



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG**



# **UMA ABORDAGEM SOBRE O CONCEITO DE FUNÇÃO NO ENSINO MÉDIO**

**Beethoven R. Daudt Gomes e Silva**

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Braulio Maia Júnior

Campina Grande - PB  
Agosto/2015

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

S586a Silva, Beethoven R. Daudt Gomes e.  
Uma abordagem sobre o conceito de função no ensino médio /  
Beethoven R. Daudt Gomes e Silva. – Campina Grande, 2015.  
83 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) –  
Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e  
Tecnologia, 2015.

"Orientação: Prof. Dr. Braulio Maia Júnior".  
Referências.

1. Função. 2. Livro Didático . 3. Matemática. I. Maia Júnior,  
Braulio. II. Título.

CDU 51:002(043)



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG**



## **UMA ABORDAGEM SOBRE O CONCEITO DE FUNÇÃO NO ENSINO MÉDIO**

**por**

**Beethoven Rotterdam Daudt Gomes e Silva <sup>†</sup>**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

---

<sup>†</sup>Bolsista CAPES

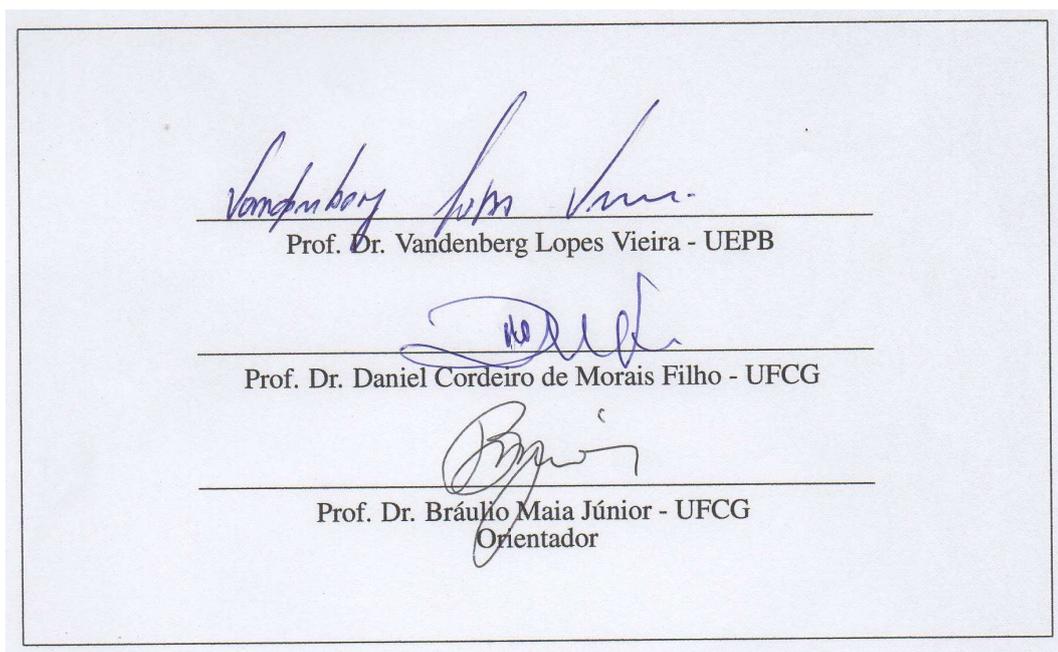
# UMA ABORDAGEM SOBRE O CONCEITO DE FUNÇÃO NO ENSINO MÉDIO

por

**Beethoven Rotterdam Daudt Gomes e Silva**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:



**Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Unidade Acadêmica de Matemática  
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**

**06/Agosto/2015**

# Dedicatória

Ao meu pai, Juarez, por sua sabedoria, inspiração para todos da família.

# Agradecimentos

Agradeço à Deus pelas bênçãos, pela oportunidade de crescimento e aquisição de novos conhecimentos.

À UFCG e a todos os professores do PROFMAT por terem proporcionado um importante momento de aprendizagem e crescimento profissional e pessoal.

Ao professor Dr. Braulio Maia Junior, pela dedicação no trabalho de orientação e, sobretudo, pela paciência, compreensão e amizade nos momentos difíceis.

Ao professor José Urânio das Neves, professor aposentado da UEPB e UFCG, pelas sugestões e críticas que contribuíram para melhoria da qualidade deste trabalho.

À Banca Examinadora, composta pelos professores Vandenberg Lopes Vieira (UEPB) e Daniel Cordeiro de Moraes Filho (UFCG), pela valiosa contribuição para a conclusão deste trabalho.

Aos amigos do grupo de estudo, pelo companheirismo, apoio e sugestões, em especial à Juanbélia, pelo incansável incentivo.

À Tatiana Matos Barros, pelo apoio e pela flexibilização dos horários de trabalho.

Agradeço à Secretaria de Educação do Município de Queimadas pelo apoio e pela liberação parcial de minha carga horária semanal para que eu pudesse me dedicar ao PROFMAT.

À minha mãe, Edvan, e aos meus irmãos, Dayan, Amiel, Daniel e Danuta, pelo apoio, incentivo e compreensão, principalmente nos momentos difíceis.

À minha esposa e companheira, Valéria, e aos meus filhos, Adson e Caio, pelo amor, incentivo, paciência, compreensão e pelos momentos de ausência durante a dedicação ao Mestrado.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

# Resumo

O ensino do conceito de função tem sido um dos grandes desafios para o docente, em particular durante a primeira série do ensino Médio. Tal assunto constitui-se, para o aluno, um obstáculo cognitivo, contribuindo para o distanciamento da Matemática. A carga de abstração contida no conceito de função e o formalismo exagerado dos livros didáticos contribuem para que o professor não obtenha êxito durante a abordagem deste assunto. Surge, assim, a necessidade de conhecer previamente a abordagem e o método utilizado pelo autor do livro didático adotado como livro texto, sendo indispensável a leitura crítica por parte do professor. Neste trabalho propõe-se uma sequência didática para o ensino do conceito e das propriedades de Função. Nesse sentido, criou-se um roteiro de análise adaptado a partir de critérios utilizados no guia do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) do ano de 2012, o qual foi utilizado para verificar a abordagem metodológica praticada durante a apresentação da definição de função utilizada em livros didáticos do primeiro ano do ensino médio.

**Palavras Chaves:** Função. Livro Didático. Matemática.

# Abstract

Teaching the concept of function has been a major challenge for the teachers, particularly during the first year of high school. This issue constitutes, for the student, a cognitive obstacle what contributes to the detachment of mathematics by the students. The abstraction charge contained in the concept of function and the exaggerated formalism in the textbooks does not contribute to the success of the teacher when approaching this issue. It raises the need to know beforehand the approach and method used by the author being essential the analysis of the textbooks by the teacher. Given this fact, this paper proposes a didactic sequence for teaching the concept of functions. It was created an adapted analysis script based on the criteria used in the Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) of 2012, in order to examine the methodological approach practiced during the presentation of the definition of function used by teachers in the first year of high school textbooks.

**Keywords:** Function. Textbook. Mathematics.

# Lista de Figuras

2.1	Relógio solar. . . . .	7
2.2	Primeira tabela trigonométrica conhecida. . . . .	8
3.1	Reta dos Números Naturais. . . . .	15
3.2	Reta dos Números Inteiros. . . . .	15
3.3	Reta dos Números Racionais. . . . .	17
3.4	Quadrado lado 1. . . . .	18
3.5	Reta Real. . . . .	19
3.6	Diagrama do Conjunto dos Números Reais. . . . .	20
3.7	Gráfico do Produto Cartesiano. . . . .	21
3.8	Plano Cartesiano. . . . .	22
3.9	Exemplos de Relações. . . . .	24
3.10	Domínio e Imagem da Relação. . . . .	25
4.1	Digrama: Domínio, Imagem e Contradomínio . . . . .	32
4.2	O gráfico representa uma Função. . . . .	34
4.3	O gráfico não representa uma Função. . . . .	35
4.4	O gráfico representa uma Função. . . . .	35
4.5	O gráfico não representa Função. . . . .	36
4.6	O gráfico de uma Função no Plano Cartesiano. . . . .	36
4.7	Domínio e imagem de uma função. . . . .	37
4.8	Função crescente. . . . .	38
4.9	Função decrescente. . . . .	38
4.10	Função crescente e decrescente. . . . .	39
4.11	Função injetora. . . . .	40
4.12	Função não injetora. . . . .	41
4.13	Função Injetora. . . . .	43
4.14	A função $f$ é Sobrejetora (imagem igual ao contradomínio). . . . .	44
4.15	A função $f$ não é Sobrejetora (imagem diferente do contra-domínio). . . . .	44
4.16	Função Inversa . . . . .	48
4.17	Função Inversa 2. . . . .	48

7.1	Introdução. . . . .	63
7.2	Conceito Intuitivo 1. . . . .	65
7.3	Conceito Intuitivo 2. . . . .	66
7.4	Exercício-Conceito Intuitivo . . . . .	67
7.5	Noção de função por meio de conjuntos. . . . .	69
7.6	Definição de Função. . . . .	70
7.7	Domínio, contradomínio e imagem. . . . .	71
7.8	Função definida sem uso de fórmula matemática . . . . .	72
7.9	Observação. . . . .	73
7.10	Função definida por fórmulas Matemáticas. . . . .	73
7.11	Erro no domínio. . . . .	74
7.12	Função indicada por dupla sentença. . . . .	74
7.13	Domínio de uma função Real. . . . .	75
7.14	Construção de Gráficos . . . . .	76
7.15	Construção de Gráficos . . . . .	77
7.16	Construção de Gráficos. . . . .	77
7.17	Construção de Gráficos . . . . .	78
7.18	Análise do Gráfico. . . . .	79
7.19	Reconhecimento de função. . . . .	79

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
1.1	Objetivos . . . . .	4
1.1.1	Objetivo Geral . . . . .	4
1.1.2	Objetivos Específicos . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Aspectos Históricos do Conceito de Função</b>	<b>5</b>
2.1	Introdução . . . . .	5
2.2	Primeiros Registros . . . . .	6
2.3	Período Medieval . . . . .	8
2.4	A Moderna Ideia de Função . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Conceitos Iniciais</b>	<b>13</b>
3.1	Introdução . . . . .	13
3.2	Conjuntos . . . . .	13
3.3	Conjuntos Numéricos . . . . .	13
3.3.1	Conjunto dos Números Naturais . . . . .	14
3.3.2	Conjunto dos Números Inteiros . . . . .	15
3.3.3	Conjunto dos Números Racionais . . . . .	16
3.3.4	Conjunto dos Números Irracionais . . . . .	18
3.3.5	Conjunto dos Números Reais . . . . .	19
3.4	Par Ordenado . . . . .	20
3.5	Produto Cartesiano . . . . .	20
3.6	Plano Cartesiano . . . . .	22
3.7	Relação . . . . .	23
3.7.1	Domínio . . . . .	24
3.7.2	Conjunto Imagem . . . . .	25
3.7.3	Relação Inversa . . . . .	25
3.7.4	Função . . . . .	26
<b>4</b>	<b>A Formalização do Conceito de Função</b>	<b>27</b>
4.1	Introdução . . . . .	27

4.2	A ideia de Função . . . . .	27
4.2.1	Situação Problema . . . . .	29
4.2.2	Situação Problema . . . . .	29
4.2.3	Situação Problema . . . . .	31
4.3	Definição de Função . . . . .	31
4.4	Função Crescente e Decrescente . . . . .	37
4.5	Função injetora, sobrejetora e bijetora . . . . .	40
4.6	Função Composta . . . . .	45
4.7	Função Inversa . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Abordando Função no Ensino Médio</b>	<b>51</b>
5.1	Introdução . . . . .	51
5.2	O Conceito de Função no Movimento da Matemática Moderna . . . . .	51
5.3	O ensino de Função segundo o PCN . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Considerações sobre análise de livros didáticos</b>	<b>56</b>
6.1	Introdução . . . . .	56
6.2	Conceituação . . . . .	57
6.3	Manipulação . . . . .	57
6.4	Aplicações . . . . .	58
6.5	Guia de Livros Didáticos do PNLD 2012 . . . . .	58
6.6	Roteiro utilizado . . . . .	59
<b>7</b>	<b>Abordagem do conceito de função do livro - Matemática: Contexto &amp; Aplicações</b>	<b>61</b>
7.1	Introdução . . . . .	61
7.2	Análise da Introdução do capítulo 3 . . . . .	63
7.3	Análise de apresentação do conceito intuitivo de função . . . . .	65
7.4	Análise de retomada dos conhecimentos prévios . . . . .	68
7.5	Análise da formalização do conceito de função . . . . .	69
7.5.1	Análise da seção: A noção de função por meio de conjunto . . . . .	69
7.5.2	Análise da seção: Domínio, contradomínio e conjunto imagem . . . . .	70
7.5.3	Análise da seção: Funções definidas por fórmulas matemáticas . . . . .	73
7.5.4	Análise da seção: Estudo do domínio de uma função real . . . . .	75
7.6	Análise da exploração das representações gráficas . . . . .	76
7.6.1	Considerações gerais sobre a análise . . . . .	79
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>80</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>82</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A ideia de que a Matemática é feita para “mentes privilegiadas” está presente em todos os setores da sociedade, e geralmente esse pensamento toma corpo na Educação Básica. Mudar esta realidade constitui-se, talvez, o grande desafio do professor de área.

A forma abstrata de apresentar os conceitos e as aplicações matemáticas foram utilizadas ao longo de vários anos, limitando-se a exercícios puramente manipulativos com foco na própria Matemática, o que contribuiu para a perpetuação desse pensamento, e o ensino de funções não fugiu a regra.

Essa forma de pensar e fazer Matemática tem se mostrado equivocada, propiciando espaço para uma Matemática mais voltada para a compreensão dos significados dos conceitos matemáticos e de suas respectivas aplicações, sobretudo no ambiente escolar.

Isso nos motivou a construir um trabalho que colaborasse com o desafio do professor de provocar o pensamento cognitivo do aluno, conduzindo-o a descoberta do mundo da Matemática.

O presente trabalho possui a seguinte distribuição:

- Capítulo 1: Objetivos;
- Capítulo 2: Alguns aspectos históricos da construção e da formalização da definição de função;
- Capítulo 3: Conceitos iniciais necessários a apresentação do conteúdo de função;
- Capítulo 4: Apresentação intuitiva de função e formalização matematicamente da definição de função;
- Capítulo 5: O papel e a importância do ensino de função no Ensino Médio;
- Capítulo 6: Alguns aspectos sobre a análise de livros didáticos;

- Capítulo 7: Análise crítica do livro didático de Dante [5], com foco na definição, sistematização e aplicação das propriedades das funções.
- Capítulo 8: Considerações finais;
- Por fim, as Referências Bibliográficas.

## **1.1 Objetivos**

### **1.1.1 Objetivo Geral**

Ao analisar os livros didáticos pretendemos propor, quando necessário, sugestões a serem utilizadas pelo professor, durante o estudo de funções, de forma a promover procedimentos didáticos que favoreçam a compreensão, por parte dos alunos do conceito de funções e das relações e conexões que podem ser formalizadas, matematicamente, com situações do cotidiano.

Obstante a isso, pretendemos, simultaneamente, despertar no docente uma postura crítica diante dos textos didáticos disponíveis aos alunos, de forma que esse assuma permanente intervenção, quando necessário, aos textos que se apresentarem com equívocos seja de conceito ou de procedimento.

### **1.1.2 Objetivos Específicos**

- Motivar o estudo do conteúdo de funções;
- Desenvolver no aluno a capacidade de analisar e interpretar gráficos;
- Desenvolver no aluno a capacidade de relacionar situações diárias a um modelo matemático a partir dos conhecimentos adquiridos no estudo de funções;
- Criar, junto ao alunado, situações e atividades em que se possa obter modelos matemáticos baseados nos conceitos apresentados;
- Promover uma reflexão sobre a importância do docente assumir uma postura crítica na análise dos livros e textos utilizados no ensino médio;
- Contribuir para tornar o ensino de Matemática mais atrativo, interessante e estimulante, através do conteúdo de funções, algo imprescindível para a formação do aluno.

## Capítulo 2

# Aspectos Históricos do Conceito de Função

### 2.1 Introdução

Neste capítulo, faremos a apresentação de alguns aspectos que contribuíram para o desenvolvimento do conceito formalizado de função, como também, de alguns dos principais personagens que participaram desse processo. Entretanto, para o leitor que queira aprofundar esse estudo, sugerimos as obras de Boyer [2] e de Roque [15].

O desenvolvimento do conceito de função exigiu a participação de inúmeras gerações de filósofos e cientistas ao longo da história das civilizações, tendo como principal motivador a necessidade do homem em compreender os fenômenos da natureza e as relações intrínsecas existentes.

Conforme Roque [15]

*Atualmente, quando pensamos no conceito de função, algumas ideias vêm à mente. Por exemplo, a ideia de uma correspondência. Deste ponto de vista, pode-se dizer que as tabelas babilônias e egípcias já pressupunham, de alguma forma, a ideia de função, uma vez que se tratavam justamente de registros de correspondência (por exemplo, entre número e o resultado das operações que envolvem este número). As tabelas cordas de Ptolomeu, similares às nossas tabelas de senos, também estabeleciam correspondência que consideramos hoje de natureza funcional. (p.264)*

Embora o conceito de função, como utilizamos atualmente, tenha iniciado sua formalização a partir do século XVIII, inclusive posteriormente das técnicas de derivação introduzidas por Leibniz (1646 – 1716) e Isaac Newton (1643 – 1727), existem registros ao longo

da história, mesmo que implícito, da utilização da ideia do conceito de função em civilizações anteriores a era Cristã. Nesse contexto apresentaremos algumas interpretações que contribuíram para o desenvolvimento do conceito.

## 2.2 Primeiros Registros

Os primórdios do conceito de função surgiram, de forma implícita, com os babilônicos e com os gregos, povos que utilizavam tabelas de relações numéricas para explicar fenômenos do cotidiano e da natureza.

Em registros históricos do povo babilônico foi encontrado, numa plaqueta feita em argila (os babilônios usavam tábuas de argila cozida), por volta de ano 2000 a.C., o uso de uma tabela com a expressão algébrica semelhante a  $n^3 + n^2$ , em que  $n = 1, 2, 3, \dots, 30$ .

Podemos fazer uma associação com função, se definimos o domínio como sendo o conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 30\}$ , e a lei de formação por  $f(n) = n^3 + n^2$ .

Dessa forma, poderíamos expressar uma função da seguinte forma: Seja a função  $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ , definida por  $f(n) = n^3 + n^2$ . Em que teríamos bem definidos o domínio, o contradomínio e a lei de formação. Nota-se, então, o conceito de função atualmente utilizado, mesmo que de forma implícita.

No entanto, como essa tábua foi provavelmente construída para permitir a resolução de equação do tipo  $n^3 + n^2 = c$ , os babilônicos utilizaram, novamente de forma implícita, a ideia de *função inversa*, pois, por exemplo, a solução de  $n^3 + n^2 = 80$  é 4, ou seja, é  $f^{-1}(80) = 4$ .

Nesse sentido, verifica-se também o conceito implícito de função ao observamos os relógios de sol, instrumentos que egípcios e babilônicos já usavam, por volta do ano 1500 a.C. Os relógios mais antigos consistiam em um bastão fixado verticalmente no chão, denominado de "*gnômon*".

Assim, ao observar o movimento da sombra projetada por um *gnômon*, que é longa de manhã cedo, e diminui a um mínimo ao meio-dia e volta a avançar com o passar da tarde. Esses povos elaboraram tabelas que registravam o comprimento da sombra a intervalos regulares. Além de marcar a hora, essas tabelas ajudavam a determinar, entre outras coisas, a duração do ano e os períodos de inverno e verão.

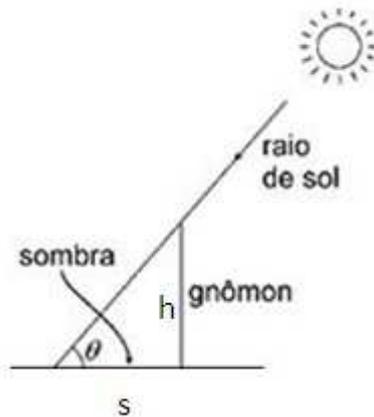


Figura 2.1: Relógio solar.

Note que, se indicarmos  $h$  a altura do bastão,  $s$  o comprimento da sombra quando a altitude do Sol sobre o horizonte é de  $\theta$  graus, então  $\cot g\theta = \frac{s}{h}$ , conforme Figura 2.1. Portanto, as sombras ou as tabelas de sombras são, talvez, os ancestrais mais antigos da função cotangente.

Os gregos, considerados por alguns historiadores os maiores cientistas do mundo antigo, posteriormente chegaram mais perto ainda da ideia de função, fato que pode ser observado na primeira tabela trigonométrica conhecida (Figura 2.2), que foi apresentada no livro *Almagesto* ("O maior"), de C. Ptolomeu (sec. II d.C.). O que indica ser esse um conceito natural, como a história prova.



Figura 2.2: Primeira tabela trigonométrica conhecida.

Doravante, veremos que o conceito formalizado de função começou a ser construído a partir do momento em que os cientistas passaram a descrever o movimento de forma quantitativa.

## 2.3 Período Medieval

No período medieval, pouco se acrescentou para a formalização do conceito de função, possivelmente porque o desenvolvimento teve relação direta com os progressos científicos que ocorreram mais tarde.

Entretanto foi nesse período que os europeus começaram a entrar em contato com os povos do oriente, através das viagens comerciais e das Cruzadas, e desse intercâmbio os pensadores da Grécia foram trazidos e suas ideias foram disseminadas, em particular o pensamento aristotélico, o qual foi adotado como modelo para a filosofia/ciência na Idade Média, também conhecida como filosofia escolástica.

A filosofia escolástica sofreu grandes questionamentos, principalmente por pensadores que defendiam que as verdades científicas deveriam necessariamente ser obtidas através da experiência, pensamento que teve a Igreja como grande opositora, a qual podava o desenvolvimento das ciências, ao instituir o pensamento que "Deus criou e governa todas as coisas através da matemática".

Obstante ao pensamento da Igreja, grandes cientistas da época apresentaram resultados que podem-se relacionar com o conceito de função. Destacamos, inicialmente, o astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) que enunciou leis matemáticas que descreviam o movimento dos planetas, dentro de uma teoria heliocêntrica. Podemos citar a terceira lei:

*os quadrados dos períodos orbitais dos planetas são proporcionais aos cubos dos semi-eixos maiores orbitais.*

Essa lei descreve, de forma quantitativa, um fenômeno físico e expressa matematicamente a relação entre duas grandezas, apresentando assim, a ideia de função, embora de forma implícita.

Da forma semelhante a Kepler, outro cientista que merece destaque é Galileu Galilei (1564-1642), considerado o fundador da ciência moderna, sobretudo, pela criação do moderno método científico, baseado na experimentação e na coleta de dados, para posterior análise. Em uma de suas obras, Galileu anunciou a lei de queda dos corpos no vácuo da seguinte forma:

*o espaço percorrido por um corpo em queda livre é diretamente proporcional ao quadrado do tempo levado para percorrer este espaço.*

Essa lei, como a 3ª Lei de Kepler, traz em seu enunciado claramente os pressupostos de função, todavia ambos utilizaram a linguagem verbal.

A forma verbalizada, como Kepler e Galileu apresentaram seus resultados, indicava a necessidade do uso de uma simbologia matemática para relacionar grandezas que variam, pois até então, o registro do uso de símbolos na matemática ocorreram na álgebra desenvolvida na Grécia por Diofanto e na álgebra hindu, no século II d.C., as quais não possuíam o avanço necessário para a formalização simbólica do conceito de função, embora já tivesse símbolos para representar incógnitas, potências e operações a ponto de resolver equações indeterminadas.

Somente no século XVI, através da obra do matemático francês François Viète (1540-1603), surgiu a Álgebra Literal, que introduziu a linguagem das fórmulas na Matemática. Na obra *In Artem Analyticam Isagoge*, Viète chamou sua álgebra simbólica de *logistica speciosa*.

Um pouco depois, René Decartes (1596-1650) utilizou as primeiras letras do alfabeto para indicar quantidades conhecidas e as últimas letras para indicar as desconhecidas, semelhante ao que utilizamos atualmente.

Ambos utilizaram a álgebra como ferramenta para resolver problemas geométricos, tendo como inovador a associação de curvas a equações algébricas e o uso de um sistema de coordenadas para relacionar as variáveis envolvidas, dando origem a geometria analítica.

Conforme escreve Boyer [2] (p.253 – 259), no seu estudo de curvas, Pierre de Fermat (1601-1665) utilizou um sistema de coordenadas e relacionou duas variáveis que apareciam no final de uma equação, utilizando o seguinte princípio:

*Sempre que numa equação final encontram-se duas quantidades incógnitas, temos um lugar, a extremidade de uma delas descrevendo uma linha reta ou curva. (p.253)*

Veja que a relação entre as incógnitas é estabelecida através de um lugar geométrico, ou seja, o que denominamos, atualmente, como a expressão algébrica de uma função, tanto para Fermat como para Descartes, era uma curva.

Observa-se que, nesse período, o conceito de função, embora não tenha sido formalizado, esteve presente nos mais diversos resultados apresentados, em particular na física e na astronomia, entretanto, sua formalização dependia do desenvolvimento de uma linguagem algébrica que permitisse a sistematização adequada, do conceito de função, na forma como utilizamos na contemporaneidade. De qualquer modo, o que foi produzido nessa época, preparou o terreno para que Newton e Leibniz estabelecessem os fundamentos do Cálculo, segundo Boyer [4].

## 2.4 A Moderna Ideia de Função

Para obtenção da formalização do conceito de função, como usada atualmente, foi necessário a construção de uma notação clara e objetiva para representar o pensamento matemático, o que se verificou com o desenvolvimento da álgebra literal, a partir do século XVIII, e se solidificou com a criação da teoria de conjuntos, nos fins do século XIX.

No início da Idade Moderna, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) utilizou, pela primeira vez, em 1694, a palavra *função* para expressar a quantidade associada a uma curva, ocorre que, nesta época a definição de *função* era algo abstrato, ainda dentro do campo conceitual da matemática, havendo um melhor aproveitamento da linguagem algébrica.

Posteriormente, em 1718, Johann Bernouli (1667 – 1748) também fez uso do termo *função* e utilizou algumas notações, dentre elas " $\emptyset x$ " e " $fx$ ", para indicar um função de  $x$ , bem próximo da utilizada nos dias atuais. Bernouli definiu função da seguinte maneira:

*Chamamos aqui Função de uma grandeza variável, uma quantidade composta de qualquer maneira desda grandeza variável e de constantes.*

Observa-se, da definição de Bernouli, que a cada função poderia ser representada por uma expressão analítica, utilizado para isso uma combinação de símbolos algébricos.

Porém, segundo Roque [15] (p.324 – 341), quem utilizou pela primeira vez a notação " $f(x)$ " para representar a lei de formação de uma função qualquer envolvendo variáveis e constantes, foi Leonhard Euler (1707 – 1783). Assim sendo, Euler enunciou, em 1748:

*uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de alguma maneira desta quantidade variável e números ou quantidades constantes. (Opera omnia, ser.I, Vol. VII, p.17).*

Mais adiante, em 1755, Euler também enunciou:

*Se  $x$  denota uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de  $x$  ou são determinadas por ele são chamadas suas funções.*

Onde pode-se observar uma aproximação com o conceito utilizado atualmente, principalmente pela presença da ideia de função está associado a uma relação entre quantidades variáveis, mas ainda faltava uma objetividade e clareza na notação utilizada.

Somente com o matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet(1805 – 1859) é que se chegou próximo da definição moderna. Dirichlet apresentou a seguinte definição:

*Suponhamos que  $a$  e  $b$  são dois valores dados e  $x$  é a quantidade variável que assume, gradualmente, todos os valores localizados entre  $a$  e  $b$ . Se para cada  $x$  corresponde um único  $y$ , de modo que, enquanto  $x$  percorre o intervalo de  $a$  até  $b$ ,  $y = f(x)$  varia gradualmente da mesma forma, então  $y$  é chamada função contínua de  $x$  para este intervalo. (Roque [15] p.340)*

Note que em sua definição Johann Dirichlet apresentou a ideia de variável, utilizando um símbolo, no caso  $x$ , que representa todos os valores compreendidos num determinado intervalo, portanto, num dado conjunto de números. Partindo desse pressuposto, Dirichlet

evidenciou o conceito central, “Se para cada  $x$  corresponde um único  $y$ ”, estabelecendo a notação  $y = f(x)$ , que corresponde a uma lei de formação. Podemos inferir ainda que  $x$  seria a variável independente e  $y$  variável dependente.

Segundo Roque [15] (p.338), “Dirichlet foi o primeiro a estabelecer o conceito de função como uma relação arbitrária entre variáveis, independente de fórmulas algébricas”.. Dirichlet definiu a função:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ racional} \\ 1, & \text{se } x \text{ irracional} \end{cases}$$

Assim, com a evolução da teoria dos conjuntos, nos fins do século XIX, foi possível sistematizar a definição de função na forma utilizada atualmente nos meios matemáticos e científicos, sendo atribuído a Nicolas Bourbaki (pseudônimo coletivo sob o qual um grupo de matemáticos, majoritariamente franceses, que escreveram uma série de livros sobre matemática avançada moderna, editados a partir de 1935), a definição atual de função, o qual em 1939 apresentou a seguinte definição para função:

*Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos. Uma relação entre uma variável  $x \in A$ , e uma variável  $y \in B$  é dita relação funcional se qualquer que seja  $x \in A$ , exista um único elemento  $y \in B$ , que esteja na relação considerada.”*

De forma curiosa, é por esta definição, apresentada com maior rigor, que a milenar tabela babilônica mais se aproxima da ideia de função.

Verifica-se então, através desse breve histórico, que a construção do conceito de função passou por diversas alterações ao longo de varias gerações, constituindo-se em um processo lento. Neste contexto foi observado algumas representações, dentre elas a função como relação entre quantidades, como expressão analítica, como variação entre grandezas e como relação entre conjuntos.

# Capítulo 3

## Conceitos Iniciais

### 3.1 Introdução

Destinar-se-a este capítulo para apresentação e formalização de conceitos que serão utilizados ao longo do trabalho. Iniciaremos com o estudo de Conjuntos, pares ordenados, produto cartesiano, plano cartesiano, relações e discutiremos alguns casos que trazem a ideia de função.

É importante frisar que embora a sequencia de conteúdos a serem abordados neste capítulo é cunhada na formalização matemática, não propomos esta abordagem ao aluno do ensino médio, contudo, consideramos necessário o pleno domínio destes temas por parte do docente.

### 3.2 Conjuntos

A Teoria dos conjuntos, desenvolvida por Georg Cantor (1845 – 1918), foi extremamente importante para a formalização do conceito de função no início do século *XIX*, e será frequentemente utilizado neste trabalho. Contudo, por não ser o objeto principal, não faremos a abordagem deste tema e, caso o leitor queira aprofundar o estudo desse importante conteúdo, indicamos o livro de Lima [7].

### 3.3 Conjuntos Numéricos

A importância dos números no mundo moderno é inquestionável, sendo inúmeras as situações da utilização dos números, seja nos estudos mais específicos da Matemática, da Física, da Química, como também no processo de comunicação corriqueira, num mero diálogo entre duas pessoas, ou mesmo através dos meios de comunicação, nos jornais, por exemplo, nos deparamos com muitas informações numéricas contidas em tabelas, gráficos, numa simples receita, enfim nos mais variados textos.

No entanto, nossa experiência docente tem nos mostrado a grande dificuldade que os alunos possuem quando solicitados a indicar o significado de um determinado resultado numérico, o que demonstra, possivelmente, um distanciamento entre o que se pretende com determinado problema e o significado matemático do resultado. Tal fato é mais perceptível quando trabalhamos com frações, embora seja comum encontrarmos situações onde o aluno não consiga compreender o significado numérico do resultado, até mesmo dentro do Conjunto dos Números Naturais.

Diante desse quadro, devemos propor ao alunos situações que colaborem para a compreensão de situações envolvendo informações numéricas relacionadas a medidas, comparações, dados de pesquisas, relações entre grandezas etc. Por isto, utilizaremos como ponto de partida do nosso trabalho os conjuntos numéricos.

### 3.3.1 Conjunto dos Números Naturais

Atualmente, a grande maioria dos livros didáticos, utiliza o Conjunto dos Números Naturais, indicado pelo símbolo  $\mathbb{N}$ , para quantificar e ordenar os objetos. Faremos uma abordagem dos Conjuntos do Números Naturais segundo a construção do Lima [7].

Elon[7] recomenda:

*Deve ficar claro que o conjunto  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  dos números naturais é uma sequência de objetos abstratos que, em princípio, são vazios de significados. Cada um desses objetos (um número natural) possui apenas um lugar determinado nesta sequência. Nenhuma outra propriedade lhe serve de definição. Todo número tem um sucessor (único) e, com exceção de 1, tem também um único antecessor (número do qual é sucessor). (p.24)*

Nota-se que o autor define o conjunto dos números naturais utilizando os axiomas de Peano, os quais afirmam que:

- Todo número natural tem único sucessor;
- Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
- Existe um único número natural, chamado *um* e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;
- Seja  $X$  um conjunto de números naturais (isto é,  $X \subset \mathbb{N}$ . Se  $1 \in X$  e se, além disso, o sucessor de todo elemento de  $X$  ainda pertence a  $X$ , então  $X = \mathbb{N}$

Observa-se que nesta construção, Elon não apresenta o zero como elemento do Conjunto dos Números Naturais ( $\mathbb{N}$ ), entretanto, o próprio afirma ser uma questão de preferência.

Neste trabalho, utilizaremos o zero como sendo o primeiro número natural. Caso o leitor queira se aprofundar neste tema sugerimos o livro *Meu Professor de Matemática e outras Histórias* [9], de autoria de Elon Lages Lima.

Então, o Conjunto dos Números Naturais será dado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Podemos representar o Conjunto dos Números Naturais ( $\mathbb{N}$ ) através da reta:

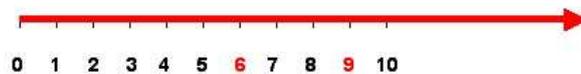


Figura 3.1: Reta dos Números Naturais.

Em  $\mathbb{N}$  é sempre possível efetuar a adição e a multiplicação, ou seja, a soma e o produto de dois números naturais resulta sempre um número natural. Já na subtração entre dois números naturais nem sempre é um número natural; a subtração  $3 - 4$ , por exemplo, não é possível em  $\mathbb{N}$ . Daí a necessidade de ampliar o conjunto  $\mathbb{N}$  introduzindo os números negativos.

### 3.3.2 Conjunto dos Números Inteiros

Ao incluir os números negativos no conjunto dos Números Naturais obtemos o conjunto dos Números Inteiros, que indicamos por  $\mathbb{Z}$ . A letra  $\mathbb{Z}$  é a inicial da palavra *zahl*, que significa número em alemão.

Logo, o Conjunto dos Números Inteiros será dado por:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

O qual possui a seguinte representação na reta:

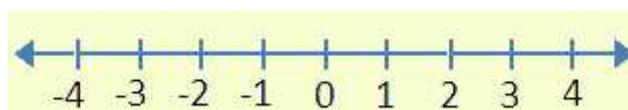


Figura 3.2: Reta dos Números Inteiros.

A noção de números negativos não existia para muitas civilizações antigas, como a grega e a egípcia. Não obstante, segundo Eves [11], os chineses já utilizavam tais números há mais de 2 mil anos. Eles indicavam os números positivos com gravetos vermelhos e os negativos, com gravetos pretos. Além dos chineses, os hindus também utilizavam os números negativos. Brahmagupta (598 – 665), importante matemático indiano, falava em “quantidades positivas e negativas”.

Na Europa, os números negativos começaram a ser usados mais tarde. O italiano Leonardo de Pisa chegou a trabalhar com números negativos, interpretando-os como “perda” em um problema financeiro. Outros estudiosos importantes como os franceses Nicolas Chuquet (1445 – 1488) e François Viete (1540 – 1603) chegaram a realizar cálculos que envolviam esses números.

No entanto, ainda havia grande resistência à aceitação dos números negativos. Somente no século XIX, em 1867, é que eles foram legitimados como números propriamente ditos, por meio dos trabalhos do importante matemático alemão Hermann Hankel (1839 – 1873).

Observe que no conjunto  $\mathbb{Z}$  é sempre possível efetuar a adição, a multiplicação e a subtração, ou seja, a soma, o produto e a diferença de dois números inteiros resultam sempre um número inteiro. E todas as propriedades das operações em  $\mathbb{N}$  continuam válidas em  $\mathbb{Z}$ .

Já na divisão de dois números inteiros nem sempre resulta um número inteiro:

$$(-8) : (+2) = -4, \text{ que é possível em } \mathbb{Z}$$

$$(-7) : (+2) =, \text{ que não é possível em } \mathbb{Z}$$

Daí a necessidade de ampliar o conjunto  $\mathbb{Z}$ , introduzindo as frações.

### 3.3.3 Conjunto dos Números Racionais

Ao acrescentarmos as frações positivas e negativas ao conjunto  $\mathbb{Z}$ , obtemos o conjunto dos Números Racionais, que indicamos por  $\mathbb{Q}$ . Por exemplo, são números racionais:

$$-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{3}, 2$$

Observe que todo número racional pode ser escrito na forma  $\frac{a}{b}$ , com  $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$  e  $b \neq 0$ .

**Exemplo 1**  $-2 = -\frac{6}{3}$ ,  $1 = \frac{2}{2}$ ,  $2 = \frac{10}{5}$ , etc.

Assim, escrevemos:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b}, \text{ com } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$$

Que podemos apresentar a seguinte representação na reta:

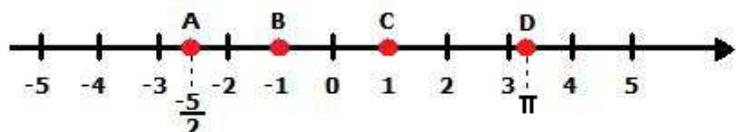


Figura 3.3: Reta dos Números Racionais.

Observe que a restrição  $b \neq 0$  é necessária, pois  $\frac{a}{b}$ , divisão de **a** por **b**, só tem significado se  $b \neq 0$ . A designação racional surgiu porque  $\frac{a}{b}$  pode ser vista como razão entre os inteiros **a** e **b**. A letra  $\mathbb{Q}$ , que representa o conjunto dos números racionais, é a primeira letra da palavra **quociente**.

No conjunto  $\mathbb{Q}$ , as quatro operações fundamentais são possíveis e valem todas as propriedades que valem para os inteiros. Certamente devemos lembrar que a divisão por zero é impossível e a fração  $\frac{a}{0}$  não tem significado.

Dado um número racional  $\frac{a}{b}$ , a representação decimal desse número é obtido dividindo-se **a** por **b**, podendo resultar em:

- Decimais exatas, finitas:

$$\frac{1}{4} = 0,25 \quad -\frac{5}{8} = -0,625 \quad \frac{6}{1} = 6,0$$

- Decimais ou dízimas periódicas, infinitas:

$$\frac{2}{3} = 0,666\dots = 0,6 \quad \frac{177}{990} = 0,1787878\dots$$

Embora as quatro operações fundamentais sejam sempre definidas em  $\mathbb{Q}$ , uma equação como  $x^2 = 2$  não pode ser resolvida em  $\mathbb{Q}$ , pois não existe racional  $\frac{a}{b}$  tal que  $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$ . Surge então a necessidade de outro tipo de número, os *números irracionais*.

### 3.3.4 Conjunto dos Números Irracionais

Vamos considerar um quadrado cujo lado mede 1 e calcular sua diagonal:

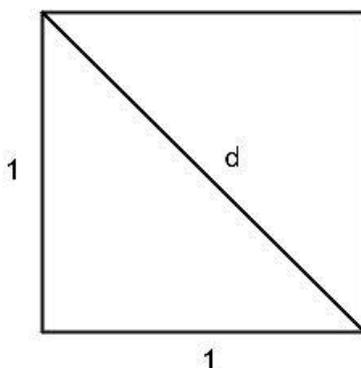


Figura 3.4: Quadrado lado 1.

Note que, por Pitágoras, temos:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d^2 = 2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$$

Sabemos que  $\sqrt{2} = 1,414213\dots$ , número que não é decimal exata nem dízima periódica, ou seja, não é racional. Os números decimais como esse, *infinitas e não-periódicas*, damos o nome de números irracionais.

Diante deste fato Lima [7] acrescenta:

*A solução que se impunha, e que foi finalmente notada, era a de ampliar o conceito de número, introduzindo os chamados números irracionais de tal modo que, fixando uma unidade de comprimento arbitrário, qualquer segmento de reta pudesse ter uma medida numérica. Quando o segmento considerado é comensurável com a unidade escolhida, sua medida é um número racional (inteiro ou fracionário). Os números irracionais representam medidas de segmentos que são incomensuráveis com a unidade. (p.54).*

Um dos números irracionais mais conhecidos é o  $\pi$ , que se obtém dividindo o comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro ( $\pi = 3,141592\dots$ ). As raízes quadradas não exatas de números naturais também são números irracionais:  $\sqrt{3} = 1,7320508\dots$ ;  $-\sqrt{5} = -2,2360679\dots$

O conjunto formado por todos os números irracionais será representado neste trabalho por  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , onde  $\mathbb{R}$  indica o conjunto dos Reais, que abordaremos na sequência.

### 3.3.5 Conjunto dos Números Reais

Da reunião do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais obtemos o *conjunto dos números reais*, que indicamos por  $\mathbb{R}$ .

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ ou } x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})\}$$

Ou ainda,

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ é racional ou } x \text{ é irracional}\}$$

Com o conjunto  $\mathbb{R}$ , a reta fica *completa*, ou seja, a cada ponto da reta corresponde um único número real e, reciprocamente, a cada número real corresponde um único ponto da reta.

Por isso, dizemos que existe uma *correspondência biunívoca* entre os números reais e os pontos da reta. Temos assim a reta real, na qual colocamos apenas alguns números reais;

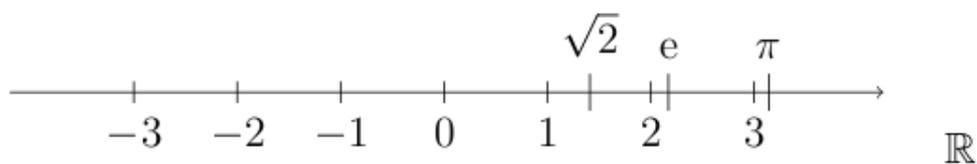


Figura 3.5: Reta Real.

O diagrama a seguir relaciona, por inclusão, os conjuntos numéricos apresentados neste trabalho:

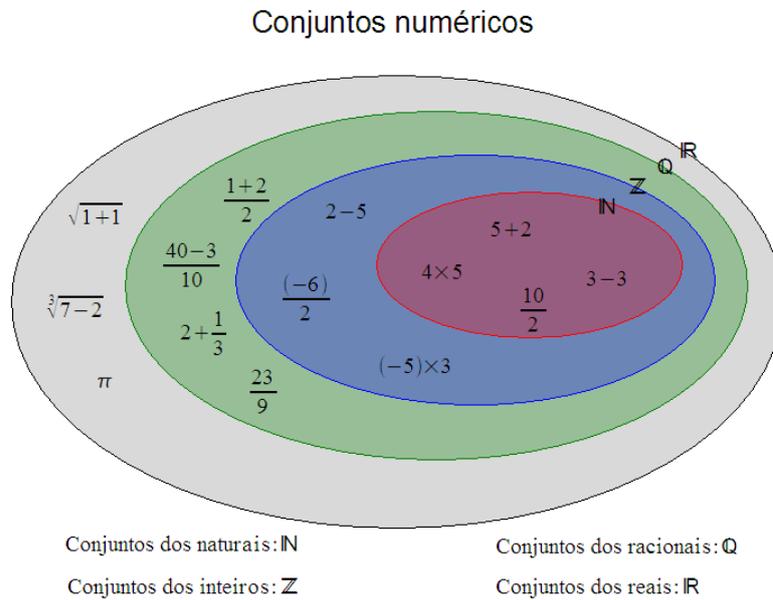


Figura 3.6: Diagrama do Conjunto dos Números Reais.

### 3.4 Par Ordenado

Admitimos a noção de *par ordenado* como sendo um conceito primitivo. Para cada elemento  $a$  e cada elemento  $b$ , admitiremos a existência de um terceiro elemento  $(a,b)$ , denominamos *par ordenado*, de modo que:

$$\boxed{\text{Se } (a,b) = (c,d), \text{ então } a = c \text{ e } b = d}$$

Note que a ordem de um par ordenado é muito importante, pois, o par ordenado  $(a,b)$ , com  $a \neq b$ , é diferente do par ordenado  $(b,a)$ .

### 3.5 Produto Cartesiano

**Definição 3.1 :** *Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos não vazios. Denominamos produto cartesiano de  $A$  por  $B$  o conjunto  $A \times B$  cujos elementos são todos pares ordenados  $(x,y)$ , em que o primeiro elemento pertence a  $A$  e o segundo elemento pertence a  $B$ .*

O símbolo  $A \times B$  lê-se "A cartesiano B" ou "produto cartesiano de A por B". Assim:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Se  $A$  ou  $B$  for conjunto vazio, definiremos o produto cartesiano de  $A$  por  $B$  como sendo o conjunto vazio. Quando  $A = B$ , indica-se em geral o produto  $A \times A$  por  $A^2$ .

**Exemplo 2** : Se  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{3, 4\}$ , vamos determinar:

- $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$
- $B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$
- $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
- $B \times B = \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$

Observações:

- Se  $A$  diferente de  $B$ , então  $A \times B$  é diferente de  $B \times A$ , isto é, o produto cartesiano de dois conjuntos não goza da propriedade comutativa;
- Se  $A$  e  $B$  são conjuntos finitos com  $m$  e  $n$  elementos respectivamente, então  $A \times B$  é um conjunto finito com  $m.n$  elementos;
- Se  $A$  ou  $B$  for infinito e nenhum deles for vazio, então  $A \times B$  é um conjunto infinito.

Note ainda que cada par ordenado do produto cartesiano  $A \times B$ , é representado por um ponto no plano cartesiano. Assim o gráfico de  $A \times B$  é conjunto de todos esses pontos.

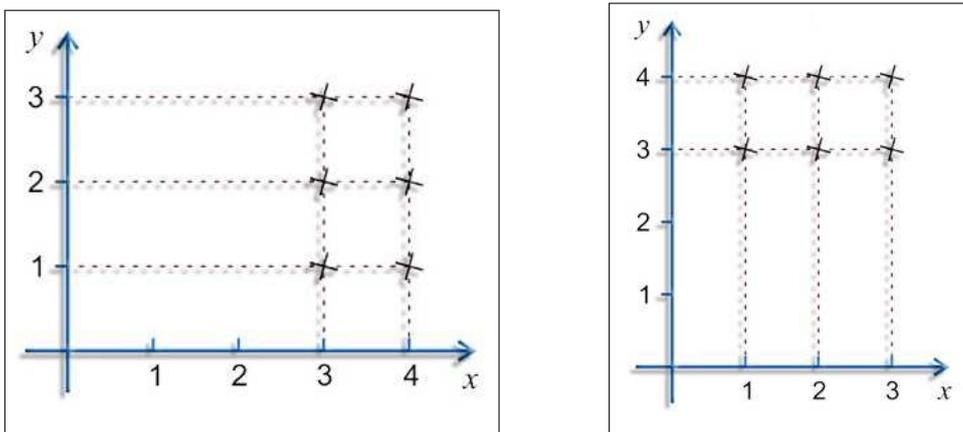


Figura 3.7: Gráfico do Produto Cartesiano.

### 3.6 Plano Cartesiano

O plano cartesiano consiste de dois eixos  $Ox$  e  $Oy$  ortogonais em  $O$ , os quais determinam um plano dividido em quatro regiões chamadas de *quadrantes*, conforme a ordem colocada a seguir:

Dado um ponto  $P$  desse plano, dizemos que os números  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são as *coordenadas cartesianas* do ponto  $P$ , em que  $\mathbf{a}$  é a *abscissa* e  $\mathbf{b}$  é a *ordenada*. Assim, o  $Ox$  é chamado de eixo das abscissas e  $Oy$  é chamado de eixo das ordenadas.

Observe que cada par ordenado de números reais corresponde a um ponto do plano cartesiano e, reciprocamente, cada ponto do plano corresponde a um par ordenado de números reais; temos assim, uma correspondência biunívoca. Tal correspondência entre pares de números reais e pontos do plano permitem escrever conceitos e propriedades geométricas em uma linguagem algébrica e, reciprocamente, interpretar geometricamente relações entre números reais, habilidade necessária e indispensável ao estudo de funções.

**Exemplo 3** *Veja o plano cartesiano a seguir:*

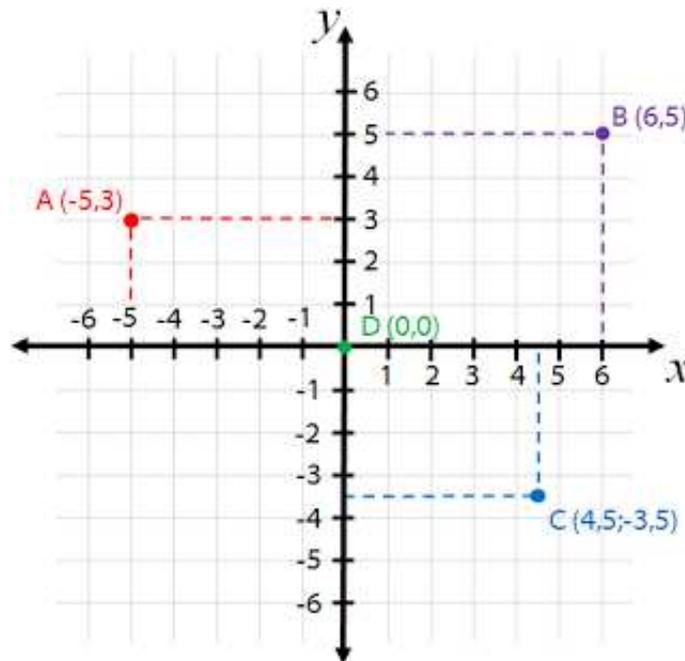


Figura 3.8: Plano Cartesiano.

Note que:

O ponto  $A(-5, 3)$ , indica o ponto  $A$  de coordenadas cartesianas  $-5$  e  $3$ .

O ponto  $B(6, 5)$ , indica o ponto  $B$  de coordenadas cartesianas  $6$  e  $5$ .

O ponto  $C(4, 5; -3, 5)$ , indica o ponto  $C$  de coordenadas cartesianas  $4, 5$  e  $-3, 5$ .

O ponto  $D(0, 0)$ , indica o ponto  $D$  de coordenadas cartesianas  $0$  e  $0$ .

### 3.7 Relação

**Definição 3.2** : *Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , chama-se relação de  $A$  em  $B$  todo subconjunto  $R$  de  $A \times B$ .*

Se  $R$  é relação de  $A$  em  $B$ , então  $R \subset A \times B$

**Exemplo 4** :

Seja  $A = \{1, 3, 5\}$  e  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ , então  $A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (3, 8), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (5, 8)\}$ . Agora, observe estes subconjuntos de  $A \times B$ :

- $R_1 = \{(1, 2), (1, 8), (3, 4), (3, 6), (5, 4), (5, 8)\}$
- $R_2 = \{(1, 4), (3, 2), (5, 6)\}$
- $R_3 = \emptyset$
- $R_4 = \{(3, 8)\}$

Observe que  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  são relações entre os elementos do conjunto de  $A$  e os elementos do conjunto  $B$ , pois são subconjuntos de  $A \times B$ .

Uma relação  $R$  entre os elementos de um conjunto  $A$  e os elementos de um conjunto  $B$  pode ser representado por diagramas como o apresentado a seguir, chamado de *diagramas de flechas*.

**Exemplo 5 :**

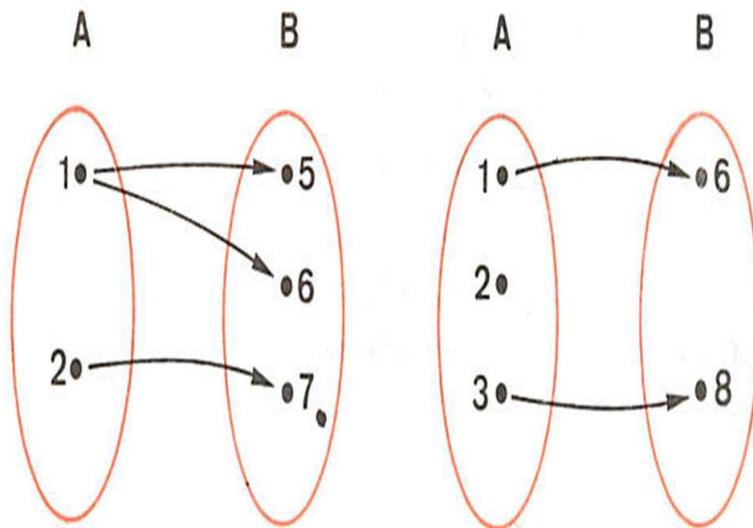


Figura 3.9: Exemplos de Relações.

As flechas indicam quais pares ordenados pertencem à relação. Na Figura 3.9, temos:

- $R_1 = \{(1,5), (1,6), (2,7)\}$ ;
- $R_2 = \{(1,6), (3,8)\}$ .

Logo a utilização do diagrama de flechas colabora com o trabalho docente, pois apresenta uma visualização de fácil compreensão por parte de aluno, que e deve ser bastante explorado durante o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de relações, no início da primeiro ano do ensino médio, e posteriormente quando será trabalhado o conceito de funções.

### 3.7.1 Domínio

**Definição 3.3 :** *Seja  $R$  uma relação de  $A$  em  $B$ . Chama-se domínio de  $R$  o conjunto  $D$  de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencentes a  $R$ . É indicado por  $D(R)$ .*

Do exemplo anterior, teremos:

- $D(R_1) = \{1,2\}$
- $D(R_2) = \{1,3\}$

Note que  $D(R) \subset A$ .

### 3.7.2 Conjunto Imagem

**Definição 3.4** : Chama-se imagem de  $R$  o conjunto  $Im$  de todos os segundos elementos dos pares ordenados pertencentes a  $R$ . É indicado por  $Im(R)$ .

Do exemplo anterior, teremos:

- $Im(R_1) = \{5, 6, 7\}$
- $Im(R_2) = \{6, 8\}$

Note que  $Im(R) \subset B$ .

Ao utilizar o diagrama das flechas, é fácil perceber que  $D$  é o conjunto dos elementos de  $A$ , dos quais partem flechas e que  $Im$  é o conjunto dos elementos de  $B$ , aos quais chegam flechas.

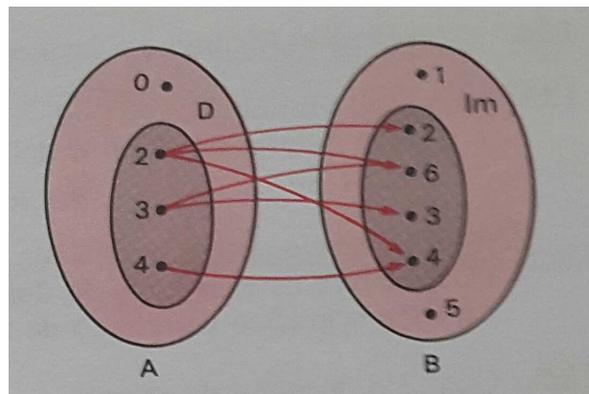


Figura 3.10: Domínio e Imagem da Relação.

Note que:

- $A = \{0, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$
- $D(R) = \{2, 3, 4\}$
- $Im(R) = \{2, 3, 4, 6\}$

### 3.7.3 Relação Inversa

**Definição 3.5** : Dada uma relação  $R$  de  $A$  em  $B$ , definimos a relação  $R^{-1}$  como o conjunto formado pelos pares ordenados obtidos a partir dos pares ordenados de  $R$  invertendo-se a ordem dos termos em cada par.

Desse modo,

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R^{-1}$$

**Exemplo 6** Sejam  $A = \{1, 3\}$  e  $B = \{2, 4\}$ , considere  $R$  a relação de  $A$  em  $B$ , tal que  $R = \{(1, 2), (3, 4)\}$ , então  $R^{-1} = \{(2, 1), (4, 3)\}$

### 3.7.4 Função

Assim como o conceito de conjunto, o conceito de função é imprescindível no estudo de qualquer ramo da Matemática. Nessa seção abordaremos a definição clássica de função a partir de conjuntos, para tanto utilizaremos a definição apresentada por Vieira [16].

**Definição 3.6** : Sejam  $X$  e  $Y$  conjuntos. Uma **função** de  $X$  em  $Y$  é uma regra que associa cada elemento  $x \in X$  um único elemento  $y \in Y$ .

Observa-se que nessa definição, uma função de  $X$  em  $Y$  é um subconjunto do produto cartesiano  $X \times Y$ , portanto, é uma relação de  $X$  em  $Y$ . Logo, para cada  $x \in X$ , existe um único  $y \in Y$  tal que  $(x, y) \in f$ .

Em geral, denota-se uma função  $f$  de  $X$  em  $Y$  por  $f : X \rightarrow Y$ . O elemento  $y = f(x) \in Y$  é o valor que  $f$  assume em  $x$  (ou no ponto  $x$ ). Portanto, não devemos confundir  $f$  com  $f(x)$ . Como a função  $f$  é uma relação, então chamaremos os conjuntos  $X$  e  $Y$  de **domínio** e **contradomínio** de  $f$ , respectivamente.

Utilizar-se-a a notação  $x \mapsto f(x)$  para indicar que  $f$  associa ao valor  $f(x)$ . Escreve-se,  $f : X \rightarrow Y$ , em que  $x \mapsto f(x)$ . De modo que a função  $f$  tenha domínio  $X$ , a regra de  $f$  deve ser válida para todo  $x \in X$ .

**Exemplo 7** Considere  $X = Y = \mathbb{N}$  e a função  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  que associa cada  $x \in \mathbb{N}$  o dobro de seu valor. Por exemplo,  $f(1) = 2 \cdot 1 = 2$ ,  $f(2) = 2 \cdot 2 = 4$ , etc. Assim,  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , com  $x \mapsto 2x$ .

**Exemplo 8** Seja  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  a função que associa  $x \in \mathbb{N}$  ao número ímpar  $y$  maior do que  $2x$  e imediatamente posterior a  $x$ . Por exemplo,  $g(1) = 3$ ,  $g(2) = 5$ ,  $g(3) = 7$ , etc. Em geral,  $g(x) = 2x + 1$ , que é regra que caracteriza  $g$ .

# Capítulo 4

## A Formalização do Conceito de Função

### 4.1 Introdução

Ao longo de vários anos de atividade docente, pude observar a existência de grande dificuldade nos alunos quando se trabalha o conteúdo de função, as principais dificuldades ocorrem sobretudo pela não compreensão do conceito de função, o que, conseqüentemente, prejudica o discente a reconhecer as relações que ocorrem entre grandezas presentes em um evento, a relação de dependência e a correspondência existente entre variáveis, seja numa situação do cotidiano ou quando se observa fenômenos da natureza, fatores necessários para a formalização do conceito de funções, o que traz prejuízo não somente no estudo de conteúdos matemáticos como também no estudo de outras disciplinas, como a Física e a Química.

### 4.2 A ideia de Função

De forma a introduzir, implicitamente, o conceito de função, abordaremos alguns problemas que relacionam grandezas, conforme historicamente se desenvolveu a construção da definição de função dentro de uma visão contextualizada.

Acreditamos que apresentar o conceito de função como uma mera relação do produto cartesiano de dois conjuntos  $A$  e  $B$  somente valoriza a formalização matemática e não colabora para o desenvolvimento do conceito de função. Assim, o estudo de função deve ser desenvolvido considerando as noções de correspondência entre grandezas, dependência entre grandezas, variáveis para representar essas grandezas, taxa de variação entre variáveis e da observação de regularidade.

Neste contexto, Lima [7] afirma:

*Praticamente todos os textos escolares em uso no nosso país definem uma função  $f : X \rightarrow Y$  como subconjunto do produto cartesiano  $X \times Y$ [...]Essa definição apresenta o inconveniente de ser formal, estática e não transmitir a ideia intuitiva de função como correspondência, transformação, dependência (uma grandeza função de outra) ou resultado de um movimento[...]Se definimos uma função  $f : X \rightarrow Y$  como um subconjunto do produto cartesiano  $X \times Y$ , qual seria a definição matemática do gráfico de uma função? (p.85)*

Assim sendo, é importante mostrar ao aluno a relação de dependência existente entre grandezas, presente em várias situações do cotidiano, seja nas relações comerciais, em fenômenos da natureza, por exemplo, construindo o conceito de *variável* e de *dependência* entre variáveis.

Para tanto, podemos explorar diversas situações reais, tais como:

- Tempo gasto por um veículo para percorrer um trajeto e a velocidade média;
- Crescimento ou decréscimo de uma determinada população ao longo do tempo;
- Quantidade adquirida de um determinado produto e o valor final a ser pago;
- Perímetro de um polígono com a medida do lado do polígono.

Diante deste aspecto, apresentar-se-á sugestões de problemas que trazem, intuitivamente, situações que desenvolvam o conceito de função de forma a dar significado a formalização da definição de função que será apresentada brevemente.

### 4.2.1 Situação Problema

Alessandra, técnica em informática, presta serviço para uma empresa. Ela recebe R\$ 8,00 por hora trabalhada.

A tabela abaixo expressa o valor que Alessandra receberá de acordo com a quantidade de horas trabalhadas.

Quantidade de horas trabalhadas	Valor recebido(em R\$)
1	8
2	16
3	24
4	32

Tabela 4.1: Valor recebido por hora trabalhada.

Diante disto responda:

- A) Calcule quanto Alessandra receberá se trabalhar 14 horas para essa empresa.
- B) Calcule a quantidade de horas que ela trabalhou se recebeu da empresa R\$ 900,00.
- C) O que determina o ganho mensal de Alessandra?
- D) Escreva uma expressão algébrica para indicar o valor do salário de Alessandra de acordo com o tempo de trabalho.

Deve-se explorar, do aluno, os conhecimentos que consideramos pré-estabelecidos, como, por exemplo, o conceito de grandezas diretamente proporcionais. Desta forma, o aluno participará ativamente da construção do conhecimento.

Neste aspecto, o problema em questão explora o conceito de grandezas diretamente proporcionais, assim acreditamos que o aluno não terá dificuldade em perceber que o salário de Alessandra *depende* da quantidade de horas trabalhadas.

É importante que o mediador desperte para o aluno, se necessário, qual a relação de dependência existente entre as grandezas presentes no problema, a ponto de construir conjuntamente a relação que determinará o ganho mensal de Alessandra.

### 4.2.2 Situação Problema

Fábio comprou um celular pós-pago. Ele paga uma assinatura mensal no valor de R\$ 30,00, mais uma taxa de R\$ 0,20 por minuto de conversação. Diante disso responda:

- A) Qual será o valor de sua conta mensal se o tempo acumulado de conversação nas ligações feitas por Fábio foi de 60 minutos?
- B) Sabendo que Fábio pagou R\$ 80,00, qual foi o tempo de conversação nas ligações feitas por ele no mês?
- C) É possível estabelecer uma expressão algébrica que indique o valor da conta ao final do mês independentemente do tempo de conversação?

Note que para resolver o item “A”, desse problema, o aluno não necessita conhecer a definição formalizada de função, embora exista uma relação de dependência entre as grandezas envolvidas.

O aluno precisa perceber que o valor da mensalidade da assinatura *depende* do tempo de conversação, isto é, existe uma relação de dependência entre a *variável* que determina o **valor mensal da assinatura** e a *variável tempo de conversação*.

Por isso, o valor da assinatura mensal será determinado pela soma da parte fixa da assinatura, no caso, R\$ 30,00, com a parte *variável*, encontrada pelo produto  $60 \times 0,20 = 12,00$ . Portanto o valor mensal da assinatura será de R\$ 42,00.

Observe que para resolver o item “B” utilizamos a ideia de função inversa, embora de forma implícita. Note que para determinar o tempo de conversação nas ligações feitas durante um mês que gerou o valor de R\$ 80,00 de assinatura mensal que pode ser representado, utilizando a notação formal de função, por determinar o valor de  $x$  tal que  $f(x) = 80$ . Visto que são necessários 250 minutos de conversação para obtermos R\$ 80,00 de assinatura mensal, temos então  $f^{-1}(80) = 250$ .

Para resolver os itens “A” e “B” não houve a necessidade da utilização de qualquer expressão algébrica, sendo suficiente ao aluno compreender que o valor da assinatura possui uma parte fixa, no valor de R\$ 30,00 e uma parte *variável*, que depende do tempo de conversação. Por consequência, existe uma relação de correspondência entre as grandezas envolvidas, desenvolvendo a ideia de função.

Nesta fase, os alunos já tiveram contato, durante o ensino fundamental, com expressões algébricas, conhecimento necessário para resolver o item “C”. Sendo suficiente atribuir uma representação para as grandezas envolvidas e estabelecer uma expressão (lei de correspondência) entre essas grandezas. Então, chamando de  $t$  o tempo de conversação, em minutos, e de  $v$  o valor da assinatura mensal, em reais, teremos a expressão algébrica  $v = 30 + 0,20t$ .

O papel do docente ao mediar o processo de resolução do problema é determinante para que o aluno perceba a existência de grandezas variáveis, a relação de dependência existente entre essas grandezas e a correspondência existente.

### 4.2.3 Situação Problema

Leia a tabela a seguir e responda as questões.

Renato comprou uma impressora a jato de tinta para imprimir panfletos de propaganda. Veja, na tabela a seguir, o número de panfleto que esse equipamento imprime de acordo com o tempo.

Intervalo de tempo (em minutos)	Número de panfleto impressos
2	36
4	72
6	108
8	144
10	180

Tabela 4.2: Quantidade de Panfletos por minutos.

- A) Quantos panfletos o equipamento de Renato imprime por minuto?
- B) O número de panfletos impressos ( $n$ ) é função do tempo ( $t$ ) em minutos?
- C) Escreva uma lei (ou regra) que relacione a  $n$  com  $t$ .
- D) Em meia hora, quantos panfletos são impressos?
- D) Renato disse que levará 15 minutos para imprimir 300 panfletos. Isso é possível? Justifique sua resposta.

## 4.3 Definição de Função

Existem várias formas de abordar o conceito de função, entretanto, como apresentado nas situações problemas da seção anterior, acreditamos que explorar o conceito de função como correspondência entre variáveis (ou grandezas), seja o mais adequado, e a que melhor traduz o movimento e o caráter dinâmico característico das funções. Diante desse fato Lima [10], afirma:

*a definição de função como correspondência é mais simples, mais intuitiva e mais acessível ao entendimento do que a outra, que usa uma série de conceitos preliminares, como o produto cartesiano, relação binária, etc. Por isso mesmo ela é utilizada por todos, exceto os autores de livros didáticos brasileiros. (p. 142)*

Nesse trabalho, utilizaremos a definição proposta por Lima [7].

**Definição 4.1** : *Dados os conjuntos  $X, Y$ , uma função  $f : X \rightarrow Y$  é uma regra que determina como associar a cada elemento  $x \in X$  um elemento  $y = f(x)$ . O conjunto  $X$  chama-se domínio e  $Y$  é o **contra-domínio** da função  $f$ . Para cada  $x \in X$ , o elemento  $f(x) \in Y$  chama-se a imagem de  $x$  pela função  $f$ , ou o valor assumido pela função  $f$  no ponto  $x \in X$ . Escreve-se  $x \mapsto f(x)$  para indicar que  $f$  transforma (ou leva)  $x$  em  $f(x)$ .*

Exemplos particularmente simples de funções são a *função identidade*  $f : X \rightarrow X$ , definida por  $f(x) = x$  para todo  $x \in X$  e as *funções constantes*  $f : X \rightarrow Y$ , onde se torna um elemento  $c \in Y$  e se põe  $f(x) = c$  para todo  $x \in X$ .

Podemos representar melhor o domínio, a imagem e o contradomínio utilizando o recurso do diagrama de flechas.

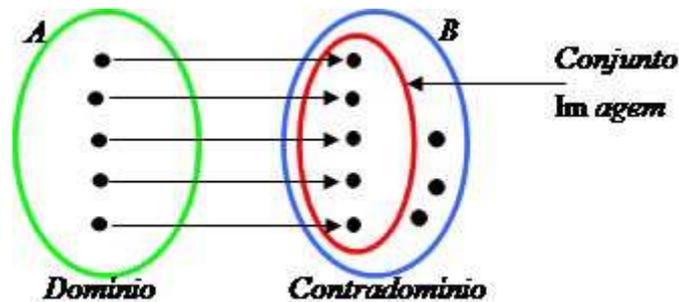


Figura 4.1: Digrama: Domínio, Imagem e Contradomínio

Diante disto, Elon [2] (p.38 – 41) recomenda:

1. "É importante ressaltar que  $f(x)$  é a imagem do elemento  $x \in X$  pela função  $f$ , ou o valor de  $f$  no ponto  $x \in X$ ".
2. Uma correta apresentação do conceito de função possui relação direta com a clareza e a compreensão dos três "elementos" que compõem a função: o Domínio, o Contra-Domínio e a Lei de formação ou correspondência.

Habitualmente, possivelmente levados pela necessidade de comunicação mais ágil, os livros didáticos, como também os próprios docentes, se utilizam da expressão "a função  $f(x)$ " quando o adequado é utilizar a expressão "a função  $f$ ".

Muitas vezes, se faz referência a uma função  $f$  apresentado sua lei de correspondência, sem apresentar, explicitamente, o domínio da função  $f$ . Nestes casos, deveremos subentender que o conjunto Domínio é formado por todos  $x \in X$ , tal que exista  $y = f(x) \in Y$ .

Do ponto de vista formal, sabemos que uma função fica bem definida quando conhecermos o *Domínio*, o *contradomínio* e a *lei de formação*. Assim, não existe função sem que os três elementos sejam especificados. A ideia de que uma lei de formação do tipo  $y = f(x)$ , seja suficiente para definir uma função, omitindo os outros dois elementos, leva o leitor, seja docente ou discente, a alguns enganos.

A notação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  muitas vezes passa despercebida nos enunciados dos exercícios do livros didáticos, sendo necessário que esta notação fique claro para o aprendiz. No texto genérico  $f : X \rightarrow Y$ , onde  $x \mapsto f(x)$ , temos que  $X$  representa o *domínio de  $f$* ,  $Y$  o *contradomínio* e  $y = f(x)$  a relação que associa cada elemento do domínio a um do contradomínio. Saliendo que o conjunto formado pelos elementos do contradomínio que possuem uma relação com algum elemento do domínio formará o conjunto imagem.

Outro aspecto a ser destacado é que nem sempre a lei de correspondência é indicada através de uma expressão algébrica. No campo da geometria podemos usar os seguintes exemplos:

- Seja  $X$  o conjunto dos triângulos do plano  $\pi$ . Se, a cada  $x \in X$ , fizermos corresponder o número real  $f(x) = \text{área do triângulo}$ , obtemos uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Sejam  $S$  o conjunto dos segmentos de reta do plano  $\pi$  e  $P$  o conjunto das retas desse mesmo plano. A regra que associa a cada segmento  $AB \in S$  sua mediatriz  $g(AB)$  define uma função  $g : S \rightarrow P$ .

Podemos utilizar outros exemplos associados a várias situações do cotidiano, tais como:

- A função  $f : C \rightarrow \mathbb{E}$ , onde  $C$  é conjunto formado pelas capitais do Brasil e  $E$  é conjunto formado pelos Estados Brasileiros e, para cada  $c \in C$ ,  $f(c) = E_B$ , sendo  $E_B$  um estado do Brasil.

Acreditamos que essa abordagem pode solidificar os “ingredientes” da função, ou seja, o conjunto domínio, o conjunto imagem e a regra de correspondência.

Podemos verificar pela representação cartesiana, ou seja, pelo gráfico de uma correspondência  $R$  de  $X$  em  $Y$ , se  $R$  é ou não função. Basta verificar a existência de ao menos uma reta paralela ao eixo  $y$  que intersectar o gráfico de  $R$  em mais de um ponto, nesse caso a correspondência  $R$  não é função, caso contrário,  $R$  será função.

**Definição 4.2** O gráfico de uma função  $f : X \rightarrow Y$  é o subconjunto  $G(f)$  do produto cartesiano  $X \times Y$  formado por todos os pares ordenados  $(x, y)$ , onde  $x$  é um ponto qualquer de  $X$  e  $y = f(x)$ . Assim,

Assim:

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\} = \{(x, f(x)); x \in X\}$$

A fim de que um subconjunto  $G \subset X \times Y$  seja o gráfico de alguma função  $f : X \rightarrow Y$  é necessário e suficiente que  $G$  cumpra as seguintes condições:

- Para todo  $x \in X$  existe um par ordenado  $(x, y) \in G$  cuja a mesma primeira coordenada é  $x$ .
- Se  $p = (x, y)$  e  $p' = (x, y')$  são pares pertencentes a  $G$  com mesma primeira coordenada  $x$  então  $y = y'$  (isto é,  $p = p'$ ).

Poderíamos resumir estas condições numa só, dizendo-se que para cada  $x \in X$  existe um, e somente um,  $y \in Y$  tal que  $(x, y) \in G$ .

**Exemplo 9** A correspondência  $f$  de  $A$  em  $\mathbb{R}$ , com  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$ , representado na Figura 4.2, é função, pois toda reta vertical conduzida pelos pontos de abscissa  $x \in A$  encontra sempre o gráfico de  $f$  num só ponto.

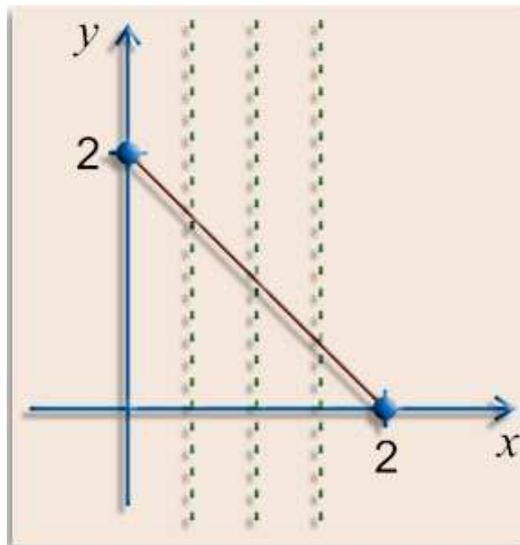


Figura 4.2: O gráfico representa uma Função.

**Exemplo 10** A correspondência  $f$  de  $A$  em  $\mathbb{R}$ , em que  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq -2\}$ , representado na Figura 4.3, não é função, pois há retas verticais que encontram o gráfico de  $f$  em dois pontos.

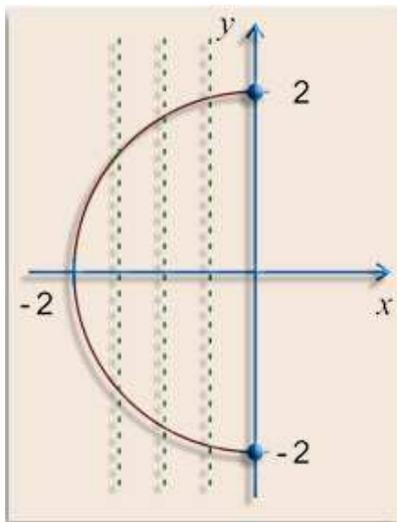


Figura 4.3: O gráfico não representa uma Função.

**Exemplo 11** A correspondência  $f$  de  $A$  em  $\mathbb{R}$ , em que  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ , representado na Figura 4.4, é função de  $A$  em  $\mathbb{R}$ , pois toda reta vertical conduzida pelos pontos de abscissa  $x \in A$  encontra sempre o gráfico de  $f$  num só ponto.

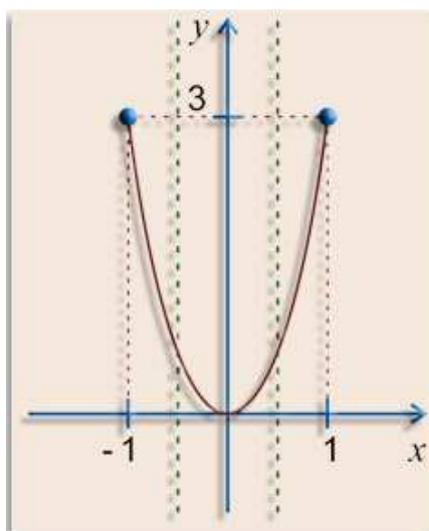


Figura 4.4: O gráfico representa uma Função.

**Exemplo 12** A correspondência  $f$  de  $A$  em  $\mathbb{R}$ , em que  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ , representado na Figura 4.5, não é função, pois há retas verticais que encontram o gráfico de  $f$  em mais de um pontos.

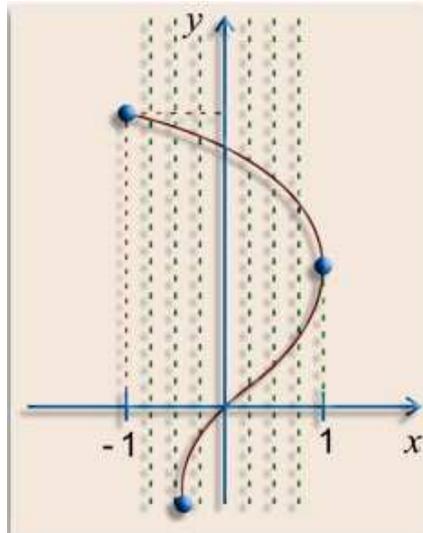


Figura 4.5: O gráfico não representa Função.

Notemos que, feito o gráfico da função no plano cartesiano, conforme Figura 4.6, temos:

- O Domínio é o conjunto formado por todas as abscissas dos pontos do gráfico de  $f$ ;
- A Imagem é o conjunto formado por todas as ordenadas dos pontos do gráfico de  $f$ .

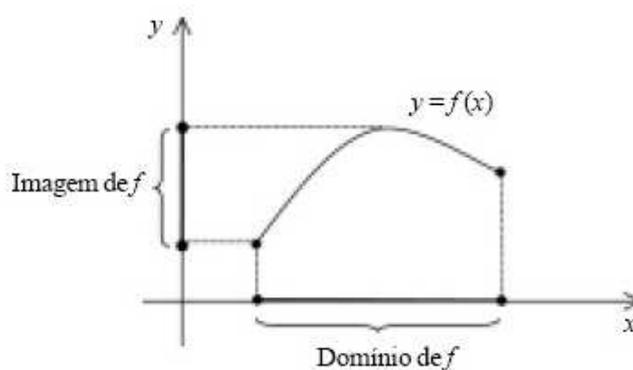


Figura 4.6: O gráfico de uma Função no Plano Cartesiano.

**Exemplo 13** Determinado o domínio e a imagem de uma função através do gráfico.

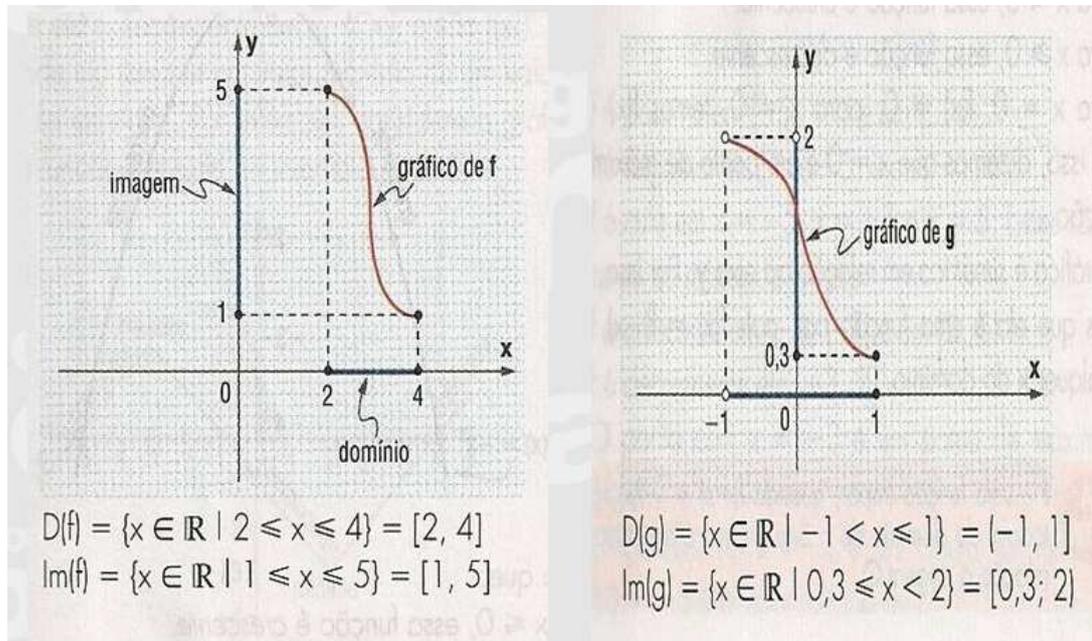


Figura 4.7: Domínio e imagem de uma função.

## 4.4 Função Crescente e Decrescente

O gráfico de uma função, quando corretamente interpretado, pode nos fornecer inúmeras informações sobre o comportamento da função. Nesta seção estudaremos várias características gerais de funções e aprenderemos a interpretá-las graficamente.

Se o gráfico de uma função sobe da esquerda para a direita, dizemos que a função é crescente. Se o gráfico da função cai da esquerda para a direita, dizemos que a função é decrescente. Se o gráfico da função é horizontal, em um determinado trecho, a função é constante naquele trecho.

Estas observações podem ser traduzidas em linguagem matemática, pelas condições que aparecem nas definições a seguir.

**Definição 4.3** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é crescente no intervalo  $I$  contido em  $\mathbb{R}$ , se para todo  $x_1 < x_2$ , com  $x_1, x_2 \in I$ , tivermos  $f(x_1) < f(x_2)$ .

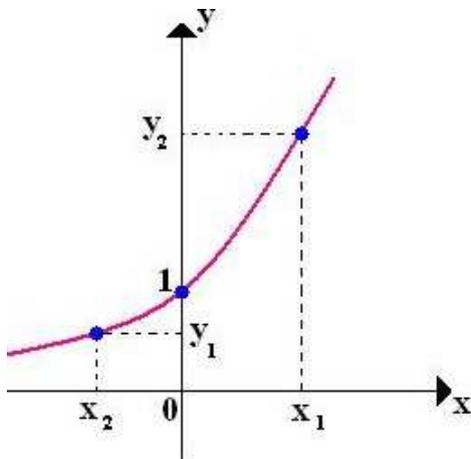


Figura 4.8: Função crescente.

Assim,

$$\text{Para todo } x_1 < x_2, \text{ com } x_1, x_2 \in I \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

**Definição 4.4** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é decrescente no intervalo  $I$  contido em  $\mathbb{R}$  se para todo  $x_1 < x_2$ , com todo  $x_1, x_2 \in I$ , tivermos  $f(x_1) > f(x_2)$ .

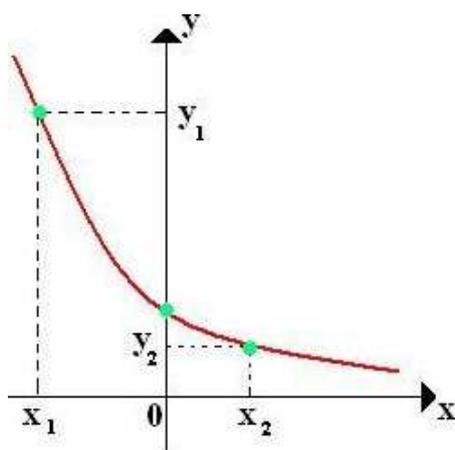


Figura 4.9: Função decrescente.

Assim,

$$\text{Para todo } x_1 < x_2, \text{ com } x_1, x_2 \in I \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

**Definição 4.5** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é constante no intervalo  $I$  contido em  $\mathbb{R}$  se para todo  $x_1, x_2 \in I$ , tivermos  $f(x_1) = f(x_2)$ .

Assim,

$$\text{Para todo } x_1, x_2 \in I \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

**Exemplo 14** Seja a função  $f : [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2; & -2 \leq x \leq 0 \\ -2x+2; & 0 < x \leq 2 \\ x-4; & 2 < x \leq 3 \\ -1; & 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

Traçando o gráfico desta função obtemos a Figura 4.10. Analisando este gráfico podemos observar que esta função é constante para valores de  $x$  maiores ou iguais a  $-2$  e menores ou iguais a  $0$ , decrescente para valores de  $x$  maiores que  $0$  e menores ou iguais a  $2$ , é crescente para valores de  $x$  maiores que  $2$  e menores ou iguais a  $3$ , e é volta a ser constante para valores de  $x$  maiores que  $3$  e menores ou iguais que  $4$ .

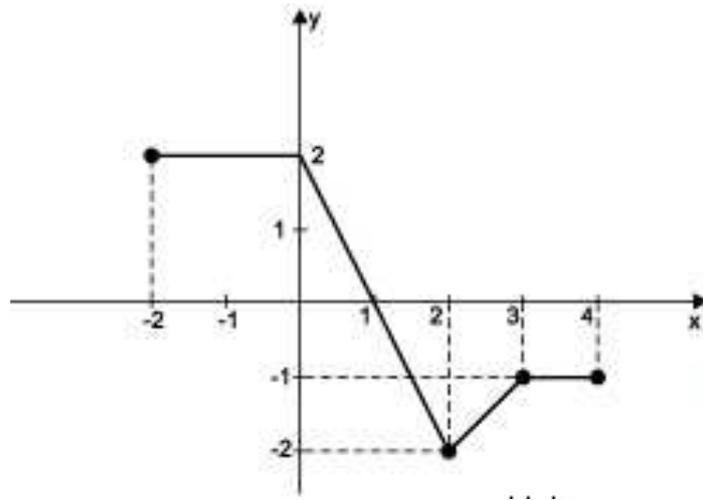


Figura 4.10: Função crescente e decrescente.

Para confirmar o resultado de nossas observações precisamos provar que:

1. Para todo  $x_1$  e  $x_2$ , tal que  $-2 \leq x_1, x_2 \leq 0$ , temos que  $f(x_1) = f(x_2)$ ;
2. Para  $0 < x_1, x_2 \leq 2$ , se  $x_1 < x_2$ , temos  $f(x_1) > f(x_2)$ ;
3. Para  $2 < x_1, x_2 \leq 3$ , se  $x_1 < x_2$ , temos  $f(x_1) < f(x_2)$ ;
4. Para todo  $x_1$  e  $x_2$ , tal que  $3 < x_1, x_2 \leq 4$ , temos que  $f(x_1) = f(x_2)$ .

Para provar o item (2), por exemplo, basta observar que se  $x_1 < x_2$ , temos que:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \Rightarrow -2x_1 + 2 > -2x_2 + 2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

A demonstração dos demais itens se faz da mesma maneira.

## 4.5 Função injetora, sobrejetora e bijetora

Os conceitos apresentados a seguir serão necessários para o entendimento do conceito de função inversa.

Funções para as quais elementos com mesma imagem implicam na igualdade deles constituem uma classe importante de funções que destacaremos nessa seção.

Observe o gráfico da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  abaixo:

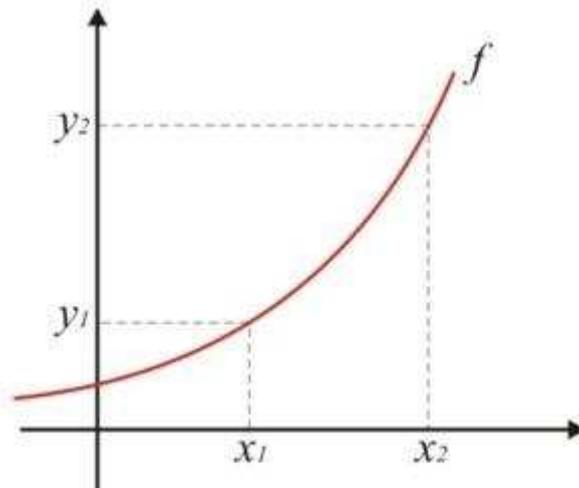


Figura 4.11: Função injetora.

Note que para valores diferentes de  $x$  estão correspondendo a valores diferentes de  $y = f(x)$ , ou seja, se  $x_1 \neq x_2$  então  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

Note que o mesmo não ocorre no gráfico seguinte:

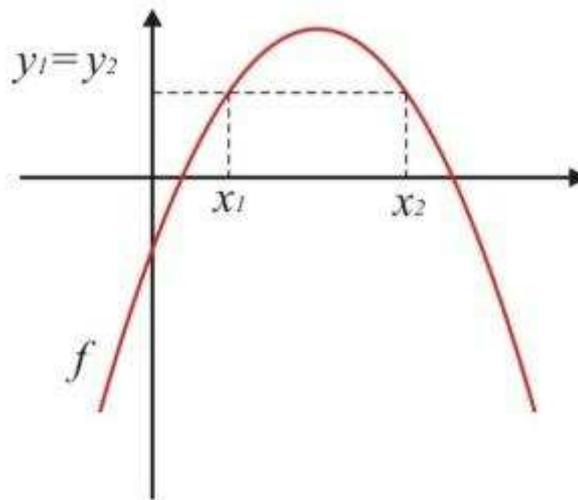


Figura 4.12: Função não injetora.

Existem valores diferentes de  $x$  que possuem a mesma imagem, ou seja, existe  $x_1 \neq x_2$ , tal que  $f(x_1) = f(x_2)$ .

Se uma função é só crescente ou só decrescente, valores diferentes de  $x$  possuem imagens diferentes. Quando isso ocorre dizemos que a função é *injetora*.

**Definição 4.6** Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é injetora se, e somente se, para elementos distintos do domínio, tem-se imagens distintas em  $Y$ .

Em lugar de dizermos “ $f$  é uma função injetora de  $X$  em  $Y$ ”, podemos dizer “ $f$  é uma injeção de  $X$  em  $Y$ ”.

Assim, uma função é dita injetora se:

$$\text{Para todo } x_1 \neq x_2, \text{ com } x_1, x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \text{ ou ainda, se } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

**Exemplo 15** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2 - 1$  não é injetora, pois;

- Para  $x = 1$  corresponde  $f(1) = 0$ .
- Para  $x = -1$  corresponde  $f(-1) = 0$ .

Observe que temos dois valores diferentes de  $x$  associados a um mesmo valor para a função, ou seja,  $f(1) = f(-1) = 0$ .

**Exemplo 16** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 2x$  é injetora, pois faz corresponder a cada número real a seu dobro e não existem dois números reais diferentes que tenham o mesmo dobro.

Em algumas funções pode ocorrer a igualdade entre o conjunto *imagem* e o *contradomínio*. Esse fato motiva a seguinte definição:

**Definição 4.7** Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é sobrejetora se, e somente se, o conjunto imagem é igual ao contradomínio  $Y$ .

Em lugar de dizermos “ $f$  é uma função sobrejetora de  $X$  em  $Y$ ”, podemos dizer “ $f$  é uma sobrejeção de  $X$  em  $Y$ ”.

Assim,

Se a função  $f : X \rightarrow Y$  é sobrejetora, então dado  $y \in Y$ , existe  $x \in X$ , tal que  $f(x) = y$

**Exemplo 17** A função  $f$  de  $X = \{-1, 0, 1, 2\}$  em  $Y = \{0, 1, 4\}$  definida pela lei de correspondência  $f(x) = x^2$  é sobrejetora, pois, para todo elemento  $y \in Y$ , existe o elemento  $x \in X$  tal que  $y = x^2$ .

**Exemplo 18** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2$  não é sobrejetora, pois existem elementos do contradomínio que não fazem parte da imagem. Por exemplo, para  $x = -4 \in \mathbb{R}$ , não existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x^2 = -4$ .

Existem funções que são, simultaneamente, *injetora* e *sobrejetora*. Esse fato motiva a seguinte definição:

**Definição 4.8** Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é bijetora se, e somente se,  $f$  for injetora e sobrejetora.

Em lugar de dizermos “ $f$  é uma função bijetora de  $X$  em  $Y$ ”, podemos dizer “ $f$  é uma bijeção de  $X$  em  $Y$ ”.

**Exemplo 19** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 3x$  é bijetora, pois ela é simultaneamente injetora e sobrejetora; para cada número real do contradomínio  $\mathbb{R}$  existe um, e somente um, correspondente do domínio  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 20** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  definida por  $f(x) = x^2$ , não é bijetora, pois, embora seja sobrejetora, ela não é injetora. Note que para  $x = 3$  e  $x = -3$ , por exemplo, temos  $f(3) = f(-3) = 9$ , ou seja, para valores distintos do domínio temos o mesmo correspondente associado no contradomínio.

**Exemplo 21** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 2^x$  não é bijetora, pois, embora seja injetora, ela não é sobrejetora. Não existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = 0$  ou  $f(x)$  seja negativo.

É importante salientar ao aluno que existem funções que não são sobrejetoras nem injetoras. Veja, a função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  definida por  $f(x) = |x|$ . Note que:

- A função não é sobrejetora, pois, por exemplo,  $-2 \in \mathbb{R}$ , não existe  $x \in \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = |x| = -2$ .
- A função não é injetora, pois, por exemplo, dados  $x_1 = -2$  e  $x_2 = 2$ , temos  $f(x_1) = f(x_2) = 2$ .

Podemos identificar se uma função  $f$  é injetora ou sobrejetora ou bijetora através de seu gráfico. Para isto, basta verificarmos o número de pontos de interseção das retas paralelas ao eixo dos  $x$ , conduzidas por cada ponto  $(0, y)$  em que  $y \in Y$ , em que  $Y$  é o contradomínio de  $f$ .

- Se cada uma dessas retas cortar o gráfico em um só ponto ou não cortar o gráfico, então a função é *injetora*.

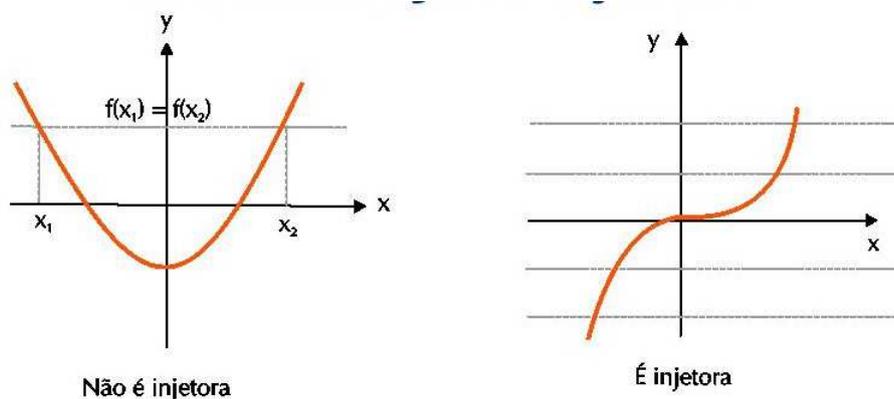


Figura 4.13: Função Injetora.

- Se cada uma das retas cortar o gráfico em um ou mais pontos, ou seja, não existir valores “sobrando” do contradomínio, então a função é *sobrejetora*.

**Exemplo 22** Seja  $f : A \rightarrow B$  uma função. Então:

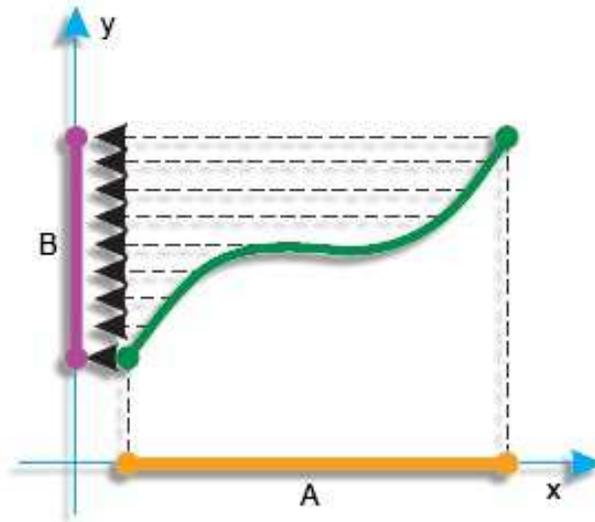


Figura 4.14: A função  $f$  é Sobrejetora (imagem igual ao contradomínio).

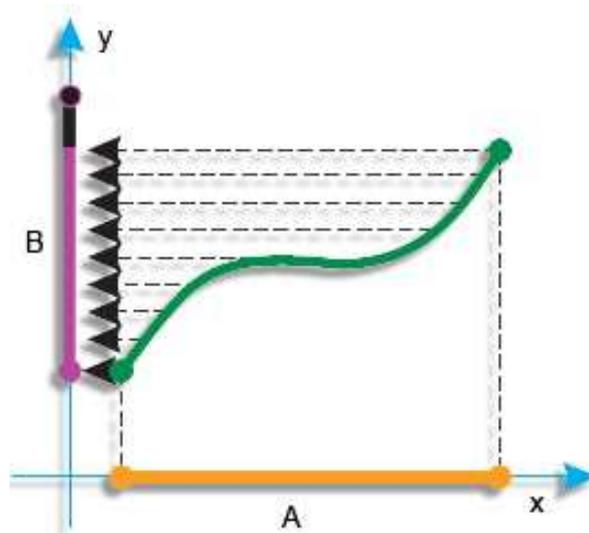


Figura 4.15: A função  $f$  não é Sobrejetora (imagem diferente do contra-domínio).

## 4.6 Função Composta

Consideremos as funções  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$ . Seja um elemento  $x \in A$ , a função  $x$  transforma  $x$  no elemento  $y = f(x) \in B$ . Assim, aplicado o elemento  $y \in B$  na função  $g$ , teremos  $g(y) \in C$ , ou seja,  $g(f(x)) \in C$ . Portanto, para cada  $x \in A$ , esse procedimento dá origem uma nova função de  $A$  em  $C$ . Diante desse fato formalizaremos a seguinte definição:

**Definição 4.9** Dadas duas funções reais  $f$  e  $g$ , chama-se composta de  $f$  e  $g$  a função definida por  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  cujo domínio

$$D(g \circ f) = \{x \mid x \in D(f), f(x) \in D(g)\}$$

e o contradomínio de  $g \circ f$  será o contradomínio da função  $g$ .

Assim devemos:

- Aplicar  $x$  a função  $f$ , obtendo-se  $f(x)$ .
- Aplicar  $f(x)$  a função  $g$ , obtendo-se  $g(f(x))$ .

**Exemplo 23** Sejam os conjuntos  $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ ,  $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  e  $Z = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  e as funções:

- $f : X \rightarrow Y$ , definida por  $f(x) = x^2$ .
- $g : Y \rightarrow Z$ , definida por  $g(x) = 2x + 1$ .

Veja, por exemplo, que  $f(2) = 4$ ,  $g(4) = 9$  e  $h(2) = 9$ , ou seja,  $h(2) = (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 9$ .

Para obtermos a lei de correspondência da função composta  $h(x) = (g \circ f)(x)$ , fazemos assim:  $g(f(x))$  é obtida a partir de  $g(x)$  trocando-se  $x$  por  $f(x)$ .

No exemplo anterior, temos:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2 \cdot f(x) + 1 = 2x^2 + 1$$

Assim, para encontrar  $h(2)$  devemos:

$$h(2) = 2 \cdot 2^2 + 1 = 9$$

**Exemplo 24** Sejam as funções reais  $f$  e  $g$  definidas por  $f(x) = x + 1$  e  $g(x) = x^2 + x + 1$ .

Notemos que a função composta  $(g \circ f)(x)$  é definida por:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + f(x) + 1 = (x + 1)^2 + (x + 1) + 1 = x^2 + 3x + 3$$

Vamos obter agora a função composta  $(f \circ g)(x)$ :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = x^2 + x + 1 + 1 = x^2 + x + 2$$

De onde podemos concluir que  $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$ , ou seja, a composição de funções nem sempre é comutativo.

## 4.7 Função Inversa

Durante o ensino médio o aluno é desafiado a resolver situações, pela as quais se exigem a utilização de estratégias e habilidades utilizando a ideia de operações opostas, de forma semelhante podemos utilizar essas estratégias com funções. Acompanhe a situação a seguir:

Para facilitar seu trabalho, uma vendedora de camisetas fez uma tabela relacionando a quantidade de camisetas e o preço.

Quantidade de camisetas	1	2	3	4	5	6
Preço (em R\$)	15,00	30,00	45,00	60,00	75,00	90,00

Tabela 4.3: Valor a pagar pela quantidade de camisetas.

Com essa situação, podemos pensar em duas funções. Para tanto, considere a quantidade de camisas como sendo os elementos do conjunto  $A$ , ou seja,  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , e os valores pagos por conforme a quantidade de camisas os elementos do conjunto  $B$ , ou seja,  $B = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$ .

Assim, seja  $f : A \rightarrow B$  a função que associa o número de camisetas ao seu preço.

Número de camisetas (A)	Preço (B)
1	15
2	30
3	45
4	60
5	75
6	90

Tabela 4.4: Função  $f : A \rightarrow B$ .

Considere agora  $g : B \rightarrow A$  a função que associa o preço ao número de camisetas.

Preço (B)	Número de camisetas (A)
15	1
30	2
45	3
60	4
75	5
90	6

Tabela 4.5: Função  $g : B \rightarrow A$ .

Observe que  $f$  e  $g$  são funções bijetoras e o domínio da função  $f$  é igual a imagem de função  $g$ , além disso, o domínio da função  $g$  é igual a imagem de função  $f$ . Nesse caso dizemos que uma função é a **inversa** da outra. Diante disso apresentamos a seguinte definição:

**Definição 4.10** Diz-se que a função  $g : Y \rightarrow X$  é inversa da função  $f : X \rightarrow Y$  quando se tem  $g(f(x)) = x$ , para todo  $x \in X$  e  $f(g(y)) = y$ , para todo  $y \in Y$ .

**Exemplo 25** Sejam as funções  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow A$ , onde  $A = \{4, 6, 8\}$  e  $B = \{-1, 1, 3\}$ , tais que:

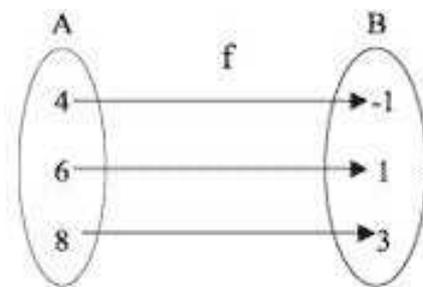


Figura 4.16: Função Inversa

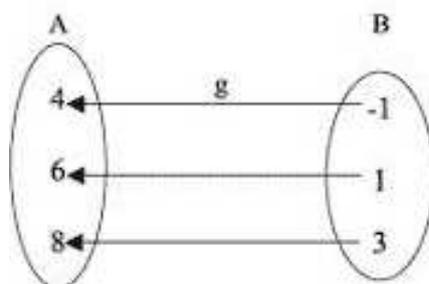


Figura 4.17: Função Inversa 2.

Note que:

- $g(f(4)) = g(-1) = 4$ ;
- $g(f(6)) = g(1) = 6$ ;
- $g(f(8)) = g(3) = 8$ ;

Portanto, para todo valor do domínio da função  $f$ , temos  $g(f(x)) = x$ . De forma análoga, temos:

- $f(g(-1)) = f(4) = -1$ ;
- $f(g(1)) = f(6) = 1$ ;
- $f(g(3)) = f(8) = 3$ ;

Portanto, para todo valor do domínio da função  $g$ , temos  $f(g(y)) = y$ .

**Lema 4.1** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função. Se existe uma função  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $f(g(y)) = y$ , para todo  $y \in Y$ , então  $f$  é sobrejetora e  $g$  é injetora.*

**Demonstração:**

*Suponha inicialmente que  $g(y_1) = g(y_2)$ , logo  $f(g(y_1)) = f(g(y_2)) \Rightarrow y_1 = y_2$ . Portanto  $g$  é injetora.*

*Consideremos agora  $y \in Y$ , temos que  $g(y) = x \in X$ . Logo  $f(x) = f(g(y)) = y$ . Portanto,  $f$  é sobrejetora.*

*Como queríamos demonstrar.*

**Lema 4.2** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função. Se existe uma função  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $g(f(x)) = x$ , para todo  $x \in X$ , então  $f$  é injetora e  $g$  é sobrejetora.*

**Demonstração:**

*Suponha, inicialmente, que  $f(x_1) = f(x_2)$ , logo  $g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$ . Portanto  $f$  é injetora.*

*Consideremos agora  $x \in X$ , temos que  $f(x) = y \in Y$ . Logo  $g(y) = g(f(x)) = x$ . Portanto,  $g$  é sobrejetora.*

*Como queríamos demonstrar.*

Em consequência dos lemas 4.1 e 4.2 temos o teorema seguinte.

**Teorema 4.3** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma se existe uma função  $g : Y \rightarrow X$ , com  $f(g(y)) = y$ , para todo  $y \in Y$  e  $g(f(x)) = x$ , para todo  $x \in X$ . Então  $f$  é bijetora.*

Nesse caso a função  $g$  é dita a inversa da função  $f$ , e de forma análoga, a função  $f$  também será a inversa da função  $g$ . Indicaremos a função inversa de  $f$  por  $f^{-1}$ .

Dada a função bijetora  $f$  de  $X$  em  $Y$ , com  $y = f(x)$ , tal que  $f(x)$  esteja definida algebricamente, em certos casos, para obtermos a sentença aberta que define  $f^{-1}$ , procedemos do seguinte modo:

- na sentença  $y = f(x)$  fazemos uma mudança de variável, isto é, trocamos  $x$  por  $y$  e  $y$  por  $x$ , obtendo  $x = f(y)$ ;

- transformamos algebricamente a expressão  $x = f(y)$ , expressando  $y$  em função de  $x$  para obtermos  $y = f^{-1}(x)$ .

**Exemplo 26** Sabendo-se que a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = 3x + 2$  é bijetora. Determine sua inversa.

Note que a função pode ser indicada por  $f(x) = y = 3x + 2$ , Assim:

- Permutado as variáveis, teremos  $x = 3y + 2$ ;
- Expressando  $y$  em função de  $x$ :

$$x = 3y + 2 \Rightarrow 3y = x - 2 \Rightarrow y = \frac{x-2}{3}.$$

Portando a função inversa  $f^{-1}$  em  $\mathbb{R}$  procurada é definida por  $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$ .

### Observações

1. Os pares ordenados que formam  $f^{-1}$  podem ser obtidos dos pares ordenados de  $f$ , permutando-se os elementos de cada par, isto é:

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$$

. Assim, se considerarmos a função inversa de  $f^{-1}$ , teremos:

$$(y, x) \in f^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in (f^{-1})^{-1}$$

. Note que, a inversa de  $f^{-1}$  é a própria função  $f$ , ou seja  $(f^{-1})^{-1} = f$ . Podemos assim afirmar que  $f$  e  $f^{-1}$  são inversas entre si, ou melhor, uma é a inversa da outra.

2. O domínio da função  $f^{-1}$  é  $Y$ , que é a imagem da função  $f$ . A imagem da função  $f^{-1}$  é  $X$ , que é o domínio da função  $f$ .

# Capítulo 5

## Abordando Função no Ensino Médio

### 5.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos a importância do ensino de Função no Ensino Médio à luz dos Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN's [3], onde destaca-se o papel formativo e instrumental que pode-se explorar desse tema. Destaremos ainda, algumas considerações sobre o ensino de função na educação básica, durante o Movimento da Matemática Moderna no Brasil.

### 5.2 O Conceito de Função no Movimento da Matemática Moderna

O surgimento da Matemática Moderna no Brasil se deu pela idealização de movimentos de mudanças que ocorriam na Europa, e tinham como argumento aproximar a matemática trabalhada na escola básica com a produzida pelos pesquisadores da área.

Ao aproximar a matemática trabalhada na escola básica com a produzida pelos pesquisadores da área, os seguidores do Movimento da Matemática Moderna desejavam uma matemática menos estática e mais funcional para atender a uma sociedade que passava um processo de modernização e industrialização.

A matemática proposta pelo movimento, tem como base o estruturalismo e o uso de conceitos unificadores como a função e conjuntos que são bastantes difundidos. Portanto, podemos destacar que com a Matemática Moderna o conceito de função é considerado base para o estudo das estruturas dividindo com os conjuntos a condição de unificador da matemática.

A principal consequência dessa reforma na atividade pedagógica é percebida na exigência de alguns pré-requisitos para o conceito de função: noção de conjuntos, relação, operações binárias, plano cartesiano.

Podemos notar essa influência no atual currículo presente nas escolas, no uso ainda de uma matemática estruturalista, nas ideias de pre-requisitos para consolidação de saberes formais em Matemática.

### 5.3 O ensino de Função segundo o PCN

De acordo com os PCN's [3], a matemática no Ensino Médio possui, dentre outros aspectos, o valor formativo, além de desempenhar um papel instrumental. Acrescenta, também, que o valor formativo ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, entretanto, a matemática é utilizada como ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas atividades humanas, desempenhando um papel instrumental.

Quanto ao valor formativo, os PCN's [3] acrescenta:

*Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e outras capacidades pessoais.*

No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio os PCN's [3] relatam:

*"ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno."*

Dentro desse contexto, o ensino de função no Ensino Médio converge para ambos os aspectos descritos, pois colabora para que o aluno estruture o pensamento e o raciocínio dedutivo, desenvolvendo a capacidade de resolver problemas diante de uma situação real, e para tanto se utiliza de técnicas e estratégias, contidas na formalização matemática do conceito de função, as quais são amplamente utilizadas por outras áreas do conhecimento.

Segundo os PCN's [3], as finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar ao aluno a:

- Compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica;
- Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- Desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- Utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- Expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
- Estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- Reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimento associados às diferentes representações;
- Promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Entre os objetivos apresentados, levar o aluno a reconhecer as conexões entre os diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo é uma importante ferramenta para dar sentido e motivar a aprendizagem. Do mesmo modo, trabalhar os conteúdos matemáticos, de forma isolada e desprovidos de aplicações, pode levar o aluno ao desinteresse, dificultando a aprendizagem.

Acreditamos que a abrangência das conexões que podem ser construídas e desenvolvidos durante o processo de ensino-aprendizagem, a partir da apresentação do conteúdo de funções durante o Ensino Médio, são tão amplas que podemos afirmar que existe a presença deste conteúdo em todos os objetivos elencados.

Os PCN's [3] destacam a importância do ensino de função ao afirmar:

*"Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problemas de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretar e investigar em Matemática."*

Destaca-se que os PCN's [3] enfatizam a necessidade de redimensionar os procedimentos metodológicos utilizados no ensino de Matemática, pois a postura tradicional adotada vem restringido o ensino matemático ao formalismo exagerado, baseado na apresentação inicial de definições e exemplos, e posterior exercitação, com aplicação de exercícios de fixação.

O ensino de função, durante o ensino médio, apresenta-se como uma oportunidade para o mediador do ensino de matemática quebrar esse paradigma. Deve-se propor uma sequência didática que permita ao aluno vivenciar a construção do conceito, numa visão contextualizada e mostrando as conexões entre diferentes formas de pensamento matemático como também aplicações em outras áreas do conhecimento, antes da formalização matemática.

Assim, o ensino de função não deve ser apresentado de forma isolada e repleto do formalismo matemática. Diante deste fato os PCS's [3] destacam:

*O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As sequências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo dos polinômios e equações algébricas podem ser incluídas no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente.*

Salienta-se que a Matemática do Ensino Médio, conforme ressalta os PCN's [3], tam-

bém deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. *“É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas”*.

Acreditamos que poucos conceitos matemáticos tenham tido tanta influência em vários campos do conhecimento como possui o conceito de função, onde pode-se destacar sua presença em teorias importantes na Física, na Química, na Economia, enfim, o conceito de função esteve presente na evolução de outras ciências, além da Matemática.

Assim, o mediador de ensino de Matemática possui grande responsabilidade diante do processo de ensino e aprendizagem quando aborda os conceitos matemáticos, para tanto se faz necessário uma participação crítica durante todo processo, levando em conta todas as variáveis disponíveis, dentre elas a forma como os conteúdos são apresentados nos livros didáticos, tema no qual abordaremos no próximo capítulo.

## Capítulo 6

# Considerações sobre análise de livros didáticos

### 6.1 Introdução

A postura do docente, como mediador do processo de ensino e aprendizagem determina a forma como o aluno passará a ver determinado conteúdo, ou até mesmo, determinada disciplina. É necessário extrair do mundo do aluno situações pelas quais se possam fazer conexões com o tema ao qual se pretende abordar. Para tanto, o docente utiliza algumas ferramentas que apresentam disponíveis, dentre elas o livro didático é, talvez, o mais acessível.

Entretanto, a postura passível dos professores, diante dos livros didáticos, tem contribuído para o desinteresse dos alunos, sobretudo quanto nos referimos ao ensino de Matemática na Educação Básica, principalmente pelo fato de a Matemática já possuir um estigma tanto no ambiente escolar como na sociedade em geral.

A análise crítica dos livros didáticos constitui-se um desafio a mais para o professor de Matemática, contudo, as horas destinadas a este fim poderão representar o diferencial entre o sucesso e o fracasso diante do processo de ensino-aprendizagem.

Acreditamos, conforme Lima [10], que o docente deve estar atento a forma que os três componentes do ensino de Matemática: *Conceituação, Manipulação e Aplicações*, são abordados nos livros didáticos da disciplina.

## 6.2 Conceituação

Lima [8] define **conceituação** da seguinte forma:

*"A Conceituação compreende a formulação de definições, o enunciado de problemas, o estabelecimento de conexões entre os diversos conceitos, bem como a interpretação e a reformulação dos mesmos sob diferentes aspectos. É importante destacar que a conceituação precisa é indispensável para o êxito das aplicações." (p.1)*

Uma redação adequada e objetiva das definições e propriedades matemáticas permite a simplificação da linguagem, contribuindo para a compreensão do assunto abordado. Pode-se definir um objeto matemático de varias formas, porém quando fazemos uso de uma linguagem clara, correta e objetiva, e principalmente sem a presença de ambiguidades, colaboramos para a assimilação do conceito trabalhado.

Logo, uma boa conceituação permite ao aluno identificar quais as ideias e conceitos que deverão ser empregados, diante de uma situação-problema, favorecendo o surgimento de generalizações.

## 6.3 Manipulação

Até bem pouco tempo o ensino de Matemática no Ensino Médio era praticamente voltado para manipular os objetos matemáticos, constituindo-se em processo enfadonho e mecânico, o qual não despertava o interesse do discente. Diante deste fato, Elon [10] comenta:

*Para analisar corretamente o papel da manipulação, o crítico deve policiar-se atentamente para não incorrer no erro de menosprezá-la. Durante séculos, e ainda hoje, a manipulação quase que monopolizou o ensino da Matemática. (p.182)*

A manipulação permite que o aluno, no momento de resolver um problema de aplicação, se torne mais ágil e preciso ao lidar com equações, fórmulas e operações, fazendo com que sua energia e seu tempo sejam concentrados em pontos realmente importantes, além de auxiliar a fixação de conceitos.

Não obstante, o que deve predominar é o bom-senso do professor na escolha de exercícios e problemas que envolvam manipulação, tendo sempre a preocupação de não cair no erro de propor exercícios que sejam somente uma reprodução mecânica dos exemplos propostos.

## 6.4 Aplicações

As aplicações trazem o que há de mais significativo e bonito na Matemática, que é a essência e a razão de sua existência, além da procura contínua de respostas para problemas que afligem a vida em sociedade, promovendo o desenvolvimento e a melhoria da vida.

Devemos observar que as aplicações são situações propostas oriundas de uma contextualização, de modo que o aluno encontre sentido aos conhecimentos que desejamos trabalhar, esta não deve esta acompanhada de fórmulas. O aluno de posse das informações apresentadas no problema e utilizando como base os conceitos apresentados, construirá uma solução. Portanto, pretende-se que o contexto dê significado ao conteúdo.

Assim, Elon [10] destaca:

*O professor deve considerar como parte integrante e essencial de sua tarefa o desafio, a preocupação de encontrar aplicações interessantes para a matemática que está sendo apresentada. (p.184)*

Essa tarefa não é fácil, requer esforço, tempo, pesquisa, entretanto, o resultado da dedicação trará bons resultados, principalmente quando o aluno percebe o significado e a aplicação real do conteúdo proposto.

## 6.5 Guia de Livros Didáticos do PNLD 2012

O Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), é um programa do Governo Federal, gerenciado pelo MEC, através da Secretária de Educação Básica e do Fundo Nacional Para o Desenvolvimento da Educação, que procura, desde a década de 1990, disponibilizar livros didáticos aos alunos da educação básica da rede pública em todo território Nacional, para tanto mantêm convênios com os Estados e os Municípios.

Não basta disponibilizar livros didáticos se a qualidade não atender as necessidades do processo de ensino-aprendizagem. Assim, PNLD submete os livros didáticos inscritos nesse programa a um processo de avaliação, feito em convênio com instituições de Ensino Superior, emitindo a cada três anos um guia, o qual leva em consideração os seguintes aspectos: Metodologia de Ensino e Aprendizagem, contextualização e a linguagem e aspectos gráficos-editoriais.

O Guia do PNLD [4], do ano de 2012 traz dados relevantes para a utilização do livro didático, enquanto ferramenta pedagógica de destaque no dia a dia da sala de aula. Contudo, o próprio material salienta:

*Valorizar o papel do livro didático não implica, contudo, que ele assuma um papel dominante no ensino em detrimento da atuação do professor. Atuação essa que, além das tarefas inerentes à condução das atividades da sala de aula, pode incluir a busca de fontes bibliográficas complementares. (p.13)*

Considerando a necessidade de avaliar a seleção de conteúdos, o PNLD [4] dividiu os conteúdos da Matemática do ensino médio em seis campos: Números e Operações; Funções; Equações Algébricas; Geometria Analítica; Geometria; Estatística e Probabilidade.

No campo das funções, à luz do guia, considera-se: o conceito de função; sequências; funções afins e afins por partes; funções quadráticas; função exponencial e logarítmicas; funções trigonométricas; matemática financeira e cálculo diferencial.

O PNLD [4] traz algumas considerações a cerca do campo das funções, dentre elas destacamos:

- Diversidade de aplicação e o poder unificador do conceito de função;
- Que as funções se constituem-se em modelos matemáticos utilizados para o estudo dos fenômenos do mundo da Física e Social.

Observa-se o destaque dado, pelo guia ao campo das funções durante o ensino médio, principalmente no primeiro ano, momento em que propiciar as condições adequadas para a compreensão do conceito de função e de suas aplicações.

## **6.6 Roteiro utilizado**

Para balizar nossa análise, construímos o roteiro indicado, o qual considera alguns aspectos presentes no PNLD, com o objetivo de verificar se os componentes básicos do processo de ensino e aprendizagem de matemática, indicados por Elon [8], ou seja, Conceitualização, Manipulação e Aplicação, estão sendo contemplados pelo autor.

- Identificação do Livro (Ficha Técnica);
  - Autor(es);
  - Ano de publicação e edição;
  - Se faz parte do PNLD [4];
- Metodologia utilizada no ensino de função.
  - A maneira como o conceito é introduzido e desenvolvido;

- A retomada de conhecimentos prévios;
- A definição de função apresentada favorece a compreensão dos elementos básicos da função (Domínio, Imagem e a Lei de Formação);
- De que forma ocorre a exploração das representações gráficas;
- Qualidade dos exemplos e exercícios propostos.
- A forma como o autor propõem a aplicação do conteúdo.

# Capítulo 7

## Abordagem do conceito de função do livro - Matemática: Contexto & Aplicações

### 7.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos as considerações sobre a análise realizada do livro didático *Matemática: Conexões & Aplicações* [5], 1ª edição, São Paulo, 2011, segundo o roteiro apresentado no capítulo anterior.

O referido livro didático é de autoria do professor Luiz Roberto Dante, e produzido pela editora Ática. Trata-se de uma coleção com três volumes, contemplando todo o ensino médio, que foi aprovada pelo PNLD do ensino médio, no ano de 2011.

O guia do PNLD [4], indica a seguinte visão geral da coleção:

*Observa-se uma boa conexão entre os diversos campos da Matemática e desta com outras áreas do conhecimento. Também verifica-se a preocupação em articular os conhecimentos novos e os já abordados.*

*A coleção apresenta um excesso de conteúdos e de atividades, em particular no livro da 1ª série. Também há exagero em procedimentos e no uso de terminologia, o que exigirá do docente uma seleção cuidadosa, a fim de priorizar aquelas que considerar indispensáveis à formação dos alunos do ensino médio.*

*Grande parte das atividades e situações-problemas propostas nos livros do aluno são, imediatamente, seguidas de uma abordagem técnica ou teórica. Essa opção pode tornar o desenvolvimento dos conteúdos desinteressantes ou de difícil compreensão.*

O professor Luiz Roberto Dante é considerado um dos grandes autores de livros didáticos da área da Matemática do Brasil, e além da obra em análise, é autor de vários livros, entre os quais: Didática da resolução de problemas de Matemática; Didática da Matemática na pré-escola; Coleção Aprendendo Sempre (1º ao 5º ano); Tudo é Matemática (6º ao 9º ano); Matemática Contexto & Aplicações (Volume único), todos pela editora Ática.

Segue um extrato do currículo do professor Luiz Roberto Dante:

- Livre-docente em Educação Matemática pela Unesp-Rio Claro, SP;
- Doutor em Psicologia da Educação: Ensino da Matemática, pela PUC-São Paulo;
- Mestre em Matemática pela USP;
- Pesquisador em ensino e aprendizagem da Matemática pela Unesp-Rio Claro, SP;
- Ex-professor da rede estadual do Ensino Fundamental e Médio - São Paulo;

Quanto ao campo do conhecimento de Funções, o guia do PNLD-2012 apresenta a seguinte consideração sobre Dante [5]:

*São apresentados exemplos contextualizados de funções antes da sistematização do assunto. O conceito de sequência é articulado com a noção de função, o que é elogiável, mas os exemplos restringem-se, quase sempre, a progressões aritméticas ou geométricas.*

O nosso trabalho se concentrará no volume 1, especificamente no capítulo 3, onde o autor introduz e formaliza o conceito de função, nosso objeto de estudo.

Adiante, nos concentraremos em analisar a sequência didática proposta pelo autor quando apresenta e sistematiza matematicamente o conceito de função, observando se os elementos básicos: *Conceituação, Manipulação e Aplicação*, como indicado por Lima [8], encontram-se contemplados.

## 7.2 Análise da Introdução do capítulo 3

Na introdução do capítulo 3, o autor faz um sucinto relato histórico e aborda o caráter desafiador e generalista da Matemática. Afirma que, foi através da observação e do estudo de modelos presentes nos fenômenos do cotidiano, que surgiu as funções, formalizando matematicamente as “leis que têm como características relacionar as variáveis envolvidas no fenômeno”.



Figura 7.1: Introdução.

O autor ainda destaca a contribuição e as conexões que o estudo das funções possuem com outras áreas de conhecimento, como a Física, a Economia, a Meteorologia, a Genética, e a Engenharia. Além de citar alguns dos grandes nomes da Matemática que, durante o século *XVII*, contribuíram para o desenvolvimento do estudo de função.

Embora Dante [5] apresente uma ilustração, conforme a Figura 7.1 indica, consideramos não possuir uma atratividade visual para o aluno. Nota-se ainda que a ilustração utilizada, possivelmente, não permitira ao aluno da zona rural, por exemplo, fazer uma contextualização do conteúdo proposto e a sua realidade.

Embora o autor tenha enaltecido que o estudo de funções foi fundamental para a construção do conhecimento matemático, acreditamos que poderia ter sido melhor explorado a História da Matemática, desenvolvida ao longo desse processo.

## 7.3 Análise de apresentação do conceito intuitivo de função

Para motivar o aluno, o autor apresenta o conceito intuitivo de função utilizando-se de quatro exemplos, conforme se observa nas Figuras 7.2 e 7.3, os quais relacionam duas grandezas e explora a relação de dependência existente entre essas grandezas.

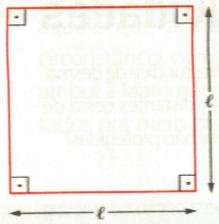
### 2. Explorando intuitivamente a noção de função

A ideia de função está presente quando relacionamos duas grandezas variáveis. Vejamos alguns exemplos.

1º) **Número de litros de gasolina e preço a pagar**  
 Considere a tabela ao lado que relaciona o número de litros de gasolina comprados e o preço a pagar por eles (em maio de 2009).  
 Observe que o preço a pagar é dado *em função* do número de litros comprados, ou seja, o preço a pagar *depende* do número de litros comprados.  
 preço a pagar = R\$ 2,40 vezes o número de litros comprados ou  
 $p = 2,40x$  → lei da função ou fórmula matemática da função ou regra da função

Número de litros	Preço a pagar (R\$)
1	2,40
2	4,80
3	7,20
4	9,60
⋮	⋮
40	96,00
x	2,40x

2º) **Lado do quadrado e perímetro**  
 Veja agora a tabela que relaciona a medida do lado de um quadrado ( $\ell$ ) e o seu perímetro (P):



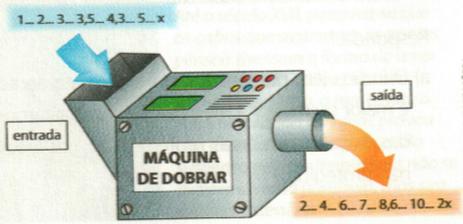
Medida do lado ( $\ell$ )	Perímetro (P)
1	4
2	8
2,5	10
3	12
4,1	16,4
⋮	⋮
$\ell$	$4\ell$

**Para refletir**  
 $p$  é símbolo de semiperímetro. Não existe um símbolo para perímetro. Muitas pessoas utilizam  $2p$  para representá-lo. Aqui usaremos  $P$  para indicar perímetro.

Observe que o perímetro do quadrado é dado *em função* da medida do seu lado, isto é, o perímetro *depende* da medida do lado. A cada valor dado para a medida do lado corresponde um único valor para o perímetro.  
 perímetro = 4 vezes a medida do lado ou  
 $P = 4\ell$  → lei da função ou fórmula matemática da função ou regra da função

Como o perímetro depende da medida do lado, ele é a *variável dependente*, e a medida do lado é chamada de *variável independente*.

3º) **A máquina de dobrar**  
 Observe ao lado o desenho imaginário de uma máquina de dobrar números.  
 Veja que os números que saem são dados *em função* dos números que entram na máquina, ou seja, os números que saem *dependem* dos números que entram. Assim, a *variável dependente* é o número de saída e a *variável independente* é o número de entrada.  
 Neste caso, temos:  
 número de saída ( $n$ ) é igual a duas vezes o número de entrada ( $x$ ) ou  
 $n = 2x$  → regra da função ou lei da função, ou, ainda, fórmula matemática da função



FORMATO COMUNICAÇÃO

Figura 7.2: Conceito Intuitivo 1.

No exemplo 1 foi abordado a relação entre o “Número de litros de gasolina e o preço a pagar”, enquanto que no exemplo 2 foi abordado um tema da geometria plana quando relaciona o “Lado do quadrado e o perímetro”.

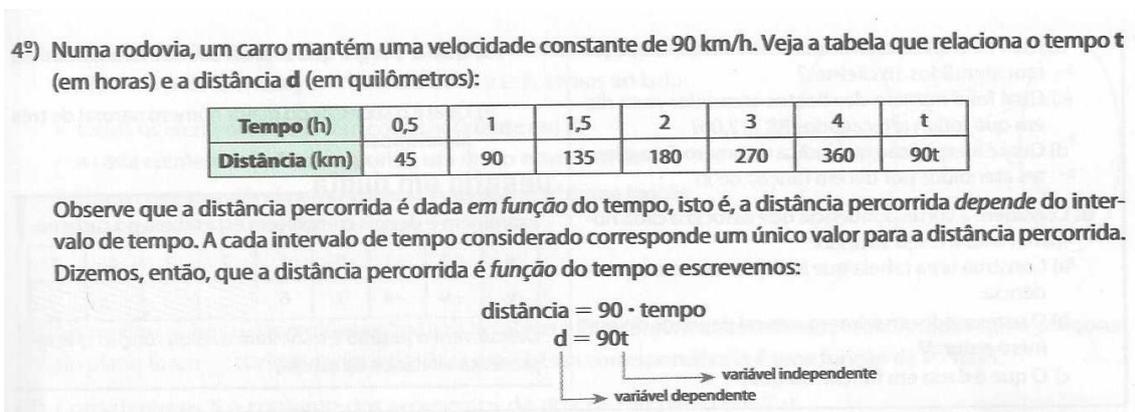


Figura 7.3: Conceito Intuitivo 2.

No exemplo 4 o autor apresenta uma tabela que relaciona as grandezas tempo (h) e distância (km) de um veículo com velocidade constante.

Os temas abordados nestes exemplos são de fácil compreensão para o aluno por serem assuntos próximos de sua realidade e ambos exploram o conceito de proporcionalidade.

Entretanto, no exemplo 3, o autor se utiliza de uma “Máquina de dobrar”, a qual não será possível o aluno fazer uma contextualização com algum situação do seu cotidiano.

Devemos destacar alguns aspectos presentes nos exemplos:

- A existência de expressão algébrica que relaciona as grandezas envolvidas no próprio problema;
- O autor já utiliza os termos “função”, “regra da função”, “fórmula matemática da função” e “lei da função” sem que antes os tenham definidos;
- Explora-se mais a expressão algébrica que a relação de dependência existente entre as grandezas envolvidas no problema.

Acreditamos que essa abordagem valoriza mais a expressão algébrica que relaciona as grandezas envolvidas em detrimento da relação de dependência que se estabelece entre essas grandezas.

Nesta etapa consideramos que o professor deve focar o fato de uma grandeza “variar” na mesma proporção que a outra grandeza, estabelecendo e diferenciando a variável

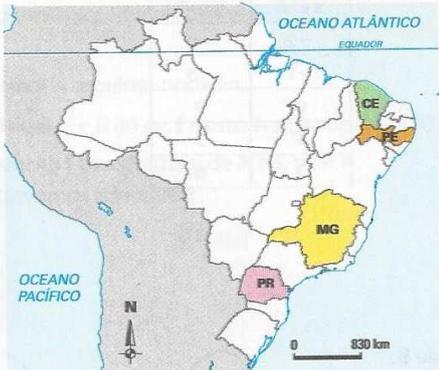
independente da variável dependente. Deve-se ainda criar um ambiente em que o aluno consiga deduzir a expressão algébrica que associa a variável dependente da variável independente.

Observa-se que os exercícios propostos nesta seção do livro mantém a mesma abordagem de valorizar o expressão algébrica, cumprindo um papel meramente mecânico dentro do processo de ensino e aprendizagem, pois não provoca adequadamente o pensamento cognitivo do aluno, conforme indica a Figura 7.4.

**Exercícios propostos** **ATENÇÃO! NÃO ESCREVA NO LIVRO.**

**1.** A tabela a seguir indica o nome de alguns estados e de suas respectivas capitais.

Estados	Capitais
Ceará	Fortaleza
Minas Gerais	Belo Horizonte
São Paulo	São Paulo
Paraná	Curitiba
Pernambuco	Recife



Fonte: Adaptado de Atlas geográfico escolar. Rio de Janeiro: IBGE, 2007.

a) O nome da capital é dado em função do nome do estado?  
 b) O nome da capital depende do nome do estado?  
 c) A cada estado corresponde uma única capital?

**2.** Observe na tabela a medida do lado (em cm) de uma região quadrada e sua área (em cm<sup>2</sup>).

Medida do lado (em cm)	1	3	4	5,5	10	...	$\ell$
Área (em cm <sup>2</sup> )	1	9	16	30,25	100	...	$\ell^2$

a) O que é dado em função do quê?  
 b) Qual é a variável dependente?  
 c) Qual é a variável independente?

d) Qual é a lei da função que associa a medida do lado com a área?  
 e) Qual é a área de uma região quadrada cujo lado mede 12 cm?  
 f) Qual é a medida do lado da região quadrada cuja área é de 169 cm<sup>2</sup>?

**3.** Responda às seguintes questões:

a) A diagonal ( $d$ ) de um quadrado é dada em função do seu lado ( $\ell$ ). Qual é a fórmula matemática que indica essa função?  
 b) O comprimento ( $c$ ) da circunferência é dado em função do seu raio ( $r$ ). Qual é a expressão que indica essa função?  
 c) O número de diagonais ( $d$ ) de um polígono é dado em função do número de lados ( $n$ ) do polígono. Qual é a fórmula matemática que indica essa função?

**4.** A tabela abaixo indica o custo de produção de certo número de peças para informática:

Número de peças	1	2	3	4	5	6	7	8
Custo (R\$)	1,20	2,40	3,60	4,80	6,00	7,20	8,40	9,60

a) A cada número de peças corresponde um único valor em reais?  
 b) O que é dado em função do quê?  
 c) Qual é a fórmula matemática que dá o custo ( $c$ ) em função do número de peças ( $x$ )?  
 d) Qual é o custo de 10 peças? E de 20 peças? E de 50 peças?  
 e) Com um custo de R\$ 120,00, quantas peças podem ser produzidas?

**5.** Um cabeleireiro cobra R\$ 12,00 pelo corte para clientes com hora marcada e R\$ 10,00 sem hora marcada. Ele atende por dia um número fixo de 6 clientes com hora marcada e um número variável  $x$  de clientes sem hora marcada.

a) Escreva a fórmula matemática que fornece a quantidade  $Q$  arrecadada por dia em função do número  $x$ .

**73**

Capítulo 3 | Funções

Figura 7.4: Exercício-Conceito Intuitivo

Veja, por exemplo, o exercício proposto 2, onde o problema já apresenta a expressão algébrica que relaciona a medida do lado e a área da região quadrada, enquanto que no item “d” o autor utiliza o termo “lei da função”.

Acreditamos que o procedimento proposto pelo livro didático deve auxiliar o professor a preparar o aluno, resgatando habilidades e conteúdos já estabelecidas em etapas anteriores, para a formalização matemática do conceito de função.

## **7.4 Análise de retomada dos conhecimentos prévios**

O livro em análise destina o primeiro capítulo, sob o título “Revisão: Produtos Notáveis e fatoração” para fazer um resgate de conteúdos que se supõe já serem do domínio do aluno.

Entretanto, limitou-se ao estudo de expressões algébricas, não sendo dada atenção a outros conteúdos tais como: equações do primeiro e segundo grau, sistemas  $2 \times 2$ , geometria (medidas) e gráficos estatísticos, que serviriam de um bom aquecimento para o início do estudo de Matemática do Ensino Médio.

## 7.5 Análise da formalização do conceito de função

### 7.5.1 Análise da seção: A noção de função por meio de conjunto

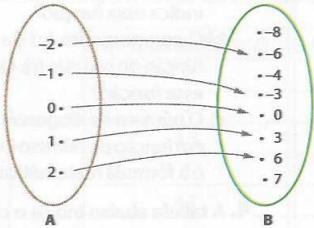
Esta seção o autor, através de exemplos que utilizam a linguagem de conjuntos, prepara o aluno para a definição formalizada do conceito de função.

Observa-se a existência de exemplos de relação entre dois conjuntos  $A$  e  $B$ , onde a relação definida é função e casos onde a relação definida não é função, como se verifica no Figura 7.5.

### 3. A noção de função por meio de conjuntos

Vamos, agora, estudar essa mesma noção de função usando a nomenclatura de conjuntos. Considere os exemplos a seguir.

1º) Observe os conjuntos  $A$  e  $B$  relacionados da seguinte forma: em  $A$  estão alguns números inteiros e em  $B$ , outros. Devemos associar cada elemento de  $A$  a seu triplo em  $B$ .



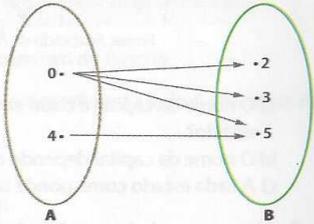
$x \in A$	$y \in B$
-2	-6
-1	-3
0	0
1	3
2	6

Note que:

- todos os elementos de  $A$  têm correspondente em  $B$ ;
- a cada elemento de  $A$  corresponde *um único* elemento de  $B$ .

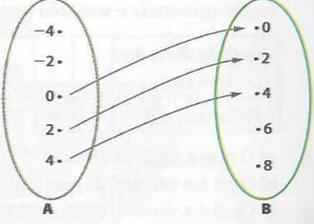
Nesse caso, *temos uma função de  $A$  em  $B$* , expressa pela fórmula  $y = 3x$ .

2º) Dados  $A = \{0, 4\}$  e  $B = \{2, 3, 5\}$ , relacionamos  $A$  e  $B$  da seguinte forma: cada elemento de  $A$  é menor do que um elemento de  $B$ :



Nesse caso *não temos uma função de  $A$  em  $B$* , pois ao elemento 0 de  $A$  correspondem três elementos de  $B$  (2, 3 e 5, pois  $0 < 2$ ,  $0 < 3$  e  $0 < 5$ ), e não apenas um único elemento de  $B$ .

3º) Dados  $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$  e  $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ , associamos os elementos de  $A$  aos elementos de igual valor em  $B$ :



Observe que há elementos em  $A$  (os números  $-4$  e  $-2$ ) que não têm correspondente em  $B$ . Nesse caso *não temos uma função de  $A$  em  $B$* .

74 Matemática

Figura 7.5: Noção de função por meio de conjuntos.

Mesmo tendo utilizado implicitamente o conceito de relação, definida no capítulo 2, em nenhum exemplo foi feito qualquer referencia a este conceito para justificar a definição de função de função, nem antes nem depois de formalizar o definição de função.

O autor, de forma positiva, destaca o termo “correspondência” quando associa os elementos de  $A$  com elementos de  $B$ , ressaltando todos dois pontos básicos para a definição de função.

- Todos os elementos de  $A$  têm correspondência em  $B$ ;
- A cada elemento de  $A$  corresponde um único elemento de  $B$ .

Após essa introdução, feitas através da linguagem de conjunto e com sua utilização, o autor apresenta a definição de função de forma objetiva e clara, em duas linhas, conforme Figura 7.6, sem exagero no formalismo desnecessário e irrelevantes geralmente utilizadas na maioria dos livros didáticos do ensino médio, que definem função como um subconjunto do produto cartesiano.

**Definição e notação**

Dados dois conjuntos não vazios  $A$  e  $B$ , uma função de  $A$  em  $B$  é uma regra que indica como associar cada elemento  $x \in A$  a um único elemento  $y \in B$ .

Usamos a seguinte notação:  
 $f: A \rightarrow B$  ou  $A \xrightarrow{f} B$  (lê-se:  $f$  é uma função de  $A$  em  $B$ )  
A função  $f$  transforma  $x$  de  $A$  em  $y$  de  $B$ .  
Escrevemos isso assim:  
 $y = f(x)$

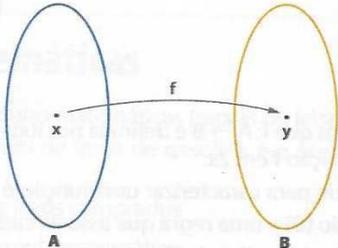


Figura 7.6: Definição de Função.

### 7.5.2 Análise da seção: Domínio, contradomínio e conjunto imagem

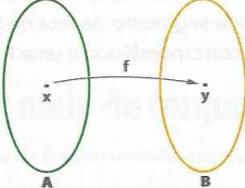
Um dos grandes problemas dos alunos quando se trabalha o conceito de função está na compreensão dos conceitos de domínio, contradomínio e imagem, itens indispensável ao bom entendimento da definição de função.

Geralmente os livros didáticos apresenta tais conceitos com exagero no formalismo em extensas definições e linguagem carregada de símbolos matemáticos. Não estamos desconsiderando a uso da linguagem matemática, entretanto o exagero trás prejuízo ao processo de ensino e aprendizagem.

Diante deste contexto, consideramos adequada a forma como autor apresentou os conceitos de domínio, contradomínio e imagem, que utiliza uma linguagem objetivo e direta, conforme se observa na Figura 7.7.

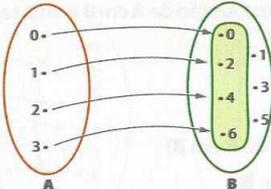
## 4. Domínio, contradomínio e conjunto imagem

Dada uma função  $f$  de  $A$  em  $B$ , o conjunto  $A$  chama-se *domínio* da função ( $D$ ) e o conjunto  $B$ , *contradomínio* ( $CD$ ) da função. Para cada  $x \in A$ , o elemento  $y \in B$  chama-se *imagem de  $x$  pela função  $f$*  ou o valor assumido pela função  $f$  para  $x \in A$ , e o representamos por  $f(x)$  (lê-se  $f$  de  $x$ ). Assim,  $y = f(x)$ .



O conjunto de todos os  $y$  assim obtidos é chamado *conjunto imagem da função  $f$*  e é indicado por  $Im(f)$ . Observe os exemplos:

1º) Dados os conjuntos  $A = \{0, 1, 2, 3\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , vamos considerar a função  $f: A \rightarrow B$  que transforma  $x \in A$  em  $2x \in B$ .



**Para refletir**

Em toda função  $f$  de  $A$  em  $B$ ,  $Im(f) \subset B$ .

Dizemos que  $f: A \rightarrow B$  é definida por  $f(x) = 2x$  ou por  $y = 2x$ . A indicação  $x \xrightarrow{f} 2x$  significa que  $x$  é transformado pela função  $f$  em  $2x$ .

Veja que para caracterizar uma função é necessário conhecer seus três componentes: o domínio ( $A$ ), o contradomínio ( $B$ ) e uma regra que associa cada elemento de  $A$  a um único elemento  $y = f(x)$  de  $B$ . Nesse exemplo o domínio é  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ , o contradomínio é  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , a regra é dada por  $y = 2x$  e o conjunto imagem é dado por  $Im(f) = \{0, 2, 4, 6\}$ .

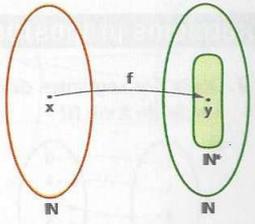
2º) Vamos considerar a função  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida por  $f(x) = x + 1$ .

Nesse caso a função  $f$  transforma todo número natural  $x$  em outro número natural  $y$ , que é o sucessor de  $x$ , indicado por  $x + 1$ .

- a imagem de  $x = 0$  é  $f(0) = 0 + 1 = 1$
- a imagem de  $x = 1$  é  $f(1) = 1 + 1 = 2$
- a imagem de  $x = 2$  é  $f(2) = 2 + 1 = 3$

e assim por diante.

Portanto, o domínio é  $\mathbb{N}$  ( $D = \mathbb{N}$ ), o contradomínio é  $\mathbb{N}$  ( $CD = \mathbb{N}$ ), a regra é  $y = x + 1$  e o conjunto imagem é  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ , isto é,  $Im(f) = \mathbb{N}^*$ .



3º) Seja a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $y = x^2$ .

Nesse caso a função  $f$  transforma cada número real  $x$  em um outro número real  $y$ , que é o quadrado de  $x$ . Como todo número real maior ou igual a zero possui raiz quadrada real, então o conjunto imagem é  $Im(f) = \mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$ , o domínio é  $\mathbb{R}$  ( $D = \mathbb{R}$ ), o contradomínio é  $\mathbb{R}$  ( $CD = \mathbb{R}$ ) e a regra que associa todo  $x \in \mathbb{R}$  a um único  $y$  de  $\mathbb{R}$  é dada por  $y = x^2$ .

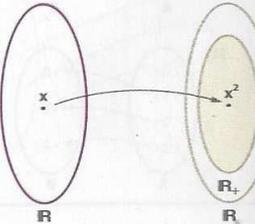


Figura 7.7: Domínio, contradomínio e imagem.

A utilização de recursos visuais contribui para provocar o pensamento cognitivo do aluno; diante disto, o uso do diagrama de flechas contribui visualmente para o melhor entendimento dos conceitos apresentados.

Para fortalecer os conceitos de domínio, contradomínio e imagem o autor apresenta os exemplos indicados na Figura 7.7, onde em todos os exemplos podemos perceber, de forma bem clara, o domínio, a imagem e a lei de formação, completando assim os elementos básicos da definição de função.

Apesar da variedade de exemplos interessantes apresentados, faltou exibir algumas funções matemáticas que não são definidas por fórmulas. Na seção “A noção de função por meio de conjuntos” na pagina 75, como mostra a Figura 7.8, o auto apresenta dois exemplos de funções que não definidas por meio de fórmulas, contudo, não era o momento para indicar o domínio e a imagem da função.

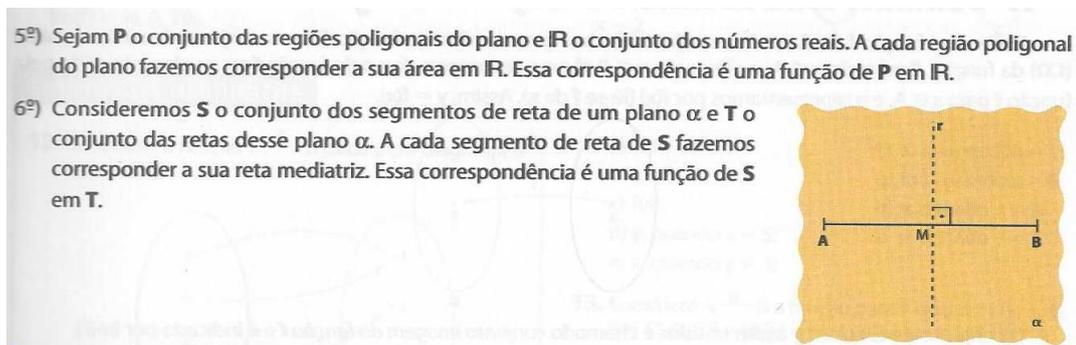


Figura 7.8: Função definida sem uso de fórmula matemática

O autor poderia retomar o exemplo 5 da Figura 7.8, para tanto sugerimos a seguinte notação:  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $P$  é o conjunto das regiões poligonais do plano e, para cada  $p \in P$ ,  $f(p) = \text{área de } P$ , indicando que o domínio seria o conjunto  $P$  e o contradomínio o conjunto  $\mathbb{R}$ .

Outros exemplos matemáticos interessantes são as funções definidas geometricamente, como as rotações do plano, as reflexões relativas a retas do plano, enfim, casos úteis para noção geral de função, que são fáceis de explicar, que podem ser empregados mais tarde no estudo de Geometria e que mostram que nem toda função interessante na Matemática assume valores numéricos.

### 7.5.3 Análise da seção: Funções definidas por fórmulas matemáticas

Completando o tripé (domínio, imagem e lei de formação) o autor trabalha a questão das funções definidas por fórmulas matemáticas. Embora tenha deixado implícito que existam funções que não são definidas por fórmulas, isto para o leitor que já tenha certa maturidade no campo da Matemática, devemos ressaltar que para o aprendiz se passa a ideia que todas as funções são expressas por uma fórmula matemática.

Somente no fim da seção em análise que autor, na página 80, por meio de uma observação, conforme Figura 7.9, que é feito um comentários a cerca de funções matemáticas que não são definidas por fórmulas. Situação que não ocupa a atenção devida e geralmente passa despercebida pelo aluno.

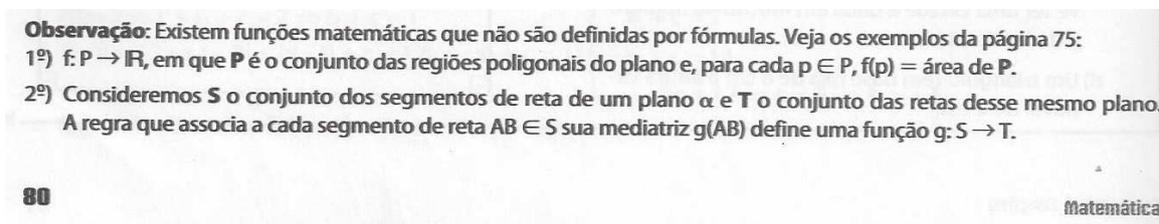


Figura 7.9: Observação.

O autor resgata o exemplo utilizado na seção “Explorando intuitivamente a noção de função”, na página 72 (Figura 7.10), que trata do valor a pagar de acordo com a quantidade de litros de combustível para provocar o tema ao aluno. Desta forma se retoma conhecimentos adquiridos pelo aluno para motivar o entendimento do aluno.

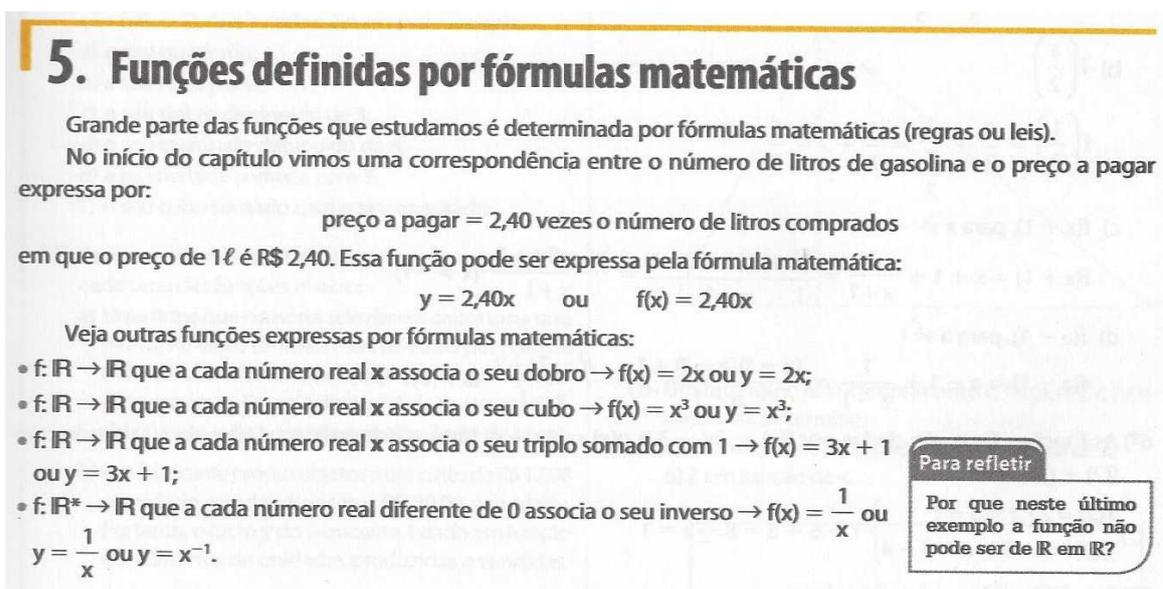


Figura 7.10: Função definida por fórmulas Matemáticas.

Foi proposto vários exemplos para estabelecer o entendimento de que a lei de correspondências de funções pode ser por meio de fórmulas matemáticas. Entretanto há um reparo a ser feito. No exemplo 6, da página 78, de acordo com a Figura 7.11, definiu-se as funções  $f$  e  $g$  pelas expressões  $f(x) = 2x - 3$  e  $g(x) = 3x + a$ , mas não foi indicado o conjunto domínio e a imagem das funções  $f$  e  $g$ .

6º) As funções  $f$  e  $g$  são dadas por  $f(x) = 2x - 3$  e  $g(x) = 3x + a$ . Vamos determinar o valor de  $a$  sabendo que  $f(2) + g(2) = 8$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1 \\ g(2) = 3 \cdot 2 + a = 6 + a \end{array} \right\} 1 + 6 + a = 8 \Rightarrow a = 1$$

Figura 7.11: Erro no domínio.

O exemplo 8, pagina 79 (Figura 7.12) apresenta uma situação da utilização de lei de correspondência através de mais de uma sentença. Devemos destacar o pequeno número de exemplos (somente um) que expressa uma lei de correspondência com o uso de mais de uma sentença matemática.

8º)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função cuja lei envolve mais de uma sentença:  $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & \text{para } x \leq 2 \\ x^2, & \text{para } x > 2 \end{cases}$ . Vamos determinar:

a)  $f(5)$   
 $f(5) = 5^2 = 25$

b)  $f(0)$   
 $f(0) = 3(0) + 1 = 1$

c)  $f(-3)$   
 $f(-3) = 3(-3) + 1 = -8$

d)  $f\left(\frac{5}{2}\right)$   
 $f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

e)  $f\left(\frac{1}{3}\right)$   
 $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = 2$

f)  $f(2)$   
 $f(2) = 3(2) + 1 = 7$

Figura 7.12: Função indicada por dupla sentença.

O entendimento da utilização de mais de uma sentença para indicar a lei de formação de uma função possui grande importância na compreensão de temas a serem apresentados em conteúdos futuros, principalmente na análise gráfica de funções.

## 7.5.4 Análise da seção: Estudo do domínio de uma função real

Conforme indica Lima [7] (p.37) numa função devem está claro os três ingredientes: Domínio, contradomínio e lei de correspondência, contudo, as vezes a função é apresentada somente através da lei de correspondência, e neste casos, devemos subtender que o domínio será o maior subconjunto dos números reais tal que a lei de correspondência tenha sentido.

Nesta seção o autor indica sitônia com as considerações de Elon Lages, quando utiliza a expressão “explícite o domínio”, e apresenta, de forma didática, as situações que trazem limitações para algumas formulas matemáticas, conforme Figura 7.13.

**6. Estudo do domínio de uma função real**

Vimos que uma função consta de três componentes: domínio, contradomínio e lei de correspondência. Quando é citada uma função  $f$  de  $A$  em  $B$ , já ficam subentendidos o domínio ( $A$ ) e o contradomínio ( $B$ ).

Às vezes, porém, é dada apenas a lei da função  $f$ , sem que  $A$  e  $B$  sejam citados. Nestes casos consideramos o contradomínio  $B = \mathbb{R}$  e o domínio  $A$  como o “maior” subconjunto de  $\mathbb{R}$  ( $A \subset \mathbb{R}$ ) tal que a lei dada defina uma função  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Veja no exemplo a seguir a explicitação do domínio em algumas funções.

Vamos explicitar o domínio das seguintes funções reais:

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x}$  só é possível em  $\mathbb{R}$  se  $x \neq 0$  (não existe divisão por 0).

Para cada  $x \neq 0$ , o valor  $\frac{1}{x}$  sempre existe e é único (o inverso de  $x$ ).

Logo,  $D(f) = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$ .

b)  $f(x) = \sqrt{3 - x}$

$\sqrt{3 - x}$  só é possível em  $\mathbb{R}$  se  $3 - x \geq 0$  (em  $\mathbb{R}$  não há raiz quadrada de número negativo).

$3 - x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -3 \Rightarrow x \leq 3$

Para cada  $x \leq 3$ ,  $f(x)$  existe e é único, pois é a raiz quadrada de um número real maior ou igual a zero.

Portanto,  $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$ .

c)  $f(x) = \frac{\sqrt{7 - x}}{\sqrt{x - 2}}$

Neste caso, devemos ter:

$7 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 7$

$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

Ou seja,  $x \in ]2, 7]$ . Para cada  $x \in ]2, 7]$ ,  $f(x)$  existe e é único, pois é a divisão de um número real positivo ou nulo por outro positivo.

Logo,  $D(f) = ]2, 7]$ .

Figura 7.13: Domínio de uma função Real.

Este tema também possui grande relação com o insucesso dos alunos quando apresentamos o conteúdo de função, sendo necessário que o aluno entenda as seguintes situações que limitam os valores numéricos que uma expressão algébrica pode assumir:

- Não existe divisão por zero;
- Não existe raízes de índice par de números negativos.

Assim consideramos apropriada a abordagem dada pelo autor, com um pequeno reparo. O autor somente trata um caso particular ao mencionar que “em  $\mathbb{R}$  não há raiz quadrada de número negativo”(p.81), dando a entender que este fato só ocorre para casos que envolvam raízes quadradas, não generalizando a situação.

## 7.6 Análise da exploração das representações gráficas

O uso de tabelas e gráficos em situações do cotidiano deve ser resgatado pelo professor durante o processo de ensino e aprendizagem do tema função, sobretudo quando se explora a construção de gráficos mediante uma fórmula matemática.

Neste contexto, Dante [5] provoca os alunos fazendo uso de gráficos extraídos de situações contextualizadas, como se observa nas Figuras 7.14 e 7.15.

1º) O gráfico de uma função auxilia na análise da variação de duas grandezas quando uma depende da outra. Examine o gráfico abaixo que mostra a evolução do número de candidatos no vestibular da Fuvest de 1995 a 2009, variando com o tempo.

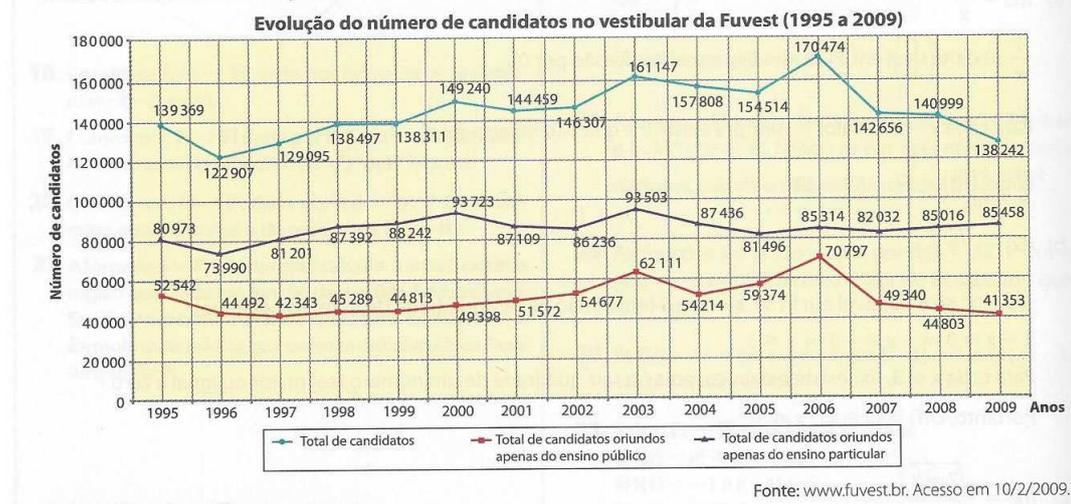
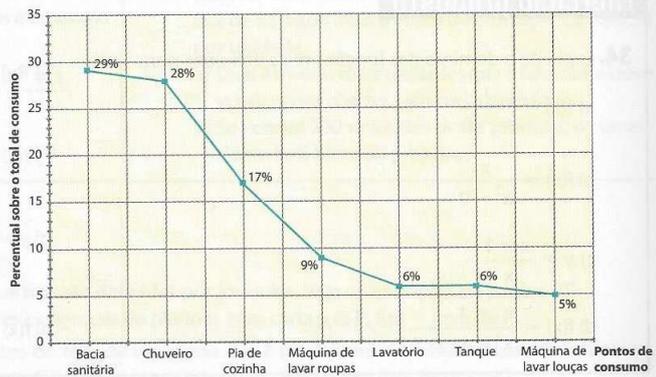


Figura 7.14: Construção de Gráficos

2º) Pontos de consumo de água em uma residência (em porcentagem)

Analisando o gráfico ao lado, vemos que:

- o lavatório e o tanque consomem a mesma quantidade de água.
- a bacia sanitária consome aproximadamente 5 vezes mais água do que o tanque.
- a bacia sanitária e o chuveiro são os que mais consomem água.
- dessa lista, a máquina de lavar louças é o aparelho que menos consome água.



82

Matemática

Figura 7.15: Construção de Gráficos

Nesta etapa, onde o aluno ainda está se familiarizando com os ingredientes de função, possivelmente não tenha ainda a maturidade e o conhecimento de como se comporta o gráfico de cada tipo de função. Entretanto, é oportuno dotar o aluno de habilidades que serão mais exploradas a medida que seja estudado as funções polinomiais.

Nota-se que o livro didático em análise adota na seção “Construção de Gráficos de funções” uma sequencia que colabora para este entendimento. Veja as Figuras 7.16 e 7.17.

### Construção de gráficos de funções

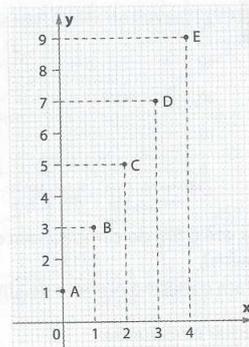
Para construir o gráfico de uma função dada por  $y = f(x)$ , com  $x \in D(f)$ , no plano cartesiano, devemos:

- construir uma tabela com valores de  $x$  escolhidos convenientemente no domínio  $D$  e com valores correspondentes para  $y = f(x)$ ;
- a cada par ordenado  $(x, y)$  da tabela associar um ponto do plano cartesiano;
- marcar um número suficiente de pontos, até que seja possível esboçar o gráfico da função.

#### Exemplos:

1º) Vamos construir o gráfico da função dada por  $f(x) = 2x + 1$ , sendo o domínio  $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

x	y = f(x) = 2x + 1
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9



Neste caso, o gráfico da função é o conjunto dos pontos **A, B, C, D e E**.

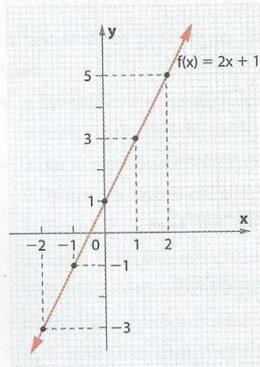
Figura 7.16: Construção de Gráficos.

2º) Vamos construir o gráfico da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 2x + 1$ .

Como, neste caso,  $D = \mathbb{R}$ , vamos escolher alguns valores arbitrários de  $x$  e determinar  $y$ :

$x$	$y = f(x) = 2x + 1$
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5

Agora, o gráfico é o conjunto de todos os pontos  $(x, y)$ , com  $x$  real e  $y = 2x + 1$ , resultando na reta da figura abaixo.



**Para refletir**

- Você verá no próximo capítulo que, quando temos  $y$  igual a um polinômio do 1º grau da forma  $ax + b$ , o gráfico é sempre uma reta. Como dois pontos determinam uma reta, basta marcar apenas dois pontos para traçá-la.
- Por que os gráficos dos exemplos 1 e 2 são diferentes se a lei das duas funções é  $f(x) = 2x + 1$ ?

Figura 7.17: Construção de Gráficos

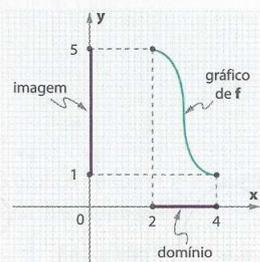
Além de saber esboçar um gráfico de uma função, o aluno deve adquirir a habilidade de interpretar, de ler o gráfico, a ponto de identificar o domínio e a imagem, como também ser capaz de reconhecer se um determinado gráfico é uma função.

Novamente o livro didático possui papel importante, tanto para o discente, mas principalmente para o docente, que quase sempre só possui esta ferramenta didática.

Salienta-se que Dante [5] apresenta uma sequência didática que propicia ao professor explorar estes aspectos do estudo de função. Note que na Figura 7.18 é explorado a leitura do domínio e da imagem de uma função observando o gráfico.

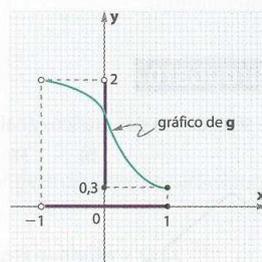
## Determinação do domínio e da imagem de uma função, conhecendo o gráfico

Observando o gráfico de uma função no plano cartesiano podemos, às vezes, determinar o domínio  $D$  e o conjunto imagem  $Im$  da função, projetando o gráfico nos eixos:



$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\} = [2, 4]$$

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 5\} = [1, 5]$$



$$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 1\} = ]-1, 1]$$

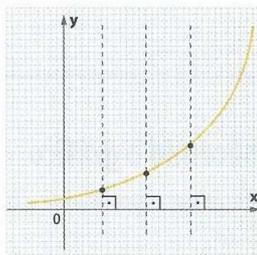
$$Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0,3 \leq y < 2\} = [0,3; 2[$$

Figura 7.18: Análise do Gráfico.

Enquanto que na Figura 7.19 o autor aborda como leitor pode determinar se um gráfico representa uma função.

## Determinando se um conjunto de pontos é gráfico de uma função

Já vimos que, para ter uma função de  $A$  em  $B$ , a cada  $x \in A$  deve corresponder um único  $y \in B$ . Geometricamente, isso significa que qualquer reta perpendicular ao eixo  $x$  que intersecta o gráfico deve fazê-lo num *único* ponto. Por exemplo:



O gráfico à esquerda é de uma função, pois qualquer reta perpendicular ao eixo  $Ox$  intersecta-o em um único ponto.

Assim, se essa reta intersectar o gráfico em mais de um ponto, esse gráfico não é gráfico de uma função.

O gráfico à direita *não* é de uma função, pois existem retas perpendiculares ao eixo  $Ox$  intersectando-o em mais de um ponto.

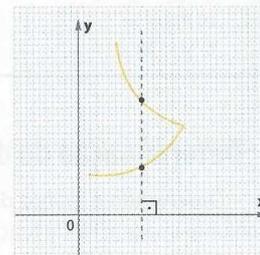


Figura 7.19: Reconhecimento de função.

### 7.6.1 Considerações gerais sobre a análise

Obstante as sugestões e reparos mencionados, Dante [5] contém uma adequada apresentação do que consideramos ser importante e fundamental do conceito de função para alunos do Ensino Médio. Após uma introdução, em que são mostrados vários exemplos, a definição de função é dada de modo claro e sem exagero no formalismo. As funções foram apresentadas na forma como ocorrem na Matemática, nas Ciências em geral e no dia-a-dia, mediante fórmulas, tabelas e gráficos.

# Capítulo 8

## Conclusões

A preocupação de propor um procedimento didático diferenciado para o ensino de funções foi o foco desse trabalho. Desde o início, nos baseamos nas recomendações feitas pelos autores pesquisados e nas experiências adquiridas ao longo de vários anos na sala de aula, pensamos em novas estratégias que orientassem o aluno a uma aprendizagem significativa do estudo de função.

O conceito de função é por si só bastante complexo para o aluno, pois envolve outros conceitos igualmente abstratos como domínio, contradomínio, conjunto imagem e a lei de correspondência. Além disso, não podemos esperar que o nosso aluno o compreenda em poucas aulas visto que a própria humanidade levou varias gerações para formalizar matematicamente e dominar tal conceito.

Observou-se que na história da Matemática, em particular no que diz respeito a formação do conceito de função, a primeira ideia associada a função foi relacionada a dependência entre grandezas, para posteriormente, ao longo de séculos ser lapidado, passando a assumir novas formas de representação.

Assim, propomos que inicialmente devemos construir a formalização da definição de função de maneira “intuitiva”, trabalhando situações que envolvam a ideia de dependência entre grandezas. Destaca-se, também, que os autores pesquisados são unânimes em afirmar que restringir função a um mero caso particular da relação de dois conjuntos, e consequentemente explorando a expressão algébrica que representa a lei de correspondência, pode se constituir em um obstáculo à aprendizagem do tema.

Nesse sentido, deve-se propiciar ao aluno a oportunidade de se familiarizar com tabelas, gráficos, diagramas e situações que desenvolvam a habilidade do uso das fórmulas matemáticas e a compreensão do significado de cada ingrediente que compõem uma função.

Salienta-se que durante a primeira série do Ensino Médio, será trabalhado as funções polinomiais, modular, exponencial e logarítmica, onde sugerimos que os conceitos aqui destacados sejam novamente retomados. Assim, ao abordar cada uma das funções descritas,

sugerimos não deixar de usar tabelas, diagramas, gráficos e leis de correspondência, destacando, para o aluno, os conjuntos Domínio, Contradomínio e Imagem. Assim, acreditamos que aluno poderá absorver o conceito de função de maneira formalizada matematicamente e atribuído significado, facilitando a realização de conexões com situações do cotidiano e com outras áreas do conhecimento.

Sugerimos também a utilização de problemas contextualizados que além de, atribuído utilidade da Matemática, tendem a ser mais motivadores para o aluno, do que problemas formulados da matemática pela matemática.

No decorrer deste processo, a postura crítica que o docente deve assumir diante do livro didático será determinante para obter o crescimento cognitivo do aluno. Analisar o livro didático antes de utilizá-lo é de suma importância, pois se pode perceber qual a intenção da aplicação de determinado exercícios, ou de verificar se o objetivo a alcançar na explicação de determinado conceito vai ser efetivado, não fugindo do objetivo que o professor traçou em seu planejamento.

Essa análise deve servir para a utilização adequada do livro didático em sala de aula, de forma a ser usado como ferramenta de ensino, e não para a simples reprodução. Portanto, por meio da análise, foi possível verificar que um livro apenas não contempla a necessidade de aprendizagem dos alunos, pois para que o processo de ensino e aprendizagem ocorra de forma eficaz, é importante a utilização de várias fontes de pesquisa, permitindo a abordagem de um tema de várias formas.

# Referências Bibliográficas

- [1] BARROSO, J. M., et al.; Conexões com a Matemática, 1ª ed., Volume 1, São Paulo, MODERNA, 2010.
- [2] BOYER, C.; A História da Matemática, 2ª edição, São Paulo:Edgard Blucher, 1991.
- [3] BRASIL, Ministério da Educação e Cultura, Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. Brasília: MCE/SEF, 2001.
- [4] BRASIL, Ministério da Educação e Cultura, Guia de livros didático do Plano Nacional do Livro Didático de Matemática, Brasília: MCE/SEF, 2012.
- [5] DANTE, L. R.; Matemática: Contextos e Aplicações, Volume 1, Editora Ática, 1ª edição, São Paulo, 2011.
- [6] DE MORAIS FILHO, D. C.; *Um Convite à Matemática*, Coleção do Professor de Matemática, 1ª edição, Rio de Janeiro - RJ: SBM, 2012.
- [7] LIMA, E. L.; *Números e Funções Reais* Coleção PROFMAT, 1ª edição, 2ª impressão, Rio de Janeiro-RJ, SBM, 2014.
- [8] LIMA, E. L., et al.; Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio, Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 1ª edição, Rio de Janeiro, 2001.
- [9] LIMA, E. L.; Meu Professor de Matemática e outras Histórias 6ª edição, Rio de Janeiro-RJ, SBM, 2012.
- [10] LIMA, E. L.; Matemática e Ensino 2ª edição, Rio de Janeiro-RJ, SBM, 2002.
- [11] EVES, H.; Introdução à História da Matemática Tradução: Hygino H. Domingos. 2ª edição, Campinas-SP, Editora da Unicamp, 2007.
- [12] IEZZI, G. et al.; Matemática: Ciência e Aplicações, 4ª edição, São Paulo, ATUAL EDITORA, 2006.
- [13] IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; Fundamentos de Matemática Elementar, 7ª edição, Volume 1, São Paulo, ATUAL EDITORA, 2002.

- [14] LEONARDO, F. M.; Projeto Araribá Matemática, 3ª edição, São Paulo-SP, Editora Moderna, 2010.
- [15] ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P.; Tópicos de História da Matemática, Coleção PROFMAT, 1ª edição, Rio de Janeiro, SBM, 2012.
- [16] VIEIRA, Vandenberg Lopes, Álgebra Abstrata para Licenciatura, 1ª edição, Campina Grande-PB, EDUEPB, 2013.
- [17] Normas da ABNT – NBR 6023: *Elaboração de referências*, (2000). Disponível em <<http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/RegulamentoseNormas/ABNT-NBR6023.pdf>>. Acesso em 15 out 2014.