+1$, sucessor de m, $p+1$ sucessor de p, e $m+1=p+1$, concluímos que $m=p$ pois números iguais possuem sucessores iguais.

Suponhamos agora que $n+m=n+p \Rightarrow m+p$, válida para um certo $n \in \mathbb{N}$. Queremos mostrar que é válida para $n+1$. De fato:

$$\begin{aligned} (n+1)+m &= n+(1+m)=n+(m+1)=(n+m)+1=(n+p)+1 \\ &= n+(p+1)=n+(1+p)=(n+1)+p \Rightarrow m=p. \end{aligned}$$

De forma análoga, mostra-o que $nm=np \Rightarrow mp$. □

Ordem entre os números naturais. Dados m e $n \in \mathbb{N}$, a operação de adição entre números naturais permite estabelecer uma relação de ordem entre esses números. Dizemos que n *é maior do que* m, denotando por $n > m$, para significar que existe algum $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$ (isto significa que n é o sucessor do sucessor ... do sucessor de m, iterado p vezes). Dizemos também que m *é menor do que* n, denotando por $m < n$. A notação $n \geq m$ significa que $n > m$ ou $n = m$ e, neste caso, dizemos que n *é maior do que ou igual* m, analogamente para $n \leq m$.

A seguir, provaremos as propriedades básicas satisfeitas pela desigualdade $m < n$, $m, n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.5 (Transitividade)*:* $\forall\, n,\ m,\ p \in \mathbb{N}$, *se* $m < n$ *e* $n < p$, *então* $m < p$.

Demonstração. Como por hipótese $m < n$ e $n < p$, temos, por definição, que existem números naturais r e t tais que $n = m + r$ e $p = n + t$. Assim, $p = (m + r) + t = m + (r + t)$. Logo, $m < p$. □

Definição 3.1 *Dois números naturais m e p são ditos comparáveis se* $m = p$, $m < p$ *ou* $p < m$.

Teorema 3.6 (Comparabilidade)*: Sendo X o conjunto dos números naturais m comparáveis com p, então* $X = \mathbb{N}$.

Demonstração. Usando indução, temos que: Fixando $m = 1$, $m \in X$, isto é m é comparável com p, já que $1 = p$ ou $1 < p$, para todo $p \in \mathbb{N}$.

Suponhamos, agora, que m seja comparável com todo número natural p. E vamos mostrar que $m \in X \Rightarrow m + 1 \in X$. De fato, sendo $p \in \mathbb{N}$, sabemos que $m = p$, $m < p$ ou $p < m$. Examinando cada um dos casos:

Se $m = p$ ou $m > p$, então $p < m + 1$, logo $m + 1 \in X$.

Se, entretanto, $m < p$, então $p = m + r$, com $r \in \mathbb{N}$, então temos duas possibilidades: Se $r = 1$, $p = m + 1$ e $m + 1$ é comparável com p; se, entretanto, tivermos $r \neq 1$ então $r > 1$, ou seja, existe $r' \in \mathbb{N}$ tal que $r = 1 + r'$ e $p = m + (1 + r') = (m + 1) + r'$, donde $m + 1 < p$ e, novamente, $m + 1$ é comparável com p, ou seja, em ambos os caso se $m \in X$, então $m + 1 \in X$. Concluímos que $X = \mathbb{N}$. □

Teorema 3.7 (Tricotomia)*:* $\forall n, m \in \mathbb{N}$, *vale uma, e somente uma, das alternativas:* $m = n$, $m < n$ *ou* $n < m$.

Demonstração. Suponhamos que $m = n$ e $m < n$, então $n = m + p$, para algum $p \in \mathbb{N}$, e neste caso, $m = m + p$ ou ainda, $m + 1 = (m + p) + 1$, usando a lei do corte obtemos $1 = p + 1$, que é um absurdo, já que 1 não é sucessor de nenhum número. Portanto $m < n$ (ou $n < m$) é incompatível com $m = n$.

De forma análoga, considerando que $m < n$ e $n < m$, teríamos $n = m + p$ e $m = n + k$, $k \in \mathbb{N}$, o que resulta em $m = m + p + k$ e $m + 1 = m + p + k + 1$, concluindo, pela lei do corte, que $1 = p + k + 1$, que é um absurdo. $\square$

Teorema 3.8 (Monotonicidade)*: $\forall\, n,\ m,\ p \in \mathbb{N}$, se $m < n$ então, para qualquer p, tem-se $m + p < n + p$ e $mp < np$.*

Demonstração. Sendo $m < n$, então $n = m + q$, para algum $q \in \mathbb{N}$, logo $n + p = m + q + p$, donde concluímos que $m + p < n + p$.

De forma análoga, mostra-se que $mp < np$. $\square$

Dado $n \in \mathbb{N}$, chamamos de I_n o conjunto dos números naturais m tais que $1 \leq m \leq n$, ou seja, $I_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Se $X \subset \mathbb{N}$, dizemos que $p \in \mathbb{N}$ é o menor elemento de X quando $p < n$, para todo $n \in X$. Por exemplo, 1 é o menor elemento de $\mathbb{N}$. Se X é um conjunto de números naturais e $1 \in X$, então 1 é o menor elemento de X.

Teorema 3.9 (Boa-Ordenação)*: Todo subconjunto não vazio $X \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento (Princípio da boa ordenação).*

Demonstração. Se $1 \in X$, então X possui um menor elemento. Vamos supor que $1 \notin X$ e consideremos o conjunto $A \subset \mathbb{N}$, formado pelos números naturais n tais que $I_n \subset \mathbb{N} - X$, ou seja, A é o conjunto de todos os n tais que todos os elementos de X são maiores do que n. Temos $1 \in A$, e como X não é vazio, $A \neq \mathbb{N}$. Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \in A$, mas $p + 1 \notin A$. Então $p + 1 \in \mathbb{N} - A$. Isto significa que todos os elementos de X são maiores do que p porém nem todos são maiores do que $p + 1$. Portanto, existe $n \in X$ tal que $n \leq p + 1$. Deve ser $n = p + 1$, pois se fosse $n < p + 1$ teríamos $n < p < n + 1$, que seria um absurdo, já que não existe nenhum número entre n e o seu sucessor $n + 1$. Assim, o número natural $n = p + 1$ pertence a X e n é o menor elemento de X. $\square$

Operação de subtração. Dados dois números naturais a e b, $a < b$ significa que existe um número natural p tal que $b = a + p$. Nestas condições, definimos a operação *subtração* como a operação que faz corresponder aos números a e b o número p, chamado de diferença de b por a, denotado por $b - a$, ou seja,

$$b - a = p \Longleftrightarrow b = a + p.$$

Nos números naturais, conforme definição acima, a subtração de dois números $b - a$ existe somente se $a < b$. Observemos que a diferença entre o número n e o seu sucessor,

$(n+1)-n$, é igual a 1. De fato: se $n+1$ é o sucessor de n, temos que $n+1>n$, e por definição da operação subtração, $(n+1)-n=p \Leftrightarrow n+1=n+p$. Pela unicidade do sucessor, $p=1$.

A operação subtração satisfaz a propriedade de distributividade:

Teorema 3.10 *Sejam a, b, $c \in \mathbb{N}$. Se $a<b$, então $c(b-a)=cb-ca$.*

Demonstração. Se $a<b$, pela monotonicidade da desigualdade, temos $ac<bc$ e, por definição, existe um número natural p tal que $bc=ac+p$ e $p=bc-ac$. Seja $d=b-a$, logo $d+a=b$. Pela lei do corte da multiplicação podemos escrever $c(d+a)=cb$ e usando a distributividade da multiplicação com relação a adição, vem que $cd+ca=cb$, o que implica $cd=cb-ca$. Substituindo d por $b-a$, obtemos o resultado, ou seja, $c(b-a)=cb-ca$. □

Divisão Euclidiana. Assim como a subtração, a divisão de um número natural por outro, como uma operação inversa da multiplicação, nem sempre é possível, a possibilidade de divisão é definida através da relação de divisibilidade, da seguinte forma:

Definição 3.2 *Dados dois números naturais a e b, dizemos que a divide b, e denotamos por $a|b$, quando existir $q \in \mathbb{N}$ tal que $b=aq$. Neste caso, dizemos que a é um divisor ou um fator de b; que b é um múltiplo de a; que b é divisível por a ou, ainda, que q é o quociente de b por a e denotamos por $q=\dfrac{b}{a}$.*

Caso a não divida b, denotamos por $a \nmid b$ o que significa que não existe um número natural q tal que $aq=b$.

Observação 3.1 *Casos especiais:*

1. *O número 1 é divisor de todo natural a e todo natural a é um divisor de si mesmo. De fato, por definição, temos que $a \cdot 1=a$, logo, $1=\dfrac{a}{a}$ ou, ainda, $a=\dfrac{a}{1}$.*

2. *Se $a=2$ e $a|b$, dizemos que b é par, caso contrário b é ímpar. De acordo com a Definição 3.2, se b é par, existe q natural, tal que $b=2q$, assim o conjunto $\{2,4,...\}$ contém todos os naturais com essa propriedade.*

Os naturais restante $\{1,3,...\}$ formam o conjunto dos números ímpares. Podemos ver que um número ímpar, maior do que 1, é um sucessor de um número par, ou seja, é igual a um número par mais 1, logo, podemos denotar esses números impares por $2q+1$, para todo $q \in \mathbb{N}$.

Quando não existir um divisor entre dois números naturais, é possível efetuar uma *divisão com resto*, chamada de divisão euclidiana, que veremos a seguir. O algoritmo da divisão euclidiana é um resultado central da teoria básica de divisibilidade [15, 23].

Teorema 3.11 (Divisão Euclidiana). *Sejam a e b dois números naturais e que $a \nmid b$. Existem dois únicos números naturais q e r tais que*

$$b = aq + r, \quad com \quad r < a.$$

Os naturais q e r são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de b por a.

Demonstração. Seja q o maior natural tal que $b \geq aq$. Neste caso, $b < a(q+1)$, ou ainda, $b - aq < a(q+1) - aq = a[(q+1) - q] = a \cdot 1 = a$. Chamando $r = b - aq$, como $a \nmid b$ temos $r \neq a$. De fato: supondo por absurdo que $a = r$, então, $a = b - aq$ o que implica em $a + aq = a(1+q) = b$, então $a|b$. Portanto, existem $q, r \in \mathbb{N}$, tais que $b = aq + r, \quad$ com $\quad r < a$.

Para provar a unicidade, vamos supor que $b = aq_1 + r_1 = aq_2 + r_2$, onde q_1, q_2, r_1, $r_2 \in \mathbb{N}$, $r_1 < a$ e $r_2 < a$. Assim, se $r_2 > r_1$, como $r_2 < a$, temos que $r_2 - r_1 < a - r_1 < a$. Por outro lado, se $q_2 > q_1$, implica que existe d natural tal que $q_2 = q_1 + d$, e escrevendo $aq_1 + r_1 = aq_2 + r_2 \iff aq_1 + r_1 = a(q_1 + d) + r_2 \iff r_1 = ad + r_2$, ou seja, $r_1 > r_2$, o que contradiz a nossa hipótese que $r_2 > r_1$. Se $q_1 > q_2$, implica que existe d natural tal que $q_1 = q_2 + d$ ou $q_1 - q_2 = d$ ou ainda $a(q_1 - q_2) = ad$ e, por outro lado, por hipótese, $a(q_1 - q_2) = r_2 - r_1 < a$, tem-se que $ad < a$, que é um absurdo. Se $r_1 > r_2$, temos resultado análogo. Assim concluímos que $r_1 = r_2$.

Se $r_1 = r_2$ temos que $aq_1 + r_1 = aq_2 + r_2 \iff aq_1 + r_1 = aq_2 + r_1 \iff aq_1 = aq_2 \iff q_1 = q_2$. Portanto, $r_1 = r_2$ e $q_1 = q_2$. $\square$

3.2 Números Reais

O conjunto dos números reais, indicado por $\mathbb{R}$, pode ser visto como modelos matemáticos usados para medir grandezas contínuas e é associado a uma reta orientada ou reta real, como uma representação geométrica dos números reais.

3.2.1 A reta Real

Imaginemos uma reta, na qual fixamos um ponto O, o qual chamaremos de origem, e tomemos um ponto A, à direita de O, conforme Figura 3.1 e o segmento OA, de medida u, como unidade de comprimento.

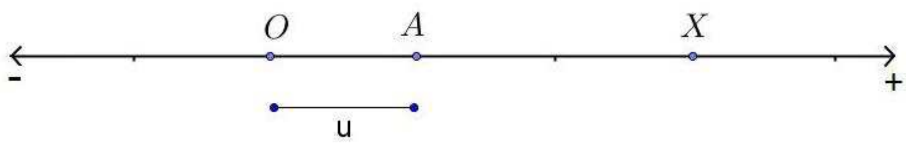


Figura 3.1: A reta real.

A reta assim determinada será chamada de reta real ou eixo real [17]. Seja X um ponto qualquer da reta à direita de O. A origem divide a reta em duas semi-retas, a que contém X, chamada de semi-reta positiva e a outra chamada de semi-reta negativa.

A medida do segmento OX, será chamada de abscissa de X e denotada por x. Se o segmento OA couber um número exato de vezes em OX, x é o números de vezes e, neste caso, x é um natural. Se X está à direita da origem, x é a medida do segmento OX. Se X está a esquerda da origem, x é a medida do segmento OX precedido do sinal menos $(-x)$, chamado número *negativo*. Se X coincidir com a origem, a abcissa de X é 0 (zero).

O conjunto dos números inteiros, denotado por $\mathbb{Z}$, é formado pelo número zero e pelas abscissas dos pontos X da reta real, quando o segmento OA cabe um número exato de vezes em OX (Figura 3.2). Podemos ver que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

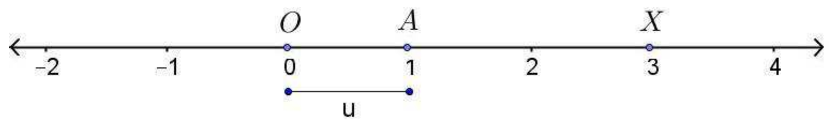


Figura 3.2: O conjunto dos números inteiros e a unidade de medida u.

Considere que o ponto X, pertencente a reta real, é tal que o segmento OA não caiba um número exato de vezes em OX. Esta situação pode levar a dois casos:

1. Existe um segmento de reta de medida w, que cabe m vezes no segmento unitário OA e cabe n vezes no segmento OX, m e n naturais (Figura 3.3) . O segmento de medida

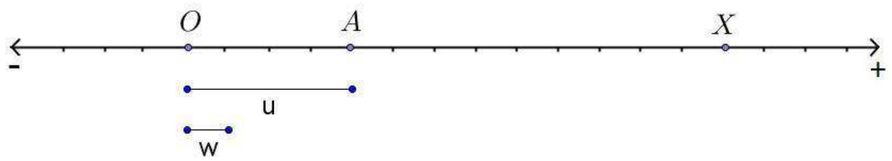


Figura 3.3: A unidade de medida $u = 4w$.

w será uma medida comum de OA e de OX e, neste caso, dizemos que OX e OA são *comensuráveis*. A medida w será a fração $\frac{1}{m}$ e a medida de OX será a fração $u = \frac{n}{m}$.

2. Não existe um segmento de reta de medida w, que caiba m vezes no segmento unitário OA e n vezes no segmento OX. Neste caso dizemos que os segmentos OA e OX são *incomensuráveis*.

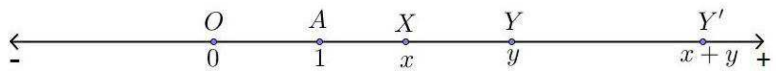
Se o segmento OX é comensurável com o segmento OA, conforme o primeiro caso acima, diremos que a abscissa x é a fração $\frac{n}{m}$ se o ponto X estiver a direita da origem e será $-\frac{n}{m}$ se o ponto X estiver a esquerda da origem. Podemos observar que se $w = u = 1$ $(m = 1)$ o segmento OA caberá um número exato de vezes em OX e, neste caso, a abscissa x é um número inteiro.

O conjunto formado pelas abscissas de X, tais que o segmento OX seja comensurável com o segmento unitário OA, chama-se o conjunto dos números *Racionais*, representado por $\mathbb{Q}$. Portanto, o conjunto dos números racionais são formados por frações do tipo $\frac{n}{m}$ ou $-\frac{n}{m}$, com m e n naturais e $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

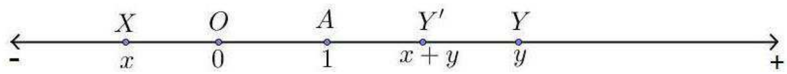
O conjunto formado pelas abscissas de X, tais que os segmentos OX e OA sejam incomensuráveis, chama-se conjunto dos números *Irracionais*.

O conjunto formado pelos números racionais e números irracionais, chama-se conjunto dos números reais e é denotado por $\mathbb{R}$. Observemos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e a reta real, a qual associa a cada ponto X da reta a sua abscissa $x \in \mathbb{R}$. Segundo Elon [18] "O Conjunto $\mathbb{R}$ pode ser visto como um modelo aritmético de uma reta enquanto esta, é o modelo geométrico de $\mathbb{R}$". A interpretação geométrica dos números reais, como abscissas dos pontos de uma reta, facilita a noção intuitiva da soma $x+y$, da ordem $x<y$ e do produto xy dos números $x, y \in \mathbb{R}$. A Figura 3.4 ilustra a soma $x+y$ e a relação de ordem $x<y$, onde x e y são as abscissas dos pontos X e Y, com X a esquerda de Y, com X a direita de O (Figura 3.4(a)) e com X a esquerda de O (Figura 3.4(b)), ou seja, as abscissas $x>0$ e $y>0$ e as abscissas $x<0$ e $y>0$, respectivamente.



(a)



(b)

Figura 3.4: Reta real e a operação $x+y$.

A Figura 3.5 ilustra, geometricamente, o produto xy, com $x>0$ e $y>0$.

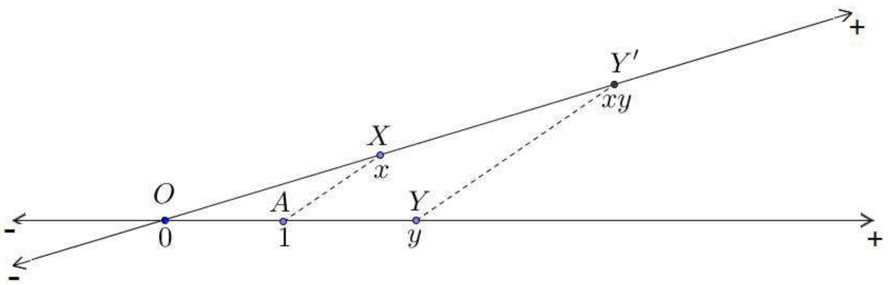


Figura 3.5: Reta real e o produto xy.

A representação ou descrição geométrica das operações de adição e multiplicação dos números reais, são importantes para a noção inicial de medida atribuída aos reais, mas para trabalhar com os números reais, de uma forma geral, esta descrição precisa ser complementada por uma descrição algébrica, mais formal, do conjunto. Essa descrição algébrica é feita através de um conjunto de axiomas, a partir dos quais outras propriedades podem ser demonstradas [18].

3.3 O Conjunto dos Números Reais é um Corpo Ordenado Completo

Caracterizar o conjunto dos números reais como um *corpo ordenado completo*, significa que no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ estão definidas as operações adição e multiplicação que cumprem certas condições (axiomas), que veremos mais adiante, caracterizando a estrutura de corpo; o corpo é ordenado quando existe a relação de ordem $x < y$ e esta está relacionada com as operações adição e multiplicação e, a completeza de $\mathbb{R}$ equivale a continuidade da reta real. Segundo Lima [18] existem várias maneiras de descrever matematicamente a completeza, todas envolvendo a ideia de aproximação ou limite. Neste trabalho, conforme a abordagem realizada por Lima [18] e Caminha [22] vamos caracterizar a completeza do conjunto dos reais usando a notação decimal para representar os números reais.

Operações adição e multiplicação . As operações de adição e multiplicação estão definidas em $\mathbb{R}$, analogamente aos números naturais, vistas na Seção 3.1.2. A adição faz corresponder o número real $a+b$ aos números reais a e b e a multiplicação faz corresponder o produto ab.

Sejam a, b, c e d números reais. As operações de adição e multiplicação satisfazem os seguintes axiomas:

1. *Consistência.* Se a e b são naturais, as operações adição e multiplicação associam os mesmos números $a+b$ e ab nos dois conjuntos;

2. *Associatividade.* $(a+b)+c = a+(b+c)$ e $a(bc) = a(bc)$;

3. *Comutatividade.* $a+b = b+a$ e $ab = ba$;

4. *Distributividade.* $a(b+c) = ab+ac = ba+ca = (b+a)c$;

5. *Existência do elemento neutro.* Existem os números reais denotado por 0 e por 1, tais que $0+a = a$ e $1a = a$.

6. *Lei do cancelamento.* Se $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

7. *Existência do inverso aditivo e multiplicativo.* Para todo $a \in \mathbb{R}$ existem $-a$, $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tais que $a+(-a) = 0$ e $aa^{-1} = 1$.

Como consequência imediata dos axiomas, os números reais satisfazem as seguintes propriedades:

Teorema 3.12 (Unicidade do inverso aditivo). *Para todo $a \in \mathbb{R}$, se v, $v' \in \mathbb{R}$ são tais que $a+v = a+v' = 0$, então $v = v'$.*

Demonstração. Se $a+v=0$, logo $v=-a$, pois, pela existência do inverso aditivo, temos que $a+(-a)=0$. De forma análoga, se $a+v'=0$, então $v'=-a$. E, desta maneira, conclui-se que $v=v'$. □

Teorema 3.13 (Unicidade do inverso multiplicativo.) *Para $a \in \mathbb{R}$, se w, $w' \in \mathbb{R}$ são tais que $aw = aw' = 1$, então $w = w'$.*

Demonstração. Se $aw = 1$, então, $w = a^{-1}$, pois, pela existência do inverso multiplicativo, $aa^{-1} = 1$. E, de forma análoga, se $aw' = 1$, então $w' = a^{-1}$. Logo $w = w'$. □

Teorema 3.14 *Para todo $a \in \mathbb{R}$, temos $a \cdot 0 = 0$.*

Demonstração. Seja $b \in \mathbb{R}$, tal que $ab = 0$. Assim, pela lei do cancelamento, $a = 0$ ou $b = 0$. Supondo que $a \neq 0$, então $b = 0$ e temos o resultado. Supondo, agora, que $a = 0$, então $b = 0$ ou $b \neq 0$. Se $b = 0$, neste caso, $a = b = 0$ e $ab = 0$. Portanto, se $b = 0$, temos que $ab = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$. □

As operações de *subtração* e *divisão* que associam a e b aos números $a-b$ e $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, respectivamente, são definidas a partir da existência de inversos aditivo e multiplicativo, da seguinte forma: se a, $b \in \mathbb{R}$, a soma $a+(-b)$, indicada por $a-b$, é chamada de diferença entre a e b. Se $b \neq 0$, o produto ab^{-1}, representado por $\frac{a}{b}$, é chamado de quociente de a por b.

3.3.1 Ordem nos Números Reais

Dados dois números reais a e b, assim como nos números naturais, existe em $\mathbb{R}$ uma relação de ordem, determinada pelas desigualdades: $a < b$ (a é menor do que b), que na reta real, conforme na Seção 3.2.1, significa que o ponto de abscissa b está à direita do ponto de abscissa a; $a \leq b$ (a é menor do que ou igual a b) significando que $a = b$ ou $a < b$, neste caso o ponto de abscissa a, na reta real, pode coincidir com o ponto de abscissa b. Analogamente para $a > b$ (a é maior do que b) e $a \geq b$ (a é maior do que ou igual a b). Se $a > 0$ dizemos que a é *positivo* e, se $a < 0$ dizemos que a é *negativo*.

A relação de ordem nos números reais satisfaz os seguintes axiomas:

Se a, b e $c \in \mathbb{R}$, então:

1. *Consistência.* Se $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$ em $\mathbb{N}$, então $a < b$ em $\mathbb{R}$;

2. *Compatibilidade.* $\begin{cases} \text{Se } a > b, entoa - b > 0; \\ \text{Se } a,\ b > 0,\ \text{então } a + b > 0 \text{ e } ab > 0; \end{cases}$

3. *Reflexividade.* $a \geq a$, para todo $a \in \mathbb{R}$;

4. *Antissimétrica.* Se $a \geq b$ e $b \geq a$, então $a = b$;

5. *Transitividade.* Se $a \geq b$ e $b \geq c$, então $a \geq c$;

6. *Dicotomia.* $a \geq b$ ou $b \geq a$.

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Demonstraremos, a seguir, as principais propriedades satisfeitas pela relação de ordem dos números reais, baseados em Caminha [22] e Lima [16].

Teorema 3.15 $a > 0$ *se, e somente se* $-a < 0$.

Demonstração. Se $0 > -a$, pelo axioma da compatibilidade, $0 - (-a) > 0$, então $a > 0$ e reciprocamente. □

Teorema 3.16 (Regra do sinal).

a. *Se* $a > 0$, *então* $\begin{cases} b > 0 \Rightarrow ab > 0 \\ b < 0 \Rightarrow ab < 0. \end{cases}$

b. *Se* $a < 0$, *então* $\begin{cases} b > 0 \Rightarrow ab < 0 \\ b < 0 \Rightarrow ab > 0. \end{cases}$

Demonstração. Sejam a e b reais. Se $a > 0$ e $b > 0$, pelo axioma da compatibilidade, $ab > 0$. Se $b < 0$, pelo Teorema 3.15 $-b > 0$, logo $a(-b) > 0$. Mas, pela distributividade e existência do elemento inverso aditivo, podemos escrever, $a(-b) = a(0 - b) = -ab = -(ab) > 0$. Assim, $ab < 0$.

Analogamente, teremos o resultado para $a < 0$. Em particular, temos $(-1)a = -a$ e $(-1)(-1) = 1$. □

Teorema 3.17 (Monotonicidade).

a. *Se* $a > b$, *então* $a + c > b + c$;

b. *Se* $a > b$ *e* $c \geq d$, *então* $a + c > b + d$;

c. *Se* $a > b$, *então* $\begin{cases} c > 0 \Rightarrow ac > b.c \\ c < 0 \Rightarrow ac < b.c. \end{cases}$

Demonstração. Seja $a > b$. Pelo axioma da compatibilidade $a - b > 0$.

a. Pela existência do inverso aditivo $a - b + c - c = (a+c) - (b+c) > 0$, ou seja, $a + c > b + c$.

b. Sendo $c > d$, pelo axioma da compatibilidade, $c - d > 0$. Assim, pela comutatividade e Regra dos sinais, temos que $(a-b) + (c-d) = (a+c) - (b+d) > 0$. Portanto, $(a+c) > (b+d)$.

c. Se $c > 0$, como (a-b)>0, então $c(a-b) > 0$, assim, pela distributividade, temos $ac - bc > 0$. Logo $ac > bc$. Se $c < 0$, então, $c(a-b) < 0$, ou seja, $ac - bc < 0$ e, consequentemente, $bc > ac$.

$\square$

Teorema 3.18 *Se $a \neq 0$, então $aa = a^2 > 0$.*

Demonstração. Pela Regra do sinal, temos que: se $a > 0$, então $a^2 = aa > 0$. Se $a < 0$, então $-a > 0$. Assim, $a^2 = aa = 1aa = (-1)(-1)aa = (-1a)(-1a) = (-a)(-a) > 0$. $\square$

Teorema 3.19 *$a > 0$ se, e somente se $\frac{1}{a} > 0$.*

Demonstração. Dado $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, pela existência do inverso multiplicativo, $aa^{-1} = 1$. Como $a > 0$ e $aa^{-1} > 0$, pela Regra do sinal, $a^{-1} > 0$. $\square$

Teorema 3.20 *Se a e b tem mesmo sinal e $a > b$, então $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.*

Demonstração. Como por hipótese, a e b são não nulos, sendo $a > b$, usando as propriedades da adição e multiplicação de números reais, podemos escrever

$$a - b = \frac{ab}{ab}(a-b) = ab\left(\frac{a}{ab} - \frac{b}{ab}\right) = ab\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) > 0 \qquad .$$

Se $a > 0$ e $b > 0$, então $ab > 0$. Como $ab\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) > 0$. Isso implica em $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$.

Se $a < 0$ e $b < 0$, temos, também, que $ab > 0$. Logo $ab\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) > 0$. E mais uma vez isso implica em $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$. $\square$

3.3.2 Potências Inteiras em $\mathbb{R}$

Dado um número real $a > 0$, definimos o quadrado de a , denotado por a^2, como o real $a^2 = aa$. Analogamente, o cubo de a é igual $a^3 = aaa$. Generalizando, define-se a potência n-ésima de a, $n > 1$ natural, como o número real $a^n = \underbrace{aa\ldots a}_{n\ vezes}$. O número a^n é uma potência natural de a. Define-se, para $n = 1$, $a^1 = a$. Assim, $a^{n+1} = a^n a$, e para quaisquer m, $n \in \mathbb{N}$, temos $a^m a^n = \underbrace{aa\ldots a}_{m\ vezes}\underbrace{aa\ldots a}_{n\ vezes} = a^{m+n}$.

Sejam $m_1, m_2, ..., m_k$ quaisquer. Então $a^{m_1} a^{m^2} \ldots\ a^{m_k} = a^{m_1+m_2+\ldots+m_k}$. Em particular, se $m_1 = \ldots = m_k = m$, temos $\underbrace{a^m a^m \ldots a^m}_{k\ \ vezes} = a^{m+m+\ldots+m}$, ou seja, $(a^m)^k = a^{mk}$.

Consideremos, agora, m, $n \in \mathbb{Z}$. Pela consistência das operações, a propriedade $a^m a^n = a^{m+n}$ é válida. Portanto, podemos escrever $a^1 = a^{0+1} = a^0 a^1$, pela existência e unicidade do elemento neutro, $a^0 = 1$. Além disso, sendo $a^0 = 1$, podemos escrever $1 = a^0 = a^{n-n} = a^{n+(-n)} = a^n a^{-n}$. Pela existência e unicidade do inverso multiplicativo, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

3.3.3 Notação Decimal

Uma expressão decimal é um símbolo da forma

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots, \tag{3.1}$$

onde a_0 é um número inteiro e a_1, $a_2 \ldots a_n \ldots$ números inteiros entre zero e nove, $0 \leq a_n \leq 9$, denominados de dígitos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um dígito a_n, chamado de n-ésimo dígito da expressão decimal α.

Vamos considerar $a_0 \geq 0$ na expressão decimal (3.1) e reescreve-la como uma soma de potências de 10, conforme a posição que um algarismo ocupa após a vírgula, isto é:

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots\ = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots.$$

Dessa forma, podemos tomar o número racional

$$\alpha_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},$$

como uma aproximação de α com um erro na ordem $\dfrac{1}{10^n} = 10^{-n}$.

Tomando os α_n, com $n = 0, 1, 2, \ldots$, obtemos uma sequência não-decrescente[3] de nú-

[3]Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ que a cada número natural n associa um número real $x_n = x(n)$, chamado o n-ésimo termo da sequência. Uma sequência $\{x_n\}$ será dita decrescente se $x_{n+1} < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Diremos que a sequência é não crescente, se $x_{n+1} \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sejam (x_n) uma sequência de números reais e l um número real. Dizemos que $\{x_n\}$ converge para l, ou é convergente, e

meros racionais, cujos termos se aproximam de α com erros na ordem de 10^{-n}, ou seja,

$$\begin{array}{rcl}\alpha_0 & = & a_0;\\ \alpha_1 & = & a_0+\dfrac{a_1}{10};\\ \alpha_2 & = & a_0+\dfrac{a_1}{10}+\dfrac{a_2}{10^2};\\ \alpha_3 & = & a_0+\dfrac{a_1}{10}+\dfrac{a_2}{10^2}+\dfrac{a_3}{10^3};\\ \vdots & & \end{array}$$

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n \leq \cdots < \alpha$$

sendo o número real α o limite desta sequência.

Segundo Lima [18], *o fato de que existe sempre um número real α que é limite da sequência dos α_n (α_n valores aproximados de α) é a forma que adotaremos para dizer que o corpo ordenado dos números reais é completo.*

Casos particulares da sequência $\{\alpha_n\}$:

i) Quando, a partir de um certo n, todos os dígitos α_n se tornam iguais a zero: $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n 000\ldots$, então $\alpha = a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \cdots + \dfrac{a_n}{10^n}$ é um número racional, que pode ser escrito como uma fração decimal (o denominador é uma potência de 10).

Por exemplo, $13,428000... = 13 + \dfrac{4}{10} + \dfrac{2}{100} + \dfrac{8}{1000} = \dfrac{13428}{1000}$.

ii) Quando não existe n a partir do qual os dígitos α_n se tornam iguais a zero, a expressão $\alpha = a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$ pode representar um número racional desde que seja periódica.

Por exemplo:

$$0,999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \cdots = 1. \tag{3.2}$$

Dividindo a expressão (3.2) por 9, resulta

$$0,111\ldots = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots = \frac{1}{9}. \tag{3.3}$$

Multiplicando a expressão (3.3) pelo digito a, vem

$$0,aaa\ldots = \frac{a}{10} + \frac{a}{100} + \cdots + \frac{a}{10^n} + \cdots = \frac{a}{9}.$$

---

escreve-se

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l$$

quando para qualquer intervalo aberto I contendo l (por menor que ele seja) é possível encontrar um número $n_0 \geq 1$, de modo que $x_n \in I$ para todo $n > n_0$. Em caso contrário dizemos que a sequência é divergente.

A expressão (3.2) pode ser reescrita agrupando de forma conveniente as frações de potências de 10, por exemplo

$$\begin{aligned}0,999\ldots &= \left(\frac{9}{10}+\frac{9}{100}\right)+\left(\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}\right)+\cdots=\frac{99}{100}+\frac{99}{100^2}+\cdots\\ &= 99\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\cdots\right)=1.\end{aligned}$$

Dai,

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\cdots=\frac{1}{99}.$$

Particularmente,

$$0,777777\ldots=\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\cdots=\frac{7}{9}.$$
$$0,373737\ldots=\frac{37}{100}+\frac{37}{100^2}+\frac{37}{100^3}+\cdots=37\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\cdots\right)=\frac{37}{99}.$$
$$0,521521\ldots=\frac{521}{1000}+\frac{521}{1000^2}+\frac{521}{1000^3}+\cdots=521\left(\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000^2}+\cdots\right)=\frac{521}{999}.$$

Uma expressão decimal $\alpha=0,a_1a_2\ldots$ chama-se uma *dízima periódica* simples, de período $a_1a_2...a_p$, quando os primeiros p dígitos após a vírgula se repetem indefinidamente na mesma ordem. Assim, 0,777...; 0,373737... e 0,521521... são dízimas periódicas simples com períodos 7; 37 e 521, respectivamente.

Toda dízima periódica simples representa um número racional. O número racional é chamado de *fração geratriz* ou, simplesmente, sua *geratriz*.

iii) Existem as dízimas periódicas ditas compostas. São expressões $\alpha=0,a_1a_2\ldots$, cujos primeiros p dígitos não se repetem, seguida por uma parte periódica.

Para obter a geratriz de uma dízima periódica composta, procede-se como no exemplo a seguir:

$$\begin{aligned}\alpha &= 0,35172172\ldots\\ 100\alpha &= 35,172172\ldots\\ 35,172172... &= 35+0,172172\ldots=\frac{35(999)+172}{999}=\frac{35(1000-1)+172}{999}\end{aligned}$$

Portanto, $\alpha=\dfrac{35172-35}{99900}$.

3.3.4 Intervalos

Um conjunto $X\subset\mathbb{R}$ diz-se *limitado superiormente* quando existe algum $b\in\mathbb{R}$ tal que $x\leq b$ para todo $x\in X$. Neste caso, diz-se que b é uma cota superior de X. Analogamente, diz-se que o conjunto $X\subset\mathbb{R}$ é *limitado inferiormente* quando existe $a\in\mathbb{R}$ tal que

$a \leq x$ para todo $x \in X$. O número a chama-se então uma cota inferior de X. Se X é limitado superior e inferiormente, diz-se que X é um conjunto *limitado*. Em caso contrário o conjunto é *ilimitado*.

Os intervalos, definidos a seguir, são subconjuntos de $\mathbb{R}$ e são exemplos de conjuntos limitados e ilimitados. Sejam a e b números reais, com $a \leq b$.

Intervalos limitados com extremos a e b:

Intervalo fechado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$;

Intervalo aberto: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$;

Intervalo fechado à esquerda: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$;

Intervalo fechado à direita: $(a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$.

Intervalos ilimitados:

Semi-reta esquerda fechada de origem b: $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$;

Semi-reta esquerda aberta de origem b: $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$;

Semi-reta direita fechada de origem a: $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$;

Semi-reta direita aberta de origem a: $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$;

Conjunto dos números reais: $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.

3.4 Funções

Segundo os PCNs [4], o trabalho com funções deve ser iniciado diretamente pela noção de correspondência entre conjuntos que descrevem situações de dependência entre seus elementos e suas várias formas de representação, situações-problema, relacionadas com aplicações, não devem ser deixados para o final do estudo de funções, e sim, sejam usadas como motivação para o estudo deste conteúdo.

As funções de interesse são aquelas que descrevem correspondências entre conjuntos numéricos e a lei de correspondência pode ser expressa por uma expressão algébrica.

3.4.1 Lei de Correspondência

A correspondência ou a associação de dois conjuntos, exige que haja um conjunto de partida e um conjunto de chegada. A maneira pela qual os elementos do conjunto de partida estão associados ao conjunto de chegada chama-se a lei da correspondência [8].

Uma lei de correspondência pode ser expressa de forma verbal (em linguagem corrente), forma gráfica (usando sistemas de coordenadas, diagrama de flechas, tabelas ou outras formas não convencionais) e de forma analítica (expressões algébricas).

Observação 3.2 *Muitos fenômenos naturais seguem determinados padrões, em outras palavras, possuem regularidades. A determinação dessas regularidades permite previsões sobre etapas que não são observáveis, daí a sua importância. Essa regularidade observada é o que nos permite determinar a lei da correspondência.*

Seja X um conjunto numérico. Denominamos de variável o símbolo que representa cada elemento do conjunto X. O conceito de variável é que permite obter uma representação da lei da correspondência entre conjuntos, através de sentenças algébricas.

Sejam X e Y dois conjuntos, cujos os elementos são representados pelas variáveis x e y, respectivamente. Seja x a variável do conjunto de partida e seja y a variável do conjunto de chegada. Neste caso, a variável x é chamada de variável independente e y de variável dependente. Dizemos que y é função de x se para cada variável x, existir uma única variável y que está em correspondência com x, no sentido $x \to y$.

Definição 3.3 *Sejam X e Y dois conjuntos não vazios. Dizemos que f é uma função de X em Y se para cada $x \in X$, existir uma única variável $y \in Y$ tal que y é função de x e denotamos por:*

$$f : X \to Y$$
$$y = f(x).$$

O conjunto X é chamado domínio *da função, o conjunto Y de* contradomínio *e o conjunto de todos os valores de y, tais que $y = f(x)$ é chamado de* imagem *de x pela função f.*

Definição 3.4 *Sejam X, $Y \subset \mathbb{R}$, dizemos que a função $f : X \to Y$, tal que $y = f(x)$, é uma função real de variável real [17].*

Uma representação importante de uma função, além da expressão algébrica, é obtida através de seu gráfico no plano cartesiano.

3.4.2 O Gráfico de Uma Função

Dados dois números reais x e y, o *par ordenado* formado por esses números, quando escolhemos x para ser a primeira coordenada e y a segunda, é denotado por (x,y). Dois pares ordenados (x_1,y_1) e (x_2,y_2) são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ [17].

Dados dois conjuntos X e Y o produto cartesiano $X \times Y$ é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x,y), com $x \in X$ e $y \in Y$, ou seja,

$$X \times Y = \{(x,y) \,|\, x \in X \text{ e } y \in Y\}.$$

O Plano Cartesiano (Plano Numérico ou $\mathbb{R}^2$) é uma representação geométrica do produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. É representado por duas retas reais (eixos) perpendiculares, uma horizontal e outra vertical, o ponto O de interseção é chamado de origem. Chamamos, geralmente, de eixo OX ou eixo das abscissas, a reta horizontal e a reta vertical denominamos de eixo OY ou eixo das ordenadas.

Um ponto P do plano cartesiano é a representação gráfica de um par ordenado de números reais $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e o denotamos por $P = (x,y)$, onde x e y são suas coordenadas [17].

O Plano Cartesiano é divido em quatro regiões, chamadas de quadrantes, se $x > 0$ e $y > 0$, o ponto está localizado no primeiro quadrante; se $x < 0$ e $y > 0$, no segundo; $x < 0$ e $y < 0$, no terceiro e se $x > 0$ e $y < 0$, o ponto está localizado no quarto quadrante (Figura 3.6).

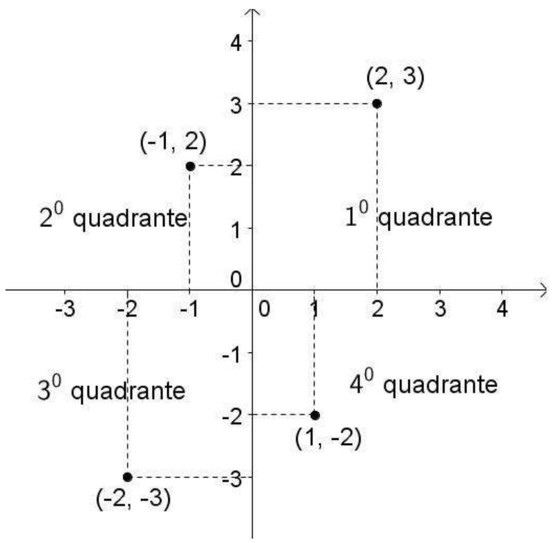


Figura 3.6: Pontos no plano cartesiano.

Seja f uma função de X em Y, X e Y subconjuntos dos números reais. Algebricamente, o gráfico de f é o conjunto de todos os pares ordenados (x,y) pertencentes ao conjunto $X \times Y$ para os quais $y = f(x)$. Assim, simbolicamente, o gráfico de f é o conjunto

$$G(f) = \{(x,y) \in X \times Y \,|\, y = f(x)\}.$$

A representação geométrica do gráfico de f é o conjunto de todos os pontos do plano cartesiano que estão em correspondência biunívoca com os pares ordenados de $G(f)$.

Exemplo 1: Seja $f : A \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ se } x \text{ é par} \\ 2x-4 \text{ se } x \text{ é impar,} \end{cases}$

onde $A = \{0,1,2,3,4,5\}$.

O domínio da função é o conjunto A, a imagem é o conjunto $Im = \{1,-2,3,2,5,6\}$ e o gráfico da função está ilustrado na Figura 3.7.

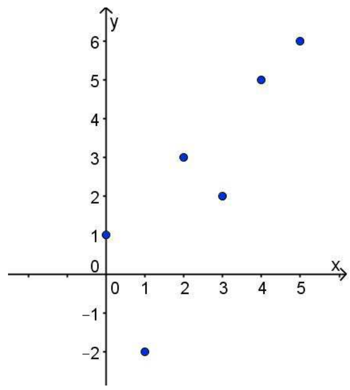


Figura 3.7: Domínio e Imagem discretos.

Exemplo 2: A função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3 - 2x$, sendo $A = [-1,3]$. O domínio da função é o intervalo fechado $[-1,3]$, a imagem é o intervalo fechado $[-3,5]$ e o gráfico da função, que pode ser visto na Figura 3.8, é o conjunto $\{(x,y) \in A \times \mathbb{R} | y = f(x)\}$

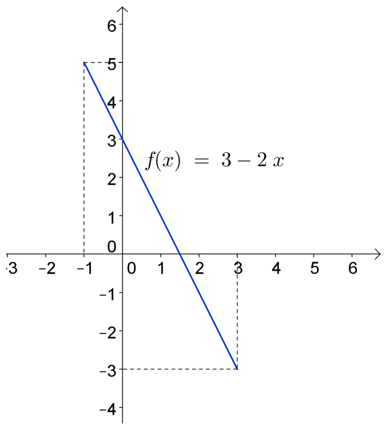


Figura 3.8: Domínio e Imagem em intervalos.

Exemplo 3: A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3 - x^2$.
O domínio é o intervalo $(-\infty, \infty)$, a imagem é o intervalo $(-\infty, 3]$ e o gráfico da função, visto na Figura 3.9, é o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = f(x)\}$

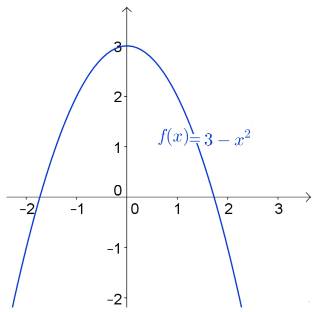


Figura 3.9: Domínio e Imagem em intervalos.

3.5 Polinômios

Uma expressão algébrica da forma

$$E = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

em que $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais, tendo com x como a variável real, é denominada de *polinômio em x* e podemos escrever $E = E(x)$. Os números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são chamados *coeficientes* e as parcelas $a_n x^n$, $a_{n-1}x^{n-1}$, ..., a_0, são chamadas termos do polinômio. Se $a_n \neq 0$, o polinômio é de grau n e $a_n x^n$ é o termo principal do polinômio. Um polinômio em que todos os seus coeficientes são iguais a 0 é chamado de *polinômio nulo* e denotado por $E \equiv 0$. Nenhum grau é atribuído ao polinômio nulo.

Dois polinômios são iguais (ou idênticos) quando eles são idênticos termo a termo. Por exemplo:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a^0 = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b^0$$

implica em

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \ldots, \quad a_n = b_n.$$

3.5.1 Adição e Subtração

Pelas propriedades básicas das operações de adição e multiplicação de números reais (comutatividade e associatividade da adição e multiplicação, distributividade da multiplicação em relação à adição) temos as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios, bem definidas.

Sejam $E(x)$ e $F(x)$ dois polinômios de grau n, isto é:

$$\begin{aligned} E(x) &= a_n x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_0 \\ F(x) &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0. \end{aligned}$$

A soma de E por F é dada por: $(E+F)(x) = (a_0+b_0)x^n + (a_1+b_1)x^{n-1} + \cdots + (a_n + b_n)$ e a subtração de E por F é a diferença $(E-F)(x) = E(x) + (-F(x))$.

A multiplicação de E por F é o produto $(EF)(x) = E(x)F(x)$

$(EF)(x) = c_n x^{2n} + c_{n-1}x^{2n-1} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$, cujos coeficientes c_k, $k = 0, 1, \ldots, n+n$, tem a forma:

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0.$$

Exemplo: Multiplicar $E(x) = x + 2x^2 + 3x^3$ por $F(x) = 4 + 5x + 6x^2$.

Temos:

$$\begin{aligned}(EF)(x) &= (x+2x^2+3x^3)(4+5x+6x^2)\\ &= x(4+5x+6x^2)+2x^2(4+5x+6x^2)+3x^3(4+5x+6x^2)\\ &= (4x+5x^2+6x^3)+(8x^2+10x^3+12x^4)+(12x^3+15x^4+18x^5)\\ &= 4x+13x^2+28x^3+27x^4+18x^5.\end{aligned}$$

A multiplicação pode ser obtida de uma forma mais rápida através do *dispositivo prático*.

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 4 & + & 5x & + & 6x^2 & \longleftarrow & F & & & & \\ & x & + & 2x^2 & + & 3x^3 & \longleftarrow & E & & & & \\ \hline & 4x & + & 5x^2 & + & 6x^3 & \longleftarrow & & & & & xF(x) \\ + & & & 8x^2 & + & 10x^3 & + & 12x^4 & \longleftarrow & & & 2x^2F(x) \\ & & & & + & 12x^3 & + & 15x^4 & + & 18x^5 & \longleftarrow & 3x^3F(x) \\ \hline & 4x & + & 13x^2 & + & 28x^3 & + & 27x^4 & + & 18x^5 & \longleftarrow & E(x)F(x) \end{array}$$

3.5.2 Identidades Algébricas

Definimos polinômios em x como expresões algébricas com coeficientes conhecidos. Considerando outras expressões algébricas em mais de uma variável, por exemplo $F = x^2+2.x.y+y^2$, e fixando qualquer uma das variáveis, a expressão tem o comportamento de um polinômio. Logo, podemos realizar operação entre elas. Por exemplo, para x e y reais;

$$\begin{aligned}E &= (x+y)(x+y) = x.(x+y)+y(x+y)\\ &= (x^2+xy)+(yx+y^2)\\ &= x^2+2xy+y^2.\end{aligned}$$

Portanto, pondo $E=(x+y)^2$ temos uma identidade algébrica $E=F$, isto é,

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2, \tag{3.4}$$

Essa identidade é conhecida como um produto notável: *"o quadrado da soma de dois números reais"*.

A seguir, exemplos de identidades algébricas, também chamadas de produtos notáveis. Para todos os $x,\, y \in \mathbb{R}$:

(a) $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$;

(b) $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$;

(c) $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$;

(d) $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$;

(e) $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$;

(f) $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.

Os produtos notáveis, acima listados podem ser vizualizados, geométricamente, a partir de áreas de quadriláteros de lados a e b, no caso de expressões quadráticas, conforme ilustra a Figura 5.5, e volumes de cubos, no caso de expressões cubicas. Apresentar essas identidades aos alunos, usando a representação geométrica, pode facilitar a aprendizagem significativa.

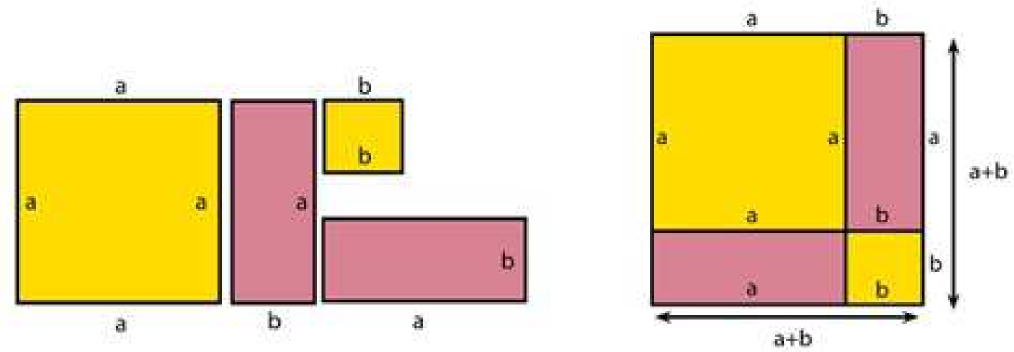


Figura 3.10: Representação geométrica de $(a+b)^2$

3.5.3 Fatoração

Uma identidade $E = F$ na qual E é um polinômio e F é um produto de (pelo menos dois) polinômios é usualmente denominada uma **fatoração**. Por exemplo: $(x+b)(x-b)$ é uma fatoração de $(x^2 - b^2)$. As identidades listadas acima são exemplos de fatorações.

A fatoração é um recurso utilizado na simplificação de sentenças matemáticas. A seguir alguns exemplos:

1. Fatoração pela colocação de fatores comuns em evidência (forma mais básica de fatoração).
$$ax + bx = x(a+b).$$

2. Fatoração por agrupamento. Não existe um fator comum, a todos os fatores, mas fatores comuns a alguns termos e outros fatores comuns a outros termos.
$$ax + bx + ay + by = (x+b)(x+y).$$

3. Fatoração usando os produtos notáveis, também, conhecidas como *completar o quadrado* ou *completar o cubo*, por exemplo:

a) $(x+b)(x-b)=x^2-b^2$

b) $x^2 \pm 2bx+b^2=(x\pm b)^2$

c) $x^3 \pm 3x^2b+3xb^2 \pm b^3=(a\pm b)^3$

3.6 Equações Polinomiais

Seja f uma função real tal que $f(x)$ é um polinômio de grau ≥ 1, com coeficientes reais. A equação

$$f(x)=0,$$

é chamada de equação algébrica. Nesta equação x representa um número desconhecido que satisfaz a equação, ou seja, se $x=x_0$ satisfaz a equação, então $f(x_0)=0$, e, neste caso, x_0 é chamado de raiz da equação. Portanto, resolver uma equação consiste em encontrar todas suas raízes. As raízes da equação $f(x)=0$ são, também, chamadas de raízes do polinômio dado por $f(x)$. Exemplos de equações polinomiais:

$$\begin{aligned} &ax=0 \\ &ax^2+bx+c=0 \\ &ax^4+bx^2+c=0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

com a, b, $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Assim como os polinômios, os coeficientes não nulos dos termos de maior grau, determinam o grau da equação. As equações dadas pelas equações em (3.6) têm graus 1, 2, 4 e são conhecidas como equação linear, quadrática e biquadrada, respectivamante.

Observação 3.3 *A definição de equação estudada no livros de Ensino Fundamental é expressada da seguinte maneira: Uma sentença é aberta quando apresenta um ou mais termos desconhecidos. Chamamos esses termos desconhecidos de incógnitas. Sentenças matemáticas abertas que expressam uma relação de igualdade são chamadas de equações.*

3.6.1 Equações Lineares e Quadráticas

As equações do tipo $ax+b=0$ com $a \neq 0$, chamadas de equação lineares, posuem uma raiz real dada por:

$$x=-\frac{b}{a}.$$

A equação linear, $ax=0$, é um caso particular das equações lineares, com $a \neq 0$ e $b=0$, cuja raiz é $x=0$.

As equações do tipo $ax^2+bx+c=0$, com $a \neq 0$, chamadas de equações quadráticas, possuem no máximo duas raízes. As suas raizes são determinadas pela fórmula $x=$

$\dfrac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a}$, onde $\triangle = b^2 - 4ac$, conhecdida como a fórmula de Bháskara. Essa fórmula é obtida pela fatoração da equação $ax^2 + bx + c = 0$, usando produtos notáveis, a saber:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x \pm \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0
\end{aligned}
$$

Resolvendo a equação $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$, obtemos a fórmula procurada.

O número de raizes de uma equação de 2° grau depende do valor de $\triangle = b^2 - 4ac$. Se $\triangle > 0$ a equação possui duas raizes distintas; se $\triangle = 0$ a equação possui duas raizes iguais e se $\triangle < 0$ a equação não possui raizes.

Olhando a equação $p(x) = 0$, como os zeros da função p, podemos vizualizar as raizes da equação $p(x) = 0$ a partir do gráfico da $y = p(x)$ (Figura 3.11) como os pontos onde o gráfico corta o eixo OX.

A equação biquadrada pode ser transformada em uma equação do 2° grau através de uma mudança de variável. Por exemplo: substituindo x^2 na equação $ax^4 + +bx^2 + c = 0$, por y, obtemos $ay^2 + by + c = 0$.

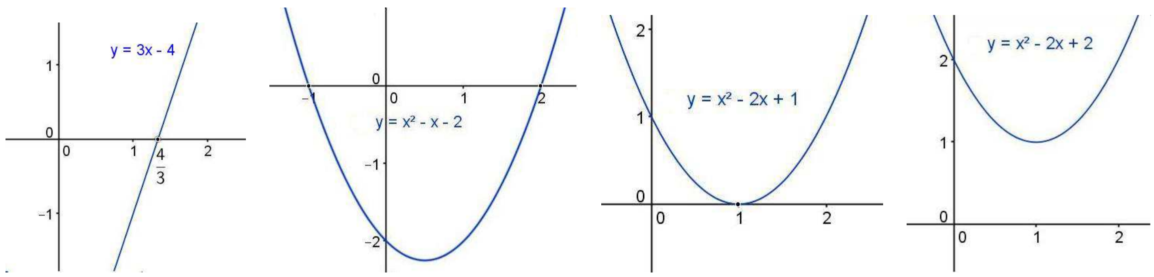


Figura 3.11: Exemplos de interseções do grafico de funções afins e quadráticas com o eixo OX.

3.7 Razão e Proporção

Conhecendo os números reais, podemos medir todas as grandezas e definir a *razão* de duas delas como o quociente de suas medidas, desde que as duas grandezas estejam na mesma unidade de medida. Conhecendo a razão entre duas grandezas, podemos definir proporcionalidade entre grandezas, ou, entre variáveis [2].

Definição 3.5 *Dizemos que duas variáveis ou grandezas x e y são diretamente proporcionais (ou simplesmente proporcionais) se $y = kx$ ou a razão $\dfrac{y}{x} = k$, onde k é uma constante real positiva, chamada de* constante de proporcionalidade.

Definição 3.6 *Dizemos que duas variáveis ou grandezas x e y são inversamente proporcionais se $y = \frac{k}{x}$ ou $yx = k$, onde k é uma constante real positiva, chamada de* constante de proporcionalidade.

Quando y é proporcional a x ($y = kx$, para algum k real), podemos dizer que x é proporcional a y, bastando tomar $c = \frac{1}{k}$ e obtendo $x = cy$. Analogamente, se y é inversamente proporcional a x, x é inversamente proporcional a y.

A definição a seguir engloba as duas definições dadas sobre proporcionalidade.

Definição 3.7 *Se as variáveis x, y, z, w, r e s estão relacionadas por uma equação do tipo*

$$w = k\frac{xyz}{rs},$$

onde k é uma constante real, então dizemos que w é diretamente proporcional a x, y e z; e inversamente proporcional a r e s.

Quando dizemos que w é diretamente proporcional a x, estamos considerando as demais variáveis constantes e, nesse caso, temos $w = cx$. Analogamente, quando dizemos que w é inversamente proporcional a r, estamos considerando as demais variáveis constante, de sorte que podemos escrever, $w = \frac{d}{r}$, onde d é uma constante.

Por exemplo, a conhecida lei de Boyle e Mariote da Física, $PV = kT$, também chamada lei dos gases perfeitos, onde k é uma constante real, P a pressão, V o volume e T a temperatura de um gás. Reescrevendo a equação na forma $V = \frac{kT}{P}$, e considerando V constante, temos que V é diretamente proporcional a T. Se mantermos a temperatura constante, temos que V é inversamente proporcioanl a P.

3.7.1 Propriedade das Proporções

Teorema 3.21 *(*Propriedade fundamental das proporções.*)* Dados a, b, c e d, números reais não nulos,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad = bc.$$

Demonstração. Multiplicando as duas frações pelo numero positivo bd, obtemos a igualdade

$$\frac{a}{b}(bd) = \frac{c}{d}(bd).$$

Usando as propriedades associativas e distributivas da multiplicação de números reais, temos a igualdade equivalente

$$\left(\frac{a}{b}b\right)d = \left(\frac{c}{d}d\right)b,$$

que, por sua vez é equivalente a

$$ad = bc.$$

$\square$

A propriedade fundamental das proporções, é muitas vezes enunciada como "*O produto dos meios é igual ao produto dos extremos*", conforme ressalta Ávila [2], não é uma propriedade exclusiva das proporções, mais uma propriedade da igualdade de frações e deve ser tratada no estudo das equações.

Teorema 3.22 *Dados a, b, c e d, números reais não nulos,*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d}$$

.

Demonstração. Sendo $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, temos $ad = cb$. Acrescentando ac em ambos os membros $ad + ac = bc + ac$, pela fatoração por fator comum, obtemos:

$$a(c+d) = c(a+b) \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{a+b}{c+d}$$

$\square$

3.7.2 Regra de Três

Regra de três é um método de resolução de problemas que envolve grandezas proporcionais, usando a propriedade fundamental das proporções, ou seja, igualdade de frações. Por exemplo, dados a, b e c queremos determinar o valor de x de forma que $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ ou $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$, o que, em ambos os casos, se reduz a uma equação do primeiro grau. Os exemplos a seguir ilustram essas situação.

Exemplo 1: Dois pedreiros trabalhando juntos conseguem construir um certo muro em 6 horas de trabalho. Se ao invés de dois, fossem três pedreiros, em quantas horas tal muro poderia ser construído?

Solução: Seja P o número de pedreiros e H o número de horas gastas para construir o muro,

$$\frac{P}{H} = \frac{2}{6} = \frac{3}{H}.$$

O número de pedreiros é inversamante proporcional ao número de horas trabalhadas.

Exemplo 2: Na fábrica Esperança, fabrica-se bolinhas de gude. Se 10 maquinas dessa empresa, funcionando 6 horas por dia, durante 60 dias produzem 90000 bolinhas de gude de mesmo tamanho, em quantos dias 12 dessas máquinas, funcionando 8 horas por dia, produzirão 192000 bolinhas?

A situação apresentada neste exemplo, envolve um número maior de grandezas. Muitos livros textos usam uma técnica de resolução, para esses tipos de problemas, chamada regra de três composta. Mas, esses problemas podem ser formulados em termos de duas variáveis x e y, ligadas por uma equação do tipo $x = ky$ ou $xy = k$, onde k é uma constante recaindo em problemas de regra de três simples. Veja a solução a seguir.

Solução: Sejam P o número de peças, M o número de máquinas; H o número de horas trabalhadas por dia e D o número de dias envolvidos. O número de peças P é proporcional ao número de máquinas envolvidas, ao número de dias e ao número de horas trabalhadas, ou seja, $P = kMHD$, onde k é a constante de proporcionalidade. Logo,

$$k = \frac{90000}{(10)(6)(60)} \quad \text{e} \quad k = \frac{192000}{(12)(8)D}$$

. Como a constante k é comum as duas equações, igualando-as, obtemos

$$\frac{90000}{(10)(6)(60)} = \frac{192000}{(12)(8)D},$$

que é uma equação do primero grau com uma incógnita. Resolvendo a equação, obtemos $D = 80$ dias.

Capítulo 4

O Projeto

4.1 Introdução

Apresentamos a seguir o detalhamento do projeto interdisciplinar proposto, com uma breve descrição de suas etapas, incluindo os objetivos de cada uma, assim como a metodologia usada para atingi-los. Sendo bem seguidas, os alunos estarão realizando uma revisão, de assuntos do Ensino Fundamental, relacionados a Língua Portuguesa e a Matemática, que são necessários ao Ensino Médio, consolidando ou aperfeiçoando as habilidades desenvolvidas neste nível de ensino.

É com essa intenção que propomos o referido projeto, e na esperança de que as ações desenvolvidas produzam bons resultados, enriquecendo a experiência docente e trazendo importantes contribuições para o processo de ensino-aprendizagem, verificamos a possibilidade de melhorar a atuação em sala de aula trabalhando as ligações que existem entre as diferentes áreas do conhecimento.

4.1.1 A Ideia

Foi através da observação, ao longo dos anos, do desempenho dos alunos nas escolas do Ensino Médio, que verificamos que o maior número de reprovação ocorre na primeira série. Por esta razão procuramos caminhos para amenizar esse problema. Assim, feito o diagnóstico inicial dessas turmas, encontramos uma carência no entendimento e até conhecimentos de alguns conteúdos do Ensino Fundamental que são de grande relevência para o Ensino Médio.

Surgiu a ideia de elaborar uma proposta de entrelace do cálculo, da leitura e da escrita, estimulando o aluno a criar e a decidir. Pensamos então em criar atividades que sigam uma arvore binária balanceada[1] (Figura 4.1), a qual chamaremos de *árvore de possibilidades*, co-

[1] Uma arvore binária é uma estrutura formada por nós e conexões. As conexões ligam os nós gerando caminhos. A arvore é binária se saem de cada nó no máximo duas conexões. Toda árvore inicia com um nó chamado de raiz, seguindo as conexões atinge os nós chamados de folhas, que são os nós sem conexões.

nhecida em Probabilidade como *diagrama de árvore*, onde os alunos de uma mesma classe podem realizar tarefas distintas, chegando até as folhas (A15, ..., A30) por caminhos distintos. Transferindo o pensamento para a área da escrita, procuramos localizar em cada nó dessa

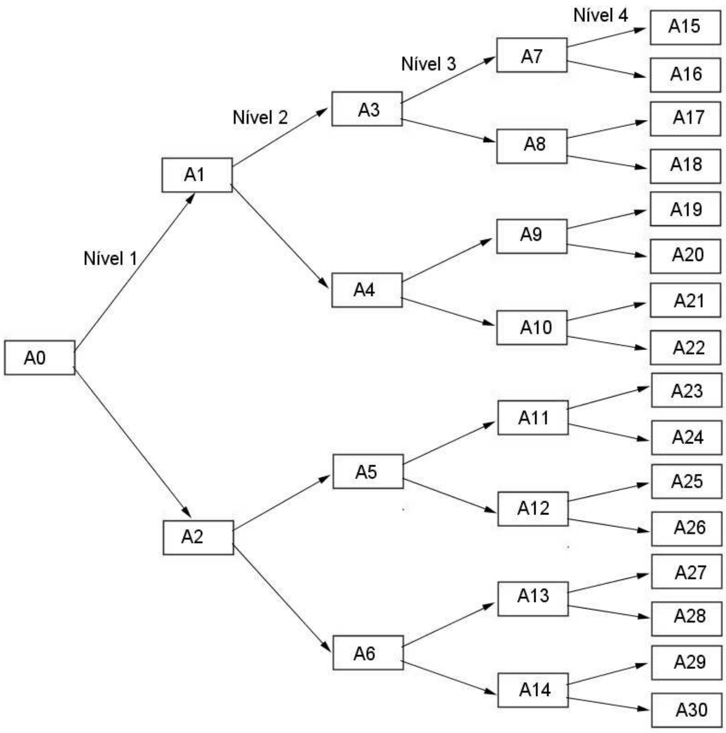


Figura 4.1: A árvore das possibilidades

árvore um capítulo de uma história, o qual deve trazer no seu término uma ação de desequilíbrio que necessita de uma decisão que fica a critério do leitor. Então, a partir daí obtemos um novo capítulo com a mesma estrutura e situação final - saídas a decidir. Nesse sentido, partimos do seguinte pressuposto: fazendo isso com todos os capítulos estamos construindo uma árvore de possibilidades e possibilitando a interação na construção de um livro em que o leitor efetue a sua viagem de acordo com suas decisões, além de aguçar a curiosidade para uma nova leitura com novas decisões e um outro final.

Voltando ao ponto em que se finaliza um capítulo desequilibrando a situação, coloca-se como portas a escolher, tarefas matemáticas (problemas e/ou exercícios), envolvendo os conteúdos elencados para o projeto, onde o leitor, se quiser continuar a leitura, deve solucioná-los e, as respostas encontradas indicarão o caminho a ser seguido na leitura, ou seja, o próximo capítulo, ou o próximo nó da árvore.

Esse projeto pode ser implementado de forma contínua, envolvendo várias turmas de um mesmo período, ou mesmo turmas de diferentes períodos. Por exemplo: 1. **A construção do livro.** Os alunos devem participar, tanto da criação do livro (redação dos capítulos) como

Quando todos os nós, a menos das folhas, possuem o mesmo número de conexões, diz-se que a árvore é balanceada.

da resolução das questões matemáticas, apresentadas pelo professor. E todos os alunos, envolvidos na criação do livro, podem participar da resolução dessas questões. A criação da história pode ser deixada totalmente livre para os alunos, ou o professor apresentar o primeiro capítulo da história (primeiro nó da árvore). O primeiro capítulo deve contemplar todos os elementos de uma narrativa, destacando personagens, ambientes e conteúdo coerente; 2. **Leitura e Releitura.** Tendo o livro pronto, este pode ser apresentado entre os alunos, para estes lerem e decidirem a sequência das leituras, resolvendo as questões matemática apresentadas, para seguir as conexões de forma correta e chegar até as folhas. Estimulando a releitura, seguindo caminhos diferentes para obter um novo desfecho na história, de forma que todas as folhas da árvore de possibilidades sejam alcançadas, o aluno fará uma revisão ampla dos conteúdos matemáticos, além de aprimorar sua habilidade em leitura e, consequentemente, na escrita.

4.1.2 Etapas para a Implementação do Projeto - Criação do Livro

Sugerimos 4 etapas:

Etapa **1** - Diagonóstico inicial da turma. Aplicação de atividades que revelem a situação do conhecimento dos conteúdos de Matemática básica já adquiridos pelos alunos, e atividades que mostrem os seus níveis de escrita e de leitura. O professor de Matemática e de Língua Portuguesa organizarão essa avaliação inicial, bem como sua aplicação e identificação do grau de dificuldade ou de habilidade da turma, distribuindo para si esses dados de forma que o possibilite desenvolvimento correto da próxima etapa. Geralmente os conteúdos matemáticos observados são: operações com números inteiros e racionais, equações lineares e quadráticas produtos notáveis, fatoração de polinômios, propriedades das potências, regra de três simples, notação científica e noções de função.

Etapa **2** - Feito o diagnóstico, inicia-se a nova etapa apresentando o projeto à turma com sua devida justificativa, para que seja aceito e entendido como uma atividade que traz como propósito revisar saberes anteriores para melhorar a aprendizagem dos novos conteúdos da grade curricular do Ensino Médio. Os conteúdos de Matemática a serem revistos devem ser divididos em 4 (ou mais) blocos (olhando para a árvore das possibilidades) e preferencialmente, em ordem crescente de dificuldades. Para isso, iniciamos uma atividade na forma de roteiro para a construção de uma árvore de possibilidades, e esse roteiro deve conter perguntas semelhantes às apresentadas a seguir: 1) Considere que você está lendo um livro e no final de cada capítulo o autor lhe dá o direito de escolha entre duas direções para a continuidade da história, caminhos que indicarão rumos diferentes. Feita a escolha, no novo capítulo, como também no capítulo não escolhido, acontecem situações semelhantes a anterior para o desenrolar da história. Se isso acontecer quatro vezes até chegar a conclusão da história, quantos finais teria esse livro? 2) Construa uma árvore de possibilidades para visualização de todos os capítulos e caminhos a serem seguidos. 3) Observando a árvore, quantos capítulos o livro deve ter? 4) De acordo com a árvore, verificamos 4 momentos de escolhas. Escreva a quantidade de capítulos para cada fase em uma sequência numérica. 5) E se ao invés de duas escolhas fosse três, como seria o comportamento da nova sequência? Assim, de acordo com o número de alunos da turma, alocam-se cada um nos capítulos apontando para a necessidade deles serem os seus autores, e sintam-se motivados a leitura e a escrita pela curiosidade de ver o produto final.

Etapa **3** - Desenvolvimento do projeto: Esta etapa deve ser subdividida em mais duas etapas, as quais serão trabalhadas paralelamente: (i) Elaboração das histórias pelos alunos e a localização dos alunos na árvore para dar continuidade a elaboração da história. O professor de Língua Portuguesa terá uma atuação relevante na primeira parte desta etapa. Ele acompanhará cada aluno escritor orientando na distribuição das leituras, elaboração e correções devidas. (ii) Resolução dos problemas matemáticos e elaboração das chaves para as conexões. O professor de matemática elabora problemas que contemplem os conteúdos que precisam ser revisados. Essas questões devem ser trabalhadas com toda a classe e depois de entendidas e resolvidas, promover uma discussão para estabelecer a forma como a solução das questões pode indicar o novo caminho, o próximo nó da arvore ou página do futuro livro.

Etapa **4** - Confecção do um livro, no formato de hipertexto [2], formado por todos os capítulos escritos pela turma e os problemas matemáticos, sugestionados pelos professores, com as chaves para indicar o caminho da leitura coerente, na mudança de cada capítulo. É também o momento da socialização e avaliação do trabalho.

4.1.3 Conteúdos Abordados em Cada Conexão

Considerando que a árvore das possibilidades possui 4 níveis, com duas conexões em cada nó de cada nível, os conteúdos podem ser blocados da seguinte forma:

Nivel **1** - Números inteiros (duas questões).

Nivel **2** - Operações com números racionais (quatro questões).

Nivel **3** - Polinômio, produtos notáveis e equação linear (oito questões).

[2]Hipertexto é o termo que remete a um texto, ao qual se agregam outros conjuntos de informação na forma de blocos de textos, palavras, imagens ou sons, cujo acesso se dá através de referências específicas, que, no meio digital são denominadas hiperlinks, ou simplesmente links. Esses links ocorrem na forma de termos destacados no corpo de texto principal, ícones gráficos ou imagens e têm a função de interconectar os diversos conjuntos de informação, oferecendo acesso sob demanda as informações que estendem ou complementam o texto principal [29]

Nivel **4** - Operações com polinômios, equação quadrática. grau, noções de função, proporcionalidade e regra de três simples (dezesseis questões).

As atividades sugeridas (questões matemáticas) encontram-se no Capítulo 5.

4.2 Relato de Uma Experiência

Esse projeto foi aplicado parcialmente em uma escola pública do município de Parelhas/RN, na 1ª série do Ensino Médio.

No primeiro contato com a turma, através de uma atividade de revisão de conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental, exploramos o conhecimento prévio do aluno, listando, após a correção, aqueles menos compreendidos ou não vistos. No segundo contato expomos também a ideia central do trabalho que era a confecção de um livro, no formato de hipertexto, de própria autoria dos alunos, porém num sistema de cooperação de leitura e escrita. Esta ação proporcionou novos olhares que refletiram interesse e curiosidade por algo extremamente novo naquele momento. Com a ideia aceita, em um outro dia, reunimos os professores das disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática e construimos a árvore de possibilidades distribuindo os alunos pelo nível apresentado por eles de leitura e escrita: os que demonstravam falta de interesse e menos habilidades foram colocados para a extremidade final da árvore para que, através do estímulo causado pelo novo projeto, eles fossem movidos a ler todos os capítulos antecedentes ao seu e resolvendo uma quantidade maior de atividades matemáticas.

Depois apresentamos a árvore de possibilidades à turma, sendo possível envolver todos eles. Cada participante tomou nota dos procedimentos e do lugar onde iria continuar a história. Nesse mesmo dia repassamos a história inicial bem elaborada, narrando a vida de um personagem que no final do capítulo se deparasse com uma situação de desequilíbrio onde se tinham apenas duas saídas e tinha-se que escolher uma delas. Para esta ação dois alunos foram escolhidos para lerem esta parte inicial e darem continuidade à história respeitando a regra: deixar o final do novo esboço com uma problemática a ser resolvida. Os novos capítulos foram corrigidos e orientados pelo professor de Língua portuguesa. Escolhemos as questões de matemática para colocar nesse livro no final de cada capítulo, e essas situações problemas quando resolvidas indicavam a página que dava a continuidade do capítulo lido. Repassamos essas atividades para os alunos as quais serviram de revisão dos conteúdos básicos durante todo o primeiro bimestre. O Apêndice A traz um exemplo elaborado pelos alunos, apresentando uma sequência de 3 capítulos.

Capítulo 5

Atividades Propostas

5.1 Introdução

A capacidade de resolver problemas é um dos objetivos gerais a serem alcançados pelos alunos ao final da Educação Básica. Segundo Pozo [25], a solução de problemas estaria mais relacionada à aquisição de procedimentos eficazes para a aprendizagem, sendo um procedimento definido como “um conjunto de ações organizadas para a consecução de uma meta”. Sem procedimentos eficazes - sejam habilidades ou estratégias - o aluno não poderá resolver problemas.

Assim, este capítulo traz uma proposta de atividades objetivadas com conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental subsidiando essa nova etapa - o ensino médio. Algumas questões foram extraídas e/ou adaptadas de textos do Ensino Fundamental.

5.2 Atividade 1 - Números Inteiros

Objetivos

- Expressar saldos e déficits usando números com sinais;
- Comparar dois números inteiros;
- Adicionar e subtrair dois números inteiros;
- Resolver expressões numéricas envolvendo operações com números inteiros;
- Calcular o valor numérico com variáveis;
- Interpretar corretamente problemas com números inteiros.

Questão 1. (Extraída de Dia de Educação [28]) No campeonato de futebol de 2006, o time Bola Boa foi campeão invicto marcando 32 gols a favor e sofrendo 6 gols, o que resultou num saldo positivo de 26 gols (+26). Complete a tabela com o saldo de gols obtido pelos outros times que participaram desse campeonato:

Time	Gols marcados	Gols sofridos	Saldo de gols
Boa Bola	32	6	
Boa Um	28	16	
Jogo Bom	25	15	
Ótimos	26	20	
Novidade	14	21	
Craques	22	19	
Jogando Bem	20	22	
Jogão	18	18	
Joque Aqui	15	24	
Venha Jogar	10	19	
Bate Bola	14	20	
Embaixadinha	5	18	
Bolão	11	22	

a) O que aconteceu para que alguns times tivessem saldo negativo de gols?

b) Qual o time que obteve:

   i) O maior saldo de gols?

   ii O menor saldo de gols?

c) Qual foi a diferença entre o saldo de gols de:

   i) Jogão e Novidade?

   ii) Bolão e Embaixadinha?

   iii) Bola Um e Ótimos?

Questão 2. (Adaptada de Oscar Guelli [14]) Em uma determinada mercearia, cada produto é marcado com uma letra, tendo a mesma letra os produtos com preços iguais. Os preços dos produtos são controlados da seguinte forma: no início de cada mês são estabelecidos os preços por unidade de cada produto na 1ª semana. Nas outras semanas do mês são anotadas as variações dos preços sempre em relação à semana anterior, com o sinal $+$ preço aumenta, e com o sinal $-$ se diminui.

A tabela a seguir, ilustra a variação de preço por semana da mercadoria denominada de a, b, n, x, y e t.

	a	b	n	x	y	t
2ª semana	$+2$	$+1$	-3	-5	$+4$	-1
3ª semana	$+3$	-4	-3	$+3$	$+1$	-3
4ª semana	-2	$+1$	-3	-2	-2	-4
5ª semana	-1	$+1$	-3	-1	-2	$+7$

Complete:

a) Uma pessoa comprou na 2ª semana a seguinte quantidade de produtos: $5a+4b+7x$. Quanto ela gastou a mais (ou a menos) do que se tivesse feito essa mesma compra na 1ª semana?

b) Dona Lúcia comprou na 3ª semana a seguinte quantidade de produtos: $9a+5n+6x+t$. Quanto ela gastou a mais (ou a menos) do que se tivesse feito essa mesma compra na 2ª semana?

c) Se o preço do produto **a** foi de $R\$10,00$ na 1ª semana, qual foi o seu preço na 4ª semana? E na 5ª semana?

Na 1ª questão, ao preencher a tabela e responder o ítem a verificamos que o aluno sabe expressar saldos e deficits com números inteiros positivos e negativos; no ítem b ele revela que sabe compara-los; e no ítem c subtrai-los. Ao responder os ítens a e b da 2ª questão ele mostra que sabe resolver expressões numéricas envolvendo números inteiros bem como calcular o valor numérico com incógnitas e no ítem c vemos que ele aquiriu a habilidade de somar e subtrair com esses números.

5.3 Atividade 2: Números Racionais

Objetivos

- Efetuar a divisão de números decimais, podendo também mostrar que a divisão entre números decimais pode ser feita dividindo um número natural por outro, dando o resultado na forma de número decimal;
- Verificar a divisão de um número decimal por 10, por 100 e por 1000 de uma forma prática;
- Interpretar e resolver corretamente problemas que envolvam divisão;
- Comparar números fracionários por meio da análise das frações que os representam;
- Encontrar o valor numérico de uma expressão com frações.

Questão 1. Divida o número 5120 por 16. Agora divida 512 por $1,6$. Confira os dois resultados obtidos. Eles são iguais ou diferentes? Por quê? Agora efetue as divisões: 128 dividido por 10, depois por 100 e por último por mil. Compare os resultados obtidos. O que você pode verificar nas respostas? Agora, efetue as divisões abaixo até obter resto zero:

a) $0,36 : 0,2$

b) $1,5 : 0,003$

Questão 2. Um prédio tem 37 metros de altura. A sua maquete tem altura 100 vezes menor que a altura real. Calcule a altura da maquete desse prédio.

Questão 3. (Adaptada de Bongiovanni [3]) O Congresso Nacional de um certo país tem deputados pertencentes a 5 partidos, assim distribuídos:

Partido	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Participação	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{15}$

Pelas leis desse país, o governo necessita do apoio de pelo menos metade do Congresso para aprovar seus projetos e a oposição precisa dos votos de $\frac{2}{3}$ do Congresso para derrubar os projetos do governo. Supondo que nas votações os parlamentares de cada partido votam em bloco, ou seja, com a totalidade de suas bancadas, responda:

a) Qual partido tem a maior participação no Congresso Nacional? E a menor participação?

b) Os votos dos partidos **A** e **B** são suficientes para aprovar qualquer matéria apresentada pelo governo?

c) Os votos dos partidos **A**, **B** e **D** são suficientes para vetar uma iniciativa do governo?

Questão 4. Determine o valor das expressões abaixo:

a) $$\frac{\left[2\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2^3\right]}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}$$

b) $$\frac{\left[-1+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+1\right)^2\right]}{\left(-\frac{3}{4}\right)}$$

Esta atividade trabalha a percepção do resultado da divisão por 10, 100, 1000 e os demais múltiplos de 10, aprendendo a regra prática. Na questão 1 verificamos se o aluno sabe trabalhar a divisão observando sua regularidade nesta situação com números decimais e a questão 2 explora o conhecimento da aplicação da divisão nos problemas. Já a habilidade de comparar e adicionar frações é verificado na questão 3, e, sendo notado na questão 4 os saberes referentes a operações com números fracionários.

5.4 Atividade 3 - Polinômios, Produtos Notáveis e Equação Linear

Objetivos

- Reconhecer o grau de um polinômio e calcular o seu valor numérico resgatando os conhecimentos das operações com números inteiros;
- Resolver corretamente operações com polinômios;
- Indentificar as equações pelo grau (primeiro e segundo) interpreta-las e resolvê-las;
- Interpretar corretamente um problema matemático e usar os conhecimentos de equações polinomiais para solucioná-los;
- Identificar através de construções e verificação de regularidade os produtos notáveis e usar essas identidades para resolução de exercícios;
- Traduzir uma sequência expressa em linguagem corrente em uma sentença matemática.

Questão 1. Dado o polinômio $P(x) = 5x^2 - 18x - 8$, determine:

a) o seu grau.

b) o seu valor numérico quando

i) $x = 0$.

ii) $x = -1,2$.

Questão 2. Complete as tabelas de 5 linhas com as colunas abaixo atribuindo valores quaisquer para a e b e complete as demais colunas com seus respectivos valores numéricos.

a	b	$a+b$	$(a+b)^2$	a^2	$2ab$	b^2	$a^2+2ab+b^2$

a	b	$a-b$	$(a-b)^2$	a^2	$2ab$	b^2	$a^2-2ab+b^2$

a) Compare os resultados obtidos na 3ª e na 7ª colunas. O que você percebeu?

b) Verifique se é verdadeiro dizer que $(a+b)^2 = a^2+b^2$ e $(a-b)^2 = a^2-b^2$.

Questão 3. Considere as expressões abaixo e desenvolva-as pela multiplicação de polinômios. Em seguida tire conclusões com o polinômio relacionado na sua forma reduzida.

a) $(x+y)^2$

b) $(x-y)^2$

c) $(x+y)(x-y)$

Questão 4. (Adaptada de Giovanni Jr [13]) Considere o seguinte polinômio $(x+1)^2+(x-1)^2-2(x^2-1)$.

a) Escreva-o em uma forma mais simples (forma reduzida).

b) Qual é o dobro de sua forma reduzida?

Questão 5. Resolva as seguintes equações lineares com uma incógnita real:

a) $3x-9=0$

b) $21x+1=11x+6$

c) $4(x-2)=4+2(x-1)$

d) $\dfrac{3y}{8}-\dfrac{5}{6}=\dfrac{y}{3}-\dfrac{5}{2}$

Questão 6. Foi feita uma pesquisa sobre a preferência na leitura de três revistas. Veja o resultado dessa pesquisa:

- A terça parte dos entrevistados liam a revista A;
- $\frac{2}{5}$ dos entrevistados liam a revista B;
- 832 pessoas liam a revista C.

Sabendo que cada pessoa lia apenas uma das revistas, calcule quantas pessoas foram entrevistadas.

Questão 7. Guilherme e Tiago compraram 200 figurinhas. Dessas, 36 foram rasgadas e não puderam ser aproveitadas. Das figurinhas restantes, Guilherme ficou com 20 a mais que Tiago. Com quantas figurinhas cada um ficou?

Questão 8. Pense em um número. Multiplique por 4 e depois adicione o resultado a 12. Agora divida pelo número pensado adicionado a 3. Ao resultado encontrado adicione 6. Agora, escreva o problema generalizando o resultado pensado e tente simplificar a expressão formada. O que você percebeu?

Reconhecer um polinômio, o seu grau, o valor numérico e sua raiz são conhecimentos indispensáveis para entender e resolver problemas com polinômios. Isso o aluno verifica quando resolve os exercícios acima. A notoriedade de algumas operações com polinômios denominadas produtos notáveis são verificadas através de construção e verificação de regularidade quando o aluno resolve as questões 2 e 3, bem como o uso dessas identidades para facilitar o cálculo no exercício 4. Algo também indispensável para o aluno de Ensino Médio é escrever uma sentença matemática ou uma expressão matemática ao interpretar um problema ou exercício escrito na linguagem corrente que exige uma linguagem matemática para a facilitação da sua resolução. Essa habilidade é verificada ao resolver as questões 6, 7 e 8.

5.5 Atividade 4 - Proporcionalidade e Noções de Função

Objetivos

- Compreender o conceito de proporcionalidade;
- Calcular proporções em situações-problema simples;
- Aplicar a regra de três simples em situações-ploblema de grandezas direta e inversamente proporcionais, identificando essas grandezas;
- Utilizar e reconhecer a linguagem algébrica necessária para expressar relações entre variáveis dependentes;
- Compreender o conceito de função para associar a exemplos do cotidiano e modelar situações-problema, dentro e fora da Matemática;
- Construir gráficos de funções.

Questão 1. (Extraído de Bongiovanni [3]) Em toda proporção "o produto dos extremos é sempre igual ao produto dos meios". Essa é a propriedade fundamental das proporções. Assim: Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $ad = bc$.
Usando a propriedade verifique se as sentenças abaixo são verdadeiras:

a) $\frac{2}{9} = \frac{24}{36}$

b) $\frac{3}{7} = \frac{12}{28}$

c) $\frac{4}{5} = \frac{16}{25}$

d) $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$

Questão 2. (Extraído de Bongiovanni [3]) As letras abaixo representam números inteiros. Quais são eles?

a) $\frac{a}{2} = \frac{15}{10}$

b) $\frac{4}{b} = \frac{40}{50}$

c) $\frac{4}{5} = \frac{c}{25}$

d) $\frac{6}{9} = \frac{8}{d}$

Questão 3. (Extraído de Bongiovanni [3]) Verifique se as sequências abaixo são diretamente proporcionais. Em caso afirmativo, ache a constante de proporcionalidade calculando $\frac{S_1}{S_2}$.

a)

Sequência S_1	2	4	6	8	10
Sequência S_2	3	6	9	12	15

b)

Sequência S_1	10	20	30	40	50
Sequência S_2	5	10	15	20	25

c)

Sequência S_1	6	7	8	4
Sequência S_2	3	4	6	8

Questão 4. (Extraído de Bongiovanni [3]) Verifique se as sequências abaixo são inversamente proporcionais. Em caso afirmativo, ache a constante de proporcionalidade inversa calculando $S_1 \cdot S_2$.

a)

Sequência S_1	5	20	40	2
Sequência S_2	8	2	1	20

b)

Sequência S_1	12	30	60	20
Sequência S_2	5	2	1	3

c)

Sequência S_1	10	20	30	60
Sequência S_2	90	80	70	40

Questão 5. (Extraído de Bongiovanni [3]) Um carro consome, na estrada, $1l$ de álcool para percorrer 8 km. Quantos litros são necessários para este carro percorrer 100 km? E quanto poderá percorrer com 45 l de álcool?

Questão 6. (Adaptado de Bongiovanni [3]) Débora, a secretária da Escola IEP, preenche 10 fichas de alunos em 30 minutos.

a) Em quanto tempo ela poderá preencher 50 fichas?

b) Se o 7^o ano A tem 45 alunos, quanto tempo Débora demorará para preenche as fichas dos alunos dessa classe?

c) Quantas fichas ela conseguirá fazer em 2 horas de trabalho ininterrupto?

Questão 7. (Adaptado de Bongiovanni [3]) O Sr Mário é proprietário de uma fazenda no interior do RN, onde se dedica ao cultivo da terra e a criação bovina. A quantidade de ração diária colocada para cada boi é a mesma todos os dias. Hoje o fazendeiro comprou ração para os seus 40 bois para os próximos 30 dias. Se ao invés de 40 bois ele possuisse 50 bois, quantos dias a ração duraria?

Questão 8. A gráfica *Ramalho* possui máquinas que confeccionam adesivos de vários tamanhos. Cinco máquinas destas iguais produziram juntas uma encomenda de 1.200 cartelas de adesivos em 4 horas. Essa gráfica recebeu uma encomenda de 1.300 cartelas desse adesivo, porém, 3 dessas máquinas não poderão ser utilizadas por estarem em manutenção. Portanto, quanto tempo a mais que as anteriores será necessário para produzir essa nova encomenda?

Questão 9. (Adaptado de Giovanni [13]) Márcia ligou seu computador à rede internacional de computadores, Internet. Para fazer uso dessa rede, ela paga uma mensalidade fixa de $R\$30,00$, mais 15 centavos de real ($R\$0,15$) por cada minuto de uso. O valor a ser pago por Márcia ao final do mês depende, então, do tempo que ela gasta acessando a Internet.
Complete a tabela que relaciona o valor a ser pago com o tempo de acesso à rede:

Tempo de acesso t (em minutos)	Valor a ser pago v (em $R\$$)
1	
2	
3	
4	
...	...
10	
...	...
t	

a) Qual a varíavel dependente e a variável independente nessa correspondência?

b) A correspondência entre t e v é uma função? Justifique. Em caso afirmativo, qual o seu domínio? E o contradomínio?

c) Escreva a fórmula matemática que estabelece a correspondência entre o valor a ser pago v com o tempo de acesso t.

d) Quanto gastará Márcia se, durante o mês, utilizar a Internet por $10h20min$?

e) Quantas horas ela poderá utilizar a Internet, se quiser gastar, no máximo, $R\$90,00$ no mês?

Questão 10. (Adaptado de Joamir [26]) Júlio trabalha como vendedor em uma loja e seu salário mensal é calculado da seguinte maneira: Uma quantia fixa de $R\$500,00$ mais 4% do valor das vendas que ele efetuar no mês.

a) Se um determinado mês júlio vender o equivalente a $R\$10.000,00$ em produtos, qual será o valor de seu salário?

b) Em certo mês, Julio recebeu $R\$868,00$ de salário. Quantos reais ele vendeu nesse mês?

c) Quais são as variáveis envolvidas?

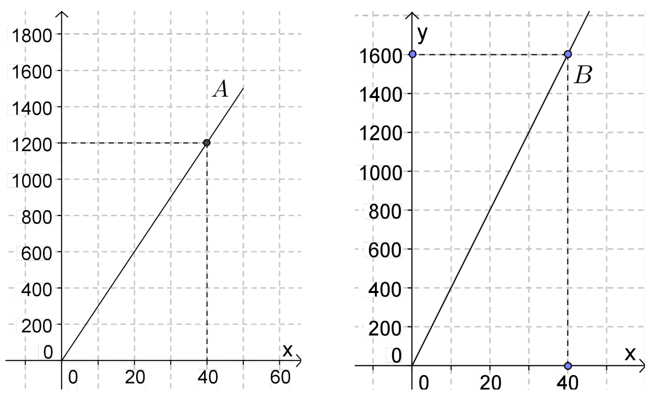
d) A correspondência entre as variáveis define uma função?

Questão 11. Miguel vai enviar pelo correio uma encomenda para sua mãe, que mora no interior do estado de São Paulo. Sabendo que o preço P, em reais, para se enviar uma encomenda pelo correio é dado pela fórmula matemática $P(M) = 10 + 0,3(M - 1)$, em que M representa o peso da encomenda, em quilogramas, responda:

a) A expressão $P(M)$ representa um polinômio? Em caso afirmativo, qual o seu grau?

b) Qual é o valor, em reais, que Miguel vai pagar pelo envio da encomenda que pesa 8 quilogramas?

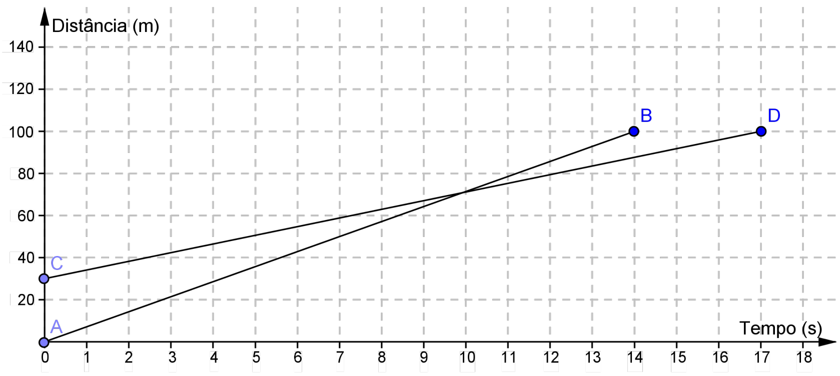
Questão 12. (Adaptado de Joamir [26]) Os gráficos abaixo representam as funções que relacionam o número de torcedores presentes a um jogo de basquete e a arrecadação em reais obtida com a venda dos ingressos. O gráfico A representa a arrecadação obtida com a venda dos ingressos nas cadeiras, e o gráfico B, a arrecadação obtida com a venda dos ingressos dos camarotes.



a) Encontre o coeficiente linear de cada gráfico comparando seus valores.

b) É possível escrever uma expressão matemática que represente essas funções?

Questão 13. (Adaptado de Dante [9]) Um rapaz desafia seu pai para uma corrida de $100m$. O pai permite que o filho comece a corrida $30m$ à sua frente. Um gráfico relacionando a distância percorrida d e o tempo t gasto na corrida é dado a seguir:



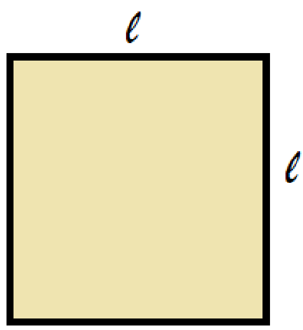
a) Observando o gráfico, é possível dizer quem ganhou a corrida e qual foi a diferença de tempo entre os competidores?

b) A que distância da corrida o pai alcançou o filho?

c) Em que momento depois do início da corrida ocorreu a ultrapassagem?

d) É possível escrever uma expressão matemática que represente cada trajetória?

Questão 14. (Adaptado de Dante [9]) Variando a medida l do lado de um quadrado, a área da região quadrada também varia. Assim, faça o que se pede:

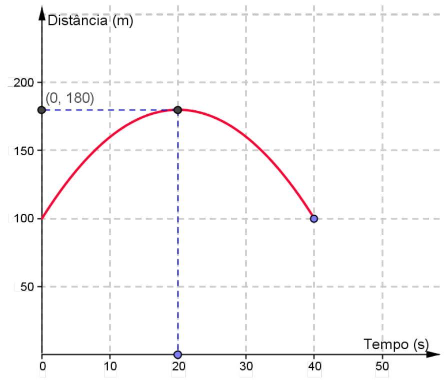


a) A correspondência entre o lado de um quadrado e a área limitada por ele define uma função?

b) Escreva uma expressão matemática que represente a correspondência entre a área e o lado do quadrado representando-a por $f(l)$.

c) calcule l tal que $f(l) = 256$

Questão 15. (Adaptado de Dante [9]) Uma empresa calcula o custo C, em reais, para produzir n unidades de determinado produto a partir da função $C(n) = -\frac{1}{5}n^2 + 8n + 100$, com $0 \leq n \leq 40$.



a) Qual será o custo para produzir:

- 5 unidades? E 35 unidades?
- 10 unidades? E 30 unidades?
- 15 unidades? E 25 unidades?

b) Quais regularidades podem ser observadas nos resultados obtidos no item **a**?

c) Nessa empresa, é possível que o custo seja igual a $R\$200,00$? Por quê?

Questão 16. (Adaptado de Dante [9]) Determine, caso existam, os zeros de cada função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ representadas pelas fórmulas matemáticas abaixo:

a) $f(x) = x^2 - 7x + 10$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

c) $f(x) = -2x^2 + 3x - 5$

d) Em quantos pontos o gráfico de cada uma dessas funções corta o eixo x? E o eixo y?

Ao resolver as questões 1, 2, 3 e 4, o aluno consegue compreender o conceito de proporção e de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. As questões de 5, 6, 7 e 8 ajudam-no a resolver situações-problema simples de regra de três. O conceito de função e o reconhecimento da linguagem algébrica para expressar relações entre variáveis dependentes, são entendidos ao resolver as questões 9, 10, 11 e 14, associando a modelos do cotidiano. As questões 12, 13, 15 e 16 favorecem ao aluno o entendimento de gráfico de função associando as suas respectivas expressões matemáticas, o cálculo dos zeros da função com sua representação gráfica.

Capítulo 6

Considerações Finais

Após a apresentação dessa proposta, anseiamos que a partilha de conhecimentos e o entrosamento na turma possam ser pontos principais para o andamento e execução deste trabalho. Em um tempo em que o ambiente extraescolar é mais atrativo e aparentemente mais especial para a juventude contemporânea, redescobrir o prazer na leitura dentro dos limites da escola, é o clímax de todo o projeto. E a ideia presente de rever conteúdos de uma maneira significativa e diferente para o bom andamento dos demais conteúdos do Ensino Médio, aponta para um despertar do interesse de gostar da matemática entendendo melhor os assuntos desta fase de ensino. A proposta de fazer a junção das disciplinas de Matemática e Língua Portuguesa para resgatar o prazer da leitura geram expectativas que tendem a motivar todos os envolvidos no processo, e levar ao alcance dos objetivos previstos pelo projeto. Mas convém registrar que mesmo acreditando na ideia apresentada, num ambiente onde se tem pessoas de realidades sociais diferentes, ainda existem aquelas de difícil acesso ao diálogo, pois se distanciam a ponto de não quererem participar de ações mobilizadoras. É uma das dificuldades encontradas ao longo da experiência em sala de aula. Contudo, precisamos ressaltar, que por ser uma ideia nova e desafiadora, o desenrolar dessa proposta aponta para um enriquecimento dos trabalhos dos docentes envolvidos nestas ações e uma superação das expectativas, sugerindo a continuidade do projeto dentro das ações da escola previstas na proposta pedagógica. Como consequência deste trabalho sugerimos a criação de atividades com conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental que facilitem a solidificação desses conhecimentos em um ambiente computacional, aproveitando, assim, a motivação da maioria de alunos em trabalhos nesse ambiente informatizado.

Enfim, podemos verificar que, assim como a elaboração desse Trabalho de Conclusão de Curso trouxe essa mostra de ações e sugestões significativas, o produto final desenvolvido ao término das etapas do trabalho partilhará saberes revisitando conceitos e habilidades que contribuirão para o alcance dos objetivos e, consequentemente para a formação de grandes cidadãos.

Referências Bibliográficas

[1] AUSUBEL, David P. *Aquisição e retenção do conhecimento: Uma perspectiva cognitiva*. Tradução de Lígia Teopisto. Edição 1ª, Editora Plátano, janeiro de 2003.

[2] ÁVILA, Geraldo. Razões, proporções e regra de três. Revista do Professor de Matemática (RPM), n.º 8, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1986.

[3] BONGIOVANNI, Vicenzo et al. *Matemática e Vida*. 6ª série, 2ª edição. São Paulo: 1989.

[4] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. *PCN+ Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculars Nacionais*. Brasília: MEC/SEF. 2002. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em 15 de janeiro de 2013.

[5] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Fundamaental - Matemática* (MEC, 1997).

[6] BRASIL. *Programa de Matemática do Ensino Médio*. Disponível em <http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/ProgramaMatematica.pdf>. Acesso em 02 de fevereiro de 2015.

[7] CANAVARRO, Ana Paula. Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. Educação e Matemática. Disponível em:<http://p3m.ie.ul.pt/leituras>. Acesso em 09 de junho de 2013.

[8] CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa, 1951. Disponível em:<http://literamati.dominiotemporario.com/doc/Conceitos.pdf>. Acesso em 08 de junho de 2013.

[9] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática*. Volume único, 1ª edição. São Paulo: ática, 2005.

[10] FAZENDA, Ivani Catarina, Arantes. Interdisciplinaridade: definição, projetos, pesquisa. Práticas interdisciplinares na escola. 2ed. São Paulo, Cortez, 1993.

[11] FERREIRA, Sandra Lúcia. Introduzindo a noção de interdisciplinaridade. Práticas interdisciplinaridades na escola. 2 ed. São Paulo, Cortez, 1993.

[12] GAFANHOTO, A. P. e CANAVARRO, A. P. A adapatação das tarefas matemáticas: Como promover o uso de múltiplas representações nas funções. Seminário Práticas Profissionais dos Professores de Matemática. Instituto de Educação. Unversidade de Lisboa, fevereiro 2013. Dispinível em <http://p3m.ie.ul.pt/leituras>. Acesso em 15 de fevereiro de 2013.

[13] GIOVANNI Jr e CASTRUCCI, José Ruy, Benedicto. *A Conquista da Matemática* 1ª Edição. São Paulo: FTD 2010.

[14] GUELLI, Oscar. *Matemática em Construção*. 6ª série, 2ª edição. São Paulo: Ática, 1990.

[15] HEFEZ, A. *Elelemntos de Aritmética*. Rio de Janeiro: SBM - Textos Universitários, 2005.

[16] LIMA, Elon Lages. *Curso de análise*. 11^a edição, Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2004, v.1.

[17] LIMA, Elon Lages. *A matemática do ensino médio*. 9^a. edição, Rio de Janeiro: SBM, 2006, v.1.

[18] LIMA, Elon Lages. *Números e Funções Reais*, Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[19] MACHADO, Maria Gisela de Bom. Dificuldades encontradas pelos alunos de 5 a 8 séries do 1 grau no processo de aprendizagem matemática. 1992. Monografia (Especialização em Educação Matemática). Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma.

[20] MOREIRA, M.A. et al. (orgs.) Aprendizagem significativa: Um conceito subjacente. Atas do Encontro Internacional de Aprendizagem significativa. Burgos, Espanha. 1997. Revisado em 2012. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/ moreira/apsigsubport.pdf>. Acesso em 15 de março de 2014.

[21] MOREIRA, M. A. Aprendizagem significativa: da visão clássica a visão crítica. Atas do V encontro Internacional sobre aprendizagem significativa. Madri. Espanha, 2007. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/ moreira/visaoclasicavisaocritica.pdf>. Acesso em 15 de março de 2014.

[22] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Tópicos de Matemática elementar: números reais*. 2^a Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[23] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Tópicos de Matemática elementar: teoria dos números*. 2^a Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[24] ONUCHIC, Loudes de la Rosa. Uma História da Resolução de Problemas no Brasil e no Mundo. In: ISERP - Palestra de Encerramento. Unesp: Rio Claro, 2008. disponível em <http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos_completos/completo3.pdf>. Acesso em 17 de junho de 2013.

[25] POZO, Juan Ignacio. (Org.) *A Solução de Problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.* Porto alegre: Artmed, 1998.

[26] SOUZA, Joamir Roberto de. *Matemática - Coleção Novo Olhar*. 1ª edição. São Paulo: 2010.

Páginas Consultadas

[27] http://www.estadao.com.br/noticias/geral,no-brasil-23-dao-aulas-de-matematica-sem-diploma,148639. Acesso em 14 de novembro de 2014.

[28] http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2010/2010_utfpr_mat_pdp_adriana_do_rocio_pissaia_boarao.pdf. Acesso em 02 de dezembro de 2014.

[29] http://pt.wikipedia.org/wiki/Hipertexto. Acesso em 02 de dezembro de 2014.

Apêndice A

Um exemplo - E agora, Anita?

Capítulo inicial. E agora, Anita?

Anita era uma jovem de seus 14 anos de idade que morava na pacata cidade da Amizade. Era este o nome mesmo da cidade: Amizade. Não era apenas de nome, mas seus habitantes respeitavam um ao outro, ninguém queria o mal das outras pessoas, todos tinham tudo em comum: o carinho, o coleguismo, a hospitalidade, a alegria, e, a própria amizade. Era lindo demais o agir daquele povo. As pessoas também respeitavam o meio ambiente, não jogavam lixo nas ruas, não pichavam paredes, não incomodavam os vizinhos com som alto, não chamavam palavrões, enfim o lugar certo pra quem deseja sossego e paz.

Mas com a morte dos seus pais num terrível acidente quando saíam de Amizade para Turbulência, que era 30 km dali, Anita foi morar com sua avó Sinfrônia na cidade de Turbulência.

Que pena! Parece que alguns nomes de cidades combinam com as atitudes de seus moradores, pois é, lá a vida era turbulenta mesma e o lugar de mais barulho e sujeira era a escola que ela ia estudar.

No primeiro dia de aula houve uma enorme confusão por causa de alguns garotos que colocaram lixo nas palhetas do único ventilador da sala, e quando a professora Ellen entrou e o ligou tudo ficou coberto de lixo, até um chiclete caiu e grudou no cabelo de Anita, e todos gritavam dizendo quem foi; o problema era que todos diziam nomes diferentes e ninguém realmente dizia quem foi, mas ela sabia quem foi o autor. Um garoto por nome Nicolas, este é o nome do indivíduo, levantou-se e disse, quando a professora saiu pra chamar a diretora:

- Quem dedurar será linchado no término dos horários e durante este ano será marcado e não terá mais paz.

Que situação ela se encontrava. Passados dois minutos, chega Celina, a diretora, e Ellen, a professora.

- Vamos lá, quero saber quem foi o engraçadinho ou a engraçadinha a praticar este ato de vandalismo. Falou a diretora.

Todos de cabeça baixa ninguém ousava dizer nada, e o tempo passando, e Celina perdendo a paciência. Anita pensava cuidadosamente se revelava ou não.

- Se eu disser quem foi, serei linchada e marcada pra o resto do ano. Se eu ficar na minha, serei punida com os demais pela direção daquela escola, porém não serei linchada. E agora? Pensou Anita.

Se você acha que Anita deve contar para a diretora, resolva esse problema e descubra o capítulo que dará sequência a sua escolha.

PROBLEMA 1 Em uma competição automobilística, a distância é medida em milhas. Cada milha vale 1,6 quilômetro, aproximadamente. Calcule quantas milhas há em 512 quilômetros, em seguida vá para o capítulo cuja numeração corresponde ao algarismo da ordem das dezenas de sua resposta.

Se você acha que Anita não deve contar para a diretora, resolva o problema abaixo e descubra o número do capítulo de sua escolha.

PROBLEMA 2 Um prédio tem 37 metros de altura. A maquete desse prédio tem altura 100 vezes menor que a altura real. Calcule a altura da maquete desse prédio, em seguida vá para a história cuja numeração corresponde ao algarismo da ordem dos décimos de sua resposta.

Capítulo 2. Ela conta

Ela vai contar à diretora que o indivíduo foi Nicolas, e mostra um vídeo que fez no seu celular mostrando ele fazendo o vandalismo. Então a diretora chamou Nicolas e Anita, - ela feliz pensando que o problema ia acabar, para sua infelicidade, não! Ao entrar na diretoria, viu em cima da mesa de dona Celina um livro aberto: era o livro de Luis Fernando Veríssimo que estava na mesa de dona Celina, aberto na pagina 25 e o nome do livro era “Mais comédias para ler na escola”! Anita acabou lendo o que dizia, estava escrito o seguinte: Aviso importante! O uso excessivo do telefone celular frita o seu cérebro como uma fornalha. Não é verdade, mas espalha, espalha. (Da série "Poesia numa Hora Dessas"?!). Anita logo teve certeza que não ia sair dessa impune, ela estava certa, os dois ficaram de castigo. - Nicolas vai ficar com três semanas de suspensão e Anita uma, por trazer celular para a escola, venham pegar as suspensões. Disse Celina muito irritada. Eles foram pegar. Quando saíram para casa. Nicolas disse: Você vai vê Anita! As semanas do castigo de Nicolas passaram-se e ele voltou às aulas... Ele não tinha esquecido o que Anita fez com ele e continuou ameaçando: - Anita no final da aula vou te pegar! Na hora da saída Anita ficou com muito medo e pensou em pedir a proteção da diretora. Nicolas continuava dizendo para todos que ia acaba linchando mesmo Anita e que nunca mais ela teria paz. Anita o ouviu falando isso e baixou a cabeça. Ela estava certa de que ele iria mesmo fazer maldades pelo resto da vida. Ele falou para ela: - Levante sua cabeça, moleca atrevida, como vou te linchar, você assim? Ela levantou sua cabeça devagarzinho e com seus olhos azuis tímidos, mexeu um pouco com o Nicolas.

E agora ele lincha ou não?

Se você quer que Nícolas maltrate Anita resolva a questão 1 da Seção 5.3 e vá para a página que corresponde a resposta do problema.

Caso contrário, resolva a questão 4 da seção 5.3 e vá para a página que corresponde a resposta do problema.

Capítulo 3. Ela não conta

Ela não contou para a diretora quem tinha sido o autor do vandalismo e levou com o resto da turma uma suspensão de *dois* dias. Ela resolveu se destacar dos demais para que todos percebessem que ela era diferente e passassem a seguir o seu exemplo. Um dia Anita percebeu que Nícolas estava um pouco triste e excluído dos demais. Resolveu perguntar o que estava acontecendo e Nícolas respondeu: - É que descobri que a menina de quem eu tanto gosto, não gosta de mim. Anita o consolou e passou a se aproximar de Nícolas. Nicolas passou a ser um menino educado e Anita percebeu essa mudança e passou a gostar de Nícolas, mas tinha medo de se declarar. Então Anita pediu um conselho a sua amiga Ana e ela disse que Anita deveria sim se declarar, mas Anita teve medo da reação dele em ficar xingando-a.

E agora? Pensou Anita. Eu me declaro ou não?

Se você quer que Anita se declare, resolva a Questão 2 da Seção 5.3, e vá para a página que corresponde a resposta do problema.

Agora, se você não quer que Anita se declare, resolva a Questão 3 da Seção 5.3 e vá para a página que corresponde a resposta do problema.

Esses são alguns exemplos de histórias elaboradas por alunos.