



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

JOSÉ NILTON SILVA

**DETERMINAÇÃO DA REGIÃO ROBUSTA DE ESTABILIDADE E DE
DESEMPENHO INSPIRADA NOS PRINCÍPIOS DA ESTATÍSTICA CLÁSSICA**

PPGEQ – UFCG

Campina Grande – Paraíba

JOSÉ NILTON SILVA

DETERMINAÇÃO DA REGIÃO ROBUSTA DE ESTABILIDADE E DE
DESEMPENHO INSPIRADA NOS PRINCÍPIOS DA ESTATÍSTICA CLÁSSICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Química.

Orientador: Prof. Dr. João Teotônio Manzi

Campina Grande - Paraíba

2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

- S586d Silva, José Nilton.
Determinação da região robusta de estabilidade e de desempenho inspirada nos princípios da estatística clássica / José Nilton Silva. – Campina Grande, 2013.
102 f.
- Tese (Doutorado em Engenharia Química) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2013.
- "Orientação: Prof. Dr. João Teotônio Manzi Monteiro de Araújo".
Referências.
1. Sistemas de Controle - Estabilidade. 2. Controlador PID.
3. Região de Confiança Robusta. 4. Equação Característica. 5. Análise das raízes. I. Araújo, João Teotônio Manzi Monteiro de. II. Título.
- CDU 681.5.037(043)

JOSÉ NILTON SILVA

DETERMINAÇÃO DA REGIÃO ROBUSTA DE ESTABILIDADE E DE DESEMPENHO INSPIRADA NOS PRINCÍPIOS DA ESTATÍSTICA CLÁSSICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Química, na área de concentração: Modelagem e Simulação de processos.

Aprovada em 01 de Agosto de 2013.

COMISSÃO EXAMINADORA

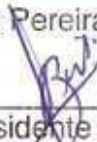
Prof. João Teotônio Manzi M. Araújo (Doutor)



(Orientador)

Unidade Acadêmica de Engenharia Química/UFCG

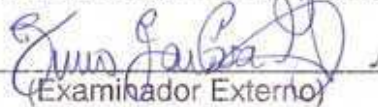
Prof. Romildo Pereira Brito (Doutor)



(Presidente da Sessão)

Unidade Acadêmica de Engenharia Química/UFCG

Prof. Bruno Barbosa Albert (Doutor)



(Examinador Externo)

Unidade Acadêmica de Engenharia Elétrica/UFCG

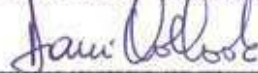
Prof. Péricles Rezende Barros (Doutor)



(Examinador Externo)

Unidade Acadêmica de Engenharia Elétrica/UFCG

Prof. Darci Oloak (Doutor)



(Examinador Externo)

Departamento de Engenharia Química/USP

Este trabalho é dedicado a minha esposa Emanuelle Silva e meu filho Willian Silva, assim também à memória de meus pais, Maria Lameci e Antonio Gonçalves.

Agradecimentos

A Deus por ter me dado esta oportunidade de superar mais um desafio.

Ao Professor *João Manzi*, pela orientação e por compartilhar momentos brilhantes de pensamentos dos quais resultaram nesse trabalho.

Aos Professores *Manoel Franco Neto* e *José Tomaz das Neves* pela contribuição na base de minha formação e principalmente a *Argemira Albino* e *Gaudêncio Pereira* pelo incentivo e exemplo de vida na educação.

Ao Professor *José Fidélis*, a *Maria Danilda* e *Thiago Fidélis* pelo apoio e contribuição para os primeiros passos na universidade.

Aos demais Professores da Unidade Acadêmica e ao Programa de Pós-graduação de Engenharia Química e do pela convivência e parcerias.

Aos amigos, *Helena Bispo* e *Thassio Nóbrega*, pelos momentos de debates científicos.

Aos amigos do LARCA/GSQ, pela convivência agradável que proporcionaram.

ÍNDICE

Lista de ilustrações.....	viii
Lista de Tabelas	ix
Lista de Símbolos e Abreviaturas.....	x
Resumo.....	15
Abstract.....	16
CAPITULO I	17
1. INTRODUÇÃO.....	17
1.1. Motivação do trabalho proposto	17
1.2. Organização do trabalho	18
1.3. Objetivos	19
CAPITULO II	21
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
2.1. Robustez da estabilidade e do desempenho	22
2.2. Identificação de processos.....	24
2.3. Auto sintonia de controladores.....	27
CAPITULO III	30
3. ANÁLISE CLÁSSICA DO CONCEITO DE ROBUSTEZ	30
3.1. Robustez.....	30
3.2. Aplicação de conceitos estatísticos na estratégia de controle	32
CAPITULO IV.....	39
4. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: REGIÃO DE ROBUSTEZ BASEADA EM PRINCÍPIOS ESTATÍSTICOS.....	39
4.1. Distância euclidiana e distância estatística	40
4.2. Intervalos de Confiança.....	44
4.3. Estabilidade do Sistema.....	46
4.4. Robustez da estabilidade.....	49
4.5. Robustez do desempenho	52
CAPITULO V	55
5. ESTUDO DE CASO.....	55
5.1 Modelo dinâmico diferencial do processo	56

5.2	Estrutura de Controle	57
5.2.1	Modelo recursivo do processo	59
5.2.2	Procedimento de Sintonia	61
CAPITULO VI		64
6.	RESULTADOS E DISCUSSÃO	64
6.1.	Identificação do processo	64
6.2.	Auto sintonia	66
6.3.	Análise da região robusta de estabilidade.....	67
6.4.	Análise da região robusta de desempenho	71
CAPITULO VII		74
7.	CONCLUSÕES.....	74
7.1.	Sugestões para trabalhos futuros.....	75
8.	REFERÊNCIAS	76
Anexo I		83
Anexo II		87
Anexo III		89
Anexo IV.....		96
Apêndice I		99

Lista de ilustrações

Figura 3.1 – Região de confiança conjunta para o nível de significância de $\alpha=5\%$ e 15%	38
Figura 4.1 - Gráfico de dispersão genérico de variabilidade	40
Figura 4.2 - Conjunto de pontos que representam uma elipse.....	42
Figura 4.3 - Diagrama de blocos de um sistema de controle genérico em malha fechada	47
Figura 4.4 – Dispersão das raízes no plano complexo.....	50
Figura 4.5 – Dispersão das raízes no novo sistema de coordenadas.....	51
Figura 4.6 – Perda da robustez da estabilidade	51
Figura 4.7 – Respostas da saída do processo a partir do contorno da elipse ..	52
Figura 4.8 – Respostas geradas pela borda da região de robustez da estabilidade	54
Figura 5.1 -Tela do supervisor para o tanque de aquecimento	55
Figura 5.2 – Parâmetros do tanque de aquecimento	56
Figura 5.3 – Representação das malhas de controle de nível e temperatura (a) supervisor e (b) diagrama.....	58
Figura 5.4 – Diagrama de estrutura generalizada em malha fechada com bloco de identificação e ajuste dos parâmetros de sintonia	59
Figura 5.5 – Estrutura de auto sintonia clássica.....	61
Figura 5.6 – Estrutura de auto sintonia modificada	62
Figura 5.7 – Diagrama de blocos da estrutura de controle generalizada	62
Figura 6.1 –Comportamento: (a) do modelo para n e m superior a 10; (b) das temperaturas do processo e do modelo a uma variação no <i>setpoint</i> de 5 K..	65
Figura 6.2 – Estímulo gerado pelo relé e resposta da variável de saída.....	66
Figura 6.3 – O comportamento da temperatura de saída para o modelo e processo (a) sem auto sintonia -1, (b) com o auto sintonia – 2	67
Figura 6.4 – A distribuição de probabilidade para as partes real e imaginária s	68
Figura 6.5 – Representação das raízes no plano complexo	68
Figura 6.6 – A região de estabilidade robusta para as raízes baseado em $\alpha = 5\%$, enquanto o sistema é submetido a perturbações presentes nas variáveis de entrada e no <i>set point</i>	69
Figura 6.7 – Perda da robustez da estabilidade para as raízes no plano complexo s com base em $\alpha = 5\%$, quando o sistema de controle é inoperante	70
Figura 6.8 – Tempo de processamento para realização dos procedimentos da metodologia.....	70
Figura 6.9 – (a) Dispersão das raízes no plano complexo; (b) e (c) as regiões de confiabilidade conjunta referente a região de robustez de estabilidade	71
Figura 6.10 – Contorno da região de robustez da estabilidade	71
Figura 6.11 – Valores dos parâmetros de sintonia correspondente a borda da região de robustez de estabilidade.....	72

Figura 6.12 – Respostas referente ao contorno da região de robustez da estabilidade	73
Figura 6.13 – Distribuição de probabilidade da saída do processo e o critério de desempenho em $t/\tau_p=1$	73
Figura III.1 - Diagrama de bloco para o sistema de controle em malha fechada	89

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Coeficiente de correlação ρ	37
Tabela 2 – Ganhos do controlador PID	66

Lista de Símbolos e Abreviaturas

Símbolos

A , overshoot

A , área, m^2

a_n, b_m , coeficientes do modelo de dinâmica recursiva

b_i , estimadores dos parâmetros β_i

B/A , taxa de decaimento ou acomodação

$\text{Corr}[\cdot]$, correlação

$\text{Cov}[\cdot]$, covariância

C_p, C_v , capacidade calorífica, $Jkg^{-1}K^{-1}$

D , matriz diagonal

$e(t)$, variável desvio

\hat{e} , energia específica total, $m^2.s^{-2}$

$E[\cdot]$, operador esperança

$f(x)$, função densidade de probabilidade

$F(x)$, função acumulada de probabilidade

$f_c(t)$, saída do controlador no domínio tempo

F_i , vazão volumétrica, m^3s^{-1}

$F_{1-\alpha}$, distribuição-F

G_p , funções de transferência do processo

G_c , funções de transferência do controlador

G_v , funções de transferência do atuador

G_m , funções de transferência do sensor

h_L , nível, m

\hat{h} , entalpia específica, $m^2.s^{-2}$

IC, intervalo de confiança

Img, eixo imagem do plano complexo

k , ponto discreto

\hat{k} , energia cinética específica, $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

k_c , ganho proporcional do controlador

K_u , ganho último

$L[.]$, operador diferencial linear

$L_{l/s}$, limites inferior e superior

L_i , limite

$L_{\bar{y}}$, limite de confiança de variável y

\bar{n} , vetor normal unitário

\mathbf{P} , matriz ortogonal

$\text{Pr}(x)$, probabilidade de x

p_i , frequência de ocorrência de valores

q^{-1} , operador shift-back ou atraso

\dot{Q} , taxa de calor, $\text{J} \cdot \text{s}^{-1}$

Real, eixo real do plano complexo

s , variável complexa no domínio de Laplace

S_k , soma normalizada

S_x , desvio padrão amostral

S_x^2 , variância amostral

T , temperatura, K ou $^{\circ}\text{C}$

T_{ref} , temperatura de referência, K ou $^{\circ}\text{C}$

$t_{(1-\alpha, \nu)}$, variável aleatória de distribuição t-student

t_{subida} , rise time

$t_{\text{acomodação}}$, delay time

$u(t)$, variável de entrada processo

$u_{\text{max}}(t)$, $u_{\text{min}}(t)$, valor máximo e mínimo de do relé de entrada variável

V , volume, m^3

v , grau de liberdade

\hat{v} , volume específico, $m^3.kg^{-1}$

\dot{w} , taxa de trabalho, $J.s^{-1}$

x_i , variável aleatória

\bar{y}_i , valor médio da saída do processo

$y(t)$, variável de saída do processo, K

$y_m(t)$, variável de saída do modelo, K

W_n , variável normalizada

Z , variável normalizada

Δk_p , incerteza no ganho do modelo do processo

Δm_c , saída do controlador na forma de desvio

$\Delta \tau$, incerteza na constante de tempo

$\Delta \theta$, incerteza no tempo morto

Δt , intervalo de tempo discreto

Σ , matriz de covariância

Ω , população

α , nível de significância

β_i , parâmetros do modelo do controlador

ε , estímulo do Relé

χ^2 , a distribuição do chi-quadrado

ϕ , critério dos mínimos quadrados

$\hat{\phi}$, energia potencial específica, $m^2.s^{-2}$

η , saída do modelo do controlador

φ , matriz das variáveis para a identificação

μ , média populacional

μ_{x_i} , média amostral

θ , tempo morto ou delay time

θ , matriz dos parâmetros de identificação

ρ , coeficiente de correlação

ρ_i , massa específica, kgm^{-3}

σ , desvio padrão populacional

$\sigma_{x_i}^2$, variância amostral de v.a. x_i

τ , constante de tempo da função característica

τ_I , parâmetro tempo integral

τ_D , parâmetro tempo derivativo

ξ , coeficiente de amortecimento

Abreviaturas

ARMAX – AutoRegressive Moving Average with eXogeneous variable

ARX – Autorregressive with eXogeneous variable

BJ – Box-Jenkins

CPU, Central Processing Unit

SISO – simple input and simple output

MIMO – multiple inputs and multiple outputs

MIT – Massachusetts Institute of Technology

NARMA – non-linear autoregressive moving average model

NARMAX – non-linear autoregressive moving average model with exogenous inputs

PID – Proporcional Integral e Derivativo

ISE – integral do quadrado do erro

IAE – integral do valor absoluto do erro

ITAE – integral do produto tempo e o valor absoluto do erro

FIR – Finite Impulse Response

FBR – Funções de base radial

FP – Função densidade de probabilidade

FPA – Função acumulada de probabilidade

OPC – Object linking and Embedding for Process Control

SCADA – Supervisory Control and Data Acquisition)

ZN – Ziegler e Nichols

Resumo

Este trabalho trata do desenvolvimento de uma metodologia baseada nos conceitos clássicos de estatística e probabilidade para a análise e avaliação da robustez da estabilidade e do desempenho de sistemas de controle, particularmente àqueles que usam o PID (Proporcional, Integral, Derivativo) como lei de controle. Visando estabelecer as condições para a aplicação da metodologia, um sistema de identificação do processo foi desenvolvido de forma recursiva, no qual modelos de convolução e fenomenológico foram empregados como representação do modelo e processo, agrupado a um procedimento de auto sintonia, necessário para considerar os parâmetros de sintonia como variáveis aleatórias e, por conseguinte as raízes da equação característica do sistema em malha fechada. O mapeamento da região de robustez tem sido realizado a partir das raízes da equação característica, considerando a distância estatística como a métrica representativa da robustez da estabilidade a qual permite estabelecer a região com certo grau de significância. Os resultados obtidos demonstram o potencial analítico exigido pela metodologia, permitindo também a análise *online*, com baixo esforço computacional e operacional mostrando ser um poderoso instrumento de avaliação de sistema de controle.

Palavras-chave: Controlador PID, estabilidade, região de confiança robusta, equação característica, análise do lugar das raízes

Abstract

This study discusses the development of a methodology based on classical concepts of statistics and probability to analyze and evaluate the robustness of the stability and performance of the control system, particularly those that use the PID as control law. To establish the conditions for the application of the methodology, a recursive system identification method process was developed, in which convolution and phenomenological models were used to represent model and process, together with a self-tuning procedure that is necessary to consider tuning parameters as random variables, and hence the roots of the characteristic equation of the closed loop system. The mapping of the region of robustness has been achieved from the roots of the characteristic equation, considering the statistical distance as the metric represented to the robustness of stability which allows the region to establish a degree of significance. The results obtained demonstrate the potential analytical and evaluation required by the methodology, allowing such analysis also "online" with low computational effort and operational proving to be a powerful tool in the analysis of control system.

Keywords: PID Controller, stability, robust confidence region, characteristic equation, root locus analysis

CAPITULO I

1. INTRODUÇÃO

1.1. Motivação do trabalho proposto

A motivação deste trabalho foi a busca por soluções teórica e prática de complexidade matemática reduzida para problemas de controle de processos considerando a análise e avaliação da robustez da estabilidade e do desempenho em tempo real para um sistema de controle, utilizando conhecimentos clássicos de probabilidade e estatística.

O objetivo de um projeto de sistemas de controle robusto é garantir o desempenho do sistema na presença de incertezas sobre o processo. De acordo com Morari e Zafiriou (1989), a robustez é uma característica desejável de sistemas de controle por, pelo menos, duas razões: o sistema deve operar satisfatoriamente, ainda que em condições operacionais distintas daquelas consideradas no modelo do projeto (nominal) e que as condições de robustez possam ser utilizadas com o objetivo de se adotar um modelo de projeto simplificado, não só para facilitar a sua análise, como também por seu reduzido impacto sobre a complexidade do controlador resultante.

A robustez da estabilidade e do desempenho tem sido normalmente tratada levando-se em conta a análise do modelo do processo e dos distúrbios sobre o processo, considerando-se os intervalos de variação para os parâmetros de interesse do processo com os quais o sistema pode ser considerado robusto. Diversos trabalhos (Lescher e Ross, 2011; Huang e Zhou, 2000) consideraram a robustez de sistemas sujeitos a incertezas usando os fundamentos do método do valor singular para garantir os critérios de robustez para sistemas de controle.

A determinação da robustez da estabilidade e do desempenho estabelecido por um tratamento estatístico em sua forma clássica tem sido pouco mencionada pela literatura. Recentemente, Calafiore et al. (2011) aplicaram tais métodos probabilísticos para projeto de sistemas de controle, apresentando algoritmos contendo parâmetros aleatórios para controle de

sistemas com incertezas. Tempo et al. (1997) propuseram uma análise da robustez dos sistemas de controle afetados pela presença de incerteza. Dessa forma, um sistema de controle é robusto quando apresenta baixa sensibilidade a perturbações, sendo estável em uma faixa de variação de parâmetros, e no qual o desempenho continua a atender as especificações mesmo na presença de variações nos parâmetros. Deve-se salientar que devido à aplicação do método de Monte Carlo, a abordagem estabelecida pelos autores citados necessita de medidas de probabilidade e amostras de dimensões consideráveis, o que resulta num severo esforço matemático, desestimulando e tornando o método pouco atrativo para os usuários, além de não garantir a precisão dos resultados quando o tempo reduzido é requerido para o processamento.

A proposta do presente trabalho consiste em empregar conceitos usuais de estatística, sem extensos arroubos matemáticos, para a construção de uma região de robustez que possibilite verificar em tempo real se o sistema de controle opera apropriadamente dentro dos critérios pré-determinados para a estabilidade e desempenho, considerando-se múltiplas perturbações e incertezas no processo.

1.2. Organização do trabalho

O trabalho é apresentado por capítulos, nos quais as atividades realizadas estão descritas em uma ordem para facilitar a cronologia do desenvolvimento.

O capítulo II, consiste de uma revisão bibliográfica temática controle de processos e robustez, bem como uma síntese do procedimento de identificação de sistemas e os principais métodos apresentados na literatura, complementando com um enfoque nos métodos auto sintonia.

O capítulo III trata da análise da robustez de sistema de controle, considerando a visão clássica, apresentando também uma aplicação de métodos estatísticos na estratégia de controle, a fim de estabelecer a região de confiança conjunta dos parâmetros do controlador considerando um dado nível de significância.

No capítulo IV são apresentados os fundamentos teóricos necessários para a obtenção da região de confiabilidade conjunta dos parâmetros do controlador clássico proporcional, integral e derivativo (PID), o equacionamento do intervalo de confiança, assim como os teoremas básicos e definições. E por fim, a obtenção da robustez de estabilidade e de desempenho objeto desse trabalho.

No capítulo V, um estudo de caso é apresentado com sua respectiva modelagem dinâmico e estrutura de controle baseada no controlador PID clássico. Como também, faz-se uma síntese dos procedimentos de identificação e de auto sintonia utilizado nesse trabalho. E no Capítulo VI são analisados os resultados sobre os desenvolvimentos realizados no que diz respeito à identificação e auto sintonia, utilizados no estudo de caso do capítulo anterior, assim também como a obtenção região robusta de estabilidade e de desempenho.

Finalmente, no Capítulo VII, são apresentadas as conclusões do presente trabalho, assim como sugestões para trabalhos futuros.

1.3. Objetivos

Visando desenvolver uma metodologia que trata da análise e avaliação da robustez aplicada a controle de processo, os objetivos específicos deste trabalho são:

1) desenvolver uma metodologia para análise da robustez de estabilidade e de desempenho em sistemas de controle com a aplicação de conceitos estatísticos a partir de dados obtidos em tempo real de simulação,

2) aplicar os conceitos de balanço de massa e energia, para obtenção de modelos empregados na identificação recursiva e,

3) estabelecer uma estratégia de controle clássico por retroalimentação (*feedback*) com controlador PID acoplado com uma sistema de auto sintonia.

Tendo em vista a aplicação teórico/prático da metodologia desenvolvida, um estudo de caso, o qual possibilite de forma simples e objetiva, validar a

metodologia tem sido proposto. Para tanto, torna-se *mister* estabelecer as seguintes metas:

- a) modelar um sistema de aquecimento para avaliação do controle de temperatura e de nível, uma vez que o foco do trabalho é uma metodologia de obtenção da região de robustez da estabilidade e da estabilidade;
- b) desenvolver o modelo dinâmico do processo em Matlab® interligado a um supervisor SCADA (Supervisory Control and Data Acquisition), no intuito de gerar um ambiente de sala de controle industrial;
- c) desenvolver uma estratégia de identificação utilizando o modelo de convolução recursiva, com a finalidade de obter o modelo do processo;
- d) desenvolver e implementar um sistema de auto sintonia utilizado como base no modelo de convolução recursiva;
- e) estruturar a metodologia de geração de região de confiabilidade de parâmetros, com nível de significância estatística, utilizando dados do controle do processo em tempo real;
- f) gerar as regiões de robustez de estabilidade e de desempenho no plano complexo utilizando o conceito de distância estatística.

A realização das tarefas apresentadas anteriormente permitirá não só o desenvolvimento de uma metodologia para obtenção da região robusta de estabilidade e de desempenho, como também possibilitar um sistema de monitoramento em tempo real dessa região e tendências de mudança. Além disso, espera-se que a aplicação dessa metodologia possa contribuir para uma análise simplificada e objetiva da robustez da estabilidade e do desempenho de sistemas de controle, assim também como servir de base para a tomada de decisões para controle de processos, com maior rapidez e segurança.

CAPITULO II

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O controle automático, particularmente, a aplicação de estratégia por retroalimentação, tem sido fundamental para o desenvolvimento da automação. Segundo Mayr (1970) a estratégia por retroalimentação teve sua origem com os reguladores de válvula de flutuador (reguladores de nível) dos mundos Helénico e Árabe usados para controlar dispositivos, como relógios de água, lâmpadas de óleo e distribuidores de vinhos, bem como o nível de água em tanques. De acordo com Bissell (2009), a tradição do relógio de água permaneceu no Mundo Árabe, como descrito em livros de autores como Al-Jazari (1203) e Ibn Al-Sa-ati (1206). Reguladores de boia na tradição de Heron também foram construídos pelos três irmãos Banu Musa em Bagdá no século IX a.C. O regulador de nível de válvula de flutuador teria sido reinventado durante a revolução industrial no século XVIII. O primeiro sistema de controle por retroalimentação europeu independente foi o regulador de temperatura de Cornelius Drebbel (1572–1633).

Desde o século XVII, os sistemas de controle têm sido projetados para controle de temperatura, controle mecânico de moinhos e regular os motores a vapor. Durante o século XIX tornou-se cada vez mais claro que os sistemas de controle eram propensos à instabilidade. Um dos critérios de estabilidade foi derivado independentemente no final do século XIX na Inglaterra por Routh e por Hurwitz na Suíça. No mesmo período, houve também o desenvolvimento de sistemas de controle realimentado no qual a saída é função da posição, da velocidade ou aceleração denominada de servomecanismos, em princípio para direcionar navios e para estabilização e para função de pilotos automáticos. A invenção do avião (literalmente) acrescentou uma nova dimensão para o problema. A análise teórica de Minorsky (1885 – 1970) para controle de navio na década de 1920 foi derivada de suas observações, verificando que o controle não estava vinculado apenas no erro atual, mas também no erro passado e no erro futuro, esclarecendo e formalizando a natureza dos termos de controle: proporcional, integral e derivativo ao erro, que também foi usado para aplicações de processo na década de 1930. Baseado no servomecanismo e

engenharia de comunicações, nos desenvolvimentos da década de 1930 e impulsionado pela necessidade de sistemas de controle de armas de alto desempenho, o formalismo teórico foi desenvolvido nos EUA, Reino Unido e em outros lugares pelo mundo nos anos seguintes.

Em 1935, Ralph Clarridge da *Taylor Instrument Companies* criou o controlador de três termos, ao utilizar um controlador de predição do erro futuro para solucionar um problema de oscilação de uma malha de controle de temperatura em uma indústria de celulose. Chamada inicialmente pelos engenheiros da empresa de *pré-act*, a ação derivativa foi testada apenas em casos especiais até o ano de 1939, quando uma versão totalmente reprojeta do controlador Proporcional-Integral-Derivativo PID *Fulscope* foi oferecida como padrão nos sistemas de controle comerciais da empresa (Aström, 2012).

Visando resolver problemas de ajuste dos parâmetros do controlador PID com regras simples, em 1942 através do clássico artigo “Optimum Settings for Automatic Controllers”, Ziegler e Nichols propuseram às clássicas regras de sintonia, que na época impulsionaram as vendas dos controladores PID (Aström, 2012).

2.1. Robustez da estabilidade e do desempenho

No início de 1970 houve a necessidade de uma teoria de controle robusto para tratar da análise e da avaliação de tolerância às incertezas, também conhecida como a margem de estabilidade, tendo em vista que um processo não pode ser representado perfeitamente através de um modelo matemático, mesmo que seja simples. A finalidade da teoria de controle robusto consistia em avaliar quantitativamente se o controle por retroalimentação é capaz ou não de manter o desempenho satisfatório para todas as perturbações dentro de uma determinada classe. Além disso, foi possível também otimizar a robustez do sistema de controle pela escolha de um controlador por retroalimentação que maximiza a tolerância às incertezas. Em ambos os casos, o problema é essencialmente um problema de otimização não-convexo (Safonov, 2001). Segundo Safonov (2007), uma revolução na teoria de controle começou há quase 40 anos atrás, quando o

foco dominante de pesquisa passou a ser otimizar a robustez. O conceito de robustez desde então tornou-se parte integrante da atual teoria de controle.

Antes de 1975, os conceitos matemáticos usados pela teoria de controle ótimo ainda não tinham explorado adequadamente os conceitos de robustez e estabilidade. A mais próxima medida quantitativa de robustez foi o clássico margem de ganho e de fase para malhas de retroalimentação para sistemas de simples entrada e de simples saída utilizando o diagrama de Bode (1945). Entretanto, de 1960 e até 1975, as respostas no domínio da frequência associadas com o problema de controle, tais como o diagrama de Bode, foram geralmente consideradas ultrapassadas pelos matemáticos especialistas em controle, e o conceito de margem de estabilidade foi esquecido. Na mesma década, o conceito de margens de estabilidade para sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas ainda não tinha despertado a atenção de pesquisadores matemáticos especialistas em controle.

Ainda na década de 70, as pesquisas dirigidas por Michael Athans no Laboratório de Sistemas Eletrônicos do MIT (*Massachusetts Institute of Technology*), contribuíram significativamente para a teoria de controle robusto. Em 1975, as primeiras tentativas de aplicar a teoria de controle ótimo *linear-quadratic Gaussian* (LQG) para projetos práticos de retroalimentação produziram resultados inaceitáveis (Safonov e Papavassilopoulos, 1994; Safonov, 2001). O problema foi identificado como sendo a falta de consideração do problema de estabilidade marginal multivariável (Safonov, 2001). Safonov (2001) introduziu o uso do termo robustez para descrever este problema e lançou as bases para a sua solução usando o método de separação de funções quadráticas. A evolução da teoria de controle robusto até 1982 é descrita com detalhes por Safonov e Fan (1997).

O trabalho de Safonov (1998) fornece uma introdução elementar à teoria de controle robusto incluindo exemplos de motivação e um conjunto de técnicas para estimar limites conservadores sobre margem de estabilidade multivariada. Métodos de análise de projetos de controle robusto têm sido apresentados por Maciejowski (1989), Skogestad e Postlethwaite (1996), e Barmish (1994). Enquanto que Métodos de otimização aplicados a teoria de

controle como *Linear matrix inequality* (LMI) são enfatizadas por Boyd *et al.*(1994) e Ghaoui e Niculescu (1998). Packard (1991) e Iwasaki (1994) descrevem alguns métodos baseado na norma H_∞ (espaço de Hardy) que otimiza os problemas de síntese de controle robusto e podem ser reduzidos à otimização, usando *Linear Matrix Inequalities*(LMI) e incorporando os teoremas de Parrott e de Finsler. Formulações dos problemas de síntese de controle robusto usando *Bilinear matrix inequality* (BMI) são descritos em Mesbahi (1998) e Safonov (1994).

2.2. Identificação de processos

De forma geral é possível agrupar as técnicas de modelagem em duas grandes categorias, a saber: modelagem pela natureza do processo fenomenológico e modelagem empírica baseada em ensaios experimentais (Ljung, 1987). O que provavelmente mais diferencia essas duas abordagens é o conhecimento sobre o processo real utilizado na obtenção dos modelos. Na modelagem fenomenológica do processo, o modelo é desenvolvido a partir de toda informação disponível sobre o processo, enquanto que a modelagem empírica normalmente não pressupõe qualquer conhecimento prévio do sistema (Sjöberg *et al.*, 1996).

A necessidade de se dispor de um modelo matemático aplicado a controle que descreva a dinâmica de um processo surge com as estratégias de controle avançado, nas quais esse modelo terá importante papel na ação de controle. Apesar dos modelos fenomenológicos apresentarem uma descrição mais detalhada do processo, quando comparado aos modelos empíricos, eles são na maioria constituídos de sistemas de equações matemáticas com certo grau de complexidade, considerando a falta de conhecimento sobre os parâmetros das equações, bem como o tempo de resolução do modelo pode tornar seu emprego algumas vezes limitado. Evidentemente, o constante avanço e desenvolvimento das estruturas de *hardwares* dos computadores utilizados para resolução dessa classe de modelos, tende a reduzir a limitação do esforço e tempo computacional.

O processo de identificação de sistemas é quase uma arte, sendo um processo iterativo, conforme afirmativa de Ljung (1987). De acordo com Sjöberg *et al.* (1995), o conhecimento prévio que se dispõe acerca de um processo permite classificá-los em três níveis: modelos caixa-branca ("white-box models"), é o caso quando um modelo é conhecido por representação fenomenológica do sistema; modelos caixa-cinza ("gray-box models"), quando há um certo conhecimento da natureza do processo, mas vários parâmetros permanecem para serem determinados a partir dos dados observados; e modelos caixa-preta ("black-box models"), quando nenhum conhecimento da natureza do processo "a priori" está disponível ou é utilizado, mas a estrutura escolhida do modelo pertence à famílias que são conhecidas por apresentarem boa flexibilidade e foram utilizadas com sucesso no passado.

Segundo Sjöberget al. (1995), o problema da identificação de sistemas pode ser posto da seguinte maneira:

- 1) a partir dos dados de entrada $u(t)$ e saída $y(t)$ observados para um sistema dinâmico

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= [u(1) \ u(2) \ \dots \ u(t)] \\ \mathbf{y}' &= [y(1) \ y(2) \ \dots \ y(t)] \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde \mathbf{u}' e \mathbf{y}' são vetores que representam o conjunto de informações de entrada e saída do processo respectivamente.

- 2) procura-se uma relação entre as observações passadas $[\mathbf{u}^{t-1}, \mathbf{y}^{t-1}]$ e as saídas futuras $y(t)$:

$$y(t) = g(\mathbf{u}^{t-1}, \mathbf{y}^{t-1}) + v(t) \quad (2.2)$$

onde o termo aditivo $v(t)$ é referente ao erro de modelagem.

Segundo Ljung (1987), as estruturas paramétricas lineares utilizadas na prática são variações do modelo de resposta finita a um impulso (FIR-*Finite Impulse Response*), onde são usados não somente maneiras diferentes de se alocar os "polos" do sistema, mas também de se descrever as

características do ruído. O mesmo autor resume todos estes modelos (paramétricos) pela seguinte família geral (Ljung, 1987):

$$A(q^{-1})y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(t - nk) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e(t) \quad (2.3)$$

onde q^{-1} é um operador deslocamento, conhecido por *shift-back*, e A, B, C, D e F correspondem a polinômios em q^{-1} do modelo.

Os casos especiais dessa última equação são conhecidos como: Modelo Box-Jenkins (BJ) onde $A = 1$; Modelo *ARMAX (AutoRegressive Moving Average with exogeneous variable inputs)* considerando $F=D=1$; Modelo erro-saída *OE (Output Error)* onde $A=C=D=1$ e Modelo *ARX (Autorregressive with exogeneous variable)* para $F=C=D=1$.

Na modelagem, uma questão importante é a escolha da estrutura que deverá representar o comportamento de um sistema dinâmico. Aguirre et al. (1998) agrupa algumas representações utilizadas na modelagem de sistemas não-lineares e suas respectivas fontes que são: (i) redes neurais; (ii) funções de base radial, FBR; (iii) séries de Volterra; (iv) "wavelets"; (v) funções polinomiais e racionais; (vi) equações diferenciais polinomiais. O mesmo destaca que os modelos conhecidos bi-lineares constituem uma classe especial dos modelos polinomiais não lineares.

Os modelos polinomiais apresentam algumas vantagens sobre as demais representações para as dinâmicas não lineares. Geralmente, é possível obter modelos polinomiais não lineares, como *NARMAX (non-linear autoregressive moving average model with exogenous inputs)*, que ajustam dados com boa exatidão desde que estes dados não apresentem variações abruptas. Outra vantagem da representação polinomial é a facilidade com que a informação analítica sobre a dinâmica do modelo pode ser obtida (Aguirre e Mendes, 1996). Logo, os polinômios não lineares, os quais são funções lineares nos parâmetros, permite a utilização de algoritmos de estimação de parâmetros para modelos lineares (Davis et al., 1985; Korenberg et al. 1988; Chen et al., 1989; Aguirra, 1998).

A identificação de modelos NARMAX multivariáveis foi analisada por Billings et al. (1989) destacando que modelos sub parametrizado, ou seja, com número de parâmetros menor que o necessário para a especificação completa do sistema, podem apresentar regimes dinâmicos espúrios. Diversas representações não lineares para séries temporais (incluindo redes neurais e modelos NARMA, *non-linear autoregressive moving average model*) foram comparadas por Çinar (1995) e segundo o mesmo, a utilização de uma estrutura não compatível com os tipos de não linearidades existentes nos dados tem um efeito significativo sobre o esforço de identificação e a qualidade do modelo gerado. Assim, o processo de detecção da estrutura de um modelo dinâmico para sistemas não lineares deve receber uma atenção especial durante o procedimento de identificação.

2.3. Auto sintonia de controladores

Em 1943, Ziegler e Nichols (ZN) sugeriram duas abordagens para ajustar os parâmetros de um controlador PID. O primeiro método, o método da malha fechada, baseia-se em testar a planta em malha fechada com o controlador PID, onde as ações integral e derivativa são nulas. O segundo é a partir da curva de reação do processo.

Por muitos anos, as técnicas de ajuste de Ziegler-Nichols foram operações estritamente manuais executadas sempre que uma nova malha de controle era projetada. Durante a execução do teste de Ziegler-Nichols, os dados eram armazenados em um registrador de fita, com os quais se ajustavam os parâmetros; em seguida, iniciava o novo ciclo de modo automático. Era um trabalho repetitivo examinar cada ciclo, e os resultados nem sempre eram satisfatórios. Várias iterações se faziam necessárias para gerar parâmetros de ajuste que produziria o desempenho aceitável em malha fechada.

Na década de 1970, os controladores PID evoluíram para dispositivos eletrônicos e posteriormente para sistemas digitais associados à automação das técnicas de ajuste de Ziegler-Nichols os quais permitiram um melhor ajuste em malha fechada.

Um dos primeiros algoritmos de auto sintonia de controladores foi desenvolvido originalmente na Fischer e Porterno início de 1980 (VanDoren, 2006). Tal algoritmo executa automaticamente um teste semelhante ao método de Ziegler-Nichols em malha aberta tentativa do controlador atuar no processo. O algoritmo de auto ajuste considera o comportamento do processo, permitindo prever como o processo vai reagir a qualquer tentativa corretiva e que por sua vez permite calcular os parâmetros de sintonia.

Pesquisas desenvolvidas por Åström (1996) na área de controle de processos resultaram no desenvolvimento das seguintes técnicas de controle adaptativo: *gain scheduling*, *Model Reference Adaptive System* (ARM), *self tuning regulator* (STR) e *autotuning*. O algoritmo de auto ajuste ou auto sintonia, que foi originalmente proposto por Åström e Hägglund (1984), também é um versão automatizada do método de Ziegler-Nichols. Em vez de utilizar um controlador proporcional para controlar o processo e atingir oscilações cíclicas, o processo é controlado por um relê. O método funciona direcionando a variável de processo para uma série de oscilações a partir de aplicação de um degrau positivo a partir da entrada definida pelo usuário até que a saída do processo passa do valor nominal. Em seguida, aplica-se um degrau negativo até o processo retornar abaixo do valor nominal. Repetindo esse procedimento o processo oscila fora de sincronia com a atuação do relê de controle, mas com a mesma frequência. O tempo necessário para completar uma oscilação é conhecido como o período final do processo (T_u), e a amplitude relativa das duas oscilações, ou seja, a oscilação do relê e a do processo, multiplicado por $4/\pi$ resultam no ganho final (P_u).

Apesar dos avanços ocorridos em relação à auto sintonia de controladores PID e aceitação por parte da indústria, há críticas ao método originalmente apresentado por Åström e Hägglund (1984) para auto sintonia que são: sensibilidade do método na presença de sinais de perturbação; o controlador PID é desabilitado do sistema enquanto o procedimento é executado; não é realizada análise de desempenho para verificar a necessidade de nova-sintonia; a partir da determinação da histerese, não se

pode prever a fase do ponto identificado. Assim, surgiram novos estudos sobre o tema, que procuraram contornar algumas das limitações.

Cogni (2008) apresenta e compara três outras estratégias desenvolvidas por Friman e Waller (1997), Tan et al. (2000) e Ming e Xin (2005) à estratégia de auto sintonia desenvolvida por Åström e Hägglund (1984), destacando que apresentam características distintas quanto a topologia da malha com o relê (on-line e off-line), técnica de sintonia (especificação de margens de fase e ganho, modelo de referência, critério de otimização, etc) e complexidade de implementação. Perić et al. (2000) também propôs uma modificação na auto sintonia de relê ideal de Åström e Hägglund (1984) no intuito de aumentar a classe de aplicação dessa ferramenta. A modificação proposta refere-se à introdução de um elemento dinâmico em série após o relê durante a execução do procedimento, possibilitando a introdução de um tempo morto.

CAPITULO III

3. ANÁLISE CLÁSSICA DO CONCEITO DE ROBUSTEZ

3.1. Robustez

A robustez considerada nesse trabalho diz respeito à da estabilidade e do desempenho. De acordo com Zhou et al. (1996), um sistema de controle é dito robusto quanto ao desempenho quando, mesmo em presença de perturbações externas, erros de modelagem, ruídos dos sensores, etc., a resposta do sistema em malha fechada continua mantida dentro de um nível aceitável. Da mesma forma, robustez da estabilidade e do desempenho constituem objetivos conflitantes, ou seja, um melhor resultado de um, acarreta uma redução do outro, e vice-versa. O esforço do projeto do controlador robusto consiste na determinação de um compromisso aceitável entre os dois tipos de robustez.

Segundo a Teoria de controle, a análise de robustez permite avaliar o desempenho de um sistema de controle submetido às mudanças de parâmetros com o objetivo de permitir a exploração de projetos alternativos de controle que sejam insensíveis às alterações no processo de forma a manter a sua estabilidade e desempenho (Rollins, 1999).

Metodologias desenvolvidas por Doyle e Stein (1981) e Skogestad e Morari (1987) no domínio da frequência analisam a robustez da estabilidade, em malha fechada, utilizando o critério “Log Modulus” e o pico de ressonância. Pode-se verificar nos procedimentos citados que a robustez é analisada *off line* utilizando um modelo do processo.

Atualmente a análise de robustez de um sistema de controle é realizada na fase do projeto da planta considerando o modelo do processo desejando-se obter uma lei de controle válida para todo o domínio de incertezas. Considerando o modelo do processo e as estruturas de controle, a determinação dos parâmetros do sistema de controle permite estabelecer

as condições em que o controlador manterá ou não a estabilidade em malha fechada (Morari e Zafiriou, 1989).

A título de ilustração, para estabelecer as faixas para os parâmetros do controlador de acordo com as metodologias existentes, consiste em considerar a equação em malha fechada, como exemplo a Equação 3.1, aplicando-se um erro ou incerteza de ΔK_p associada com o ganho no modelo do processo, o qual por simplicidade da exposição é assumido ser de primeira ordem. A análise dos efeitos dessa incerteza na estabilidade é realizada a partir da equação característica, de acordo com a Equação 3.2.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} = \frac{G_c(s) \frac{(K_p \pm \Delta K_p)}{1 + \tau s} e^{(-\theta s)}}{1 + G_c(s) \frac{(K_p \pm \Delta K_p)}{1 + \tau s} e^{(-\theta s)}} \quad (3.1)$$

$$1 + G_c(s) \frac{(K_p \pm \Delta K_p)}{1 + \tau s} e^{(-\theta s)} = 0 \quad (3.2)$$

onde os termos $G_c(s)$ e $G_p(s)$ correspondem as funções de transferência do controlador e do processo, respectivamente.

Analisar o comportamento das raízes da equação característica para o intervalo de incerteza ΔK_p associada com o ganho no modelo do processo não é tão difícil, contudo, quando são incluídos os desvios possíveis no tempo morto (θ) e constante de tempo (τ) tal análise torna-se realmente mais complexa.

$$1 + G_c(s) \frac{(K_p \pm \Delta K_p)}{1 + (\tau \pm \Delta \tau)s} e^{[-\theta \pm \Delta \theta]s} = 0 \quad (3.3)$$

Neste caso, a Equação 3.3 teria que ser resolvida para as raízes da equação característica para várias combinações de incertezas. Além disso, teria que se garantir que as magnitudes de $\pm \Delta K_p$, $\pm \Delta \tau$, $\pm \Delta \theta$ sejam fisicamente compatíveis (Tham, 1999), ou seja, de acordo com as variações possíveis do processo.

3.2. Aplicação de conceitos estatísticos na estratégia de controle

Após décadas de investigação e desenvolvimento de métodos mais eficientes de sintonia de controladores, tipos refinados de instrumentação e apesar do processo ser melhor compreendido, um ajuste apropriado de controladores continua a ser um problema desafiador. Os métodos clássicos de sintonia tais como Ziegler-Nichols e Cohen-Coon, já citados, ainda são requisitados para o estabelecimento de configurações de sintonia de controlador.

É bem conhecida a existência de variabilidade inerente ou natural, ou ainda o ruído de fundo, em qualquer processo, independentemente de quão bem concebido ou cuidadosamente seja mantido. No entanto, deve ser enfatizado que uma das dificuldades principais sobre um produto ou processo que pretende ter uma característica de qualidade superior está na variabilidade resultante de causas atribuíveis ou especiais. Considerando que essas questões estão vinculadas à dificuldade de encontrar valores determinísticos precisos para os parâmetros de controle, uma proposta foi apresentada por Silva et al. (2012) para dar uma melhor resposta prática a este problema. Tais questões estão relacionadas com a determinação da região de confiança conjunta dos parâmetros de sintonia, que será apresentado nesse capítulo, considerando dois aspectos intrinsecamente correlacionados e que desempenham um papel essencial na investigação: a ineficácia dos métodos atuais e à natureza estocástica do processo.

Propostas para analisar a região de confiabilidade de parâmetros de regressão têm sido relatadas na literatura por Himmelblau (1970) e aplicada ao controlador clássico PID por Silva et al. (2012) com base em conceitos estatísticos e probabilísticos. O equacionamento apresenta um procedimento no qual expressa a variabilidade de parâmetros determinada a partir da variância residual da saída do controlador. Para tanto, a lei de controle clássico PID pode ser escrita para o modelo de tempo discreto como:

$$\Delta m_c = k_c (e_{(t)} - e_{(t-1)}) + \frac{k_c}{\tau_i} \left(\frac{e_{(t)} + e_{(t-1)}}{2} \right) \Delta t + k_c \tau_d \frac{(e_{(t)} - 2e_{(t-1)} + e_{(t-2)})}{\Delta t} \quad (3.4)$$

em que $e(t)$ corresponde ao desvio entre a variável controlada e o *setpoint*, k_c , τ_i e τ_d são os parâmetros proporcional, integral e derivativo de sintonia, respectivamente, enquanto Δm_c denota a saída do controlador e Δt o passo discreto de tempo.

A Equação 3.4 pode ser reescrita resultando na Equação 3.5, onde η , x_1 , x_2 e x_3 são denotadas por Δm_c , $(e_{(t)} - e_{(t-1)})$, $[(e_{(t)} + e_{(t-1)}) / 2]$ e $[(e_{(t)} - 2e_{(t-1)} + e_{(t-2)}) / \Delta t]$ respectivamente.

$$\eta = k_c x_1 + \frac{k_c}{\tau_i} x_2 + k_c \tau_d x_3 \quad (3.5)$$

A fim de estabelecer a região de confiança conjunta dos parâmetros do controlador, uma pequena modificação na equação 3.5 foi realizada, que consiste em subtrair as relações de desvio x_i do seu valor médio \bar{x}_i , e o agrupamento dos parâmetros de sintonia. Além do mais, escrever as estimativas de mínimos quadrados em termos de variáveis expressas como desvios de suas respectivas médias traz um melhor entendimento das equações obtidas. Assim, o modelo utilizado para a análise da confiabilidade dos parâmetros de sintonia pode ser expresso por:

$$\eta_i = \beta_0 (x_{1i} - \bar{x}_1) + \beta_1 (x_{2i} - \bar{x}_2) + \beta_3 (x_{3i} - \bar{x}_3) \quad (3.6)$$

onde η_i é escrito como uma função do valor esperado x_i , e dos parâmetros β_0 , β_1 e β_2 que denotam k_c , k_c / τ_i e $k_c \tau_d$, respectivamente. Com essas modificações, as estimativas de β_0 , β_1 e β_2 , garantimos que β_i 's são estatisticamente independentes. Além disso, usando o método dos mínimos quadrados baseado na Equação 3.7, e inserindo o termo η_i na mesma equação, resultará na Equação 3.8, onde os parâmetros β_i 's podem ser estimados.

$$\phi = \sum_{i=1}^n p_i (\bar{u}_i - \eta_i)^2 \quad (3.7)$$

onde \bar{u}_i é o valor da saída do controlador, p_i é a frequência de ocorrência desses valores.

$$\phi = \sum_{i=1}^n p_i (\bar{u}_i - \beta_0(x_{1i} - \bar{x}_1) - \beta_1(x_{2i} - \bar{x}_2) - \beta_2(x_{3i} - \bar{x}_3))^2 \quad (3.8)$$

Diferenciando a Equação 3.8 em relação ao β_0 , β_1 e β_2 , resulta na Equação 3.9, com as quais podem ser obtidos os valores estimados de β_i 's, denotadas por b_j .

$$\frac{\partial \phi}{\partial \beta_i} = \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n p_i (\bar{u}_i - \beta_0(x_{1i} - \bar{x}_1) - \beta_1(x_{2i} - \bar{x}_2) - \beta_2(x_{3i} - \bar{x}_3))^2 \right)}{\partial \beta_i} = 0, \quad i = 0,1,2 \quad (3.9)$$

As estimativas (b_j) do β_j parâmetros podem ser calculadas a partir da seguinte equação:

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^n p_i \bar{u}_i (x_{(1+j)i} - \bar{x}_{(1+j)})}{\sum_{i=1}^n p_i (x_{(1+j)i} - \bar{x}_{(1+j)})^2}, \quad j = 0,1,2 \quad (3.10)$$

Conseqüentemente, uma vez que os dados podem ser diretamente obtidos a partir do sistema de controle, então as estimativas da variável de saída η_j podem ser facilmente calculadas.

Sendo a saída do controlador $u_{i,j}$ o valor da média amostral observada \bar{u}_i e o valor estimado para a saída do controlador \hat{u}_i , esse último dado pela equação:

$$\hat{u}_i = b_0(x_{1i} - \bar{x}_1) + b_1(x_{2i} - \bar{x}_2) + b_2(x_{3i} - \bar{x}_3) \quad (3.11)$$

Como pode ser observada a diferença entre os valores $u_{i,j}$ no ponto i e o valor esperado para o modelo η_i pode ser relacionado com o valor médio e o valor estimado pelo modelo resultando na Equação 3.12.

$$(u_{ij} - \eta_i) = (u_{ij} - \bar{u}_i) + (\bar{u}_i - \hat{u}_i) + (b_0 + \beta_0)(x_{1i} - \bar{x}_1) + (b_1 - \beta_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) + (b_2 - \beta_2)(x_{3i} - \bar{x}_3) \quad (3.12)$$

Por quadratura deambos os membros da Equação 3.12, seguido pela soma sobre i e j (anexo I), uma vez que devido à minimização quadrática os termos produtos cruzados são nulos, a seguinte equação pode ser obtida:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} (u_{ij} - \eta_i)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} (u_{ij} - \bar{u}_i)^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^n (\bar{u}_i - \hat{u}_i)^2 p_i + (b_0 - \beta_0)^2 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 p_i}_{(I)} + \underbrace{(b_1 - \beta_1)^2 \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 p_i + (b_2 - \beta_2)^2 \sum_{i=1}^n (x_{3i} - \bar{x}_3)^2 p_i}_{(II) \quad (III)} \quad (3.13)$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação é uma medida do erro experimental obtido de cada termo de várias experiências realizadas em diversos valores de x e o segundo termo é uma medida do êxito do modelo do

ajuste experimental dos dados. O termo $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} (u_{ij} - \bar{u}_i)^2$, por definição, diz

respeito à soma do quadrado dos desvios entre o valor médio e o conjunto de valores de u de acordo com a Equação 1.8 (Anexo I) com grau de liberdade

$\sum_{i=1}^n (p_i - n)$, enquanto o termo $\sum_{i=1}^n (\bar{u}_i - \hat{u}_i)^2 p_i$ corresponde à soma dos

quadrados residual com o grau de liberdade dado por $(n-2)$, Equação 1.9

(Anexo I). O valor esperado de $\sigma_{\bar{u}_i}^2$ resulta de contribuições dos termos acima

mencionados ponderados pelos respectivos graus de liberdade dado por

$$\sum_{i=1}^n (p_i - n) + (n - 2).$$

Em relação aos termos restantes da Equação 3.13, (I), (II) e (III), vale ressaltar que a aplicação do teorema de partição o qual considera que a soma de n variáveis normalizadas e independentes W_1, W_2, \dots, W_n , pode ser particionada em k soma quadradas de W_i com ν_i grau de liberdade, cuja soma é distribuída segundo uma χ^2 , permitetratar os termos (I), (II) e (III), em conjunto, distribuído segundo uma distribuição χ^2 .

Tendo em mente a base do formalismo para gerar a região de confiança conjunta, deve também ser observado que a soma dos quadrados para o desvio entre os valores esperados β_0 , β_1 e β_2 e as suas estimativas de b_0 , b_1 e b_2 são distribuídas de acordo com a distribuição $\sigma_{\bar{u}_i}^2 \chi_v^2$, com graus de liberdade $\nu_0 = 1$, $\nu_1 = 1$ e $\nu_2 = 1$, onde χ_v^2 denota a probabilidade para a distribuição chi-quadrado. Uma vez que todos os desvios podem ser considerados como estatisticamente independentes, a sua soma é também distribuída conforme $\sigma_{\bar{u}_i}^2 \chi_v^2$, mas com um grau de liberdade, $\nu = \nu_0 + \nu_1 + \nu_2$, igual a 3 resultando na seguinte equação:

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{u}_i}^2 \chi_v^2 = & (b_0 - \beta_0)^2 \sum_{i=1}^n p_i (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + \\ & + (b_1 - \beta_1)^2 \sum_{i=1}^n p_i (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 + (b_2 - \beta_2)^2 \sum_{i=1}^n p_i (x_{3i} - \bar{x}_3)^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Da definição do valor esperado da distribuição chi-quadrado, onde ν é igual ao grau de liberdade, o termo da equação 3.14 do membro esquerdo fica: $\sigma_{\bar{u}_i}^2 E\{\chi^2(d.f.=3)\} = 3\sigma_{\bar{u}_i}^2$. Partindo da razão de variâncias que segue uma distribuição-F, sendo $F = \sigma_{\bar{u}_i}^2 / s_{\bar{u}_i}^2$, onde $\sigma_{\bar{u}_i}^2$ é a variância esperada e $s_{\bar{u}_i}^2$ é a variância estimada, a equação 3.14 resulta na seguinte equação:

$$\begin{aligned} (b_0 - \beta_0)^2 \sum_{i=1}^n p_i (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + (b_1 - \beta_1)^2 \sum_{i=1}^n p_i (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 + \\ + (b_2 - \beta_2)^2 \sum_{i=1}^n p_i (x_{3i} - \bar{x}_3)^2 = 3s_{\bar{u}_i}^2 F_{1-\alpha} \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde $\nu = (3, \sum p_i - 3)$ denota o grau de liberdade para $(1-\alpha)$ nível crítico de confiança.

Reordenando a equação 3.15, pode-se observar claramente que a mesma representa uma elipse no espaço de parâmetros (coordenadas: β_0 , β_1 e β_2) para uma determinada percentagem de região de confiança, isto é, $(1 - \alpha)100$, de acordo com a equação seguinte equação:

$$\frac{(b_0 - \beta_0)^2}{3s_{\bar{u}_i}^2 F_{1-\alpha, (v1, v2)}} + \frac{(b_1 - \beta_1)^2}{3s_{\bar{u}_i}^2 F_{1-\alpha, (v1, v2)}} + \frac{(b_2 - \beta_2)^2}{3s_{\bar{u}_i}^2 F_{1-\alpha, (v1, v2)}} = 1 \quad (3.16)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n p_i (x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{\sum_{i=1}^n p_i (x_{2i} - \bar{x}_2)^2} \quad \frac{\sum_{i=1}^n p_i (x_{3i} - \bar{x}_3)^2}{\sum_{i=1}^n p_i (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}$$

Os resultados obtidos por Silva *et al.*(2012), quanto a utilização da Equação 3.16, possibilitaram gerar a região de confiabilidade para os parâmetros β 's, e com isso a informação sobre correlação linear entre as mesmas podem ser condensados na matriz de covariância ou na matriz de correlação dada por:

Tabela 1 – Coeficiente de correlação ρ

Parâmetros	β_0	β_1	β_2
β_0	$\rho(\beta_0\beta_0)= 1$	$\rho(\beta_0\beta_1)=0,137$	$\rho(\beta_0\beta_2)=0,946$
β_1	$\rho(\beta_1\beta_0)= 0,137$	$\rho(\beta_1\beta_1)=1$	$\rho(\beta_1\beta_2)=0,128$
β_2	$\rho(\beta_2\beta_0)= 0,946$	$\rho(\beta_2\beta_1)=0,128$	$\rho(\beta_2\beta_2)= 1$

Os dados reais sempre apresentam algum grau de correlação, como pode ser observado a partir de Tabela 1. Conseqüentemente, os parâmetros na realidade não são estatisticamente independentes. Assumindo uma condição ideal na qual os parâmetros β_0 , β_1 e β_2 podem ser considerado estatisticamente independentes, a probabilidade conjunta pode ser escrita como o produto das probabilidades individuais correspondentes. Uma vez que é prática normal considerar aceitável ter nível de significância de $\alpha = 5\%$, o que corresponde a um intervalo de confiança de 95% para os parâmetros individuais, então a probabilidade conjunta dada pela $P(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ resultante é igual a 0,857. Isto indica uma redução considerável na região de confiança conjunta, quando comparado com um nível de significância individual de 5%.

No caso de uma abordagem um pouco mais realista ser considerada, em que os parâmetros de ajuste não podem ser considerados estatisticamente independentes, a probabilidade conjunta é dada por:

$$P(\beta_0\beta_1\beta_2) = P(\beta_0)P(\beta_1 / \beta_0)P(\beta_2 / \beta_0\beta_1) \quad (3.17)$$

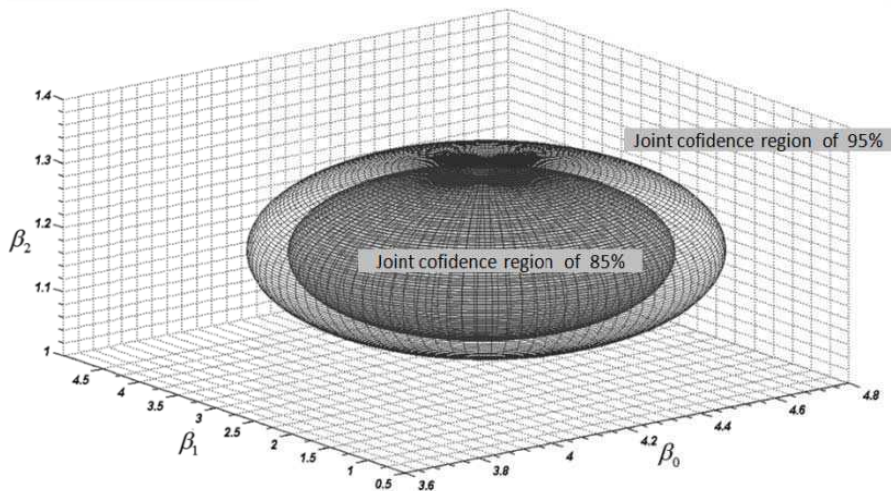
Todavia, devido aos coeficientes de correlação $\rho(\beta_1\beta_0)$ e $\rho(\beta_1\beta_2)$ serem muito pequeno, o que indica uma fraca associação linear entre os parâmetros, Equação 3.17 pode ser reescrita como:

$$P(\beta_0\beta_1\beta_2) = P(\beta_0)P(\beta_1)P(\beta_2) \quad (3.18)$$

mesmo considerando que a utilização do coeficiente de correlação ρ é uma medida conceitualmente fraca da probabilidade condicional. Tal consideração produz $P(\beta_0,\beta_1,\beta_2)=0.85$.

Do ponto de vista prático, as duas últimas considerações implicam em uma região de confiança de 85%. Deve-se observar que, para um caso real, tal redução é ainda mais drástica. Quando os valores obtidos para as regiões de confiança conjuntas são introduzidos na Equação 3.16, o elipsoide pode ser construído resultando na figura seguinte:

Figura 3.1 – Região de confiança conjunta para o nível de significância de $\alpha= 5\%$ e 15%



O estudo realizado por Silva et. al (2012), possibilitou a confirmação de que pode haver a interação entre os parâmetros de sintonia de um controlador PID. A avaliação desses parâmetros como variáveis aleatórias foi possível com a aplicação de um sistema de auto sintonia. Da determinação da confiabilidade conjunta para os referidos parâmetros, pode-se concluir que as faixas para tais parâmetros, determinadas pelos métodos determinísticos, na realidade, podem ser menores ainda, quando a interação entre eles são consideradas.

CAPITULO IV

4. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: REGIÃO DE ROBUSTEZ BASEADA EM PRINCÍPIOS ESTATÍSTICOS

A análise de estabilidade tem recebido particular atenção de engenheiros e profissionais envolvidos com o controle do processo, devido basicamente aos efeitos das incertezas presentes nos sistemas, que podem exercer um papel fundamental no desempenho e na estabilidade dos sistemas de controle.

Apesar do grande volume de pesquisas na área, a presença de incertezas continua sendo um problema desafiador para os engenheiros de controle, que tentam manter os três fundamentos básicos que determinam o desempenho de um sistema de controle, a saber: controlabilidade, observabilidade e estabilidade (Rollins, 1999). Desde que a robustez dos sistemas de controle pode ser vista como a habilidade da estrutura de controle de tratar com todas as incertezas presentes no processo de modo que o seu desempenho seja satisfatório, então, é evidente que um tratamento estatístico torna-se necessário. No entanto, pouca atenção tem sido dada aos métodos robustos associados com uma abordagem estatística clássica, reconhecendo-se ainda que muito dos resultados obtidos com tal abordagem tem sido bastante complexos e, portanto, na prática, ainda deixam muito a desejar (Ray e Stengel, 1993; Stengel e Ray, 1991; Calafiore *et al.*, 2011). A maioria deles requer a determinação de medidas de probabilidades e naqueles casos em que o uso do método de Monte Carlo é necessário, não se podem garantir a precisão dos resultados para um número reduzido de amostras.

Há um amplo conjunto de métodos clássicos e modernos para tratar às incertezas do modelo, e conseqüentemente a robustez, como o lugar das raízes e análise do valor singular. O tratamento aplicado em tais métodos é de forma determinística, sem considerar os limites de todos os parâmetros do processo, o que resulta sempre em métricas não realistas relacionadas às incertezas. Devem ser ainda enfatizado que as métricas deterministas podem ser substancialmente conservadoras. A análise de valor singular estruturado

(Doyle, 1982) pode, todavia, reduzir em algum grau de conservadorismo, embora tais tratamentos continuem a ser determinísticos. Além disso, na maioria dos casos, estes métodos são difíceis de entender e podem ser complexos em relação à implementação.

A análise de estabilidade robusta apresentada neste trabalho é devotada em estabelecer a região de confiança para cada raiz da equação característica do processo em questão. A técnica considera a relação entre a métrica Euclidiana e a distância estatística, essa última assim chamada em virtude da utilização de variâncias e covariâncias de amostras. O que é significativo é a relação desse tratamento com a distribuição chi-quadrado. Aplicada às partes reais e imaginárias de números complexos, tal abordagem torna possível determinar as formas quadráticas e calcular os contornos da elipse resultante, revelando assim a robustez desejada.

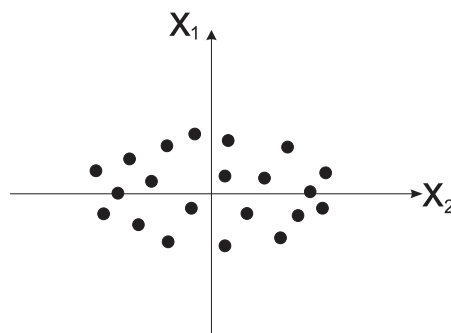
4.1. Distância euclidiana e distância estatística

Considere qualquer ponto, P , de um plano ou, em particular, de um plano complexo com a sua parte real (x_1) e imaginária (x_2) como coordenadas. A distância Euclidiana de P para origem O , dada por:

$$d(O, P) = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} \quad (4.1)$$

A Equação 4.1 é visto ser inadequada para a maioria das finalidades estatísticas, porque, na maioria dos casos, as dispersões das coordenadas axiais, que representam a variabilidade, não são iguais, como mostra a Figura 4.1 (Johnson e Wichern, 1992).

Figura 4.1 - Gráfico de dispersão genérico de variabilidade



Considerando tal dispersão e normalizando as coordenadas é fácil obter a assim chamada distância estatística, como se segue:

$$d(O, P) = \sqrt{\left(\frac{x_1}{\sigma_{x_1}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sigma_{x_2}}\right)^2} \quad (4.2)$$

ou, de forma geral, em notação vetorial, tem-se:

$$d^2(O, P) = X' \Sigma^{-1} X \quad (4.3)$$

onde σ_{x_i} indica a variância de componentes do vetor X , onde $X' = [x_1, x_2]$ e

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2}^2 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

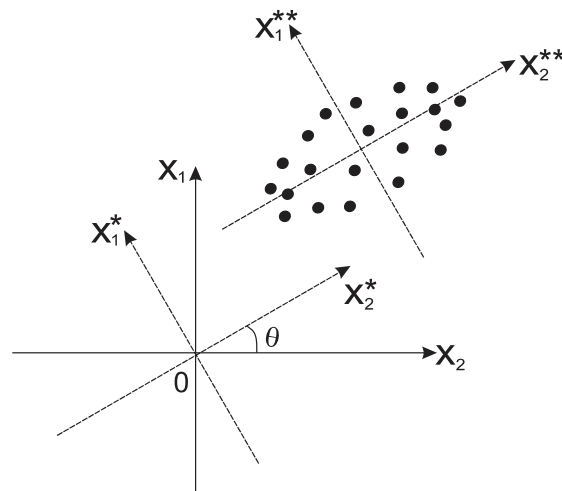
Claramente, a Equação 4.3 é uma forma quadrática, que representa uma elipse centrada na origem. Também deve ser observado que a distância Euclidiana é um caso particular da distância estatística quando $\sigma_x = \sigma_y$. No caso de uma elipse, que está centrada no valor esperado da variável aleatória X , um ponto diferente da origem, e considerando também Σ como a matriz de variância-covariância, a Equação 4.3 pode ser generalizada como:

$$d^2(O, P) = (X - \mu_X)' \Sigma^{-1} (X - \mu_X) \quad (4.5)$$

Para uma variável aleatória bidimensional X , a Equação 4.5, descreve os contornos de uma elipse centrada em $\mu = (\mu_x, \mu_y)$, os quais não estão, necessariamente, na mesma direção que o plano de coordenadas.

Sem perda de generalidade, o gráfico da Equação 4.5 para o plano x_1 e x_2 , pode ser ilustrado na Figura 4.2.

Figura 4.2 - Conjunto de pontos que representam uma elipse



Se X_1 e X_2 estão correlacionadas o que corresponde a uma matriz de covariância Σ cheia, ou seja, com valores não nulos, então, por meio de movimentos combinados de translação e rotação dos eixos resultantes de uma transformação linear, é possível suprimir o termo de covariância cruzada envolvidas na Equação 4.5. A transformação linear a ser usada na translação e rotação pode ser expressa por:

$$(X - \bar{X}) = P(X^* - \bar{X}^*) \quad (4.6)$$

onde P é uma matriz a qual pode ser facilmente derivada de conceitos da geometria elementar aplicada a fig. 4.2 (Anexo II), resultando na seguinte matriz ortogonal denominada de rotação e que satisfaz a identidade $PP^T = P^T P = I$.

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Vale salientar que uma matriz ortogonal (2x2) da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ na qual a é um número real entre -1 and 1, ou seja, $a = \cos \theta$ para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$, gera não somente a matriz (4.7), matriz de rotação de determinante igual a 1, como também uma outra matriz chamada de reflexão, cujo determinante é igual a -1 (Zhang, 2011).

Substituindo a Equação 4.6 na Equação 4.5, resulta em:

$$d^2(\boldsymbol{\mu}, P) = [\mathbf{P}(\mathbf{X}^* - \boldsymbol{\mu}_{X^*})]' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{P}(\mathbf{X}^* - \boldsymbol{\mu}_{X^*}) \quad (4.7)$$

ou

$$d^2(\boldsymbol{\mu}, P) = [(\mathbf{X}^* - \boldsymbol{\mu}_{X^*})]' \mathbf{P}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{P}(\mathbf{X}^* - \boldsymbol{\mu}_{X^*}) \quad (4.8)$$

É fácil mostrar que todas as matrizes (2x2) simétricas podem ser diagonalizáveis (Poole, 2005). Por conseguinte, uma vez que a matriz $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ é simétrica e \mathbf{P} é uma matriz ortogonal, tal matriz pode diagonalizar $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ resultando em uma matriz diagonal \mathbf{D} :

$$\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{P}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{P} \quad (4.9)$$

Substituindo a Equação 4.9 na Equação 4.8, a seguinte equação pode ser obtida:

$$d^2(\boldsymbol{\mu}, P) = (\mathbf{X}^* - \boldsymbol{\mu}_{X^*})' \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{X}^* - \boldsymbol{\mu}_{X^*}) \quad (4.10)$$

Deve ser enfatizado que a Equação 4.10 é a forma quadrática de uma elipse centrada no valor esperado da variável aleatória \mathbf{X}^* sem o termo covariância cruzada.

Explicitamente, a Equação 4.10 pode ser reescrita para duas dimensões como:

$$d^2(\boldsymbol{\mu}_{X^*}, P) = \frac{(x_1^* - \mu_{x_1^*})^2}{\sigma_{x_1^*}^2} + \frac{(x_2^* - \mu_{x_2^*})^2}{\sigma_{x_2^*}^2} \quad (4.11)$$

Considerando a definição da variável aleatória χ^2 (chi-quadrado) dada por:

$$\chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_v^2 = \sum_{i=1}^v Z_i^2 = \sum_{i=1}^v \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (4.12)$$

onde ν denota os graus de liberdade e Z é uma variável normal padronizada. O que precisa ser notado aqui é que a Equação 4.12 possui uma distribuição χ^2 , isto é, é igual a χ^2 com ν graus de liberdade. É importante observar a diferença $(X_i - \mu_i)$ relacionada com a média corresponde à translação onde a origem da elipse pode ser encontrada em qualquer posição com relação ao sistema cartesiano. Sendo assim,

$$d^2(\mu_{x^*}, P) = \frac{(x_1^* - \mu_{x_1^*})^2}{\sigma_{x_1^*}^2} + \frac{(x_2^* - \mu_{x_2^*})^2}{\sigma_{x_2^*}^2} \cong \chi_{2,\alpha}^2 \quad (4.13)$$

isto é, o fato de $d^2(\mu_{x^*}, P) \cong \chi_{2,\alpha}^2$ permite que o contorno de uma elipse seja determinado contendo $(1-\alpha)100\%$ da probabilidade, para a qual, α corresponde à nível de significância e $\nu = 2$.

Uma vez que x_1^* e x_2^* podem descrever as coordenadas retangulares dos pontos representando as raízes da equação característica de um sistema de segunda ordem, a primeira indicação sobre a estabilidade do sistema, então, a elipse estabelecida está relacionada com a robustez da estabilidade.

4.2. Intervalos de Confiança

O tratamento apresentado na seção anterior revela como é possível obter a região robusta a qual corresponde à região de confiabilidade de parâmetros do sistema. Entretanto, em situações nas quais apenas um parâmetro deva ser considerado, torna-se necessário a utilização do intervalo de confiança.

A partir de informações obtidas de amostras de uma população, é possível reconstruir o universo de resultados possíveis e uma vez de posse da população do universo, é possível produzir afirmações sobre uma determinada característica do mesmo. Esta característica pode ser representada por uma variável aleatória. Com informações completas sobre a função densidade de probabilidade da variável aleatória (v.a.) pode prescindir o uso das amostras, onde toda informação desejada seria obtida através da distribuição da variável.

Mas isso raramente acontece. Ou não se tem qualquer informação a respeito da variável, ou ela é apenas parcial. Pode-se admitir, que a variável seja aproximada por uma distribuição normal. Mas não são conhecidos os parâmetros que a caracterizam (média e variância). Em outros casos, pode-se ter uma ideia da média e da variância, mas desconhece-se a forma da distribuição de probabilidade.

Uma característica da população é descrita por parâmetros obtidos da amostra. Para amostras de uma população identificada pela variável aleatória X , então, os parâmetros seriam a média (\bar{X}) e/ou a sua variância amostral (S^2). Na literatura (Young e Smith, 2005; Morettin e Bussab, 2006; Casella e Berger, 2002) são apresentadas as considerações sobre estimação de parâmetros, qualidade e eficiência de estimadores.

Um importante teorema é o *Teorema Central do Limite* o qual afirma que “para amostras aleatórias independentes (X_1, X_2, \dots, X_n), retiradas de uma população com média μ_X e variância σ^2 , a distribuição amostral da média \bar{X} aproxima-se de uma distribuição normal com média μ_X e variância $\frac{\sigma^2}{n}$, quando n tende ao infinito” (Montgomery, 2003). Isto é,

$$\bar{X} \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \quad (4.14)$$

No caso em que a variância (σ^2) populacional é conhecida e a v.a. tem distribuição normal, ou seja, $X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$ o intervalo de confiança (IC) para a média populacional μ é da forma: $IC[\mu, (1 - \alpha)\%] = [L_{\text{inferior}}; L_{\text{superior}}]$.

Quanto a variância (σ^2) populacional é conhecida e não é conhecida a distribuição da v.a., o intervalo de confiança (IC) para a média populacional μ , utilizando o Teorema Central do Limite é semelhante ao caso em que a variância populacional é conhecida.

Entretanto, quando a variância (σ^2) populacional é desconhecida e a v.a. tem distribuição normal, ou seja, $X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$, para obtenção do intervalo de confiança (IC) para a média populacional μ , se faz necessário calcular a estimativa de s^2 (variância amostral) de σ^2 , dado pela Equação 4.15, sendo esse um estimador não viciado de variância mínima (Young e Smith, 2005).

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} \quad (4.15)$$

Para (X_1, X_2, \dots, X_n) uma amostra normal de uma população com valor médio μ e variância σ^2 , tem-se que $\bar{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ resultando na Equação 4.16:

$$(n-1) \frac{s^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \rightarrow \chi_{(n-1)}^2 \quad (4.16)$$

que é o ponto de partida da distribuição chi-quadrado.

Para casos onde a variância (σ^2) populacional é desconhecida podemos então definir uma nova variável tal:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \quad (4.17)$$

onde a estatística $t \rightarrow t_{(n-1)}$, isto é, a estatística t tem uma distribuição *t-Student* com $n-1$ graus de liberdade.

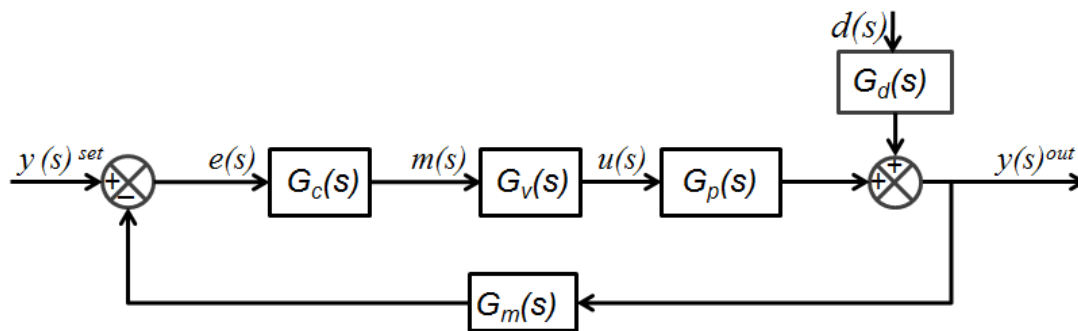
4.3. Estabilidade do Sistema

O conceito de estabilidade de sistema de controle já está bem estruturado e difundido pela literatura. A aplicação deste conceito é realizada nas várias etapas do desenvolvimento de um projeto de controle de processo.

Dessa forma, serão utilizadas as definições de estabilidade no plano complexo com fins de mapear a robustez de estabilidade.

Um diagrama de bloco pode ser considerado como representativo da estratégia de controle adotada no presente estudo, conforme descrito abaixo.

Figura 4.3 - Diagrama de blocos de um sistema de controle genérico em malha fechada



Sendo que $e(s)$ é o desvio entre o $y(s)^{set}$, o valor desejado, e a variável de saída $y(s)^{out}$, $m(s)$ a saída do controlador, $u(s)$ a saída do atuador e $d(s)$ o distúrbio genérico, enquanto que $G_c(s)$, $G_v(s)$, $G_p(s)$, $G_m(s)$ e $G_d(s)$ são as respectivas funções de transferência do controlador, atuador, processo, medidor e de distúrbio.

A resposta em malha fechada para o processo considerado pode ser dada por:

$$\bar{y}(s) = \frac{G_p G_c G_v}{1 + G_p G_c G_v G_m} \bar{y}_{sp}(s) + \frac{G_d}{1 + G_p G_c G_v G_m} \bar{d}(s) \quad (4.18)$$

O critério clássico de estabilidade afirma que o sistema em malha fechada é considerado estável se todas as raízes da sua equação característica estão localizadas à esquerda do eixo imaginário. Portanto, as raízes, que são as soluções de:

$$1 + G_p G_c G_v G_m = 0 \quad (4.19)$$

devem obedecer tais exigências.

Sem perda de generalidade, considerando as funções de transferências do sensor e atuador unitário, e o processo de primeira ordem, obtido de uma aproximação do modelo de convolução (Apêndice I), junto com a função de transferência do controlador pode ser assumido que a Equação 4.20 acima pode se aproximar de um sistema de segunda ordem dada por:

$$\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1 = 1 + \frac{k_p}{\tau_p s + 1} \left(k_c + \frac{k_c}{\tau_i s} + k_c \tau s \right) = 0 \quad (4.20)$$

onde τ é a constante de tempo, ou seja, o tempo natural de oscilação que determina a velocidade de resposta do sistema do sistema e ξ é o fator de amortecimento, onde mostra o grau de oscilação em uma resposta do processo depois de uma perturbação (Stephanopoulos, 1984; Luyben, 1997), podem ser obtidos a partir da Equação 4.21, resultando em:

$$\tau = \sqrt{\frac{\tau_p \tau_i}{k_p k_c} + \tau_d \tau_i} \quad (4.21)$$

$$\xi = \frac{(\tau_i)^{1/2}}{2(\tau_p / k_p k_c + \tau_d)^{1/2}} (1/k_p k_c + 1) \quad (4.22)$$

Assim, as raízes podem ser calculadas considerando as seguintes condições:

Se $\xi^2 - 1 > 0$, onde as raízes apresentam apenas parte real:

$$s = -\frac{\xi^2}{\tau} \pm \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \quad (4.23)$$

e se $\xi^2 - 1 < 0$, onde as raízes são complexas:

$$s = -\frac{\xi^2}{\tau} \pm j \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\tau} \quad (4.24)$$

Uma vez que os parâmetros ξ e τ podem ser expressos como uma função de k_c , τ_i , e τ_d , como pode ser observado nas equações 4.22 e 4.23 os

parâmetros de sintonia de um controlador PID, os quais podem ser considerados variáveis aleatórias, então, ξ e τ também são variáveis aleatórias, tendo como características básicas a distribuição de probabilidade associada com cada uma delas. Observa-se que ambas as partes real e imaginária de cada raiz complexa são por consequências estocásticas, representadas no plano complexo, resultam em pontos dispersos em torno do valor médio. Assim, considerando a distância estatística anteriormente abordada como uma métrica, os contornos do elipsoide que limitam a região da robustez de estabilidade, com um nível particular de significância pode ser mapeado. Embora o modelo probabilístico seja interessante, deve ser observado que a metodologia de controle robusto visa muito mais os limites de incerteza do que mensuração da probabilidade por meio de sua distribuição de probabilidade propriamente dita.

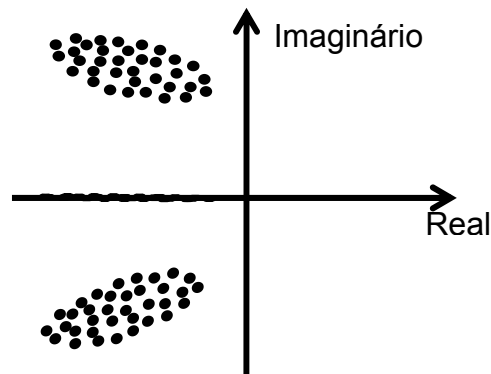
4.4. Robustez da estabilidade

Como visto no item 2.1 e 3.1, segundo vários autores (Morari e Zafiriou, 1989; Skogestad e Morari, 1987; Doyle e Stein, 1981) a robustez da estabilidade e do desempenho são tratadas de forma determinística, sendo avaliada apenas a variabilidade imposta aos parâmetros de interesse do sistema de controle, sem levar em conta uma distribuição de probabilidade para esses parâmetros.

No presente trabalho, a proposta tratada obtenção da distribuição de probabilidade e a variabilidade global para um sistema de controle aplicado a determinação da robustez da estabilidade e do desempenho operando em paralelo com o processo real. Tal análise é obtida a partir do lugar das raízes.

Uma vez que as raízes da equação característica de segunda ordem podem ser obtidas de acordo com as Equações 4.24 e 4.25, uma dispersão das mesmas pode ser observada no plano complexo devido à natureza estocástica do processo, como mostra a Figura 4.4.

Figura 4.4 – Dispersão das raízes no plano complexo



A utilização de um sistema de auto sintonia possibilita a correção dos parâmetros de sintonia de um controlador PID em cada período amostral da operação de um processo, correção essa que minimiza os efeitos devidos aos distúrbios presentes no sistema como também as incertezas resultantes do procedimento de medidas.

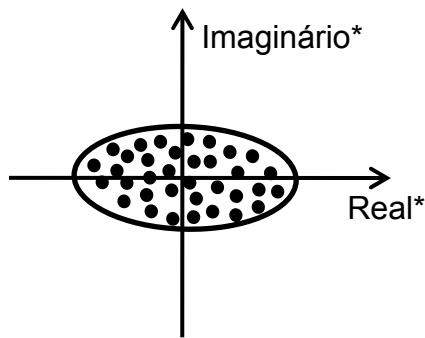
Do ponto de vista estatístico, mapear a região de confiabilidade das raízes no plano complexo consiste em determinar os contornos dessa dispersão, com certo nível de significância, resultando na quantificação da variabilidade global do sistema de controle em tempo real, além de avaliar a tendência do comportamento da estabilidade do sistema. De fato, essa região pode ser denominada de região robusta de estabilidade, visto que representa o universo de resultados possíveis para os parâmetros de interesse.

A região robusta de estabilidade pode ser obtida a partir da Equação 4.14, onde aplicando as transformações de coordenadas apropriadas, como segue:

$$X^* = P^{-1}(X - \bar{X}) \quad (4.25)$$

essa equação transporta os dados originais das raízes para um novo sistema de coordenadas $X^*(Real^*, Imag.^*)$, como mostra a Figura 4.5, possibilitando também calcular a variância $\sigma_{X^*}^2$.

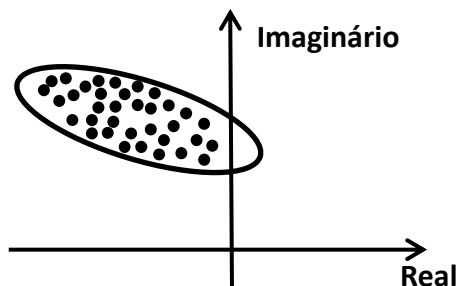
Figura 4.5 – Dispersão das raízes no novo sistema de coordenadas



A determinação da borda da elipse referente aos dados das posições das raízes na nova orientação no plano complexo, onde a Equação 4.14 pode ser utilizada, resultando no mapeamento desejado para a robustez da estabilidade. A reescrita da borda no sistema de coordenada original é facilmente realizada aplicando o caminho inverso da rotação e translação.

A redução de medida da robustez da estabilidade pode ser avaliada pelo deslocamento do contorno da região de confiabilidade da dispersão das raízes. Como mostrada na Figura 4.6, a migração do contorno dessa região quando cruza o eixo imaginário para o semi-plano real positivo, antes mesmo das raízes, indicará que alguma irregularidade no sistema está ocorrendo e poderá levar a instabilidade (Silva et al., 2012).

Figura 4.6 – Perda da robustez da estabilidade



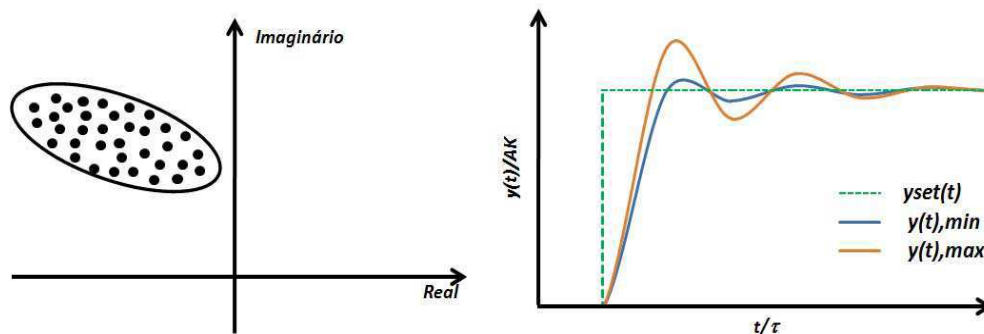
A vantagem desse método é que mesmo que a equação característica seja função de várias variáveis e parâmetros, as raízes são sempre duas e não correlacionadas.

4.5. Robustez do desempenho

A estabilidade de um controlador pode ser avaliada pela sua capacidade de manter a variável controlada próximo ao valor desejado (setpoint), mesmo em presença de perturbações externas (Luyben, 1990).

Uma vez obtido o contorno da robustez da estabilidade, é possível obter as respostas para o desempenho referente a esse contorno, como mostra a Figura 4.7. Além das respostas máximas e mínimas, é obtida também a distribuição de probabilidade para a saída do processo.

Figura 4.7 – Respostas da saída do processo a partir do contorno da elipse



Obter a saída do processo referente ao contorno da robustez da estabilidade não é uma tarefa fácil de ser resolvida analiticamente, uma vez que o sistema de equações apresenta variáveis acopladas como pode ser observado a partir das equações 4.21 a 4.24. No entanto, um procedimento que possibilita resolver equações acopladas não lineares, tal como Levenberg-Marquardt (Nocedal e Wright, 1999), possibilita obter as estimativas para os parâmetros de sintonia k_c , τ_i e τ_d a partir das raízes da borda da região robusta de estabilidade. E, conseqüentemente, as previsões da saída do processo podem ser geradas.

A determinação dos parâmetros de sintonia do controlador referente às bordas da elipse pode ser determinada pelas seguintes equações:

- a) se $\xi^2 - 1 > 0$, onde as raízes apresentam apenas parte real:

$$s = -\frac{\frac{(\tau_i)^{1/2}}{2(\tau_p/k_p k_c + \tau_d)^{1/2}}(1/k_p k_c + 1)^2}{\sqrt{\frac{\tau_p \tau_i}{k_p k_c} + \tau_d \tau_i}} \pm \sqrt{\left(\frac{(\tau_i)^{1/2}}{2(\tau_p/k_p k_c + \tau_d)^{1/2}}(1/k_p k_c + 1)\right)^2 - 1} \quad (4.26)$$

para cada valor de s da região especificada, tem-se que encontrar três valores $(k_c, \tau_i, \tau_d)_p$, ou seja, duas equações e três variáveis.

b) se $\xi^2 - 1 < 0$, onde as raízes são complexas:

$$s_{real} = -\frac{\left(\frac{(\tau_i)^{1/2}}{2(\tau_p/k_p k_c + \tau_d)^{1/2}}(1/k_p k_c + 1)\right)^2}{\sqrt{\frac{\tau_p \tau_i}{k_p k_c} + \tau_d \tau_i}} \quad (4.27)$$

$$s_{img} = \pm \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{(\tau_i)^{1/2}}{2(\tau_p/k_p k_c + \tau_d)^{1/2}}(1/k_p k_c + 1)\right)^2}}{\sqrt{\frac{\tau_p \tau_i}{k_p k_c} + \tau_d \tau_i}} \quad (4.28)$$

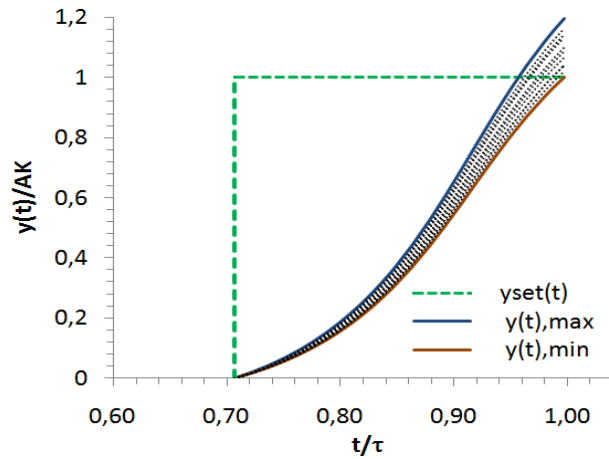
para o par $(Real, Img)$ da região especificada, tem-se que encontrar três valores $(k_c, \tau_i, \tau_d)_p$, ou seja, três equações e três variáveis.

Uma vez que as respostas da saída podem ser obtidas para as bordas da elipse e para a dispersão das raízes gerada pelo processo, então é possível obter a região de robustez do desempenho associada à região de robustez da estabilidade. A partir das respostas, a avaliação para o desempenho pode ser escolhida em função desejada para o processo, por exemplo, *overshoot*, velocidade de resposta, taxa de decaimento ou tempo de resposta, etc. ou também outro índice que necessite da variabilidade da saída do processo.

Como exemplo, considerando a saída do processo no domínio tempo de acordo com a Equação III.15, do Anexo III, gerada pelas raízes para t/τ_p até 1 as respostas geradas pela borda da região de robustez da estabilidade podem ser obtidas, como mostra a Figura 4.8. Além disso, uma distribuição de

probabilidade da mesma pode ser obtida, caracterizando assim a variabilidade da saída do sistema em função das incertezas do processo.

Figura 4.8 – Respostas geradas pela borda da região de robustez da estabilidade



Tendo em vista a resposta da saída do processo em $t/\tau_p = 1$, caracterizada como variável aleatória, e dado que a distribuição de probabilidade não é conhecida, de acordo com Montgomery e Runger (2003) e Young e Smith (2005), então se pode usar a definição apresentada no item 4.2, do Teorema Central do Limite e o intervalo de confiança de $(1-\alpha)\%$ para a média populacional μ , para uma amostra de $n \geq 4$. Desse modo os limites de confiança da média podem ser expressos por:

$$L_{\bar{y}} = \mu_{\bar{y}} \pm t_{(n-1)} \frac{S_y}{\sqrt{n}} \tag{4.29}$$

sendo, $t_{(n-1)}$ o valor crítico *t-student* com $n-1$ grau de liberdade e erro $\alpha\%$.

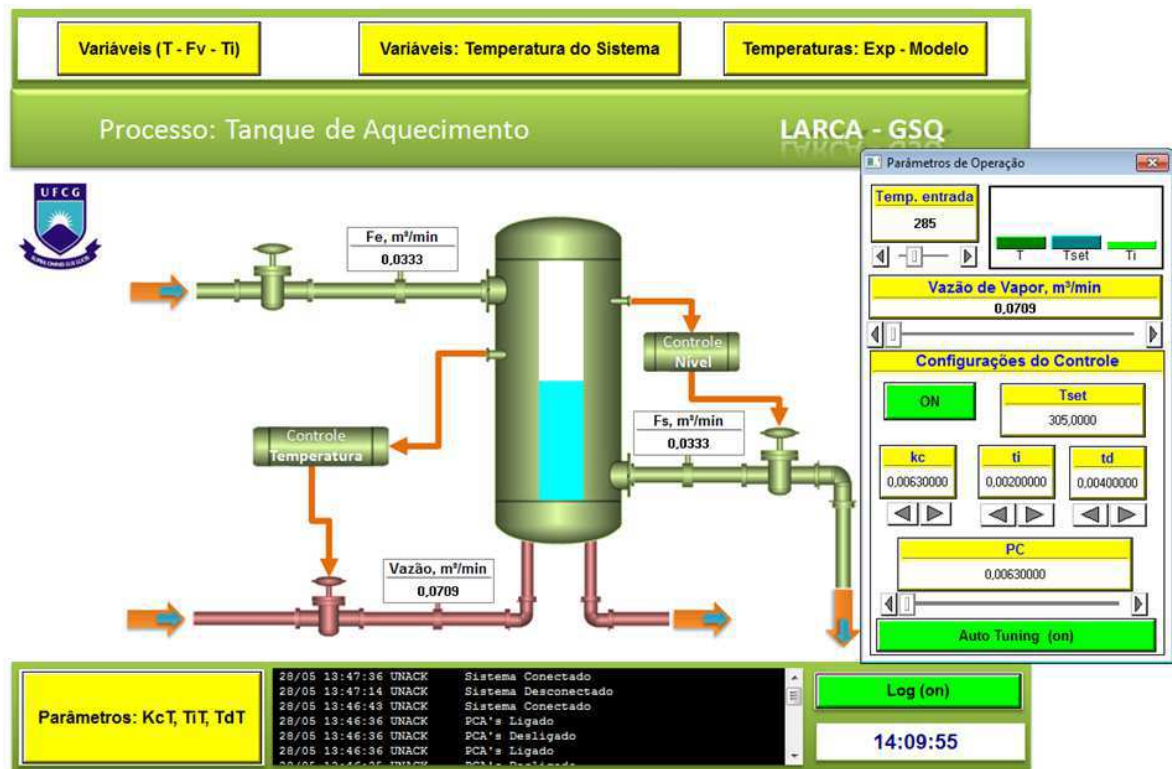
Com isso, tanto os limites de confiança quanto a distribuição da saída do processo podem ser estabelecidos.

CAPITULO V

5. ESTUDO DE CASO

Para realização do trabalho, um tanque de aquecimento, encamisado e conectado a uma estrutura de controle, tem sido considerado para análise, como apresentado na Figura 5.1. Os fluidos considerados no presente estudo de caso foram: água, a temperatura ambiente como fluido a ser aquecido e vapor água como fluido de aquecimento.

Figura 5.1 -Tela do supervisório para o tanque de aquecimento



A estrutura virtual do sistema foi desenvolvida utilizando a conexão da Plataforma Matlab com o desenvolvedor de supervisórios Elipse SCADA, por meio da tecnologia *Object Linking and Embedding for Process Control* (OPC). No Matlab foram implementadas as equações dinâmicas do processo de aquecimento que serão apresentadas nos itens seguintes.

5.1 Modelo dinâmico diferencial do processo

As equações diferenciais de balanço de massa e de energia, que serão apresentadas, foram obtidas das equações integrais (Bird e Byron, 2004; Kessler, 1999), considerando os parâmetros mostrados a Figura 5.2.

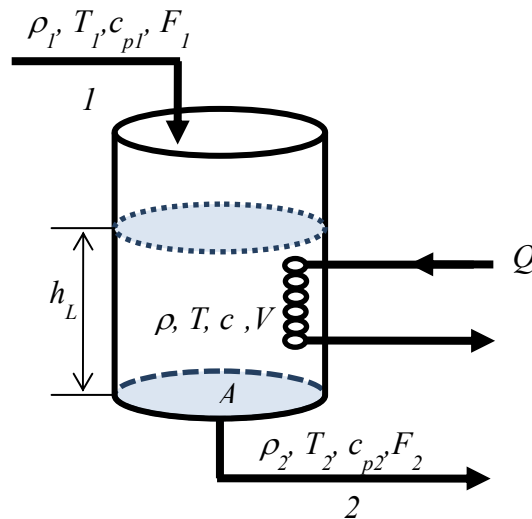
A equação do balanço integral de massa pode ser expressa por:

$$\iint_A \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = 0 \quad (5.1)$$

Aplicando a integral de superfície da Equação 5.1 nas duas áreas entrada (1) e saída (2), assim como no volume de líquido, obtêm-se a seguinte equação:

$$-\rho_1 v_1 A_1 + \rho_2 v_2 A_2 + \frac{\partial \rho V}{\partial t} = 0 \quad (5.2)$$

Figura 5.2 – Parâmetros do tanque de aquecimento



De acordo com o sistema considerado na Figura 5.2, ver Anexo III, a expressão para a dinâmica do nível de líquido pode ser expresso por:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\rho_1}{\rho A} F_1 - \frac{\rho_2}{\rho A} \frac{\pi D_2^2}{4} \sqrt{2g(h_L + \frac{P_m}{g\rho})} \quad (5.3)$$

A equação do balanço integral de energia, segundo Bird e Byron (2004) e Kessler (1999), pode ser expressa por:

$$\iint_A \hat{e} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \hat{e} \rho dV = \dot{Q} - \dot{W} \quad (5.4)$$

onde \hat{e} é a energia específica na entrada, saída ou no volume de líquido, \dot{W} diz respeito à soma de todos os trabalhos que atuam no sistema e \dot{Q} o taxa de calor trocado pelo sistema.

Dessa forma a equação que expressa à variação de temperatura no tanque de aquecimento (Anexo IV) considerando a taxa de calor do vapor d'água e desprezando os demais trabalhos envolvidos, pode ser representada pela equação seguinte equação:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{[F_1(T_1 - T)]}{V} + \frac{\dot{Q}}{\rho V \hat{c}_p} \quad (5.5)$$

As Equações 5.3 e 5.5 foram usadas para simular o sistema de aquecimento utilizado nesse trabalho.

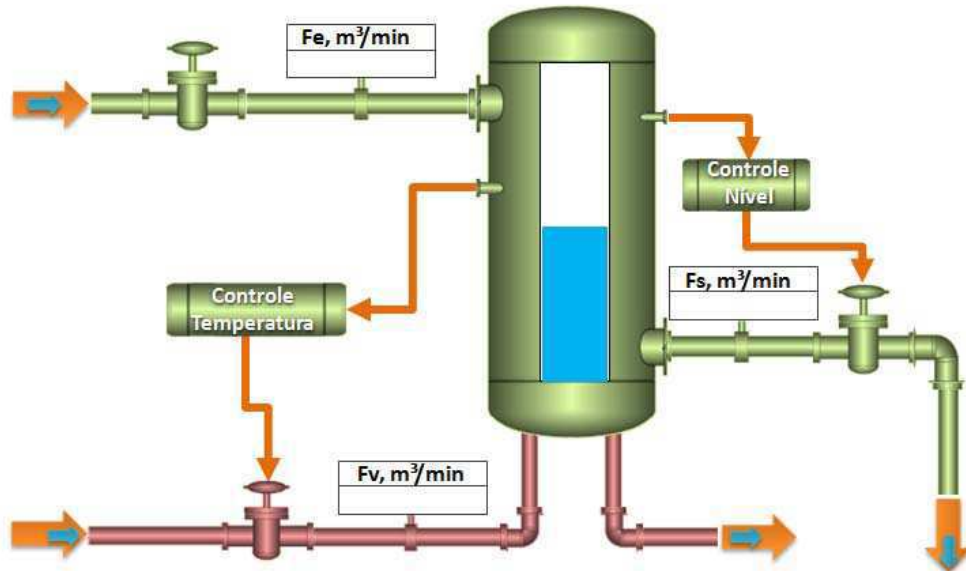
5.2 Estrutura de Controle

Foram consideradas duas malhas de controle no processo em questão, uma de nível e outra de temperatura. Em ambas as malhas foram utilizadas a estratégia retroalimentação, como mostram as Figuras 5.3a e 5.3b. As variáveis nível (h) e temperatura (T) foram os objetivos de controle, utilizando como variáveis manipuladas a vazão de saída do tanque, (F_s), e a vazão de vapor, (F_v).

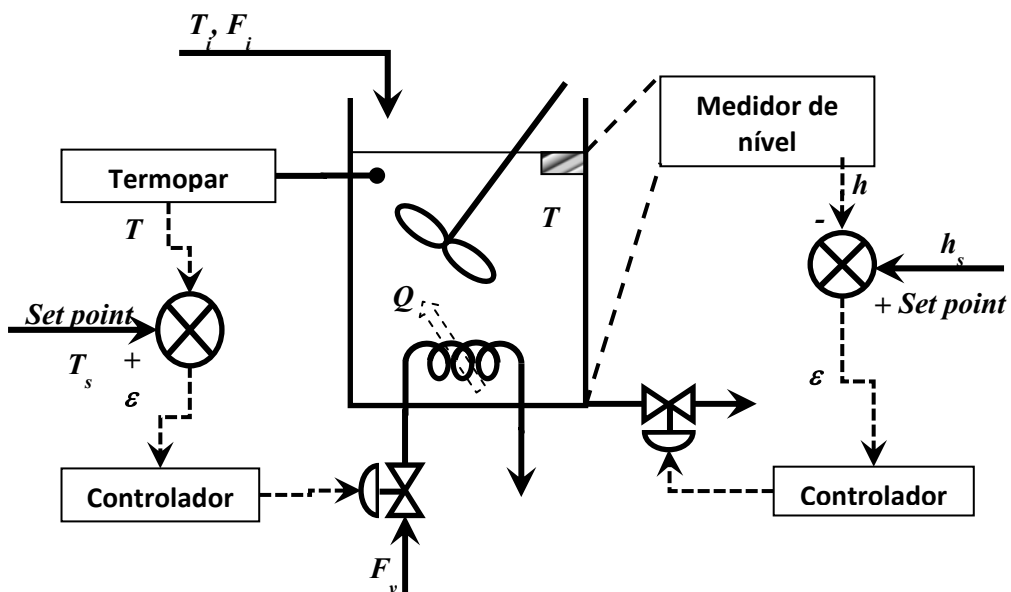
As equações diferenciais dadas pelas Equações 5.3 e 5.5 para o sistema de aquecimento, apesar de representar o modelo diferencial, este será considerado como o processo real para fins de simulação. Para isso foram adicionadas nas variáveis de entradas, nas vazões F_e e F_v , um valor médio de 5% de aleatoriedade, o mesmo atribuído as temperaturas T_e e T_v . Essas atribuições são flutuações randômicas nas variáveis de entrada e que permite

diferenciar efetivamente o processo do modelo, que neste caso será obtido por sistema de identificação recursiva, discutido adiante.

Figura 5.3 – Representação das malhas de controle de nível e temperatura (a) supervisorío e (b) diagrama



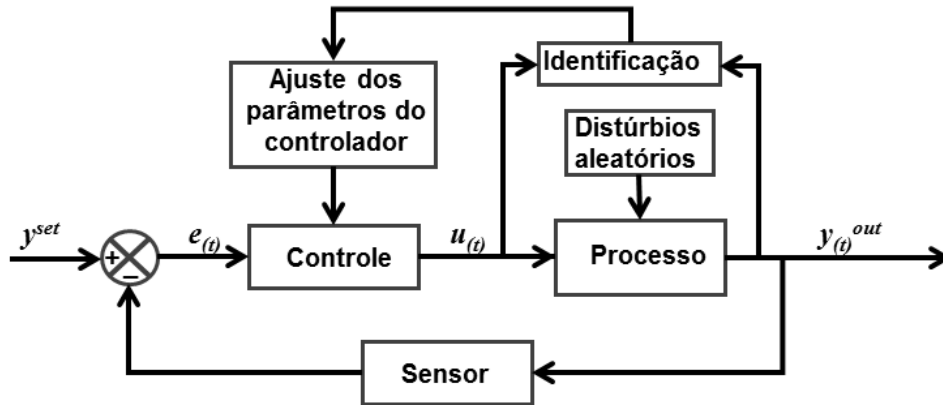
(a)



(b)

A Figura 5.4 ilustra os fluxos de informação, e também mostra o diagrama de blocos que representa o procedimento de identificação do processo e em que ponto os parâmetros de sintonia são estabelecidos.

Figura 5.4 – Diagrama de estrutura generalizada em malha fechada com bloco de identificação e ajuste dos parâmetros de sintonia



A utilização da estrutura mostrada na Figura 5.4 permitiu capturar informações em tempo real das variáveis do processo e parâmetros a serem determinados. Tais informações têm sido necessárias para configurar a auto sintonia baseada no trabalho de Aström (1995).

5.2.1 Modelo recursivo do processo

O processo pode ser representado por modelo estatístico, chamado convolução das funções de variáveis aleatórias (Soong, 1986; Ljung e Söderström, 1983). Esse tipo de modelo em tempo discreto, a ser utilizado nos procedimentos seguintes, corresponde a uma combinação do modelo convolução e do modelo autoregressivo com entradas exógenas, que podem ser expressos por:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \dots + a_n y(t-n) = b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + \dots + b_m u(t-m) + v(t) \quad (5.6)$$

onde a_i e b_i são os coeficientes obtidos por regressão, e $v(t)$ indica os efeitos combinados de ruído medições, distúrbios não medidos $v^*(t)$, que são considerados no instante de medição, e erros de modelagem $\varepsilon(t)$. Assim, pode-se representar a combinação desses efeitos explicitando o termo de erros de modelagem por: $v(t) = v^*(t) + \varepsilon(t-1)$. Uma vez que a ordem do modelo dado pela Equação 5.6 é estabelecida por n e m , o sistema pode atingir melhor ajuste em relação à diferença entre o modelo e processo, se valores altos são assumidos para tais parâmetros. No entanto, modelos de ordem elevada podem

apresentar algumas dificuldades, a saber: a distinção entre os polos que correspondem a modos estruturais e polos espúrios, os esforços computacionais e requisitos de memória. Portanto, os modelos de menor ordem com melhor aproximação ao processo são sempre desejados, desde que uma boa aproximação com o processo seja atendida. Procedimentos de como estimar a ordem do modelo podem ser encontrados em Moore et al. (2007).

Tomando o operador *shift-back* (q^{-1}), onde $(q^{-1})y_{(t)} = y_{(t-1)}$, cuja função é criar uma memória de uma variável replicando em um histórico de dados, e aplicando-o na Equação 5.6, resulta na seguinte equação:

$$A(q^{-1})y_{(t)} = B(q^{-1})u_{(t-1)} + (q^{-1})v_{(t)}^* + C(q^{-1})\varepsilon_{(t-1)} \quad (5.7)$$

onde os termos A, B e C são agrupamento de parâmetros definidos por:

$$A = 1 + a_1(q^{-1}) + a_2(q^{-2}) + \dots + a_n(q^{-n}),$$

$$B = b_1(q^{-1}) + b_2(q^{-2}) + \dots + b_m(q^{-m}) \mathbf{e}$$

$$C = c_1(q^{-1}) + c_2(q^{-2}) + \dots + c_m(q^{-m})$$

Assim os parâmetros e os dados das variáveis do sistema podem ser armazenados na forma de matriz, como segue:

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ c_1 & c_2 & \dots & c_m \end{bmatrix} \mathbf{e} \varphi = \begin{bmatrix} -y_{(t-1)} & -y_{(t-2)} & \dots & -y_{(t-n)} \\ u_{(t-1)} & u_{(t-1)} & \dots & u_{(t-m)} \\ \varepsilon_{(t-1)} & \varepsilon_{(t-2)} & \dots & \varepsilon_{(t-k)} \end{bmatrix}$$

Expressando o modelo numa estrutura vetorial, obtêm-se o regressor linear definido por:

$$y_{(t)} = \theta^T \varphi_{(t)} + v_{(t)}^* \quad (5.8)$$

Uma vez que o clássico método dos mínimos quadrados recursivo (RLSM) (Ljung e Söderström, 1983; Holst, 1977) pode ser utilizado, os parâmetros do modelo são obtidos por:

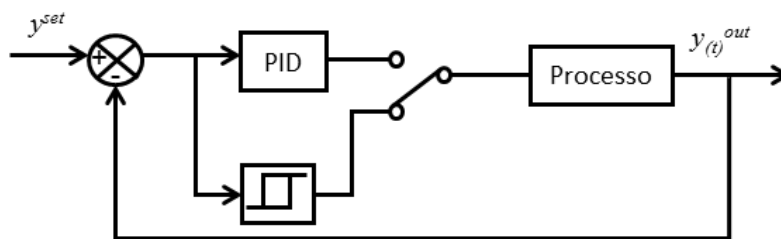
$$\hat{\theta}_{(N)} = \left[\sum_{t=1}^N \varphi_{(t)} \varphi_{(t)}^T \right]^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi_{(t)} y_{(t)} \quad (5.9)$$

Visto que a diferença entre o processo e o modelo foi minimizada, então os parâmetros obtidos resultam nas melhores predições para a variável de saída no senso da mínima variância.

5.2.2 Procedimento de Sintonia

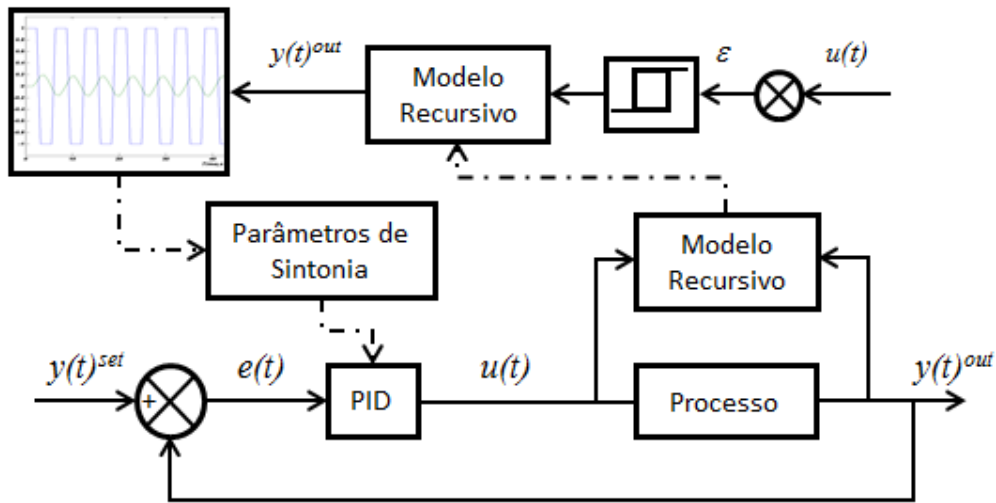
A estratégia de auto sintonia clássica (Aström, 1995; Rasmussen, 1993) é realizada com o relê ligado ao processo como mostra a Figura 5.5, onde o mesmo substitui um controlador PID, o qual estimula o processo funcionando como controlador *on-off*. Essa estrutura pode dar origem a algumas desvantagens visto que o processo não permanece controlado durante o tempo de ajuste. Para superar esta dificuldade uma leve modificação foi feita na estratégia, como mostrada na Figura 5.6, onde um relê estimula o modelo identificado trabalhando paralelo ao processo.

Figura 5.5 – Estrutura de auto sintonia clássica



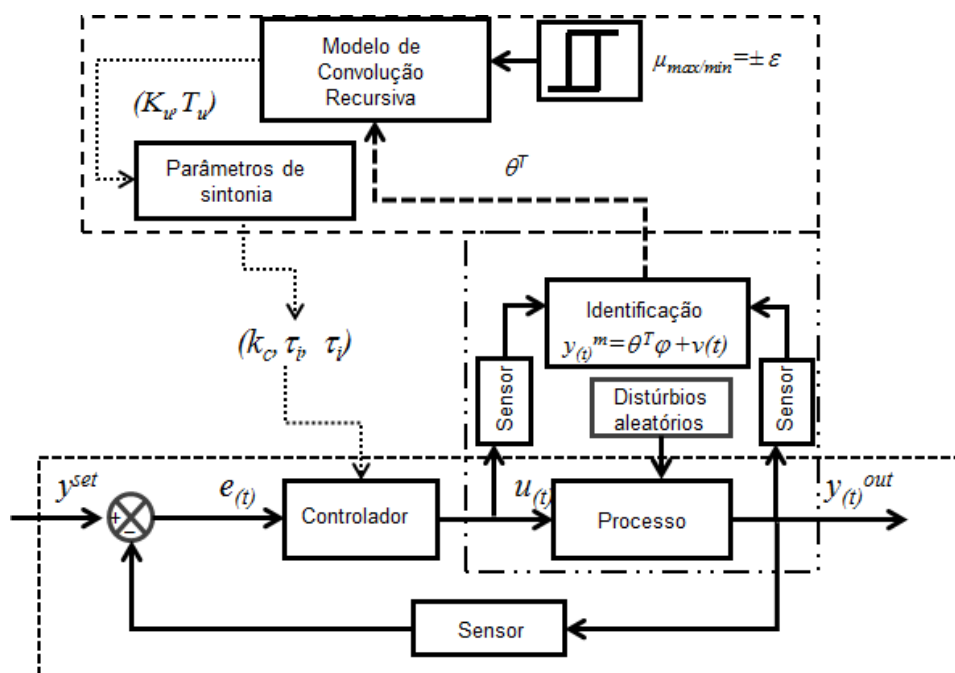
O modelo de convolução apresentado na Seção 5.2.1 foi identificado e tem sido usado como componente essencial de auto sintonia com o relê, sendo fácil verificar que a estratégia proposta de auto sintonia pode ser executada com o processo em operação bem como o sistema de controle.

Figura 5.6 – Estrutura de auto sintonia modificada



A Figura 5.7 mostra a estrutura detalhada adotada nesse trabalho para a geração automática dos parâmetros de sintonia para o controlador PID. O bloco de identificação inicialmente recebe o histórico de n das variáveis de entrada $u(t)$ e saída $y(t)$ do processo, gerando assim os parâmetros do modelo de convolução recursiva localizados na matriz θ que será utilizado no bloco excitado pelo relê. A amplitude de excitação do relê está na mesma faixa de estímulo do processo no qual o modelo recursivo está baseado.

Figura 5.7 – Diagrama de blocos da estrutura de controle generalizada



A implementação do procedimento de auto sintonia é efetuada por meio de geração de um estímulo introduzido pelo relê (\bar{u}) estimado pelo valor médio flutuante da entrada do processo, que oscila entre $\pm\varepsilon$, escolhido adequadamente, para produzir uma oscilação controlada na variável de saída do modelo, $y_{(t)}^m$, com uma amplitude constante. A partir da saída gerada o ganho máximo (Ku) e período final (Tu) podem ser determinados em cada ciclo de amostragem e os parâmetros do controlador são estimados usando o procedimento de sintonia clássica. Usando-se as regras convencionais apresentadas por Aström (1995), os parâmetros de ajuste para o controlador PID podem então ser estabelecidos.

CAPITULO VI

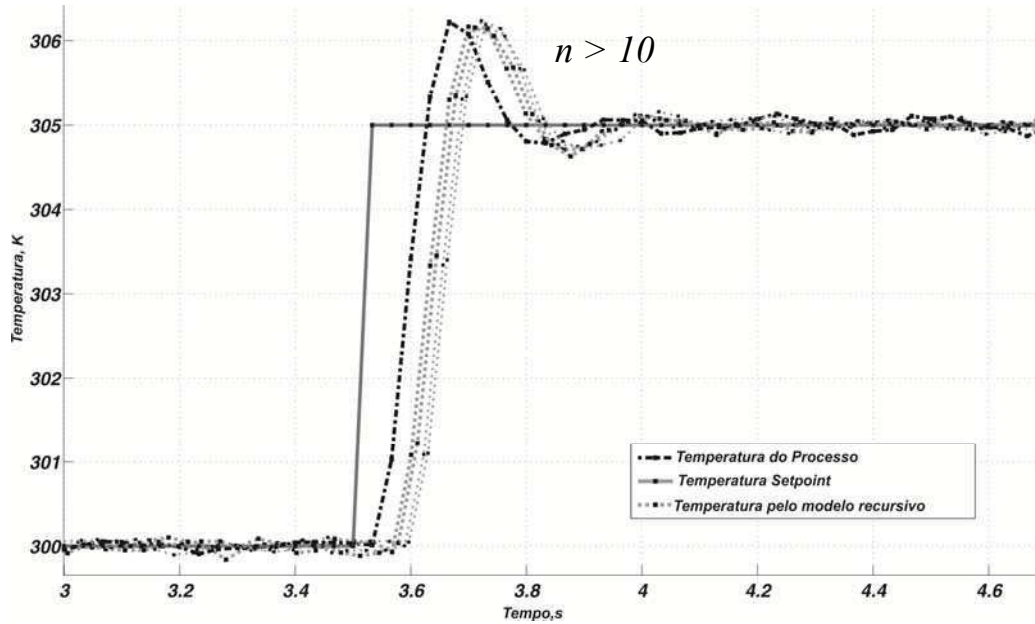
6. RESULTADOS E DISCUSSÃO

6.1. Identificação do processo

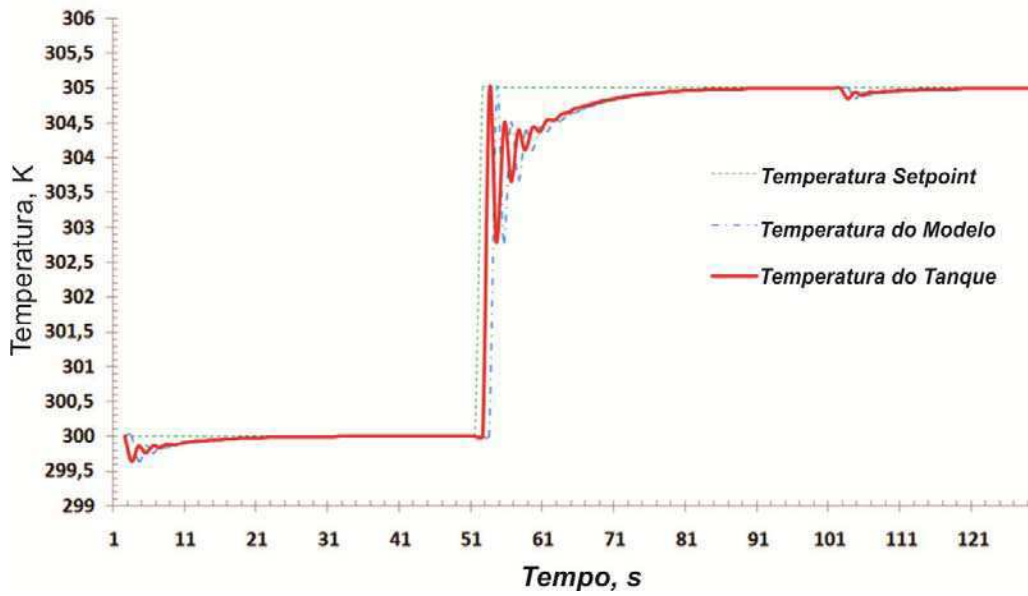
Não obstante o método de identificação ser eficiente, o modelo utilizado expresso pela Equação 5.6 depende dos valores de n e m , escolhidos os adequados para a função, tendo em conta àqueles que melhor descrevem o processo. Após a realização de algumas simulações, tais valores têm sido encontrados com mínimo esforço computacional, como ilustrado na Figura 6.1a. Pode ser verificado que para valores elevados, a forma funcional que representa o modelo se torna suficientemente próxima do processo. Por conveniência, tem-se assumido o valor de n e m iguais a 100, e que mostra ser um valor bastante adequado para o propósito de trabalho. Para a análise em curso, e desde que o objetivo do estudo não é desenvolver um método de autosintonia, deve ser salientado que uma super especificação da ordem do modelo pode ser razoável e de interesse, uma vez que a diferença entre o modelo e o processo pode assim ser minimizada, e dessa forma, a interferência adicional do modelo em tal procedimento pode ser reduzida.

Uma vez que os parâmetros do modelo foram calculados de acordo com a Equação 5.9, então o sistema pode ser operado, a fim de verificar o comportamento dinâmico da variável de saída, comparando-se com a do processo submetido a uma perturbação de 5% no valor de *set point*, como mostra a Figura 6.1b.

Figura 6.1 –Comportamento: (a) do modelo para n e m superior a 10; (b) das temperaturas do processo e do modelo a uma variação no *setpoint* de 5 K



(a)

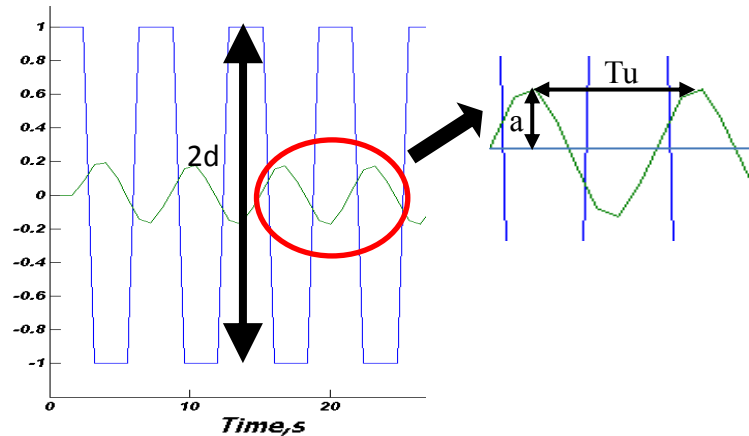


(b)

6.2. Auto sintonia

Com o objetivo de ajustar os parâmetros do controlador PID de modo on-line, a configuração apresentada na Seção 5.2.2 para o sistema de controle foi estabelecida, consistindo de um relê, o modelo de convolução e o algoritmo para o ajuste dos parâmetros de sintonia. O estímulo gerado pelo relê está baseado em uma amplitude adequada, sob a forma de uma onda quadrada de $\pm\varepsilon$, resultando em uma onda de saída periódica com uma amplitude constante. A relação entre as ondas de entrada e de saída presentes na Figura 6.2 permitiu que o período final e o ganho final pudessem ser determinados, de acordo com a Equação 6.1.

Figura 6.2 – Estímulo gerado pelo relê e resposta da variável de saída



$$Ku = \frac{4d}{\pi a} \quad (6.1)$$

Uma vez que o sistema está operante, o controlador PID tem sido automaticamente ajustado, com as regras de sintonia segundo Aström (1995) e com base no método Ziegler-Nichols dos ganhos de resposta da frequência, de acordo com a tabela seguinte:

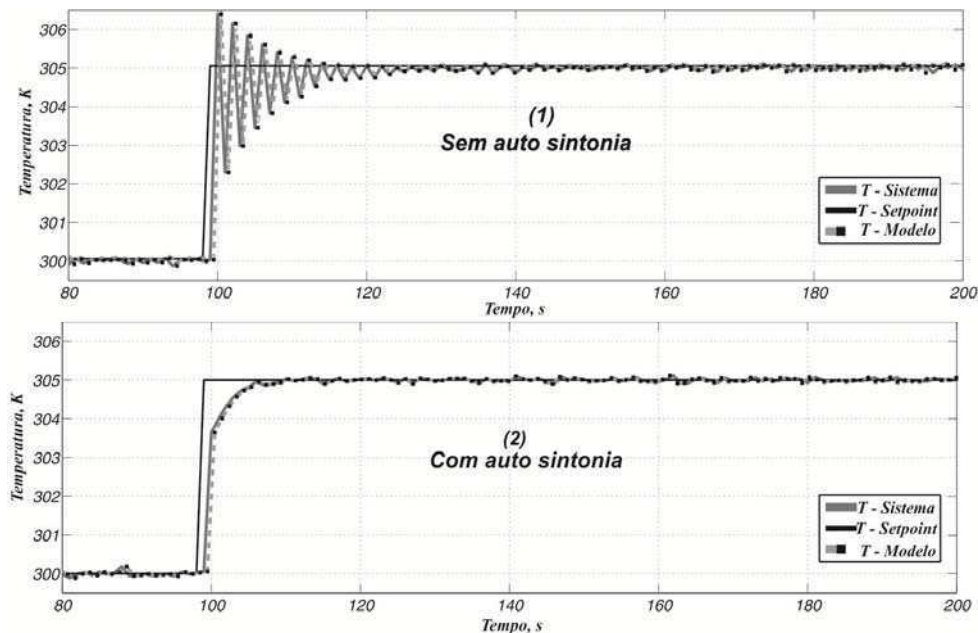
Tabela 2 – Ganhos do controlador PID

Controlador	Kc	Ti	Td
PID	0.6Ku	0.5Tu	0.125Tu

onde K_u é dada pela Equação 6.1 e T_u é o período de oscilação do ciclo, como mostrado na Figura 6.2.

Dessa forma, um conjunto de parâmetros em cada período de amostragem tem sido obtido, o que resultou na resposta em malha fechada com a auto sintonia, como mostrado na Figura 6.3b. Na Figura 6.3a é mostrado a resposta do sistema sem a auto sintonia. Ambas as sintonias indicam uma boa concordância entre o processo e o modelo para ambos os dispositivos, apesar da presença de grandes distúrbios. Nota-se também que o sistema de controle operado com a auto sintonia produziu um desempenho superior.

Figura 6.3 – O comportamento da temperatura de saída para o modelo e processo (a) sem autosintonia -1, (b) com o auto sintonia– 2



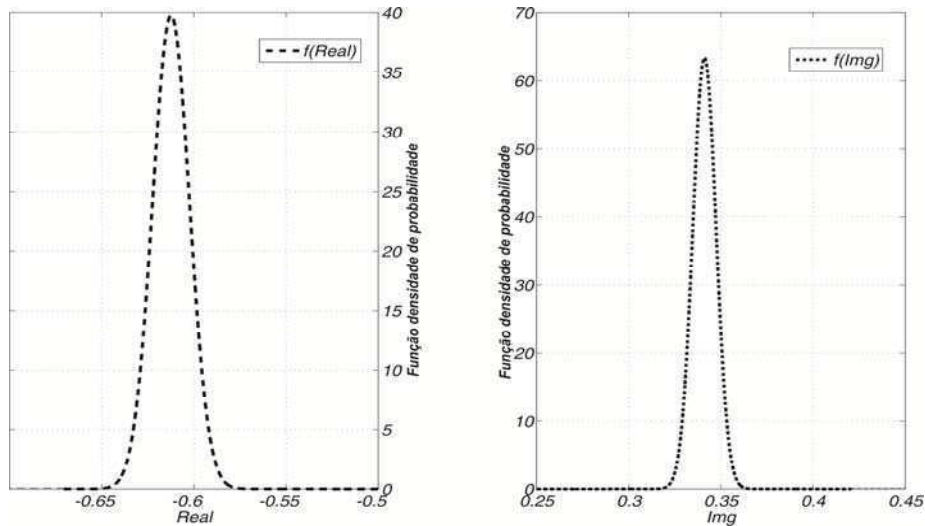
6.3. Análise da região robusta de estabilidade

Com o mecanismo de autosintonia implementado, os valores dos parâmetros do sistema tem sido registrados, tratados e introduzidos devidamente visando estabelecer a região de robustez da estabilidade.

Considerando o uso do controlador PID clássico no processo em estudo, os parâmetros τ e ξ das Equações 4.21 e 4.22 foram obtidos. Utilizando os valores para k_c , τ_i e τ_d nas equações mencionadas, o conjunto de valores para as partes real e imaginária do plano complexo s (Equações 4.24 e/ou 4.25)

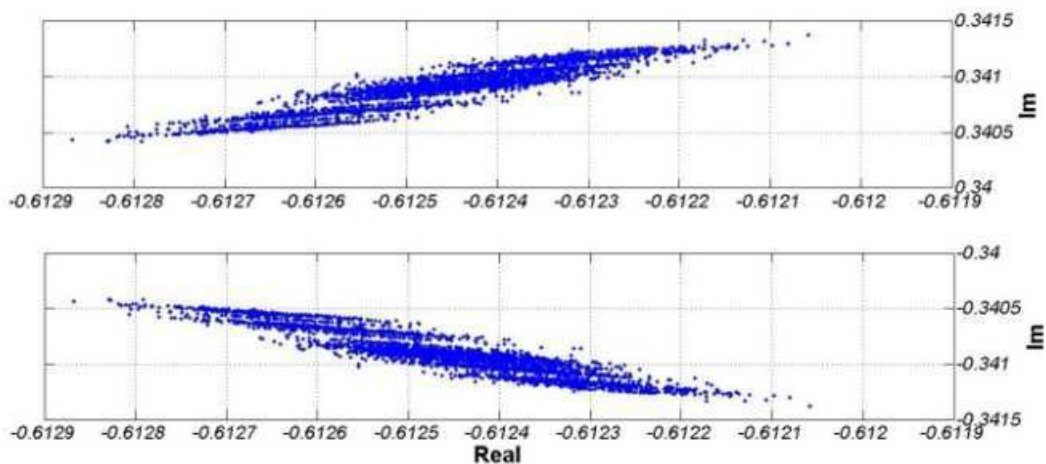
pode ser expresso pelas seguintes distribuições de probabilidade, as quais podem ser consideradas como sendo, no mínimo, aproximadamente normal, de acordo com a Figura 6.4.

Figura 6.4 – A distribuição de probabilidade para as partes real e imaginária s



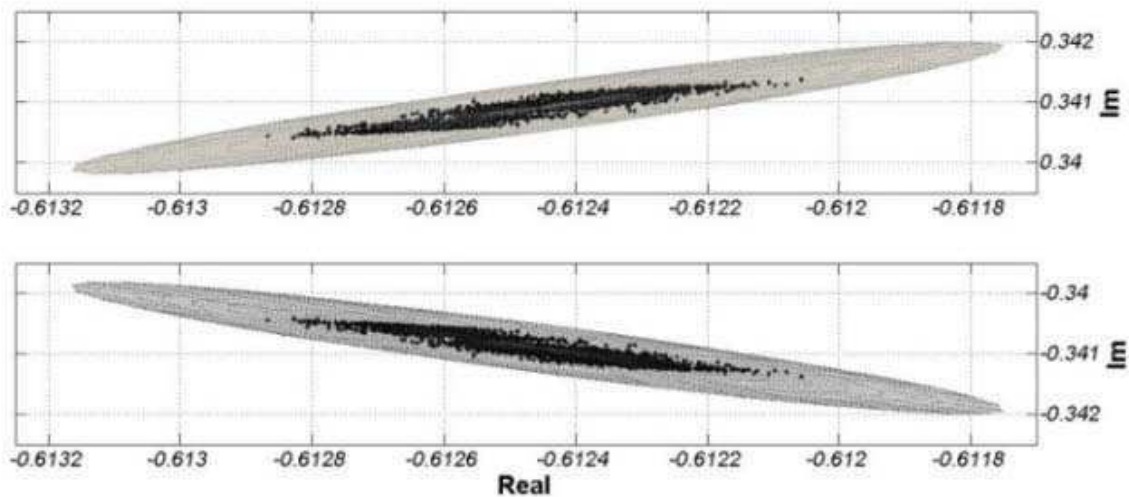
Por conseguinte, representando todos os pares de pontos, constituídos pelas partes real e imaginária sobre o plano complexo para ambas as raízes, resulta no diagrama mostrado na Figura 6.5. Na mesma figura, tendo em conta os eixos das elipses centradas em seus valores médios, verifica-se que as variabilidades em cada eixo não são iguais. Dessa forma, a distância estatística $d(\mu_{X^*}, P)$ ou $d(\mu_{X^*}, P)^2$ pode ser usada e representa o contorno da elipse, a qual pode ser calculada, usando-se a Equação 4.14, para um nível de significância α a ser estabelecido.

Figura 6.5 – Representação das raízes no plano complexo



A Figura 6.6 mostra os contornos das elipses que correspondem às regiões de robustez de confiança de estabilidade para o sistema considerado, assumindo um nível de significância α igual a 5%, quando o sistema é submetido a perturbações de 5% nas variáveis de entrada e no *set point*. Deve-se considerar também que tal processo mostra-se, por natureza, dinâmico, e assim, os contornos das elipses podem mudar quando novos valores da variável aleatória no sistema são capturados e incorporados na estrutura. Isto é, o contorno pode ser continuamente avaliado e atualizado *online*.

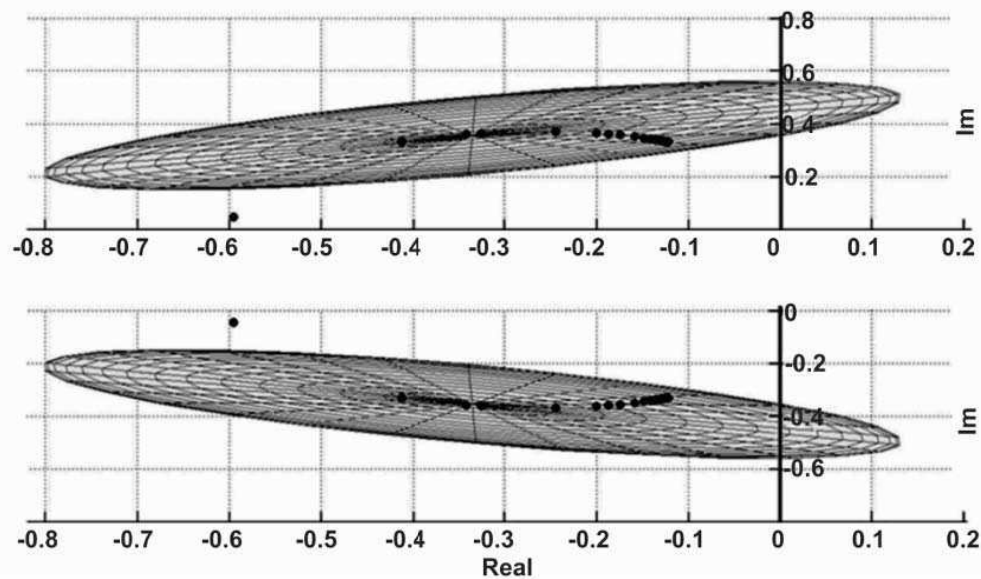
Figura 6.6 – A região de estabilidade robusta para as raízes baseado em $\alpha = 5\%$, enquanto o sistema é submetido a perturbações presentes nas variáveis de entrada e no *set point*



Sempre que por algum motivo, o sistema de controle tornar-se inoperante, então, a elipse que caracteriza a estabilidade pode ser deslocada para a região instável, indicando assim uma condição de operação potencialmente insustentável, como mostrado na Figura 6.7. Portanto, ações imediatas devem ser tomadas com o objetivo de restabelecer as condições de estabilidade do sistema.

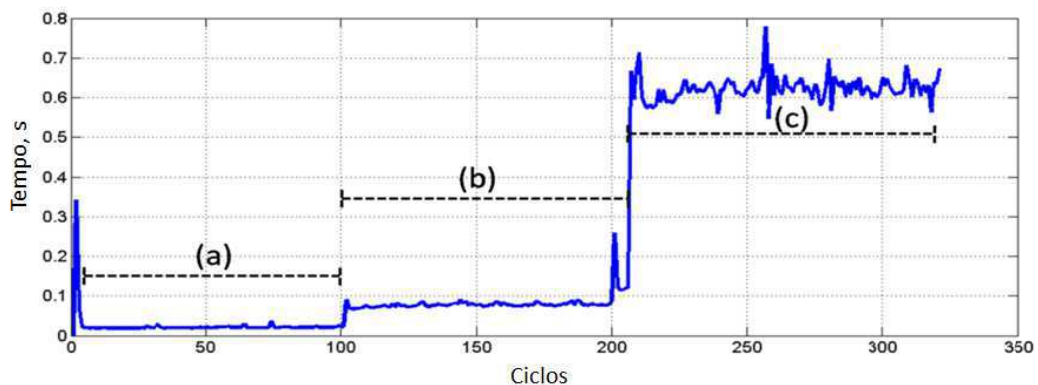
Deve-se ressaltar que todos os dados obtidos durante as simulações foram capturados quando o sistema de controle está operando com auto sintonia.

Figura 6.7 – Perda da robustez da estabilidade para as raízes no plano complexo s com base em $\alpha = 5\%$, quando o sistema de controle é inoperante



Em relação ao tempo de processamento verifica-se que o tempo de CPU gasto no processamento de todas as instruções do programa para o sistema de identificação, além de auto sintonia e do programa para o estabelecimento das regiões da robustez é muito curto, de acordo com a figura a seguir:

Figura 6.8 – Tempo de processamento para realização dos procedimentos da metodologia



onde (a) está exclusivamente relacionado com o tempo gasto para a identificação do sistema (0,01 s), (b) corresponde ao tempo necessário para a identificação com a auto sintonia (0,08 s) e (c) está relacionada com a tempo gasto para identificar o sistema, com o procedimento de auto sintonia, incluindo a criação de regiões robustas (0,61 s). Deve salientar-se que os tempos foram

obtidos utilizando um processador de 2,2 GHz. Se um processador de alto desempenho é utilizado, os tempos de processamento podem ser substancialmente reduzidos.

Assim, a partir da Figura 6.8, podemos concluir que, na escala de tempo de processo de engenharia estes resultados podem ser considerados de curto espaço de tempo e, conseqüentemente, exigindo reduzido esforço computacional.

6.4. Análise da região robusta de desempenho

Uma vez obtido a região de robustez da estabilidade a partir da dispersão das raízes no plano complexo, como mostra a Figura 6.9, a borda da região resultante tem sido utilizada para gerar os valores dos parâmetros de sintonia referente a esse contorno, em um procedimento inverso, como mostra a Figura 6.10.

Figura 6.9 – (a) Dispersão das raízes no plano complexo; (b) e (c) as regiões de confiabilidade conjunta referente a região de robustez de estabilidade

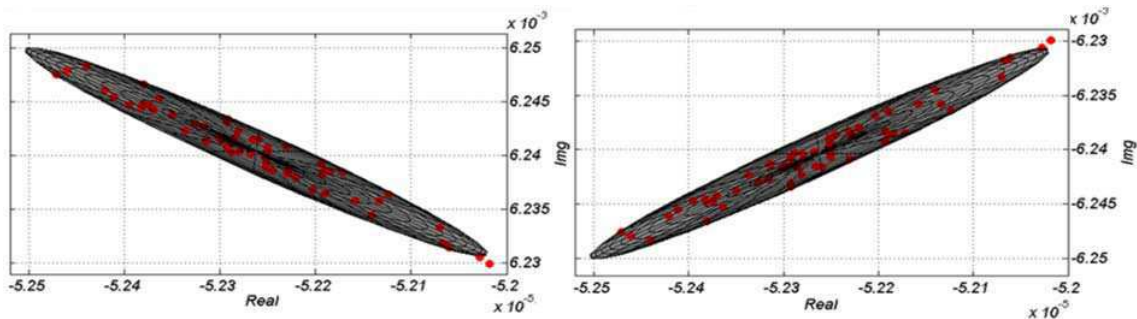
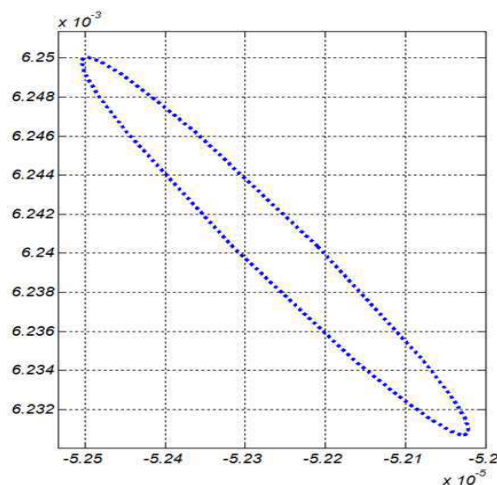
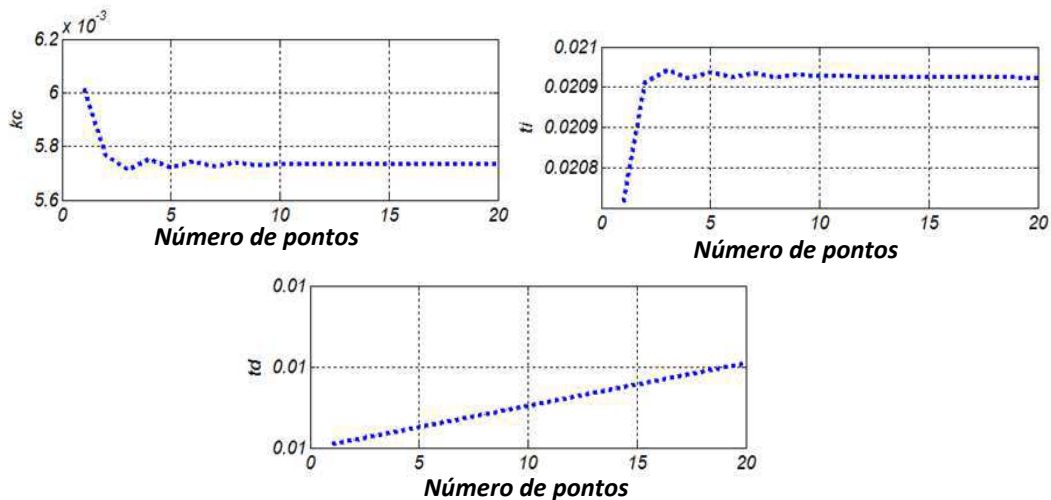


Figura 6.10 – Contorno da região de robustez da estabilidade



Como citado no item 4.5, uma vez que o sistema de Equações 4.22 a 4.25 apresenta variáveis acopladas, o procedimento utilizado para resolver tal sistema de equações foi o método Levenberg-Marquardt (Nocedal e Wright, 1999), obtendo assim as estimativas para os parâmetros de sintonia k_c , τ_i e τ_d a partir das raízes da borda da região robusta de estabilidade, como mostra a Figura 6.11.

Figura 6.11 – Valores dos parâmetros de sintonia correspondente a borda da região de robustez de estabilidade



Considerando a saída do processo no domínio tempo de acordo com a Equação III.15(Anexo III), como também os parâmetros de sintonia determinados a partir da borda da região de robustez da estabilidade, tais respostas puderam ser obtidas, como mostra a Figura 6.12. Analisando-as em $t/\tau_p=1$ os limites correspondentes a referente região de robustez, têm sido estabelecido podendo ser observado em qualquer outro ponto t/τ_p desejado. Dessa forma as curvas limites das respostas apresentadas revelam a robustez de desempenho associada à região de estabilidade robusta.

Além dos limites de estabilidade robusta, a distribuição de probabilidade correspondente à saída do controlador pode ser obtida, caracterizando assim a variabilidade da saída do sistema em função das incertezas do processo, resultando nos limites de confiança quanto à distribuição da saída do processo. Estabelecendo um critério de referência, como por exemplo, um dado valor médio para a resposta do processo, a distribuição de probabilidade pode

serrelacionada com o valor atual da mesma, como mostra a Figura 6.13, permitindo avaliar o desvio do desempenho com o desejado.

Figura 6.12 – Respostas referente ao contorno da região de robustez da estabilidade

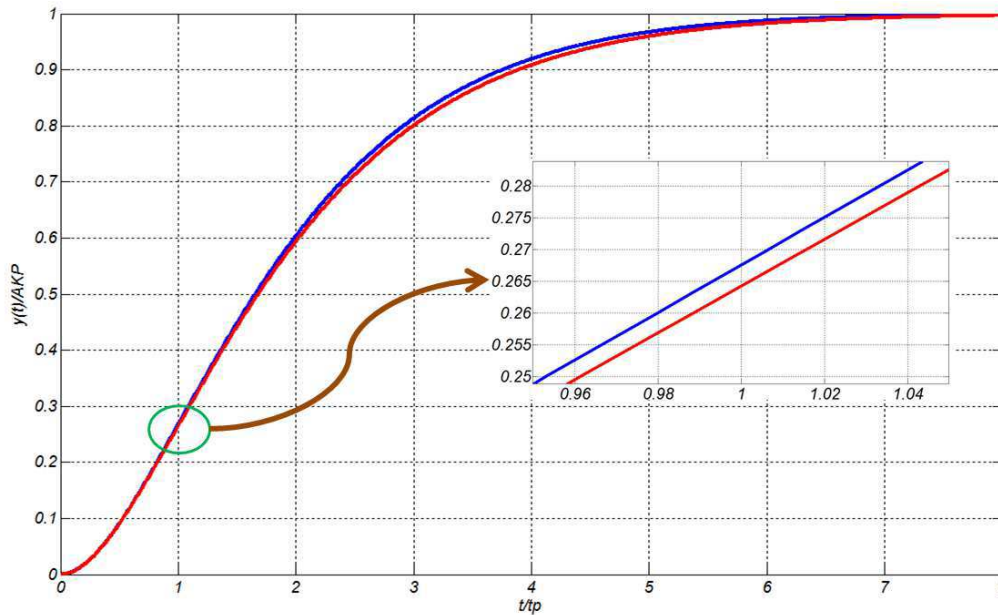
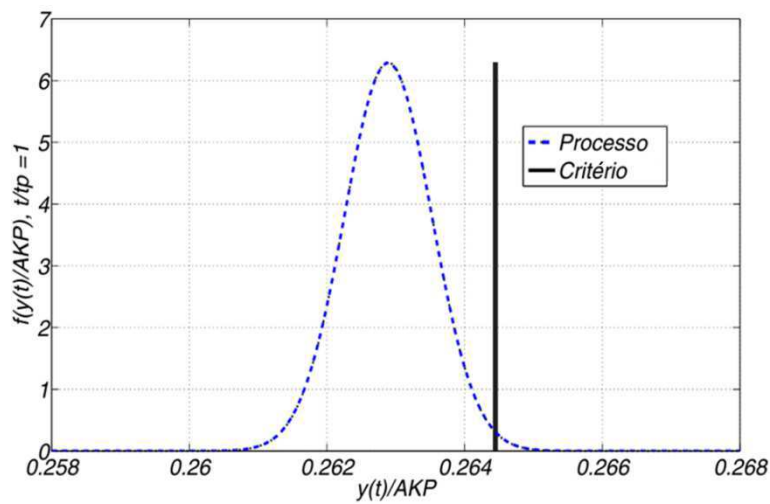


Figura 6.13 – Distribuição de probabilidade da saída do processo e o critério de desempenho em $t/\tau_p=1$



Uma vez que esse estudo diz respeito à determinação das regiões correspondentes a robustez da estabilidade e do desempenho, estabelecer índices e critérios de desempenho baseado nessa metodologia são focos para estudos futuros.

CAPITULO VII

7. CONCLUSÕES

Devido à necessidade de capturar os dados obtidos nas simulações, uma estrutura foi desenvolvida consistindo de um bloco para estimar os parâmetros recursivamente com uma sintonia automática, conectada ao processo, na qual os parâmetros do modelo do processo são atualizados em tempo real. Isto permite a geração em tempo real de informação a ser usada na determinação da região de robustez da estabilidade e do desempenho.

Com o objetivo de proporcionar um cenário mais realista para efeitos de simulação, um modelo de convolução foi utilizado e identificado, enquanto o *processoreal* correspondente a um tanque de aquecimento foi estabelecido com base nos *first principles*.

Embora não seja o objetivo principal, uma estratégia para a auto sintonia também foi proposta em uma forma permitindo que o sistema de controle atuasse continuamente sobre processo. Os resultados da simulação mostrados na Figura 6.3 indicam que o desempenho foi satisfatório para os objetivos do presente trabalho.

Como a teoria de estabilidade robusta pode ser vista como um método que visa estabelecer limites sobre as variáveis de interesse em vez de expressá-las em uma forma de distribuição de probabilidade, então, com base nos princípios estatísticos que incorporam o conceito de distância estatística juntamente com o uso da distribuição chi-quadrado, foi desenvolvida uma metodologia com o objetivo de estabelecer a região de confiança robusta para a estabilidade, o que corresponde a mapear o contorno da elipse resultante associado com as raízes da equação característica. Tal procedimento leva em conta o nível de significância α , por sua vez adequadamente escolhido.

Tendo em conta o sistema em estudo que considera a configuração por retroalimentação na qual um controlador PID com auto sintonia foi usado, os resultados mostrados nas Figuras 6.6 e 6.7 ilustram a aplicação do procedimento a um nível de significância de $\alpha = 5\%$, um valor típico aceitável

na prática, apresentando a região para a estabilidade robusta, bem como mostrando quão dinâmica pode ser tal análise.

Examinando o conjunto de resultados, a conclusão a ser extraída é que o procedimento pode incorporar novos dados com atualização e implementação em tempo real, não somente permitindo que as condições de estabilidade sejam analisadas em tempo real, como também as decisões de como restaurar a estabilidade do sistema sejam rapidamente tomadas e implementadas, o que é um diferencial diante as demais técnicas de medição de robustez. Um procedimento como este pode desempenhar um papel fundamental naqueles processos em que as variáveis podem mudar no tempo e no espaço em um curto período de tempo, tais como sistemas de controle de aeronaves.

Utilizando as informações geradas para os parâmetros de sintonia referentes à borda da região robusta de estabilidade, a região de desempenho pode ser estabelecida. Além das regiões de robustez, a distribuição de probabilidade pode ser também determinada, possibilitando assim, para estudos futuros, a criação de índices de desempenho baseado nessa metodologia.

Finalmente, a metodologia mostra-se fácil de entender, de trabalhar e cuja implementação requer um baixo custo computacional.

7.1. Sugestões para trabalhos futuros

Baseado na presente metodologia, os seguintes estudos são sugeridos:

1. Criação de índices de desempenho baseados na robustez da estabilidade como critérios de desempenho;
2. Metodologia de otimização da robustez a partir dos índices de desempenho;
3. Generalização do método para sistemas de ordem superior;
4. Implementação da metodologia em demais sistemas de controle para processos industriais.

8. REFERÊNCIAS

Aström, K. J., Process Control. Lecture 3. Department of Automatic Control LTH, Lund University, Disponível em: <http://www.control.lth.se/media/Education/DoctorateProgram/2012/HistoryOfControl/L03ProcessControleight.pdf>, acessado em 10 de setembro de 2012.

Åström, K.J. Tuning and Adaptation, IFAC 13 th Triennial World Congress, San Francisco, USA, pp. 1-18, 1996.

Aström, K. J. and Hagglund T. PID controllers: Theory, design and tuning, 2nd edition, Inst. Society of America, 1995.

Åström, K.J., Hägglund, T. Automatic Tuning of Simple Regulators with Specifications on Phase and Amplitude Margins, Automatica, Vol. 20(5), pp. 645-651, 1984.

Aguirre, L. A., G.G. Rodrigues e C.F. Jácome, Identificação de Sistemas Não-Lineares Utilizando Modelos NARMAX Polinomiais - Uma Revisão e Novos Resultados, SBA Controle & Automação, 9, No. 2, 1998

Aguirre, L. A. e Mendes, E. M. A. M.. Global nonlinear polynomial models: Structure, term clusters and fixed points. International Journal of Bifurcation and Chaos, 6(2):279-294, 1996.

Barmish, B. R.: New Tools for Robustness in Linear Systems, McMillan, New York, 1994.

Bird, R. Byron; Stewart, Warren E.; Lightfoot, Edwin N (Autor). Fenômenos de Transporte. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, c2004

Boyd, S.P., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V.: Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

Bissell, Christopher A history of automatic control. In: Nof, Shimon Y. ed. Springer handbook of automation. Springer handbook series (LXXVI). Heidelberg, Germany: Springer Verlag, pp. 53-69, 2009.

Billings, S. A., Chen, S. e Korenberg, M. J. Identification of MIMO non-linear systems using a forward-regression orthogonal estimator. *International Journal of Control*, 49(6):2157-2189, 1989.

Bode, H. W., *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. New York: Van Nostrand, 1945.

Çinar, A.. Nonlinear time series models for multivariable dynamic processes. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 30:147-158, 1995.

Calafiore, G. C., Dabbene, F., Tempo, R.. Research on probabilistic methods for control system design *Automatica*, Volume 47, Issue 7, July 2011, Pages 1279-1293.

Casella, G e Berger, R.L. *Statistical Inference*. 2ªed. Duxbury Press 2002.

Chen, S. e Billings, S. A. (1989). Representation of non-linear systems: the NARMAX model. *International Journal of Control*, 49(3):1013-1032.

Cogni, M. A. Estudo e avaliação de metodologias de auto-sintonia de controladores pid visando uma implementação em controlador industrial *Dissertação*, Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.

Davis, M. H. A., Vinter, R. B. (1985). *Stochastic modeling and control*. Chapman and Hall, London, U.K.

Doyle, J.C., *Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties*. IEE Proc., vol 129,pt. D, no. 6, pp. 242-250, Nov. 1982.

Doyle, J. C., Stein, G., *Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/ Modern Synthesis*, in: *IEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 26, p. 4-16, 1981.

Friman, M. e Waller, K. V. (1997). A Two-Channel Relay for Autotuning, *Ind. Eng. Chem. Res.* 1997, vol. 36, pp. 2662-2671.

Ghaoui, El L., and Niculescu, S. (eds.): *Recent Advances in LMI Theory for Control*, SIAM, Philadelphia, PA, 1998.

Haile J.M., O'Connell J.P.: Thermodynamics. Fundamentals for Applications Cambridge University Press (United Kingdom), 2011.

Himmelblau, D.M., Process analysis by statistical methods. John Wiley & Sons, New York, USA, 1970.

Holst, J., Adaptive Prediction and Recursive Estimation, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Sweden, 1977.

Huang, Y. and Zhou, K., Robust Stability and Performance of Uncertain Delay Systems with Structured Uncertainties. Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control Sydney, Australia December, 2000.

Iwasaki, T., and Skelton, R. E.: 'All Controllers for the General H1 Control Problem: LMI Existence Conditions and State Space Formulas', Automatica 30, no. 8 (August), 1307-1317, 1994.

Johnson, R. A. and Wichern, D. W., Applied multivariate statistical analysis. Prentice-Hall, NJ, USA, 6 ed., 1992.

Kessler, D. P., Greenkorn, R. A., "Momentum, Heat, and Mass Transfer Fundamentals" Marcel Dekker, Inc., New York, N.Y., 1999.

Korenberg, M.J., Billings, S.A, Liu Y.P. and McIlroy, P.J., 1988, "Orthogonal parameters estimation algorithm for non-linear stochastic systems". Int. J. Control, Vol. 48 (1), pp. 193-210.

Lathi, B. P., Signal Processing and Linear Systems, Oxford University Press, 1998.

Ljung, L. and Söderström, T. L. (1983) Theory and Practice of Recursive Identification, Cambridge: MIT Press.

Ljung, L. (1978). Convergence analysis of parametric identification methods, IEEE Trans. Automatic Control AC-23: 770–783

Ljung, L. (1987). System Identification: Theory for the User, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ

Luyben, W.L. Process Modeling, Simulation and Control for Chemical Engineers. 2nd ed 1990, McGraw-Hill International Editions.

Luyben, W.L. and Luyben M.L., *Essentials of Process Control*, McgrawHill, NY, 1997.

Lescher , F. and Roos, C., Robust stability of time-delay systems with structured uncertainties:a μ -analysis based algorithm. 2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC) Orlando, FL, USA, December 12-15, 2011.

Morrettin, Pedro A. & Bussab, Wilton O. Estatística Básica. 5 ed. São Paulo: Saraiva, 2006.

Montgomery, D.C., Runger, G.C., "Applied Statistics and Probability for Engineers", John Wiley and Sons, 2003.

Moore, S.M., Lai J.C.S. and Shankar K. 'ARMAX modal parameter identification in the presence of unmeasured excitation – I: Theoretical background', Mechanical Systems and Signal Processing 21, pp. 1616–1641, 2007.

Morari, M., Zafiriou, E., Robust Process Control, Prentice Hall,Englewood Cliffs, NJ, 1989.

Maciejowski, J. M.: Multivariable Feedback Design, Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.

Mesbahi, M., Safonov, M. G., and Papavassilopoulos, G. P.: 'Bilinearity and Complementarity in Robust Control', Recent Advances in LMI Theory for Control, in L. El Ghaoui and S. Niculescu (eds.). SIAM, Philadelphia, PA, 1998.

Mayr, O., The Origins of Feedback Control (MIT), Cambridge, 1970.

Ming, D. M. e Xin, J. Z. (2005). Performance Assessment and Controller Design Based on Modified Relay Feedback. Ind. Eng. Chem. Res., vol. 44, pp. 3538-3546.

Nocedal, J. and Wright, S.J., "Numerical Optimization," Springer, New York, 1999.

Packard, A., Zhou, K., Pandey, P., and Becker, G.: `A Collection of Robust Control Problems Leading to LMI's': Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, Vol. 2, December 11-13, pp. 1245-1250, IEEE Press, New York, 1991.

Perić, N., Branica, I. and Petrović, I. Modification and application of autotuning pid controller. Proceedings of the 8th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2000) Rio Patras, GREECE 17-19 July 2000.

Ray, L. R. and Stengel, R. F. A Monte Carlo Approach to the Analysis of Control System Robustness. Automatica, vol 29.No. 1, pp. 229-236, 1993.

Rasmussen, H., "Automatic Tuning of PID regulators", Aalborg University, 1993.

Rollins, L., Robust Control Theory, Carnegie Mellow University, 18-849b Dependable Embedded Systems, Spring, Institutional communication, 1999.

Safonov, M. G., and Fan, M. K. H.: `Editorial, Special Issue on Multivariable Stability Margin', Int J. Robust and Nonlinear Control 7, no. 2, 1997.

Sjöberg, J., Zhang, Q., Ljung, L., Benveniste, A., Deylon, B., Glorennec, P.Y., Hjalmarsson, H. e Juditsky, A. (1996). Nonlinear black-box modeling in system identification: a unified overview. Automatica, 31(12):1691-1724.

Sjöberg J.; Zhang Q., Ljung L., Benveniste A., Deylon B., Glorennec P. Y., Hjalmarsson H., & Juditsky A. (1995). Nonlinear Black-Box Models In System Identification: A Unified Overview, Automatica, Vol. 31, No. 12, pp. 1691-1724.

Sjöberg, J., Zhang, Q., Ljung, L., Benveniste, A., Deylon, B., Glorennec, P.-Y., Hjalmarsson, H. and Juditsky, A. (1995). Nonlinear black-box modeling in system identification: a unified overview, Automatica 31(12): 1691–1724.

Safonov, M. G.: `Robust Control', Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering, in J. G. Webster (ed.). Wiley, NY, 1998.

Safonov, M. G. Robust control, stability margin. In P. M. Pardalos and C. A. Floudas, editors, Encyclopedia of Optimization, volume 5, pages 44-49. Kluwer, Boston, MA, June 2001.

Safonov, M. G. , The Origins of Robust Control in the 1970's. Athans 70, Clearwater Beach, FL, november 16-18, 2007.

Soong, T. T. Modelos Probabilísticos em Engenharia e Ciências. Trad. Alfredo Alves de Farias – Rio de Janeiro. Ed. LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1986.

Safonov, M. G., and Papavassilopoulos, G.: 'The Diameter of an Intersection of Ellipsoids and BMI Robust Synthesis': Proc. IFAC Symposium on Robust Control Design, September 14-16, pp. 313-317, IFAC, Laxenberg, Austria, 1994.

Stengel, R. F. and Ray, L. R. Stochastic Robustness of Time-invariant Systems. IEEE Trans. on Aut. Control, 36, 82-87, 1991.

Stephanopoulos, G., Chemical Process Control. An Introduction to Theory and Practice, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1984.

Silva, J., N., Bispo, H. J., Brito, R. P. e Manzi, J. T., Análise estatística aplicada á estabilidade robusta. XIX Congresso Brasileiro de Automática, CBA 2012, Campina Grande/PB. ISBN: 978-85-8001-069-5, 2012.

Silva, J. N. Bispo, H., Brito, R., Manzi, João . Joint Confidence Region for Tuning Parameters of the PID Controller. In: IFAC Conference on Advances in PID Control, 2012, Brescia. IFAC - PID'12 - Book of Abstract. Brescia: University of Brescia, 2012. v. 01.

Skogestad, S., and Postlethwaite, I.: Multivariable Feedback Control, Wiley, New York, 1996.

Skogestad, S. and Morari , M., Robust Performance of Decentralized Control Systems by Independent Designs", Proc. American Control Conference (ACC), 1785-1790, Minneapolis, June 1987.

Smith, J.M.; Van Ness, H.C.; Abbott, Introduction to Chemical Engineering Thermodynamics. McGraw - Hill Book Company, 7th ed., Singapura, 2005.

Tan K. K.; Lee T. H. e Jiang X. (2000). Robust On-line Relay Automatic Tuning of PID Control Systems, *ISA Transactions*, vol. 39, pp. 219-232, Elsevier Science Ltd..

Tempo, R., Bai, E.-W., and Dabbene, F.. Probabilistic robustness analysis: Explicit bounds for the minimum number of samples. *Systems & Control Letters*, 30:237–242, 1997.

Tham, M. T., Why Frequency Response? Notes class, Dept. of Chemical and Process Engineering, University of Newcastle upon Tyne, April, 1999.

VanDoren, V., “Auto-tuning control using Ziegler- Nichols”, *Control Engineering* Vol. 53, No. 10, pp. 66-71, Oct. 2006.

Young, G.A. e Smith, R.L. (2005). *Essentials of Statistical Inference*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics.

Zhang, F. *Matrix Theory: Basic Results and Techniques*, Springer-Verlag, 2nd edition, 2011.

Zhou, K.; Doyle, J. C.; Glover, K., *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall, 1996.

Ziegler and Nichols: Optimum settings for automatic controllers. *Trans ASME* 64, 759-768, 1942.

Anexo I

A demonstração da equação que expressa a região de confiança conjunta para parâmetros esperados β 's de um modelo teórico linear, Equação I.1, pode ser realizada considerando os valores experimentais y_{ij} , o valor médio \bar{y}_i para o valor x_i e o valor esperado η_i como apresentado por Himmelblau (1970).

$$\eta = \beta_0(x - \bar{x}) + \beta_1(x - \bar{x}) + \beta_2(x - \bar{x}) \quad (I.1)$$

A diferença entre as medidas experimentais e o valor esperado pode ser expressado pela seguinte equação:

$$(y_{ij} - \eta_i) = (y_{ij} - \bar{y}_i) + (\bar{y}_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \eta_i) \quad (I.2)$$

Aplicando as seguintes operações na Equação I.2: elevando ao quadrado as diferenças de ambos os membros, seguido pela soma sobre i e j , com a expansão do lado esquerdo da equação, substituindo as equações para o estimado, Equação I.3, e o valor esperado, Equação I.1, como mostra o procedimento I.4, a Equação I.5 pode ser obtida.

$$\hat{y} = b_0(x - \bar{x}) + b_1(x - \bar{x}) + b_2(x - \bar{x}) \quad (I.3)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\rho_i} (y_{ij} - \eta_i)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\rho_i} \{ (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + 2(y_{ij} - \bar{y}_i)(\bar{y}_i - \hat{y}_i) + 2(y_{ij} - \bar{y}_i)(\hat{y}_i - \eta_i) + [(\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2 + 2(\bar{y}_i - \hat{y}_i)(\hat{y}_i - \eta_i) + (\hat{y}_i - \eta_i)^2] \} \quad (I.4)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\rho_i} (y_{ij} - \eta_i)^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\rho_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\rho_i} 2(y_{ij} - \bar{y}_i)(\bar{y}_i - \hat{y}_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\rho_i} 2(y_{ij} - \bar{y}_i)(\hat{y}_i - \eta_i) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\rho_i} (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\rho_i} 2(\bar{y}_i - \hat{y}_i)(\hat{y}_i - \eta_i) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\rho_i} \{ [b_0(x - \bar{x}) + b_1(x - \bar{x}) + b_2(x - \bar{x})] - [\beta_0(x - \bar{x}) + \beta_1(x - \bar{x}) + \beta_2(x - \bar{x})] \}^2 \end{aligned} \quad (I.5)$$

Devido à imposição da minimização quadrática, os produtos cruzados da Equação I.5 são levados a zero, assim:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} 2(y_{ij} - \bar{y}_i)(\bar{y}_i - \hat{y}_i) &= 0 \\
\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} 2(y_{ij} - \bar{y}_i)(\hat{y}_i - \eta_i) &= 0 \\
\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} 2(\bar{y}_i - \hat{y}_i)(\hat{y}_i - \eta_i) &= 0
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Substituindo as considerações em 1.6 e expandindo o termo dos parâmetros b 's e β 's, a Equação 1.5 resulta em:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} (y_{ij} - \eta_i)^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2 \rho_i + \\
&+ (b_0 - \beta_0)^2 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 \rho_i + (b_1 - \beta_1)^2 \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 \rho_i + (b_2 - \beta_2)^2 \sum_{i=1}^n (x_{3i} - \bar{x}_3)^2 \rho_i
\end{aligned} \tag{1.7}$$

O termo $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$ por definição diz respeito à soma do quadrado dos desvios entre o valor médio e o conjunto de valores de y experimentais observados, enquanto o termo $\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2 \rho_i$ corresponde à soma dos quadrados residual, onde:

$$s_e^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \rho_i - n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \tag{1.8}$$

$$s_r^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2 \rho_i \tag{1.9}$$

As variâncias do erro e residual podem ser combinadas resultando no valor esperado $s_{\bar{y}_i}^2$ que é um bom estimador de $\sigma_{\bar{y}_i}^2$ com $\sum_{i=1}^n (p_i - 2)$ grau de liberdade, de acordo com:

$$s_{\bar{y}_i}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2 \rho_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i - n + n - 2} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n \rho_i - 2} = \frac{\sigma_{\bar{y}_i}^2}{\sum_{i=1}^n \rho_i - 2} \tag{1.10}$$

$$\text{onde } \sigma_{\bar{y}_i}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2 p_i = s_{\bar{y}_i}^2 \left(\sum_{i=1}^n \rho_i - 2 \right).$$

Uma vez que amostras experimentais de uma população sejam utilizadas, pode-se utilizar a relação da Equação I.10 e dividindo ambos os membros por $\sigma_{\bar{y}_i}^2$ a Equação I.11 é obtida.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \frac{(y_{ij} - \eta_i)^2}{\sigma_{\bar{y}_i}^2} = 1 + (b_0 - \beta_0)^2 \sum_{i=1}^n \frac{(x_{1i} - \bar{x}_1)^2 \rho_i}{\sigma_{\bar{y}_i}^2} + \\ + (b_1 - \beta_1)^2 \sum_{i=1}^n \frac{(x_{2i} - \bar{x}_2)^2 \rho_i}{\sigma_{\bar{y}_i}^2} + (b_2 - \beta_2)^2 \sum_{i=1}^n \frac{(x_{3i} - \bar{x}_3)^2 \rho_i}{\sigma_{\bar{y}_i}^2} \end{aligned} \quad (I.11)$$

Aplicando a definição de distribuição chi-quadrado, χ , para a estimativa da região de confiança dos parâmetros β 's do modelo linear, onde os termos do lado esquerdo são distribuídos segundo a distribuição chi-quadrado com grau de liberdade 0, 1, 1 e 1, respectivamente. Da definição do valor esperado da distribuição chi-quadrado, onde o valor esperado é igual ao grau de liberdade, onde: $E\{\chi^2(d.f. = n)\} = n$. Com isso, a Equação I.11 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 3\sigma_{\bar{y}_i}^2 = 0\sigma_{\bar{y}_i}^2 + (b_0 - \beta_0)^2 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 \rho_i + \\ + (b_1 - \beta_1)^2 \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 \rho_i + (b_2 - \beta_2)^2 \sum_{i=1}^n (x_{3i} - \bar{x}_3)^2 \rho_i \end{aligned} \quad (I.12)$$

Inserindo o conceito da razão de variância a partir da distribuição *F-distribution*, onde $F = \frac{\sigma_{\bar{y}_i}^2}{s_{\bar{y}_i}^2}$, pode-se definir que $\sigma_{\bar{y}_i}^2 = s_{\bar{y}_i}^2 F$. Substituindo a razão entre a variância amostral e a esperada na Equação I.12 resulta em:

$$\begin{aligned} 3s_{\bar{y}_i}^2 F_{1-\alpha} = (b_0 - \beta_0)^2 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 \rho_i + \\ + (b_1 - \beta_1)^2 \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 \rho_i + (b_2 - \beta_2)^2 \sum_{i=1}^n (x_{3i} - \bar{x}_3)^2 \rho_i \end{aligned} \quad (I.13)$$

Reordenando a Equação I.13, obtemos uma expressão, Equação I.14, que representa a região de confiança conjunta para os parâmetros β 's com nível de significância α .

$$\frac{(b_0 - \beta_0)^2}{3s_{\bar{y}_i}^2 F_{1-\alpha} / \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 \rho_i} + \frac{(b_1 - \beta_1)^2}{3s_{\bar{y}_i}^2 F_{1-\alpha} / \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 \rho_i} + \frac{(b_2 - \beta_2)^2}{3s_{\bar{y}_i}^2 F_{1-\alpha} / \sum_{i=1}^n (x_{3i} - \bar{x}_3)^2 \rho_i} = 1 \quad (I.14)$$

Anexo II

Considerando o sistema ortogonal (x,y) , a rotação de ângulo θ pode ser realizada com a finalidade de obter um novo sistema (x^*,y^*) . A representação de um ponto P pode ser obtido considerando a relação angular entre os dois sistemas de eixo como mostra a Figura II.1.

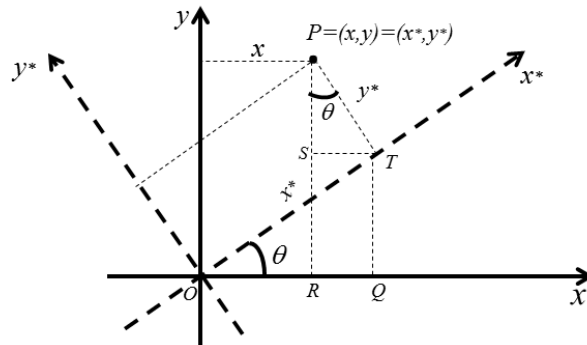


Figura II.1 – Diagrama representativo do ponto P nos dois sistemas de eixos

Os segmentos dos eixos podem ser expressos por: $OR = x$, $OT = x^*$, $PR = y$ e $PT = y^*$. Por sua vez os mesmos podem ser representados pela dependência angular.

Para x , podem ser considerados os segmentos mostrados na Figura II.2, onde:

$$\begin{aligned} x = OR &= OQ - RQ = OT \cos \theta - PT \operatorname{sen} \theta \\ &= x^* \cos \theta - y^* \operatorname{sen} \theta \end{aligned}$$

Portando, x pode ser escrito em relação a x^* , y^* e θ por:

$$x = x^* \cos \theta - y^* \operatorname{sen} \theta \quad (\text{II.1})$$

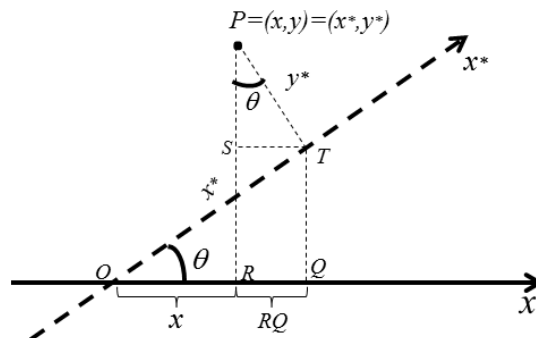


Figura II.1 – Diagrama representativo do ponto P nos dois sistemas de eixos

Para y , podem ser considerados os segmentos mostrados na Figura II.3, onde:

$$y = PR = RS + SP = OT \operatorname{sen} \theta + PT \operatorname{cos} \theta \\ = x^* \operatorname{sen} \theta + y^* \operatorname{cos} \theta$$

Portando, y pode ser escrito em relação a x^* , y^* e θ por:

$$y = x^* \operatorname{sen} \theta + y^* \operatorname{cos} \theta \quad (II.2)$$

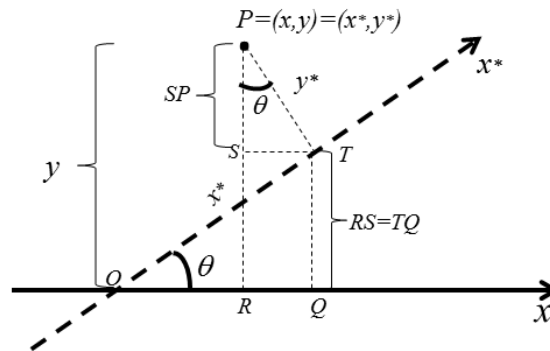


Figura II.3 – Diagrama representativo do ponto P nos dois sistemas de eixos

As duas equações obtidas para o ponto P defini um sistema de equações:

$$\begin{cases} x = x^* \operatorname{cos} \theta - y^* \operatorname{sen} \theta \\ y = x^* \operatorname{sen} \theta + y^* \operatorname{cos} \theta \end{cases} \quad (II.3)$$

Na forma matricial é definido por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{cos} \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \operatorname{cos} \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} \quad (II.4)$$

onde a matriz é a matriz rotacional.

Anexo III

Demonstração da resposta de y em malha fechada, em termos de variável desvio, no domínio tempo

Partindo do diagrama de blocos, onde são apresentadas as variáveis e parâmetros envolvidos no sistema de controle:

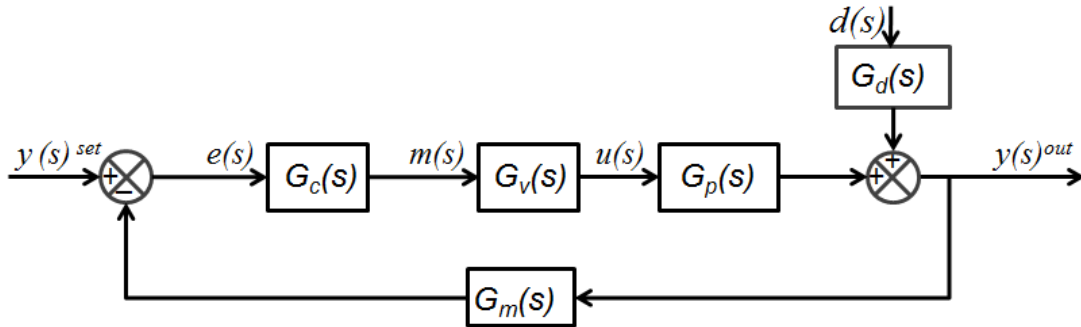


Figura III.1 - Diagrama de bloco para o sistema de controle em malha fechada

A resposta em malha fechada pode ser obtida como mostra o resultado na Equação III.1

$$\bar{y}(s) = \frac{G_p G_c G_v}{1 + G_p G_c G_v G_m} \bar{y}_{sp}(s) + \frac{G_d}{1 + G_p G_c G_v G_m} \bar{d}(s) \quad (\text{III.1})$$

A equação característica pode ser assumida por:

$$1 + G_p G_c G_v G_m = 0 \quad (\text{III.2})$$

Uma vez assumindo um processo de primeira ordem, e a função transferência para o clássico PID, como segue nas equações seguintes, respectivamente.

$$G_p = \frac{k_p}{\tau s + 1} \quad (\text{III.3})$$

$$G_c = k_c + \frac{k_c}{t_i s} + k_c \tau_d s \quad (\text{III.4})$$

Considerando as funções de transferência do sensor e atuador como sendo $G_v = k_v$ e $G_m = k_m$, ou seja, apenas proporcionais. A substituição dessas considerações na equação III.1, resulta na equação III.5, a partir da seguinte demonstração:

$$\bar{y}(s) = \frac{\left(\frac{k_p}{\tau s + 1}\right) \left(k_c + \frac{k_c}{t_i s} + k_c \tau_d s\right) k_v}{1 + \left(\frac{k_p}{\tau s + 1}\right) \left(k_c + \frac{k_c}{t_i s} + k_c \tau_d s\right) k_v k_m} \bar{y}_{sp}(s) + \frac{G_d}{1 + \left(\frac{k_p}{\tau s + 1}\right) \left(k_c + \frac{k_c}{t_i s} + k_c \tau_d s\right) k_v k_m} \bar{d}(s)$$

$$\bar{y}(s) = \frac{\left(\frac{k_p}{(\tau s + 1)} k_c + \frac{k_p}{(\tau s + 1)} \frac{k_c}{t_i s} + \frac{k_p}{(\tau s + 1)} k_c \tau_d s\right) k_v}{1 + \left(\frac{k_p}{(\tau s + 1)} k_c + \frac{k_p}{(\tau s + 1)} \frac{k_c}{t_i s} + \frac{k_p}{(\tau s + 1)} k_c \tau_d s\right) k_v k_m} \bar{y}_{sp}(s) + \frac{G_d}{1 + \left(\frac{k_p}{(\tau s + 1)} k_c + \frac{k_p}{(\tau s + 1)} \frac{k_c}{t_i s} + \frac{k_p}{(\tau s + 1)} k_c \tau_d s\right) k_v k_m} \bar{d}(s)$$

$$\bar{y}(s) = \frac{\frac{k_p k_c k_v t_i s + k_p k_c k_v + k_p k_c k_v \tau_d s t_i s}{(\tau s + 1) t_i s}}{\frac{(\tau s + 1) t_i s + k_p k_c k_v k_m t_i s + k_v k_m k_p k_c + k_v k_m k_p k_c \tau_d s t_i s}{(\tau s + 1) t_i s}} \bar{y}_{sp}(s) + \frac{\frac{G_d}{(\tau s + 1) t_i s + k_p k_c k_v k_m t_i s + k_v k_m k_p k_c + k_v k_m k_p k_c \tau_d s t_i s}}{(\tau s + 1) t_i s} \bar{d}(s)$$

$$\bar{y}(s) = \frac{\frac{k_p k_c k_v t_i s + k_p k_c k_v + k_p k_c k_v \tau_d s t_i s}{(\tau s + 1) t_i s + k_p k_c k_v k_m t_i s + k_v k_m k_p k_c + k_v k_m k_p k_c \tau_d s t_i s} \bar{y}_{sp}(s) + \frac{G_d ((\tau s + 1) t_i s)}{(\tau s + 1) t_i s + k_p k_c k_v k_m t_i s + k_v k_m k_p k_c + k_v k_m k_p k_c \tau_d s t_i s} \bar{d}(s)$$

$$\bar{y}(s) = \frac{\frac{k_p k_c k_v \tau_d t_i s^2 + k_p k_c k_v t_i s + k_p k_c k_v}{(k_v k_m k_p k_c \tau_d t_i + \tau_i) s^2 + (t_i + k_p k_c k_v k_m t_i) s + k_v k_m k_p k_c} \bar{y}_{sp}(s) + \frac{G_d ((\tau s + 1) t_i s)}{(k_v k_m k_p k_c \tau_d t_i + \tau_i) s^2 + (t_i + k_p k_c k_v k_m t_i) s + k_v k_m k_p k_c} \bar{d}(s)$$

$$\bar{y}(s) = \frac{\frac{k_p k_c k_v \tau_d t_i s^2}{k_p k_c k_v} + \frac{k_p k_c k_v t_i s}{k_p k_c k_v} + \frac{k_p k_c k_v}{k_p k_c k_v}}{\frac{(k_v k_m k_p k_c \tau_d t_i + \tau_i) s^2}{k_v k_p k_c} + \frac{(t_i + k_p k_c k_v k_m t_i) s}{k_v k_p k_c} + \frac{k_v k_m k_p k_c}{k_v k_p k_c}} \bar{y}_{sp}(s) + \frac{G_d((\tau s + 1)t_i s)}{\frac{(k_v k_m k_p k_c \tau_d t_i + \tau_i) s^2}{k_v k_p k_c} + \frac{(t_i + k_p k_c k_v k_m t_i) s}{k_v k_p k_c} + \frac{k_v k_m k_p k_c}{k_v k_p k_c}} \bar{d}(s)$$

Resultando em:

$$\bar{y}(s) = \frac{\tau_d t_i s^2 + t_i s + 1}{(k_m \tau_d t_i + \tau_i / k_v k_p k_c) s^2 + (t_i / k_v k_p k_c + k_m t_i) s + k_m} \bar{y}_{sp}(s) + \frac{G_d \left\{ \frac{(\tau s + 1)t_i s}{k_v k_p k_c} \right\}}{(k_m \tau_d t_i + \tau_i / k_v k_p k_c) s^2 + (t_i / k_v k_p k_c + k_m t_i) s + k_m} \bar{d}(s) \quad (III.5)$$

Como pode-se ver, a Equação III.5 pode ser reescrita como segue:

$$\bar{y}(s) = \frac{a_1 s^2 + a_2 s + a_3}{b_1 s^2 + b_2 s + b_3} \bar{y}_{sp}(s) + \frac{G_d \left\{ \frac{(\tau s + 1)t_i s}{k_v k_p k_c} \right\}}{b_1 s^2 + b_2 s + b_3} \bar{d}(s) \quad (III.6)$$

onde:

$$\begin{aligned} a_1 &= \tau_d t_i, & b_1 &= (k_m \tau_d t_i + \tau_i / k_v k_p k_c), \\ a_2 &= t_i, & b_2 &= (t_i / k_v k_p k_c + k_m t_i), \\ a_3 &= 1, & b_3 &= k_m. \end{aligned} \quad e$$

Aplicando o método das frações parciais e do mascaramento (Heaviside) (Lathi,1998), Equação III.7, a função $y(s)$, onde pode ser escrita como somatório de termos de primeira e de segunda ordem.

$$X(s) = K \frac{\prod_{h=1}^{h=m_z} (s + z_h) \prod_{i=1}^{i=m_c} (s + z_i)(s + z_i^*)}{\prod_{j=0}^{j=n_r} (s + p_j) \prod_{k=1}^{k=n_p} (s + p_k)(s + p_k^*)} = \sum_{j=1}^{j=n_r} \frac{A_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^{k=n_p} \frac{B_k + sC_k}{(s + \text{Re}\{p_k\})^2 + \text{Im}^2\{p_k\}} \quad (III.7)$$

A correspondência com o domínio tempo e o domínio de *Laplace* pode ser obtida por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[t^n e^{it} u(t)] &\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{n!}{(s-\lambda)^{n+1}} u(s)\right] \\
\mathcal{L}\left[e^{-at}\left[A \cos bt + \frac{B-Aa}{b} \operatorname{sen} bt\right] u(t)\right] &\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{As+B}{s^2+2as+c} u(s)\right] \\
\mathcal{L}\left[re^{-at} \cos(bt+\theta) u(t)\right] &\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{As+B}{s^2+2as+c} u(s)\right] \quad (\text{III.8}) \\
r &= \sqrt{\frac{A^2c+B^2-2ABa}{c-a^2}} \\
\theta &= \tan^{-1}\left(\frac{Aa-B}{A\sqrt{c-a^2}}\right) \\
b &= \sqrt{c-a^2}
\end{aligned}$$

Considerando $\bar{d}(s) = 0$, rearranjando para isolar os termos s^2 , uma vez que um degrau permita estimular a função III.8, onde $\bar{y}_{sp}(s) = \frac{k^{set}}{s}$, a equação

III.6 resulta em:

$$\bar{y}(s) = \left(\frac{a_1}{b_1}\right) \frac{\left(s^2 + \frac{a_2}{a_1}s + \frac{a_3}{a_1}\right) k^{set}}{\left(s^2 + \frac{b_2}{b_1}s + \frac{b_3}{b_1}\right) s} \quad (\text{III.9})$$

Aplicando o método das frações parciais:

$$\bar{y}(s) = \left(\frac{a_1}{b_1}\right) \frac{k^{set}}{s} \frac{\left(s^2 + \frac{a_2}{a_1}s + \frac{a_3}{a_1}\right)}{\left(s^2 + \frac{b_2}{b_1}s + \frac{b_3}{b_1}\right)} = \left(\frac{a_1}{b_1}\right) k^{set} \left[\frac{K_1}{s} + \frac{As+B}{s^2 + \frac{b_2}{b_1}s + \frac{b_3}{b_1}} \right]$$

Aplicando o método Heaviside:

- i) Para K_1 , onde $s=0$, multiplicando ambos os membros por s :

$$\frac{1}{s} \frac{\left(s^2 + \frac{a_2}{a_1}s + \frac{a_3}{a_1}\right)}{\left(s^2 + \frac{b_2}{b_1}s + \frac{b_3}{b_1}\right)} s = \left[\frac{K_1}{s} + \frac{As+B}{s^2 + \frac{b_2}{b_1}s + \frac{b_3}{b_1}} \right] s$$

resultado em:

$$K_1 = \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3} \quad (\text{III.10})$$

ii) Para A e B, multiplicando ambos os membros por $\left(s^2 + \frac{b_2}{b_1}s + \frac{b_3}{b_1}\right)$:

$$\frac{1}{s} \left(\frac{s^2 + \frac{a_2}{a_1}s + \frac{a_3}{a_1}}{s^2 + \frac{b_2}{b_1}s + \frac{b_3}{b_1}} \right) \left(s^2 + \frac{b_2}{b_1}s + \frac{b_3}{b_1} \right) = \left[\frac{K_1}{s} \left(s^2 + \frac{b_2}{b_1}s + \frac{b_3}{b_1} \right) + \frac{A s + B}{s^2 + \frac{b_2}{b_1}s + \frac{b_3}{b_1}} \left(s^2 + \frac{b_2}{b_1}s + \frac{b_3}{b_1} \right) \right]$$

$$\frac{\left(s^2 + \frac{a_2}{a_1}s + \frac{a_3}{a_1} \right)}{s} = \left[\frac{K_1}{s} \left(s^2 + \frac{b_2}{b_1}s + \frac{b_3}{b_1} \right) + A s + B \right]$$

$$s^2 + \frac{a_2}{a_1}s + \frac{a_3}{a_1} = K_1 \left(s^2 + \frac{b_2}{b_1}s + \frac{b_3}{b_1} \right) + A s^2 + B s$$

$$s^2 + \frac{a_2}{a_1}s + \frac{a_3}{a_1} = K_1 s^2 + K_1 \frac{b_2}{b_1}s + K_1 \frac{b_3}{b_1} + A s^2 + B s$$

$$s^2 + \frac{a_2}{a_1}s + \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3} s^2 + \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3} \frac{b_2}{b_1} s + \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3} \frac{b_3}{b_1} + A s^2 + B s$$

$$s^2 + \frac{a_2}{a_1}s + \frac{a_3}{a_1} = \left(\frac{a_3 b_1}{a_1 b_3} + A \right) s^2 + \left(\frac{a_3 b_2}{a_1 b_3} + B \right) s + \frac{a_3}{a_1}$$

resultando em:

$$A = 1 - \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3} \quad (\text{III.11})$$

$$B = \frac{a_2}{a_1} - \frac{a_3 b_2}{a_1 b_3} \quad (\text{III.12})$$

Reescrevendo em termos de constantes K_1 , K_2 , A , B , a e c , tem-se:

$$K_1 = \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3}, \quad K_2 = \left(\frac{a_1}{b_1} \right) k^{set}, \quad A = 1 - \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3}, \quad B = \frac{a_2}{a_1} - \frac{a_3 b_2}{a_1 b_3}, \quad a = \frac{1}{2} \frac{b_2}{b_1} \quad e \quad c = \frac{b_3}{b_1}$$

$$\bar{y}(s) = \left(\frac{a_1}{b_1} \right) k^{set} \frac{\left(s^2 + \frac{a_2}{a_1} s + \frac{a_3}{a_1} \right)}{\left(s^2 + \frac{b_2}{b_1} s + \frac{b_3}{b_1} \right)} = \frac{K_2 K_1}{s} + K_2 \frac{A s + B}{s^2 + 2as + c} \quad (\text{III.13})$$

O denominador do segundo termo da equação III.13 pode também ser escrita na forma dos polos da equação característica, $p = \alpha \pm i\beta$, como segue:

$$\begin{aligned} s^2 + 2as + c &= (s - p)(s - p^*) \\ (s - p)(s - p^*) &= (s - \alpha - i\beta)(s - \alpha + i\beta) = (s - \alpha)^2 + (s - \alpha)i\beta - (s - \alpha)i\beta - i^2 \beta^2 \\ s^2 + 2as + c &= s^2 - 2s\alpha + \alpha^2 + \beta^2 \\ a &= -\alpha; \\ c &= \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Aplicando as definições do sistema de equações III.8, a resposta ao processo pode ser escrita por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[\bar{y}(s)] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K_2 K_1}{s} + K_2 \frac{A s + B}{s^2 + 2as + c} \right] \\ \mathcal{L}^{-1}[\bar{y}(s)] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K_1 K_2}{s} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[K_2 \frac{A s + B}{s^2 + 2as + c} \right] \\ y(t) &= K_1 K_2 + K_2 e^{-at} \left[A \cos(bt) + \frac{B - Aa}{b} \text{sen}(bt) \right] \end{aligned}$$

Portanto, a resposta no domínio tempo para o sistema em questão é definido por:

$$y(t) = \frac{a_3}{b_3} k^{set} + \left(\frac{a_1}{b_1} \right) k^{set} e^{-at} \left[\left(1 - \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3} \right) \cos(bt) + \frac{\left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{a_3 b_2}{a_1 b_3} \right) - \left(1 - \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3} \right) a}{b} \text{sen}(bt) \right] \quad (\text{III.15})$$

ou também:

$$y(t) = \frac{a_3}{b_3} k^{set} + \left(\frac{a_1}{b_1} \right) k^{set} \left[r e^{-at} \cos(bt + \theta) \right] \quad (\text{III.16})$$

onde:

$$r = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3}\right)^2 \frac{b_3}{b_1} + \left(\frac{a_2 - \frac{a_3 b_2}{a_1 b_3}}{a_1} - 2 \left(1 - \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3}\right) \left(\frac{a_2 - \frac{a_3 b_2}{a_1 b_3}}{a_1}\right) \frac{1}{2} \frac{b_2}{b_1}\right)^2}{\frac{b_3}{b_1} - \frac{1}{2} \frac{b_2}{b_1}}}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\left\{1 - \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3}\right\} \frac{1}{2} \frac{b_2}{b_1} - \left(\frac{a_2 - \frac{a_3 b_2}{a_1 b_3}}{a_1}\right)}{\left(1 - \frac{a_3 b_1}{a_1 b_3}\right) \sqrt{c - a^2}} \right) e \quad b = \sqrt{\frac{b_3}{b_1} - \left(\frac{1}{2} \frac{b_2}{b_1}\right)^2}$$

Anexo IV

A equação do balanço integral de energia, segundo Kessler (1999), pode ser expressa por:

$$\iint_A \hat{e} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \hat{e} \rho dV = \dot{Q} - \dot{W} \quad (\text{IV.1})$$

onde \hat{e} é a energia específica na entrada, saída ou no volume de líquido. A mesma pode ser definida por:

$$\hat{e} = (\hat{u} + \hat{k} + \hat{\phi}) \quad (\text{IV.2})$$

onde \hat{u} , \hat{k} e $\hat{\phi}$ correspondem a energia interna, cinética e potencial específica, respectivamente.

O trabalho \dot{W} diz respeito à soma de todos os trabalhos que atuam no sistema, considera o trabalho de fluxo, o de eixo, o eletroquímico, entre outros, como pode-se verificar na equação seguinte:

$$\dot{W} = \iint_A P \hat{v} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA + \dot{w}_s + \dot{w}_{outros} \quad (\text{IV.3})$$

Com isso a equação de energia pode ser expressa por:

$$\iint_A (\hat{u} + \hat{k} + \hat{\phi}) \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\hat{u} + \hat{k} + \hat{\phi}) \rho dV = \dot{Q} - \iint_A P \hat{v} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA - \dot{w}_s - \dot{w}_{outros} \quad (\text{IV.4})$$

Agrupando o trabalho de fluxo com os demais termos associado à massa:

$$\iint_A (\hat{u} + \hat{k} + \hat{\phi} + P \hat{v}) \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\hat{u} + \hat{k} + \hat{\phi}) \rho dV = \dot{Q} - \dot{w}_s - \dot{w}_{outros} \quad (\text{IV.5})$$

Da termodinâmica, a energia interna e a entalpia podem ser relacionadas, assim como também com as capacidades específicas a pressão e a volume constantes (*Haile, O'Connell, 2005*), como mostram as equações seguintes.

$$\hat{h} = \hat{u} + P \hat{v} \quad (\text{IV.6})$$

$$\hat{h} = \hat{h}_{ref} + \hat{c}_p (T - T_{ref}) \quad (IV.7)$$

$$\hat{u} = \hat{u} + \hat{c}_v (T - T_{ref}) \quad (IV.8)$$

Para sistemas líquidos $c_p = c_v$, (Smith e Van Ness, 2005), dessa forma substituindo as equações de entalpia e energia interna especifica na equação V.5, tem-se:

$$\iint_A (\hat{c}_p (T - T_{ref}) + \hat{k} + \hat{\phi}) \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\hat{c}_v (T - T_{ref}) + \hat{k} + \hat{\phi}) \rho dV = \dot{Q} - \dot{w}_s - \dot{w}_{outros} \quad (IV.9)$$

Desenvolvendo a equação anterior para o sistema da Figura 5.2, obtêm-se:

$$-(\hat{c}_{p1} (T_1 - T_{ref}) + \hat{k}_1 + \hat{\phi}_1) \rho_1 v_1 A_1 + (\hat{c}_{p2} (T_2 - T_{ref}) + \hat{k}_2 + \hat{\phi}_2) \rho_1 v_1 A_1 + \frac{\partial (\hat{c}_v (T - T_{ref}) + \hat{k} + \hat{\phi}) \rho V}{\partial t} = \dot{Q} - \dot{w}_s - \dot{w}_{outros} \quad (IV.10)$$

$$-(\hat{c}_{p1} (T_1 - T_{ref}) + \hat{k}_1 + \hat{\phi}_1) \rho_1 F_1 + (\hat{c}_{p2} (T_2 - T_{ref}) + \hat{k}_2 + \hat{\phi}_2) \rho_2 F_2 + (\hat{c}_v (T - T_{ref}) + \hat{k} + \hat{\phi}) \rho \frac{dV}{dt} + (\hat{c}_v (T - T_{ref}) + \hat{k} + \hat{\phi}) V \frac{d\rho}{dt} + V \rho \frac{d(\hat{c}_v (T - T_{ref}) + \hat{k} + \hat{\phi})}{dt} = \dot{Q} - \dot{w}_s - \dot{w}_{outros} \quad (IV.11)$$

Uma vez considerado apenas um componente e não há mudança de fase, claramente observa-se que $\frac{d\rho}{dt} = 0$. Dessa forma, a equação IV.11 pode ser reescrita como segue:

$$-(\hat{c}_{p1} (T_1 - T_{ref}) + \hat{k}_1 + \hat{\phi}_1) \rho_1 F_1 + (\hat{c}_{p2} (T_2 - T_{ref}) + \hat{k}_2 + \hat{\phi}_2) \rho_2 F_2 + (\hat{c}_v (T - T_{ref}) + \hat{k} + \hat{\phi}) \rho \frac{dAh}{dt} + \rho Ah \frac{d(\hat{c}_v (T - T_{ref}) + \hat{k} + \hat{\phi})}{dt} = \dot{Q} - \dot{w}_s - \dot{w}_{outros} \quad (IV.12)$$

Considerando que o volume de líquido, na sua totalidade não esta em movimento, pode ser assumido que \hat{k} é nulo, com a substituição da variação de nível de líquido, tem-se que:

$$\rho Ah \frac{d(\hat{c}_v(T - T_{ref}) + \hat{k} + \hat{\phi})}{dt} = (\hat{c}_{p1}(T_1 - T_{ref}) + \hat{k}_1 + \hat{\phi}_1)\rho_1 F_1 - \quad (IV.13)$$

$$(\hat{c}_{p2}(T_2 - T_{ref}) + \hat{k}_2 + \hat{\phi}_2)\rho_2 F_2 - (\hat{c}_v(T - T_{ref}) + \hat{k} + \hat{\phi})\rho A \frac{dh}{dt} + \dot{Q} - \dot{w}_s - \dot{w}_{outros}$$

$$\rho Ah \hat{c}_v \frac{d(T - T_{ref})}{dt} = (\hat{k}_1 + \hat{\phi}_1)\rho_1 F_1 - (\hat{k}_2 + \hat{\phi}_2)\rho_2 F_2 + [\hat{c}_{p1}(T_1 - T_{ref}) - \hat{c}_v(T - T_{ref})]\rho_1 F_1 + \quad (IV.14)$$

$$[\hat{c}_{p2}(T_2 - T_{ref}) - \hat{c}_v(T - T_{ref})]\rho_2 F_2 + \dot{Q} - \dot{w}_s - \dot{w}_{outros}$$

Substituindo as capacidades caloríficas à pressão e volume constantes para a fase líquida, assim também como a temperatura, densidade e capacidade calorífica de saída iguais aos respectivos parâmetros internos do tanque, os seguintes termos podem ser anulados:

$$[\hat{c}_{p2}(T_2 - T_{ref}) - \hat{c}_v(T - T_{ref})]\rho_2 F_2 = [\hat{c}_p(T - T_{ref}) - \hat{c}_p(T - T_{ref})]\rho F_2 = 0.$$

Considerando a contribuição de energia cinética e potencial desprezíveis referente à entrada e saída do sistema, tem-se que:

$$\rho Ah \hat{c}_v \frac{d(T - T_{ref})}{dt} = [\hat{c}_p(T_1 - T_{ref}) - \hat{c}_p(T - T_{ref})]\rho_1 F_1 + \dot{Q} - \dot{w}_s - \dot{w}_{outros} \quad (IV.15)$$

Dessa forma a equação dinâmica para a temperatura do tanque de aquecimento, considerando a taxa de calor do vapor d'água e desprezando os demais trabalhos envolvidos, pode ser representada pela equação IV.15, isolando o taxa de variação da temperatura T, obtêm-se:

$$\frac{d(T - T_{ref})}{dt} = \frac{[F_1(T_1 - T)]}{V} + \frac{\dot{Q}}{\rho V \hat{c}_p} \quad (IV.16)$$

Apêndice I

Obtenção do modelo de primeira ordem

Modelo diferencial

No domínio tempo, a equação diferencial que expressa um modelo de 1° ordem pode ser definido por:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t) \quad (1.1)$$

Comparando com o sistema do presente estudo, onde:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{[F_1(T_1 - T)]}{V} + \frac{\dot{Q}}{\rho V \hat{c}_p} \quad (1.2)$$

definindo em termos de variável desvio, a equação anterior pode ser relacionada com a mesma na condição estacionária, onde:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{[F_1(T_1 - T)]}{V} + \frac{\dot{Q}}{\rho V \hat{c}_p} \quad (1.3)$$

$$\frac{dT_e}{dt} = \frac{[F_{1e}(T_1 - T_e)]}{V} + \frac{\dot{Q}_e}{\rho V \hat{c}_p} \quad (1.4)$$

onde o índice e corresponde ao estado estacionário para o parâmetro.

Assim, da definição de variável desvio (Dinâmico – estacionário), tem-se que:

$$\frac{dT}{dt} - \frac{dT_e}{dt} = \frac{[F_1(T_1 - T)]}{V} + \frac{\dot{Q}}{\rho V \hat{c}_p} - \left(\frac{[F_{1e}(T_{1e} - T_e)]}{V_e} + \frac{\dot{Q}_e}{\rho V_e \hat{c}_p} \right), \quad \text{onde}$$

$$T_1 = T_{1e}, \quad F_1 = F_{1e}, \quad V = V_e.$$

a equação pode ser reescrita como:

$$\frac{d(T - T_e)}{dt} = \frac{F_1(T_e - T)}{V} + \frac{(\dot{Q} - \dot{Q}_e)}{\rho V \hat{c}_p},$$

ou ainda

$$\frac{dT'}{dt} = \frac{F_1(-T')}{V} + \frac{\dot{Q}'}{\rho V \hat{c}_p}, \quad \text{onde } T' = (T - T_e) \text{ e } \dot{Q}' = (\dot{Q} - \dot{Q}_e).$$

Reagrupando os termos, $\frac{V}{F_1} \frac{dT'}{dt} = (-T') + \frac{1}{\rho F_1 \hat{c}_p} \dot{Q}'$, podendo então definir que:

$\tau = \frac{V}{F_1}$, $K = \frac{1}{\rho F_1 \hat{c}_p}$, $T'(t) = T'$ e $u'(t) = \dot{Q}'$. Logo, o modelo de primeira ordem diferencial pode ser escrito por:

$$\tau \frac{dT'(t)}{dt} + T'(t) = K u'(t) \quad (1.5)$$

Modelo no domínio de Laplace (frequência)

Da equação diferencial, aplicando a definição da transformada de Laplace:

$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$. Pode-se definir a transformada

$$\mathcal{L}\left[\tau \frac{dT'(t)}{dt} + T'(t)\right] = \mathcal{L}[K u'(t)], \text{ resultando em:}$$

$$\tau s [T'(s) - T'(0)] + T'(s) = K U'(s) \quad (1.6)$$

$$T'(s) = \frac{T'(0)}{(s+1/\tau)} + \frac{K}{(s+1/\tau)} U'(s)$$

Considerando que o valor inicial o desvio $T'(t=0) = 0$, tem-se então que:

$$T'(s) = \frac{K}{(s+1/\tau)} U'(s) \quad (1.7)$$

onde a função de transferência para o modelo de primeira ordem pode ser definida por:

$$G(s) = \frac{T'(s)}{U'(s)} = \frac{K}{(s+1/\tau)} \quad (1.8)$$

Aplicação da transformada inversa de Laplace no modelo

Da definição da transformada inversa de Laplace: $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \int_0^{\infty} F(s)e^{-st} ds$, aplicando no modelo de primeira ordem no domínio de Laplace, para um degrau unitário $U'(s) = u(t)/s$:

$$\mathcal{L}^{-1}[T'(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{(s+1/\tau)} \frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K u'(t)}{s} + \frac{-(K\tau/\tau) u'(t)}{(s+1/\tau)}\right]$$

$$T'(t) = K(1 - e^{-(1/\tau)t}) u'(t) \quad (1.9)$$

Modelo de 1ª ordem a partir do Modelo ARMAX de ordem n

O modelo ARMAX de ordem n pode ser definido por:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \dots + a_n y(t-n) = b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + \dots + b_n u(t-n) + c_1 \varepsilon(t-1) + c_2 \varepsilon(t-2) + \dots + c_n \varepsilon(t-n) + v(t) \quad (1.10)$$

Em termos de variável desvio, podemos escrever de forma semelhante:

$$y'(t) + a_1 y'(t-1) + a_2 y'(t-2) + \dots + a_n y'(t-n) = -b_1 u'(t-1) - b_2 u'(t-2) - \dots - b_n u'(t-n) - c_1 \varepsilon'(t-1) - c_2 \varepsilon'(t-2) - \dots - c_n \varepsilon'(t-n) - v'(t)$$

Considerando apenas o modelo de primeira ordem do Modelo ARMAX, obtêm-se:

$$y'(t) - a_1 y'(t-1) = -b_1 u'(t-1) \quad (1.11)$$

para a mesma, discreta no tempo, onde $t = nT$, $n = 0, 1, 2, \dots$, resulta em:

$$y'[nT] - a_1 y'[(n-1)T] = -b_1 u'[(n-1)T] \quad (1.12)$$

Aplicando a transformada Z, tem-se que:

$$\mathcal{Z}\{y'[nT] - a_1 y'[(n-1)T]\} = \mathcal{Z}\{-b_1 u'[(n-1)T]\}$$

$$Y'(z) - a_1 y'(nT|_{n=-1}) - a_1 z^{-1} Y'(z) = -b_1 z^{-1} U'(z),$$

$$Y'(z) = \frac{a_1}{1 - a_1 z^{-1}} y'(nT|_{n=-1}) - \frac{b_1}{1 - a_1 z^{-1}} z^{-1} U'(z) \quad (1.13)$$

Para $y'(nT|_{n=-1}) = 0$, tem-se que:

$$Y'(z) = \frac{-b_1}{1 - a_1 z^{-1}} z^{-1} U'(z) \quad (1.14)$$

A obtenção da resposta da equação $Y'(z) = \frac{-b_1}{1 - a_1 z^{-1}} z^{-1} U'(z)$ no domínio tempo pode ser obtido aplicando a transformada-z inversa na equação 1.14, considerando o degrau, $U'(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} u'(t)$, sendo $u'(t) = \text{constante}$, tem-se:

$$Y'(z) = \left(-\frac{b_1}{1 - a_1 z^{-1}} z^{-1} \right) \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} u'(t) \right) \quad (1.15)$$

Expandindo em frações parciais:

$$Y(z) = \frac{-b_1 z^{-1}}{(1-a_1 z^{-1})(1-z^{-1})} u'(t) = \frac{A}{(1-a_1 z^{-1})} u'(t) + \frac{B}{(1-z^{-1})} u'(t)$$

Onde:

$$A = \frac{b_1}{(1-a_1)} u'(t)$$

$$B = -\frac{b_1}{(1-a_1)} u'(t)$$

Portando:

$$Y(z) = \frac{b_1}{(1-a_1)} \left(\frac{1}{(1-a_1 z^{-1})} - \frac{1}{(1-z^{-1})} \right) u'(t) \quad (1.16)$$

Aplicando a inversa da transformada z,

$$Z^{-1}[Y'(z)] = Z^{-1} \left[\frac{b_1}{(1-a_1)} \left(\frac{1}{(1-a_1 z^{-1})} - \frac{1}{(1-z^{-1})} \right) u'(t) \right]$$

$$y'(nT) = \frac{b_1}{(1-a_1)} (a_1^{nT} - 1) u'(t)$$

ou ainda, sendo $t = nT$, $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$y'(t) = \frac{b_1}{(a_1 - 1)} (1 - a_1^t) u'(t) \quad (1.17)$$

Comparando as equações 1.9 e 1.17, sendo $T'(t) = y'(t)$, pode ser verificado que: $a_1 = e^{-\frac{1}{\tau}}$, onde $\tau = -1/\ln(a_1)$ e $K = \frac{b_1}{(e^{-1/\tau} - 1)}$. Tais parâmetros são válidos

para $a_1 > 0$ e $b_1 < 0$.